

Вариант 1.

Задача С1.1. Вычислите предел при x стремящемся к ∞ функции

$$\frac{1000x}{x^2 + 1}$$

Ответ: 0

Задача С1.2. Вычислите предел при x стремящемся к 2 функции

$$\frac{1}{x} \sin(x)$$

Ответ: $\frac{1}{2} \sin(2)$

Задача С1.3. Найдите интеграл

$$\int x^2, dx$$

Ответ: $\frac{x^3}{3}$

Задача С1.4. Найдите интеграл

$$\int_1^2 x^2 dx$$

. Ответ: $\frac{7}{3}$

Задача С1.5. Найдите действительные корни уравнения

$$\sqrt{x+4} = \sqrt{2x-1}$$

Ответ: [5]

Задача С1.6. Найдите действительные корни уравнения

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

Ответ: 1

Задача С1.7. Найдите матрицу X из уравнения

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ответ:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Задача C1.8. Решите уравнение

$$x \frac{d}{dx} y(x) - 2y(x) = 2x^4$$

Ответ:

$$y(x) = x^2 (C_1 + x^2)$$

Вариант 2.

Задача C2.1. Вычислите предел при x стремящемся к 0 функции

$$\frac{1}{x} \sin(x)$$

Ответ: 1

Задача C2.2. Вычислите предел при x стремящемся к ∞ функции

$$\frac{\sqrt{x + \sqrt{\sqrt{x} + x}}}{\sqrt{x + 1}}$$

Ответ: 1

Задача C2.3. Найдите интеграл

$$\int \frac{1}{-\cos(x) + 1} dx$$

Ответ: $-\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$

Задача C2.4. Найдите интеграл

$$\int_0^\pi e^x \cos(x) dx$$

. Ответ: $-\frac{e^\pi}{2} - 0.5$

Задача C2.5. Найдите действительные корни уравнения

$$\sqrt[3]{2x + 3} = 1$$

Ответ: $[-1]$

Задача C2.6. Найдите действительные корни уравнения

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$$

Ответ: -2

Задача С2.7. Найдите матрицу X из уравнения

$$X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ответ:

$$X = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Задача С2.8. Решите уравнение

$$x^2 + xy(x) + x \frac{d}{dx} y(x) - y(x) = 0$$

Ответ:

$$y(x) = x (C_1 e^{-x} - 1)$$

Вариант 3.

Задача С3.1. Вычислите предел при n стремящемся к ∞ функции

$$-\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$$

Ответ: 0

Задача С3.2. Вычислите предел при x стремящемся к 0 функции

$$\frac{1}{x} \sin(3x)$$

Ответ: 3

Задача С3.3. Найдите интеграл

$$\int \frac{x}{\sqrt{-x^2+1}}, dx$$

Ответ: $-\sqrt{-x^2+1}$

Задача С3.4. Найдите интеграл

$$\int_0^e x^2 \log^2(x) dx$$

. Ответ: $-\frac{2}{27} + \frac{5e^3}{27}$

Задача С3.5. Найдите действительные корни уравнения

$$\sqrt[3]{-x+1} = 2$$

Ответ: $[-7]$

Задача С3.6. Найдите действительные корни уравнения

$$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$$

Ответ: 3

Задача С3.7. Найдите матрицу X из уравнения

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 10 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Ответ:

$$X = \begin{bmatrix} -7 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Задача С3.8. Решите уравнение

$$2x \frac{d}{dx} y(x) + y^2(x) = 1$$

Ответ:

$$y(x) = \frac{C_1 + x}{-C_1 + x}$$

Вариант 4.

Задача С4.1. Вычислите предел при x стремящемся к ∞ функции

$$\frac{1}{2^x + 3^x} (2^{x+1} + 3^{x+1})$$

Ответ: 3

Задача С4.2. Вычислите предел при x стремящемся к 0 функции

$$\frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$$

Ответ: $\frac{5}{2}$

Задача С4.3. Найдите интеграл

$$\int \frac{1}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}} dx$$

Ответ: $-\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}}$

Задача С4.4. Найдите интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 + x + 1} dx$$

. Ответ: $-\frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \frac{1}{2} \log(3)$

Задача С4.5. Найдите действительные корни уравнения

$$\sqrt[3]{3x^2 - 3} = 2\sqrt[3]{x}$$

Ответ: $[-\frac{1}{3}, 3]$

Задача С4.6. Найдите действительные корни уравнения

$$x^3 + 4x^2 + x + 4 = 0$$

Ответ: -4

Задача С4.7. Найдите матрицу X из уравнения

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ответ:

$$X = \begin{bmatrix} 21 & -14 & -10 \\ -10 & 7 & 5 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Задача С4.8. Решите уравнение

$$x^2 \frac{d}{dx} y(x) + xy(x) = -1$$

Ответ:

$$y(x) = \frac{1}{x} (C_1 - \log(x))$$

Вариант 5.

Задача С5.1. Вычислите предел при n стремящемся к ∞ функции

$$2^{-n}n$$

Ответ: 0

Задача С5.2. Вычислите предел при x стремящемся к 0 функции

$$\frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$

Задача С5.3. Найдите интеграл

$$\int \frac{1}{-3x^2 + 2} dx$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{6}}{12} \log\left(x - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) + \frac{\sqrt{6}}{12} \log\left(x + \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

Задача С5.4. Найдите интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

. Ответ: π

Задача С5.5. Найдите действительные корни уравнения

$$x + 1 = \sqrt{-x + 1}$$

Ответ: $[0]$

Задача С5.6. Найдите действительные корни уравнения

$$x^3 - 5x^2 + x - 5 = 0$$

Ответ: 5

Задача С5.7. Найдите матрицу X из уравнения

$$X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Ответ:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Задача С5.8. Решите уравнение

$$y(x) - \frac{d}{dx}y(x) = x \frac{d}{dx}y(x) + y^2(x)$$

Ответ:

$$y(x) = \frac{C_1(x+1)}{C_1x + C_1 - 1}$$

Вариант 6.

Задача С6.1. Вычислите предел при n стремящемся к ∞ функции

$$\frac{2^n}{n!}$$

Ответ: 0

Задача С6.2. Вычислите предел при x стремящемся к ∞ функции

$$x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

Ответ: π

Задача С6.3. Найдите интеграл

$$\int \frac{1}{\sqrt{-3x^2 + 2}}, dx$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3} \arcsin\left(\frac{\sqrt{6}x}{2}\right)$

Задача С6.4. Найдите интеграл

$$\int_0^\pi x \sin(x) dx$$

. Ответ: π

Задача С6.5. Найдите действительные корни уравнения

$$x = \sqrt{x+11} + 1$$

Ответ: [5]

Задача С6.6. Найдите действительные корни уравнения

$$x^3 + 6x^2 + x + 6 = 0$$

Ответ: -6

Задача С6.7. Найдите матрицу X из уравнения

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ответ:

$$X = \begin{bmatrix} 21 & -14 & -10 \\ -10 & 7 & 5 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Задача С6.8. Решите уравнение

$$y(x) = x \left(-x \cos(x) + \frac{d}{dx} y(x) \right)$$

Ответ:

$$y(x) = x (C_1 + \sin(x))$$

Вариант 7.

Задача С7.1. Вычислите предел при x стремящемся к ∞ функции

$$\frac{1}{x^3} (x+1)(x+2)(x+3)$$

Ответ: 1

Задача С7.2. Вычислите предел при x стремящемся к 0 функции

$$\frac{1}{x^2} (-\cos(x) + 1)$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

Задача С7.3. Найдите интеграл

$$\int \frac{1}{\cos(x) + 1} dx$$

Ответ: $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Задача С7.4. Найдите интеграл

$$\int_0^{\log(2)} x e^{-x} dx$$

. Ответ: $-\frac{1}{2} \log(2) + \frac{1}{2}$

Задача С7.5. Найдите действительные корни уравнения

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{-x+5}$$

Ответ: [1]

Задача С7.6. Найдите действительные корни уравнения

$$x^3 - 7x^2 + x - 7 = 0$$

Ответ: 7

Задача С7.7. Найдите матрицу X из уравнения

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Ответ:

$$X = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Задача С7.8. Решите уравнение

$$\left(x \frac{d}{dx} y(x) - 1 \right) \log(x) = 2y(x)$$

Ответ:

$$y(x) = (C_1 \log(x) - 1) \log(x)$$

Вариант 8.

Задача С8.1. Вычислите предел при x стремящемся к ∞ функции

$$\frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 5}$$

Ответ: 0

Задача С8.2. Вычислите предел при x стремящемся к ∞ функции

$$x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ответ: 1

Задача С8.3. Найдите интеграл

$$\int \frac{1}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} dx$$

Ответ: $\frac{1}{4} \tan\left(x + \frac{\pi}{8}\right) - \frac{1}{4 \tan\left(x + \frac{\pi}{8}\right)}$

Задача С8.4. Найдите интеграл

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos(x) dx$$

. Ответ: 4π

Задача С8.5. Найдите действительные корни уравнения

$$\sqrt{x^2 - x - 3} = 3$$

Ответ: $[-3, 4]$

Задача С8.6. Найдите действительные корни уравнения

$$x^3 + 8x^2 + x + 8 = 0$$

Ответ: -8

Задача С8.7. Найдите матрицу X из уравнения

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ответ:

$$X = \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Задача С8.8. Решите уравнение

$$x \frac{d}{dx} y(x) + (x + 1) y(x) = 3x^2 e^{-x}$$

Ответ:

$$y(x) = \frac{e^{-x}}{x} (C_1 + x^3)$$

Вариант 9.

Задача С9.1. Вычислите предел при x стремящемся к ∞ функции

$$\frac{1}{2^x + 3^x} (2^{x+1} + 3^{x+1})$$

Ответ: 3

Задача С9.2. Вычислите предел при x стремящемся к ∞ функции

$$-\sqrt{x} + \sqrt{x+1}$$

Ответ: 0

Задача С9.3. Найдите интеграл

$$\int e^{-x} + e^{-2x}, dx$$

Ответ: $-e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$

Задача С9.4. Найдите интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx$$

. Ответ: $\frac{4\pi}{9}\sqrt{3}$

Задача С9.5. Найдите действительные корни уравнения

$$\sqrt{x} - x = -12$$

Ответ: [16]

Задача С9.6. Найдите действительные корни уравнения

$$x^3 - 9x^2 + x - 9 = 0$$

Ответ: 9

Задача С9.7. Найдите матрицу X из уравнения

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Ответ:

$$X = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Задача С9.8. Решите уравнение

$$x^2 \frac{d}{dx} y(x) - 2xy(x) = 3y(x)$$

Ответ:

$$y(x) = C_1 x^2 e^{-\frac{3}{x}}$$

Вариант 10.

Задача С10.1. Вычислите предел при x стремящемся к ∞ функции

$$\frac{1}{x^3} (x+1)(x+2)(x+3)$$

Ответ: 1

Задача С10.2. Вычислите предел при x стремящемся к ∞ функции

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$$

Ответ: 1

Задача С10.3. Найдите интеграл

$$\int \frac{\sqrt[5]{x^2-2x+1}}{-x+1} dx$$

Ответ: $-\frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2-2x+1}$

Задача С10.4. Найдите интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\cos(x)+2)(\cos(x)+3)} dx$$

. Ответ: 0

Задача С10.5. Найдите действительные корни уравнения

$$\sqrt{x} + x = 2x - 2$$

Ответ: [4]

Задача С10.6. Найдите действительные корни уравнения

$$x^3 + 10x^2 + x + 10 = 0$$

Ответ: -10

Задача С10.7. Найдите матрицу X из уравнения

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ответ:

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Задача C10.8. Решите уравнение

$$\sin(2x) \frac{d}{dx} y(x) = 2y(x) + 2 \cos(x)$$

Ответ:

$$y(x) = C_1 \tan(x) - \frac{2 \sin(x)}{\sin(2x)}$$

Вариант 11.

Задача C11.1. Вычислите предел при x стремящемся к ∞ функции

$$\frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1}$$

Ответ: 8

Задача C11.2. Вычислите предел при x стремящемся к ∞ функции

$$\frac{1}{\sqrt{x^4+1}} (2x^2-3x-4)$$

Ответ: 2

Задача C11.3. Найдите интеграл

$$\int x^2 \sqrt[3]{x^3+1} dx$$

Ответ: $\frac{x^3}{4} \sqrt[3]{x^3+1} + \frac{1}{4} \sqrt[3]{x^3+1}$

Задача C11.4. Найдите интеграл

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1} dx$$

. Ответ: $\frac{2\pi}{9} \sqrt{3}$

Задача C11.5. Найдите действительные корни уравнения

$$\sqrt{x-1} = x-3$$

Ответ: [5]

Задача C11.6. Найдите действительные корни уравнения

$$x^3 - 11x^2 + x - 11 = 0$$

Ответ: 11

Задача C11.7. Найдите матрицу X из уравнения

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ответ:

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$$

Задача C11.8. Решите уравнение

$$2y(x) + \frac{d}{dx}y(x) = y^2(x)e^x$$

Ответ:

$$y(x) = \frac{e^{-2x}}{C_1 + e^{-x}}$$

Вариант 12.

Задача C12.1. Вычислите предел при x стремящемся к ∞ функции

$$\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

Ответ: 1

Задача C12.2. Вычислите предел при x стремящемся к ∞ функции

$$\frac{2x+3}{\sqrt[3]{x}+x}$$

Ответ: 2

Задача C12.3. Найдите интеграл

$$\int \frac{x}{x^4+4} dx$$

Ответ: $\frac{1}{4} \operatorname{atan}\left(\frac{x^2}{2}\right)$

Задача C12.4. Найдите интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$$

. Ответ: $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

Задача C12.5. Найдите действительные корни уравнения

$$\sqrt{-x^2 + x + 6} = -x + 1$$

Ответ: $[-1]$

Задача C12.6. Найдите действительные корни уравнения

$$x^3 + 12x^2 + x + 12 = 0$$

Ответ: -12

Задача C12.7. Найдите матрицу X из уравнения

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ответ:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Задача C12.8. Решите уравнение

$$y(x) - 2 \frac{d}{dx} y(x) + \frac{d^2}{dx^2} y(x) = \sin(x)$$

Ответ:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^x + \frac{1}{2} \cos(x)$$

Вариант 13.

Задача C13.1. Решите уравнение $y' = 0.1 - 0.1 \frac{y}{20}$ при следующих условиях: $y(0) = 0.8 \cdot 20$. Найдите T , такое что $y(T) = 0.99 \cdot 20$.

Ответ: $y(t) = -4.0 \exp(-0.005t) + 20.0$, $T = 599.146454710798$

Задача C13.2. Решите уравнение $y' = -0.05 * y$ при $y(0) = 10$. Найдите $y(60)$.

Ответ: $y(t) = 10 \exp(-0.05t)$, 0.497870683678639

Задача C13.3. Решите уравнение $y' = 20 \cdot 0.04 - \frac{y}{10}$ при $y(0) = 0.15 \cdot 200$. Найдите при каком T будет $y(T) = 0.05 \cdot 200$

Ответ: $y(t) = 22.0 \exp(-0.1t) + 8.0$, $T = 23.9789527279837$

Задача C13.4.

Решите уравнение $y'(t) = a \cdot (y(t) - 20)$ при $y(0) = 100$ и $y(10) = 60$. Найдите при каком T $y(T) = 25$?

Ответ: $y(t) = 20 + 80 \exp(-t \frac{\log(2)}{10})$, $T = 40$