

УДК 512.64

ББК 22.143

Б90

Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишkin А.А. **Линейная алгебра в вопросах и задачах**: Учеб. пособие/ Под ред. В.Ф. Бутузова. — 2-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 248 с. — ISBN 5-9221-0285-0.

Пособие охватывает все разделы курса линейной алгебры. По каждой теме кратко излагаются основные теоретические сведения и предлагаются контрольные вопросы; приводятся решения стандартных и нестандартных задач; даются задачи и упражнения для самостоятельной работы с ответами и указаниями.

Первое издание — 2001 г.

Для студентов высших учебных заведений.

Рецензент: кафедра высшей математики Московского энергетического института.

ISBN 5-9221-0285-0

© ФИЗМАТЛИТ, 2001, 2002

© В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая,  
А.А. Шишкин, 2001, 2002

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

Данное учебное пособие является результатом существенной переработки одноименного пособия, вышедшего в 1985 г. (Крутицкая Н.Ч., Шишkin A.A. “Линейная алгебра в вопросах и задачах.” — M.: Высшая школа). Оно отражает многолетний опыт авторов по чтению лекций и ведению семинарских занятий по линейной алгебре на физическом факультете Московского государственного университета.

Линейной алгебре посвящена обширная литература, имеются прекрасно написанные учебники и задачники. Вместе с тем ощущается недостаток пособий, помогающих студентам выработать навыки решения задач по различным разделам линейной алгебры. Авторы данной книги ставили перед собой цель в какой-то мере ликвидировать этот пробел. Назначение пособия мы видим в том, чтобы активизировать самостоятельную работу студентов при изучении линейной алгебры, помочь активному и неформальному усвоению этого предмета.

Пособие охватывает основные разделы линейной алгебры. По отношению к предыдущему изданию в нем наряду с существенной переработкой всех глав исключена глава “Численные методы решения систем линейных уравнений”, но добавлены две новые главы: “Тензоры” и “Группы”, что особенно важно для подготовки специалистов в области физики.

Структура пособия подчинена решению поставленных выше учебно-методических задач. Материал каждого параграфа разбит, как правило, на четыре пункта.

В пункте “Основные понятия и теоремы” приводятся без доказательства основные теоретические сведения (определения, теоремы, формулы), необходимые для решения задач. Эти сведения иногда сопровождаются поясняющими примерами или комментариями, направленными на то, чтобы облегчить студентам восприятие новых понятий.

В пункте “Контрольные вопросы и задания” содержатся вопросы по теории и простые задачи, решение которых не связано с большими вычислениями, но которые хорошо иллюстрируют то или иное теоретическое положение. Назначение пункта — помочь студенту в самостоятельной работе над теоретическим материалом, дать ему воз-

можность самому проконтролировать усвоение основных понятий. Предполагается, конечно, что основная работа над теоретическим материалом с проработкой доказательств теорем ведется по учебнику или конспектам лекций. Однако для решения задач часто достаточно понять смысл теоремы (или формулы). Многие контрольные вопросы направлены на раскрытие этого смысла. Из данного пункта преподаватель может черпать вопросы для проверки готовности студентов к семинару по той или иной теме.

В пункте “Примеры решения задач” представлены решения типичных задач по изучаемой теме. При этом уделяется внимание не только “техническим приемам”, но в ряде случаев и поиску наиболее простого пути решения задачи, в частности с помощью геометрической интерпретации алгебраических понятий. Количество разобранных примеров варьируется в зависимости от объема и важности темы. В конце книги даны ответы и указания к задачам и упражнениям. Начало и конец решений задач отмечены соответственно знаками  $\Delta$  и  $\blacktriangle$ . Вместо слова “Указание” используется знак  $\star$ .

Назначение пункта “Задачи и упражнения для самостоятельной работы” отражено в его названии. Мы ограничились определенным минимумом упражнений, достаточным, на наш взгляд, для усвоения основных приемов решения задач по каждой теме. При подборе задач и упражнений использовались различные источники, в том числе известные задачники по линейной алгебре: Проскуряков И.В. “Сборник задач по линейной алгебре” (М.: Наука, 1978), Икрамов Х.Д. “Задачник по линейной алгебре” (М.: Наука, 1975), Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. “Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре” (М.: Наука, 1987).

Мы надеемся, что пособие будет полезным как для студентов, так и для преподавателей, ведущих занятия по курсу линейной алгебры.

*Авторы*

# ГЛАВА I

## МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

### § 1. Матрицы

#### Основные понятия

**1. Понятие матрицы.** Прямоугольная таблица чисел (вещественных или комплексных)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *числовой матрицей* (или просто *матрицей*). Числа  $a_{ij}$  называются *элементами матрицы*; первый индекс  $i$  обозначает номер строки, а второй индекс  $j$  — номер столбца, на пересечении которых стоит элемент  $a_{ij}$ . Например, элемент  $a_{12}$  стоит на пересечении первой строки и второго столбца.

Матрица  $A$  имеет  $m$  строк и  $n$  столбцов. Поэтому ее называют  $m \times n$ -матрицей или матрицей с размерами  $m \times n$ .

Для  $m \times n$ -матрицы  $A$  можно использовать краткое обозначение  $(a_{ij})_{m \times n}$ , а если размеры матрицы заранее оговорены, то, не указывая их, будем писать  $(a_{ij})$ .

Если  $m = n$  (число строк матрицы равно числу столбцов), то матрица называется *квадратной* матрицей  $n$ -го порядка.

Две  $m \times n$ -матрицы  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  называются *равными* ( $A = B$ ), если их элементы соответственно равны:  $a_{ij} = b_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ .

**2. Линейные операции над матрицами.** Суммой (разностью)  $m \times n$ -матриц  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  называется  $m \times n$ -матрица  $C = (c_{ij})$ , элементы которой равны суммам (разностям) соответствующих элементов матриц  $A$  и  $B$ :  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  ( $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ ).

Обозначение:  $C = A + B$  ( $C = A - B$ ).

Подчеркнем, что сложение и вычитание вводятся для матриц только с одинаковыми размерами.

Произведением  $m \times n$ -матрицы  $A = (a_{ij})$  на число  $x$  называется  $m \times n$ -матрица  $B = (b_{ij})$ , элементы которой равны произведениям соответствующих элементов матрицы  $A$  на число  $x$ :  $b_{ij} = xa_{ij}$ .

Обозначение:  $B = xA$ .

Введенные действия (сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число) называются *линейными операциями* над матрицами. Они обладают следующими свойствами. Для любых  $m \times n$ -матриц  $A, B, C$  и любых чисел  $x$  и  $y$  справедливы равенства 1°–5°.

$$1^\circ. A + B = B + A \text{ (коммутативность сложения).}$$

$$2^\circ. (A + B) + C = A + (B + C) \text{ (ассоциативность сложения).}$$

$$3^\circ. x(A + B) = xA + xB \text{ (распределительное свойство относительно числового сомножителя).}$$

$$4^\circ. (x + y)A = xA + yA \text{ (распределительное свойство относительно матричного сомножителя).}$$

$$5^\circ. x(yA) = (xy)A.$$

**3. Транспонированная матрица.** Расположим строки  $m \times n$ -матрицы  $A = (a_{ij})$  в виде столбцов, не меняя их порядка (т. е. первая строка станет первым столбцом и т. д.). Получится  $n \times m$ -матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которая называется *транспонированной* по отношению к матрице  $A$  и обозначается  $A^T$ .

Обозначим элементы матрицы  $A^T$  через  $a_{ij}^T$  ( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$ ). Согласно определению транспонированной матрицы справедливы равенства

$$a_{ij}^T = a_{ji}, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Операция транспонирования (т. е. переход от матрицы  $A$  к матрице  $A^T$ ) обладает следующими свойствами. Для любых  $m \times n$ -матриц  $A$  и  $B$  и любого числа  $x$  справедливы равенства 1°, 2°.

$$1^\circ. (A + B)^T = A^T + B^T.$$

$$2^\circ. (xA)^T = xA^T.$$

**4. Умножение матриц.** Произведением матрицы  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  на матрицу  $B = (b_{ij})_{n \times k}$  называется матрица  $C = (c_{ij})_{m \times k}$ , элементы которой определяются формулой

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{l=1}^n a_{il}b_{lj},$$

$$i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, k.$$

Обозначение:  $C = AB$ .

Подчеркнем, что произведение  $AB$  определено только для таких матриц, у которых число столбцов матрицы  $A$  (первого сомножителя) равно числу строк матрицы  $B$  (второго сомножителя). При этом

число строк матрицы  $C = AB$  равно числу строк матрицы  $A$ , а число столбцов матрицы  $C$  равно числу столбцов матрицы  $B$ .

Умножение матриц обладает следующими свойствами. Для любых матриц  $A, B, C$  и любого числа  $x$  справедливы равенства 1°–4° (предполагается, что размеры матриц  $A, B, C$  таковы, что левые части равенств определены, тогда будут определены и правые части равенств).

- 1°.  $A(BC) = (AB)C$  (ассоциативность умножения).
- 2°.  $A(B + C) = AB + AC$  (распределительное свойство).
- 3°.  $(xA)B = A(xB) = x(AB)$ .
- 4°.  $(AB)^T = B^T A^T$ .

Отметим, что умножение матриц не обладает свойством коммутативности. Более того, если  $A — m \times n$ -матрица, а  $B — n \times k$ -матрица, то произведение  $AB$  определено, а произведение  $BA$  при  $k \neq m$  не определено. Если же  $k = m$ , то произведение  $BA$  также определено, но при  $m \neq n$   $AB$  и  $BA$  — квадратные матрицы разных порядков (соответственно порядка  $m$  и  $n$ ), так что вопрос об их равенстве некорректен. Если же  $m = n = k$ , то обе матрицы  $AB$  и  $BA$  — квадратные матрицы  $n$ -го порядка, но и в этом случае, вообще говоря,  $AB \neq BA$ .

**5. Обратная матрица.** Введем так называемый *символ Кронекера*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

где  $i$  и  $j$  — произвольные натуральные числа.

Матрица

$$E = (\delta_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется *единичной* матрицей  $n$ -го порядка. Для нее используются также следующие обозначения:  $E_n, I, I_n$ .

Квадратная матрица  $B$  называется *обратной* по отношению к матрице  $A$  с такими же размерами, если

$$AB = BA = E.$$

Обратная матрица обозначается символом  $A^{-1}$ .

### Контрольные вопросы и задания

1. Что такое числовая матрица? Могут ли все элементы матрицы равняться нулю?
2. Какие матрицы называются равными? Равны ли матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

3. Как сложить две матрицы? Можно ли сложить две матрицы с размерами  $2 \times 3$  и  $3 \times 2$ ?
4. Как вычесть из одной матрицы другую? Можно ли из матрицы  $A$  вычесть эту же матрицу  $A$ ? Что получится?
5. Докажите, что: а)  $A + B = B + A$ ; б)  $A - B = A + (-1)B$ .
6. Какая матрица называется транспонированной по отношению к матрице  $A$ ? Для любой ли матрицы  $A$  существует транспонированная?
7. Может ли выполняться равенство  $A^T = A$ ? Ответ обоснуйте.
8. Для каких матриц  $A$  и  $B$  определено произведение  $AB$ ? Как вычисляются элементы матрицы  $AB$ ?
9. Известно, что  $(1 \ 2 \ 3) \cdot A = (0 \ 1)$ . Каковы размеры матрицы  $A$ ?
10. Можно ли умножить строку с  $n$  элементами ( $1 \times n$ -матрицу) на столбец с  $n$  элементами? Что получится?
11. Всегда ли выполняется равенство:  
а)  $A(BC) = (AB)C$ ; б)  $AB = BA$ ; в)  $(A + B)C = AC + BC$ ?
12. Что такое единичная матрица? Является ли единичной матрица:  
а)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; в)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ?
13. Дайте определение обратной матрицы.

### Примеры решения задач

1. Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Найти: а)  $A + B$ ; б)  $2B$ ; в)  $B^T$ ; г)  $AB^T$ ; д)  $B^T A$ .

△ а) По определению суммы матриц

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+1 & 2-1 \\ -2+3 & 1+1 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

б) По определению произведения матрицы на число

$$2B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

в) По определению транспонированной матрицы

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

г) По определению произведения матриц

$$\begin{aligned} AB^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) & (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

д) Аналогично пункту г) находим

$$B^T A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 9 \\ -1 & 1 & 5 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

**2.** Данна система  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Здесь:

$a_{ij}$ ,  $b_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ ) — известные числа;  
 $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — неизвестные.

Записать эту систему в матричном виде.

△ Введем  $m \times n$ -матрицу  $A$  с элементами  $a_{ij}$  и столбцы  $B$  с элементами  $b_1, \dots, b_m$  и  $X$  с элементами  $x_1, \dots, x_n$ . Тогда данную систему можно записать в виде  $AX = B$ .  $\blacksquare$

**3.** Доказать равенство  $(AB)^T = B^T A^T$ .

△ Пусть  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{n \times k}$ . Согласно определению произведения матриц элементы  $c_{ij}$  матрицы  $C = AB$  вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il}b_{lj}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Элементы матриц  $A^T$ ,  $B^T$ ,  $C^T$  и  $D = B^T A^T$  обозначим соответственно через  $a_{ij}^T$ ,  $b_{ij}^T$ ,  $c_{ij}^T$  и  $d_{ij}$ . Тогда в соответствии с равенством (1) имеем

$$a_{ij}^T = a_{ji}, \quad b_{ij}^T = b_{ji}, \quad c_{ij}^T = c_{ji}, \quad (3)$$

а элементы  $d_{ij}$  матрицы  $D = B^T A^T$  вычисляются по формуле

$$d_{ij} = \sum_{l=1}^n b_{il}^T a_{lj}^T, \quad i = 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, m.$$

Отсюда, учитывая равенства (3) и (2), получаем

$$d_{ij} = \sum_{l=1}^n b_{il} a_{jl} = \sum_{l=1}^n a_{jl} b_{li} = c_{ji} = c_{ij}^T, \quad i = 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, m.$$

Таким образом, элементы матриц  $D$  и  $C^T$  соответственно равны, поэтому  $C^T = D$ , т. е.  $(AB)^T = B^T A^T$ , что и требовалось доказать.  $\blacksquare$

**4.** Для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  найти обратную.

△ Положим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

По определению обратной матрицы  $A^{-1}A = E$ , т. е.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы в левой части равенства и приравнивая элементы полученной матрицы соответствующим элементам матрицы в правой части равенства, приходим к системе уравнений

$$a + 2b = 1, \quad a + 3b = 0, \quad c + 2d = 0, \quad c + 3d = 1,$$

откуда находим  $a = 3$ ,  $b = -1$ ,  $c = -2$ ,  $d = 1$ . Итак, матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условию  $A^{-1}A = E$ .

Нетрудно проверить, что равенство  $AA^{-1} = E$  также выполняется. Таким образом, найденная матрица  $A^{-1}$  обратная по отношению к матрице  $A$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

**1.** Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ .

Найдите: а)  $3A + 2B$ ; б)  $A - 4B$ ; в) числа  $x$  и  $y$  такие, что все элементы матрицы  $xA + yB$  равны нулю.

**2.** Докажите свойства 1°–5° линейных операций над матрицами.

**3.** Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Найдите: а)  $A^T$ ; б)  $2A^T + B^T$ ; в)  $3A^T - 2B^T$ .

**4.** Докажите справедливость равенств:

а)  $(xA)^T = xA^T$  ( $x$  — число); б)  $(A + B)^T = A^T + B^T$ ;

в)  $(A^T)^T = A$ .

5. Найдите  $AB$ ,  $BA$ ,  $A^T B^T$  и  $B^T A^T$ , если:

а)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;

б)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;

в)  $A = (\delta_{ij} a_{ij})_{n \times n}$ ,  $B = (\delta_{ij} b_{ij})_{n \times n}$ ,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;

г)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ;

д)  $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

6. Докажите свойства 1°–3° умножения матриц.

7. Докажите, что для любой  $m \times n$ -матрицы  $A$  справедливо равенство:

а)  $AE_n = A$ , где  $E_n$  — единичная матрица  $n$ -го порядка;

б)  $E_m A = A$ , где  $E_m$  — единичная матрица  $m$ -го порядка.

8. Найдите матрицу  $X$  из уравнения:

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;

б)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;

в)  $X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;

г)  $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ ;

д)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ;

е)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

9. Найдите обратную матрицу для матрицы:

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ ;

в)  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  при условии  $ad - bc \neq 0$ ;

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

е)  $(a_{ij}\delta_{ij})_{n \times n}$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $a_{ii} \neq 0$  при  $i = 1, \dots, n$ .

**10.** Данна матрица  $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ . Докажите, что:

$$\text{а) } A(\alpha)A(\beta) = A(\alpha + \beta); \quad \text{б) } A^{-1}(\alpha) = A(-\alpha); \quad \text{в) } A^{-1}(\alpha) = A^T(\alpha).$$

**11.** Данна матрица  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Докажите, что  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  при  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ , где  $A^{-n} = (A^{-1})^n$ .

## § 2. Определители

### Основные понятия и теоремы

**1. Определитель  $n$ -го порядка.** Квадратная матрица  $n$ -го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

содержит  $n^2$  элементов. Выберем какие-нибудь  $n$  элементов так, чтобы среди них было ровно по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца, и составим их произведение, расположив сомножители в порядке возрастания номера столбца:

$$a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n} \tag{1}$$

Здесь  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — не равные друг другу натуральные числа (номера строк), каждое из которых принимает какое-то значение от 1 до  $n$ , т. е.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — перестановка чисел  $1, 2, \dots, n$ .

Говорят, что числа  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$  образуют *беспорядок* в перестановке  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , если  $\alpha_i > \alpha_j$  и  $\alpha_i$  расположено левее  $\alpha_j$ , т. е.  $i < j$ . Число всех беспорядков в перестановке  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  обозначим  $N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . Например,  $N(3, 1, 4, 2) = 3$ ,  $N(1, 2, 3, 4, 5) = 0$ .

Составим всевозможные произведения вида (1). Число таких произведений равно числу всевозможных перестановок чисел  $1, 2, \dots, n$ , т. е. равно  $n!$ . Умножим каждое из этих произведений на

$$(-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}$$

и сложим. Полученная сумма

$$\sum (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n}$$

называется *определителем матрицы A* или *определенителем n-го порядка* и обозначается одним из следующих символов:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Элементы, столбцы и строки матрицы  $A$  называются также элементами, столбцами и строками ее определителя. Говорят, что элементы  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  расположены на *главной диагонали* определителя, а элементы  $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$  — на *побочной диагонали*.

## 2. Свойства определителей.

1°. При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется, т. е.

$$\det A = \det A^T.$$

2°. При перестановке местами двух столбцов определитель меняет знак, а его абсолютная величина не изменяется.

3°. Определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю.

4°. Если элементы  $j$ -го столбца определителя  $D$  имеют вид

$$a_{ij} = xb_i + yc_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

(т. е. если  $j$ -й столбец является линейной комбинацией столбцов

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \text{ с коэффициентами } x \text{ и } y), \text{ то } D = xD_j(b_i) +$$

$+ yD_j(c_i)$ , где  $D_j(l_i)$  — определитель, получающийся из определителя  $D$  заменой  $j$ -го столбца на столбец с элементами  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

5°. Общий множитель элементов какого-либо столбца определителя можно вынести за знак определителя. Другими словами, если для элементов  $j$ -го столбца определителя  $D$  выполняются равенства

$$a_{ij} = xb_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

то

$$D = xD_j(b_i).$$

6°. Если все элементы какого-либо столбца определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

7°. Если к элементам какого-либо столбца определителя прибавить соответствующие элементы любого другого столбца, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится.

Свойства 2°–7° имеют место и для строк определителя.

Теорема 1. *Если A и B — квадратные матрицы одного порядка, то  $\det AB = \det A \cdot \det B$ .*

**3. Алгебраические дополнения и миноры.** В сумме  $\det A = \sum (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n}$  выделим ту группу слагаемых, которые содержат в качестве сомножителя определенный элемент  $a_{ij}$ , и в этой группе слагаемых вынесем  $a_{ij}$  за скобки. Число, получившееся в скобках, называется *алгебраическим дополнением* элемента  $a_{ij}$  и обозначается  $A_{ij}$ .

Если в матрице  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  вычеркнуть  $i$ -ю строку и  $j$ -й столбец, то получим квадратную матрицу  $(n - 1)$ -го порядка. Определитель этой матрицы называется *минором* элемента  $a_{ij}$  и обозначается  $M_{ij}$ .

Справедливы следующие утверждения.

$$1. A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

2. Определитель равен сумме произведений элементов какого-либо столбца (строки) на алгебраические дополнения этих элементов, т. е.

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad \left( \det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \right).$$

Это равенство называется *разложением определителя по элементам  $j$ -го столбца ( $i$ -й строки)*.

3. Сумма произведений элементов какого-либо столбца (строки) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца (строки) равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = 0 \quad \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0 \right), \quad i \neq k.$$

Квадратная матрица  $A$  называется *невырожденной*, если  $\det A \neq 0$ .

**Теорема 2.** Для того чтобы матрица  $A$  имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы матрица  $A$  была невырожденной. Элементы  $b_{ij}$  обратной матрицы  $A^{-1}$  вычисляются по формуле

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

где  $A_{ji}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{ji}$  матрицы  $A$ .

**4. Практическое вычисление определителей.** Вычисление определителя  $n$ -го порядка на основе определения, т. е. нахождение суммы  $n!$  слагаемых, не является эффективным способом при  $n \geq 4$ . Более удобно сначала преобразовать определитель, не меняя его значения, к такому виду, чтобы все элементы какого-то столбца (например,  $j$ -го) равнялись нулю, за исключением, быть может, одного элемента. Это можно сделать путем прибавления к строкам определителя какой-то одной из строк с соответствующими сомножителями. При этом в силу свойства 7° определитель не изменится. Далее нужно разложить определитель по элементам  $j$ -го столбца. Так как лишь

один элемент  $j$ -го столбца отличен от нуля (пусть это будет  $a_{ij}$ ), то в разложении останется лишь одно слагаемое:  $\det A = a_{ij}A_{ij}$ .

В свою очередь  $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ , где  $M_{ij}$  — определитель  $(n - 1)$ -го порядка (минор элемента  $a_{ij}$ ). Для его вычисления можно воспользоваться тем же приемом — приведением к такому виду, в котором все элементы какого-то столбца определителя  $M_{ij}$  (за исключением одного) равны нулю. Применение этого приема показано в примере 2 на с. 17.

Вычисление определителей второго и третьего порядков можно проводить, опираясь непосредственно на определение. В соответствии с определением  $\det(a_{ij})_{2 \times 2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , т. е. определитель второго порядка равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

Определитель третьего порядка равен сумме шести ( $3! = 6$ ) слагаемых. Для их составления удобно использовать *правило треугольников*. Произведение элементов, стоящих на главной диагонали, а также произведения элементов, являющихся вершинами двух тре-

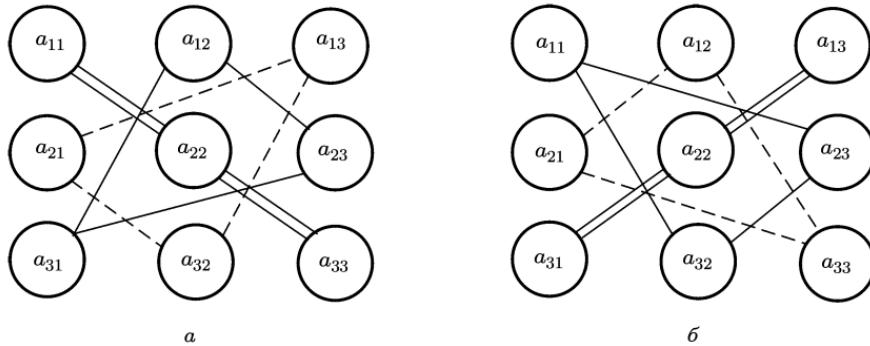


Рис. 1

угольников на рис. 1, *a*, берутся со множителем +1, а произведение элементов, стоящих на побочной диагонали, а также произведения элементов, являющихся вершинами двух треугольников на рис. 1, *b*, берутся со множителем -1, т. е.

$$\begin{aligned} \det A = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

Для определителей с буквенными (не числовыми) элементами иногда удается получить рекуррентное соотношение, что дает возможность найти определитель (см. пример 3 на с. 17).

### Контрольные вопросы и задания

- Объясните, что такое беспорядок в данной перестановке чисел  $1, 2, \dots, n$ . Чему равно число беспорядков в перестановке  $3, 2, 5, 4, 1$ ?
- Объясните, что такое определитель  $n$ -го порядка. Из скольких слагаемых он состоит?
- Назовите элементы, расположенные на главной диагонали, и элементы, расположенные на побочной диагонали, в определителе матрицы  $(a_{ij})_{4 \times 4}$ .
- Чему равен  $\det(a_{ij}\delta_{ij})_{n \times n}$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кренекера?
- Треугольной матрицей* называется матрица, у которой все элементы, стоящие по одну сторону от главной или побочной диагонали, равны нулю. Чему равен определитель треугольной матрицы?
- Известно, что  $\det A = 1$ . Чему равен  $\det A^T$ ?
- Опираясь на свойство  $2^\circ$  определителей, докажите свойство  $3^\circ$ .
- Известно, что  $A$  —  $5 \times 5$ -матрица и  $\det A = 3$ . Чему равен  $\det(2A)$ ?
- Изменится ли определитель, если к элементам первого столбца прибавить соответствующие элементы всех остальных столбцов?
- Объясните, что такое алгебраическое дополнение данного элемента  $a_{ij}$  определителя. Чему равно алгебраическое дополнение элемента  $a_{12}$  матрицы  $(a_{ij})_{2 \times 2}$ ?
- Объясните, что такое минор данного элемента  $a_{ij}$  матрицы. Чему равен минор элемента  $a_{12}$  матрицы  $(a_{ij})_{2 \times 2}$ ?
- Как связаны между собой алгебраическое дополнение и минор данного элемента?
- Что значит разложить определитель по элементам данного столбца (строки)?
- Какая матрица называется невырожденной? Приведите пример невырожденной матрицы.
- Из трех матриц  $A$ ,  $B$  и  $C$   $n$ -го порядка одна вырожденная. Чему равен  $\det(ABC)$ ?
- Как связаны невырожденность матрицы и существование у нее обратной матрицы?
- Напишите формулу для вычисления элементов обратной матрицы. Составьте обратную матрицу для матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
- Вычислите устно определители  $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$  и  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ .

### Примеры решения задач

1. Вычислить определитель  $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}$ .

△ I способ. По правилу треугольников  $D = 1 \cdot 5 \cdot (-1) + (-2) \cdot 7 \times (-3) + 2 \cdot 4 \cdot 0 - 0 \cdot 5 \cdot (-3) - (-2) \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 \cdot 7 = 5$ .

II способ. Разложим определитель  $D$  по элементам первого столбца, а для нахождения алгебраических дополнений воспользуемся формулой  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ . Получим

$$\begin{aligned} D &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 5 \cdot (-1) - 4 \cdot 7 + 2(2 \cdot (-1) - 7 \cdot (-3)) = 5. \blacksquare \end{aligned}$$

**2.** Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -7 & 5 \\ -1 & 6 & -3 & 2 \\ 4 & 8 & -6 & 1 \end{vmatrix}.$$

△ Преобразуем определитель  $D$ , не меняя его значения, таким образом, чтобы все элементы первого столбца, кроме  $a_{21} = 1$ , стали равными нулю. С этой целью из первой строки вычтем вторую, умноженную на 2, к третьей строке прибавим вторую, а из четвертой строки вычтем вторую, умноженную на 4 (при этом значение определителя не изменится). Получим

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 13 & -6 \\ 1 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 6 & -10 & 7 \\ 0 & 8 & 22 & -19 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель  $D$  по элементам первого столбца:

$$D = 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & 13 & -6 \\ 6 & -10 & 7 \\ 8 & 22 & -19 \end{vmatrix}.$$

Чтобы вычислить полученный определитель третьего порядка, снова воспользуемся разложением по элементам первого столбца:

$$\begin{aligned} D &= -1 \cdot \left( 3 \begin{vmatrix} -10 & 7 \\ 22 & -19 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 13 & -6 \\ 22 & -19 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 13 & -6 \\ -10 & 7 \end{vmatrix} \right) = \\ &= -1(3 \cdot 36 - 6 \cdot (-115) + 8 \cdot 151) = -2006. \blacksquare \end{aligned}$$

**3.** Вывести формулу для вычисления определителя  $n$ -го порядка

$$D_n = \begin{vmatrix} p & c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & p & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & p & c & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & p \end{vmatrix}.$$

△ Разложим определитель  $D_n$  по элементам первого столбца:

$$D_n = pD_{n-1} - c \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & p & c & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p & c \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & p \end{vmatrix}.$$

Определитель во втором слагаемом справа разложим по элементам первой строки. В результате получим рекуррентную формулу

$$D_n = pD_{n-1} - c^2 D_{n-2}. \quad (2)$$

Учитывая, что  $D_1 = p$ ,  $D_2 = \begin{vmatrix} p & c \\ c & p \end{vmatrix} = p^2 - c^2$ , по рекуррентной формуле можно последовательно найти  $D_3, D_4, \dots$ . Например,

$$D_3 = pD_2 - c^2 D_1 = p(p^2 - c^2) - c^2 p = p^3 - 2c^2 p.$$

Выведем формулу для непосредственного вычисления  $D_n$ . С этой целью разобъем число  $p$  на сумму двух слагаемых (пока неизвестных),  $p = a + b$ , и запишем рекуррентную формулу (2) в двух видах:

$$\begin{aligned} D_n - aD_{n-1} &= b\left(D_{n-1} - \frac{c^2}{b}D_{n-2}\right), \\ D_n - bD_{n-1} &= a\left(D_{n-1} - \frac{c^2}{a}D_{n-2}\right). \end{aligned}$$

Выберем теперь числа  $a$  и  $b$  так, что  $ab = c^2$  (для этого нужно взять  $a$  и  $b$  равными корням квадратного уравнения  $x^2 - px + c^2 = 0$ , тогда  $a + b = p$  и  $ab = c^2$ ). Рекуррентные формулы перепишем в виде

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}), \quad D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}).$$

Мы видим, что при указанном выборе чисел  $a$  и  $b$  величины  $D_n - aD_{n-1}$  образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $b$ , а величины  $D_n - bD_{n-1}$  — геометрическую прогрессию со знаменателем  $a$ . По формуле общего члена геометрической прогрессии получаем

$$D_n - aD_{n-1} = b^{n-2}(D_2 - aD_1), \quad D_n - bD_{n-1} = a^{n-2}(D_2 - bD_1).$$

Если  $a \neq b$ , то из этой системы уравнений находим формулу для вычисления  $D_n$ :

$$D_n = xa^n + yb^n,$$

где

$$x = \frac{D_2 - bD_1}{a(a - b)}, \quad y = \frac{D_2 - aD_1}{b(b - a)}.$$

В случае  $a = b$  получите формулу для вычисления  $D_n$  самостоятельно. ▲

4. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

△ Так как  $\det A = 2 \neq 0$ , то матрица  $A$  невырожденная и, следовательно, имеет обратную. Элементы  $b_{ij}$  обратной матрицы находим по формуле  $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$ , где  $A_{ji}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{ji}$  матрицы  $A$ . В свою очередь для вычисления  $A_{ji}$  пользуемся формулой  $A_{ji} = (-1)^{i+j} M_{ji}$ . Имеем

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1, & b_{12} &= \frac{1}{2} (-1) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, & b_{13} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,5; \\ b_{21} &= \frac{1}{2} (-1) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, & b_{22} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1, & b_{23} &= \frac{1}{2} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -1; \\ b_{31} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, & b_{32} &= \frac{1}{2} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, & b_{33} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,5. \end{aligned}$$

Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3,5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

**Замечание.** Удобный практический подход к вычислению матрицы  $A^{-1}$  состоит в следующем. Сначала записываем транспонированную матрицу для данной матрицы  $A$ :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Затем составляем матрицу  $A^*$ , элементами которой являются алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы  $A^T$  (матрица  $A^*$  называется *присоединенной* по отношению к матрице  $A$ ):

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

И наконец, умножив матрицу  $A^*$  на число  $\frac{1}{\det A}$ , получаем искомую обратную матрицу  $A^{-1}$ :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3,5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

**5.** Найти матрицу  $X$ , удовлетворяющую уравнению

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

△ Введем обозначения  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ . Тогда данное уравнение можно записать в виде

$$AX = B.$$

Так как  $\det A = 1$ , то матрица  $A$  имеет обратную. Умножим обе части уравнения на матрицу  $A^{-1}$  слева:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Так как  $A^{-1}A = E$  (единичная матрица) и  $EX = X$ , то  $X = A^{-1}B$ . Итак, для нахождения матрицы  $X$  нужно найти матрицу  $A^{-1}$  и умножить на матрицу  $B$ . Имеем  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

**12.** Вычислите определитель:

а)  $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$ ; б)  $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ ; в)  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ ;

г)  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ ; д)  $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$ ;

е)  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$  ж)  $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$ .

**13.** Не раскрывая определитель, докажите справедливость равенства:

а)  $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ ;

б)  $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ ;

$$\text{в)} \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \cos 2\beta \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

**14.** Решите уравнение:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & x & -1 \\ x & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

**15.** Решите неравенство:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ -x & 0 & 2 \\ 0 & x & 6 \end{vmatrix} < 0.$$

**16.** Найдите члены определителя  $\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ , содержащие  $x^4$  и  $x^3$ .

**17.** Найдите обратную матрицу для матрицы:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1,5 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

**18.** Найдите обратную матрицу для “блочной” матрицы

$$\begin{pmatrix} E_k & B \\ \Theta & E_l \end{pmatrix},$$

где  $E_k$  и  $E_l$  — единичные матрицы  $k$ -го и  $l$ -го порядков,  $B$  — произвольная  $k \times l$ -матрица,  $\Theta$  —  $l \times k$ -матрица, все элементы которой равны нулю.

**19.** Используя обратную матрицу, найдите матрицу  $X$ , удовлетворяющую уравнению:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

**20.** Докажите справедливость равенств:

а)  $(A^{-1})^{-1} = A$ ; б)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ;

в)  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ ; г)  $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$ .

**21.** Как изменится обратная матрица  $A^{-1}$ , если в матрице  $A$ :

а) переставить местами  $k$ -ю и  $l$ -ю строки;

б)  $k$ -ю строку умножить на число  $x \neq 0$ ;

в) к  $k$ -й строке прибавить  $l$ -ю, умноженную на число  $x$ ?

**22.** Вычислите:

а) определитель  $n$ -го порядка

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix};$$

б) определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

## ГЛАВА II

# ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

### § 1. Определение и свойства линейного пространства

#### Основные понятия и теоремы

**1. Определение линейного пространства.** Множество  $R$  элементов любой природы называется *линейным пространством*, если выполнены следующие три условия:

1) на множестве  $R$  определена операция *сложения элементов*, т. е. каждой паре элементов  $x$  и  $y$  из  $R$  поставлен в соответствие определенный элемент  $z$  из  $R$ . Элемент  $z$  называется *суммой элементов*  $x$  и  $y$  и обозначается  $x + y$ :  $z = x + y$ ;

2) для элементов множества  $R$  определена операция *умножения на вещественные числа*, т. е. каждому элементу  $x$  из  $R$  и каждому вещественному числу  $\alpha$  поставлен в соответствие определенный элемент  $y$  из  $R$ . Элемент  $y$  называется *произведением элемента*  $x$  на *число*  $\alpha$  и обозначается  $\alpha x$ :  $y = \alpha x$ ;

3) указанные операции удовлетворяют следующим требованиям (они называются *аксиомами линейного пространства*).

#### Аксиомы сложения.

1°.  $\forall x$  и  $y$  из  $R$ :  $x + y = y + x$  (переместительное свойство).

2°.  $\forall x, y, z$  из  $R$ :  $(x + y) + z = x + (y + z)$  (сочетательное свойство).

3°. Существует элемент  $\theta \in R$  такой, что  $\forall x \in R$ :  $x + \theta = x$  ( $\theta$  называется *нулевым элементом*).

4°.  $\forall x \in R$  существует элемент  $x' \in R$  такой, что  $x + x' = \theta$  (элемент  $x'$  называется *противоположным элементу*  $x$ ).

#### Аксиомы умножения.

5°.  $\forall x \in R$ :  $1 \cdot x = x$ .

6°.  $\forall x \in R$  и для любых вещественных чисел  $\alpha$  и  $\beta$ :  $\alpha(\beta x) = (\alpha \cdot \beta)x$  (сочетательное свойство относительно числовых сомножителей).

#### Аксиомы, связывающие обе операции.

7°.  $\forall x \in R$  и для любых вещественных чисел  $\alpha$  и  $\beta$ :  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$  (распределительное свойство относительно суммы чисел).

8°.  $\forall x$  и  $y$  из  $R$  и для любого вещественного числа  $\alpha$ :  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$  (распределительное свойство относительно суммы элементов).

Определенное таким образом линейное пространство называют **вещественным**, поскольку введена операция умножения элементов на вещественные числа. Если для элементов множества  $R$  определены операции сложения элементов и умножения элементов на комплексные числа и справедливы восемь аксиом, причем аксиомы  $6^\circ$ – $8^\circ$  для любых комплексных чисел  $\alpha$  и  $\beta$ , то  $R$  называется **комплексным линейным пространством**. Аналогично можно определить линейное пространство, в котором введена операция умножения элементов только на рациональные числа.

**З а м е ч а н и е.** Каждое из трех множеств чисел (вещественные, комплексные, рациональные) обладает следующим свойством: на этом множестве определены четыре арифметические операции (сложение, вычитание, умножение, деление, кроме деления на нуль) так, что каждая операция над любыми двумя числами из этого множества дает число из этого же множества.

Числовое множество, обладающее этим свойством, называется **числовым полем**. Вещественное линейное пространство называется **линейным пространством над полем вещественных чисел**. То же самое говорят о линейном пространстве над полем комплексных чисел (над полем рациональных чисел).

**2. Примеры линейных пространств.** Следующие множества с известными операциями сложения элементов и умножения элементов на вещественные числа являются линейными пространствами над полем вещественных чисел (в скобках указаны обозначения некоторых пространств):

- а) множество вещественных чисел;
- б) множество геометрических векторов в трехмерном пространстве (линейное пространство  $V_3$ );
- в) множество векторов, параллельных некоторой плоскости (прямой);
- г) множество столбцов с  $n$  элементами (линейное пространство  $T_n$ );
- д) множество  $m \times n$ -матриц с вещественными элементами (линейное пространство  $H_n^m$ );
- е) множество многочленов степени, не превосходящей натурального числа  $n$  (линейное пространство  $P_n$ );
- ж) множество функций, непрерывных на сегменте  $[a, b]$  (линейное пространство  $C[a, b]$ ).

Для каждого из указанных множеств выполняются восемь аксиом линейного пространства, причем нулевым элементом являются: число нуль для пространства а); нулевой вектор для пространств б) и в); столбец и  $m \times n$ -матрица, все элементы которых равны нулю, соответственно для пространств г) и д); функция, тождественно равная нулю, для пространств е) и ж).

### 3. Свойства линейных пространств.

1°. В линейном пространстве  $R$  существует единственный нулевой элемент.

2°.  $\forall x \in R$  существует единственный противоположный элемент  $x'$ .

3°.  $\forall x \in R : 0 \cdot x = \theta$  ( $\theta$  — нулевой элемент).

4°. Противоположный элемент  $x'$  для элемента  $x$  выражается формулой  $x' = (-1) \cdot x$ .

Обозначение:  $x' = -x$ .

5°. Для любого числа  $\alpha : \alpha \cdot \theta = \theta$ .

Разностью элементов  $x$  и  $y$  называется элемент  $z$  такой, что  $y + z = x$ .

Обозначение:  $z = x - y$ .

6°.  $\forall x$  и  $y$  из  $R$ :  $x - y = x + (-y)$ , где  $(-y)$  — элемент, противоположный элементу  $y$ .

#### Контрольные вопросы и задания

- Сформулируйте определение линейного пространства и приведите примеры линейных пространств.
- Чем отличается вещественное линейное пространство от комплексного? Приведите примеры этих пространств.
- Приведите пример линейного пространства над полем рациональных чисел.
- Является ли линейным пространством множество всех вещественных чисел с обычными операциями сложения и умножения элементов на:
  - вещественные числа;
  - рациональные числа?
- Могут ли в линейном пространстве существовать:
  - два нулевых элемента;
  - два противоположных элемента для некоторого элемента  $x$ ?
- Как выражается через  $x$  элемент, противоположный  $x$ ?
- Справедливо ли равенство  $\theta = -\theta$ ?
- Что такое разность элементов  $x$  и  $y$ ?

#### Примеры решения задач

1. Доказать, что множество всех функций, непрерывных на сегменте  $[a, b]$  (обозначим его  $C[a, b]$ ), с обычными операциями сложения функций и умножения функций на вещественные числа является вещественным линейным пространством.

△ Прежде всего отметим, что если  $f(x)$  и  $g(x)$  взяты из  $C[a, b]$ , а  $\alpha$  — вещественное число, то  $(f(x) + g(x)) \in C[a, b]$  и  $(\alpha \cdot f(x)) \in C[a, b]$ , т. е. операции сложения функций и умножения функции на вещественное число не выводят из множества  $C[a, b]$ .

Проверим выполнение восьми аксиом линейного пространства. Очевидно, что  $\forall f(x), g(x), h(x)$  из  $C[a, b]$  имеют место равенства

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x), \quad (f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)),$$

т. е. аксиомы 1° и 2° выполнены. Далее, нулевым элементом является функция  $\theta(x) \equiv 0$ . Она удовлетворяет аксиоме 3°:  $\forall f(x) \in C[a, b]$  справедливо равенство  $f(x) + \theta(x) = f(x)$ .

Противоположным элементом для любой  $f(x) \in C[a, b]$  служит функция  $[-f(x)]$ , также принадлежащая  $C[a, b]$ :  $f(x) + [-f(x)] = \theta(x)$  (т. е. выполнена аксиома 4°). Очевидно, выполняются и остальные аксиомы 5°–8°.

5°.  $\forall f(x) \in C[a, b]$ :  $1 \cdot f(x) = f(x)$ .

6°.  $\forall f(x) \in C[a, b]$  и для любых вещественных чисел  $\alpha$  и  $\beta$   $\alpha(\beta f(x)) = (\alpha\beta)f(x)$ .

7°.  $\forall f(x) \in C[a, b]$  и для любых вещественных чисел  $\alpha$  и  $\beta$ :  $(\alpha + \beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x)$ .

8°.  $\forall f(x)$  и  $g(x)$  из  $C[a, b]$  и для любого вещественного числа  $\alpha$ :  $\alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x)$ .

Итак,  $C[a, b]$  — вещественное линейное пространство. ▲

**2.** Доказать, что множество  $R^*$  всех положительных чисел будет линейным пространством, если сумму элементов  $x$  и  $y$  этого множества определить как произведение  $x \cdot y$ , а произведение элемента  $x$  на вещественное число  $\alpha$  — как степень  $x^\alpha$ .

△ В результате каждой из операций ( $x \cdot y$  и  $x^\alpha$ ) получается число из множества  $R^*$ , поскольку произведение положительных чисел и степень положительного числа суть числа положительные. Аксиомы 1° и 2°, очевидно, справедливы, так как  $xy = yx$  и  $(xy)z = x(yz)$ .

Аксиомы 3° и 4° принимают вид:  $\forall x \in R^*$ :  $x \cdot \theta = x$  и  $x \cdot x' = \theta$ . Из первого равенства следует, что  $\theta = 1$ , а из второго  $x' = 1/x$ .

Справедливость аксиом 5°–8° вытекает из свойств степени.

5°.  $x^1 = x$ .

6°.  $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ .

7°.  $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta$ .

8°.  $(xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$ .

Таким образом, множество  $R^*$  с введенными операциями сложения и умножения на вещественное число является вещественным линейным пространством, причем нулевой элемент равен 1. ▲

**3.** Показать, что не является линейным пространством:

а) множество многочленов степени  $n$  ( $n > 0$ ) с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на число;

б) множество векторов на координатной плоскости, отложенных от начала координат и расположенных в первом квадранте с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на число.

△ а) Данное множество не является линейным пространством, так как сумма многочленов степени  $n$  может не быть многочленом той же степени, например, при  $n \geq 2$ :  $(x^n + x - 1) + (-x^n + 2x) = 3x - 1$ .

Таким образом, операция сложения может дать многочлен, не принадлежащий данному множеству.

б) При умножении вектора, отложенного от начала координат и расположенного в первом квадранте, на отрицательное число получается вектор, расположенный в третьем квадранте и, следовательно, не принадлежащий данному множеству векторов. Поэтому данное множество не является линейным пространством. ▲

4. Доказать свойство  $3^\circ$  линейных пространств, т. е.

$$\forall x \in R : 0 \cdot x = \theta.$$

△ Рассмотрим сумму элементов  $0 \cdot x$  и  $x$ . Используя аксиомы  $5^\circ$  и  $7^\circ$ , получаем

$$0 \cdot x + x = 0 \cdot x + 1 \cdot x = (0 + 1) \cdot x = 1 \cdot x = x, \text{ т. е. } 0 \cdot x + x = x.$$

К обеим частям полученного равенства прибавим элемент  $x'$ , противоположный элементу  $x$ :  $(0 \cdot x + x) + x' = x + x'$ . Отсюда в силу аксиом  $2^\circ$  и  $4^\circ$  имеем  $0 \cdot x + \theta = \theta$ .

Из аксиомы  $3^\circ$  следует  $0 \cdot x + \theta = 0 \cdot x$ . Таким образом, мы получили, что  $0 \cdot x = \theta$ . ▲

5. Доказать, что для любого числа  $\alpha$ :  $\alpha \cdot \theta = \theta$ .

△ Согласно свойству  $3^\circ$  элемент  $\theta$  можно представить в виде  $0 \cdot x$ . Поэтому, используя аксиому  $6^\circ$ , получаем  $\alpha \cdot \theta = \alpha \cdot (0 \cdot x) = (\alpha \cdot 0)x = = 0 \cdot x = \theta$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Докажите, что вещественными линейными пространствами являются следующие множества с обычными операциями сложения их элементов и умножения элементов на вещественные числа:

- а) множество векторов в трехмерном пространстве, параллельных некоторой прямой (плоскости);
- б) множество функций,  $n$  раз дифференцируемых на сегменте  $[a, b]$ ;
- в) множество многочленов степени, не превосходящей  $n$ ;
- г) множество функций вида  $\alpha \cos x + \beta \sin x$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные вещественные числа;
- д) множество столбцов с  $n$  вещественными элементами;
- е) множество столбцов с  $n$  вещественными элементами, равными друг другу;
- ж) множество столбцов с  $n$  элементами такими, что сумма элементов равна нулю;
- з) множество  $m \times n$ -матриц с вещественными элементами;
- и) множество симметричных квадратных матриц  $n$ -го порядка с вещественными элементами (матрица  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  называется *симметричной*, если  $A = A^T$ , т. е.  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ).

2. Докажите, что множества столбцов (матриц) из упр. 1, д)-и) станут комплексными линейными пространствами, если элементами столбцов (матриц) будут комплексные числа и операция умножения столбцов (матриц) на числа введена для комплексных чисел.
3. Какой элемент является нулевым и какой — противоположным к данному элементу в линейных пространствах из упр. 1 и 2?
4. Докажите, что не является вещественным линейным пространством:
  - а) множество рациональных чисел с обычными операциями сложения рациональных чисел и умножения на вещественные числа;
  - б) множество векторов на координатной плоскости, каждый из которых параллелен либо оси  $OX$ , либо оси  $OY$ ;
  - в) множество многочленов степени, не превосходящей  $n$ , с неотрицательными коэффициентами;
  - г) множество  $m \times n$ -матриц, элементы которых — рациональные числа;
  - д) множество натуральных чисел, для которых сумма чисел  $m$  и  $n$  определена как их произведение  $m \cdot n$ , а произведение элемента  $n$  на вещественное число  $\alpha$  — как степень  $n^\alpha$ ;
  - е) множество вещественных чисел, для которых сумма чисел  $x$  и  $y$  равна  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y)$ , а произведение элемента  $x$  на число  $\alpha$  равно  $\operatorname{tg}(\alpha \cdot \operatorname{arctg} x)$ ;
5. Докажите, что для любых элементов  $x$  и  $y$  линейного пространства разность  $x - y$  существует и единственна.

## § 2. Подпространства линейного пространства

### Основные понятия и теоремы

**Определение.** Подмножество  $M$  элементов линейного пространства  $R$  называется *подпространством* пространства  $R$ , если выполнены два условия:

- 1)  $\forall x$  и  $y$  из  $M$  сумма  $x + y$  есть элемент из  $M$ ;
- 2)  $\forall x \in M$  и  $\forall \alpha$  ( $\alpha$  — число) произведение  $\alpha \cdot x$  есть элемент из  $M$ .

**Теорема 1.** *Любое подпространство само является линейным пространством.*

Рассмотрим важный пример подпространства линейного пространства  $R$ . Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — элементы из  $R$ . *Линейной комбинацией* этих элементов с коэффициентами  $c_1, \dots, c_n$  называется сумма  $\sum_{p=1}^n c_p x_p$ . *Линейной оболочкой* элементов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется множество всевозможных линейных комбинаций этих элементов. Обозначается линейная оболочка так:  $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Совокуп-

ность элементов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется *порождающей системой* линейной оболочки  $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**Теорема 2.** *Линейная оболочка  $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$  является подпространством линейного пространства  $R$ .*

Пусть  $M$  — подпространство линейного пространства  $R$  и элемент  $x_0$  из  $R$  не принадлежит  $M$ . Рассмотрим множество  $\Gamma$  всех элементов  $y \in R$ , представимых в виде  $y = x_0 + x$ , где  $x \in M$ . Множество  $\Gamma$  называется гиперплоскостью, полученной в результате сдвига подпространства  $M$  вдоль элемента  $x_0$ .

### Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение подпространства линейного пространства.
2. Является ли множество рациональных чисел подпространством линейного пространства вещественных чисел над полем вещественных чисел?
3. Является ли множество рациональных чисел подпространством линейного пространства вещественных чисел над полем рациональных чисел?
4. Прямая  $l$  параллельна плоскости  $P$ ,  $V_1$  и  $V_2$  — множества всех векторов, параллельных соответственно прямой  $l$  и плоскости  $P$ . Докажите, что  $V_1$  — подпространство линейного пространства  $V_2$ .
5. Является ли подпространством линейного пространства  $R$  само  $R$ ?
6. Докажите, что множество, содержащее только нулевой элемент  $\theta$ , является подпространством, причем наименьшим среди подпространств линейного пространства  $R$  (т. е. подпространством, содержащимся в любом другом подпространстве пространства  $R$ ).
7. Сформулируйте определение линейной оболочки.
8. Какое линейное пространство образует линейная оболочка, порожденная системой функций  $f_0(x) = 1, f_1(x) = x, \dots, f_n(x) = x^n$ ?
9. Подпространством какого линейного пространства является линейная оболочка  $L(x_1, x_2)$ , где:

а)  $x_1 = \cos t, x_2 = \sin t; \quad$  б)  $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

в)  $x_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$

г)  $x_1 = -\mathbf{i} + \mathbf{j}, x_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ , где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  — координатные векторы.

Какова геометрическая интерпретация последней линейной оболочки?

10. Докажите, что:
  - а) линейная оболочка не изменится, если в порождающей системе поменять местами какие-либо ее элементы;
  - б)  $L(x, 3x) = L(x)$ .

### Примеры решения задач

**1.** Доказать, что все векторы, параллельные данной прямой, образуют подпространство линейного пространства векторов  $V_3$ .

△ Если векторы  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  параллельны данной прямой, то их сумма

$\mathbf{x} + \mathbf{y}$  и вектор  $\alpha\mathbf{x}$  ( $\alpha$  — любое число) также параллельны этой прямой. Таким образом, для данного множества векторов выполнены оба условия, входящие в определение подпространства, и поэтому векторы, параллельные данной прямой, образуют подпространство линейного пространства  $V_3$ .  $\blacktriangle$

**2.** Данна однородная система  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Решение системы будем записывать в виде столбца  $X$  с элементами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Столбец  $X$  есть элемент линейного пространства  $T_n$  столбцов с  $n$  элементами. Доказать, что множество всех решений данной системы является подпространством пространства  $T_n$ .

$\triangle$  Запишем данную систему в матричном виде:  $AX = \Theta$ , где  $A = (a_{ij})$  —  $m \times n$ -матрица коэффициентов системы,  $\Theta$  — нулевой столбец. Если  $X_1$  и  $X_2$  — решения системы, т. е.  $AX_i = \Theta$ ,  $i = 1, 2$ , то  $X_1 + X_2$  и  $\alpha \cdot X_1$  ( $\alpha$  — число) — также ее решения, поскольку  $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = \Theta + \Theta = \Theta$  и  $A(\alpha X_1) = \alpha AX_1 = \alpha\Theta = \Theta$ . Следовательно, для множества решений данной системы выполнены оба условия, фигурирующих в определении подпространства, и поэтому это множество решений является подпространством линейного пространства  $T_n$ .  $\blacktriangle$

**3.** Доказать, что любое подпространство содержит нулевой элемент  $\theta$ .

$\triangle$  По определению подпространства  $M$ , если  $x \in M$ , то и  $\alpha x \in M$ , где  $\alpha$  — любое число. Положив  $\alpha = 0$ , получим  $0 \cdot x = \theta \in M$ .  $\blacktriangle$

**4.** Доказать, что множество  $M$  всех функций  $f(x)$ , удовлетворяющих условию  $f(-2) = 0$ , является подпространством линейного пространства функций, определенных на числовой прямой.

$\triangle$  Проверим выполнение двух условий, определяющих подпространство. Если  $f(x)$  и  $g(x) \in M$ , то  $f(-2) = 0$ ,  $g(-2) = 0$ , и поэтому  $f(-2) + g(-2) = 0$  и  $\alpha \cdot f(-2) = 0$  ( $\alpha$  — любое число). Следовательно,  $f(x) + g(x)$  и  $\alpha \cdot f(x)$  принадлежат множеству  $M$ , и поэтому  $M$  — подпространство.

**5.** Доказать, что гиперплоскость не является подпространством.

$\triangle$  Пусть гиперплоскость  $\Gamma$  получена в результате сдвига подпространства  $M$  вдоль элемента  $x_0$ . Согласно определению гиперплоскости  $x_0 \notin M$ . Предположим, что  $\Gamma$  — подпространство. Тогда  $\theta \in \Gamma$  (см. задачу 3), а значит,  $\theta$  можно представить в виде  $\theta = x_0 + x$ , где  $x \in M$ . Отсюда следует, что  $x_0 = -x$ , и поэтому  $x_0 \in M$ . Таким образом, полу-

чили противоречие с условием  $x_0 \notin M$ . Следовательно,  $\theta \notin \Gamma$ , и потому  $\Gamma$  не является подпространством (см. задачу 3).  $\blacktriangle$

**6.** Доказать, что  $L(x_1, x_2, \dots, x_m) = L(x_1 + x_2, x_2, \dots, x_m)$ , т. е. прибавление к элементу порождающей системы другого ее элемента не изменяет линейной оболочки.

$\triangle$  Чтобы доказать, что два множества совпадают, нужно показать, что каждый элемент первого множества является элементом второго и, обратно, каждый элемент второго множества является элементом первого множества. Пусть  $x \in L(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , т. е.  $x = \sum_{p=1}^m c_p x_p$ . Элемент  $x$  можно представить в виде линейной комбинации элементов порождающей системы второй оболочки:

$$x = c_1(x_1 + x_2) + (c_2 - c_1)x_2 + \sum_{p=3}^m c_p x_p.$$

Итак,  $x \in L(x_1 + x_2, x_2, \dots, x_m)$ .

Обратно: каждый элемент второй оболочки есть линейная комбинация элементов  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , т. е. принадлежит первой оболочке. Таким образом,  $L(x_1, x_2, \dots, x_m) = L(x_1 + x_2, x_2, \dots, x_m)$ .  $\blacktriangle$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

6. Докажите, что любое подпространство само является линейным пространством.
7. Выясните, является ли подпространством линейного пространства, указанного в скобках (обозначения те же, что и в § 1):
  - а) множество векторов, параллельных данной плоскости ( $V_3$ );
  - б) множество столбцов с  $n$  элементами, сумма которых равна нулю ( $T_n$ );
  - в) множество многочленов  $P(x)$  степени, не превосходящей  $n$ , удовлетворяющих условию  $P(0) = a$ , где  $a$  — данное число ( $P(n)$ );
  - г) множество симметричных квадратных матриц  $n$ -го порядка ( $H_n^n$ );
  - д) множество векторов  $\mathbf{x}$ , для которых скалярное произведение  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = a$ , где  $\mathbf{x}_0$  — данный вектор,  $a$  — данное число ( $V_3$ );
  - е) множество векторов  $\mathbf{x}$ , для которых векторное произведение  $[\mathbf{x}, \mathbf{x}_0] = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{x}_0$  и  $\mathbf{a}$  — данные векторы ( $V_3$ );
  - ж) множество матриц, удовлетворяющих условию  $AX = XA$ , где  $A$  — данная  $n \times n$ -матрица ( $H_n^n$ );
  - з) множество многочленов  $P(x)$  степени, не превосходящей  $n$ , удовлетворяющих условию  $P(1) = P(-1)$  ( $P_n$ ).

8. Какова геометрическая интерпретация подпространства векторов, удовлетворяющих условию ( $x_0$  — данный ненулевой вектор):  
 а)  $(x, x_0) = 0$ ; б)  $[x, x_0] = \theta$ ?
9. Докажите, что линейная оболочка  $L(x_1, x_2, \dots, x_m)$  не изменится при следующих действиях с элементами порождающей системы:  
 а) умножение элемента на число  $\alpha \neq 0$ ;  
 б) прибавление к элементу линейной комбинации других элементов порождающей системы;  
 в) вычеркивание из порождающей системы нулевого элемента (если он там есть);  
 г) вычеркивание элемента, являющегося линейной комбинацией других элементов порождающей системы.
10. Докажите истинность равенств:  

$$L(x_1, x_2) = L(x_2, x_1); \quad L(x_1 - x_2, x_1 + x_2) = L(x_1, x_2);$$
  

$$L(x, 2x, 3x, \theta) = L(x); \quad L(3x_1 + 2x_2, x_1 - 5x_2) = L(x_1, x_2);$$
  

$$L(1, x^2 - 2x, x + x^2) = L(1, x, x^2);$$
  

$$L(1 - e^{2x}, 2e^{2x} + e^{3x} - 2, -e^{3x} + 5e^x, 2e^x + 3) = L(1, e^x, e^{2x}, e^{3x}).$$
11. Дайте геометрическую интерпретацию линейной оболочки в пространстве  $V_3$  геометрических векторов, порождающая система которой состоит из:  
 а) одного ненулевого вектора;  
 б) двух коллинеарных векторов;  
 в) двух неколлинеарных векторов;  
 г) трех компланарных векторов;  
 д) трех некомпланарных векторов.
12. Докажите, что линейная оболочка столбцов матрицы  $A$  содержит линейную оболочку столбцов матрицы  $A \cdot B$ .

### § 3. Линейная зависимость и независимость элементов линейного пространства

#### Основные понятия и теоремы

**Определение.** Элементы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  линейного пространства  $R$  называются *линейно зависимыми*, если существует их линейная комбинация  $\sum_{p=1}^m c_p x_p$ , равная нулевому элементу, в которой не все коэффициенты  $c_p$  равны нулю. Элементы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называются *линейно независимыми*, если равенство  $\sum_{p=1}^m c_p x_p = \theta$  имеет место только тогда,

когда  $c_p = 0$ ,  $p = 1, 2, \dots, n$ .

**Теорема 3.** Для того чтобы элементы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из этих элементов был линейной комбинацией остальных.

Совокупность элементов, каждый из которых есть элемент системы  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , называется *подсистемой* этой системы.

**Теорема 4. а)** Если элементы подсистемы линейно зависимы, то элементы всей системы также линейно зависимы.

**б)** Если элементы системы линейно независимы, то элементы любой ее подсистемы также линейно независимы.

### Контрольные вопросы и задания

- Дайте определение линейной зависимости и линейной независимости элементов линейного пространства.
- Сформулируйте необходимое и достаточное условие линейной зависимости элементов.
- Являются ли линейно зависимыми:
  - два неколлинеарных вектора;
  - три компланарных вектора;
  - три некомпланарных вектора;
  - функции  $\sin x$  и  $\cos x$  на сегменте  $[0, \pi/2]$ ;
  - функции  $f_1 = 2 \sin^2 x$ ,  $f_2 = 1$ ,  $f_3 = 3 \cos^2 x$  на сегменте  $[a, b]$ ?
- Ответы обоснуйте.
- Являются ли линейно зависимыми элементы линейного пространства  $R$ :
  - $x$  и  $2x$ ;
  - $x_1, x_2, \dots, x_n, \theta$ ;
  - $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , если  $R = T_2$ ?

Ответы обоснуйте.

### Примеры решения задач

#### 1. Доказать теорему 4.

△ а) Пусть элементы некоторой подсистемы линейно зависимы. Рассмотрим линейную комбинацию этих элементов, равную нулевому элементу  $\theta$ , в которой не все коэффициенты равны нулю. К этой линейной комбинации прибавим линейную комбинацию остальных элементов системы с нулевыми коэффициентами. Получим вновь нулевой элемент  $\theta$ . Таким образом, существует линейная комбинация элементов системы, равная  $\theta$ , в которой не все коэффициенты равны нулю. Это и означает, что элементы всей системы линейно зависимы.

б) Пусть элементы системы линейно независимы. Предположим, что элементы какой-то подсистемы линейно зависимы. Но тогда согласно доказанному в п. а) элементы всей системы также линейно

зависимы, что противоречит условию. Следовательно, элементы любой подсистемы линейно независимы. ▲

**2.** Доказать, что однородная система линейных уравнений  $AX = \Theta$  имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда столбцы матрицы  $A$  линейно зависимы.

△ Обозначим элементы столбца  $X$  (неизвестные) через  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а столбцы матрицы  $A$  — через  $A_1, \dots, A_n$ . Тогда систему уравнений  $AX = \Theta$  можно записать в виде

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n = \Theta. \quad (1)$$

Отсюда следует, что если система (1) имеет ненулевое решение  $x_1, \dots, x_n$  (хотя бы одно  $x_k$  не равно нулю), то это означает, что линейная комбинация столбцов  $A_1, \dots, A_n$  с коэффициентами  $x_1, \dots, x_n$  является нулевым столбцом, т. е. столбцы  $A_1, \dots, A_n$  линейно зависимы. И обратно: если столбцы  $A_1, \dots, A_n$  линейно зависимы, т. е. существуют числа  $x_1, \dots, x_n$ , не все равные нулю и такие, что выполняется равенство (1), то  $x_1, \dots, x_n$  — ненулевое решение системы. ▲

**3.** Доказать, что матрицы (элементы пространства  $H_3^2$ )

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

являются линейно независимыми, а любой элемент пространства  $H_3^2$  есть линейная комбинация этих шести элементов.

△ Составим линейную комбинацию данных элементов:

$$\sum_{p=1}^6 c_p e_p = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}.$$

Она равна нулевому элементу  $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  только в том случае, когда все  $c_p = 0$ , а это означает, что элементы  $e_1, \dots, e_6$  линейно независимы.

Очевидно, любую матрицу  $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}$  (произвольный элемент пространства  $H_3^2$ ) можно представить в виде  $\sum_{p=1}^6 c_p e_p$ , т. е. любая матрица  $C$  является линейной комбинацией матриц  $e_1, \dots, e_6$ . ▲

**4.** Доказать, что в пространстве  $P_2$  многочленов степени не выше второй три многочлена,  $1, x, x^2$ , линейно независимы, а любой элемент пространства  $P_2$  есть линейная комбинация этих элементов.

△ Нулевым элементом в пространстве  $P_2$  является многочлен, тождественно равный нулю. Составим линейную комбинацию трех данных многочленов и приравняем ее нулевому элементу:

$$a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 \equiv 0.$$

Это равенство справедливо для всех  $x$  только в том случае, когда  $a = b = c = 0$ . В самом деле, если хотя бы один из коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$  не равен нулю, то в левой части равенства стоит многочлен степени не выше второй, а он имеет не более двух корней, и потому не равен нулю для всех  $x$ . Следовательно, многочлены  $1$ ,  $x$ ,  $x^2$  линейно независимы. Очевидно, любой многочлен  $a + bx + cx^2$  из  $P_2$  есть линейная комбинация многочленов  $1$ ,  $x$  и  $x^2$  с коэффициентами  $a$ ,  $b$  и  $c$ . ▲

**5.** Доказать, что три матрицы  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  линейно независимы и любой элемент линейного пространства симметричных  $2 \times 2$ -матриц есть их линейная комбинация.

△ Составим линейную комбинацию данных матриц:

$$\sum_{p=1}^3 c_p e_p = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Она равна нулевой матрице  $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  только в том случае, когда  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ , а это и означает, что матрицы  $e_1, e_2, e_3$  линейно независимы. Любая симметричная матрица  $\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix}$  является, очевидно, линейной комбинацией матриц  $e_1, e_2, e_3$  с коэффициентами  $c_1, c_2, c_3$ . ▲

**6.** Доказать, что функции  $\cos x$ ,  $\cos 2x$ ,  $\cos 3x$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) линейно независимы.

△ Допустим, что данные функции линейно зависимы. Тогда существует их линейная комбинация, равная нулевому элементу, т. е. тождественно равная нулю:

$$a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x \equiv 0,$$

причем хотя бы один из коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$  не равен нулю. Продифференцировав это тождество два раза, а затем четыре раза, приходим к тождествам

$$a \cos x + 4b \cos 2x + 9c \cos 3x \equiv 0, \quad a \cos x + 16b \cos 2x + 81c \cos 3x \equiv 0.$$

Положив во всех трех тождествах  $x = 0$ , получим однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ a + 4b + 9c &= 0 \\ a + 16b + 81c &= 0. \end{aligned}$$

Эта система имеет только нулевое решение  $a = b = c = 0$ . Получили противоречие с тем, что хотя бы один из коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$  отличен от нуля. Следовательно, данные функции линейно независимы. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

13. Докажите теорему 3.
14. Докажите, что если элементы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  линейно независимы, а элементы  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$  линейно зависимы, то  $x_{n+1}$  есть линейная комбинация элементов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .
15. Докажите, что если максимальное число линейно независимых элементов в системе, порождающей линейную оболочку  $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , равно  $r$  ( $r < n$ ) и элементы  $x_1, x_2, \dots, x_r$  линейно независимы, то  $L(x_1, x_2, \dots, x_r) = L(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ .
16. Докажите, что любые четыре геометрических вектора линейно зависимы.
17. Докажите, что следующие функции линейно независимы:
  - а)  $\sin x, \sin 2x, \sin 3x$ ;
  - б)  $1, e^x, e^{2x}, e^{3x}$ .
18. Докажите, что данные элементы линейно независимы и любой элемент соответствующего линейного пространства есть их линейная комбинация:

$$\text{а) } e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

$$\dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{в пространстве } H_n^m;$$

$$\begin{aligned}
 \text{б)} \quad e_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \\
 \dots, \quad e_n &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \\
 e_{n+2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_{2n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \\
 \dots, \quad e_{\frac{n^2+n}{2}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{в пространстве симметричных } \\
 n \times n\text{-матриц;}
 \end{aligned}$$

$$\text{в)} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{в пространстве } \\
 T_n \text{ столбцов с } n \text{ элементами;}$$

г)  $e_1 = (1 \ 0 \ \dots \ 0 - 1)$ ,  $e_2 = (0 \ 1 \ \dots \ 0 - 1)$ , ...,  $e_{n-1} = (0 \ 0 \ \dots \ 1 - 1)$   
в пространстве строк с  $n$  элементами такими, что сумма элементов равна нулю;

д)  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = x$ , ...,  $p_n = x^n$  в пространстве  $P_n$  многочленов степени не выше  $n$ ;

е)  $p_1(x) = x$ ,  $p_2(x) = x^2$ , ...,  $p_n(x) = x^n$  в пространстве многочленов  $p(x)$ , степень которых не превосходит  $n$  и которые удовлетворяют условию  $p(0) = 0$ ;

ж)  $f_1(x) = \sin x$ ,  $f_2(x) = \cos x$  в пространстве  $L(\sin x, \cos x)$  (линейная оболочка функций  $\sin x$  и  $\cos x$ ).

19. Пусть  $R^*$  — линейное пространство положительных чисел, в котором сумма элементов  $x$  и  $y$  определена как произведение  $x \cdot y$ , а произведение элемента  $x$  на вещественное число  $\alpha$  — как степень  $x^\alpha$  (пример 2 на с. 26). Докажите, что в пространстве  $R^*$  любые два элемента  $x$  и  $y$  линейно зависимы.

- 20.** Докажите, что если столбцы квадратной матрицы  $A$  линейно зависимы (независимы), то столбцы транспонированной матрицы  $A^T$  также линейно зависимы (независимы).

## § 4. Базис и координаты.

### Размерность линейного пространства

#### Основные понятия и теоремы

##### 1. Базис и координаты.

**Определение.** Совокупность элементов  $e_1, e_2, \dots, e_n$  называется **базисом** линейного пространства  $R$ , если:

1) элементы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейно независимы;

2) каждый элемент пространства  $R$  можно представить в виде линейной комбинации элементов  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , т. е.  $\forall x \in R$  существуют числа  $x_1, \dots, x_n$  такие, что справедливо равенство

$$x = \sum_{p=1}^n x_p e_p. \quad (1)$$

Равенство (1) называется *разложением элемента  $x$  по базису  $e_1, e_2, \dots, e_n$* , а числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называются *координатами* элемента  $x$  в этом базисе.

**Теорема 5.** *Разложение элемента  $x$  по данному базису единственно, т. е. существует единственный набор чисел  $x_1, \dots, x_n$  такой, что элемент  $x$  можно представить в виде (1).*

**Теорема 6.** *При сложении элементов линейного пространства их координаты в данном базисе складываются. При умножении элемента на число его координаты умножаются на это число.*

Таким образом, если введен базис, то действия над элементами линейного пространства (сложение элементов и умножение элементов на числа) сводятся к таким же действиям над числами — координатами элементов.

##### 2. Примеры базисов.

1) Любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов является базисом в пространстве  $V_3$ ; любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов из  $V_2$  является базисом в пространстве  $V_2$ ; любой ненулевой вектор из  $V_1$  является базисом в пространстве  $V_1$ .

2) Матрицы  $e_1, e_2, \dots, e_6$  с размерами  $2 \times 3$  (см. пример 3 на с. 34) образуют базис в пространстве  $H_3^2$ . В самом деле, эти матрицы линейно независимы, и любую  $2 \times 3$ -матрицу можно представить в виде их линейной комбинации.

3) Многочлены  $p_0(x) = 1$ ,  $p_1(x) = x$ ,  $p_2(x) = x^2$  образуют базис в пространстве  $P_2$ . Действительно, эти многочлены линейно независимы, и любой многочлен  $p(x) = a + bx + cx^2$  из  $P_2$  можно представить в виде линейной комбинации многочленов  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  (см. пример 4 на с. 34). Отметим, что координатами элемента  $p(x)$  в базисе  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  являются числа  $a, b, c$ .

4) Симметричные матрицы  $e_1, e_2, e_3$  (см. пример 5 на с. 35) образуют базис в пространстве симметричных  $2 \times 2$ -матриц, так как матрицы  $e_1, e_2, e_3$  линейно независимы, и любой элемент данного пространства можно представить в виде их линейной комбинации.

5) Функции  $f_1(x) = \sin x$  и  $f_2(x) = \cos x$  образуют базис линейной оболочки  $L(\sin x, \cos x)$ , поскольку они линейно независимы (докажите это) и любой элемент линейной оболочки есть линейная комбинация этих функций.

### 3. Размерность линейного пространства.

**Определение.** Натуральное число  $n$  называется *размерностью линейного пространства*  $R$ , если:

1) в пространстве  $R$  существуют  $n$  линейно независимых элементов;

2) любые  $(n+1)$  элементов пространства  $R$  линейно зависимы.

Обозначение размерности:  $\dim R = n$ . Размерность пространства, состоящего из одного нулевого элемента, считается равной нулю.

Если  $\dim R = n$ , то пространство  $R$  называется *n-мерным* и обозначается  $R_n$ . Если в пространстве  $R$  существует любое (сколь угодно большое) число линейно независимых элементов, то пространство  $R$  называется *бесконечномерным* (пишут  $\dim R = \infty$ ). Примером бесконечномерного пространства является пространство  $C[a, b]$  непрерывных на сегменте  $[a, b]$  функций: при любом  $n$  функции  $p_0(x) = 1$ ,  $p_1(x) = x, \dots, p_n(x) = x^n$  линейно независимы (упр. 18, д) § 3).

В курсе линейной алгебры изучаются в основном конечномерные линейные пространства.

**Теорема 7.** *Если  $\dim R = n \geq 1$ , то в пространстве  $R$  существует базис из  $n$  элементов. В качестве базиса можно взять любые  $n$  линейно независимых элементов.*

**Теорема 8.** *Если в пространстве  $R$  существует базис из  $n$  элементов, то  $\dim R = n$ .*

Из теоремы 8 следует, что  $\dim V_3 = 3$ ,  $\dim V_2 = 2$ ,  $\dim V_1 = 1$ ,  $\dim H_3^2 = 6$ ,  $\dim P_2 = 3$ . Размерность пространства симметричных  $2 \times 2$ -матриц равна 3.

**Теорема 9.** *Размерность любого подпространства не превосходит размерности всего пространства. Базис подпространства линейного пространства  $R_n$  можно дополнить элементами из  $R_n$  до базиса всего пространства.*

**Контрольные вопросы и задания**

1. Дайте определение базиса линейного пространства.
2. Что такое координаты элемента линейного пространства в данном базисе?
3. Образуют ли функции  $p_0(x) = 1$ ,  $p_1(x) = x$ ,  $p_2(x) = x^2$  базис:
  - а) в пространстве  $P_2$ ;
  - б) в пространстве  $C[a, b]$ ?
 Ответы обоснуйте.
4. Укажите базис в пространстве матриц  $H_3^3$  такой, что элементами базисных матриц являются только числа 0 и 1. Каково число базисных матриц? Найдите в этом базисе координаты матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ .
5. Может ли базис содержать нулевой элемент? Ответ обоснуйте.
6. Известно, что некоторый элемент можно представить в виде двух различных линейных комбинаций одних и тех же элементов  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Являются ли элементы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейно независимыми?
7. Элементы  $x_1$  и  $x_2$  имеют в некотором базисе координаты  $-3, 5, 7$  и  $10, 0, 1$ . Чему равны координаты элементов  $x_1 - x_2$ ,  $7x_1 + x_2$ ,  $2x_1 + 3x_2$  в том же базисе?
8. Дайте определение размерности линейного пространства.
9. Какое линейное пространство называется  $n$ -мерным и какое бесконечномерным?
10. Как связаны между собой размерность пространства и число элементов базиса?
11. Известно, что элементы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  образуют базис линейного пространства. Является ли базисом совокупность элементов  $c_1e_1, c_2e_2, \dots, c_ne_n$ , где  $c_p$  — числа, не равные нулю? Ответ обоснуйте.
12. Сколько базисов имеется в  $n$ -мерном линейном пространстве?
13. Может ли размерность линейного пространства быть меньше (равна, больше) размерности его подпространства?

**Примеры решения задач**

**1.** Доказать, что все координаты нулевого элемента в любом базисе равны нулю, и, обратно, если все координаты элемента в каком-то базисе равны нулю, то этот элемент нулевой.

△ Пусть в базисе  $e_1, \dots, e_n$  разложение нулевого элемента  $\theta$  имеет вид

$$\theta = \sum_{p=1}^n c_p e_p.$$

Тогда все  $c_p = 0$ , так как элементы базиса  $e_1, \dots, e_n$  линейно независимы, и поэтому их линейная комбинация равна нулевому элементу только тогда, когда все коэффициенты  $c_p$  равны нулю. Обратно: если все координаты элемента  $x$  равны нулю:  $x = 0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_n$ , то  $x$  является нулевым элементом, так как согласно свойству 3° линейных пространств (см. § 1) имеем  $0 \cdot e_p = \theta$ , и поэтому  $x = \theta$ . ▲

**2.** Доказать: для того чтобы элементы  $x_1, \dots, x_m$  были линейно зависимы (независимы), необходимо и достаточно, чтобы столбцы их координат в каком-нибудь базисе были линейно зависимы (независимы).

△ Возьмем какой-нибудь базис линейного пространства и запишем координаты элемента  $x_k$  в этом базисе в виде столбца  $X_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ).

Пусть элементы  $x_1, \dots, x_m$  линейно зависимы, т. е. существует их линейная комбинация  $\sum_{k=1}^m c_k x_k$ , равная нулевому элементу  $\theta$ , причем не все коэффициенты  $c_k$  равны нулю. В силу теоремы 6 линейная комбинация  $\sum_{k=1}^m c_k X_k$  столбцов  $X_1, \dots, X_m$  дает столбец координат элемента  $\theta$ . Но все координаты нулевого элемента  $\theta$  равны нулю (задача 1). Таким образом, линейная комбинация  $\sum_{k=1}^m c_k X_k$  равна нулевому столбцу, т. е. столбцы  $X_1, \dots, X_m$  линейно зависимы.

Обратно: пусть столбцы  $X_1, \dots, X_m$  линейно зависимы, т. е. существует их линейная комбинация  $\sum_{k=1}^m c_k X_k$ , равная нулевому столбцу, причем не все коэффициенты  $c_k$  равны нулю. Рассмотрим линейную комбинацию  $\sum_{k=1}^m c_k x_k$  элементов  $x_1, \dots, x_m$ . В силу теоремы 6 столбец

координат этой линейной комбинации равен  $\sum_{k=1}^m c_k X_k$ , т. е. все координаты линейной комбинации равны нулю. Следовательно,  $\sum_{k=1}^m c_k x_k = \theta$  (задача 1), а это означает, что элементы  $x_1, \dots, x_m$  линейно зависимы.

Итак, мы доказали, что необходимым и достаточным условием линейной зависимости элементов является линейная зависимость столбцов их координат. Отсюда следует аналогичное утверждение о линейной независимости элементов. ▲

**3.** Доказать, что размерность линейного пространства не меньше размерности любого его подпространства.

△ Предположим, что размерность  $m$  подпространства  $M$  линейного пространства  $R_n$  больше  $n$ . По определению размерности в  $M$  существуют  $m$  линейно независимых элементов. Поскольку они являются элементами пространства  $R_n$ , то тем самым в  $R_n$  существуют  $m$  линейно независимых элементов. Но в пространстве  $R_n$  любые  $n+1$

элементов линейно зависимы, и, следовательно, линейно зависимы любые  $m$  элементов, если  $m > n$ . Получили противоречие. Следовательно,  $\dim M \leq n$ .  $\blacktriangle$

**4.** Найти базис и размерность линейного пространства  $R$  многочленов  $p(x)$ , степень которых не выше двух и которые удовлетворяют условию  $p(1) = 0$ .

$\Delta$  Любой многочлен  $p(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2$  из  $R$  удовлетворяет условию  $p(1) = c_1 + c_2 + c_3 = 0$ . Отсюда  $c_3 = -c_1 - c_2$ , и поэтому  $p(x) = c_1 + c_2x + (-c_1 - c_2)x^2 = c_1(1 - x^2) + c_2(x - x^2)$ , т. е. любой многочлен из  $R$  представим в виде линейной комбинации многочленов  $p_1(x) = 1 - x^2$  и  $p_2(x) = x - x^2$ .

Покажем, что многочлены  $p_1(x)$  и  $p_2(x)$  линейно независимы. Составим столбцы их координат в базисе  $1, x, x^2$  пространства  $P_2$ :

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Эти столбцы линейно независимы, так как их элементы не пропорциональны, и, следовательно, многочлены  $p_1(x)$  и  $p_2(x)$  линейно независимы (задача 2). Итак, многочлены  $p_1(x)$  и  $p_2(x)$  образуют базис в пространстве  $R$ , и, следовательно, по теореме 8  $\dim R = 2$ .  $\blacktriangle$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

**21.** Используя результаты упр. 18 из § 3, найдите базис и размерность:

- а) пространства  $H_n^m$  матриц с размерами  $m \times n$ ;
- б) пространства симметричных  $n \times n$ -матриц;
- в) пространства  $T_n$  столбцов с  $n$  элементами;
- г) пространства столбцов с  $n$  элементами, сумма которых (элементов) равна нулю;
- д) пространства  $P_n$  многочленов степени, не превосходящей  $n$ ;
- е) пространства многочленов  $p(x)$  из  $P_n$ , удовлетворяющих условию  $p(0) = 0$ .

**22.** Докажите, что два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда столбцы из их координат в каком-либо базисе линейно зависимы.

**23.** Докажите, что три вектора некомпланарны тогда и только тогда, когда столбцы из их координат в каком-либо базисе линейно независимы.

## § 5. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре

### Основные понятия и теоремы

**1. Определение ранга матрицы.** Пусть  $A = (a_{ij})$  —  $m \times n$ -матрица и пусть натуральное число  $r$  удовлетворяет условию  $1 \leq r \leq \min(m, n)$ .

Рассмотрим какие-либо  $r$  строк и  $r$  столбцов матрицы  $A$ . Элементы, находящиеся на их пересечении, образуют квадратную  $r \times r$ -матрицу. Ее определитель называется *минором порядка  $r$*  матрицы  $A$ .

**Определение.** Число  $r$  называется *рангом* матрицы  $A$ , если у матрицы  $A$  имеется минор порядка  $r$ , отличный от нуля, а все ее миноры более высокого порядка (если таковые имеются) равны нулю. Обозначение:  $\text{rang } A = r$ .

При этом минор порядка  $r$ , не равный нулю, называется *базисным минором* матрицы  $A$ . Столбцы и строки матрицы  $A$ , содержащие элементы базисного минора, называются *базисными столбцами* и *базисными строками*.

Отметим, что у матрицы может быть несколько базисных миноров. Например, ранг матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , равен 2, базисными являются миноры  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$  и  $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$ . В первом случае базисными будут первый и второй столбцы матрицы, во втором — первый и третий.

Ранг матрицы не изменяется при ее транспонировании.

Если матрица  $A$  нулевая, т. е. все ее элементы равны нулю, то и все миноры матрицы равны нулю. Ранг такой матрицы считается равным нулю.

### 2. Теорема о базисном миноре.

**Теорема 10 (о базисном миноре).** *Базисные столбцы (строки) матрицы линейно независимы. Любой столбец (строка) матрицы является линейной комбинацией ее базисных столбцов (строк).*

Следствия (сформулируем их для столбцов, для строк имеют место такие же утверждения).

1. Для того чтобы столбцы матрицы были линейно зависимы (независимы), необходимо и достаточно, чтобы ее ранг был меньше числа (равен числу) столбцов.

2. Ранг матрицы равен размерности линейной оболочки ее столбцов.

3. Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых столбцов.

4. Максимальное число линейно независимых столбцов матрицы равно максимальному числу ее линейно независимых строк.

**3. Вычисление ранга матрицы.** Перечислим операции над столбцами матрицы, не изменяющие ее ранга:

- перестановка столбцов местами;
- умножение столбца на число, не равное нулю;
- прибавление к столбцу линейной комбинации других столбцов;
- вычеркивание нулевого столбца;
- вычеркивание столбца, равного линейной комбинации других столбцов.

Аналогичные операции над строками матрицы также не изменяют ее ранга.

С помощью указанных операций над строками и столбцами ненулевой матрицы  $A = (a_{ij})$  ее можно привести к матрице  $B$  следующего вида:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & b_{r3} & \dots & b_{rr} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{s1} & b_{s2} & b_{s3} & \dots & b_{sr} \end{pmatrix},$$

где  $b_{ii} \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, r$ , а элементы  $b_{ij}$ , расположенные в  $i$ -й строке ( $i = 1, \dots, r - 1$ ) правее элемента  $b_{ii}$ , равны нулю. Отсюда следует, что минор матрицы  $B$ , образованный первыми  $r$  строками, равен  $b_{11} \cdot b_{22} \cdots \cdot b_{rr} \neq 0$ , и, значит,  $\text{rang } B = r$ . Следовательно, и

$$\text{rang } A = r.$$

Приведение матрицы  $A$  к виду  $B$  состоит из  $r$  шагов.

Первый шаг.

а) Вычеркнем нулевые строки и столбцы матрицы  $A$ . Получившуюся матрицу снова обозначим буквой  $A$ , а ее элементы через  $a_{ij}$ .

б) Если  $a_{11} = 0$ , то переставим строки и столбцы так, чтобы в левом верхнем углу оказался элемент, отличный от нуля. Элементы получившейся матрицы  $\tilde{A}$  обозначим  $\tilde{a}_{ij}$ . При этом  $\tilde{a}_{11} \neq 0$ . Если  $a_{11} \neq 0$ , то матрица  $\tilde{A}$  — это сама матрица  $A$ .

в) Прибавим к  $k$ -му столбцу матрицы  $\tilde{A}$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) первый столбец, умноженный на число  $-\tilde{a}_{1k}/\tilde{a}_{11}$ . Получим матрицу  $C$  с элементами  $c_{ij}$ , у которой  $c_{11} = \tilde{a}_{11} \neq 0$ , а все остальные элементы первой строки равны нулю:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Если при этом окажутся равными нулю также все элементы каждого столбца, начиная со второго, то, вычеркнув нулевые столбцы, придем

к матрице  $B$ , у которой  $r = 1$ . В противном случае сделаем второй шаг.

Второй шаг.

а) Вычеркнем нулевые строки и столбцы матрицы  $C$ . Получившуюся матрицу снова обозначим  $C$ , а ее элементы через  $c_{ij}$ .

б) Если  $c_{22} = 0$ , то переставим строки и столбцы (причем первую строку и первый столбец не переставляем) так, чтобы элемент с индексами 2, 2 стал отличен от нуля. Элементы получившейся матрицы  $\tilde{C}$  обозначим  $\tilde{c}_{ij}$ . При этом  $\tilde{c}_{11} = c_{11} \neq 0$ ,  $\tilde{c}_{22} \neq 0$ .

в) Прибавим к  $k$ -му столбцу матрицы  $\tilde{C}$  ( $k = 3, 4, \dots$ ) второй столбец, умноженный на число  $-\tilde{c}_{2k}/\tilde{c}_{22}$ . Получим матрицу  $D$  с элементами  $d_{ij}$ , у которой  $d_{11} = \tilde{c}_{11} \neq 0$ ,  $d_{22} = \tilde{c}_{22} \neq 0$ , а все элементы первой и второй строк, расположенные правее  $d_{11}$  и  $d_{22}$ , равны нулю:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Если окажутся равными нулю также все элементы каждого столбца, начиная с третьего, то, вычеркнув нулевые столбцы, придем к матрице  $B$ , у которой  $r = 2$ . В противном случае сделаем третий шаг, полностью аналогичный первым двум шагам. Если ранг матрицы  $A$  равен  $r$ , то после  $r$  шагов получим матрицу  $B$ .

### Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определения ранга матрицы, базисного минора, базисных строк и базисных столбцов.
2. Найдите ранг, все базисные миноры и соответствующие им базисные строки и столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Может ли ранг матрицы с размерами  $5 \times 6$  быть равен: 3; 5; 6; 7?
4. Чему равен ранг транспонированной матрицы  $A^T$ , если  $\text{rang } A = r$ ?
5. Сформулируйте теорему о базисном миноре.
6. Пусть ранг  $m \times n$ -матрицы  $A$  равен  $r$ . Являются ли столбцы матрицы  $A$  линейно зависимыми, если: а)  $r < n$ ; б)  $r = n$ ?
7. Могут ли быть линейно независимыми строки с тремя элементами, если число строк равно: 2; 3; 4; 5?
8. Может ли ранг матрицы быть равен  $r$ , если:
  - а) какие-то  $r$  ее столбцов линейно зависимы;
  - б) любые  $r$  столбцов матрицы линейно зависимы;
  - в) какие-то  $r + 1$  столбцов матрицы линейно независимы?
9. Ответы обоснуйте.
9. Чему равно максимальное число линейно независимых столбцов (строк) матрицы, если ее ранг равен  $r$ ?

10. Линейные оболочки  $L(F)$  и  $L(G_1, G_2)$ , где  $F, G_1$  и  $G_2$  — столбцы, совпадают. Являются ли столбцы  $G_1$  и  $G_2$  линейно независимыми? Ответ обоснуйте.
11. Матрица  $A$  имеет  $n$  столбцов  $A_1, \dots, A_n$ , а матрица  $B$  —  $m$  столбцов  $B_1, \dots, B_m$ , причем  $L(A_1, \dots, A_n) = L(B_1, \dots, B_m)$ . Равны ли ранги матриц  $A$  и  $B$ ? Ответ обоснуйте.
12. Перечислите операции над столбцами (строками) матрицы, которые не изменяют ее ранга.
13. Каким может быть ранг матрицы, полученной из матрицы ранга  $r$  вычеркиванием: а) одной строки; б) двух строк?
14. Как связаны размерность линейной оболочки столбцов матрицы с рангом матрицы?
15. Найдите размерность и базис линейной оболочки столбцов матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

### Примеры решения задач

1. В пространстве  $T_4$  даны два столбца,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что они линейно независимы и подобрать столбцы  $e_3$  и  $e_4$  такие, что столбцы  $e_1, e_2, e_3, e_4$  также линейно независимы.

$\triangle$  Составим матрицу из столбцов  $e_1$  и  $e_2$ :  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Ее ранг равен 2, так как выделенный минор второго порядка отличен от нуля (он равен  $-1$ ). По теореме о базисном миноре базисные столбцы  $e_1$  и  $e_2$  линейно независимы.

Выберем столбцы  $e_3$  и  $e_4$  так, чтобы матрица из столбцов  $e_1, e_2, e_3, e_4$  имела определитель, отличный от нуля. Тогда ранг матрицы будет равен 4, и по теореме о базисном миноре столбцы  $e_1, e_2, e_3, e_4$  будут

линейно независимыми. Возьмем, например,  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Тогда  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ , и, следовательно, столбцы  $e_1, e_2, e_3, e_4$  линейно независимы.  $\blacktriangle$

**2.** Доказать следующее утверждение (следствие 1 из теоремы 10): для того чтобы столбцы матрицы были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы ранг  $r$  матрицы был меньше числа  $n$  ее столбцов.

△ Необходимость. Пусть столбцы матрицы линейно зависимы. Если бы  $r = n$ , то все столбцы были бы базисными, и тогда по теореме 10 они были бы линейно независимыми, что противоречит условию. Следовательно,  $r < n$ .

Достаточность. Пусть  $r < n$ . Тогда матрица имеет  $r$  базисных столбцов и хотя бы один (так как  $n - r \geq 1$ ) не базисный столбец, который по теореме 10 является линейной комбинацией базисных столбцов, а значит, линейной комбинацией  $n - 1$  столбцов матрицы (в их число не входит сам этот столбец). По теореме 3 столбцы матрицы линейно зависимы. ▲

**3.** Доказать следствие 2 из теоремы 10: ранг матрицы равен размерности линейной оболочки ее столбцов.

△ Пусть ранг матрицы равен  $r$ . По теореме 10  $r$  базисных столбцов матрицы линейно независимы, а любой столбец матрицы является линейной комбинацией ее базисных столбцов. Поэтому любая линейная комбинация всех столбцов матрицы является линейной комбинацией ее базисных столбцов, а значит,  $r$  базисных столбцов матрицы составляют базис линейной оболочки столбцов матрицы. В силу теоремы 8 размерность этой линейной оболочки равна  $r$ , т. е. равна рангу матрицы. ▲

**4.** Найти ранг и базисный минор матрицы:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 5 \\ -2 & 8 & -10 \\ 4 & -12 & 18 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & -9 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

△ а) Матрица  $A$  имеет минор 2-го порядка, отличный от нуля, например,  $M = \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$ , а  $\det A = 0$ . Следовательно,  $\text{rang } A = 2$ , минор  $M$  является базисным.

Отметим, что в качестве базисного можно взять любой минор второго порядка матрицы, так как все они отличны от нуля.

б) I способ. У матрицы  $A$  имеется минор второго порядка, не равный нулю, например,  $M = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ . Поэтому  $r \geq 2$ , а из размеров матрицы  $A$  следует, что  $r \leq 3$ . Обозначим строки матрицы через  $A_1, A_2, A_3$  и предположим, что  $\text{rang } A = 2$ . Тогда строки  $A_1, A_2, A_3$  линейно зависимы, и так как  $A_1$  и  $A_2$  линейно независимы, то  $A_3 = a \cdot A_1 + b \cdot A_2$ , где  $a$  и  $b$  — некоторые числа. Это матричное

равенство эквивалентно четырем числовым равенствам. Напишем их для элементов первого и второго столбцов:

$$-2 = a - b, \quad -9 = 0 \cdot a - 3 \cdot b.$$

Отсюда  $a = 1, b = 3$ .

Нетрудно проверить теперь, что действительно имеет место равенство  $A_3 = A_1 + 3A_2$ . Итак, строки  $A_1, A_2, A_3$  матрицы  $A$  линейно зависимы, поэтому  $\text{rang } A = 2$ . Базисным минором является, например, указанный минор  $M$ .

II способ. Вычислим ранг матрицы  $A$  способом, описанным на с. 44.

Умножим первый столбец матрицы на  $(-4)$ , а в другой раз на  $5$  и прибавим соответственно к третьему и четвертому столбцу. Получим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & -4 \\ -2 & -9 & 12 & -12 \end{pmatrix}.$$

Умножим теперь второй столбец матрицы  $C$  на  $4/3$ , а в другой раз на  $-4/3$  и прибавим соответственно к третьему и четвертому столбцу. Это дает матрицу

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -9 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркивая нулевые столбцы матрицы  $D$ , получим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \\ -2 & -9 \end{pmatrix},$$

ранг которой равен 2. Следовательно, и  $\text{rang } A = 2$ .  $\blacktriangle$

5. Найти базис и размерность линейной оболочки  $L(A_1, A_2, A_3, A_4)$ , где  $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

Дополнить базис этой линейной оболочки до базиса пространства  $H_2^2$ .

$\triangle$  Рассмотрим в пространстве  $H_2^2$  базис, состоящий из матриц:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Координаты произвольной матрицы  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  в этом базисе равны  $a, b, c, d$ . Запишем координаты данных матриц  $A_1, A_2, A_3, A_4$  в базисе  $e_1, e_2, e_3, e_4$  в виде столбцов и составим матрицу  $B$  из этих столбцов:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее ранг. С этой целью прибавим первый столбец ко второму столбцу, затем к третьему столбцу и, наконец, умножив его на  $(-2)$ , прибавим к четвертому столбцу. Получим матрицу того же ранга

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Третий и четвертый столбцы этой матрицы равны второму столбцу, умноженному соответственно на 2 и на  $(-1)$ . Поэтому третий и четвертый столбцы можно вычеркнуть, не изменив ранга матрицы. Получим матрицу, ранг которой равен 2. Итак, ранг матрицы  $B$  равен 2, а в качестве ее базисного минора можно взять минор второго порядка, расположенный в левом верхнем углу. Следовательно, два первых столбца матрицы  $B$  линейно независимы. Отсюда в силу результата задачи 2 на с. 41 следует, что матрицы  $A_1$  и  $A_2$  линейно независимы, и они являются базисом линейной оболочки  $L(A_1, A_2, A_3, A_4)$ , размерность которой равна 2.

Базис пространства  $H_2^2$  состоит из четырех элементов (четырех матриц). Матрицы  $A_1, A_2, A_5, A_6$  составляют базис, если они, а значит, и столбцы из их координат, будут линейно независимы. Поэтому задача сводится к тому, чтобы добавить к первым двум столбцам матрицы  $B$  еще два столбца так, чтобы определитель полученной матрицы был отличен от нуля. Рассмотрим, например, матрицу

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ее определитель. Прибавив первый столбец ко второму и к четвертому столбцам, получим определитель

$$\left| \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 13 \end{array} \right|.$$

Разлагая его по элементам первой строки, находим

$$\det C = - \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 13 \end{array} \right| = -4 \neq 0.$$

Двум последним столбцам матрицы  $C$  соответствуют матрицы

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix},$$

которые дополняют базис  $A_1, A_2$  линейной оболочки  $L(A_1, A_2, A_3, A_4)$  до базиса пространства  $H_2^2$ .  $\blacktriangle$

**6.** Даны базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейного пространства  $R_n$  и базис  $f_1, f_2, \dots, f_m$  подпространства  $M$ , причем  $m < n$ . Найти в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  координаты каких-нибудь элементов  $f_{m+1}, \dots, f_n$  пространства  $R_n$ , которые дополняют базис  $f_1, f_2, \dots, f_m$  подпространства  $M$  до базиса пространства  $R_n$ .

$\triangle$  Пусть разложение элементов  $f_1, f_2, \dots, f_m$  по базису  $e_1, \dots, e_n$  имеет вид

$$f_q = \sum_{p=1}^n a_{pq} e_p, \quad q = 1, \dots, m.$$

Рассмотрим  $n \times m$ -матрицу  $(a_{pq})$ , столбцы которой составлены из координат элементов  $f_1, \dots, f_m$ . Выделим какой-нибудь ее базисный минор. Он имеет порядок  $m$ , так как элементы  $f_1, \dots, f_m$  линейно независимы.

Координаты  $a_{pq}$  ( $p = 1, \dots, n$ ;  $q = m + 1, \dots, n$ ) искомых элементов  $f_{m+1}, \dots, f_n$  нужно выбрать так, чтобы матрица  $(a_{pq})$  с размерами  $n \times n$  оказалась невырожденной. С этой целью достроим  $n \times m$ -матрицу  $(a_{pq})$  до матрицы с размерами  $n \times n$  следующим образом: если в  $n \times m$ -матрице  $(a_{pq})$  какая-то строка является базисной, то до строки длины  $n$  (т. е. до строки с  $n$  элементами) дополним ее нулями; если же строка не является базисной, то дополним ее до строки длины  $n$  так, чтобы дополненные элементы небазисных  $n - m$  строк образовывали единичную матрицу с размерами  $(n - m) \times (n - m)$ . Нетрудно видеть, что абсолютная величина определителя полученной  $n \times n$ -матрицы  $(a_{pq})$  равна абсолютной величине базисного минора  $n \times m$ -матрицы  $(a_{pq})$  и тем самым определитель полученной  $n \times n$ -матрицы отличен от нуля. В последних  $n - m$  столбцах матрицы стоят координаты искомых элементов  $f_{m+1}, \dots, f_n$ , таких, что совокупность  $f_1, \dots, f_n$  образует базис в  $R_n$ .  $\blacktriangle$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

24. Докажите, что ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых столбцов.
25. Докажите, что операции над столбцами, не изменяющие линейной оболочки столбцов, не изменяют и ранг матрицы.
26. Докажите, что операции а)–д) над столбцами (см. с. 44) не изменяют ранга матрицы.
27. Докажите, что однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы ее коэффициентов меньше числа неизвестных.

28. Докажите, что определитель равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы (строки) линейно зависимы.
29. Докажите, что однородная система линейных уравнений с квадратной матрицей коэффициентов имеет ненулевое (только нулевое) решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы коэффициентов равен (не равен) нулю.
30. Докажите, что матрица ранга  $r$  представима в виде суммы  $r$  матриц ранга 1.
31. Выясните, являются ли следующие столбцы линейно зависимыми:
- $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$
  - $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix};$
  - $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$
  - $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \dots, x_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$
  - $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$
32. Найдите максимальное число линейно независимых столбцов в системах столбцов из упр. 31, а)–д).
33. Докажите, что ранг матрицы  $(a_i \cdot \delta_{ij})$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера) равен числу отличных от нуля чисел  $a_i$ .
34. Найдите ранг и базисный минор матрицы:

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad$  б)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$
- $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad$  г)  $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 & 4 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix};$

д)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ ; е)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ ;

ж)  $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & -2 & -5 \\ 8 & 6 & 12 & -1 & 0 \\ 7 & 9 & 8 & -9 & -25 \\ 1 & 3 & 0 & -5 & -15 \end{pmatrix}$ ; з)  $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 3 & -4 & 1 & 14 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ ;

и)  $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 7 & 9 & -3 & 5 & 6 \\ 5 & 9 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ ; ж)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ;

л)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

35. К данным столбцам добавьте еще один столбец так, чтобы все столбцы были зависимыми (независимыми):

а)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ;

в)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

36. Используя результаты упр. 12 и следствие 2 из теоремы 10, докажите, что  $\text{rang}(A \cdot B) \leq \text{rang } A$ .

37. Используя результаты задачи 36 и операцию транспонирования матриц, докажите, что  $\text{rang}(A \cdot B) \leq \text{rang } B$ .

38. Докажите, что если один из сомножителей произведения  $A \cdot B$  есть невырожденная квадратная матрица, то ранг произведения равен рангу другого сомножителя.

39. В пространстве  $R_3$  даны базис  $e_1, e_2, e_3$  и три элемента:

$$x_1 = e_1 - e_2 + e_3, \quad x_2 = e_1 + e_2 + e_3, \quad x_3 = e_1 - 5e_2 + e_3.$$

Являются ли элементы  $x_1, x_2, x_3$  линейно зависимыми?

40. Найдите базис и размерность линейной оболочки элементов, заданных столбцами своих координат в некотором базисе линейного пространства:

а)  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

б)  $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix};$

в)  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

41. Дополните базисы линейных оболочек из упр. 40 до базиса всего пространства.

42. Найдите какой-нибудь базис и размерность линейного пространства:

а) столбцов с  $n$  элементами ( $n > 3$ ), у которых сумма первых трех элементов равна нулю;

б) симметричных  $3 \times 3$ -матриц;

в) симметричных  $3 \times 3$ -матриц, диагональные элементы которых равны нулю;

г) многочленов  $p(x)$  степени не выше 4, которые удовлетворяют условию  $p(2) = 0$ ;

д) многочленов  $p(x)$  степени не выше  $n$ , которые удовлетворяют условию  $p(1) + p(-1) = 0$ ;

е) матриц  $(a_{ij})$  с размерами  $2 \times 3$ , элементы которых удовлетворяют условиям  $a_{11} = 0$ ,  $a_{22} = a_{23}$ ;

ж) матриц  $X$ , для которых выполняется равенство  $A \cdot X \cdot B = \Theta$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

43. Найдите базис и размерность линейной оболочки многочленов

$$p_1(x) = 3x^2 + 2x + 1, \quad p_2(x) = 4x^2 + 3x + 2,$$

$$p_3(x) = 3x^2 + 2x + 3, \quad p_4(x) = x^2 + x + 1, \quad p_5(x) = 4x^2 + 3x + 4.$$

44. Укажите линейное пространство  $R$ , для которого данное в упр. 42, а)–ж) пространство является подпространством, не совпадающим с  $R$ . Дополните базис данного подпространства до базиса линейного пространства  $R$ .

## § 6. Преобразование базиса и координат

### Основные понятия и формулы

Рассмотрим в пространстве  $R_n$  два базиса:  $e_1, \dots, e_n$  и  $f_1, \dots, f_n$ .

Разложим элементы второго базиса по первому базису:  $f_q = \sum_{p=1}^n a_{pq} e_p$ ,  $q = 1, \dots, n$ . Запишем эти  $n$  равенств в матричном виде:

$$f = e \cdot A. \quad (1)$$

Здесь  $e$  и  $f$  — строки из базисных элементов, например,  $e = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n)$ ,  $A = (a_{pq})$  —  $n \times n$ -матрица. Матрица  $A$  называется *матрицей перехода от базиса  $e_1, \dots, e_n$  к базису  $f_1, \dots, f_n$* . Отметим, что в  $q$ -м столбце матрицы  $A$  стоят координаты  $a_{1q}, a_{2q}, \dots, a_{nq}$  элемента  $f_q$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ .

Так как элементы  $f_1, \dots, f_n$  линейно независимы, то столбцы матрицы  $A$  также линейно независимы, и, следовательно,  $\text{rang } A = n$  и  $\det A \neq 0$ . Поэтому существует обратная матрица  $A^{-1}$ , которая называется *матрицей обратного перехода от базиса  $f_1, \dots, f_n$  к базису  $e_1, \dots, e_n$* . Справедливо равенство

$$e = f \cdot A^{-1}.$$

Заметим, что это равенство можно получить из (1), умножив обе части (1) на  $A^{-1}$  справа. Разложим произвольный элемент  $x$  по базису  $e_1, \dots, e_n$  и по базису  $f_1, \dots, f_n$ :

$$x = \sum_{p=1}^n b_p e_p, \quad x = \sum_{p=1}^n c_p f_p.$$

Составим столбцы из координат элемента  $x$  в этих базисах:

$$X_e = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X_f = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Имеют место следующие формулы преобразования координат элемента  $x$  при преобразовании базиса:

$$X_e = A \cdot X_f, \quad (2)$$

$$X_f = A^{-1} \cdot X_e. \quad (3)$$

Каждое из этих матричных равенств эквивалентно соответственно  $n$  числовым равенствам

$$b_p = \sum_{q=1}^n a_{pq} c_q, \quad p = 1, \dots, n,$$

$$c_p = \sum_{q=1}^n \frac{A_{qp}}{\det A} b_q, \quad p = 1, \dots, n;$$

где  $A_{qp}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{qp}$  матрицы  $A$ ;  
 $\frac{A_{qp}}{\det A}$  — элементы обратной матрицы  $A^{-1}$ .

### Контрольные вопросы и задания

1. Как составить матрицу перехода от одного базиса к другому?
2. Может ли матрица перехода от одного базиса к другому быть вырожденной? Ответ обоснуйте.
3. Составьте матрицу перехода от базиса  $e_1, e_2, e_3$  к базису  $f_1, f_2, f_3$ , если  $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$ ,  $f_2 = -e_1 + e_2 + e_3$ ,  $f_3 = 3e_1 - e_2 + 4e_3$ . Найдите матрицу обратного перехода.
4. Напишите формулы преобразования координат элемента при преобразовании базиса.

### Примеры решения задач

1. Пусть  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  — координатные векторы прямоугольной системы координат на плоскости. Найти разложение вектора  $\mathbf{x} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$  по базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , если  $\mathbf{e}_1 = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{e}_2 = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ .

△ По определению матрица перехода от базиса  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  к базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  есть матрица

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Столбец  $X$  координат вектора  $\mathbf{x}$  в базисе  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

По формуле (3) находим столбец  $X_e$  координат вектора  $\mathbf{x}$  в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ :

$$X_e = A^{-1} X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итак,  $\mathbf{x} = -2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ .  $\blacktriangle$

**2.** В пространстве  $R_2$  даны три базиса:  $e_1, e_2; f_1, f_2$  и  $g_1, g_2$ , причем  $f_1 = e_1 - e_2, f_2 = e_1 + e_2, g_1 = 3e_1 + e_2, g_2 = 5e_1 + 2e_2$ . Найти матрицу перехода от базиса  $f_1, f_2$  к базису  $g_1, g_2$ .

$\triangle$  По определению матрица перехода от базиса  $e_1, e_2$  к базису  $f_1, f_2$  есть матрица  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ , а матрица перехода от базиса  $e_1, e_2$  к базису  $g_1, g_2$  есть матрица  $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . По формуле (1) имеем  $f = eA, g = eB$ . Из первого равенства находим  $e = f \cdot A^{-1}$ . Подставляя во второе равенство, получаем  $g = f \cdot A^{-1}B$ .

Таким образом, матрицей перехода от базиса  $f_1, f_2$  к базису  $g_1, g_2$  является матрица  $A^{-1}B$ . Вычисляем матрицу  $A^{-1}$ :

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а затем находим произведение  $A^{-1}B$ :

$$A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & 7/2 \end{pmatrix}. \blacktriangle$$

**3.** Найти разложение элемента  $p(x) = x^3 + x + 1$  пространства  $P_3$  по базису  $p_0 = 1, p_1 = x + a, p_2 = (x + a)^2, p_3 = (x + a)^3$ .

$\triangle$  Поскольку

$$(x + a)^2 = a^2 + 2ax + x^2, \quad (x + a)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3,$$

то матрица  $A$  перехода от базиса  $1, x, x^2, x^3$  к базису  $p_0, p_1, p_2, p_3$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и составляем столбец  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  из координат элемента  $p(x) = x^3 + x + 1$  в базисе  $1, x, x^2, x^3$ . По формуле (3) находим столбец  $X_2$

координат элемента  $p(x)$  в базисе  $p_0, p_1, p_2, p_3$ :

$$X_2 = A^{-1} X_1 = \begin{pmatrix} 1 - a - a^3 \\ 1 + 3a^2 \\ -3a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, искомое разложение имеет вид

$$p(x) = (1 - a - a^3)p_0(x) + (1 + 3a^2)p_1(x) - 3ap_2(x) + 1 \cdot p_3(x),$$

или

$$x^3 + x + 1 = (1 - a - a^3) + (1 + 3a^2)(x + a) - 3a(x + a)^2 + (x + a)^3.$$

Отметим, что это представление для  $p(x)$  можно получить с помощью формулы Тейлора, разложив функцию  $p(x)$  по степеням  $x + a$ . ▲

**4.** Пусть  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  — координатные векторы прямоугольной системы координат на плоскости. Найти матрицу перехода от базиса  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  к базису  $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$ , повернутому на угол  $\varphi$  по отношению к базису  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ . Найти матрицу обратного перехода от базиса  $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$  к базису  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ .

△ Координаты векторов  $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$  в базисе  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  имеют вид  $\mathbf{i}' = \{\cos \varphi, \sin \varphi\}$ ,  $\mathbf{j}' = \{-\sin \varphi, \cos \varphi\}$  (объясните, почему). Пользуясь определением, составляем матрицу  $A(\varphi)$  перехода от базиса  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  к базису  $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$ :

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Вычисляем матрицу  $A^{-1}(\varphi)$  обратного перехода:

$$A^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Отметим, что обратный переход от базиса  $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$  к базису  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  есть поворот базиса на угол  $(-\varphi)$ , и поэтому матрицу этого перехода можно найти по формуле (4), заменив  $\varphi$  на  $(-\varphi)$ :  $A^{-1}(\varphi) = A(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

- 45.** Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:
- поменять местами два элемента первого базиса;
  - поменять местами два элемента второго базиса;
  - записать элементы обоих базисов в обратном порядке?

46. Даны координаты элементов  $f_1, f_2, f_3, x$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$  пространства  $R_3$ . Докажите, что элементы  $f_1, f_2, f_3$  образуют базис пространства  $R_3$  и найдите координаты элемента  $x$  в этом базисе, если столбцы  $F_k$  координат элементов  $f_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) и столбец  $X$  координат элемента  $x$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$  имеют вид:

а)  $F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$

б)  $F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix};$

в)  $F_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$

47. Найдите координаты элемента  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  в базисе

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

линейного пространства  $T_4$ .

48. В линейном пространстве  $T_3$  даны два базиса:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите:

- а) матрицу перехода от базиса  $f_1, f_2, f_3$  к базису  $g_1, g_2, g_3$ ;  
 б) матрицу обратного перехода;  
 в) координаты элементов  $f_1$  и  $g_3$  в каждом из базисов;  
 г) координаты элемента  $y = 2f_1 + 3f_2 - f_3$  в базисе  $g_1, g_2, g_3$ .

49. Найдите матрицу перехода от базиса  $1, x, x^2, \dots, x^n$  пространства  $P_n$  к базису  $1, x - a, (x - a)^2, \dots, (x - a)^n$ .

50. Разложите элемент  $x^4 - x + 2$  пространства  $P_4$  по базису

$$1, \quad x - 3, \quad (x - 3)^2, \quad (x - 3)^3, \quad (x - 3)^4.$$

51. Даны векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, & \mathbf{f}_2 &= \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, & \mathbf{f}_3 &= 2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}, \\ \mathbf{g}_1 &= \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, & \mathbf{g}_2 &= 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}, & \mathbf{g}_3 &= 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, & \mathbf{x} &= 5\mathbf{i} - 4\mathbf{k}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — координатные векторы прямоугольной системы координат в пространстве. Найдите координаты вектора  $\mathbf{x}$  в базисах  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$  и  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ , а также матрицы перехода от базиса  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$  к базису  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$  и обратного перехода.

52. Элемент  $f(x) = 3 - e^x + 4e^{2x} + 2e^{3x}$  линейной оболочки  $L(2, e^x - e^{2x}, e^{3x} + e^{2x}, e^x - 1)$  разложите по базису

$$f_1 = 1 + e^x + e^{2x} + e^{3x}, \quad f_2 = e^x + e^{2x} + e^{3x}, \quad f_3 = e^{2x} + e^{3x}, \quad f_4 = e^{3x}.$$

53. Пусть  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — координатные векторы прямоугольной системы координат в пространстве. Найдите матрицу перехода от базиса  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  к базису  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ , если:

а)  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  — векторы, симметричные векторам  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  относительно прямой  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{2}$ ;

б)  $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$  — проекции векторов  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  на плоскость  $x + y + z - 5 = 0$ , а  $\mathbf{k}' = [\mathbf{i}' \times \mathbf{j}']$  — векторное произведение векторов  $\mathbf{i}'$  и  $\mathbf{j}'$  (проекцией вектора  $\overrightarrow{AB}$  на плоскость  $\pi$  называется вектор  $\overrightarrow{A'B'}$ , где  $A'$  и  $B'$  — проекции точек  $A$  и  $B$  на плоскость  $\pi$ );

в)  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  — векторы, полученные поворотом векторов  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  на  $120^\circ$  вокруг прямой  $x = y = z$ .

## § 7. Изоморфизм линейных пространств

### Основные понятия и теоремы

Говорят, что между элементами множеств  $M$  и  $M'$  установлено взаимно однозначное соответствие, если каждому элементу  $x$  из множества  $M$  поставлен в соответствие определенный элемент  $x'$  из множества  $M'$ , так что при этом каждый элемент  $x'$  из  $M'$  оказывается сопоставленным одному элементу  $x$  из  $M$ . Сопоставление элементу  $x$  элемента  $x'$  будем обозначать так:  $x \leftrightarrow x'$ .

Элемент  $x'$  называется *образом* элемента  $x$ , а элемент  $x$  — *пробразом* элемента  $x'$ .

**Определение.** Два линейных пространства  $R$  и  $R'$  (над одним и тем же числовым полем) называются *изоморфными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, удовлетворяющее следующим двум условиям.

1°. Сумме прообразов  $x$  и  $y$  соответствует сумма их образов  $x'$  и  $y'$ , т. е. если  $x \leftrightarrow x'$  и  $y \leftrightarrow y'$ , то  $x + y \leftrightarrow x' + y'$ .

2°. Произведению прообраза  $x$  на число  $\alpha$  соответствует произведение образа  $x'$  элемента  $x$  на это число, т. е. если  $x \leftrightarrow x'$ , то  $\alpha x \leftrightarrow \alpha x'$ .

Взаимно однозначное соответствие элементов линейных пространств, удовлетворяющее условиям 1° и 2°, называется *изоморфизмом* линейных пространств.

**Обозначение:**  $R \sim R'$ .

Отметим, что если  $R \sim R'$ , то  $\theta \leftrightarrow \theta'$ , где  $\theta$  и  $\theta'$  — нулевые элементы пространств  $R$  и  $R'$ .

**Теорема 11.** *Два линейных пространства (над одним и тем же числовым полем) одинаковой размерности изоморфны, и, обратно, два изоморфных линейных пространства имеют одинаковые размерности.*

Например, пространство  $H_n^m$  матриц с размерами  $m \times n$  изоморфно пространству  $P_{mn-1}$  многочленов степени, не превосходящей  $m \times n - 1$ , так как размерность каждого из этих пространств равна  $m \cdot n$ .

### Контрольные вопросы и задания

- Что означают слова “между элементами двух множеств установлено взаимно однозначное соответствие”?
- Какие линейные пространства называются изоморфными?
- Может ли образом (прообразом) нулевого элемента быть ненулевой элемент?
- Могут ли линейное пространство и его подпространство, не совпадающее со всем пространством, быть изоморфными?
- Изоморфны ли линейное пространство  $T_3$  столбцов с тремя элементами и линейное пространство  $P_3$  многочленов степени не выше 3? Ответ обоснуйте.
- Приведите примеры трех линейных пространств, изоморфных линейному пространству  $T_n$  столбцов с  $n$  элементами.

### Примеры решения задач

**1.** Доказать, что если  $R \sim R'$ , то  $\theta \leftrightarrow \theta'$ , где  $\theta$  и  $\theta'$  — нулевые элементы пространств  $R$  и  $R'$ .

△ Пусть  $R \sim R'$ ,  $x \leftrightarrow x'$ . В силу условия 2° изоморфизма линейных пространств элементу  $0 \cdot x$  из пространства  $R$  сопоставляется элемент  $0 \cdot x'$  из  $R'$ . Так как  $0 \cdot x = \theta$  и  $0 \cdot x' = \theta'$ , то, следовательно, элементу  $\theta$  сопоставляется элемент  $\theta'$ . ▲

**2.** Доказать, что если линейные пространства  $R$  и  $R'$  изоморфны, то линейно независимым элементам  $x_1, \dots, x_m$  пространства  $R$  соответствуют линейно независимые элементы  $x'_1, \dots, x'_m$  пространства  $R'$ .

△ Предположим, что элементы  $x_1, \dots, x_m$  линейно независимы, а их образы  $x'_1, \dots, x'_m$  линейно зависимы. Тогда существует линейная комбинация элементов  $x'_1, \dots, x'_m$ , равная нулевому элементу  $\theta'$ , не все коэффициенты которой равны нулю. В силу изоморфизма пространств  $R$  и  $R'$  эта линейная комбинация является образом линейной комбинации элементов  $x_1, \dots, x_m$  с теми же коэффициентами. С другой стороны, элемент  $\theta'$  является образом нулевого элемента  $\theta$  пространства  $R$ . Следовательно, указанная линейная комбинация элементов  $x_1, \dots, x_m$ , не все коэффициенты которой равны нулю, равна нулевому элементу  $\theta$ , и потому элементы  $x_1, \dots, x_m$  линейно зависимы, что противоречит условию. Полученное противоречие доказывает, что элементы  $x'_1, \dots, x'_m$  также линейно независимы. ▲

**3.** Указать соответствие между элементами линейных пространств  $T_3$  и  $P_2$ , являющееся изоморфизмом.

△ Рассмотрим базис  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  в пространстве  $T_3$  и базис  $p_0(x) = 1$ ,  $p_1(x) = x$ ,  $p_2(x) = x^2$  в пространстве  $P_2$ . Элемент  $y = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$  пространства  $T_3$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$  имеет координаты  $c_1, c_2, c_3$ , так как

$$y = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3.$$

Поставим элементу  $y$  пространства  $T_3$  в соответствие элемент  $y'$  пространства  $P_2$ , имеющий в базисе  $p_0, p_1, p_2$  те же координаты  $c_1, c_2, c_3$ , т. е.  $y'$  есть многочлен  $c_1 + c_2x + c_3x^2$ . Это соответствие взаимно однозначное, так как каждый элемент однозначно определяется своими координатами в данном базисе. При этом соответствию сумме прообразов соответствует сумма их образов, так как при сложении элементов их координаты складываются. Аналогично, для любого числа  $\alpha$  элементу  $\alpha \cdot y$  пространства  $T_3$  соответствует элемент  $\alpha \cdot y'$  пространства  $P_2$ . Следовательно, указанное соответствие есть изоморфизм. ▲

**4.** Какие пространства  $H_n^m$  матриц с размерами  $m \times n$  изоморфны пространству  $T_6$  столбцов с шестью элементами?

△ Размерности пространств  $H_n^m$  и  $T_6$  равны соответственно  $mn$  и 6. Из теоремы 11 следует, что пространства  $H_n^m$  и  $T_6$  изоморфны тогда и только тогда, когда  $m \cdot n = 6$ . Следовательно, пространства  $H_6^1, H_1^6, H_3^2, H_2^3$  изоморфны пространству  $T_6$ .

Отметим, что пространство  $H_1^6$  — это пространство матриц с размерами  $6 \times 1$ , т. е. это само пространство  $T_6$ . Разумеется, любое линейное пространство изоморфно самому себе. ▲

**Задачи и упражнения для самостоятельной работы**

54. Докажите, что если  $R \sim R'$  и элементы  $x_1, \dots, x_m$  пространства  $R$  линейно зависимы, то их образы  $x'_1, \dots, x'_m$  также линейно зависимы.
55. Докажите теорему 11: если  $\dim R = \dim R'$ , то  $R \sim R'$ , и, обратно, если  $R \sim R'$ , то  $\dim R = \dim R'$ .
56. Докажите, не опираясь на теорему 11, что линейные пространства разных размерностей не являются изоморфными.
57. Найдите  $n$  для указанных ниже пространств, если известно, что эти пространства изоморфны пространству столбцов  $T_6$ :
- для пространства  $H_n^2$ ;
  - для пространства  $H_3^n$ ;
  - для пространства симметричных  $n \times n$ -матриц с нулевыми диагональными элементами;
  - для пространства  $P_n$ ;
  - для подпространства многочленов  $p(x)$  из  $P_n$ , удовлетворяющих условию  $p(0) = 0$ ;
  - для подпространства столбцов из  $T_n$ , сумма элементов которых равна нулю.

# ГЛАВА III

## СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

### § 1. Существование решения системы линейных уравнений

#### Основные понятия и теоремы

Рассмотрим систему  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

( $a_{ij}$  и  $b_i$  — известные числа).

Если ввести  $m \times n$ -матрицу  $A = (a_{ij})$ , столбец  $X$ , элементами которого являются неизвестные  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , и столбец  $B$ , элементами которого являются свободные члены  $b_1, b_2, \dots, b_m$ , то данную систему можно записать в виде

$$AX = B. \quad (1)$$

Если  $B = \Theta$  — нулевой столбец, то система (1) называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*. Матрица  $A$  называется *основной* матрицей системы (1),  $B$  — столбцом свободных членов. Если к матрице  $A$  добавить столбец  $B$ , то получим матрицу  $A^*$ , называемую *расширенной* матрицей системы (1).

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение.

**Теорема 1** (теорема Кронекера и Капелли). Для того чтобы система (1) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы равнялся рангу расширенной матрицы системы:  $\text{rang } A = \text{rang } A^*$ .

Система уравнений (1) называется *квадратной*, если  $n = m$ , т. е. число неизвестных равно числу уравнений системы.

**Теорема 2.** Квадратная система линейных уравнений (1) с невырожденной матрицей  $A$  имеет единственное решение. Это решение можно записать в виде

$$x_k = \frac{D_k(b_i)}{D}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

где  $D$  — определитель матрицы  $A$ , а  $D_k(b_i)$  — определитель матрицы, которая получается из матрицы  $A$  заменой  $k$ -го столбца на столбец свободных членов.

Формулы (2) называются *формулами Крамера*. То же самое решение можно записать в матричном виде:

$$X = A^{-1}B.$$

### Контрольные вопросы и задания

1. Какая матрица называется основной и какая — расширенной матрицей системы линейных уравнений?
2. Составьте расширенную матрицу системы двух уравнений с тремя неизвестными  $x, y, z$ :  $x = 1, y - z = 0$ .
3. Какая система уравнений называется совместной?
4. Сформулируйте необходимое и достаточное условие совместности системы линейных уравнений.
5. Является ли совместной система уравнений  $x + y = 1, 2x + 2y = 4$ ?
6. Какая система уравнений называется квадратной?
7. При каком условии квадратная система линейных уравнений имеет единственное решение?
8. Напишите выражение для решения квадратной системы линейных уравнений с невырожденной матрицей:
  - а) по формулам Крамера;
  - б) через обратную матрицу по отношению к основной матрице системы.

### Примеры решения задач

#### 1. Является ли совместной система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1? \end{cases}$$

△ Воспользуемся теоремой Кронекера и Капелли. С этой целью найдем сначала ранг основной матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Четвертый столбец матрицы  $A$  равен первому столбцу, а третий столбец равен первому, умноженному на  $-1$ . Поэтому третий и четвертый столбцы можно вычеркнуть, не изменив при этом ранга матрицы. Получится матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

ранг которой, очевидно, равен 2. Следовательно, и  $\text{rang } A = 2$ .

Составим теперь расширенную матрицу  $A^*$ , добавив к матрице  $A$  столбец свободных членов данной системы, и снова вычеркнем третий и четвертый столбцы, что не изменяет ранга матрицы. Получится матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы отличен от нуля (он равен 8), поэтому ранг этой матрицы равен 3 и, следовательно,  $\text{rang } A^* = 3$ .

Таким образом,  $\text{rang } A = 2 \neq 3 = \text{rang } A^*$ , т. е. ранги основной и расширенной матриц не равны. Поэтому данная система уравнений несовместна. ▲

**2.** При каких значениях  $c$  совместна система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = c? \end{cases}$$

△ Основная матрица  $A$  данной системы такая же, как в примере 1. Как было установлено,  $\text{rang } A = 2$ . Составив расширенную матрицу и вычеркнув в ней третий и четвертый столбцы (как в примере 1, это не изменяет ранга матрицы), получим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & c \end{pmatrix},$$

определитель которой равен  $3c + 6$ . Если  $c \neq -2$ , то этот определитель отличен от нуля, поэтому  $\text{rang } A^* = 3 \neq \text{rang } A$ , и, следовательно, данная система уравнений несовместна. Если же  $c = -2$ , то  $\det B = 0$ , а так как у матрицы  $B$  есть миноры второго порядка, отличные от нуля, то  $\text{rang } B = 2$ , и поэтому  $\text{rang } A^* = 2$ . Итак, при  $c = -2$   $\text{rang } A = \text{rang } A^*$  и, следовательно, данная система совместна. ▲

**3.** Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение, и найти это решение.

△ Данная система уравнений является квадратной ( $n = m = 3$ ). Вычислим определитель  $D$  ее основной матрицы:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

Так как  $D \neq 0$ , то по теореме 2 система уравнений имеет единственное решение.

Найдем его по формулам Крамера. С этой целью вычислим определители  $D_k(b_i)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , входящие числителями в правые части формул Крамера (см. (2)). Определитель  $D_1(b_i)$  получается из определителя  $D$ , если заменить первый столбец определителя  $D$  столбцом свободных членов данной системы

$$D_1(b_i) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12.$$

Аналогично находим определители  $D_2(b_i)$  и  $D_3(b_i)$ :

$$D_2(b_i) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad D_3(b_i) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6.$$

По формулам Крамера получаем

$$x_1 = \frac{D_1(b_i)}{D} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2(b_i)}{D} = 1, \quad x_3 = \frac{D_3(b_i)}{D} = -1.$$

Итак, данная система имеет единственное решение  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = -1$ .  $\blacktriangle$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Исследуйте на совместность систему уравнений, у которой основная матрица  $A$  и столбец свободных членов  $B$  имеют вид:

a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix};$

б)  $A$  — та же матрица, что и в пункте а),  $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}$ ;

в)  $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 7 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$

2. При каких значениях  $c$  совместна система уравнений:

a)  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = c, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 2x_4 = c; \end{cases}$

$$\text{в) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + cx_4 = 13; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = c, \\ 5x_1 + cx_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3? \end{cases}$$

3. Решите систему линейных уравнений  $AX = B$  в случае, когда:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## § 2. Однородные системы линейных уравнений

### Основные понятия и теоремы

Рассмотрим однородную систему  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными, записанную в матричной форме

$$AX = \Theta. \quad (1)$$

Здесь  $A$  —  $m \times n$ -матрица,  $X$  — искомый столбец с  $n$  элементами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $\Theta$  — нулевой столбец с  $m$  элементами. Система (1) совместна, так как имеет по крайней мере нулевое решение  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ . Каждое решение  $X$  системы (1) является элементом линейного пространства  $T_n$  — пространства столбцов с  $n$  элементами.

**Теорема 3.** *Множество всех решений однородной системы линейных уравнений (1) является подпространством линейного пространства  $T_n$ .*

**Определение.** Базис линейного пространства решений однородной системы линейных уравнений называется *фундаментальной совокупностью решений* этой системы (краткое обозначение: ФСР).

**Теорема 4.** *Размерность линейного пространства решений однородной системы линейных уравнений равна  $n - r$ , где  $n$  — число неизвестных,  $r$  — ранг матрицы системы.*

Из теоремы 4 следует, что если  $r < n$ , то число решений, составляющих ФСР, равно  $n - r$ . Так как в линейном пространстве (ненулевой размерности) бесконечно много базисов, то у системы (1) при  $r < n$  бесконечно много ФСР.

**Теорема 5.** Общее решение однородной системы уравнений (1) описывается формулой

$$X = \sum_{k=1}^{n-r} c_k X_k, \quad (2)$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$  — произвольные числа, а  $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$  — ФСР системы (1).

Иными словами: при любых значениях  $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$  формула (2) дает решение системы уравнений (1), и обратно, для любого решения  $X$  однородной системы уравнений (1) существуют числа  $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$  такие, что решение  $X$  представимо в виде (2).

### Контрольные вопросы и задания

1. Может ли однородная система уравнений быть несовместной?
2. Элементом какого линейного пространства является решение  $X$  однородной системы линейных уравнений  $AX = \Theta$  с  $n$  неизвестными?
3. Является ли линейным пространством множество всех решений  $X$  однородной системы линейных уравнений  $AX = \Theta$ ?
4. Какова размерность линейного пространства решений однородной системы 8 линейных уравнений с 12 неизвестными, если ранг матрицы системы равен 5?
5. Что называется фундаментальной совокупностью решений однородной системы линейных уравнений?
6. Напишите формулу, описывающую общее решение однородной системы линейных уравнений.
7. Сколько ФСР имеет однородная система линейных уравнений?

### Примеры решения задач

#### 1. Найти ФСР и общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

△ Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{-1} & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

была рассмотрена в упр. 34, д) из гл. II, ее ранг равен 2. Поэтому размерность пространства решений данной системы равна  $n - r = 5 - 2 = 3$  и ее ФСР состоит из трех решений. В матрице  $A$  возьмем в качестве базисного минора выделенный рамкой минор

второго порядка. Третья строка матрицы  $A$  является линейной комбинацией базисных строк, поэтому последнее уравнение системы является следствием первых двух уравнений и его можно отбросить. В первых двух уравнениях члены, соответствующие базисному минору, оставляем в левой части, а неизвестные  $x_1, x_4, x_5$  считаем “свободными” и переносим члены с этими неизвестными в правые части уравнений. В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -2x_1 + 2x_4 - 4x_5, \\ -2x_2 + 5x_3 = -4x_1 - x_4 - 7x_5, \end{cases} \quad (3)$$

равносильной исходной системе, т. е. множество решений системы (3) совпадает с множеством решений исходной системы уравнений.

Найдем первое базисное решение  $X_1$ . Для этого положим  $x_1 = 1$ ,  $x_4 = x_5 = 0$ . Система (3) примет вид

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -2, \\ -2x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

Определителем матрицы полученной системы является базисный минор, отличный от нуля. Следовательно, эта система имеет единственное решение, которое можно найти, например, по формулам Крамера:  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 0$ . Таким образом,  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Полагая в системе (3)  $x_1 = 0$ ,  $x_4 = 1$ ,  $x_5 = 0$ , аналогично находим  $x_2 = 13$ ,  $x_3 = 5$ ,

т. е. вторым базисным решением является столбец  $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Наконец, полагая  $x_1 = 0$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 1$ , находим  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = -1$ . Следовательно, третье базисное решение есть  $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Итак,

ФСР, состоящая из решений  $X_1, X_2, X_3$ , построена. Отметим, что построенная таким образом ФСР называется *нормальной* ФСР. Подчеркнем, что столбцы  $X_1, X_2, X_3$ , образующие нормальную ФСР, линейно независимы, поскольку “свободные” неизвестные  $x_1, x_4, x_5$  были выбраны так, что выделенный рамками минор третьего порядка в

матрице из этих столбцов

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

отличен от нуля, и поэтому ранг этой матрицы равен 3, т. е. равен числу столбцов матрицы.

Напишем теперь общее решение исходной системы уравнений:

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3,$$

или, в координатах,

$$x_1 = c_1, \quad x_2 = 2c_1 + 13c_2 + c_3, \quad x_3 = 5c_2 - c_3, \quad x_4 = c_2, \quad x_5 = c_3,$$

где  $c_1, c_2, c_3$  — произвольные постоянные. ▲

**2.** Известно, что столбцы  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  образуют

ФСР некоторой однородной системы линейных уравнений. Из скольких уравнений может состоять эта система? Привести пример такой системы, состоящей из трех уравнений.

△ Ответим вначале на первый вопрос задачи. Так как столбцы  $X_1$  и  $X_2$  имеют по четыре элемента, то число  $n$  неизвестных системы равно 4. Число решений в ФСР по условию равно 2, т. е.  $n - r = 2$ . Поэтому ранг матрицы системы уравнений равен 2. Следовательно, однородная система линейных уравнений с данной ФСР может содержать любое число, но не менее двух уравнений.

Систем линейных уравнений, имеющих ФСР, состоящую из  $X_1$  и  $X_2$ , бесконечно много. Построим одну из таких систем, содержащую три уравнения. Будем искать первые два уравнения в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Нужно так подобрать коэффициенты  $a_{ij}$ , чтобы  $X_1$  и  $X_2$  были решениями системы (4). Подставив  $X_1$  и  $X_2$  в эту систему, получим

$$\begin{cases} a_{11} - a_{12} = 0, \\ a_{21} - a_{22} = 0, \\ -a_{12} + 2a_{13} + a_{14} = 0, \\ -a_{22} + 2a_{23} + a_{24} = 0. \end{cases}$$

Одним из решений последней системы является следующий набор чисел  $a_{ij}$ :

$$a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = a_{14} = 1, \quad a_{13} = a_{24} = 0, \quad a_{23} = \frac{1}{2}.$$

При таких значениях  $a_{ij}$  система (4) имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 0,5 x_3 = 0. \end{cases}$$

Решения  $X_1$  и  $X_2$  образует ее ФСР. В качестве третьего уравнения системы можно взять произвольную линейную комбинацию найденных двух уравнений, например их сумму. Итак, одним из возможных ответов является система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 0,5 x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 0,5 x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \blacktriangle$$

**3.** В линейном пространстве  $P_2$  многочленов степени, не превосходящей 2, найти подпространство многочленов  $P(x)$ , удовлетворяющих условиям  $P(1) = 0$ ,  $P(2) = 0$ , и определить его размерность.

△ Пусть  $M$  — искомое подпространство многочленов. Произвольный многочлен из  $P_2$  запишем в виде  $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ . Тогда условия, определяющие принадлежность  $P(x)$  подпространству  $M$ , примут вид

$$\begin{cases} P(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ P(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0. \end{cases}$$

Получилась однородная система линейных уравнений с тремя неизвестными  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ . Ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

этой системы равен 2. Поэтому размерность  $n - r$  пространства решений равна 1. Нормальной ФСР этой системы является, например, решение

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а общее решение системы получается умножением найденного решения на произвольную постоянную  $c$ :  $a_0 = 2c$ ,  $a_1 = -3c$ ,  $a_2 = c$ . Итак, любой многочлен из подпространства  $M$  имеет вид  $P(x) = c(2 - 3x + x^2)$ . В качестве базиса этого подпространства можно взять многочлен  $2 - 3x + x^2$ . Так как базис состоит из одного элемента, то размерность подпространства  $M$  равна 1. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

4. Найдите ФСР и запишите общее решение однородной системы линейных уравнений:

$$\text{а) } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = 0, \\ 7x_1 + 7x_2 + 9x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{г) } 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 0;$$

$$\text{д) } \begin{cases} 4x_1 + 4x_3 + 8x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + 10x_5 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 14x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 10x_5 = 0; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0; \end{cases} \quad \text{ж) } \begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0, \\ -x_2 + x_3 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 - x_5 + x_6 = 0. \end{cases}$$

(Матрицы систем б), д), е), ж) взяты соответственно из упр. 34, е), з) и), к) из гл. II.)

5. Найдите две различные ФСР для системы уравнений:

$$\text{а) } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0;$$

$$\text{б) } \begin{cases} 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 = 0, \\ 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ -3x_1 - x_2 - 7x_3 - 6x_4 = 0, \\ 8x_1 + 4x_2 + 20x_3 + 16x_4 - x_5 = 0, \\ 10x_1 + 3x_2 + 23x_3 + 20x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 0.$$

6. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений, причем в каждом ее реше-

нии  $x_5 = 0$ .

7. Укажите все группы неизвестных, которые могут быть “свободными” неизвестными при решении системы уравнений

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

8. В линейном пространстве  $P_n$  многочленов степени, не превосходящей  $n$ , найдите размерность подпространства многочленов  $P(x)$ , удовлетворяющих условиям  $P(a_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  ( $k \leq n$ ),  $a_1, a_2, \dots, a_k$  — различные числа.
9. В линейном пространстве  $P_4$  многочленов степени, не превосходящей 4, найдите какой-нибудь базис подпространства многочленов  $P(x)$ , для которых  $P(0) = P(1) = P(2) = 0$ .
10. Найдите однородную систему линейных уравнений, состоящую:
- а) из двух уравнений;
  - б) из трех уравнений;
  - в) из четырех уравнений;

для которой столбцы

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -8 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

образуют ее ФСР.

11. Существует ли однородная система линейных уравнений, для которой каждая из совокупностей трех столбцов

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

является ее ФСР?

### § 3. Неоднородные системы линейных уравнений

#### Основные понятия и теоремы

Рассмотрим неоднородную систему  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными

$$AX = B \quad (1)$$

(обозначения те же, что и в § 1, столбец  $B$  ненулевой). Будем считать, что система (1) совместна и ранг матрицы  $A$  равен  $r$ .

**Теорема 6.** *Общее решение неоднородной системы уравнений (1) имеет вид*

$$X = X_0 + \sum_{k=1}^{n-r} c_k X_k, \quad (2)$$

где  $X_0$  — какое-нибудь (частное) решение системы (1),  $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$  — ФСР соответствующей однородной системы линейных уравнений,  $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$  — произвольные числа.

#### Контрольные вопросы и задания

1. Может ли неоднородная система линейных уравнений быть несовместной?
2. Какой формулой описывается общее решение совместной неоднородной системы линейных уравнений?
3. Образует ли множество всех решений неоднородной системы линейных уравнений линейное пространство?

#### Примеры решения задач

##### 1. Доказать, что система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = -1 \end{cases} \quad (3)$$

совместна и найти ее общее решение.

△ I способ. Столбец свободных членов, умноженный на 6, равен разности пятого и четвертого столбцов основной матрицы данной системы уравнений. Поэтому ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы, и, следовательно, система совместна.

Общее решение однородной системы уравнений, соответствующей (3), было найдено в примере 1 (с. 68). Чтобы найти частное решение системы (3), выделим в основной матрице  $A$  базисный минор, стоящий на пересечении первых двух строк со вторым и третьим

столбцами (т. е. тот же минор, что и в упомянутом примере), отбросив последнее уравнение системы (3), а первые два запишем в виде

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = 1 - 2x_1 + 2x_4 - 4x_5, \\ -2x_2 + 5x_3 = 1 - 4x_1 - x_4 - 7x_5. \end{cases}$$

Эта система равносильна исходной системе (3). Положим в ней “свободные” неизвестные равными нулю, т. е.  $x_1 = x_4 = x_5 = 0$ . В результате придем к системе уравнений

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = 1, \\ -2x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 1$ . Таким образом, найдено частное решение системы (3):  $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Общее решение системы (3) запишем по формуле (2):

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

или, в координатах,

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1, & x_2 &= 2 + 2c_1 + 13c_2 + c_3, \\ x_3 &= 1 + 5c_2 - c_3, & x_4 &= c_2, & x_5 &= c_3. \end{aligned} \quad (4)$$

**II способ.** Применяя к строкам расширенной матрицы элементарные операции, не изменяющие ее ранга, преобразуем расширенную матрицу  $A^*$  к виду

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить матрицу  $A_1$ , ко второй строке матрицы  $A^*$  была прибавлена первая строка, умноженная на  $-2$ , а к третьей строке прибавлена первая, умноженная на  $-1$ . В матрице  $A_1$  третья строка равна второй, умноженной на  $2$ . Теперь очевидно, что  $\text{rang } A = \text{rang } A^* = 2$  и  $n - r = 3$ .

Произведем такие же действия с уравнениями системы (3). Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ -x_3 + 5x_4 - x_5 = -1, \end{cases}$$

равносильную исходной. Второе уравнение запишем так:

$$x_3 = 5x_4 - x_5 + 1,$$

и, подставляя  $x_3$  в первое уравнение, выразим  $x_2$  через остальные неизвестные:  $x_2 = 2 + 2x_1 + 13x_4 + x_5$ . Итак, имеем

$$\begin{cases} x_2 = 2 + 2x_1 + 13x_4 + x_5, \\ x_3 = 1 + 5x_4 - x_5, \end{cases}$$

где  $x_1, x_4, x_5$  могут принимать любые значения. Положив  $x_1 = c_1$ ,  $x_4 = c_2$ ,  $x_5 = c_3$ , получим решение задачи в виде (4).  $\blacktriangleleft$

**2.** В пространстве  $P_2$  многочленов степени, не превосходящей 2, найти все многочлены  $P(x)$ , удовлетворяющие условиям  $P(1) = 0$ ,  $P(2) = 3$ . Образуют ли эти многочлены подпространство пространства  $P_2$ ?

$\triangle$  Любой многочлен  $P(x)$  из пространства  $P_2$  можно представить в виде  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ . Тогда условия  $P(1) = 0$ ,  $P(2) = 3$  записываются так:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 3. \end{cases}$$

Получилась неоднородная система двух уравнений с тремя неизвестными  $a_0, a_1, a_2$ . Она совместна (ранг основной и расширенной матриц равен 2) и ее общее решение можно записать в виде

$$a_0 = -3 + 2c, \quad a_1 = 3 - 3c, \quad a_2 = c,$$

где  $c$  — произвольная постоянная. Поэтому множество многочленов, удовлетворяющих заданным условиям, дается формулой

$$P(x) = -3 + 2c + (3 - 3c)x + cx^2.$$

Это множество многочленов не является подпространством пространства  $P_2$ , так как сумма  $P(x)$  двух многочленов  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$  из этого множества не принадлежит данному множеству. В самом деле,  $P(2) = P_1(2) + P_2(2) = 3 + 3 = 6$ , т. е. сумма  $P(x)$  не удовлетворяет условию  $P(2) = 3$ .  $\blacktriangleleft$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

**12.** Докажите совместность и найдите общее решение системы линейных уравнений, заданной своей расширенной матрицей, в которой последний столбец есть столбец свободных членов:

а)  $(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix})$ ;    б)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 7 & 6 \\ 7 & 7 & 9 & 1 & 14 \end{pmatrix}$ ;

в)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 & b \end{pmatrix}$ ; г)  $(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 10)$ ;

д)  $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & -7 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 10 & 8 \\ 3 & -4 & 1 & 14 & 0 & 14 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$ ; е)  $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 7 & 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & -3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ ;

ж)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ;

з)  $\begin{pmatrix} 9 & 21 & -15 & 5 & 10 \\ 12 & 28 & -20 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ ;

и)  $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -7 & -6 & 0 & -1 \\ 8 & 4 & 20 & 16 & -1 & 4 \\ 10 & 3 & 23 & 20 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

(Основные матрицы систем уравнений пунктов а)–ж) этого упражнения взяты из соответствующих пунктов упр. 4.)

13. Докажите, что для совместности системы уравнений  $AX = B$  необходимо и достаточно, чтобы столбец  $B$  принадлежал линейной оболочке столбцов матрицы  $A$ .
14. Докажите совместность и найдите общее решение системы уравнений:

а) 
$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3; \end{cases}$$
 б) 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$$

15. Исследуйте на совместность систему уравнений и найдите ее общее решение при тех значениях параметра  $c$ , при которых система совместна:

а) 
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 = c, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2; \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + cx_3 = 1, \\ x_1 + cx_2 + x_3 = 1, \\ cx_1 + x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$$

в) 
$$\begin{cases} 2cx_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + cx_3 = 1, \\ (c-6)x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -3; \end{cases}$$

г) 
$$\begin{cases} x_1 + cx_2 + x_3 - cx_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + cx_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

**16.** Докажите, что в каждом решении системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 8x_4 + 2x_5 = -6 \end{cases}$$

значения неизвестных  $x_3$  и  $x_5$  равны соответственно 1 и 0.

**17.** Докажите, что существует система уравнений, для которой каждая из формул

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -0,6 \\ 0,2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -0,2 \\ 0,4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

описывают ее общее решение? Приведите пример такой системы уравнений.

**18.** В пространстве  $P_5$  многочленов степени, не превосходящей 5, найдите три линейно независимых многочлена  $P_k(x)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , удовлетворяющих условиям

$$P_k(0) = 1, \quad P_k(1) = 0, \quad P_k(2) = -5.$$

# ГЛАВА IV

## ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

### § 1. Определение евклидова и унитарного пространства

Основные понятия, формулы и теоремы

#### 1. Понятие евклидова пространства.

Определение. Вещественное линейное пространство  $R$  называется *вещественным евклидовым пространством* (или просто *евклидовым пространством*), если в нем введено *скалярное умножение* элементов, т. е. указано правило, ставящее в соответствие любым двум элементам  $x$  и  $y$  вещественное число (будем обозначать это число  $(x, y)$  и называть *скалярным произведением* элементов  $x$  и  $y$ ), причем указанное правило удовлетворяет для любых  $x, y, z$  из  $R$  и любого вещественного числа  $\alpha$  следующим требованиям (они называются *аксиомами скалярного произведения*).

1°.  $(x, y) = (y, x)$  (перестановочность или коммутативность сомножителей).

2°.  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$  (распределительное свойство).

3°.  $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ .

4°.  $(x, x) > 0$ , если  $x \neq 0$  и  $(x, x) = 0$ , если  $x = 0$ .

Произвольное евклидово пространство часто обозначают буквой  $\mathcal{E}$  или  $\mathcal{E}_n$ ; индекс  $n$  указывает размерность пространства.

Примеры евклидовых пространств:

а)  $V_3$  — линейное пространство геометрических векторов со скалярным произведением

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}});$$

б)  $T_n$  — линейное пространство столбцов с  $n$  элементами, в котором скалярное произведение столбцов  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  и  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  определено формулой

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k;$$

в)  $C[a, b]$  — линейное пространство непрерывных на  $[a, b]$  функций, в котором скалярное произведение элементов  $x(t)$  и  $y(t)$

определенено формулой

$$(x, y) = \int_a^b x(t)y(t) dt.$$

## 2. Понятие унитарного пространства.

**Определение.** Комплексное линейное пространство  $R$  называется *комплексным евклидовым* пространством или *унитарным* пространством, если в нем введено скалярное умножение элементов, т. е. указано правило, ставящее в соответствие любым двум элементам  $x$  и  $y$  комплексное число (будем обозначать его  $(x, y)$  и называть *скалярным произведением* элементов  $x$  и  $y$ ), причем это правило удовлетворяет для любых  $x, y, z$  из  $R$  и любого комплексного числа  $\alpha$  следующим требованиям (аксиомам скалярного произведения):

- 1)  $(x, y) = \overline{(y, x)}^*$ ;
- 2)  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z);$
- 3)  $(\alpha x, y) = \alpha(x, y);$
- 4)  $(x, x) > 0$ , если  $x \neq \theta$  и  $(x, x) = 0$ , если  $x = \theta$ .

Отметим, что аксиома 1) отличается от соответствующей аксиомы 1° для вещественного евклидова пространства (в связи с этим см. пример 4 на с. 84). Из аксиом 1)–3) следует, что

$$(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$$

и

$$(x, y + z) = (x, y) + (x, z).$$

Произвольное унитарное пространство будем обозначать буквой  $E$  или  $E_n$ ; индекс  $n$  указывает размерность пространства.

Примеры унитарных пространств:

а)  $T_n^*$  — линейное пространство столбцов с  $n$  элементами, в котором скалярное произведение столбцов  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  и  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  ( $x_k, y_k$  — комплексные числа) определено формулой

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k};$$

б)  $C^*[a, b]$  — линейное пространство непрерывных на  $[a, b]$  комплекснозначных функций, в котором скалярное произведение элементов  $x(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$  и  $y(t) = \delta(t) + i\gamma(t)$  определено формулой

$$(x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt = \int_a^b (\alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma) dt + i \int_a^b (\beta \delta - \alpha \gamma) dt.$$

---

\* ) Здесь символом  $\bar{b}$  обозначается число, комплексно сопряженное с числом  $b$ . Напомним, что если  $b = \alpha + i\beta$ , то  $\bar{b} = \alpha - i\beta$ .

### 3. Выражение скалярного произведения через координаты элементов.

Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — базис в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_n$  или унитарном пространстве  $E_n$ , и пусть  $x = \sum_{p=1}^n x_p e_p$ ,  $y = \sum_{q=1}^n y_q e_q$ .

Скалярное произведение элементов  $x$  и  $y$  в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_n$  имеет вид

$$(x, y) = \sum_{p,q=1}^n a_{pq} x_p y_q,$$

где  $a_{pq} = (e_p, e_q)$ . Из аксиомы 1° следует, что  $a_{pq} = a_{qp}$ .

Скалярное произведение элементов  $x$  и  $y$  в унитарном пространстве  $E_n$  имеет вид

$$(x, y) = \sum_{p,q=1}^n a_{pq} x_p \bar{y}_q,$$

где  $a_{pq} = (e_p, e_q)$ . Из аксиомы 1) следует, что  $a_{pq} = \bar{a}_{qp}$ .

**4. Метрические понятия. Неравенство Коши–Буняковского.** Скалярное произведение позволяет ввести в евклидовом пространстве метрические понятия длины элемента и угла между элементами. *Нормой (длиной) элемента  $x$  евклидова пространства (вещественного или комплексного)* называется число  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ . В вещественном евклидовом пространстве углом между ненулевыми элементами  $x$  и  $y$  называется угол  $\varphi$ , удовлетворяющий условиям  $\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$  и  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Корректность такого определения угла вытекает из следующей теоремы.

**Теорема 1.** В любом евклидовом пространстве (вещественном или комплексном) справедливо неравенство Коши–Буняковского

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \quad (1)$$

Из неравенства (1) следует, что  $|\cos \varphi| \leq 1$ . В унитарном пространстве понятие угла между элементами не вводится.

Неравенство Коши–Буняковского в конкретных евклидовых пространствах:

а) в вещественном пространстве  $T_n$

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \left( \sum_{k=1}^n (x_k)^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{k=1}^n (y_k)^2 \right)^{1/2};$$

б) в комплексном пространстве  $T_n^*$

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k \right| \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right)^{1/2};$$

в) в вещественном пространстве  $C[a, b]$

$$\left| \int_a^b x(t)y(t) dt \right| \leq \left( \int_a^b x^2(t) dt \right)^{1/2} \cdot \left( \int_a^b y^2(t) dt \right)^{1/2};$$

г) в комплексном пространстве  $C^*[a, b]$

$$\left| \int_a^b x(t)\bar{y}(t) dt \right| \leq \left( \int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left( \int_a^b |y(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

### Контрольные вопросы и задания

- Сформулируйте определение вещественного евклидова пространства и приведите пример такого пространства.
- Каким образом можно ввести скалярное умножение элементов: в пространстве  $T_n$ ; в пространстве  $C[a, b]$ ?
- Сформулируйте определение унитарного пространства и приведите пример такого пространства.
- Каким образом можно ввести скалярное умножение элементов: в пространстве  $T_n^*$ ; в пространстве  $C^*[a, b]$ ?
- Докажите следующие свойства скалярного произведения в унитарном пространстве: а)  $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$ ; б)  $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$ .
- Как выражается скалярное произведение элементов евклидова (унитарного) пространства через координаты элементов в произвольном базисе?
- Как определяются норма (длина) элемента и угол между ненулевыми элементами евклидова пространства?
- Какое неравенство называется неравенством Коши–Буняковского?
- Запишите выражение для нормы элемента и неравенство Коши–Буняковского в пространствах  $T_n$ ,  $T_n^*$ ,  $C[a, b]$ ,  $C^*[a, b]$ .

### Примеры решения задач

- 1.** Доказать, что для любого элемента  $x$  евклидова пространства справедливо равенство  $(\theta, x) = 0$ .

△ Для любого элемента  $x$  имеем  $0 \cdot x = \theta$ . Используя это равенство и аксиому  $3^\circ$  скалярного произведения, получаем  $(\theta, x) = (0 \cdot x, x) = 0 \cdot (x, x) = 0$ . ▲

- 2.** Доказать, что в пространстве  $P_2$  многочленов степени, не превосходящей 2, скалярное умножение элементов  $f(x)$  и  $g(x)$  можно ввести по формуле

$$(f, g) = f(-1) \cdot g(-1) + f(0) \cdot g(0) + f(1) \cdot g(1).$$

△ Для доказательства данного утверждения нужно показать, что для предложенного правила выполняются четыре аксиомы скалярного произведения.

1°.  $(f, g) = (g, f)$  в силу коммутативности умножения чисел.

2°. Проверим, что  $(f + h, g) = (f, g) + (h, g)$ . В самом деле,

$$\begin{aligned} (f + h, g) &= [f(-1) + h(-1)] \cdot g(-1) + [f(0) + h(0)] \cdot g(0) + [f(1) + h(1)] \cdot g(1) = \\ &= [f(-1) \cdot g(-1) + f(0) \cdot g(0) + f(1) \cdot g(1)] + \\ &\quad + [h(-1) \cdot g(-1) + h(0) \cdot g(0) + h(1) \cdot g(1)] = (f, g) + (h, g). \end{aligned}$$

3°. Проверим, что  $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$ , где  $\alpha$  — произвольное число.  
Действительно,

$$(\alpha f, g) = \alpha f(-1) \cdot g(-1) + \alpha f(0) \cdot g(0) + \alpha f(1) \cdot g(1) = \alpha(f, g).$$

4°. Для любого многочлена  $f(x)$ , степень которого не выше двух, справедливо неравенство  $(f, f) = f^2(-1) + f^2(0) + f^2(1) > 0$ .

Остается показать, что если  $(f, f) = 0$ , то  $f(x) = 0$  для любого  $x$ , т. е.  $f = \theta$ . Пусть  $(f, f) = 0$ , т. е.  $f^2(-1) + f^2(0) + f^2(1) = 0$ . Отсюда получаем  $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$ . Но так как степень многочлена  $f(x)$  не превосходит 2, то число его корней не более двух, если хотя бы один коэффициент многочлена отличен от нуля. Следовательно,  $f(x) = 0$ .

Таким образом, выполнены все аксиомы и, значит, по указанной формуле можно ввести скалярное произведение. ▲

**3.** Пусть  $P_2$  — евклидово пространство, рассмотренное в предыдущем примере.

а) Вычислить нормы многочленов  $f(x) = 1 - x + x^2$  и  $g(x) = 1 + x$  и угол между ними.

б) Написать выражение скалярного произведения двух произвольных элементов пространства  $P_2$  через их координаты в базисе  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = x$ ,  $p_2 = x^2$ .

△ а) Вычислим значения  $f(x)$  и  $g(x)$  в точках  $x = -1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ :

$$f(-1) = 3, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 1, \quad g(-1) = 0, \quad g(0) = 1, \quad g(1) = 2.$$

По формуле скалярного произведения  $(f, g) = f(-1) \cdot g(-1) + f(0) \cdot g(0) + f(1) \cdot g(1)$  находим

$$\begin{aligned} (f, g) &= 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3, \quad (f, f) = 3^2 + 1^2 + 1^2 = 11, \\ (g, g) &= 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5. \end{aligned}$$

Вычислим теперь нормы элементов  $f$  и  $g$  и угол между ними:

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{11}, \quad \|g\| = \sqrt{5}, \quad \cos \varphi = \frac{(f, g)}{\|f\| \cdot \|g\|} = \frac{3}{\sqrt{55}},$$

откуда  $\varphi = \arccos \frac{3}{\sqrt{55}}$ .

б) Найдем выражение скалярного произведения произвольных элементов  $f(x)$  и  $g(x)$  через их координаты в базисе:  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = x$ ,  $p_2 = x^2$ .

Пусть  $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ ,  $g(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2$ ; тогда  $f = \sum_{i=1}^2 c_i p_i$ ,  $g = \sum_{j=1}^2 d_j p_j$  и скалярное произведение элементов  $f$  и  $g$

можно записать в виде  $(f, g) = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} c_i d_j$ , где  $a_{ij} = (p_i, p_j)$ . Находим коэффициенты  $a_{ij}$ :

$$\begin{aligned} a_{00} &= (p_0, p_0) = 3, & a_{11} &= (p_1, p_1) = 2, & a_{22} &= (p_2, p_2) = 2, \\ a_{01} &= a_{10} = (p_0, p_1) = 0, & a_{02} &= a_{20} = (p_0, p_2) = 2, \\ a_{12} &= a_{21} = (p_1, p_2) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, скалярное произведение элементов  $f(x)$  и  $g(x)$  через координаты этих элементов в базисе  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = x$ ,  $p_2 = x^2$  выражается так:

$$(f, g) = 3c_0d_0 + 2c_1d_1 + 2c_2d_2 + 2c_0d_2 + 2c_2d_0. \blacksquare$$

**4.** Доказать, что для скалярного произведения в комплексном евклидовом пространстве нельзя сохранить без изменения аксиомы скалярного произведения, принятые в вещественном евклидовом пространстве.

△ Предположим, что в комплексном линейном пространстве введено скалярное произведение, удовлетворяющее условиям 1°–4°. Тогда из аксиом 1° и 3° следует, что для любого числа  $\alpha$  и любого элемента  $x$  имеет место равенство

$$(\alpha x, \alpha x) = \alpha(x, \alpha x) = \alpha(\alpha x, x) = \alpha^2(x, x).$$

Положив  $\alpha = i$ , получим

$$(ix, ix) = -(x, x) < 0,$$

если  $x \neq \theta$ .

Таким образом, пришли к противоречию с аксиомой 4°, в силу которой скалярный квадрат любого элемента линейного пространства должен быть неотрицательным. Следовательно, в комплексном линейном пространстве нельзя сохранить без изменения аксиомы скалярного произведения, принятые в вещественном евклидовом пространстве. Как уже отмечалось, при переходе от вещественного к комплексному евклидову пространству видоизменяется аксиома 1°.  $\blacksquare$

**5.** Можно ли в комплексном линейном пространстве квадратных матриц второго порядка ввести скалярное умножение по формуле:

$$a) (A, B) = a_1 \bar{a}_2 - b_1 \bar{b}_2 + c_1 \bar{c}_2 - d_1 \bar{d}_2,$$

$$\text{б) } (A, B) = a_1 \bar{a}_2 + b_1 \bar{b}_2 + c_1 \bar{c}_2 + d_1 \bar{d}_2,$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}?$$

△ а) Нельзя, так как не выполняется аксиома 4° скалярного произведения. Действительно, для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  имеем

$$(A, A) = a_1 \bar{a}_1 - b_1 \bar{b}_1 + c_1 \bar{c}_1 - d_1 \bar{d}_1 = 1 - 1 = 0,$$

хотя матрица  $A$  не является нулевым элементом пространства, так как не все ее элементы равны нулю.

б) Можно, так как выполняются все четыре аксиомы скалярного произведения в комплексном пространстве. Покажем это.

1) Вычислим  $\overline{(B, A)}$ :

$$\overline{(B, A)} = \overline{a_2 \bar{a}_1} + \overline{b_2 \bar{b}_1} + \overline{c_2 \bar{c}_1} + \overline{d_2 \bar{d}_1} = \bar{a}_2 a_1 + \bar{b}_2 b_1 + \bar{c}_2 c_1 + \bar{d}_2 d_1.$$

Сравнивая, находим, что  $(A, B) = \overline{(B, A)}$ , т. е. аксиома 1) выполняется.

2) Проверим, что  $(A + B, C) = (A, C) + (B, C)$ . Пусть  $C = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}$ . Тогда

$$\begin{aligned} (A + B, C) &= (a_1 + a_2) \bar{a}_3 + (b_1 + b_2) \bar{b}_3 + (c_1 + c_2) \bar{c}_3 + (d_1 + d_2) \bar{d}_3 = \\ &= (a_1 \bar{a}_3 + b_1 \bar{b}_3 + c_1 \bar{c}_3 + d_1 \bar{d}_3) + (a_2 \bar{a}_3 + b_2 \bar{b}_3 + c_2 \bar{c}_3 + d_2 \bar{d}_3) = \\ &= (A, C) + (B, C), \end{aligned}$$

т. е. аксиома 2) выполняется.

3) Аналогично проверяется, что  $(\alpha A, B) = \alpha(A, B)$ .

4) Для любой матрицы  $A$  справедливо неравенство

$$(A, A) = a_1 \bar{a}_1 + b_1 \bar{b}_1 + c_1 \bar{c}_1 + d_1 \bar{d}_1 = |a_1|^2 + |b_1|^2 + |c_1|^2 + |d_1|^2 \geq 0,$$

причем  $(A, A) = 0$  только в том случае, когда  $|a_1| = |b_1| = |c_1| = |d_1| = 0$ , т. е. когда  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Таким образом, скалярный квадрат матрицы неотрицателен и равен нулю лишь тогда, когда матрица нулевая, что доказывает выполнимость аксиомы 4). ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Можно ли в линейном пространстве  $H_3^3$  матриц с вещественными элементами ввести скалярное умножение матриц  $A = (a_{pq})$  и  $B = (b_{pq})$  по формуле

$$(A, B) = a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22} + a_{33}b_{33}?$$

2. В базисе  $e_1, e_2$  вещественного линейного пространства  $R_2$  произвольные элементы  $x$  и  $y$  имеют разложения  $x = x_1e_1 + x_2e_2$ ,  $y = y_1e_1 + y_2e_2$ .

а) Можно ли в пространстве  $R_2$  ввести скалярное умножение элементов по формуле:

$$1^\circ) (x, y) = x_1y_1 - 2x_2y_2;$$

$$2^\circ) (x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2;$$

$$3^\circ) (x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2?$$

б) Вычислите скалярное произведение элементов  $x = e_1 + e_2$  и  $y = -e_1$ , их нормы и угол между ними, если скалярное умножение введено по формуле  $2^\circ$ ) (по формуле  $3^\circ$ ) п. а).

3. Скалярное умножение элементов в пространстве  $P_1$  многочленов степени, не превосходящей 1, введено по формуле  $2^\circ$ ) (по формуле  $3^\circ$ ) из упр. 2, а) в базисе  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = 1 + x$ . Вычислите скалярное произведение многочленов  $f(x) = 1 + x$  и  $g(x) = -3x$ , их нормы и угол между ними.
4. Докажите, что в любом вещественном линейном пространстве  $R_n$  можно ввести скалярное умножение элементов по формуле

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k,$$

где  $x_k$  и  $y_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) — координаты элементов  $x$  и  $y$  в заданном базисе  $e_1, \dots, e_n$ . Покажите, что при этом  $(e_p, e_q) = \delta_{pq}$ , где  $\delta_{pq}$  — символ Кронекера.

5. В линейном пространстве  $P_5$  многочленов степени, не превосходящей 5, вычислите скалярное произведение многочленов  $f(x) = 2 - 3x + 4x^3 - x^4$  и  $g(x) = 1 - x + x^2 + x^3 - 2 \cdot x^5$ , если скалярное произведение определено по формуле упр. 4 в базисе  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = x$ , ...,  $e_6 = x^5$ .
6. Докажите, что в вещественном евклидовом пространстве неравенство Коши–Буняковского переходит в равенство тогда и только тогда, когда элементы  $x$  и  $y$  линейно зависимы.

7. Докажите, что норма элементов евклидова пространства (вещественного или комплексного), введенная по формуле  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ , удовлетворяет следующим условиям (они называются *аксиомами нормы*):

- 1) для любого элемента  $x$ :  $\|x\| \geqslant 0$ , причем  $\|x\| = 0$  только в том случае, когда  $x = \theta$ ;
- 2) для любого элемента  $x$  и любого числа  $\alpha$ :

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|;$$

- 3) для любых элементов  $x$  и  $y$  справедливо неравенство

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|,$$

называемое неравенством треугольника.

8. Пусть  $y$  — фиксированный ненулевой элемент евклидова пространства,  $\alpha$  — фиксированное число. Является ли множество всех элементов  $x$ , для которых  $(x, y) = \alpha$ , подпространством данного евклидова пространства?

9. Докажите, что:

- а) если  $(x, y) = 0$  для любого элемента  $x$ , то  $y = \theta$ ;
- б) если  $(x, y) = (x, z)$  для любого элемента  $x$  ( $y$  и  $z$  — фиксированные элементы), то  $y = z$ .

10. В базисе  $e_1, e_2$  комплексного линейного пространства произвольные элементы  $x$  и  $y$  имеют разложения

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2, \quad y = y_1 e_1 + y_2 e_2.$$

- а) Можно ли в этом пространстве ввести скалярное умножение элементов по формуле:

$$1^\circ) (x, y) = x_1 \overline{y_1} + i x_1 \overline{y_2} + (i - 1) x_2 \overline{y_1} + 3 x_2 \overline{y_2};$$

$$2^\circ) (x, y) = 2 x_1 \overline{y_1} + i x_1 \overline{y_2} - i x_2 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2};$$

$$3^\circ) (x, y) = x_1 \overline{y_1} + (1 + i) x_1 \overline{y_2} + (i - 1) x_2 \overline{y_1} - x_2 \overline{y_2}?$$

- б) Вычислите скалярное произведение столбцов  $A = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \end{pmatrix}$ ,

$B = \begin{pmatrix} 3i \\ 1-i \end{pmatrix}$  и их нормы, если скалярное умножение столбцов введено по формуле  $2^\circ)$  из а) в базисе  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$ .

## § 2. Ортонормированный базис

**Основные понятия и теоремы**

**1. Ортогональность элементов. Ортонормированный базис.** Элементы  $x$  и  $y$  евклидова пространства (вещественного или комплексного) называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю:

$$(x, y) = 0.$$

**Определение.** Базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  евклидова (унитарного) пространства называется *ортогональным*, если элементы базиса попарно ортогональны:  $(e_i, e_j) = 0$  при  $i \neq j$ .

Ортогональный базис  $e_1, \dots, e_n$  называется *ортонормированным базисом*, если норма каждого базисного элемента равна 1. Иначе говоря, базис  $e_1, \dots, e_n$  называется ортонормированным, если  $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$  (символ Кронекера).

**Теорема 2.** В любом  $n$ -мерном ( $n \geq 1$ ) евклидовом (унитарном) пространстве существует ортонормированный базис.

Примеры ортонормированных базисов:

1) в пространстве  $V_3$  геометрических векторов любые три единичных попарно ортогональных вектора  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  образуют ортонормированный базис;

2) в евклидовом пространстве  $T_n$  и в унитарном пространстве  $T_n^*$  (см. примеры на с. 79 и 80) столбцы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют ортонормированный базис;

3) в линейной оболочке  $L(\cos x, \sin x)$  функции  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x$  и  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$  образуют ортонормированный базис, если скалярное произведение функций  $f(x)$  и  $g(x)$  определено формулой

$$(f, g) = \int_0^\pi f(x)g(x) dx.$$

**2. Процедура ортогонализации.** Ортонормированный базис в  $n$ -мерном евклидовом (унитарном) пространстве можно построить на основе произвольного базиса с помощью процедуры ортогонализации. Опишем эту процедуру.

Пусть даны  $k$  линейно независимых элементов  $x_1, x_2, \dots, x_k$  евклидова пространства  $\mathcal{E}_n$  (или унитарного пространства  $E_n$ ). Построим попарно ортогональные элементы  $e_1, e_2, \dots, e_k$ , представляющие собой линейные комбинации элементов  $x_1, \dots, x_k$  следующим образом.

Положим

$$e_1 = x_1, \quad e_2 = x_2 - a_{12}e_1,$$

где  $a_{12} = (x_2, e_1) \cdot (e_1, e_1)^{-1}$ . Такой выбор коэффициента  $a_{12}$  обеспечивает ортогональность  $e_1$  и  $e_2$ :  $(e_1, e_2) = 0$ . Далее, положим

$$e_3 = x_3 - a_{13}e_1 - a_{23}e_2 = x_3 - \sum_{i=1}^2 a_{i3}e_i,$$

где  $a_{13} = (x_3, e_1) \cdot (e_1, e_1)^{-1}$ ,  $a_{23} = (x_3, e_2) \cdot (e_2, e_2)^{-1}$ . Такой выбор коэффициентов  $a_{13}$  и  $a_{23}$  обеспечивает ортогональность  $e_3$  к элементам  $e_1$  и  $e_2$  (проверьте это). И так далее. На  $m$ -м шаге ( $m \leq k$ ) полагаем

$$e_m = x_m - \sum_{i=1}^{m-1} a_{im}e_i, \tag{1}$$

где

$$a_{im} = (x_m, e_i) \cdot (e_i, e_i)^{-1}. \tag{2}$$

Такой выбор коэффициентов  $a_{im}$  обеспечивает ортогональность  $e_m$  к элементам  $e_1, \dots, e_{m-1}$ . В результате  $k$  шагов описанная процедура дает попарно ортогональные элементы  $e_1, \dots, e_k$ . Можно доказать, что эти элементы линейно независимы.

Применив процедуру ортогонализации к произвольному базису  $f_1, \dots, f_n$  пространства  $\mathcal{E}_n$  (или  $E_n$ ), получим базис из  $n$  попарно ортогональных элементов  $e_1, \dots, e_n$  (ортогональный базис). Чтобы сделать его ортонормированным, нужно каждый элемент  $e_i$  умножить на число  $\frac{1}{\|e_i\|}$ . Полученные в результате элементы  $g_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, g_n = \frac{e_n}{\|e_n\|}$  образуют ортонормированный базис пространства  $\mathcal{E}_n$  (или  $E_n$ ).

**3. Разложение элементов по ортонормированному базису.** Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — ортонормированный базис в евклидовом или унитарном пространстве,  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  — разложение произвольного элемента  $x$  по данному базису. Тогда координаты  $x_i$  элемента  $x$  выражаются формулой

$$x_i = (x, e_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Скалярное произведение  $(x, e_i)$  называется *проекцией элемента x на элемент  $e_i$* . Таким образом, координаты произвольного элемента

евклидова (унитарного) пространства в ортонормированном базисе равны проекциям этого элемента на соответствующие базисные элементы.

**4. Выражение скалярного произведения через координаты элементов в ортонормированном базисе.** Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — ортонормированный базис в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_n$  (или унитарном пространстве  $E_n$ ),  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ,  $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$  — произвольные элементы этого пространства. Тогда для скалярного произведения элементов  $x$  и  $y$  имеют место следующие выражения:

в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_n$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (3)$$

в унитарном пространстве  $E_n$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) следуют формулы, выражающие норму элемента через его координаты в ортонормированном базисе:

в пространстве  $\mathcal{E}_n$

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right)^{1/2};$$

в пространстве  $E_n$

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

### Контрольные вопросы и задания

1. Какие элементы евклидова пространства называются ортогональными?
2. В пространстве  $C[0, 1]$  скалярное произведение функций  $f(x)$  и  $g(x)$  определено формулой

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Ортогональны ли функции  $f_1(x) = 1$  и  $f_2(x) = x - \frac{1}{2}$ ,  $f_1(x)$  и  $f_3(x) = \cos \pi x$ ,  $f_2(x)$  и  $f_3(x)$ ?

3. Докажите, что если элементы  $x_1$  и  $x_2$  ортогональны, то элементы  $c_1 x_1$  и  $c_2 x_2$  также ортогональны при любых числах  $c_1$  и  $c_2$ .

4. Докажите, что если ненулевые элементы  $x$  и  $y$  евклидова пространства ортогональны, то они линейно независимы. Верно ли обратное утверждение?
5. Что такое ортогональный базис? Что такое ортонормированный базис? Приведите примеры ортонормированных базисов.
6. Опишите процедуру построения ортонормированного базиса на основе произвольного базиса (процедуру ортогонализации).
7. Сколько ортонормированных базисов существует в данном  $n$ -мерном евклидовом пространстве?
8. Напишите формулу для координат произвольного элемента в ортонормированном базисе.
9. Напишите формулу скалярного произведения элементов  $x$  и  $y$  через их координаты в ортонормированном базисе евклидова (унитарного) пространства?
10. Как выражается норма произвольного элемента через его координаты в ортонормированном базисе евклидова (унитарного) пространства?

### Примеры решения задач

**1. а)** Доказать теорему Пифагора в евклидовом пространстве: если  $(x, y) = 0$ , то  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .

**б)** Доказать обратную теорему: если  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ , то  $(x, y) = 0$ .

△ Вычислим квадрат нормы элемента  $x + y$ :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = \\ &= \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует:

а) если  $(x, y) = 0$ , то  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ;

б) обратно, если  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ , то  $(x, y) = 0$ . ▲

**2.** Пусть элементы  $e_1, \dots, e_k$  получены в результате процедуры ортогонализации из элементов  $x_1, \dots, x_k$  по формулам (1), (2). Доказать, что линейная оболочка  $L_1 = L(e_1, \dots, e_k)$  совпадает с линейной оболочкой  $L_2 = L(x_1, \dots, x_k)$ .

△ Докажем сначала, что  $L_1 \subset L_2$ . Для этого достаточно показать, что  $\forall m$  ( $m = 1, \dots, k$ )  $e_m \in L_2$ . По формуле (1) при  $m = 1$  и  $m = 2$  имеем  $e_1 = x_1$ ,  $e_2 = x_2 - a_{12}$ ,  $e_1 = x_2 - a_{12}x_1$ , т. е. элементы  $e_1$  и  $e_2$  являются линейными комбинациями элементов  $x_1, x_2$ . Далее применим метод математической индукции. Пусть элементы  $e_1, \dots, e_{m-1}$  являются линейными комбинациями элементов  $x_1, \dots, x_{m-1}$ , тогда сумма  $\sum_{i=1}^{m-1} a_{im}e_i$  в формуле (1) также является линейной комбинацией элементов  $x_1, \dots, x_{m-1}$  и, следовательно, элемент  $e_m$  — это линейная

комбинация элементов  $x_1, \dots, x_m$ . Поэтому  $e_m \in L_2$  ( $m = 1, \dots, k$ ) и, значит,  $L_1 \subset L_2$ .

Докажем теперь, что  $L_2 \subset L_1$ . С этой целью формулу (1) перепишем в виде

$$x_1 = e_1, \quad x_m = e_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_{im} e_i, \quad m = 2, \dots, k.$$

Отсюда следует, что  $\forall m$  ( $m = 1, \dots, k$ )  $x_m$  является линейной комбинацией элементов  $e_1, \dots, e_m$ , т. е.  $x_m \in L_1$ . Поэтому  $L_2 \subset L_1$ . Из соотношений  $L_2 \subset L_1$  и  $L_1 \subset L_2$  следует, что линейные оболочки  $L_1$  и  $L_2$  совпадают.  $\blacktriangleleft$

**3.** Элементы  $x_1, x_2, x_3, x_4$  евклидова пространства  $\mathcal{E}_5$  имеют следующие разложения по ортонормированному базису  $e_1, \dots, e_5$ :  $x_1 = e_1 + e_3 - e_4 + 2e_5$ ,  $x_2 = e_1 + e_3 - e_4 - 2e_5$ ,  $x_3 = e_1 + 3e_3$ ,  $x_4 = 2e_3 + e_4 + 6e_5$ ;  $L = L(x_1, x_2, x_3, x_4)$  — линейная оболочка данных элементов.

Требуется: а) построить ортонормированный базис линейной оболочки  $L$ ; б) дополнить этот базис до ортонормированного базиса пространства  $\mathcal{E}_5$ .

$\triangle$  а) Из координат элементов  $x_1, \dots, x_4$  в данном базисе составим столбцы

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

и рассмотрим матрицу  $A$  из этих столбцов

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 3 & 2 \\ \boxed{-1} & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ее ранг. Нетрудно проверить, что  $X_4 = X_1 - 2X_2 + X_3$ . Поэтому последний столбец можно удалить из матрицы  $A$ , не изменив ее ранга. Выделенный рамкой минор третьего порядка отличен от нуля, т. е. является базисным минором матрицы. Отсюда следует, что столбцы  $X_1, X_2, X_3$  линейно независимы и, значит, элементы  $x_1, x_2, x_3$  образуют базис линейной оболочки  $L$ .

К этому базису применим процедуру ортогонализации. Используя формулу (1), получаем (новые базисные элементы обозначим  $y_1, y_2, y_3$ )

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 - a_{12}y_1, \quad y_3 = x_3 - a_{13}y_1 - a_{23}y_2.$$

Коэффициенты  $a_{ji}$  определяем последовательно по формуле (2). Сначала находим  $a_{12}$  (при вычислении скалярных произведений пользуемся формулой (3)):

$$a_{12} = (x_2, y_1) \cdot (y_1, y_1)^{-1} = -\frac{1}{7}.$$

Итак,  $y_1 = x_1 = e_1 + e_3 - e_4 + 2e_5$ ,  $y_2 = x_2 + \frac{1}{7}y_1 = \frac{4}{7}(2e_1 + 2e_3 - 2e_4 - 3e_5)$ . Далее, по формуле (2) имеем

$$a_{13} = (x_3, y_1) \cdot (y_1, y_1)^{-1} = -\frac{4}{7}, \quad a_{23} = (x_3, y_2) \cdot (y_2, y_2)^{-1} = \frac{2}{3}.$$

Поэтому

$$y_3 = x_3 - \frac{4}{7}y_1 - \frac{2}{3}y_2 = \frac{1}{3}(-e_1 + 5e_3 + 4e_4).$$

Построенные элементы  $y_1, y_2, y_3$  образуют ортогональный базис в  $L$ . Разделив каждый элемент на его норму, получим ортонормированный базис в  $L$ :

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{y_1}{\|y_1\|} = \frac{1}{\sqrt{7}}(e_1 + e_3 - e_4 + 2e_5), \\ g_2 &= \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2e_1 + 2e_3 - 2e_4 - 3e_5), \\ g_3 &= \frac{y_3}{\|y_3\|} = \frac{1}{\sqrt{42}}(-e_1 + 5e_3 + 4e_4). \end{aligned}$$

б) Займемся теперь дополнением базиса  $g_1, g_2, g_3$  до ортонормированного базиса пространства  $\mathcal{E}_5$ . С этой целью найдем такие элементы  $x = \sum_{i=1}^5 x_i e_i$  пространства  $\mathcal{E}_5$ , которые ортогональны элементам  $g_1, g_2, g_3$ , т. е. удовлетворяют условиям

$$(x, g_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Эти условия дают однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных координат  $x_1, \dots, x_5$  элемента  $x$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ -x_1 + 5x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг матрицы системы равен 3, то размерность пространства решений равна  $5 - 3 = 2$ , т. е. фундаментальная совокупность решений состоит из двух решений. Для нахождения фундаментальной совокупности решений перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x_3 - x_4 + 2x_5 = -x_1, \\ 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -2x_1, \\ 5x_3 + 4x_4 = x_1. \end{cases}$$

Полагая сначала  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 0$ , получаем  $x_3 = -1$ ,  $x_4 = 2$ ,  $x_5 = 0$ ; полагая затем  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ , находим  $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ . Таким образом, фундаментальная совокупность решений состоит из двух

линейно независимых решений  $X_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $X_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , которым

соответствуют линейно независимые элементы  $x_4 = 3e_1 - e_3 + 2e_4$  и  $x_5 = e_2$ , ортогональные к элементам  $g_1, g_2, g_3$ . Более того, элементы  $x_4$  и  $x_5$  ортогональны, так как  $(x_4, x_5) = 0$ . Разделим  $x_4$  на его норму:

$$g_4 = \frac{x_4}{\|x_4\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} (3e_1 - e_3 + 2e_4),$$

и положим  $g_5 = x_5 = e_2$ . Элементы  $g_1, \dots, g_5$  образуют искомый ортонормированный базис в пространстве  $\mathcal{E}_5$ .  $\blacktriangle$

**4.** В пространстве  $P_2$  многочленов степени, не превосходящей 2, скалярное произведение определено формулой (см. пример 2 на с. 82):

$$(f, g) = f(-1) \cdot g(-1) + f(0) \cdot g(0) + f(1) \cdot g(1).$$

Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве  $P_2$ .

$\triangle$  Возьмем в пространстве  $P_2$  какой-нибудь базис, например,  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = x$ ,  $p_3 = x^2$ , и построим ортогональный базис  $y_1, y_2, y_3$ , пользуясь формулами (1), (2). Положим

$$y_1 = p_1, \quad y_2 = p_2 - a_{12}y_1, \quad y_3 = p_3 - a_{13}y_1 - a_{23}y_2.$$

По формулам (2) имеем

$$a_{12} = (p_2, y_1) \cdot (y_1, y_1)^{-1}, \quad a_{13} = (p_3, y_1) \cdot (y_1, y_1)^{-1},$$

$$a_{23} = (p_3, y_2) \cdot (y_2, y_2)^{-1}.$$

Входящие сюда скалярные произведения находим с помощью заданной формулы скалярного произведения:

$$(p_2, y_1) = (p_2, p_1) = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0,$$

$$(p_3, y_1) = (-1)^2 \cdot 1 + 0^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1 = 2,$$

$$(y_1, y_1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3.$$

Отсюда следует, что  $a_{12} = 0$  и поэтому  $y_2 = p_2 = x$ . Кроме того,  $a_{13} = \frac{2}{3}$ .

Далее, имеем  $(p_3, y_2) = (-1)^2 \cdot (-1) + 0^2 \cdot 0 + 1^2 \cdot 1 = 0$  и, следовательно,  $a_{23} = 0$  и  $y_3 = p_3 - \frac{2}{3}p_1 = x^2 - \frac{2}{3}$ .

Таким образом, построен ортогональный базис:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x^2 - \frac{2}{3}.$$

Нормируя элементы  $y_1, y_2, y_3$  (т. е. деля каждый из них на свою норму), получаем ортонормированный базис  $e_1, e_2, e_3$ . Так как  $(y_1, y_1) = 3$ ,  $(y_2, y_2) = 2$ ,  $(y_3, y_3) = \frac{2}{3}$ , то

$$e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad e_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}x^2 - \sqrt{\frac{2}{3}}. \blacktriangle$$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

11. Ненулевые элементы  $x_1, \dots, x_k$  евклидова (унитарного) пространства попарно ортогональны, т. е.  $(x_i, x_j) = 0$  при  $i \neq j$ . Докажите, что элементы  $x_1, \dots, x_k$  линейно независимы.
12. В линейном пространстве  $P_2$  многочленов степени, не превосходящей 2, скалярное произведение элементов  $f(x)$  и  $g(x)$  задано формулой

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

Постройте ортонормированный базис пространства  $P_2$  с помощью процедуры ортогонализации, исходя из базиса  $1, x, x^2$ .

13. Многочлены, определенные формулами

$$P_0(x) = 1, \quad P_k(x) = \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} [(x^2 - 1)^k], \quad k = 1, 2, \dots,$$

называются *многочленами Лежандра* (множитель  $\frac{1}{2^k \cdot k!}$  выбран так, что выполняется равенство  $P_k(1) = 1$ ). Докажите, что многочлены Лежандра  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$  образуют ортогональный базис в евклидовом пространстве  $P_n$  многочленов степени, не превосходящей  $n$ , если скалярное произведение введено по формуле из упр. 12.

14. Докажите, что функции  $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx$  образуют ортогональный базис линейной оболочки этих функций, если скалярное произведение произвольных элементов  $f(x)$  и  $g(x)$  линейной оболочки определено формулой

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) dx.$$

15. Пусть элементы  $e_1, e_2, \dots, e_k$  получены с помощью процедуры ортогонализации из элементов  $x_1, \dots, x_k$ , т. е. по формулам (1), (2). Докажите, что:
  - а) если элементы  $x_1, \dots, x_k$  линейно независимы, то элементы  $e_1, e_2, \dots, e_k$  также линейно независимы;

б) если элементы  $x_1, \dots, x_k$  линейно зависимы, то в процессе ортогонализации какой-то из элементов  $e_1, e_2, \dots, e_k$  окажется нулевым элементом.

**16.** Примените процедуру ортогонализации к элементам  $x_1, x_2, x_3$  евклидова пространства, если:

- а)  $x_1 = e_1 - 2e_2 + 2e_3, x_2 = -e_1 - e_3, x_3 = 5e_1 - 3e_2 - 7e_3$ , где  $e_1, e_2, e_3$  — ортонормированный базис евклидова пространства;  
 б)  $x_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4, x_2 = 3e_1 + 3e_2 - e_3 - e_4, x_3 = -2e_1 + + 6e_3 + 8e_4$ , где  $e_1, e_2, e_3, e_4$  — ортонормированный базис евклидова пространства.

**17.** Разложения элементов  $x_1$  и  $x_2$  евклидова пространства  $\mathcal{E}_4$  по ортонормированному базису  $e_1, e_2, e_3, e_4$  имеют вид:

- а)  $x_1 = e_1 - 2e_2 + e_3 + 3e_4, x_2 = 2e_1 + e_2 - 3e_3 + e_4;$   
 б)  $x_1 = e_1 - e_2 + e_3 - 3e_4, x_2 = -4e_1 + e_2 + 5e_3.$

1°) Покажите, что элементы  $x_1$  и  $x_2$  ортогональны.

2°) Найдите все элементы пространства  $\mathcal{E}_4$ , ортогональные элементам  $x_1$  и  $x_2$ .

3°) Дополните элементы  $x_1$  и  $x_2$  до ортогонального базиса пространства  $\mathcal{E}_4$ .

**18.** Даны система элементов в евклидовом пространстве:

- а) из упр. 16, а); б) из упр. 16, б); в) из упр. 17, а); г) из упр. 17, б);  
 д)  $x_1 = e_1 + e_2 - e_3 + 2e_4 + 3e_5, x_2 = e_1 + e_2 + e_3 + 2e_4 + 3e_5, x_3 = e_1 + e_4 - 2e_5, x_4 = -e_2 + 3e_3 - e_4 - 5e_5$ , где  $e_1, \dots, e_5$  — ортонормированный базис евклидова пространства  $\mathcal{E}_5$ .

1°) Найдите размерность и базис линейной оболочки  $L$  данной системы элементов.

2°) Постройте ортонормированный базис линейной оболочки  $L$ .

3°) Дополните ортонормированный базис линейной оболочки  $L$  до ортонормированного базиса всего евклидова пространства.

### § 3. Разложение евклидова пространства на прямую сумму взаимно ортогональных подпространств. Альтернатива Фредгольма для квадратной системы линейных уравнений

#### Основные понятия и теоремы

**1. Разложение евклидова пространства на прямую сумму взаимно ортогональных подпространств.** Пусть  $M$  — подпространство евклидова пространства  $\mathcal{E}_n$ . Элемент  $z$  называется *ортогональным подпространством*  $M$  (обозначение:  $z \perp M$ ), если  $z$

ортогонален каждому элементу из  $M$ .

*Ортогональным дополнением к подпространству  $M$*  называется совокупность всех элементов евклидова пространства  $\mathcal{E}_n$ , ортогональных  $M$ . Ортогональное дополнение к подпространству  $M$  обозначим  $M^\perp$ . Пусть  $L_1$  и  $L_2$  — два подпространства линейного пространства  $R$ .

**Определение.** Говорят, что пространство  $R$  представляет собой *прямую сумму* подпространств  $L_1$  и  $L_2$ , если для любого элемента  $x$  из пространства  $R$  имеет место единственное представление в виде суммы  $x = x_1 + x_2$ , где  $x_1 \in L_1$ ,  $x_2 \in L_2$ .

Тот факт, что пространство  $R$  является прямой суммой подпространств  $L_1$  и  $L_2$ , записывают так:

$$R = L_1 \oplus L_2.$$

**Теорема 3.** Пусть  $M$  — подпространство евклидова пространства  $\mathcal{E}_n$ ,  $M^\perp$  — ортогональное дополнение к  $M$ . Тогда:

1) ортогональное дополнение  $M^\perp$  является подпространством пространства  $\mathcal{E}_n$ ;

2)  $\mathcal{E}_n = M \oplus M^\perp$ , т. е. для любого элемента  $x$  из  $\mathcal{E}_n$  имеет место единственное представление в виде суммы  $x = y + z$ , где  $y \in M$ ,  $z \in M^\perp$ ;

3) размерность всего пространства  $\mathcal{E}_n$  равна сумме размерностей подпространств  $M$  и  $M^\perp$ , т. е.  $\dim M + \dim M^\perp = n$ ;

4)  $(M^\perp)^\perp = M$ , т. е. ортогональным дополнением к ортогональному дополнению  $M^\perp$  является само подпространство  $M$ .

Если  $x = y + z$ , где  $y \in M$ ,  $z \in M^\perp$ , то  $y$  называется *проекцией* элемента  $x$  на подпространство  $M$ ,  $z$  — *перпендикуляром*, опущенным из элемента  $x$  на подпространство  $M$ , а норма (длина) элемента  $z$  называется *расстоянием* элемента  $x$  до подпространства  $M$ . Если при этом  $z \neq 0$ ,  $y \neq 0$ , то  $x$  называется *наклонной* к подпространству  $M$ .

**2. Альтернатива Фредгольма для системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными.** Рассмотрим системы линейных уравнений

$$AX = B, \tag{1}$$

$$AX = \Theta, \tag{2}$$

$$A^T X = \Theta, \tag{3}$$

где  $A = (a_{ij})$  —  $n \times n$ -матрица,  $X$  — столбец неизвестных,  $B$  — столбец правых частей,  $\Theta$  — нулевой столбец ( $X$ ,  $B$ ,  $\Theta$  — элементы евклидова пространства  $T_n$ ),  $A^T$  — матрица, транспонированная по отношению к матрице  $A$ . Система (3) называется *союзной* по отношению к системе (2).

**Теорема 4** (альтернатива Фредгольма). *Либо система линейных уравнений (2) имеет только нулевое решение, и тогда система (1)*

имеет единственное решение при любом столбце  $B$ , либо система (2) имеет ненулевое решение, и тогда система (1) разрешима в том и только том случае, когда  $B \perp M$ , где  $M$  — пространство решений союзной системы (3), и при каждом таком столбце  $B$  система (1) имеет бесконечно много решений.

### Контрольные вопросы и задания

1. Какой элемент называется ортогональным данному подпространству евклидова пространства?
2. Что такое ортогональное дополнение к подпространству  $M$  евклидова пространства?
3. Докажите, что ортогональное дополнение  $M^\perp$  к подпространству  $M$  евклидова пространства само является подпространством этого пространства.
4. Что означает запись  $R = L_1 \oplus L_2$ ?  
Докажите, что  $R = L_1 \oplus L_2$ , если:
  - а)  $R = V_2$ ,  $L_1$  и  $L_2$  — множества векторов, параллельных соответственно данным пересекающимся прямым;
  - б)  $R = V_3$ ,  $L_1$  и  $L_2$  — множества векторов, параллельных соответственно данным прямой и плоскости, причем прямая и плоскость имеют только одну общую точку;
  - в)  $R = V_3$ ,  $L_1$  — множество векторов, ортогональных данному ненулевому вектору  $\mathbf{a}$ ,  $L_2$  — множество векторов, параллельных вектору  $\mathbf{a}$ .
5. Верно ли символическое равенство  $\mathcal{E}_n = M \oplus M^\perp$ ?
6. Как связаны между собой размерности подпространств  $M$  и  $M^\perp$  евклидова пространства  $\mathcal{E}_n$ ?
7. Что представляет собой ортогональное дополнение к ортогональному дополнению  $M^\perp$ ?
8. Какой элемент евклидова пространства называется проекцией элемента  $x$  на подпространство  $M$  и какой — перпендикуляром, опущенным из  $x$  на  $M$ ?
9. Дайте определение расстояния элемента  $x$  до подпространства  $M$ .
10. Сформулируйте альтернативу Фредгольма для неоднородной системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными.

### Примеры решения задач

1. Элементы  $x_1, x_2, x_3, x_4$  евклидова пространства  $\mathcal{E}_5$  имеют следующие разложения по ортонормированному базису  $e_1, \dots, e_5$ :  
 $x_1 = e_1 + e_3 - e_4 + 2e_5$ ,    $x_2 = e_1 + e_3 - e_4 - 2e_5$ ,    $x_3 = e_1 + 3e_3$ ,    $x_4 = 2e_3 + e_4 + 6e_5$ .

Для элемента  $x = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$  найти:

- а) элементы  $y$  и  $z$  в представлении  $x = y + z$ , где  $y \in L = L(x_1, \dots, x_4)$ ,  $z \in L^\perp$ ;
- б) расстояние элемента  $x$  до подпространства  $L$ .

△ а) Воспользуемся результатом примера 3 на с. 92, где был построен ортонормированный базис  $g_1, \dots, g_5$  пространства  $\mathcal{E}_5$  такой,

что  $g_1, g_2, g_3$  — ортонормированный базис линейной оболочки  $L = L(x_1, \dots, x_4)$ . Ясно, что элементы  $g_4, g_5$  образуют базис ортогонального дополнения  $L^\perp$ .

Представим  $x$  в виде  $x = y + z$ , где

$$y = \sum_{k=1}^3 a_k g_k \in L, \quad z = \sum_{k=4}^5 a_k g_k \in L^\perp.$$

Координаты  $a_k$  можно вычислить по формуле (см. § 2)  $a_k = (x, g_k)$ . Воспользуемся этой формулой для нахождения  $a_4$  и  $a_5$ :  $a_4 = \frac{4}{\sqrt{14}}$ ,  $a_5 = 1$ .

Таким образом,  $z = \frac{4}{\sqrt{14}} g_4 + g_5 = \frac{1}{7} (6e_1 + 7e_2 - 2e_3 + 4e_4)$ .

Элемент  $y$  находим как разность  $x$  и  $z$ :

$$y = x - z = \frac{1}{7} (e_1 + 9e_3 + 3e_4 + 7e_5).$$

б) Расстояние элемента  $x$  до подпространства  $L$  равно  $\|z\|$ :

$$\|z\| = \frac{1}{7} \sqrt{36 + 49 + 4 + 16} = \sqrt{\frac{15}{7}}. \blacksquare$$

**2.** Дано однородная система линейных уравнений с  $n$  неизвестными

$$AX = \Theta,$$

где  $A = (a_{ij})$  —  $m \times n$ -матрица,  $X$  — столбец неизвестных,  $\Theta$  — нулевой столбец.

Столбец  $X$  является элементом евклидова пространства  $T_n$ , а множество всех решений системы (обозначим его  $M$ ) образует подпространство пространства  $T_n$ . Доказать, что ортогональным дополнением к подпространству  $M$  является линейная оболочка столбцов транспонированной матрицы  $A^T$ .

△ Запишем строки матрицы  $A$  в виде столбцов и обозначим их  $A_1, \dots, A_m$ , т. е.  $A_i$  — это  $i$ -й столбец транспонированной матрицы  $A^T$ . Введем линейную оболочку  $L = L(A_1, \dots, A_m)$ . Она является подпространством пространства  $T_n$ . Левая часть  $i$ -го уравнения исходной системы есть скалярное произведение  $(A_i, X)$ . Перепишем систему в виде  $m$  равенств:

$$(A_i, X) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Очевидно, что любое решение  $X$  системы ортогонально к каждому столбцу  $A_i$  и, значит, ортогонально к подпространству  $L$ ; и обратно,

каждый столбец  $X$ , ортогональный подпространству  $L$ , является решением исходной системы. Поэтому множество  $M$  решений системы является ортогональным дополнением к подпространству  $L$ :  $L^\perp = M$ . Отсюда следует, что  $L = M^\perp$ . Таким образом, ортогональным дополнением к подпространству  $M$  является линейная оболочка столбцов транспонированной матрицы  $A^T$ .  $\blacktriangle$

**3.** Даны система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = b_1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = b_2, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = b_3, \end{cases} \quad (1)$$

или  $AX = B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Найти все те столбцы  $B$ , при которых система разрешима.

$\triangle$  Так как  $\det A = 0$  (убедитесь в этом), то соответствующая системе (1) однородная система уравнений  $AX = \theta$  имеет ненулевое решение, и поэтому, согласно теореме 4 система (1) разрешима тогда и только тогда, когда столбец  $B$  ортогонален пространству  $M$  решений союзной системы  $A^T X = \theta$ . Иначе говоря, система (1) разрешима тогда и только тогда, когда  $B \in M^\perp$ . В свою очередь согласно примеру 2 ортогональное дополнение  $M^\perp$  — это линейная оболочка столбцов матрицы, транспонированной по отношению к матрице  $A^T$ , т. е.  $M^\perp = L(y_1, y_2, y_3)$ , где  $y_1, y_2, y_3$  — столбцы матрицы  $A$ . Так как  $\det A = 0$ , то эти столбцы линейно зависимы. Первые два столбца  $y_1$  и  $y_2$ , очевидно, линейно независимы. Поэтому они образуют базис линейной оболочки  $L(y_1, y_2, y_3)$ ; следовательно, любой столбец  $B$  из этой линейной оболочки представим в виде  $B = c_1 y_1 + c_2 y_2$ , где  $c_1$  и  $c_2$  — какие-то числа. Итак, система (1) разрешима тогда и только тогда, когда

$$B = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные числа.  $\blacktriangle$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

- 19.** а) Найдите размерность подпространства элементов из евклидова пространства  $\mathcal{E}_n$ , ортогональных к данному ненулевому элементу  $y$ ;  
 б) найдите размерность подпространства элементов из  $\mathcal{E}_n$ , каждый из которых ортогонален к данным элементам  $x_1, \dots, x_m$  ( $m < n$ ).

20. Докажите теорему 4, выражающую альтернативу Фредгольма для системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными.
21. Найдите базис ортогонального дополнения к пространству решений однородной системы линейных уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -32x_1 - 17x_2 + 10x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

22. Разложение элемента  $x$  по ортонормированному базису  $e_1, \dots, e_n$  имеет вид  $x = \sum_{i=1}^n e_i$ . Найдите  $y$  и  $z$  в представлении  $x = y + z$ , где  $y \in L$ ,  $z \in L^\perp$ ,  $L = L(x_1, \dots, x_m)$  — линейная оболочка данных элементов  $x_1, \dots, x_m$ , если:
- а)  $n = 3$ ,  $m = 3$ ,  $x_1 = e_1 - 2e_2 + 2e_3$ ,  $x_2 = -e_1 - e_3$ ,  $x_3 = 5e_1 - 3e_2 - 7e_3$ ;
- б)  $n = 4$ ,  $m = 3$ ,  $x_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ ,  $x_2 = 3e_1 + 3e_2 - e_3 - e_4$ ,  $x_3 = -2e_1 + 6e_3 + 8e_4$ ;
- в)  $n = 4$ ,  $m = 2$ ,  $x_1 = e_1 - 2e_2 + e_3 + 3e_4$ ,  $x_2 = 2e_1 + e_2 - 3e_3 + e_4$ ;
- г)  $n = 4$ ,  $m = 2$ ,  $x_1 = e_1 - e_2 + e_3 - 3e_4$ ,  $x_2 = -4e_1 + e_2 + 5e_3$ ;
- д)  $n = 5$ ,  $m = 4$ ,  $x_1 = e_1 + e_2 - e_3 + 2e_4 + 3e_5$ ,  $x_2 = e_1 + e_2 + e_3 + 2e_4 + 3e_5$ ,  $x_3 = e_1 + e_4 - 2e_5$ ,  $x_4 = -e_2 + 3e_3 - e_4 - 5e_5$ .
- (Эти системы элементов взяты соответственно из упр. 16, 17, 18, д.).

23. В пространстве  $T_4$  столбцов с четырьмя элементами даны столбцы  $X$  и  $X_1, \dots, X_m$ . Найдите проекцию столбца  $X$  на линейную оболочку  $L = L(x_1, \dots, x_m)$ , перпендикуляр, опущенный из  $X$  на  $L$ , и расстояние  $X$  до  $L$ , если:

$$\text{а) } X = \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad m = 3, \quad X_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad m = 2, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

## § 4. Ортогональные и унитарные матрицы

### Основные понятия и формулы

- 1. Ортогональные матрицы.** Пусть  $e_1, \dots, e_n$  и  $f_1, \dots, f_n$  — два ортонормированных базиса в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_n$ , и пусть  $Q = (q_{ij})$  — матрица перехода от первого базиса ко второму, т. е.

имеет место равенство

$$f = eQ, \quad (1)$$

где  $e = (e_1 e_2 \dots e_n)$  и  $f = (f_1 f_2 \dots f_n)$  — строки, составленные из базисных элементов.

Матрица  $Q$ , т. е. матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому, называется *ортогональной* матрицей. Если взять произвольный ортонормированный базис и с помощью ортогональной матрицы перейти по формуле (1) к новому базису, то новый базис будет также ортогональным, т. е. *ортогональная матрица переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис*.

**Свойства ортогональных матриц.**

$$1^\circ. \sum_{k=1}^n q_{ki}q_{kj} = \delta_{ij}, \text{ где } \delta_{ij} \text{ — символ Кронекера.}$$

Это свойство означает, что любые два столбца  $Q_i$  и  $Q_j$  ортогональной матрицы, рассматриваемые как элементы евклидова пространства  $T_n$  (скалярное произведение в  $T_n$  введено так, как указано в § 1), ортогональны:  $(Q_i, Q_j) = 0$  при  $i \neq j$ , а скалярный квадрат любого столбца ортогональной матрицы равен 1:  $(Q_i, Q_i) = 1$ .

Таким же свойством обладают строки ортогональной матрицы:

$$\sum_{k=1}^n q_{ik}q_{jk} = \delta_{ij}.$$

2°.  $Q^{-1} = Q^T$ , т. е. обратная матрица по отношению к ортогональной матрице  $Q$  совпадает с транспонированной матрицей  $Q^T$ .

Обратная матрица  $Q^{-1}$  также является ортогональной, поскольку осуществляет переход от ортонормированного базиса  $f_1, \dots, f_n$  к ортонормированному базису  $e_1, \dots, e_n$ :  $e = f \cdot Q^{-1}$ .

Свойство 2° можно записать в эквивалентных формах  $QQ^T = I$  и  $Q^TQ = I$ , где  $I$  — единичная матрица.

$$3^\circ. |\det Q| = 1.$$

4°. Элемент  $q_{ij}$  ортогональной матрицы равен косинусу угла между базисными элементами  $e_i$  и  $f_j$ .

Свойства 1° и 2° являются *характеристическими* свойствами ортогональных матриц. Это означает, что матрица, обладающая свойством 1° (или свойством 2°), является ортогональной матрицей, т. е. любой ортонормированный базис переводит в ортонормированный базис. Поэтому свойства 1° и 2° часто кладутся в основу определения ортогональных матриц: матрица  $Q = (q_{ij})_{n \times n}$  называется *ортогональной*, если выполнено условие 1° (или 2°).

**2. Унитарные матрицы.** При рассмотрении комплексных евклидовых (т. е. унитарных) пространств аналогом ортогональных матриц

выступают унитарные матрицы. Унитарная матрица  $U = (u_{ij})$  — это матрица перехода от одного ортонормированного базиса, скажем,  $e_1, \dots, e_n$ , к другому ортонормированному базису  $f_1, \dots, f_n$  в унитарном пространстве  $E_n$ , т. е.

$$f = eU,$$

где  $f$  и  $e$  — строки, составленные из базисных элементов.

Свойства унитарных матриц.

- 1)  $\sum_{k=1}^n u_{ki} \overline{u_{kj}} = \delta_{ij}$  (символ Кронекера), т. е. скалярное произведение любых двух столбцов  $U_i$  и  $U_j$  унитарной матрицы, рассматриваемых как элементы пространства  $T_n^*$  (см. § 1), равно нулю при  $i \neq j$  и равно 1 при  $i = j$ . Таким же свойством обладают строки унитарной матрицы.

2)  $U^{-1} = \overline{U^T}$ , где  $\overline{U^T}$  — матрица, которая получается из матрицы  $U$  путем транспонирования и замены всех элементов на комплексно сопряженные (индекс  $T$  означает транспонирование, а черта — комплексное сопряжение). Матрица  $\overline{U^T}$  называется *эрмитово сопряженной* по отношению к матрице  $U$  и обозначается  $U^*$ . Таким образом, свойство 2) можно записать так:  $U^{-1} = U^*$ , или, в эквивалентных формах:  $UU^* = I$  или  $U^*U = I$ , где  $I$  — единичная матрица. Матрица  $U^{-1}$ , т. е. матрица  $U^*$ , также является унитарной.

- 3)  $|\det U| = 1$ .

Аналогично ортогональным матрицам свойства 1) и 2) являются характеристическими свойствами унитарных матриц.

### Контрольные вопросы и задания

1. Какая матрица называется ортогональной?
2. Какими свойствами обладают ортогональные матрицы?
3. Верно ли утверждение: квадратная матрица  $Q$  является ортогональной, если обратная к ней матрица  $Q^{-1}$  равна транспонированной матрице  $Q^T$ ?
4. Докажите, что произведение ортогональных матриц является ортогональной матрицей.
5. Какая матрица называется унитарной?
6. Какими свойствами обладают унитарные матрицы?
7. Верно ли утверждение: квадратная матрица  $U$  является унитарной, если обратная к ней матрица  $U^{-1}$  равна эрмитово сопряженной матрице  $\overline{U^T}$ ?
8. Докажите, что произведение унитарных матриц является унитарной матрицей.

### Примеры решения задач

1. Доказать, что если  $Q$  — ортогональная  $2 \times 2$ -матрица, то она представима либо в виде

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (2)$$

либо в виде

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Дать геометрическую интерпретацию матрицы  $Q$  в каждом случае.

△ Запишем матрицу  $Q$  в виде

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}.$$

Согласно свойству  $1^\circ$  сумма квадратов элементов каждого столбца равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов первого и второго столбцов равна нулю. Это дает три равенства:

$$q_{11}^2 + q_{21}^2 = 1, \quad q_{12}^2 + q_{22}^2 = 1, \quad q_{11} \cdot q_{12} + q_{21} \cdot q_{22} = 0. \quad (4)$$

Учитывая первые два равенства, положим  $q_{11} = \cos \varphi$ ,  $q_{21} = \sin \varphi$ ,  $q_{12} = \cos \psi$ ,  $q_{22} = \sin \psi$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  — пока произвольные числа. Тогда первое и второе равенства (4) выполняются, а третье равенство можно записать в виде  $\cos(\psi - \varphi) = 0$ . Это равенство позволяет установить связь между  $\varphi$  и  $\psi$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\varphi$  и  $\psi$  принадлежат промежутку  $[0, 2\pi]$ . Поэтому из равенства  $\cos(\psi - \varphi) = 0$  следует, что  $\psi - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  или  $\psi - \varphi = \pm \frac{3\pi}{2}$ .

Если  $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$  или  $\psi - \varphi = -\frac{3\pi}{2}$ , то  $\cos \psi = -\sin \varphi$ ,  $\sin \psi = \cos \varphi$ , и мы получаем представление матрицы  $Q$  в виде (2). Если же  $\psi - \varphi = -\frac{\pi}{2}$  или  $\psi - \varphi = \frac{3\pi}{2}$ , то  $\cos \psi = \sin \varphi$ ,  $\sin \psi = -\cos \varphi$ , и матрица  $Q$  имеет вид (3).

Итак, любая ортогональная  $2 \times 2$ -матрица представима либо в виде (2) (в этом случае  $\det Q = 1$ ), либо в виде (3) (в этом случае  $\det Q = -1$ ).

Чтобы дать геометрическую интерпретацию ортогональной  $2 \times 2$ -матрицы, рассмотрим линейное пространство  $V_2$  геометрических векторов на плоскости. Пусть  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  — ортонормированный базис в пространстве  $V_2$ . Перейдем к другому ортонормированному базису  $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$  с помощью матрицы  $Q$ , имеющей вид (2). По формуле (1) выразим  $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$  через  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ :

$$\mathbf{i}' = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}, \quad \mathbf{j}' = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}. \quad (5)$$

Мы пришли к равенствам, которые, как известно из курса аналитической геометрии, выражают векторы  $\mathbf{i}'$  и  $\mathbf{j}'$ , получающиеся в результате поворота векторов  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  на угол  $\varphi$ . Итак, ортогональная матрица вида (2), определитель которой равен 1, является матрицей поворота на угол  $\varphi$  векторов на плоскости.

Если от базиса  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  перейти к базису  $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$  с помощью матрицы  $Q$ , имеющей вид (3), то вместо (5) получим равенства

$$\mathbf{i}' = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}, \quad \mathbf{j}' = \sin \varphi \mathbf{i} - \cos \varphi \mathbf{j}.$$

Сопоставляя их с равенством (5), можно сделать вывод, что вектор  $\mathbf{j}'$  получается в результате поворота вектора  $\mathbf{i}$  на угол  $\varphi$ , а вектор  $\mathbf{j}'$  — в результате поворота вектора  $\mathbf{j}$  на угол  $\varphi$  и последующей замены полученного вектора на противоположный.

Таким образом, ортогональная матрица вида (3), определитель которой равен  $-1$ , является матрицей суперпозиции (последовательного выполнения) двух преобразований — поворота на угол  $\varphi$  векторов на плоскости и зеркального отражения векторов относительно оси, определяемой вектором  $\mathbf{i}'$ .  $\blacktriangleleft$

## 2. Данна матрица

$$U = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot e^{i\varphi_1} & \sin \varphi \cdot e^{i\varphi_2} \\ \sin \varphi \cdot e^{i\varphi_3} & -\cos \varphi \cdot e^{i(\varphi_2+\varphi_3-\varphi_1)} \end{pmatrix},$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  — произвольные вещественные числа и  $\varphi \in [0, \pi/2]$ .

Доказать, что  $U$  — унитарная матрица и вычислить обратную к ней матрицу  $U^{-1}$ .

$\triangle$  Матрица  $U$  является унитарной, если она обладает характеристическим свойством 1), т. е.

$$\sum_{k=1}^2 u_{ki} \overline{u_{kj}} = \delta_{ij}. \quad (6)$$

Проверим выполнение равенств (6). При  $i = j = 1$  получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 u_{k1} \overline{u_{k1}} &= \cos \varphi \cdot e^{i\varphi_1} \cdot \cos \varphi \cdot e^{-i\varphi_1} + \sin \varphi \cdot e^{i\varphi_3} \cdot \sin \varphi \cdot e^{-i\varphi_3} = \\ &= \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1. \end{aligned}$$

Аналогично, при  $i = j = 2$  имеем

$$\sum_{k=1}^2 u_{k2} \overline{u_{k2}} = 1.$$

Наконец, при  $i = 1, j = 2$  находим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 u_{k1} \overline{u_{k2}} &= \\ &= \cos \varphi \cdot e^{i\varphi_1} \cdot \sin \varphi \cdot e^{-i\varphi_2} + \sin \varphi \cdot e^{i\varphi_3} (-\cos \varphi \cdot e^{-i(\varphi_2+\varphi_3-\varphi_1)}) = \\ &= \cos \varphi \cdot \sin \varphi e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} - \sin \varphi \cdot \cos \varphi e^{-i(\varphi_2-\varphi_1)} = 0. \end{aligned}$$

Итак, матрица  $U$  обладает свойством 1) и, следовательно,  $U$  — унитарная матрица. Для вычисления обратной матрицы воспользуемся формулой  $U^{-1} = \overline{U^T}$ :

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot e^{-i\varphi_1} & \sin \varphi \cdot e^{-i\varphi_3} \\ \sin \varphi \cdot e^{-i\varphi_2} & -\cos \varphi \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3)} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

**24.** Найдите матрицу  $Q$  перехода от ортонормированного базиса  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  в пространстве  $V_3$  геометрических векторов к базису:

- a)  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', -\mathbf{k}$ ;
- b)  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}$ ;

где векторы  $\mathbf{i}'$  и  $\mathbf{j}'$  получаются соответственно из векторов  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  поворотом их на угол  $\varphi$  в плоскости этих векторов. Докажите, что  $Q$  — ортогональная матрица. Найдите обратную матрицу  $Q^{-1}$ .

**25.** Докажите, что матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 11/15 & 2/15 & -2/3 \\ 2/15 & 14/15 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

является ортогональной, и вычислите обратную матрицу  $Q^{-1}$ .

**26.** В трехмерном линейном пространстве  $B_3$  радиус-векторов с общим началом в точке  $O$  задана ось  $Oh$ , проходящая через точку  $O$  и имеющая единичный направляющий вектор  $\mathbf{e}$ . Определим цилиндрические координаты радиус-векторов следующим образом: на плоскости  $P$ , проходящей через точку  $O$  и перпендикулярной оси  $Oh$ , введем полярную систему координат с полюсом в точке  $O$  и назовем *цилиндрическими координатами радиус-вектора*  $\overrightarrow{OM}$  тройку чисел  $(\rho, \varphi, h)$ , где  $(\rho, \varphi)$  — полярные координаты проекции точки  $M$  на плоскость  $P$ ,  $h$  — проекция вектора  $\overrightarrow{OM}$  на ось  $Oh$ . Поворотом на угол  $\alpha$  пространства  $B_3$  вокруг оси  $Oh$  назовем преобразование, при котором каждый радиус-вектор  $\mathbf{r} =$

$= \overrightarrow{OM}$ , имеющий цилиндрические координаты  $(\rho, \varphi, h)$ , переходит в радиус-вектор  $\mathbf{r}' = \overrightarrow{OM}'$  с цилиндрическими координатами  $(\rho, \varphi + \alpha, h)$ .

Докажите, что:

а)  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \alpha + [\mathbf{e}, \mathbf{r}] \sin \alpha + \mathbf{e} (\mathbf{e}, \mathbf{r}) (1 - \cos \alpha)$ ;

б) ортонормированный базис  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  переходит при повороте векторов в пространстве  $B_3$  в другой ортонормированный базис. Найдите матрицу перехода от первого базиса ко второму, если  $\mathbf{e} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ .

27. Пусть  $Q$  — матрица перехода от ортонормированного базиса  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  к ортонормированному базису  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  и  $\det Q = 1$ . Докажите, что векторы  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  можно получить соответственно из векторов  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  поворотом их в пространстве на некоторый угол  $\alpha$  вокруг некоторой прямой.
28. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Докажите, что:

а) эти матрицы вместе с единичной матрицей образуют базис в пространстве  $2 \times 2$ -матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства  $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$ ,  $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$ ,  $\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = -i\sigma_2$ ,  $\sigma_k^2 = I$ ,  $k = 1, 2, 3$ , где  $I$  — единичная матрица;

в) каждая матрица  $\sigma_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , унитарная.

# ГЛАВА V

## ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

### § 1. Линейные операторы в линейном пространстве

#### Основные понятия и теоремы

**1. Определение линейного оператора.** *Оператором*, действующим в линейном пространстве  $R$  (или *преобразованием линейного пространства*  $R$ ) называется правило  $\hat{A}$ , по которому каждому элементу  $x$  из  $R$  ставится в соответствие некоторый (единственный) элемент  $y$  из  $R$ . Элемент  $y$  называется *образом* элемента  $x$  при действии оператора  $\hat{A}$ , а элемент  $x$  — *прообразом* элемента  $y$ . Тот факт, что элемент  $y$  соответствует элементу  $x$  при действии оператора  $\hat{A}$ , записывается так:

$$y = \hat{A}x \quad \text{или} \quad y = \hat{A}(x). \quad (1)$$

**Определение.** Оператор  $\hat{A}$ , действующий в линейном пространстве  $R$ , называется *линейным*, если для любых элементов  $x_1$  и  $x_2$  из  $R$  и любого числа  $\alpha$  выполняются равенства:

$$1) \hat{A}(x_1 + x_2) = \hat{A}x_1 + \hat{A}x_2; \quad 2) \hat{A}(\alpha x_1) = \alpha \hat{A}x_1.$$

**2. Примеры линейных операторов.** 1) *Нуль-оператор*  $\hat{\theta}$  ставит в соответствие каждому элементу  $x$  из  $R$  нулевой элемент  $\theta$ :  $\hat{\theta}x = \theta$ .

2) *Тождественный* или *единичный оператор*  $\hat{I}$  каждому элементу  $x$  из  $R$  сопоставляет этот же элемент:  $\hat{I}x = x$ .

3) *Оператор подобия* с коэффициентом подобия  $\mu$  задается равенством  $\hat{A}x = \mu x$  ( $\forall x \in R$ ).

4) *Оператор дифференцирования*  $\hat{D}$ , действующий в линейном пространстве  $P_n$  многочленов степени, не превосходящей  $n$ , каждому многочлену  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  ставит в соответствие его производную  $p'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$ :  $\hat{D}p(x) = p'(x)$  (заметим, что  $p'(x)$  является элементом того же пространства  $P_n$ ).

5) *Оператор поворота* на угол  $\varphi$ , действующий в пространстве  $V_2$  векторов на плоскости, поворачивает каждый вектор на угол  $\varphi$ , причем поворот происходит против часовой стрелки, если  $\varphi > 0$ , и по часовой стрелке, если  $\varphi < 0$ .

**3. Матрица линейного оператора.** Пусть  $\hat{A}$  — линейный оператор, действующий в линейном пространстве  $R_n$ , и пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — базис в этом пространстве. Подействуем оператором  $\hat{A}$  на базисные элементы и разложим образы базисных элементов  $\hat{A}e_1, \hat{A}e_2, \dots, \hat{A}e_n$  по тому же базису:

$$\hat{A}e_p = a_p^1 e_1 + a_p^2 e_2 + \dots + a_p^n e_n = \sum_{q=1}^n a_p^q e_q, \quad p = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Квадратная матрица  $n$ -го порядка  $A_e = (a_p^q)^*$ ) называется *матрицей линейного оператора*  $\hat{A}$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Отметим, что  $p$ -й столбец матрицы  $A_e$  составлен из коэффициентов  $a_p^q$  разложения элемента  $\hat{A}e_p$  по базису  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Равенства (2) можно записать в матричной форме:

$$\hat{A}e = eA_e, \quad (3)$$

где, как обычно, использованы обозначения:  $e = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n)$  — строка, составленная из элементов базиса,  $\hat{A}e = (\hat{A}e_1 \ \hat{A}e_2 \ \dots \ \hat{A}e_n)$  — строка из образов базисных элементов, а произведение  $eA_e$  получается по правилу умножения матриц:  $1 \times n$ -матрица  $e$  умножается на  $n \times n$ -матрицу  $A_e$ .

Пусть в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  элемент  $x$  и его образ  $y = \hat{A}x$  имеют разложения  $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n = eX_e$  и  $y = y^1 e_1 + y^2 e_2 + \dots + y^n e_n = eY_e$ , где  $X_e$  и  $Y_e$  — столбцы из координат элементов  $x$  и  $y$  в данном базисе. Тогда из равенства (1) получаем формулу

$$Y_e = A_e X_e. \quad (4)$$

Формула (4) позволяет определить координаты образа  $y$  через координаты прообраза  $x$  в данном базисе, если известна матрица  $A_e$  оператора  $\hat{A}$  в этом базисе.

Матрица  $A_e$  оператора  $\hat{A}$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и матрица  $A_f$  того же оператора в базисе  $f_1, f_2, \dots, f_n$  связаны соотношением

$$A_f = C^{-1} A_e C, \quad (5)$$

где  $C$  — матрица перехода от базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$  к базису  $f_1, f_2, \dots, f_n$ :  $f = eC$ .

---

<sup>\*</sup>) В отличие от предыдущих глав мы будем в этой главе несколько иначе обозначать номера элементов матриц, а именно номер строки будем обозначать верхним, а номер столбца — нижним индексом ( $a_p^q$  — элемент  $q$ -й строки и  $p$ -го столбца) и так же номер координат элемента будем обозначать верхним индексом. Такие обозначения играют важную роль при описании тензорных величин (см. гл. VII) и широко используются в физике.

**Определение.** Операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ , действующие в линейном пространстве  $R$ , называются *равными*, если  $\forall x \in R: \hat{A}x = \hat{B}x$ .

Если операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  равны, то равны и их матрицы в любом базисе. Обратно: если матрицы операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  в каком-нибудь базисе равны, то равны и сами операторы. Поэтому если в линейном пространстве фиксирован базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , то между операторами, действующими в этом пространстве, и квадратными матрицами  $n$ -го порядка имеет место взаимно однозначное соответствие: каждому оператору  $\hat{A}$  соответствует матрица  $A_e$  и, обратно, каждой матрице  $A$  соответствует (и притом только один) оператор  $\hat{A}$  такой, что его матрица  $A_e$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  равна матрице  $A$ .

#### 4. Действия над линейными операторами.

**Определение.** Суммой  $\hat{A} + \hat{B}$  линейных операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ , действующих в линейном пространстве  $R$ , называется оператор  $\hat{C}$ , действие которого на любой элемент  $x$  из  $R$  задается равенством  $\hat{C}x = \hat{A}x + \hat{B}x$ .

Сумма двух линейных операторов является линейным оператором, а матрица суммы линейных операторов (в любом базисе) равна сумме матриц этих операторов.

**Определение.** Произведением  $\alpha\hat{A}$  линейного оператора  $\hat{A}$ , действующего в линейном пространстве  $R$ , на число  $\alpha$  называется оператор  $\hat{B}$ , действие которого на любой элемент  $x$  из  $R$  задается равенством  $\hat{B}x = \alpha(\hat{A}x)$ .

Произведение линейного оператора  $\hat{A}$  на число  $\alpha$  является линейным оператором, а матрица этого оператора (в любом базисе) равна произведению матрицы оператора  $\hat{A}$  на число  $\alpha$ .

**Теорема 1.** Множество  $S$  всех линейных операторов, действующих в линейном пространстве  $R_n$ , с введенными операциями сложения операторов и умножения оператора на число образует линейное пространство.

Пространство  $S$  линейных операторов, действующих в линейном пространстве  $R_n$ , изоморфно пространству  $H_n^n$   $n \times n$ -матриц. Поэтому размерности этих пространств совпадают, т. е.  $\dim S = \dim H_n^n = n^2$ .

**Определение.** Произведением  $\hat{A}\hat{B}$  линейных операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ , действующих в линейном пространстве  $R$ , называется оператор  $\hat{C}$ , действие которого на любой элемент  $x$  из  $R$  задается равенством  $\hat{C}x = \hat{A}(\hat{B}x)$ .

Произведение линейных операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  является линейным оператором, а матрица  $C$  произведения операторов (в любом базисе) равна произведению матриц  $A$  и  $B$  этих операторов:  $C = AB$ .

Свойства операции умножения операторов (для любого числа  $\alpha$  и для любых линейных операторов  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$ ).

$$1^{\circ}. \alpha(\hat{A}\hat{B}) = (\alpha\hat{A})\hat{B}.$$

$$2^{\circ}. \hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{B})\hat{C}.$$

$$3^{\circ}. (\hat{A} + \hat{B})\hat{C} = \hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{C}.$$

$$4^{\circ}. \hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}.$$

5°. Умножение операторов некоммутативно, т. е., вообще говоря,  $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ .

**Определение.** Коммутатором линейных операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  называется оператор  $\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ .

### 5. Обратный оператор.

**Определение.** Линейный оператор  $\hat{B}$  называется *обратным* к линейному оператору  $\hat{A}$ , если выполняются равенства  $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = \hat{I}$ , где  $\hat{I}$  — тождественный оператор.

Оператор, обратный к  $\hat{A}$ , обозначается символом  $\hat{A}^{-1}$ .

**Теорема 2.** Для того чтобы существовал обратный оператор к линейному оператору  $\hat{A}$ , необходимо и достаточно, чтобы матрица оператора  $\hat{A}$  в каком-нибудь базисе была невырожденной (при этом она будет невырожденной в любом другом базисе).

Если  $A_e$  — матрица оператора  $\hat{A}$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , то матрица обратного оператора  $\hat{A}^{-1}$  в том же базисе равна  $A_e^{-1}$ , т. е. является обратной по отношению к матрице  $A_e$ .

### Контрольные вопросы и задания

- Объясните, что такое оператор, действующий в линейном пространстве.
- Какой оператор называется линейным? Приведите примеры линейных операторов.
- Докажите, что для любого линейного оператора  $\hat{A}$  справедливо равенство  $\hat{A}\theta = \theta$ , где  $\theta$  — нулевой элемент линейного пространства.
- Как определяется матрица линейного оператора в данном базисе?
- Как следует понимать матричную запись  $\hat{A}e = eA_e$ ?
- Какой вид имеет в любом базисе матрица:
  - нуль-оператора;
  - тождественного оператора;
  - оператора подобия с коэффициентом подобия  $\mu$ ?
- Как выражаются координаты образа  $\hat{A}x$  через координаты прообраза  $x$  в данном базисе?
- Выпишите матрицу линейного оператора  $\hat{A}$  в данном базисе, если элемент  $x$  и его образ  $\hat{A}x$  имеют в этом базисе соответственно координаты  $x^1, x^2, x^3$  и  $x^1 - x^2 + 2x^3, x^2 - 7x^3, x^1 + x^2 + 3x^3$ .
- Как преобразуется матрица оператора  $\hat{A}$  при переходе от одного базиса к другому?

10. Какие операторы называются равными?
11. Как определяется сумма двух линейных операторов?
12. Какой оператор получится в результате сложения двух операторов подобия с коэффициентами подобия  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ?
13. Чему равна в данном базисе матрица суммы  $\widehat{A} + \widehat{B}$  линейных операторов?
14. Как определяется произведение линейного оператора на число?
15. Пусть  $\widehat{A}$  — линейный оператор поворота на угол  $\varphi$  в пространстве  $V_2$  векторов на плоскости. Что происходит с вектором при действии на него оператора: а)  $2\widehat{A}$ ; б)  $(-1)\widehat{A}$ ?
16. Чему равна в данном базисе матрица произведения линейного оператора  $\widehat{A}$  на число  $\alpha$ ?
17. Какова размерность линейного пространства линейных операторов, действующих в линейном пространстве размерности  $n$ ?
18. Как определяется произведение двух линейных операторов?
19. Пусть  $\widehat{A}_k$  — оператор поворота на угол  $\varphi_k$  пространстве  $V_2$ . Что представляет собой оператор: а)  $\widehat{A}_1\widehat{A}_2$ ; б)  $\widehat{A}_2\widehat{A}_1$ ; в)  $\widehat{A}_1\widehat{A}_2\widehat{A}_3$ ?
20. Пусть  $\widehat{A}$  — оператор поворота на угол  $\pi/2$  в пространстве  $V_2$ . Докажите, что  $\widehat{A}^4 = \widehat{I}$ , где  $\widehat{I}$  — тождественный оператор.
21. Пусть  $\widehat{A}$  — оператор подобия с коэффициентом подобия  $\mu$ . Докажите, что  $\widehat{A}^n$  — также оператор подобия ( $n \in \mathbf{N}$ ). Каков его коэффициент подобия?
22. Чему равна в данном базисе матрица произведения линейных операторов?
23. Приведите пример линейных операторов  $\widehat{A}$  и  $\widehat{B}$ , для которых имеет место равенство  $\widehat{A}\widehat{B} = \widehat{B}\widehat{A}$ . Верно ли это равенство для любых  $\widehat{A}$  и  $\widehat{B}$ ?
24. Что называется коммутатором линейных операторов  $\widehat{A}$  и  $\widehat{B}$ ? Как обозначается коммутатор?
25. Является ли коммутатор двух линейных операторов линейным оператором? Как выражается матрица коммутатора линейных операторов  $\widehat{A}$  и  $\widehat{B}$  через матрицы этих операторов?
26. Какой оператор называется обратным к данному линейному оператору?
27. Какой оператор является обратным:
  - а) к оператору подобия с коэффициентом подобия  $\mu \neq 0$ ;
  - б) к оператору поворота на угол  $\varphi$  в пространстве  $V_2$ ?
28. Для каких линейных операторов существует обратный оператор?
29. Как связаны между собой матрицы линейных операторов  $\widehat{A}$  и  $\widehat{A}^{-1}$  в данном базисе?

### Примеры решения задач

1. Доказать, что оператор  $\widehat{A}$  поворота на угол  $\varphi$ , действующий в пространстве  $V_2$  векторов на плоскости, является линейным. Найти матрицу этого оператора в произвольном ортонормированном базисе  $e_1, e_2$ .

Докажем вначале, что  $\hat{A}$  — линейный оператор. Согласно определению линейного оператора нужно доказать, что для любых векторов  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  и любого числа  $\alpha$  имеют место равенства:

$$1) \hat{A}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \hat{A}\mathbf{b} + \hat{A}\mathbf{c}; \quad 2) \hat{A}(\alpha\mathbf{b}) = \alpha\hat{A}\mathbf{b}.$$

Пусть  $\mathbf{d} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$  и векторы  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  неколлинеарны (рис. 2). При

повороте на угол  $\varphi$  векторы  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ ,

$\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$  и  $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD}$  переходят со-

ответственно в векторы  $\hat{A}\mathbf{b} = \overrightarrow{OB_1}$ ,

$\hat{A}\mathbf{c} = \overrightarrow{OC_1}$  и  $\hat{A}\mathbf{d} = \overrightarrow{OD_1}$ . При этом

параллелограмм  $OBDC$  переходит в

параллелограмм  $OB_1D_1C_1$ . Поэтому

$$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}, \text{ т. е. } \hat{A}\mathbf{d} = \hat{A}\mathbf{b} +$$

$$+ \hat{A}\mathbf{c} \text{ или } \hat{A}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \hat{A}\mathbf{b} + \hat{A}\mathbf{c}.$$

Если векторы  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  коллинеарны, то это равенство также выполнено. Таким образом, первое условие линейности оператора имеет место.

Проверим выполнение второго условия. Для любого числа  $\alpha$  векторы  $\mathbf{b}$  и  $\alpha\mathbf{b}$ , отложенные от одной точки, лежат на одной прямой. При повороте на угол  $\varphi$  они переходят в векторы  $\hat{A}\mathbf{b}$  и  $\hat{A}(\alpha\mathbf{b})$ , также лежащие на одной прямой, и при этом  $\hat{A}(\alpha\mathbf{b}) = \alpha(\hat{A}\mathbf{b})$ . Итак, оператор  $\hat{A}$  поворота на угол  $\varphi$  — линейный оператор.

Чтобы найти матрицу этого оператора в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , нужно найти координаты образов  $\hat{A}\mathbf{e}_1, \hat{A}\mathbf{e}_2$  в этом базисе. Как следует из рис. 3,

$$\hat{A}\mathbf{e}_1 = \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_2,$$

$$\hat{A}\mathbf{e}_2 = \cos \left( \frac{\pi}{2} + \varphi \right) \cdot \mathbf{e}_1 + \sin \left( \frac{\pi}{2} + \varphi \right) \cdot \mathbf{e}_2 = -\sin \varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_2.$$

Таким образом,

$$A_e = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

— матрица оператора поворота на угол  $\varphi$  в ортонормированном базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ . Заметим, что в любом ортонормированном базисе матрица данного оператора имеет один и тот же вид. ▲

2. Элементы  $f_1$  и  $f_2$  линейного пространства  $R_2$  имеют в базисе  $e_1, e_2$  координаты 0, 1 и 1, 0. Найти матрицы оператора  $\hat{A}$  в базисах  $e_1, e_2$  и  $f_1, f_2$ , если элементы  $\hat{A}f_1$  и  $\hat{A}f_2$  имеют в базисе  $e_1, e_2$  координаты 2, 3 и 4, 5.

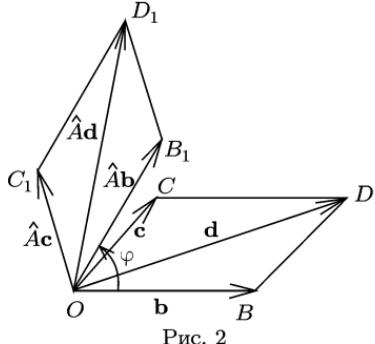


Рис. 2

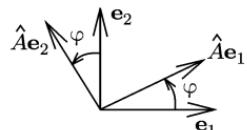


Рис. 3

$\triangle 1$  способ. Так как в базисе  $e_1, e_2$  координаты элемента  $f_1$  равны 0, 1, а координаты элемента  $f_2$  равны 1, 0, то  $f_1 = e_2$ ,  $f_2 = e_1$ . Используя эти равенства, а также данные координаты элементов  $\widehat{A}f_1$  и  $\widehat{A}f_2$ , приходим к равенствам

$$\begin{aligned}\widehat{A}f_1 &= \widehat{A}e_2 = 2e_1 + 3e_2 = 3f_1 + 2f_2, \\ \widehat{A}f_2 &= \widehat{A}e_1 = 4e_1 + 5e_2 = 5f_1 + 4f_2.\end{aligned}$$

Отсюда по определению матрицы оператора получаем

$$A_e = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_f = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$2$  способ. Используя столбцы координат элементов  $f_1$  и  $\widehat{A}f_1$  в базисе  $e_1, e_2$ , по формуле (4) получаем  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = A_e \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , где  $A_e$  — матрица оператора  $\widehat{A}$  в базисе  $e_1, e_2$ . Аналогичное соотношение для столбцов координат элементов  $f_2$  и  $\widehat{A}f_2$  имеет вид  $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = A_e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Эти два равенства можно записать так:  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = A_e \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Отсюда  $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ . Зная матрицу  $A_e$  и матрицу  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  перехода от базиса  $e_1, e_2$  к базису  $f_1, f_2$ , по формуле (5) находим матрицу  $A_f$ :

$$A_f = C^{-1} A_e C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

**3.** В трехмерном линейном пространстве  $B_3$  радиус-векторов с общим началом в точке  $O$  задан ортонормированный базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  и введена прямоугольная система координат  $Ox^1x^2x^3$  с координатными векторами  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Прямая  $l$  задана каноническими уравнениями  $x^1 = x^2 = x^3$ . Оператор  $\widehat{A}$  ортогонально проектирует любой радиус-вектор  $\overrightarrow{OM}$  из  $B_3$  на прямую  $l$ :  $\widehat{A}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OL}$ , где точка  $L$  — ортогональная проекция точки  $M$  на прямую  $l$ . Доказать, что  $\widehat{A}$  — линейный оператор, и найти его матрицу в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .

$\triangle$  Любой радиус-вектор  $\overrightarrow{OM}$  можно представить в виде  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{ON}$ , где  $\overrightarrow{OL} = \widehat{A}(\overrightarrow{OM})$  — составляющая вектора  $\overrightarrow{OM}$ , лежащая на прямой  $l$ ,  $\overrightarrow{ON}$  — составляющая вектора  $\overrightarrow{OM}$ , лежащая в

плоскости  $P$ :  $x^1 + x^2 + x^3 = 0$ , проходящей через точку  $O$  перпендикулярно прямой  $l$ .

Пусть  $\overrightarrow{OM}_1 = \overrightarrow{OL}_1 + \overrightarrow{ON}_1$ ,  $\overrightarrow{OM}_2 = \overrightarrow{OL}_2 + \overrightarrow{ON}_2$ . Тогда

$$\hat{A}(\overrightarrow{OM}_1) = \overrightarrow{OL}_1, \quad \hat{A}(\overrightarrow{OM}_2) = \overrightarrow{OL}_2, \quad (6)$$

$(\overrightarrow{OM}_1) + (\overrightarrow{OM}_2) = (\overrightarrow{OL}_1 + \overrightarrow{OL}_2) + (\overrightarrow{ON}_1 + \overrightarrow{ON}_2)$ , причем вектор  $\overrightarrow{OL}_1 + \overrightarrow{OL}_2$  лежит на прямой  $l$ , а вектор  $\overrightarrow{ON}_1 + \overrightarrow{ON}_2$  — в плоскости  $P$ . Поэтому

$$\hat{A}(\overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2) = \overrightarrow{OL}_1 + \overrightarrow{OL}_2. \quad (7)$$

Из (6) и (7) следует, что  $\hat{A}(\overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2) = \hat{A}(\overrightarrow{OM}_1) + \hat{A}(\overrightarrow{OM}_2)$ , т. е. выполнено первое условие линейности оператора  $\hat{A}$ .

Проверим выполнение второго условия. Если  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{ON}$ , то  $\alpha \overrightarrow{OM} = \alpha \overrightarrow{OL} + \alpha \overrightarrow{ON}$ , откуда следует, что  $\hat{A}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OL}$ ,  $\hat{A}(\alpha \overrightarrow{OM}) = \alpha \cdot \overrightarrow{OL}$  и, значит,  $\hat{A}(\alpha \cdot \overrightarrow{OM}) = \alpha \hat{A}(\overrightarrow{OM})$ , т. е. второе условие линейности оператора  $\hat{A}$  выполнено.

Итак,  $\hat{A}$  — линейный оператор. Нахождение матрицы данного оператора в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  проведем в два этапа.

1-й этап. Рассмотрим базис  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ , в котором особенно просто находятся координаты образов  $\hat{A}\mathbf{f}_1, \hat{A}\mathbf{f}_2, \hat{A}\mathbf{f}_3$ . В качестве  $\mathbf{f}_1$  возьмем направляющий вектор прямой  $l$ , имеющий (как следует из канонических уравнений прямой  $l$ ) координаты 1, 1, 1 в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . В качестве  $\mathbf{f}_2$  и  $\mathbf{f}_3$  возьмем два любых неколлинеарных вектора из  $B_3$ , лежащих в плоскости  $P$ , и потому ортогональных к вектору  $\mathbf{f}_1$ , например, радиус-векторы, имеющие координаты -1, 1, 0 и 0, 1, -1 в том же базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Тогда

$$\hat{A}\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_1, \quad \hat{A}\mathbf{f}_2 = \boldsymbol{\theta}, \quad \hat{A}\mathbf{f}_3 = \boldsymbol{\theta}. \quad (8)$$

Согласно формуле (2) матрица оператора  $\hat{A}$  в базисе  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$  имеет вид

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2-й этап. Так как матрица  $C$  перехода от базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  к базису  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$  известна (ее столбцы состоят из координат векторов  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$  в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ):

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то по формуле (5) находим искомую матрицу оператора  $\hat{A}$  в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ :

$$A_e = CA_f C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Отметим, что в тех случаях, когда оператор  $\hat{A}$  допускает простое геометрическое толкование, матрицу такого оператора можно найти, используя непосредственно определение матрицы оператора. Так, в данной задаче оператор  $\hat{A}$  ортогонально проектирует радиус-векторы на прямую  $l$ , имеющую направляющий вектор с координатами 1, 1, 1 в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Направляющие косинусы этого вектора в системе координат  $Ox^1x^2x^3$  равны между собой:  $\cos \alpha_k = 1/\sqrt{3}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , т. е. единичным направляющим вектором прямой  $l$  является вектор  $\mathbf{s} = \{1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\}$ . Поэтому для любого координатного вектора  $\mathbf{e}_k$  его составляющей, лежащей на прямой  $l$ , будет вектор  $\cos \alpha_k \cdot \mathbf{s} = \{1/3, 1/3, 1/3\}$ . А так как действие оператора  $\hat{A}$  на базисный вектор  $\mathbf{e}_k$  означает ортогональное проектирование  $\mathbf{e}_k$  на прямую  $l$ , то  $\hat{A}\mathbf{e}_k = (1/3)\mathbf{e}_1 + (1/3)\mathbf{e}_2 + (1/3)\mathbf{e}_3$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Отсюда получаем матрицу (9) оператора  $\hat{A}$ .  $\blacktriangle$

4. Пусть  $\hat{A}_k$  — оператор поворота на угол  $\varphi_k$  в пространстве  $V_2$  векторов на плоскости. Найти матрицу (в произвольном ортонормированном базисе) оператора: а)  $\hat{A}_1\hat{A}_2$ ; б)  $\hat{A}_1^{-1}$ .

$\triangle$  Матрица оператора  $\hat{A}_k$ , как было показано в примере 1, в любом ортонормированном базисе имеет вид

$$A_k = \begin{pmatrix} \cos \varphi_k & -\sin \varphi_k \\ \sin \varphi_k & \cos \varphi_k \end{pmatrix}.$$

а) По определению произведения операторов действие оператора  $\hat{A}_1\hat{A}_2$  на произвольный вектор  $\mathbf{a}$  состоит в том, что сначала вектор  $\mathbf{a}$  поворачивается на угол  $\varphi_2$ , а затем вектор  $\hat{A}_2\mathbf{a}$  поворачивается на угол  $\varphi_1$ . В результате получается вектор  $\hat{A}_1\hat{A}_2\mathbf{a}$ . Ясно, что тот же вектор получается в результате поворота вектора  $\mathbf{a}$  на угол  $\varphi_2 + \varphi_1$ , т. е. произведение  $\hat{A}_1\hat{A}_2$  есть оператор поворота на угол  $\varphi_2 + \varphi_1$ . Поэтому матрица оператора  $\hat{A}_1\hat{A}_2$  в любом ортонормированном базисе равна

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix}.$$

Тот же результат можно получить иначе, если воспользоваться тем, что матрица произведения операторов равна произведению матриц

операторов-сомножителей:

$$\begin{aligned} A_1 A_2 &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

б) Оператор  $\widehat{A}_1$  поворачивает каждый вектор на угол  $\varphi_1$ . Ясно, что обратный оператор поворачивает каждый вектор на тот же угол  $\varphi_1$ , но в противоположную сторону, т. е.  $\widehat{A}_1^{-1}$  — оператор поворота на угол  $-\varphi_1$ . Поэтому матрица оператора  $\widehat{A}_1^{-1}$  является матрицей оператора поворота на угол  $-\varphi_1$  и, следовательно, в произвольном ортонормированном базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos(-\varphi_1) & -\sin(-\varphi_1) \\ \sin(-\varphi_1) & \cos(-\varphi_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix}.$$

Тот же результат можно получить иначе, если воспользоваться тем, что матрица обратного оператора  $\widehat{A}_1^{-1}$  есть матрица, обратная к матрице оператора  $\widehat{A}_1$ :

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

**5.** Найти матрицу оператора дифференцирования (оператора  $\widehat{D}$ ) в пространстве  $P_2$  многочленов степени, не превосходящей 2, в базисе:

- а)  $1, x, x^2$ ; б)  $1, 1+x, 1+x+x^2$ .

Имеет ли оператор  $\widehat{D}$  обратный оператор?

△ а) Чтобы составить матрицу  $D_e$  оператора  $\widehat{D}$  в базисе  $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2$ , найдем образы элементов  $e_1, e_2, e_3$ :

$$\begin{aligned} \widehat{D}e_1 &= (1)' = 0, \\ \widehat{D}e_2 &= (x)' = 1 = e_1, \\ \widehat{D}e_3 &= (x^2)' = 2x = 2e_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$D_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Аналогично, для базиса  $f_1 = 1, f_2 = 1+x, f_3 = 1+x+x^2$  имеем равенства

$$\begin{aligned} \widehat{D}f_1 &= 0, \\ \widehat{D}f_2 &= 1 = f_1, \\ \widehat{D}f_3 &= 1+2x = -1+2(1+x) = -f_1+2f_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$D_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы  $D_e$  (и также матрицы  $D_f$ ) равен нулю, т. е. матрица  $D_e$  вырожденная. Следовательно, по теореме 2 оператор  $\widehat{D}$  не имеет обратного оператора. ▲

**6.** В пространстве  $B_2$  радиус-векторов на плоскости с общим началом в точке  $O$  задан ортонормированный базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ . Пусть  $\widehat{A}$  — линейный оператор, проектирующий векторы из  $B_2$  на подпространство  $B_1$  с базисом  $\mathbf{e}_1$ , а  $\widehat{B}$  — оператор поворота векторов пространства  $B_2$  на угол  $\varphi$ . Найти матрицу коммутатора  $\langle \widehat{A}, \widehat{B} \rangle$  в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , если:

- а)  $\varphi = \pi/6$ ; б)  $\varphi = \pi/2$ ; в)  $\varphi = \pi$ .

Доказать, что:

в случае а) оператор  $\langle \widehat{A}, \widehat{B} \rangle$  является произведением трех преобразований пространства  $B_2$ , а именно  $\langle \widehat{A}, \widehat{B} \rangle = \widehat{C}_1 \widehat{C}_2 \widehat{C}_3$ , где  $\widehat{C}_1$  — симметрия относительно вектора  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ ,  $\widehat{C}_2$  — центральная симметрия относительно точки  $O$ ,  $\widehat{C}_3$  — оператор подобия с коэффициентом подобия 0,5;

в случае б)  $\langle \widehat{A}, \widehat{B} \rangle = \widehat{C}_1 \widehat{C}_2$ , где  $\widehat{C}_1$  и  $\widehat{C}_2$  — те же самые преобразования пространства  $B_2$ , что и в случае а);

в случае в)  $\langle \widehat{A}, \widehat{B} \rangle = \widehat{\theta}$ , где  $\widehat{\theta}$  — нуль-оператор.

△ Согласно определению оператора  $\widehat{A}$  имеем равенства

$$\widehat{A}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2, \quad \widehat{A}\mathbf{e}_2 = \theta = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2.$$

Из этих равенств следует, что

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица оператора  $\widehat{B}$  в том же базисе имеет вид (см. пример 1)

$$B_e = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Матрица  $C_e$  коммутатора  $\langle \widehat{A}, \widehat{B} \rangle = \widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A}$  выражается формулой  $C_e = A_e B_e - B_e A_e$ . Поэтому в нашем случае

$$\begin{aligned} C_e = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} - \\ & - \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \varphi \\ -\sin \varphi & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

а) Если  $\varphi = \pi/6$ , то матрица коммутатора  $\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle$  имеет вид

$$C_e = \begin{pmatrix} 0 & -0,5 \\ -0,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицу  $C_e$  можно представить в виде произведения матриц:

$$C_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \equiv C_{1e} C_{2e} C_{3e}. \quad (10)$$

Матрица  $C_{1e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  является в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  матрицей линейного оператора  $\hat{C}_1$ , переводящего любой вектор  $\mathbf{x}$  координатами  $x^1, x^2$  в этом базисе в такой вектор  $\mathbf{y}$ , координаты  $y^1, y^2$  которого в том же базисе выражаются через  $x^1, x^2$  по формуле (4):

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^1 \end{pmatrix}.$$

Полученное равенство показывает, что любой вектор  $\mathbf{x}$  в результате преобразования  $\hat{C}_1$  переходит в вектор  $\mathbf{y}$ , симметричный относительно вектора  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ . Значит, оператор  $\hat{C}_1$  — симметрия относительно вектора  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ .

Матрица  $C_{2e} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  является в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  матрицей оператора  $\hat{C}_2$ , который любой вектор  $\mathbf{x}$  из  $B_2$  переводит в вектор  $-\mathbf{x}$ , т. е.  $\hat{C}_2$  — симметрия относительно точки  $O$ .

Наконец, матрица  $C_{3e} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$  является матрицей оператора подобия  $\hat{C}_3$  с коэффициентом подобия 0,5.

Из равенства (10) следует, что коммутатор  $\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle$  является произведением трех указанных операторов:  $\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = \hat{C}_1 \hat{C}_2 \hat{C}_3$ .

б) Если  $\varphi = \pi/2$ , то матрица  $C_e$  коммутатора  $\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle$  имеет вид

$$C_e = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

и ее можно представить в виде произведения двух матриц:

$$C_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv C_{1e} C_{2e},$$

где матрицы  $C_{1e}$  и  $C_{2e}$  те же самые, что и в случае а). Поэтому

$$\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = \hat{C}_1 \hat{C}_2,$$

где  $\hat{C}_1$  и  $\hat{C}_2$  — линейные операторы, рассмотренные в п. а).

в) При  $\varphi = \pi$  матрица  $C_e$  коммутатора  $\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle$  становится нулевой:  $C_e = \Theta$ . Поэтому коммутатор  $\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle$  является в этом случае нуль-оператором. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

- Произвольный элемент  $x$  линейного пространства  $R_3$ , имеющий в базисе  $e_1, e_2, e_3$  координаты  $x^1, x^2, x^3$ , при действии оператора  $\hat{A}$  переходит в элемент  $y = \hat{A}x$ , имеющий в этом же базисе координаты  $x^2 + x^3, 2x^1 + x^3, 3x^1 - x^2 + x^3$ . Докажите, что  $\hat{A}$  — линейный оператор, и найдите его матрицу в базисе  $e_1, e_2, e_3$ .
- Пусть  $L = L(\cos x, \sin x)$  — линейная оболочка функций  $\cos x$  и  $\sin x$ . Найдите матрицу оператора дифференцирования, действующего в  $L$ , в базисе  $\cos x, \sin x$ .
- Пусть  $\mathbf{y}$  — фиксированный вектор линейного пространства  $V_3$ ,  $\hat{A}$  — оператор, действие которого на любой вектор  $\mathbf{x}$  из  $V_3$  задается равенством  $\hat{A}\mathbf{x} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ , где  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  — векторное произведение вектора  $\mathbf{x}$  на вектор  $\mathbf{y}$ . Докажите, что  $\hat{A}$  — линейный оператор, и найдите матрицу этого оператора в правом ортонормированном базисе  $e_1, e_2, e_3$ , если  $\mathbf{y} = ae_1 + be_2 + ce_3$  ( $a, b, c$  — заданные числа).
- Матрица линейного оператора  $\hat{A}$  в базисе  $e_1, e_2, e_3, e_4$  имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого линейного оператора в базисе:

- $e_1, e_3, e_2, e_4$ ;
  - $e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ .
- В двумерном линейном пространстве  $B_2$  радиус-векторов с общим началом в точке  $O$  задан ортонормированный базис  $e_1, e_2$  и введена прямоугольная система координат  $Ox^1x^2$  с координатными векторами  $e_1, e_2$ . Оператор  $\hat{A}$  переводит любой радиус-вектор  $\mathbf{a}$  в радиус-вектор  $\mathbf{b}$ , симметричный  $\mathbf{a}$  относительно прямой  $x^2 = kx^1$ . Докажите, что  $\hat{A}$  — линейный оператор, и найдите его матрицу в базисе  $e_1, e_2$ .
  - В двумерном линейном пространстве  $B_2$  радиус-векторов с общим началом в точке  $O$  задан ортонормированный базис  $e_1, e_2$  и введена прямоугольная система координат  $Ox^1x^2$  с координатными векторами  $e_1, e_2$ . Оператор  $\hat{A}$  переводит радиус-вектор  $\overrightarrow{OM}$

в радиус-вектор  $\overrightarrow{OP}$ , конец которого (точка  $P$ ) находится по следующему правилу: через точку  $M$  проводится прямая, перпендикулярная к прямой  $x^2 = 2x^1$ ; если точка  $T$  пересечения прямых не совпадает с точкой  $M$ , то точка  $P$  берется на луче  $TM$  так, что  $TP = 3TM$ ; если же точки  $T$  и  $M$  совпадают, то в качестве  $P$  берется точка  $M$ . Докажите, что  $\hat{A}$  — линейный оператор, и найдите его матрицу в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ .

7. В трехмерном линейном пространстве  $B_3$  радиус-векторов с общим началом в точке  $O$  задан ортонормированный базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  и введена прямоугольная система координат  $Ox^1x^2x^3$  с координатными векторами  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Оператор  $\hat{A}$  переводит радиус-вектор  $\overrightarrow{OM}$  в радиус-вектор  $\overrightarrow{OP}$ , конец которого (точка  $P$ ) находится по следующему правилу: через точку  $M$  проводится прямая, перпендикулярная к плоскости  $2x^1 + x^2 - x^3 = 0$ ; если точка  $T$  пересечения прямой и плоскости не совпадает с точкой  $M$ , то точка  $P$  берется на отрезке  $TM$  так, что  $TP = \frac{1}{3}TM$ ; если же точки  $T$  и  $M$  совпадают, то в качестве точки  $P$  берется точка  $M$ . Докажите, что  $\hat{A}$  — линейный оператор, и найдите матрицу этого оператора в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .
8. В трехмерном линейном пространстве  $B_3$  радиус-векторов с общим началом в точке  $O$  задан ортонормированный базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  и введена прямоугольная система координат  $Ox^1x^2x^3$  с координатными векторами  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Прямая  $l$  задана уравнениями  $x^1 = x^2 = x^3$ . Определим цилиндрические координаты радиус-векторов следующим образом: на плоскости  $P$  ( $x^1 + x^2 + x^3 = 0$ ) введем полярную систему координат с полюсом в точке  $O$  и, выбрав на прямой  $l$  направление, введем ось  $Oh$ , совпадающую с прямой  $l$  ( $l \perp P$ ). Пусть число  $h$  равно проекции вектора  $\overrightarrow{OM}$  на ось  $Oh$ , а  $\rho$  и  $\varphi$  — полярные координаты проекции точки  $M$  на плоскость  $P$ . Тройку чисел  $\rho, \varphi, h$  назовем *цилиндрическими координатами* радиус-вектора  $\overrightarrow{OM}$ . Поворотом на угол  $\alpha$  пространства  $B_3$  вокруг оси  $Oh$  назовем преобразование, при котором каждый радиус-вектор  $\overrightarrow{OM}$ , имеющий цилиндрические координаты  $\rho, \varphi, h$ , переходит в радиус-вектор  $\overrightarrow{OM'}$  с координатами  $\rho, \varphi + \alpha, h$ . Докажите, что поворот на угол  $\alpha$  пространства  $B_3$  вокруг оси  $Oh$  является линейным оператором. Найдите матрицу этого оператора в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  при:
  - а)  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ;
  - б)  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ;
  - в)  $\alpha = \pi$ ;
  - г)  $\alpha = 2\pi$ .
9. Пусть  $\hat{D}$  — оператор дифференцирования в пространстве  $L$ , где  $L = L(\sin x, \cos x)$  — линейная оболочка функций  $\sin x$  и  $\cos x$ .

Докажите, что:

- а)  $\widehat{D}^4 = \widehat{I}$ , где  $\widehat{I}$  — тождественный оператор;
- б) оператор  $\widehat{D}$  имеет обратный  $\widehat{D}^{-1}$ ;
- в) сумма  $\widehat{D} + \widehat{D}^{-1}$  равна нуль-оператору.

10. Пусть  $\widehat{D}$  — оператор дифференцирования, действующий в линейном пространстве  $P_5$  многочленов степени не выше 5. Найдите матрицу линейного оператора:

- а)  $\widehat{D}^3$ ;    б)  $\widehat{D}^7$ ;
- в базисе  $1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^5}{5!}$ .

11. Пусть  $\widehat{D}$  — оператор дифференцирования в пространстве  $L$ , где  $L = L(1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x)$  — линейная оболочка указанных функций. Докажите, что функции  $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x$  составляют базис в  $L$ , и найдите в этом базисе матрицу оператора:

- а)  $\widehat{D}^3$ ;    б)  $\widehat{D}^6$ .

Существует ли обратный оператор для оператора  $\widehat{D}^3$ ?

12. Докажите, что оператор дифференцирования  $\widehat{D}$ , действующий в пространстве  $P_n$  многочленов степени не выше  $n$  ( $n \geq 1$ ), является линейным оператором. Найдите матрицу этого оператора в базисе:

- а)  $1, x, \dots, x^n$ ;    б)  $1, \frac{x}{1!}, \dots, \frac{x^n}{n!}$ ;
- в)  $1, 1+x, \dots, 1+x+\dots+x^n$ ;    г)  $1, x-1, x^2-x, \dots, x^n-x^{n-1}$ .

13. Пусть  $\widehat{A}_k$  оператор поворота на угол  $\varphi_k$  в пространстве  $V_2$  векторов на плоскости. Найдите матрицу (в произвольном ортонормированном базисе) оператора:

- а)  $\widehat{A}_1 \widehat{A}_2 \dots \widehat{A}_n$ ;    б)  $\widehat{A}_1^{-1} \widehat{A}_2$ ;    в)  $\widehat{A}_1 \widehat{A}_2 \widehat{A}_1^{-1}$ ;    г)  $\widehat{A}_1 \widehat{A}_2 \widehat{A}_1^{-1} \widehat{A}_2^{-2}$ .

14. В некотором базисе линейного пространства  $R_3$  элементы  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$  имеют соответственно координаты  $2, 3, 5; 0, 1, 2; 1, 0, 0; 1, 1, 1; 1, 1, -1; 2, 1, 2$ . Докажите, что существует единственный линейный оператор  $\widehat{A}$ , переводящий элементы  $x_1, x_2, x_3$  соответственно в элементы  $y_1, y_2, y_3$ . Найдите матрицу этого оператора в том же базисе.

15. В базисе  $e_1, e_2, e_3$  линейного пространства  $R_3$  элементы  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$  имеют соответственно координаты  $-2, -1, -2; 1, 0, 0; 2, 2, 3; 2, 0, -1; -1, 2, -1; 0, -1, 1; 2, -1, 0; -1, 2, -1; 0, -1, 1$ . Линейный оператор  $\widehat{A}$  переводит элементы  $x_1, x_2, x_3$  в элементы  $y_1, y_2, y_3$ , а линейный оператор  $\widehat{B}$  переводит элементы  $y_1, y_2, y_3$  в элементы  $z_1, z_2, z_3$ . Найдите матрицу оператора  $\widehat{B}\widehat{A}$  в базисе:

- а)  $e_1, e_2, e_3$ ;    б)  $x_1, x_2, x_3$ ;    в)  $y_1, y_2, y_3$ .

- 16.** Пусть  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  — линейные операторы, действующие в линейном пространстве  $R_2$ . В базисе  $e_1, e_2$  оператор  $\hat{A}$  имеет матрицу  $A_e = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ . В базисе  $f_1, f_2$  оператор  $\hat{B}$  имеет матрицу  $B_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ , причем  $f = eC$ , где  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ . Найдите матрицу:
- оператора  $\hat{A}^2 + 6\hat{A} + 9\hat{I}$  в базисе  $e_1, e_2$  ( $\hat{I}$  — тождественный оператор);
  - оператора  $\hat{B}^2 + 4\hat{B} + 4\hat{I}$  в базисе  $f_1, f_2$ ;
  - оператора  $\hat{A}^2 - \hat{B}^2$  в базисе  $e_1, e_2$ ;
  - оператора  $\hat{A}\hat{B}^{-1}$  в базисе  $f_1, f_2$ .
- 17.** Докажите, что для любых линейных операторов  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  справедливы равенства:
- $\langle \hat{A}\hat{B}, \hat{C} \rangle = \langle \hat{A}, \hat{C} \rangle \hat{B} + \hat{A} \langle \hat{B}, \hat{C} \rangle$ ;
  - $\langle \hat{A}, \hat{B}\hat{C} \rangle = \langle \hat{A}, \hat{B} \rangle \hat{C} + \hat{B} \langle \hat{A}, \hat{C} \rangle$ ;
  - $\langle \hat{A}, \langle \hat{B}, \hat{C} \rangle \rangle + \langle \hat{B}, \langle \hat{C}, \hat{A} \rangle \rangle + \langle \hat{C}, \langle \hat{A}, \hat{B} \rangle \rangle = \hat{\theta}$  (тождество Якоби).
- 18.** Докажите, что коммутатор линейных операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  не может быть тождественным оператором.

## § 2. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов

**1. Собственные векторы и собственные значения.** Пусть линейный оператор  $\hat{A}$  действует в линейном пространстве  $R$ .

**Определение.** Ненулевой элемент  $x$  из  $R$  называется *собственным вектором* линейного оператора  $\hat{A}$ , если существует число  $\lambda$  такое, что  $\hat{A}x = \lambda x$ . Число  $\lambda$  называется при этом *собственным значением* оператора  $\hat{A}$ . Говорят также, что собственный вектор  $x$  отвечает (или соответствует) собственному значению  $\lambda$ .

Свойства собственных векторов и собственных значений линейного оператора.

1°. Если  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  — различные собственные значения оператора  $\hat{A}$ , то отвечающие им собственные векторы  $x_1, x_2, \dots, x_k$  линейно независимы.

2°. Линейный оператор, действующий в линейном пространстве  $R$  размерности  $n$ , не может иметь более  $n$  различных собственных значений.

3°. Если линейный оператор  $\hat{A}$ , действующий в линейном пространстве  $R$  размерности  $n$ , имеет  $n$  различных собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , то отвечающие им собственные векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  образуют базис пространства  $R$ . Матрица оператора  $\hat{A}$  в этом базисе имеет вид  $(\lambda_p \delta_q^p)$ , где  $\delta_q^p$  — символ Кронекера.

4°. Множество  $M_\lambda$ , содержащее нулевой элемент и все собственные векторы линейного оператора  $\hat{A}$ , отвечающие собственному значению  $\lambda$ , является подпространством линейного пространства  $R$ .

Подпространство  $M_\lambda$  называется *собственным подпространством* оператора  $\hat{A}$ , отвечающим собственному значению  $\lambda$ .

**2. Характеристическое уравнение.** Пусть  $A_e$  — матрица линейного оператора  $\hat{A}$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ ,  $I$  — единичная матрица. Составим определитель  $\det(A_e - \lambda I)$ . Он является многочленом степени  $n$  относительно  $\lambda$  и называется *характеристическим многочленом* оператора  $\hat{A}$ .

Уравнение

$$\det(A_e - \lambda I) = 0 \quad (1)$$

называется *характеристическим уравнением* оператора  $\hat{A}$ .

Характеристический многочлен, а значит, и характеристическое уравнение данного оператора, не зависит от выбора базиса, т. е. в любом базисе коэффициенты характеристического многочлена одни и те же.

**Теорема 3.** Для того чтобы число  $\lambda$  было собственным значением линейного оператора  $\hat{A}$ , действующего в комплексном (вещественном) линейном пространстве  $R_n$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\lambda$  было корнем (вещественным корнем) характеристического уравнения (1).

Теорема 3 дает следующий способ отыскания собственных векторов и собственных значений линейного оператора  $\hat{A}$ .

1) Находим собственные значения оператора, решая уравнение (1). Обозначим их  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ ,  $k \leq n$ .

2) Для каждого собственного значения  $\lambda_p$  находим все ненулевые решения однородной системы уравнений

$$(A_e - \lambda_p I)X = \Theta. \quad (2)$$

Каждое ненулевое решение  $X$  этой системы является столбцом координат в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  собственного вектора оператора  $\hat{A}$ , соответствующего собственному значению  $\lambda_p$ .

**Замечание.** Собственное значение  $\lambda_p$  линейного оператора  $\hat{A}$  называется также собственным значением матрицы  $A_e$ , а ненулевое решение системы (2) (столбец  $X$ ) называется собственным вектором

матрицы  $A_e$ . Во многих разделах математики и ее приложений рассматриваются именно собственные значения и собственные векторы матриц, вне связи их с линейными операторами.

### 3. Инвариантные подпространства линейных операторов.

**Определение.** Подпространство  $M$  линейного пространства  $R$  называется *инвариантным* относительно линейного оператора  $\hat{A}$ , если для любого элемента  $x$  из  $M$  его образ  $\hat{A}x$  также принадлежит  $M$ .

Примеры.

1. Подпространство, состоящее из одного нулевого элемента  $\theta$ , является инвариантным подпространством относительно любого линейного оператора.

2. Само линейное пространство  $R$  является инвариантным относительно любого линейного оператора, действующего в этом пространстве.

Подпространства  $\theta$  и  $R$  называются *тривиальными* инвариантными подпространствами линейного оператора.

3. Собственное подпространство  $M_\lambda$  линейного оператора  $\hat{A}$ , отвечающее собственному значению  $\lambda$ , является инвариантным относительно оператора  $\hat{A}$ .

#### Контрольные вопросы и задания

1. Какой элемент линейного пространства называется собственным вектором линейного оператора  $\hat{A}$ ?
2. Что такое собственное значение линейного оператора?
3. Докажите справедливость равенства  $\hat{A}\theta = 5\theta$ , где  $\hat{A}$  — произвольный линейный оператор,  $\theta$  — нулевой элемент. Следует ли из этого равенства, что  $\theta$  — собственный вектор оператора  $\hat{A}$ , а число 5 — собственное значение этого оператора?
4. Является ли подпространством множество всех собственных векторов линейного оператора, отвечающих одному и тому же собственному значению?
5. Имеет ли собственные значения и собственные векторы:
  - а) нуль-оператор  $\hat{\theta}$ ;
  - б) тождественный оператор  $\hat{I}$ ;
  - в) оператор подобия с коэффициентом подобия  $\mu$ ?
6. Имеет ли оператор поворота на угол  $\varphi$  в линейном пространстве  $V_2$  векторов на плоскости собственные значения и собственные векторы, если: а)  $\varphi = \pi/4$ ; б)  $\varphi = \pi$ ?
7. Каково наибольшее число различных собственных значений, которое может иметь линейный оператор, действующий в линейном пространстве размерности  $n$ ?
8. Всякий ли линейный оператор, действующий в вещественном (комплексном) линейном пространстве  $R_n$ , имеет собственные значения?

9. Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — не равные друг другу собственные значения линейного оператора  $\hat{A}$ , действующего в линейном пространстве  $R_n$ , а  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — соответствующие им собственные векторы. Докажите, что элементы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  образуют базис линейного пространства  $R_n$ . Какой вид имеет матрица оператора  $\hat{A}$  в этом базисе?
10. Какое уравнение называется характеристическим уравнением линейного оператора?
11. Всегда ли корень характеристического уравнения является собственным значением линейного оператора?
12. Объясните, как найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора?
13. Какое подпространство линейного пространства  $R$  называется инвариантным относительно линейного оператора  $\hat{A}$ , действующего в  $R$ ?
14. Какие подпространства являются инвариантными относительно:
  - а) нуль-оператора  $\hat{\theta}$ ;
  - б) тождественного оператора  $\hat{I}$ ;
  - в) оператора подобия с коэффициентом подобия  $\mu$ ?
15. Является ли линейная оболочка  $L(\sin x, \cos x)$  инвариантной относительно оператора дифференцирования?
16. Справедливо ли утверждение: подпространство, состоящее из одного нулевого элемента  $\theta$ , является инвариантным относительно любого линейного оператора?
17. Является ли инвариантным подпространством относительно оператора  $\hat{A}$  собственное подпространство этого оператора, отвечающее некоторому собственному значению?

### Примеры решения задач

1. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора  $\hat{A}$ , действующего в линейном пространстве  $B_3$  радиус-векторов и имеющего в ортонормированном базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  матрицу  $A_e = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  (этот оператор был рассмотрен в примере 3 на с. 114).

Так как

$$\det(A_e - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1/3 - \lambda & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 - \lambda & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda^3,$$

то характеристическое уравнение оператора  $\hat{A}$  имеет вид  $\lambda^2 - \lambda^3 = 0$ . Корни этого уравнения  $\lambda_1 = 1$  и  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  — собственные значения оператора  $\hat{A}$ . Собственное значение  $\lambda = 0$  называется *двукратным собственным значением*.

Чтобы найти координаты собственных векторов, нужно решить систему уравнений (2) при  $\lambda = 1$  и  $\lambda = 0$ .

При  $\lambda = 1$  система уравнений (2) принимает вид

$$\begin{cases} -2x^1 + x^2 + x^3 = 0, \\ x^1 - 2x^2 + x^3 = 0, \\ x^1 + x^2 - 2x^3 = 0. \end{cases}$$

Так как число неизвестных равно 3, а ранг матрицы системы равен 2, то размерность пространства решений равна 1. Решая, находим ФСР, состоящую из одного столбца  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Столбец  $X_1$  — это столбец координат в базисе  $e_1, e_2, e_3$  собственного вектора  $x_1$ , отвечающего собственному значению  $\lambda = 1$ . Множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению  $\lambda = 1$ , имеет вид  $x = cx_1$ , где  $c$  — произвольное вещественное число, не равное нулю.

Если  $\lambda = 0$ , то система уравнений (2) запишется так:

$$\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 = 0, \\ x^1 + x^2 + x^3 = 0, \\ x^1 + x^2 + x^3 = 0. \end{cases}$$

В этой системе уравнений число неизвестных равно 3, а ранг матрицы системы равен 1. Поэтому размерность пространства решений равна 2. Решая систему, находим ее ФСР:

$$X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эти столбцы представляют собой координаты в базисе  $e_1, e_2, e_3$  двух линейно независимых собственных векторов  $x_2$  и  $x_3$  оператора  $\hat{A}$ , отвечающих собственному значению  $\lambda = 0$ . Все множество собственных векторов, соответствующих собственному значению  $\lambda = 0$ , дает линейная комбинация векторов  $x_2$  и  $x_3$ :  $x = c_1x_2 + c_2x_3$ , где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные вещественные числа, одновременно не равные нулю.

**Замечание.** Данную задачу можно решить проще, если воспользоваться примером 3 на с. 114. В этом примере векторы базиса  $f_1, f_2, f_3$ , удовлетворяющие соотношениям (8), являются собственными векторами оператора  $\hat{A}$ . Из равенств (8) следует, что собственному значению  $\lambda = 1$  соответствует собственный вектор  $f_1$ , а собственному значению  $\lambda = 0$  — два линейно независимых собственных вектора,  $f_2$  и  $f_3$ .

Найденные собственные значения и собственные векторы имеют простую геометрическую интерпретацию. Оператор  $\hat{A}$  есть оператор

ортогонального проектирования радиус-векторов на прямую  $l$ , проходящую через начало координат. Ясно, что проекцией любого ненулевого радиус-вектора  $c\mathbf{f}_1$ , лежащего на прямой  $l$ , является сам этот радиус-вектор, т. е. он является собственным вектором оператора  $\hat{A}$ , отвечающим собственному значению  $\lambda = 1$ . Проекцией на прямую  $l$  любого радиус-вектора, лежащего в плоскости  $P$ , перпендикулярной прямой  $l$ , является нулевой вектор, т. е. любой ненулевой радиус-вектор, лежащий в плоскости  $P$ , является собственным вектором оператора  $\hat{A}$ , отвечающим собственному значению  $\lambda = 0$ . Множество всех таких векторов дает линейная комбинация  $c_1\mathbf{f}_2 + c_2\mathbf{f}_3$ , где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные числа, одновременно не равные нулю. ▲

**2.** Найти собственные векторы и собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

△ Характеристический многочлен матрицы  $A$  имеет вид

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -3 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & -3 \\ 0 & 3 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)^3.$$

Его трехкратный корень  $\lambda = 6$  является собственным значением матрицы  $A$ . Чтобы найти собственные векторы, нужно решить систему уравнений  $(A - 6I)X = \Theta$ , т. е.

$$\begin{cases} -3x^2 = 0, \\ -3x^2 - 3x^3 = 0, \\ 63x^2 + 3x^3 = 0. \end{cases}$$

В этой системе число неизвестных равно 3, а ранг матрицы системы равен 2. Поэтому размерность пространства решений равна 1. Решая

систему, находим ее ФСР:  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Таким образом, множество всех

собственных векторов матрицы  $A$  есть множество столбцов  $cX$ , где  $c$  — произвольное число, не равное нулю. ▲

**3.** Три материальных точки  $M_1, M_2, M_3$  единичной массы соединены между собой и со стенкой тремя пружинами с коэффициентами жесткости  $k_1 = 8, k_2 = 3, k_3 = 11$  (рис. 4). Найти собственные частоты и формы малых собственных колебаний данной системы.

△ Прежде всего уточним постановку задачи. Положение равновесия материальных точек  $M_1, M_2, M_3$ , соответствующее нерастянутым пружинам, отметим на оси  $x$  точками  $O_1, O_2, O_3$ . Если сжать или

растянуть пружины каким-то образом, а затем отпустить их, то начнется колебательное движение системы. Будем пренебречь силами

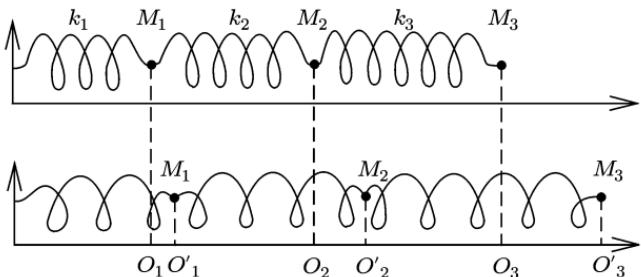


Рис. 4

трения и массами пружин. В произвольный момент времени  $t$  точки  $M_1, M_2, M_3$  занимают какие-то положения  $O'_1, O'_2, O'_3$ . Величины направленных отрезков  $\overrightarrow{O_1O'_1}, \overrightarrow{O_2O'_2}$  и  $\overrightarrow{O_3O'_3}$  на оси  $x$ , характеризующие отклонения точек  $M_1, M_2$  и  $M_3$  от положения равновесия, обозначим через  $x_1, x_2$  и  $x_3$ . Если эти величины изменяются со временем по закону

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \alpha), \quad x_2 = a_2 \sin(\omega t + \alpha), \quad x_3 = a_3 \sin(\omega t + \alpha), \quad (3)$$

то  $\omega$  называется *собственной частотой* системы, а отношения  $a_1 : a_2 : a_3$  будем называть *формой собственных колебаний*, совершаемых с частотой  $\omega$ .

Для отыскания собственных частот и соответствующих им форм колебаний составим уравнения движения материальных точек  $M_1, M_2, M_3$ . На каждую из этих точек действуют силы, обусловленные жесткостью пружин. Согласно закону Гука при малом растяжении пружины упругая сила, стремящаяся вернуть пружину в первоначальное (нерастянутое) положение, пропорциональна величине растяжения. Величины растяжений первой, второй и третьей пружин в момент  $t$  равны соответственно  $x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2$  (см. рис. 4). Поэтому на точку  $M_1$  в момент  $t$  со стороны первой пружины действует сила  $f_1 = -k_1 x_1$ , а со стороны второй пружины — сила  $f_2 = k_2(x_2 - x_1)$ . Обратите внимание на знаки выражений для  $f_1$  и  $f_2$ . Если  $x_1 > 0$ , то первая пружина в момент  $t$  растянута по отношению к положению равновесия, упругая сила стремится сжать пружину, и, следовательно, на точку  $M_1$  со стороны первой пружины действует сила, направленная влево, т. е.  $f_1 = -k_1 x_1 < 0$ . Если  $x_1 < 0$ , то первая пружина сжата, упругая сила стремится растянуть ее, и поэтому на точку  $M_1$  действует сила, направленная вправо, т. е.  $f_1 = -k_1 x_1 > 0$ . Аналогично, если  $x_2 - x_1 > 0$ , то вторая пружина растянута, сила упругости стремится сжать ее, и поэтому со стороны второй пружины на точ-

ку  $M_1$  действует сила, направленная вправо:  $f_2 = k_2(x_2 - x_1) > 0$ . То же самое выражение для  $f_2$  получается в случае  $x_2 - x_1 \leq 0$ .

Итак, результирующая сила, действующая на точку  $M_1$ , есть сила

$$F_1 = f_1 + f_2 = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2.$$

По второму закону Ньютона произведение массы точки  $M_1$  (она равна единице) на ускорение точки (ускорение есть вторая производная  $\ddot{x}_1$  от смещения  $x_1$ ) равно результирующей силе  $F_1$ :

$$\ddot{x}_1 = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2. \quad (4)$$

Аналогично, на точки  $M_2$  и  $M_3$  действуют результирующие силы  $F_2 = -f_2 + f_3 = -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2) = k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + k_3x_3$  и  $F_3 = -f_3 = -k_3(x_3 - x_2)$ . Поэтому уравнения движения этих точек имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + k_3x_3, \\ \ddot{x}_3 &= k_3x_2 - k_3x_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Будем искать решение системы дифференциальных уравнений (4), (5) в виде (3). Подставляя (3) в (4) и (5), приходим к системе линейных уравнений

$$CA = \lambda A, \quad (6)$$

где  $C = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 \\ 0 & k_3 & -k_3 \end{pmatrix}$  — известная матрица, со-

ставленная из коэффициентов правых частей уравнений (4), (5),

$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  — искомый столбец “амплитуд”,  $\lambda = -\omega^2$  — квадрат ис-

комой собственной частоты, взятый со знаком минус.

Таким образом, для отыскания собственных частот  $\omega$  нужно найти собственные значения  $\lambda$  матрицы  $C$ , а для нахождения формы собственных колебаний нужно найти соответствующие собственные векторы.

Учитывая, что  $k_1 = 8$ ,  $k_2 = 3$  и  $k_3 = 11$ , получаем следующее характеристическое уравнение матрицы  $C$ :

$$\det(C - \lambda I) = -(\lambda^3 + 36\lambda^2 + 299\lambda + 264) = 0.$$

Оно имеет корни  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -11$ ,  $\lambda_3 = -24$ . Следовательно,  $\omega_1^2 = 1$ ,  $\omega_2^2 = 11$ ,  $\omega_3^2 = 24$ , т. е. собственными частотами колебательной системы будут  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = \sqrt{11}$ ,  $\omega_3 = \sqrt{24}$ .

Решая для каждого собственного значения  $\lambda_k$  систему (6), находим собственные векторы матрицы  $C$  — столбцы

$$A_1 = c \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad A_2 = c \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = c \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 11 \end{pmatrix},$$

где  $c$  — произвольное число, не равное нулю. Отношения элементов столбца  $A_k$  определяют форму собственных колебаний с частотой  $\omega_k$ . Так, форма собственных колебаний с частотой  $\omega_1 = 1$  задается отношениями:  $3 : 10 : 11$ . ▲

**4.** В линейном пространстве  $R_3$  действует линейный оператор  $\widehat{A}$ , переводящий ортонормированный базис  $e_1, e_2, e_3$  в элементы  $f_1, f_2, f_3$  такие, что

$$\begin{aligned}f_1 &= \widehat{A}e_1 = 1,5e_1 + 0,5e_2 + 0,5e_3, & f_2 &= \widehat{A}e_2 = 0,5e_1 + e_2, \\f_3 &= \widehat{A}e_3 = 0,5e_1 + e_3.\end{aligned}$$

Найти все подпространства пространства  $R_3$ , инвариантные относительно оператора  $\widehat{A}$ .

△ Прежде всего укажем тривиальные инвариантные подпространства  $\theta$  и  $R_3$ . Для нахождения остальных инвариантных подпространств найдем собственные значения и собственные векторы оператора  $\widehat{A}$ . Характеристический многочлен матрицы  $A_e$  имеет вид

$$\det(A_e - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1,5 - \lambda & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1 - \lambda & 0 \\ 0,5 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2,5\lambda + 1).$$

Его корни  $\lambda_1 = 0,5, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$  являются собственными значениями оператора  $\widehat{A}$ .

Чтобы найти собственные векторы, нужно решить систему линейных уравнений  $(A_e - \lambda I)X = \Theta$  при  $\lambda$ , равных собственным значениям оператора  $\widehat{A}$ . При  $\lambda = 0,5$  система принимает вид

$$\begin{cases} x^1 + 0,5x^2 + 0,5x^3 = 0, \\ 0,5x^1 + 0,5x^2 = 0, \\ 0,5x^1 + 0,5x^3 = 0. \end{cases}$$

В этой системе уравнений три неизвестных, а ранг матрицы системы равен 2. Поэтому размерность пространства решений равна 1. Решая

систему, находим ФСР:  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Столбец  $X_1$  — это столбец координат в базисе  $e_1, e_2, e_3$  собственного вектора  $x_1$ , отвечающего собственному значению  $\lambda_1 = 0,5$ . Одномерное инвариантное относительно оператора  $\widehat{A}$  подпространство, соответствующее собственному значению  $\lambda_1$ , есть линейная оболочка  $P_1 = \{cx_1\}$ , где  $c$  — произвольное вещественное число.

При  $\lambda = 1$  система запишется так:

$$\begin{cases} 0,5x^1 + 0,5x^2 + 0,5x^3 = 0, \\ 0,5x^1 = 0, \\ 0,5x^1 = 0. \end{cases}$$

Как и в предыдущем случае, одномерное инвариантное относительно оператора  $\widehat{A}$  подпространство, соответствующее собственному значению  $\lambda_2 = 1$ , есть линейная оболочка  $P_2 = \{cx_2\}$ , где  $c$  — произвольное вещественное число, а  $x_2$  — собственный вектор, отвечающий  $\lambda_2$  и имеющий в базисе  $e_1, e_2, e_3$  координаты  $0, 1, -1$ .

Наконец, при  $\lambda = 2$  система принимает вид

$$\begin{cases} -0,5x^1 + 0,5x^2 + 0,5x^3 = 0, \\ 0,5x^1 - x^2 = 0, \\ 0,5x^1 - x^3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы также равен 2. Поэтому инвариантное относительно оператора  $\widehat{A}$  подпространство, соответствующее собственному значению  $\lambda_3$ , имеет размерность 1 и представляет собой линейную оболочку  $P_3 = \{cx_3\}$ , где  $c$  — произвольное вещественное число, а  $x_3$  — собственный вектор, отвечающий собственному значению  $\lambda_3$  и имеющий в базисе  $e_1, e_2, e_3$  координаты  $2, 1, 1$ .

Далее, линейные оболочки  $L_1 = \{c_1x_1 + c_2x_2\}$ ,  $L_2 = \{c_1x_1 + c_2x_3\}$ ,  $L_3 = \{c_1x_2 + c_2x_3\}$ , где  $c_1, c_2$  — произвольные вещественные числа, являются двумерными инвариантными относительно оператора  $\widehat{A}$  подпространствами. Действительно, например, для  $L_1$  имеем

$$\begin{aligned} \widehat{A}(c_1x_1 + c_2x_2) &= c_1\widehat{A}x_1 + c_2\widehat{A}x_2 = c_1\lambda_1x_1 + c_2\lambda_2x_2 = \\ &= 0,5c_1x_1 + c_2x_2 \in L_1. \end{aligned}$$

Других инвариантных относительно оператора  $\widehat{A}$  подпространств нет. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

- 19.** Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора  $\widehat{A}$ , действующего в линейном пространстве  $R_2$  над полем рациональных чисел и имеющего в базисе  $e_1, e_2$  матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 20.** Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора  $\widehat{A}$ , действующего в линейном пространстве  $R_2$  над полем вещественных чисел и имеющего в базисе  $e_1, e_2$  матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 21.** Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

22. Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора  $\widehat{A}$ , действующего в линейном пространстве  $R_4$  и имеющего в базисе  $e_1, e_2, e_3, e_4$  матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Докажите, что линейная оболочка  $L(e_1 + 2e_2, e_2 + e_3 + 2e_4)$  является инвариантным относительно оператора  $\widehat{A}$  подпространством.

23. Докажите, что линейный оператор  $\widehat{A}$  имеет обратный оператор тогда и только тогда, когда число  $\lambda = 0$  не является собственным значением оператора  $\widehat{A}$ .
24. Докажите, что любой линейный оператор и обратный к нему (если он существует) имеют одни и те же собственные векторы. Найдите связь между собственными значениями этих операторов.
25. Докажите, что при умножении оператора на число  $\alpha \neq 0$  его собственные векторы не изменяются, а собственные значения умножаются на число  $\alpha$ .
26. Докажите, что оператор  $\widehat{A} - \alpha\widehat{I}$  при любом вещественном числе  $\alpha$  имеет те же собственные векторы, что и оператор  $\widehat{A}$ . Найдите связь между собственными значениями этих операторов.
27. Докажите, что собственный вектор оператора  $\widehat{A}$  является собственным вектором оператора  $\widehat{A}^k$  ( $k \in \mathbf{N}$ ) и оператора  $p(\widehat{A})$ , где  $p(t)$  — многочлен. Как выражаются собственные значения операторов  $\widehat{A}^k$  и  $p(\widehat{A})$  через собственные значения оператора  $\widehat{A}$ ?
28. Докажите, что линейная оболочка каких-нибудь собственных векторов оператора является инвариантным относительно этого оператора подпространством.
29. Найдите все подпространства, инвариантные относительно линейного оператора  $\widehat{A}$ , действующего в линейном пространстве  $B_3$  радиус-векторов и имеющего в ортонормированном базисе  $e_1, e_2, e_3$  матрицу  $A_e = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
30. Докажите, что оператор поворота на угол  $\varphi \in (0, \pi)$ , действующий в пространстве  $V_2$  векторов на плоскости, не имеет собственных векторов, а оператор поворота на угол  $\pi$  имеет собственные векторы. Найдите их.

31. Пусть  $\mathbf{y}$  — фиксированный ненулевой вектор из линейного пространства  $V_3$  векторов в пространстве. Найдите собственные векторы и собственные значения оператора  $\hat{A}$ , действие которого на любой вектор  $\mathbf{x}$  из  $V_3$  задается равенством  $\hat{A}\mathbf{x} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ , где  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  — векторное произведение векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ .
32. Найдите собственные векторы и собственные значения оператора дифференцирования в пространстве многочленов  $P_n$ .
33. Имеет ли собственные векторы действующий в линейной оболочке  $L(\cos x, \sin x)$  оператор:
- дифференцирования  $\hat{D}$ ;
  - $\hat{D}^2$ ;
  - $\hat{D}^3$ .
- Если ответ положительный, то укажите собственные векторы и собственные значения оператора.
34. Пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — не равные друг другу собственные значения линейного оператора  $\hat{A}$ , а  $x_1, x_2$  — соответствующие им собственные векторы. Докажите что элементы  $x_1$  и  $x_2$  линейно независимы.
35. Материальные точки  $M_1, M_2, M_3$  имеют массы  $m, 2m, m$  соответственно. Эти точки соединены между собой пружинами, а точки  $M_1$  и  $M_3$  еще двумя пружинами соединены со стенками. Найдите собственные частоты данной системы (три материальных точки и четыре пружины), если коэффициент жесткости каждой пружины равен  $k$ .

### § 3. Линейные операторы в евклидовом пространстве

#### Основные понятия и теоремы

В этом параграфе обсуждаются понятия сопряженного, симметричного и ортогонального операторов. В определении каждого из этих операторов фигурирует скалярное произведение  $(x, y)$  тех или иных элементов  $x, y$  евклидова пространства  $\mathcal{E}$ .

#### 1. Сопряженный оператор.

**Определение.** Оператор  $\hat{A}^*$ , действующий в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}$ , называется *сопряженным* к линейному оператору  $\hat{A}$ , если для любых элементов  $x, y$  из  $\mathcal{E}$  выполняется равенство  $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^*y)$ .

Свойства сопряженного оператора.

1°. Для всякого линейного оператора, действующего в евклидовом пространстве, существует единственный сопряженный оператор, который является также линейным оператором.

2°. В ортонормированном базисе матрица  $A^*$  сопряженного оператора  $\widehat{A}^*$  является транспонированной по отношению к матрице  $A$  оператора  $\widehat{A}$ :  $A^* = A^T$ .

3°. Для любого оператора  $\widehat{A}$  справедливо равенство  $(\widehat{A}^*)^* = \widehat{A}$ .

4°. Для любых линейных операторов  $\widehat{A}$  и  $\widehat{B}$  справедливо равенство  $(\widehat{A}\widehat{B})^* = \widehat{B}^*\widehat{A}^*$ .

5°. Если для оператора  $\widehat{A}$  существует обратный оператор  $\widehat{A}^{-1}$ , то верно равенство  $(\widehat{A}^*)^{-1} = (\widehat{A}^{-1})^*$ .

6°. Собственные значения операторов  $\widehat{A}$  и  $\widehat{A}^*$  совпадают.

## 2. Симметричный (самосопряженный) оператор.

**Определение.** Линейный оператор  $\widehat{A}$ , действующий в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}$ , называется *симметричным* (самосопряженным), если  $\widehat{A}^* = \widehat{A}$ , т. е. для любых элементов  $x, y$  из  $\mathcal{E}$  выполняется равенство  $(\widehat{A}x, y) = (x, \widehat{A}y)$ .

**Свойства симметричного оператора.**

1°. В ортонормированном базисе матрица  $A$  симметричного оператора  $\widehat{A}$  является симметричной матрицей, т. е.  $A = A^T$ , и, обратно, если в каком-нибудь ортонормированном базисе матрица оператора  $\widehat{A}$  является симметричной матрицей, то  $\widehat{A}$  — симметричный оператор.

2°. Все корни характеристического уравнения симметричного оператора — вещественные числа и, следовательно, являются его собственными значениями.

3°. Собственные векторы симметричного оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

4°. Симметричный оператор, действующий в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, имеет  $n$  линейно независимых попарно ортогональных собственных векторов, и, обратно, если в  $n$ -мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис из собственных векторов линейного оператора  $\widehat{A}$ , то  $\widehat{A}$  — симметричный оператор.

## 3. Ортогональный оператор.

**Определение.** Линейный оператор  $\widehat{Q}$ , действующий в евклидовом пространстве, называется *ортогональным*, если для любых элементов  $x, y$  из этого пространства выполняется равенство  $(\widehat{Q}x, \widehat{Q}y) = (x, y)$ .

Иными словами, ортогональный оператор  $\widehat{Q}$  — это линейный оператор, сохраняющий скалярное произведение элементов: скалярное произведение образов  $\widehat{Q}x$  и  $\widehat{Q}y$  равно скалярному произведению их прообразов  $x$  и  $y$ .

**Свойства ортогонального оператора.**

1°. Ортогональный оператор  $\widehat{Q}$  не изменяет нормы элементов, т. е.  $\|\widehat{Q}x\| = \|x\|$ .

2°. Если  $\widehat{Q}$  — ортогональный оператор, то существует обратный к нему оператор  $\widehat{Q}^{-1}$ , который также является ортогональным, и справедливо равенство

$$\widehat{Q}^{-1} = \widehat{Q}^*, \quad (1)$$

т. е. обратный оператор к ортогональному оператору  $\widehat{Q}$  совпадает с сопряженным оператором  $\widehat{Q}^*$ . Равенство (1) можно записать в эквивалентных формах:

$$\widehat{Q}\widehat{Q}^* = \widehat{I} \quad \text{или} \quad \widehat{Q}^*\widehat{Q} = \widehat{I}, \quad (2)$$

где  $\widehat{I}$  — тождественный оператор.

Свойства 1° и 2° являются *характеристическими свойствами* ортогонального оператора, т. е. линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве и не изменяющий нормы элементов, является ортогональным оператором, и точно так же линейный оператор, для которого справедливо равенство (1) или (2), является ортогональным оператором. Поэтому свойства 1° и 2° могут быть положены в основу определения ортогонального оператора.

3°. Ортогональный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис, и, обратно, если линейный оператор  $\widehat{Q}$  переводит какой-нибудь ортонормированный базис в ортонормированный базис, то  $\widehat{Q}$  — ортогональный оператор.

4°. В любом ортонормированном базисе матрица  $Q$  ортогонального оператора является ортогональной матрицей, т. е. удовлетворяет условию  $Q^{-1} = Q^T$  (см. § 4 гл. IV). Это условие можно записать в эквивалентных формах:

$$QQ^T = I \quad \text{или} \quad Q^TQ = I.$$

Обратно: если в некотором ортонормированном базисе матрица оператора  $Q$  ортогональная, то  $\widehat{Q}$  — ортогональный оператор.

5°. Если число  $\lambda$  — собственное значение ортогонального оператора, то  $\lambda$  равно 1 или  $-1$ .

### Контрольные вопросы и задания

- Сформулируйте определение сопряженного оператора.
- Для любого ли линейного оператора, действующего в евклидовом пространстве, существует сопряженный оператор?
- Пусть  $\widehat{A}$  — оператор поворота на угол  $\varphi$  в пространстве  $V_2$  векторов на плоскости. Какой оператор является сопряженным к  $\widehat{A}$ ?

4. Как связаны между собой матрицы  $A$  и  $A^*$  линейных операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{A}^*$  в ортонормированном базисе?
5. Докажите, что для любых линейных операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  справедливо равенство  $(\hat{A} + \hat{B})^* = \hat{A}^* + \hat{B}^*$ .
6. Докажите, что для любого линейного оператора  $\hat{A}$  и любого вещественного числа  $\alpha$  справедливо равенство  $(\alpha \hat{A})^* = \alpha \hat{A}^*$ .
7. Как связаны между собой собственные значения операторов  $\hat{A}$  и  $A^*$ ?
8. Сформулируйте определение симметричного оператора.
9. Является ли симметричным:
  - а) нуль-оператор;
  - б) тождественный оператор;
  - в) оператор подобия;
  - г) оператор поворота на угол  $\pi/4$  в пространстве  $V_2$ ?
10. Верно ли утверждение: если в каком-нибудь ортонормированном базисе матрица оператора  $\hat{A}$  является симметричной матрицей, то  $\hat{A}$  — симметричный оператор?
11. Верны ли утверждения:
  - а) любой симметричный оператор имеет собственные векторы;
  - б) число  $1 + i$ , где  $i$  — мнимая единица, является собственным значением какого-то симметричного оператора?
12. Докажите, что если линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве, симметричен, то в этом пространстве существует ортонормированный базис из собственных векторов этого оператора. Верно ли обратное утверждение?
13. Сформулируйте определение ортогонального оператора.
14. Является ли ортогональным:
  - а) нуль-оператор;
  - б) тождественный оператор;
  - в) оператор подобия с коэффициентом подобия  $\mu \neq 1$ ;
  - г) оператор поворота на угол  $\varphi$  в пространстве  $V_2$  векторов на плоскости?
15. Сформулируйте характеристические свойства ортогонального оператора. Каков смысл слов “характеристическое свойство”?
16. Известно, что линейный оператор  $\hat{Q}$  переводит данный ортонормированный базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  в ортонормированный базис  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Следует ли отсюда, что  $\hat{Q}$  — ортогональный оператор?
17. Докажите, что в ортонормированном базисе матрица ортогонального оператора является ортогональной матрицей.
18. Может ли собственное значение ортогонального оператора быть равным: 2; 0; 1;  $-1$ ?
19. Докажите, что если  $\hat{Q}_1$  и  $\hat{Q}_2$  — ортогональные операторы, то их произведение  $\hat{Q}_1 \hat{Q}_2$  — также ортогональный оператор.

### Примеры решения задач

- 1.** В линейной оболочке  $L = L(\sin x, \cos x)$  скалярное произведение элементов  $f_1 = A_1 \sin x + B_1 \cos x$  и  $f_2 = A_2 \sin x + B_2 \cos x$  введено по формуле  $(f_1, f_2) = A_1 A_2 + B_1 B_2$ .

а) Найти оператор, сопряженный к оператору дифференцирования  $\widehat{D}$ , действующему в пространстве  $L$ .

б) Доказать, что оператор  $\widehat{D}$ , действующий в  $L$ , является ортогональным.

△ а) Элементы  $e_1 = \sin x$ ,  $e_2 = \cos x$  образуют ортонормированный базис пространства  $L$ . Найдем матрицу  $D$  оператора  $\widehat{D}$  в этом базисе. Действуя оператором  $\widehat{D}$  на базисные элементы  $e_1$  и  $e_2$ , получаем

$$\widehat{D}e_1 = (\sin x)' = \cos x = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2,$$

$$\widehat{D}e_2 = (\cos x)' = -\sin x = -1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2.$$

Отсюда следует, что матрица  $D$  имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $D^*$  сопряженного оператора  $\widehat{D}^*$  в базисе  $e_1$ ,  $e_2$  является транспонированной по отношению к матрице  $D$ , т. е.

$$D^* = D^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что  $D^* = -D$ . Поэтому и сопряженный оператор  $\widehat{D}^*$  равен оператору  $\widehat{D}$ , умноженному на  $-1$ , т. е.  $\widehat{D}^* = -\widehat{D}$ . Иными словами, действие сопряженного оператора  $\widehat{D}^*$  на произвольный элемент  $f(x)$  пространства  $L$  задается формулой

$$\widehat{D}^*f = -\widehat{D}f = -f'(x).$$

б) Если  $f_1 = A_1 \sin x + B_1 \cos x$ ,  $f_2 = A_2 \sin x + B_2 \cos x$ , то

$$\widehat{D}f_1 = -B_1 \sin x + A_1 \cos x, \quad \widehat{D}f_2 = -B_2 \sin x + A_2 \cos x.$$

По определению скалярного произведения в пространстве  $L$  имеем

$$(f_1, f_2) = A_1 A_2 + B_1 B_2,$$

$$(\widehat{D}f_1, \widehat{D}f_2) = (-B_1)(-B_2) + A_1 A_2 = A_1 A_2 + B_1 B_2.$$

Итак, для любых элементов  $f_1$  и  $f_2$  из  $L$  справедливо равенство

$$(\widehat{D}f_1, \widehat{D}f_2) = (f_1, f_2).$$

Это означает, что  $\widehat{D}$  — ортогональный оператор в пространстве  $L$ . ▲

**2.** В линейной оболочке  $L = L(\sin x, \cos x)$  скалярное произведение элементов  $f_1 = A_1 \sin x + B_1 \cos x$  и  $f_2 = A_2 \sin x + B_2 \cos x$  введено по формуле

$$(f_1, f_2) = A_1 A_2 + B_1 B_2 + \frac{1}{2}(A_1 B_2 + A_2 B_1).$$

- а) Доказать, что элементы  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x$  и  $e_2 = \sin x - \cos x$  образуют ортонормированный базис пространства  $L$ .
- б) Найти матрицу оператора дифференцирования  $\widehat{D}$  в базисе  $e_1, e_2$ .
- в) Найти матрицу сопряженного оператора  $\widehat{D}^*$  в базисе  $e_1, e_2$ .
- г) Справедливо ли равенство  $\widehat{D}^* = -\widehat{D}$  (сравнить с примером 1)?
- д) Является ли оператор  $\widehat{D}$  симметричным в пространстве  $L$ ?

△ а) Так как

$$\|e_1\|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = 1, \quad \|e_2\|^2 = 1 + 1 + \frac{1}{2} (-1 - 1) = 1,$$

$$(e_1, e_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} (-1) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0,$$

то  $e_1, e_2$  — ортонормированный базис пространства  $L$ .

б) Для того чтобы составить матрицу  $D$  оператора  $\widehat{D}$  в базисе  $e_1, e_2$ , найдем образы элементов  $e_1, e_2$ :

$$\begin{aligned}\widehat{D}e_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\sin x + \cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x = -\frac{1}{\sqrt{3}} e_2, \\ \widehat{D}e_2 &= (\sin x - \cos x)' = \sin x + \cos x = \sqrt{3}e_1.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $D = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$  — матрица оператора  $\widehat{D}$  в базисе  $e_1, e_2$ .

в) Матрица  $D^*$  сопряженного оператора  $\widehat{D}^*$  в базисе  $e_1, e_2$  является транспонированной по отношению к матрице  $D$ , т. е.

$$D^* = D^T = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

г) Сравнивая матрицы  $D^*$  и  $D$ , приходим к выводу, что  $D^* \neq -D$ . Следовательно, не равны и соответствующие операторы:  $\widehat{D}^* \neq -\widehat{D}$ .

Сопоставляя полученный результат с результатом примера 1, приходим к выводу: выполнение равенства  $\widehat{D}^* = -\widehat{D}$  зависит от способа введения скалярного произведения в пространстве  $L$ .

д) Так как матрица  $D$  оператора  $\widehat{D}$  в ортонормированном базисе  $e_1, e_2$  не является симметричной, то и оператор  $\widehat{D}$  не является симметричным. ▲

**3.** В линейном пространстве  $P_n$  многочленов степени не выше  $n$  скалярное произведение элементов  $f(x)$  и  $g(x)$  введено по формуле

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Доказать, что линейный оператор  $\hat{A}$ , заданный формулой

$$\hat{A}f = \int_0^1 K(x, t)f(t) dt, \quad \text{где } K(x, t) = \sum_{i=0}^n (xt)^i,$$

является симметричным оператором.

△ Так как в выражении для скалярного произведения  $(\hat{A}f, g) = \int_0^1 \left[ \int_0^1 K(x, t)f(t)dt \right] g(x) dx$  подынтегральная функция  $K(x, t)f(t)g(x)$

непрерывна в квадрате  $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ , то можно изменить порядок интегрирования. Кроме того,  $K(x, t) = K(t, x)$ . Поэтому

$$(\hat{A}f, g) = \int_0^1 f(t) \left[ \int_0^1 K(t, x)g(x) dx \right] dt = (f, \hat{A}g).$$

Таким образом, выполнено условие из определения симметричного оператора, и, значит,  $\hat{A}$  — симметричный оператор. ▲

**4.** Пусть  $\mathbf{c}$  — фиксированный ненулевой вектор в евклидовом пространстве  $V_2$  векторов на плоскости,  $\hat{A}$  — линейный оператор, действующий в этом пространстве и ортогонально проектирующий векторы из  $V_2$  на линейную оболочку  $L(\mathbf{c})$ . Доказать, что  $\hat{A}$  — симметричный оператор.

△ Выберем ортонормированный базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  следующим образом:  $\mathbf{e}_1$  — вектор, сонаправленный с вектором  $\mathbf{c}$ , а  $\mathbf{e}_2$  — вектор, перпендикулярный вектору  $\mathbf{c}$ . Тогда  $\hat{A}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$ ,  $\hat{A}\mathbf{e}_2 = \theta$ . Поэтому матрица оператора  $\hat{A}$  в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  имеет вид  $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Так как  $A_e$  — симметричная матрица, то согласно свойству 1°  $\hat{A}$  — симметричный оператор. ▲

**5.** Найти собственные векторы и собственные значения симметричного оператора  $\hat{A}$ , действующего в евклидовом пространстве  $E_3$  и имеющего в ортонормированном базисе  $e_1, e_2, e_3$  матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

△ Характеристический многочлен оператора  $\hat{A}$  имеет вид

$$\det(A_e - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 & 0 \\ 3 & 1 - \lambda & 4 \\ 0 & 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda + 4)(\lambda - 6),$$

поэтому  $\lambda_1 = -4$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 6$  — собственные значения этого оператора.

Чтобы найти координаты собственных векторов, нужно решить систему уравнений  $(A_e - \lambda I)X = \Theta$  при  $\lambda_1 = -4$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 6$ .

При  $\lambda = -4$  эта система принимает вид

$$\begin{cases} 5x^1 + 3x^2 = 0, \\ 3x^1 + 5x^2 + 4x^3 = 0, \\ 4x^2 + 5x^3 = 0. \end{cases}$$

Так как число неизвестных равно 3, а ранг матрицы системы равен 2, то размерность пространства решений равна 1. Следовательно, ФСР

состоит из одного решения:  $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Числа 3, -5, 4 являются координатами собственного вектора  $x_1$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$ , т. е.  $x_1 = 3e_1 - 5e_2 + 4e_3$  — собственный вектор оператора  $\hat{A}$ . Множество всех собственных векторов оператора  $\hat{A}$ , соответствующих собственному значению  $\lambda = -4$ , дается формулой  $c(3e_1 - 5e_2 + 4e_3)$ , где  $c$  — любое вещественное число, не равное нулю.

При  $\lambda = 1$  система запишется так:

$$\begin{cases} 3x^2 = 0, \\ 3x^1 + 4x^3 = 0, \\ 4x^2 = 0. \end{cases}$$

Столбец  $X_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  — ФСР этой системы, поэтому множество всех собственных векторов оператора  $\hat{A}$ , соответствующих собственному значению  $\lambda = 1$ , дается формулой  $c(-4e_1 + 3e_3)$ , где  $c$  — любое число, не равное нулю.

Наконец, при  $\lambda = 6$  система уравнений относительно координат собственного вектора имеет вид

$$\begin{cases} -5x^1 + 3x^2 = 0, \\ 3x^1 - 5x^2 + 4x^3 = 0, \\ 4x^2 - 5x^3 = 0. \end{cases}$$

Столбец  $X_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$  — ФСР этой системы, поэтому множество всех собственных векторов оператора  $\hat{A}$ , соответствующих собственному значению  $\lambda = 6$ , дается формулой  $c(3e_1 + 5e_2 + 4e_3)$ , где  $c$  — любое число, не равное нулю. ▲

**6.** Линейный оператор  $\hat{A}$ , действующий в евклидовом пространстве  $E_3$ , имеет в базисе  $f_1, f_2, f_3$  матрицу

$$A_f = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Является ли оператор  $\hat{A}$  ортогональным, если разложение элементов  $f_1, f_2, f_3$  по ортонормированному базису  $e_1, e_2, e_3$  имеет вид

$$f_1 = e_2 + e_3, \quad f_2 = e_1 + e_3, \quad f_3 = e_1 + e_2?$$

△ Пусть  $C$  — матрица перехода от базиса  $e_1, e_2, e_3$  к базису  $f_1, f_2, f_3$ . Как следует из разложения элементов  $f_1, f_2, f_3$  по базису  $e_1, e_2, e_3$ , она имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По формуле  $A_e = CA_f C^{-1}$  находим матрицу  $A_e$ :

$$\begin{aligned} A_e &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что  $A_e$  — ортогональная матрица. Следовательно, согласно свойству 4°  $\hat{A}$  — ортогональный оператор.

Тот же результат можно получить иначе, убедившись в том, что имеет место свойство, лежащее в основе определения ортогонального оператора:  $\forall x, y \in \mathcal{E}_3$ :  $(\hat{A}x, \hat{A}y) = (x, y)$ . С этой целью вычислим вначале скалярное произведение  $(x, y)$ , воспользовавшись формулой для скалярного произведения элементов евклидова пространства в произвольном базисе  $f_1, f_2, f_3$ :  $(x, y) = \sum_{i,j=1}^3 x^i y^j \cdot (f_i, f_j)$ , где  $x^i$  и  $y^j$  —

координаты элементов  $x$  и  $y$  в базисе  $f_1, f_2, f_3$ . Значения скалярных произведений  $(f_i, f_j)$  поместим в следующую таблицу:

	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$f_1$	2	1	1
$f_2$	1	2	1
$f_3$	1	1	2

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} (x, y) &= \\ &= 2x^1 y^1 + x^1 y^2 + x^1 y^3 + x^2 y^1 + 2x^2 y^2 + x^2 y^3 + x^3 y^1 + x^3 y^2 + 2x^3 y^3. \end{aligned}$$

По формулам (4), § 1 находим столбцы из координат элементов  $\hat{A}x$

и  $\widehat{A}y$  в базисе  $f_1, f_2, f_3$ :

$$(\widehat{A}x)_f = \begin{pmatrix} 2/3x^1 + x^2 \\ -x^1 \\ 2/3x^1 + x^3 \end{pmatrix}, \quad (\widehat{A}y)_f = \begin{pmatrix} 2/3y^1 + y^2 \\ -y^1 \\ 2/3y^1 + y^3 \end{pmatrix}.$$

Подставляя найденные значения координат в формулу

$$(\widehat{A}x, \widehat{A}y) = \sum_{i,j=1}^3 (\widehat{A}x)_f^i (\widehat{A}y)_f^j (f_i, f_j),$$

приходим к равенству  $(\widehat{A}x, \widehat{A}y) = (x, y)$ . Следовательно,  $\widehat{A}$  — ортогональный оператор.

**Замечание.** Хотя  $\widehat{A}$  — ортогональный оператор, однако его матрица  $A_f$  в базисе  $f_1, f_2, f_3$  не является ортогональной. Причина состоит в том, что базис  $f_1, f_2, f_3$  не ортонормированный. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

36. Докажите равенство: а)  $(\widehat{A}\widehat{B})^* = \widehat{B}^* \widehat{A}^*$ ; б)  $(\widehat{A}^*)^* = \widehat{A}$ .
37. Докажите, что если оператор  $\widehat{A}$  имеет обратный, то сопряженный оператор  $\widehat{A}^*$  также имеет обратный и справедливо равенство  $(\widehat{A}^*)^{-1} = (\widehat{A}^{-1})^*$ .
38. Пусть  $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  — матрица линейного оператора  $\widehat{A}$ , действующего в евклидовом пространстве  $E_3$ , в базисе  $f_1, f_2, f_3$ , где  $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$ ,  $f_2 = e_2 + e_3$ ,  $f_3 = e_2 - e_3$ , а  $e_1, e_2, e_3$  — ортонормированный базис. Найдите матрицу сопряженного оператора  $\widehat{A}^*$  в базисе  $f_1, f_2, f_3$ .
39. В евклидовом пространстве  $P_n[a, b]$  многочленов степени, не превосходящей  $n$ , заданных на отрезке  $[a, b]$ , скалярное произведение элементов  $p_1(x)$  и  $p_2(x)$  введено по формуле

$$(p_1, p_2) = \int_a^b p_1(x)p_2(x) dx,$$

а оператор  $\widehat{A}$  определен формулой

$$\widehat{A}p = \int_a^b K(x, t)p(t) dt,$$

где  $K(x, t) = \sum_{i=0}^n k_i(x) \cdot l_i(t)$ ,  $k_i(x)$ ,  $l_i(t)$  — многочлены степени не выше  $n$ . Найдите формулу, определяющую сопряженный оператор  $\widehat{A}^*$ .

40. Линейный оператор  $\hat{A}$ , действующий в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_3$ , имеет в ортонормированном базисе  $e_1, e_2, e_3$  матрицу  $A_e$ , равную:

а)  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$ ;

в)  $\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ .

Постройте в  $\mathcal{E}_3$  ортонормированный базис из собственных векторов оператора  $\hat{A}$  и составьте матрицу оператора  $\hat{A}$  в этом базисе.

41. Докажите, что собственные векторы симметричного оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

42. Докажите, что если  $x$  — собственный вектор симметричного оператора  $\hat{A}$ , действующего в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_n$ , а  $M$  — множество всех элементов  $y$  из  $\mathcal{E}_n$ , ортогональных  $x$ , то  $M$  является подпространством  $\mathcal{E}_n$  размерности  $n - 1$ , инвариантным относительно оператора  $\hat{A}$ .

43. В линейной оболочке  $L = L(\sin x, \cos x)$  скалярное произведение элементов  $f_1 = A_1 \sin x + B_1 \cos x$  и  $f_2 = A_2 \sin x + B_2 \cos x$  введено формулой  $(f_1, f_2) = A_1 A_2 + B_1 B_2$ . Докажите, что оператор  $\hat{D}^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ , действующий в  $L$ , является симметричным и ортогональным. Найдите его матрицу в базисе  $\sin x, \cos x$ .

44. Докажите утверждение: произведение  $\hat{A}\hat{B}$  симметричных операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  является симметричным оператором тогда и только тогда, когда коммутатор  $\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle$  равен нуль-оператору.

45. Докажите, что если линейный оператор  $\hat{A}$ , действующий в евклидовом пространстве, сохраняет нормы элементов этого пространства, т. е.  $\forall x : \|\hat{A}x\| = \|x\|$ , то  $\hat{A}$  — ортогональный оператор.

46. Докажите, что любой ортогональный оператор  $\hat{Q}$  имеет обратный  $\hat{Q}^{-1}$ , причем  $\hat{Q}^{-1}$  является ортогональным оператором и справедливо равенство  $\hat{Q}^{-1} = \hat{Q}^*$ .

47. Докажите, что если  $\lambda$  — собственное значение ортогонального оператора, то  $\lambda$  равно либо 1, либо  $-1$ .

48. Дайте геометрическую интерпретацию линейного оператора  $\hat{A}$ , действующего в евклидовом пространстве  $V_2$  векторов на плоскости и имеющего в некотором ортонормированном базисе  $e_1, e_2$  матрицу  $A_e = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$ . Докажите, что оператор  $\hat{A}$  является симметричным и ортогональным.

## § 4. Линейные операторы в унитарном пространстве

### Основные понятия и теоремы

В унитарном пространстве аналогами линейных операторов, рассмотренных в § 3, являются сопряженный, эрмитов (или самосопряженный) и унитарный операторы.

#### 1. Сопряженный оператор.

**Определение.** Оператор  $\widehat{A}^*$ , действующий в унитарном пространстве  $E$ , называется *сопряженным* к линейному оператору  $\widehat{A}$ , если для любых элементов  $x, y$  из  $E$  выполняется равенство  $(\widehat{A}x, y) = (x, \widehat{A}^*y)$ .

#### Свойства сопряженного оператора.

1°. Для всякого линейного оператора существует единственный сопряженный оператор, который также является линейным оператором.

2°. В ортонормированном базисе матрица  $A^*$  оператора  $\widehat{A}^*$  является эрмитово сопряженной по отношению к матрице  $A$  оператора  $\widehat{A}$ , т. е. получается из матрицы  $A$  транспонированием и заменой всех элементов на комплексно сопряженные:  $A^* = \overline{A}^T$  (см. § 4 гл. IV).

3°. Для любого оператора  $\widehat{A}$  справедливо равенство  $(\widehat{A}^*)^* = \widehat{A}$ .

4°. Для любых линейных операторов  $\widehat{A}$  и  $\widehat{B}$  справедливо равенство  $(\widehat{A}\widehat{B})^* = \widehat{B}^*\widehat{A}^*$ .

5°. Если для оператора  $\widehat{A}$  существует обратный оператор  $\widehat{A}^{-1}$ , то верно равенство  $(\widehat{A}^*)^{-1} = (\widehat{A}^{-1})^*$ .

6°. Если число  $\lambda$  — собственное значение оператора  $\widehat{A}$ , то комплексно сопряженное число  $\bar{\lambda}$  — собственное значение сопряженного оператора  $\widehat{A}^*$ .

#### 2. Эрмитов (самосопряженный) оператор.

**Определение.** Линейный оператор  $\widehat{A}$ , действующий в унитарном пространстве  $E$ , называется *эрмитовым* или *самосопряженным*, если  $\widehat{A}^* = \widehat{A}$ , т. е. для любых элементов  $x, y$  из  $E$  выполняется равенство  $(\widehat{A}x, y) = (x, \widehat{A}y)$ .

#### Свойства эрмитова оператора.

1°. В ортонормированном базисе матрица  $A$  эрмитова оператора  $\widehat{A}$  является *эрмитовой матрицей*, т. е. матрица  $\widehat{A}$  удовлетворяет условию

$$A = A^*, \tag{1}$$

где  $A^*$  — эрмитово сопряженная матрица по отношению к матрице  $A$ . Обратно: если в каком-нибудь ортонормированном базисе матрица оператора  $\widehat{A}$  является эрмитовой, то  $\widehat{A}$  — эрмитов оператор.

2°. Если  $\hat{A}$  — эрмитов оператор, действующий в унитарном пространстве  $E$ , то для любого элемента  $x$  из  $E$  скалярное произведение  $(\hat{A}x, x)$  — вещественное число.

3°. Собственные значения эрмитова оператора — вещественные числа.

4°. Собственные векторы эрмитова оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

5°. Эрмитов оператор, действующий в  $n$ -мерном унитарном пространстве, имеет  $n$  линейно независимых попарно ортогональных собственных векторов, и, обратно, если в  $n$ -мерном унитарном пространстве существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора  $\hat{A}$ , то  $\hat{A}$  — эрмитов оператор.

### 3. Унитарный оператор.

**Определение.** Линейный оператор  $\hat{U}$ , действующий в унитарном пространстве  $E$ , называется *унитарным*, если для любых элементов  $x, y$  из  $E$  выполняется равенство  $(\hat{U}x, \hat{U}y) = (x, y)$ .

Иными словами, унитарный оператор — это линейный оператор, сохраняющий скалярное произведение элементов унитарного пространства.

#### Свойства унитарного оператора.

1°. Унитарный оператор  $\hat{U}$  не изменяет нормы элементов, т. е.  $\|\hat{U}x\| = \|x\|$ .

2°. Если  $\hat{U}$  — унитарный оператор, то существует обратный к нему оператор  $\hat{U}^{-1}$ , который также является унитарным оператором, и справедливо равенство

$$\hat{U}^{-1} = \hat{U}^*, \quad (2)$$

т. е. обратный оператор к унитарному оператору  $\hat{U}$  совпадает с соизмененным оператором  $\hat{U}^*$ . Равенство (2) можно записать в эквивалентных формах:

$$\hat{U}\hat{U}^* = \hat{I} \quad \text{или} \quad \hat{U}^*\hat{U} = \hat{I}, \quad (3)$$

где  $\hat{I}$  — тождественный оператор.

Свойства 1° и 2° являются характеристическими свойствами унитарного оператора, т. е. линейный оператор, действующий в унитарном пространстве и не изменяющий нормы элементов, является унитарным оператором, и точно так же линейный оператор  $\hat{U}$ , для которого справедливо равенство (2) или (3), является унитарным оператором. Поэтому свойства 1° и 2° могут быть положены в основу определения унитарного оператора.

3°. Унитарный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис, и, обратно, если линейный оператор  $\hat{U}$  пере-

водит какой-нибудь ортонормированный базис в ортонормированный базис, то  $\widehat{U}$  — унитарный оператор.

4°. В любом ортонормированном базисе матрица  $U$  унитарного оператора  $\widehat{U}$  является унитарной матрицей, т. е. удовлетворяет условию

$$U^{-1} = U^*, \quad (4)$$

где  $U^*$  — матрица, эрмитово сопряженная по отношению к матрице  $U$ . Это условие можно записать в эквивалентных формах:

$$UU^* = I \quad \text{или} \quad U^*U = I. \quad (5)$$

Обратно: если в некотором ортонормированном базисе матрица линейного оператора  $\widehat{U}$  унитарна, то  $\widehat{U}$  — унитарный оператор.

5°. Если число  $\lambda$  — собственное значение унитарного оператора, то  $|\lambda| = 1$ .

### Контрольные вопросы и задания

- Сформулируйте определение сопряженного оператора к линейному оператору, действующему в унитарном пространстве.
- Для любого ли линейного оператора, действующего в унитарном пространстве, существует сопряженный оператор?
- Как связаны между собой матрицы операторов  $\widehat{A}$  и  $\widehat{A}^*$  в одном и том же ортонормированном базисе унитарного пространства?
- Как связаны между собой собственные значения операторов  $\widehat{A}$  и  $\widehat{A}^*$ , действующих в унитарном пространстве?
- Докажите, что для любых линейных операторов  $\widehat{A}$  и  $\widehat{B}$ , действующих в унитарном пространстве, справедливо равенство  $(\widehat{A} + \widehat{B})^* = \widehat{A}^* + \widehat{B}^*$ .
- Докажите, что для любого линейного оператора  $A$ , действующего в унитарном пространстве, и любого комплексного числа  $\alpha$  справедливо равенство  $(\alpha\widehat{A})^* = \overline{\alpha}\widehat{A}^*$ .
- Сформулируйте определение эрмитова оператора.
- Является ли эрмитовым:
  - нуль-оператор;
  - тождественный оператор;
  - оператор подобия с вещественным коэффициентом подобия;
  - оператор подобия с комплексным коэффициентом подобия?
- Верно ли утверждение: если в каком-нибудь ортонормированном базисе матрица оператора является эрмитовой, то и в любом другом ортонормированном базисе матрица этого оператора эрмитова?
- Может ли для какого-нибудь элемента  $x$  быть верным равенство  $(\widehat{A}x, x) = 1 + i$ , где  $\widehat{A}$  — эрмитов оператор?
- Может ли число  $1 + i$  быть собственным значением эрмитова оператора?
- Докажите, что если линейный оператор, действующий в унитарном пространстве  $E_n$ , эрмитов, то в  $E_n$  существует ортонормированный базис из собственных векторов этого оператора. Верно ли обратное утверждение?

13. Сформулируйте определение унитарного оператора.
14. Является ли унитарным:
  - а) нуль-оператор;
  - б) тождественный оператор;
  - в) оператор подобия с коэффициентом подобия  $\mu$ , если  $\mu$  — комплексное число и  $|\mu| = 1$ ?
15. Сформулируйте характеристические свойства унитарного оператора.
16. Сформулируйте определение унитарного оператора на основе какого-то из характеристических свойств.
17. Докажите, что в ортонормированном базисе матрица унитарного оператора является унитарной матрицей.
18. Верно ли утверждение: если в каком-нибудь ортонормированном базисе матрица линейного оператора является унитарной, то и в любом другом ортонормированном базисе матрица этого оператора унитарна?
19. Может ли собственное значение унитарного оператора быть равным:  $1 + i$ ;  $0$ ;  $2$ ?

### Примеры решения задач

1. Пусть  $e_1, e_2$  — ортонормированный базис в унитарном пространстве  $E_2$ ,  $f_1 = e_1 + e_2$ ,  $f_2 = e_1 - ie_2$ . Линейный оператор  $\hat{A}$ , действующий в этом пространстве, имеет в базисе  $f_1, f_2$  матрицу  $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ -1-i & 1-i \end{pmatrix}$ . Найти матрицу сопряженного оператора  $\hat{A}^*$  в базисе  $f_1, f_2$ .

△ Матрица  $A_e^*$  оператора  $\hat{A}^*$  в ортонормированном базисе  $e_1, e_2$  связана с матрицей  $A_e$  оператора  $\hat{A}$  равенством  $A_e^* = \overline{A_e}^T$  (свойство 2°). При переходе к базису  $f_1, f_2$  матрица оператора  $\hat{A}^*$  преобразуется по формуле  $A_f^* = C^{-1} A_e^* C = C^{-1} \overline{A_e}^T C$ , где  $C$  — матрица перехода от базиса  $e_1, e_2$  к базису  $f_1, f_2$ , т. е.  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ . Аналогично, матрица  $A_f$  связана с матрицей  $A_e$  соотношением  $A_f = C^{-1} A_e C$ . Отсюда следует, что  $A_e = C A_f C^{-1}$  и, следовательно,  $\overline{A_e}^T = (\overline{C}^{-1})^T \overline{A_f}^T \overline{C}^T$ . Таким образом, получаем

$$A_f^* = C^{-1} (\overline{C}^{-1})^T \overline{A_f}^T \overline{C}^T C.$$

Так как  $C^{-1} = \frac{1}{-1-i} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & -1+i \end{pmatrix}$ , то

$$\begin{aligned} A_f^* &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & -1+i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1+i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**2.** Является ли эрмитовым оператор  $\widehat{A}$ , если в некотором ортонормированном базисе он имеет матрицу:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 - 3i & -i \\ 2 + 3i & 3 & 2 + i \\ i & 2 - i & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 - 3i & i \\ 2 + 3i & 3 & 2 + i \\ i & 2 - i & -1 \end{pmatrix}?$$

$\triangle$  а) Так как  $A^* = \overline{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 - 3i & -i \\ 2 + 3i & 3 & 2 + i \\ i & 2 - i & -1 \end{pmatrix} = A$ , то  $A$  — эрмитова матрица, и, следовательно,  $\widehat{A}$  — эрмитов оператор (свойство 1°).

б) Так как  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 - 3i & -i \\ 2 + 3i & 3 & 2 + i \\ -i & 2 - i & -1 \end{pmatrix} \neq A$ , то матрица  $A$  не является эрмитовой. Поэтому  $\widehat{A}$  не является эрмитовым оператором.  $\blacktriangleleft$

**3.** Линейный оператор  $\widehat{A}$ , действующий в унитарном пространстве  $E_n$ , задан формулой  $\widehat{A}e_k = \mu_k e_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , где  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — ортонормированный базис в  $E_n$ , а  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  — данные числа. Найти сопряженный оператор  $\widehat{A}^*$ . Является ли он эрмитовым?

$\triangle$  Так как  $\widehat{A}e_k = \mu_k e_k$ , то в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  матрица  $A_e$  оператора  $\widehat{A}$  является диагональной:  $A_e = (\mu_k \delta_k^i)$ . Сопряженный оператор  $\widehat{A}^*$  в том же базисе имеет матрицу  $A_e^* = (\overline{\mu}_k \delta_k^i)$ . Следовательно, сопряженный оператор  $\widehat{A}^*$  можно задать формулой  $\widehat{A}^* e_k = \overline{\mu}_k e_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Если  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  — вещественные числа, то  $\overline{\mu}_k = \mu_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , и, следовательно,  $\widehat{A}^* = \widehat{A}$ . Это равенство показывает, что оператор  $\widehat{A}$  и равный ему оператор  $\widehat{A}^*$  являются эрмитовыми операторами.

Если же хотя бы одно из чисел  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  не является вещественным, то  $\widehat{A}^*$  (как и  $\widehat{A}$ ) не является эрмитовым оператором.  $\blacktriangleleft$

**4.** Пусть  $\widehat{A}$  — линейный оператор, действующий в унитарном пространстве. Доказать, что оператор  $\widehat{B} = i(\widehat{A} - \widehat{A}^*)$  является эрмитовым оператором.

$\triangle$  Напомним, что оператор  $\widehat{B}$  является эрмитовым, если он равен сопряженному оператору, т. е.  $\widehat{B}^* = \widehat{B}$ . Используя свойства сопряженного оператора, находим

$$\begin{aligned} \widehat{B}^* &= [i(\widehat{A} - \widehat{A}^*)]^* = -i(\widehat{A} - \widehat{A}^*)^* = -i[\widehat{A}^* - (\widehat{A}^*)^*] = \\ &= -i(\widehat{A}^* - \widehat{A}) = i(\widehat{A} - A^*) = \widehat{B}. \end{aligned} \quad \blacktriangleleft$$

**5.** Найти собственные векторы и собственные значения эрмитова оператора  $\widehat{A}$ , действующего в унитарном пространстве  $E_3$  и имеюще-

го в ортонормированном базисе  $e_1, e_2, e_3$  матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

△ Характеристический многочлен оператора  $\hat{A}$  имеет вид

$$\det(A_e - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1+i \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1-i & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

Поэтому  $\lambda_1 = -2$  и  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$  — собственные значения этого оператора.

Чтобы найти координаты  $x^1, x^2, x^3$  собственных векторов, нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} (-1-\lambda)x^1 + (1+i)x^3 = 0, \\ (1-\lambda)x^2 = 0, \\ (1-i)x^1 - \lambda x^3 = 0 \end{cases}$$

при  $\lambda = -2$  и  $\lambda = 1$ .

При  $\lambda = -2$  эта система принимает вид

$$\begin{cases} x^1 + (1+i)x^3 = 0, \\ 3x^2 = 0, \\ (1-i)x^1 + 2x^3 = 0. \end{cases}$$

Так как неизвестных 3, а ранг матрицы системы равен 2, то размерность пространства решений равна 1. Следовательно, фундаментальная совокупность решений данной системы уравнений содержит

один столбец. Например, такой:  $X_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Столбец  $X_1$  — это

столбец координат в базисе  $e_1, e_2, e_3$  собственного вектора  $x_1$ , отвечающего собственному значению  $\lambda = -2$ .

Множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению  $\lambda = -2$ , имеет вид  $x = cx_1 = c((1+i)e_1 - e_3)$ , где  $c$  — любое комплексное число, не равное нулю.

Если  $\lambda = 1$ , то система уравнений для определения координат собственных векторов запишется так:

$$\begin{cases} -2x^1 + (1+i)x^3 = 0, \\ (1-i)x^1 - x^3 = 0. \end{cases}$$

В этой системе неизвестных 3, а ранг матрицы системы равен 1. Поэтому размерность пространства решений равна 2. Решая систему, находим ее ФСР:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Эти столбцы представляют собой координаты в базисе  $e_1, e_2, e_3$  двух линейно независимых собственных векторов  $x_2$  и  $x_3$  оператора  $\widehat{A}$ , соответствующих собственному значению  $\lambda = 1$ . Множество всех собственных векторов, отвечающих собственному значению  $\lambda = 1$ , дает линейная комбинация элементов  $x_2$  и  $x_3$ :

$$x = c_1 x_2 + c_2 x_3 = c_2(1+i)e_1 + c_1 e_2 + 2c_2 e_3,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные комплексные числа, одновременно не равные нулю. ▲

**6.** Является ли унитарным оператор  $\widehat{U}$ , действующий в унитарном пространстве  $E_2$ , если  $\widehat{U}e_1 = e_1 + ie_2$  и  $\widehat{U}e_2 = ie_1$ , где  $e_1, e_2$  — ортонормированный базис этого пространства?

△ Матрица  $U_e$  оператора  $\widehat{U}$  в ортонормированном базисе  $e_1, e_2$  имеет вид  $U_e = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ . Если  $U_e$  — унитарная матрица, то согласно свойству 4° унитарного оператора  $\widehat{U}$  — унитарный оператор, в противном случае оператор  $\widehat{U}$  не является унитарным. В свою очередь матрица  $U_e$  унитарна, если она удовлетворяет условию (5). Но

$$U_e U_e^* = U_e \overline{U}_e^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \neq I.$$

Поэтому матрица  $U_e$  не является унитарной, а значит, и оператор  $\widehat{U}$  не является унитарным. ▲

**7.** Является ли унитарным оператор  $\widehat{A}$ , действующий в унитарном пространстве  $E_3$ , если в некотором ортонормированном базисе его матрица  $A$  имеет вид:

$$\text{а) } A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4+3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ 4i & 4+3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}.$$

△ а)  $A^* = \overline{A}^T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4-3i & 4i & 6-2i \\ -4i & 4-3i & -2+6i \\ -6+2i & -2+6i & 1 \end{pmatrix}$ . Проделав вычисления, получаем  $AA^* = I$ , т. е. выполнено условие (5). Значит,  $A$  — унитарная матрица, и поэтому в силу свойства 4°  $\widehat{A}$  — унитарный оператор.

б)  $A^* = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4-3i & -4i & 6-2i \\ -4i & 4-3i & -2+6i \\ -6+2i & -2+6i & 1 \end{pmatrix}$ . Проделав вычисления, получаем  $AA^* \neq I$ , т. е. условие (5) не выполнено. Следовательно,

$A$  не является унитарной матрицей, а значит, в силу свойства 4°  $\widehat{A}$  не является унитарным оператором. ▲

8. Линейные операторы  $\widehat{\sigma}_1$ ,  $\widehat{\sigma}_2$ ,  $\widehat{\sigma}_3$ , действующие в унитарном пространстве размерности 2, имеют в ортонормированном базисе  $e_1$ ,  $e_2$  матрицы

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(эти матрицы в физике называются матрицами Паули). Установить, являются ли операторы  $\widehat{A} = \frac{1}{2} \langle \widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2 \rangle$  и  $\widehat{B} = \frac{1}{2} \langle \widehat{\sigma}_2, \widehat{\sigma}_3 \rangle$  унитарными операторами.

△ Так как  $\widehat{A} = \frac{1}{2} \widehat{\sigma}_1 \widehat{\sigma}_2 - \frac{1}{2} \widehat{\sigma}_2 \widehat{\sigma}_1$ , то матрица  $A_e$  этого оператора в базисе  $e_1$ ,  $e_2$  имеет вид

$$A_e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3.$$

Проделав вычисления, получаем  $A_e^{-1} = A_e^*$ , т. е. условие (4) выполнено. Значит,  $A_e$  — унитарная матрица. Поэтому в силу свойства 4°  $\widehat{A}$  — унитарный оператор.

Аналогично находим матрицу оператора  $\widehat{B} = \frac{1}{2} \widehat{\sigma}_2 \widehat{\sigma}_3 - \frac{1}{2} \widehat{\sigma}_3 \widehat{\sigma}_2$  в базисе  $e_1$ ,  $e_2$ :

$$B_e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1.$$

Легко проверить, что и в этом случае выполняется условие (4), и, следовательно, матрица  $B_e$  — унитарная матрица. Но тогда в силу свойства 4°  $\widehat{B}$  — унитарный оператор. ▲

9. Линейный оператор  $\widehat{U}$ , действующий в унитарном пространстве  $E_3$ , имеет в ортонормированном базисе  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  матрицу

$$U_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что  $\widehat{U}$  — унитарный оператор, и найти его собственные векторы и собственные значения.

△ Перемножив матрицы  $U_e$  и

$$U_e^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получим  $U_e \cdot U_e^* = I$ , т. е. условие (5) выполнено. Значит,  $U_e$  — унитарная матрица, и поэтому в силу свойства  $4^\circ$   $\widehat{U}$  — унитарный оператор.

Характеристическое уравнение оператора  $\widehat{U}$  имеет вид

$$\begin{vmatrix} -1/\sqrt{2} - \lambda & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ -i/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или  $(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$ . Корни уравнения  $\lambda_1 = -1$  и  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$  — собственные значения оператора  $\widehat{U}$ .

Чтобы найти координаты  $x^1, x^2, x^3$  собственных векторов данного оператора, нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} (-1/\sqrt{2} - \lambda)x^1 + (i/\sqrt{2})x^3 = 0, \\ (1 - \lambda)x^2 = 0, \\ (-i/\sqrt{2})x^1 + (1/\sqrt{2} - \lambda)x^3 = 0 \end{cases}$$

при  $\lambda = -1$  и  $\lambda = 1$ .

При  $\lambda = -1$  эта система уравнений запишется так:

$$\begin{cases} (1 - 1/\sqrt{2})x^1 + (i/\sqrt{2})x^3 = 0, \\ 2x^2 = 0, \\ (-i/\sqrt{2})x^1 + (1 + 1/\sqrt{2})x^3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим:  $X_1 = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$  — ФСР данной системы уравнений, и, следовательно,  $i/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2} - 1$  — координаты в базисе  $e_1, e_2, e_3$  собственного вектора  $x_1$ , соответствующего собственному значению  $\lambda = -1$ .

Множество всех собственных векторов, отвечающих собственному значению  $\lambda = -1$ , имеет вид  $x = cx_1 = c(i/\sqrt{2}e_1 + (1/\sqrt{2} - 1)e_3)$ , где  $c$  — произвольное комплексное число, не равное нулю.

Если  $\lambda = 1$ , то система уравнений для определения координат собственных векторов принимает вид

$$\begin{cases} -(1 + 1/\sqrt{2})x^1 + (i/\sqrt{2})x^3 = 0, \\ (-i/\sqrt{2})x^1 + (1/\sqrt{2} - 1)x^3 = 0. \end{cases}$$

Ее ФСР состоит из двух столбцов:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X_3 = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 + 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Элементы этих столбцов представляют собой координаты в базисе  $e_1, e_2, e_3$  двух линейно независимых собственных векторов  $x_2$  и  $x_3$  оператора  $\hat{A}$ , отвечающих собственному значению  $\lambda = 1$ . Множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению  $\lambda = 1$ , дает линейная комбинация элементов  $x_2$  и  $x_3$ :  $x = c_1x_2 + c_2x_3 = c_2(i/\sqrt{2})e_1 + c_1e_2 + c_2(1+1/\sqrt{2})e_3$ , где  $c_1, c_2$  — произвольные комплексные числа, одновременно не равные нулю. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

49. Линейный оператор  $\hat{A}$ , действующий в унитарном пространстве  $E_2$ , имеет в ортонормированном базисе  $e_1, e_2$  матрицу  $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ -1-i & 1-i \end{pmatrix}$ . Найдите матрицу сопряженного оператора  $\hat{A}^*$  в базисе  $f_1, f_2$ , если  $f_1 = e_1 + e_2$ ,  $f_2 = e_1 - ie_2$ . Является ли оператор  $\hat{A}^*$  эрмитовым?
50. Пусть  $e_1, e_2, e_3$  — ортонормированный базис в унитарном пространстве  $E_3$ ,  $f_1 = e_1$ ,  $f_2 = ie_1 + e_2$ ,  $f_3 = -ie_1 + e_2 + e_3$ . Линейный оператор  $\hat{A}$ , действующий в этом пространстве, имеет в базисе  $f_1, f_2, f_3$  матрицу  $A_f = \begin{pmatrix} i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Найдите матрицу сопряженного оператора  $\hat{A}^*$  в базисе  $f_1, f_2, f_3$ .
51. Докажите, что коэффициенты характеристического многочлена оператора  $\hat{A}$ , действующего в унитарном пространстве, являются комплексно сопряженными по отношению к соответствующим коэффициентам характеристического многочлена сопряженного оператора  $\hat{A}^*$ .
52. Пусть  $x$  — собственный вектор линейного оператора  $\hat{A}$ , действующего в унитарном пространстве, отвечающий собственному значению  $\lambda$ ,  $y$  — собственный вектор сопряженного оператора  $\hat{A}^*$ , отвечающий собственному значению  $\mu$ , и  $\lambda \neq \mu$ . Докажите, что  $x$  и  $y$  ортогональны.
53. Является ли эрмитовым линейный оператор, если в некотором ортонормированном базисе он имеет матрицу:  
а)  $\begin{pmatrix} 5 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ ; в)  $\begin{pmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 1+i & 3 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}$ ?
54. Докажите, что если у эрмитова оператора  $\hat{A}$  есть обратный оператор  $\hat{A}^{-1}$ , то он также является эрмитовым оператором.

55. Найдите собственные значения и ортонормированный базис из собственных векторов эрмитова оператора, заданного в ортонормированном базисе  $e_1, e_2$  матрицей:

a)  $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad$  б)  $\begin{pmatrix} 0 & 2+i \\ 2-i & 4 \end{pmatrix}.$

56. Найдите собственные значения и ортонормированный базис из собственных векторов эрмитова оператора, заданного в ортонормированном базисе  $e_1, e_2, e_3$  матрицей  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 3 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

57. Докажите, что собственные векторы эрмитова оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

58. Является ли унитарным линейный оператор  $\hat{A}$ , действующий в унитарном пространстве  $E_2$ , если:

a)  $\hat{A}e_1 = \frac{2}{3}e_1 + \frac{1+2i}{3}e_2, \quad \hat{A}e_2 = \frac{1+2i}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2;$   
 б)  $\hat{A}e_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}e_1 + \frac{i}{\sqrt{5}}e_2, \quad \hat{A}e_2 = \frac{i}{\sqrt{5}}e_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}e_2;$

где  $e_1, e_2$  — ортонормированный базис.

59. Является ли унитарным линейный оператор  $\hat{A}$ , имеющий в ортонормированном базисе унитарного пространства матрицу:

a)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}; \quad$  б)  $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}?$

60. Может ли матрица унитарного оператора в некотором базисе быть неунитарной? Ответ обоснуйте.

61. Найдите собственные значения и ортонормированный базис из собственных векторов унитарного оператора, имеющего в ортонормированном базисе  $e_1, e_2$  матрицу  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$

62. Найдите собственные значения и ортонормированный базис из собственных векторов унитарного оператора, имеющего в ортонормированном базисе  $e_1, e_2, e_3$  матрицу

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1-i \\ i & 1 & -1+i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{pmatrix}.$$

63. Докажите, что если линейный оператор  $\hat{A}$ , действующий в унитарном пространстве, сохраняет нормы элементов, то  $\hat{A}$  — унитарный оператор.

- 64.** Найдите матрицу коммутатора  $\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle$ , где  $\hat{A}, \hat{B}$  — эрмитовы операторы, действующие в унитарном пространстве  $E_3$  и имеющие в некотором ортонормированном базисе матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i \\ i & i & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -i & 1 \\ i & 1 & -i \\ 1 & i & -1 \end{pmatrix}.$$

Является ли оператор  $\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle$  эрмитовым?

- 65.** Является ли коммутатор эрмитовых операторов эрмитовым оператором?

- 66.** Пусть  $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_4$  — линейные операторы, действующие в унитарном пространстве размерности 2, причем  $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$  — операторы из примера 8 на с. 152, а  $\hat{\sigma}_4 = \hat{I}$  — тождественный оператор. Докажите, что операторы  $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_4$  образуют базис в пространстве  $S$  всех линейных операторов, действующих в данном унитарном пространстве.

- 67.** Пусть  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  — два линейных оператора, действующих в унитарном пространстве размерности 2 и имеющих следующие разложения по базису  $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_4$  из задачи 66:

$$\hat{A} = a_1\hat{\sigma}_1 + a_2\hat{\sigma}_2 + a_3\hat{\sigma}_3 + a_4\hat{\sigma}_4, \quad \hat{B} = b_1\hat{\sigma}_1 + b_2\hat{\sigma}_2 + b_3\hat{\sigma}_3 + b_4\hat{\sigma}_4.$$

Найдите разложение по базису  $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_4$  коммутатора  $\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle$ .

# ГЛАВА VI

## КВАДРАТИЧНЫЕ И БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

### § 1. Определение квадратичной формы.

#### Канонический вид квадратичной формы

Основные понятия и теоремы

### 1. Определение квадратичной формы. Матрица квадратичной формы.

Определение. *Квадратичной формой* называется функция числовых переменных  $x^1, \dots, x^n$  следующего вида:

$$Q(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i x^j, \quad (1)$$

где  $a_{ij}$  — вещественные числа (*коэффициенты квадратичной формы*), удовлетворяющие условию

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Матрица  $A = (a_{ij})$  с размерами  $n \times n$  называется *матрицей квадратичной формы*. Из определения квадратичной формы следует, что ее матрица является симметричной. Например, матрицей квадратичной формы

$$Q(x^1, x^2, x^3) = 2(x^1)^2 - 3x^1 x^2 + 4x^1 x^3 + 5(x^2)^2 - 8x^2 x^3 + (x^3)^2$$

является симметричная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1,5 & 2 \\ -1,5 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы составить матрицу  $A$ , нужно данную квадратичную форму записать в виде (1), а для этого нужно смешанные члены  $-3x^1 x^2$ ,  $4x^1 x^3$ ,  $-8x^2 x^3$  представить в виде суммы двух равных слагаемых:

$$-1,5x^1 x^2 - 1,5x^2 x^1, \quad 2x^1 x^3 + 2x^3 x^1, \quad -4x^2 x^3 - 4x^3 x^2.$$

Квадратичную форму (1) можно записать в матричном виде

$$Q(x^1, \dots, x^n) = X^T A X,$$

где  $X$  — столбец переменных  $x^1, \dots, x^n$ ,  $X^T$  — строка, полученная транспонированием столбца  $X$ ,  $A$  — матрица квадратичной формы.

**2. Преобразование матрицы квадратичной формы при линейном преобразовании переменных.** Рассмотрим линейное преобразование переменных  $y^1, \dots, y^n$  в переменные  $x^1, \dots, x^n$ :

$$\begin{aligned}x^1 &= p_1^1 y^1 + p_2^1 y^2 + \dots + p_n^1 y^n, \\x^2 &= p_1^2 y^1 + p_2^2 y^2 + \dots + p_n^2 y^n, \\&\vdots \\x^n &= p_1^n y^1 + p_2^n y^2 + \dots + p_n^n y^n,\end{aligned}$$

здесь  $p_j^i$  — вещественные числа (коэффициенты линейного преобразования).

Это преобразование переменных можно записать в матричном виде

$$X = PY, \quad (2)$$

где  $X$  — столбец переменных  $x^1, \dots, x^n$ ,  $Y$  — столбец переменных  $y^1, \dots, y^n$ ,  $P = (p_i^j)$  — матрица линейного преобразования.

Если  $P$  — невырожденная матрица, т. е.  $\det P \neq 0$ , то преобразование (2) называется *невырожденным*. В этом случае существует обратное преобразование переменных  $x^1, \dots, x^n$  в переменные  $y^1, \dots, y^n$

$$Y = P^{-1} X.$$

Если  $\det P = 0$ , то преобразование (2) называется *вырожденным*.

При линейном преобразовании переменных (2) квадратичная форма  $Q = X^T AX$  переходит в квадратичную форму  $\tilde{Q} = Y^T BY$  с матрицей  $B = P^T AP$ .

### 3. Канонический вид квадратичной формы.

**Теорема 1.** Любую квадратичную форму

$$Q = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i x^j$$

невырожденным преобразованием  $X = PY$  можно привести к виду

$$\tilde{Q} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (y^i)^2. \quad (3)$$

Выражение (3) называется *каноническим видом квадратичной формы*, а числа  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — ее *каноническими коэффициентами*.

Матрица квадратичной формы  $\tilde{Q}$ , имеющей канонический вид, является диагональной матрицей с элементами  $\lambda_i$  на главной диагонали.

Один из методов приведения квадратичной формы к каноническому виду — *метод Лагранжа* (его называют также *методом выделения полных квадратов*). Этот метод рассмотрен в примере 1 на с. 160.

Другой метод приведения квадратичной формы к каноническому виду — *метод ортогональных преобразований*. Преобразование переменных  $X = PY$  называется *ортогональным*, если его матрица  $P$  ортогональная.

**Теорема 2.** Для любой квадратичной формы  $Q = X^T AX$  существует ортогональное преобразование  $X = PY$ , приводящее ее к каноническому виду:

$$\tilde{Q} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (y^i)^2.$$

При этом  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — собственные значения матрицы  $A$ , а столбцы матрицы  $P$  — попарно ортогональные нормированные собственные векторы матрицы  $A$  (норма каждого из них равна 1).

**4. Закон инерции квадратичных форм.** Этот закон состоит в следующем: независимо от способа приведения квадратичной формы к каноническому виду число ее положительных (и также число отрицательных) канонических коэффициентов постоянно.

### Контрольные вопросы и задания

1. Составьте матрицу квадратичной формы

$$Q(x^1, x^2, x^3) = 6x^1x^2 - (x^2)^2 + 4x^1x^2 - x^2x^3.$$

2. Запишите квадратичную форму в виде

$$\sum_{ij=1}^n a_{ij} x^i x^j,$$

если дана ее матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 22 \\ 2 & -1 & 3 \\ 22 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Запишите в матричном виде  $X^T AX$  квадратичную форму  $Q$  задания 1.
4. Запишите линейное преобразование переменных в матричном виде. В каком случае линейное преобразование переменных называется невырожденным?
5. Как преобразуется матрица квадратичной формы при линейном преобразовании переменных? Докажите, что новая матрица является симметричной.
6. Докажите, что если квадратичная форма  $Q(x^1, \dots, x^n)$  при линейном невырожденном преобразовании  $X = PY$  переходит в квадратичную форму  $\tilde{Q}(y^1, \dots, y^n)$ , то обратное преобразование  $Y = P^{-1}X$  переводит  $\tilde{Q}(y^1, \dots, y^n)$  в квадратичную форму  $Q(x^1, \dots, x^n)$ .
7. Что такое канонический вид квадратичной формы?
8. Какое преобразование переменных называется ортогональным?
9. Сформулируйте теорему о приведении квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.
10. Сформулируйте закон инерции квадратичных форм.

**Примеры решения задач****1. Привести квадратичную форму**

$$Q(x^1, x^2, x^3) = 3(x^2)^2 + 3(x^3)^2 + 4x^1x^2 + 4x^1x^3 - 2x^2x^3$$

к каноническому виду:

- а) методом Лагранжа;
- б) ортогональным преобразованием.

△ а) Коэффициент при  $(x^2)^2$  отличен от нуля (равен 3). Соберем в одну группу все члены квадратичной формы, содержащие  $x^2$ :

$$3(x^2)^2 + 4x^1x^2 - 2x^2x^3.$$

Дополним это выражение до полного квадрата членами, не содержащими  $x^2$ , и, чтобы квадратичная форма  $Q(x^1, x^2, x^3)$  не изменилась, вычтем добавленные члены. Получим

$$\begin{aligned} Q(x^1, x^2, x^3) &= \\ &= 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x^1 - \frac{1}{3}x^3\right)^2 - \frac{4}{3}(x^1)^2 - \frac{1}{3}(x^3)^2 + \frac{4}{3}x^1x^3 + 3(x^3)^2 + 4x^1x^3. \end{aligned}$$

Положим

$$y^2 = \frac{2}{3}x^1 + x^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

Тогда в выражении квадратичной формы появляется переменная  $y^2$  и исчезает переменная  $x^2$ . Приведя подобные члены, перепишем квадратичную форму в виде

$$3(y^2)^2 + \frac{8}{3}(x^3)^2 - \frac{4}{3}(x^1)^2 + \frac{16}{3}x^1x^3 = 3(y^2)^2 + W(x^1, x^3).$$

К квадратичной форме  $W(x^1, x^3)$  снова применим метод выделения полного квадрата. С этой целью соберем в одну группу все члены, содержащие  $x^1$ :

$$-\frac{4}{3}(x^1)^2 + \frac{16}{3}x^1x^3.$$

Дополним это выражение до полного квадрата слагаемым, не содержащим  $x^1$ , и, чтобы квадратичная форма  $W(x^1, x^3)$  не изменилась, вычтем добавленное слагаемое. Получим

$$W(x^1, x^3) = -\frac{4}{3}(x^1 - 2x^3)^2 + \frac{16}{3}(x^3)^2 + \frac{8}{3}(x^3)^2.$$

Положим  $y^1 = x^1 - 2x^3$ . Приведя подобные члены, перепишем исходную квадратичную форму в виде

$$3(y^2)^2 - \frac{4}{3}(y^1)^2 + 8(x^3)^2.$$

Вводя обозначение  $x^3 = y^3$ , получаем следующий канонический вид исходной квадратичной формы:

$$\tilde{Q}(y^1, y^2, y^3) = -\frac{4}{3}(y^1)^2 + 3(y^2)^2 + 8(y^3)^2, \quad (4)$$

где

$$y^1 = x^1 - 2x^3, \quad y^2 = \frac{2}{3}x^1 + x^2 - \frac{1}{3}x^3, \quad y^3 = x^3.$$

Преобразование переменных, приводящее исходную квадратичную форму к каноническому виду, можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

**Замечание 1.** В результате применения метода Лагранжа всегда получается невырожденное линейное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

б) Составим матрицу данной квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные значения. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3 - \lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = 0.$$

Оно имеет корни  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_{2,3} = 4$ . Это позволяет сразу написать канонический вид квадратичной формы:

$$\tilde{Q}(y^1, y^2, y^3) = -2(y^1)^2 + 4(y^2)^2 + 4(y^3)^2.$$

Построим теперь матрицу ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к этому каноническому виду. С этой целью найдем собственные векторы матрицы  $A$ . Элементы  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$  любого собственного вектора  $X$ , соответствующего собственному значению  $\lambda = -2$ , являются решением системы уравнений  $(A + 2I)X = \Theta$ , т. е. системы

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 + 2x^3 = 0, \\ 2x^1 + 5x^2 - x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 + 5x^3 = 0, \end{cases}$$

у которой ранг  $r$  матрицы равен 2, а  $n - r = 1$ . Следовательно, фундаментальная совокупность решений системы состоит из одного

решения, например, такого

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормируя  $X_1$ , получаем собственный вектор

$$F_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Элементы  $x^1, x^2, x^3$  любого собственного вектора  $X$ , соответствующего собственному значению  $\lambda = 4$ , являются решением системы уравнений  $(A - 4I)X = \Theta$ , т. е. системы

$$\begin{cases} -4x^1 + 2x^2 + 2x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 - x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 - x^3 = 0, \end{cases}$$

у которой ранг  $r$  матрицы равен 1, а  $n - r = 2$ . Поэтому фундаментальная совокупность решений этой системы состоит из двух решений. Чтобы их найти, оставим только первое уравнение системы (второе и третье являются следствием первого). Положим вначале  $x^2 = 1$ ,  $x^3 = 0$ , тогда  $x^1 = 0,5$ ; затем положим  $x^2 = 0$ ,  $x^3 = 1$ , тогда  $x^1 = 0,5$ . Таким образом, фундаментальная совокупность решений состоит из решений

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Это и есть два линейно независимых собственных вектора матрицы  $A$ , соответствующих собственному значению  $\lambda = 4$ .

Заметим, что собственные векторы  $X_2$  и  $X_3$  матрицы  $A$  ортогональны к собственному вектору  $F_1$ , но не ортогональны между собой. Применим к ним процедуру ортогонализации. С этой целью положим  $Y_2 = X_2$ ,  $Y_3 = X_3 - aY_2$ . Коэффициент  $a$  определяется из условия ортогональности  $Y_2$  и  $Y_3$ :  $a = 1/5$ .

Итак, мы построили два ортогональных собственных вектора матрицы  $A$ , соответствующих собственному значению  $\lambda = 4$ :

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 0,4 \\ -0,2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормируя их, получаем собственные векторы

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2/15} \\ -1/\sqrt{30} \\ \sqrt{5/6} \end{pmatrix}.$$

Матрица искомого ортогонального преобразования состоит из столбцов  $F_1, F_2, F_3$ , т. е. искомое преобразование имеет вид

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & \sqrt{2/15} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & \sqrt{5/6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}.$$

Оно приводит исходную квадратичную форму к каноническому виду

$$\tilde{Q}(y^1, y^2, y^3) = -2(y^1)^2 + 4(y^2)^2 + 4(y^3)^2. \quad (5)$$

**Замечание 2.** Отметим, что как канонический вид (4) квадратичной формы, полученный методом Лагранжа, так и канонический вид (5), полученный ортогональным преобразованием, содержит два положительных канонических коэффициента и один отрицательный канонический коэффициент, что соответствует закону инерции квадратичных форм. ▲

**2.** Методом Лагранжа привести квадратичную форму

$$Q(x^1, x^2, x^3, x^4) = 2x^3x^4$$

к каноническому виду.

△ Положим

$$x^1 = y^1, \quad x^2 = y^2, \quad x^3 = y^3 + y^4, \quad x^4 = y^3 - y^4. \quad (6)$$

Тогда квадратичная форма приводится к каноническому виду

$$\tilde{Q}(y^1, y^2, y^3, y^4) = 2(y^3)^2 - 2(y^4)^2.$$

Проверьте самостоятельно, что преобразование (6) невырожденное. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

- Приведите данную квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа и запишите соответствующее преобразование переменных:
  - $2x^1x^2 + 2x^3x^4$ ;
  - $(x^1)^2 + 2x^1x^2 + 2(x^2)^2 + 4x^2x^3 + 5(x^3)^2$ ;
  - $(x^1)^2 + x^1x^2 + x^3x^4$ ;
  - $(x^1)^2 - 4x^1x^2 + 2x^1x^3 + 4(x^2)^2 + (x^3)^2$ .
- Приведите данную квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием и запишите это преобразование:
  - $\frac{1}{3} [2(x^1)^2 + 4x^1x^2 - 2x^1x^3 - (x^2)^2 + 4x^2x^3 + 2(x^3)^2]$ ;

- б)  $17(x^1)^2 - 16x^1x^2 + 8x^1x^3 + 17(x^2)^2 - 8x^2x^3 + 11(x^3)^2$ ;
- в)  $11(x^1)^2 + 4x^1x^2 - 16x^1x^3 + 2(x^2)^2 + 20x^2x^3 + 5(x^3)^2$ ;
- г)  $2x^2x^1 + 2x^3x^4$ ;
- д)  $2(x^1)^2 + (x^2)^2 - 4x^1x^2 - 4x^2x^3$ ;
- е)  $(x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 3(x^3)^2 - 4x^1x^2 - 4x^2x^3$ ;
- ж)  $-2x^2x^3$ .
3. Докажите, что любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду, в котором канонические коэффициенты имеют значения 1,  $-1$ , 0.
4. Докажите, что для квадратичных форм  $Q(x^1, \dots, x^n)$  и  $\tilde{Q}(y^1, \dots, y^n)$  существует линейное невырожденное преобразование  $X = PY$ , переводящее одну квадратичную форму в другую, тогда и только тогда, когда эти квадратичные формы имеют одинаковое число положительных и одинаковое число отрицательных канонических коэффициентов.

## § 2. Знакопределенные квадратичные формы

### Основные понятия и теоремы

**1. Классификация квадратичных форм.** Квадратичная форма  $Q(x^1, \dots, x^n)$  называется *положительно определенной* (*отрицательно определенной*), если для всех значений  $x^1, \dots, x^n$  выполняется условие  $Q(x^1, \dots, x^n) \geq 0$  ( $Q(x^1, \dots, x^n) \leq 0$ ), причем  $Q(x^1, \dots, x^n) = 0$  только при  $x^1 = x^2 = \dots = x^n = 0$ .

Например,  $Q(x^1, x^2) = 2(x^1)^2 + 3(x^2)^2$  — положительно определенная квадратичная форма;  $Q(x^1, x^2) = -(x^1)^2 - 2(x^2)^2$  — отрицательно определенная квадратичная форма. Положительно определенные и отрицательно определенные квадратичные формы называются *знакопределенными*.

**Теорема 3.** *Квадратичная форма является положительно (отрицательно) определенной тогда и только тогда, когда все ее канонические коэффициенты положительны (отрицательны).*

Квадратичная форма  $Q(x^1, \dots, x^n)$  называется *квазизнакопределенной* (либо *неотрицательной*, либо *неположительной*), если она принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значения, но при этом обращается в нуль не только при  $x^1 = \dots = x^n = 0$ .

Например,  $Q(x^1, x^2) = (x^1)^2 - 2x^1x^2 + (x^2)^2 = (x^1 - x^2)^2$  — неотрицательная квадратичная форма, так как  $Q(x^1, x^2) \geq 0$  при любых  $x^1, x^2$ , но  $Q(x^1, x^2) = 0$  не только при  $x^1 = x^2 = 0$ ; так,  $Q(1, 1) = 0$ .

Квадратичная форма называется *знакопеременной*, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Например,  $Q(x^1, x^2) = -(x^1)^2 + 2(x^2)^2$  — знакопеременная квадратичная форма, так как она имеет как положительные, так и отрицательные значения:  $Q(1, 0) = -1 < 0$ ,  $Q(0, 1) = 2 > 0$ .

**2. Критерий Сильвестра знакопределенности квадратичной формы.** Определители

$$\delta_1 = a_{11}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$\dots, \quad \delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются *угловыми минорами*  $n \times n$ -матрицы  $A = (a_{ij})$ .

Теорема 4 (критерий Сильвестра). 1°. Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры ее матрицы были положительны.

2°. Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров ее матрицы чередовались следующим образом:

$$\delta_1 < 0, \quad \delta_2 > 0, \quad \delta_3 < 0, \quad \dots$$

Определение. Симметрическая матрица  $A$  называется *положительно определенной*, если квадратичная форма  $X^TAX$  положительно определенная.

### Контрольные вопросы и задания

1. Какая квадратичная форма называется положительно (отрицательно) определенной? Приведите пример положительно определенной квадратичной формы.
2. Чем отличается неотрицательная квадратичная форма от положительно определенной квадратичной формы?
3. Приведите пример знакопеременной квадратичной формы.
4. Может ли положительно определенная квадратичная форма иметь:
  - отрицательные канонические коэффициенты;
  - канонические коэффициенты, равные нулю?
5. Сформулируйте критерий Сильвестра положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы.
6. Какая матрица называется положительно определенной?

### Примеры решения задач

1. Определить, является ли квадратичная форма

$$Q(x^1, x^2, x^3) = (x^2)^2 - 4x^1x^2 + 2x^2x^3$$

знакопределенной.

△ Составим матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и вычислим ее угловые миноры  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = -4$ ,  $\delta_3 = 0$ . В силу критерия Сильвестра данная квадратичная форма не является ни положительно определенной, ни отрицательно определенной, т. е. не является знакоопределенной. ▲

**2.** Найти все значения параметра  $a$ , при которых квадратичная форма

$$Q(x^1, x^2, x^3) = (x^1)^2 - 2x^1x^2 - 2x^1x^3 + 4(x^2)^2 + 2x^2x^3 + a(x^3)^2$$

является положительно определенной.

△ Найдем угловые миноры матрицы квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Имеем  $\delta_1 = 1 > 0$ ,  $\delta_2 = 3 > 0$ ,  $\delta_3 = \det A = 3 \cdot (a - 1)$ .

Пользуясь критерием Сильвестра, находим, что данная квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда  $\delta_3 > 0$ , т. е. при  $a > 1$ . ▲

**3.** Доказать, что если  $A$  — положительно определенная матрица, а  $P$  — произвольная невырожденная матрица, то матрица  $B = P^T AP$  также является положительно определенной.

△ По условию квадратичная форма  $X^T AX$  является положительно определенной, т. е.  $X^T AX > 0$ , если  $X$  — любой ненулевой столбец. Линейное преобразование переменных  $X = PY$  переводит квадратичную форму  $X^T AX$  в квадратичную форму  $Y^T BY$ , где  $B = P^T AP$ . Обратное преобразование  $Y = P^{-1}X$  (оно существует, если  $P$  — невырожденная матрица) переводит квадратичную форму  $Y^T BY$  в квадратичную форму  $X^T AX$ .

Пусть  $Y$  — произвольный ненулевой столбец. Тогда  $X = PY$  — также ненулевой столбец (объясните почему), и поэтому

$$Y^T BY = X^T AX|_{X=PY} > 0.$$

Таким образом, для любого ненулевого столбца  $Y$  квадратичная форма  $Y^T BY$  принимает положительное значение. Это означает, что квадратичная форма  $Y^T BY$ , а значит, и матрица  $B$  является положительно определенной. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

5. Докажите, что квадратичная форма является неотрицательной тогда и только тогда, когда часть ее канонических коэффициентов больше нуля, а остальные равны нулю.
6. Как связаны между собой угловые миноры матриц квадратичных форм  $Q(x^1, \dots, x^n)$  и  $-Q(x^1, \dots, x^n)$ ?
7. Докажите, что матрица  $C^T \cdot C$  является положительно определенной, если  $C$  — невырожденная матрица.
8. Докажите, что если  $A = (a_{ij})$  — положительно определенная матрица, то:
  - а) матрица  $A^{-1}$  существует и является положительно определенной;
  - б)  $a_{jj} > 0, j = 1, \dots, n$ .
9. Докажите, что если квадратичная форма  $X^T A X$  неотрицательная и элемент  $a_{ii}$  матрицы  $A$  равен нулю, то все элементы  $i$ -й строки и  $i$ -го столбца матрицы  $A$  также равны нулю.
10. Докажите, что матрица является положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее собственные значения положительны.
11. Определите, является ли данная квадратичная форма знакопредeterminedной:
  - а)  $4(x^1)^2 + 2x^1x^2 - 2x^1x^3 - 2x^2x^3 + 2(x^3)^2$ ;
  - б)  $4(x^1)^2 + 2x^1x^2 - 2x^1x^3 - 2x^2x^3 + (x^3)^2$ .
12. Найдите все значения параметра  $b$ , при которых квадратичная форма  $-2(x^1)^2 - 6x^1x^2 + 6x^1x^3 - 5(x^2)^2 + 10x^2x^3 + b(x^3)^2$  является знакопределенной.

## § 3. Билинейные формы

### Основные понятия и теоремы

**1. Определение билинейной формы. Матрица билинейной формы.** Если каждой упорядоченной паре  $(x, y)$  элементов вещественного линейного пространства  $R$  поставлено в соответствие некоторое вещественное число, то говорят, что на линейном пространстве  $R$  определена *числовая функция* двух аргументов  $x, y$ . Такую функцию будем обозначать  $B(x, y)$ .

Определение. Числовая функция  $B(x, y)$ , определенная на вещественном линейном пространстве  $R$ , называется *билинейной*

*формой*, если для любых элементов  $x, y, z$  из  $R$  и любого вещественного числа  $\alpha$  выполняются равенства

$$\begin{aligned} B(x+y, z) &= B(x, z) + B(y, z), \\ B(\alpha x, y) &= \alpha \cdot B(x, y), \\ B(x, y+z) &= B(x, y) + B(x, z), \\ B(x, \alpha y) &= \alpha \cdot B(x, y). \end{aligned}$$

Первые два равенства показывают линейность функции  $B(x, y)$  по первому аргументу, а вторые два — линейность по второму аргументу.

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — базис в пространстве  $R_n$ ,  $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$ ,  $y = \sum_{j=1}^n y^j e_j$ . Тогда

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x^i y^j, \quad (1)$$

где  $b_{ij} = B(e_i, e_j)$ .

Равенство (1) дает выражение билинейной формы через координаты элементов  $x$  и  $y$  в данном базисе. Оно называется *общим видом билинейной формы* в  $n$ -мерном линейном пространстве.

Матрица  $B_e = (b_{ij})$  с размерами  $n \times n$  называется *матрицей билинейной формы*  $B(x, y)$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ .

Например, если в некотором базисе билинейная форма имеет вид

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \\ &= 3x^1y^1 - 2x^1y^2 + x^1y^3 + 4x^2y^1 + 5x^2y^2 - x^2y^3 - x^3y^1 + x^3y^2 - 7x^3y^3, \end{aligned}$$

то ее матрицей в этом базисе является матрица

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

**2. Преобразование матрицы билинейной формы при переходе к другому базису.** Пусть  $e_1, \dots, e_n$  и  $f_1, \dots, f_n$  — два базиса в пространстве  $R_n$ , и пусть  $f = eP$  (здесь используются принятые ранее обозначения:  $e$  и  $f$  — строки из базисных элементов,  $P$  — матрица перехода от первого базиса ко второму). Предположим, что билинейная форма  $B(x, y)$  имеет в базисе  $e_1, \dots, e_n$  матрицу  $B_e$ , а в базисе  $f_1, \dots, f_n$  — матрицу  $B_f$ . Тогда справедлива следующая формула преобразования матрицы билинейной формы:

$$B_f = P^T \cdot B_e \cdot P. \quad (2)$$

### 3. Симметричные билинейные формы.

Определение. Билинейная форма  $B(x, y)$  называется *симметричной*, если для любых элементов  $x, y$  справедливо равенство

$$B(x, y) = B(y, x).$$

Теорема 5. *Билинейная форма, определенная на линейном пространстве  $R_n$ , симметрична тогда и только тогда, когда ее матрица в любом базисе симметрична.*

**4. Связь между билинейными и квадратичными формами.** Рассмотрим билинейную форму  $B(x, y)$ , выраженную через координаты элементов  $x$  и  $y$  в некотором базисе  $e_1, \dots, e_n$ :

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x^i y^j.$$

Положив  $y = x$ , получим функцию одного аргумента  $x$

$$Q(x) = B(x, x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x^i x^j.$$

В этой сумме подобные члены

$$b_{ij} x^i x^j + b_{ji} x^j x^i$$

запишем в виде

$$a_{ij} x^i x^j + a_{ji} x^j x^i,$$

где  $a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji})$ .

Тогда функция  $Q(x) = B(x, x)$  примет вид

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i x^j,$$

где  $a_{ij} = a_{ji}$ . Отсюда следует, что  $Q(x) = Q(x^1, \dots, x^n)$  — квадратичная форма  $n$  числовых переменных  $x^1, \dots, x^n$ , являющихся координатами элемента  $x$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ . Эту квадратичную форму можно записать в виде

$$Q(x) = X_e^T A_e X_e,$$

где  $X_e$  — столбец координат элемента  $x$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ ,  $A_e = \frac{1}{2}(B_e + B_e^T)$  — матрица квадратичной формы,  $B_e$  — матрица билинейной формы  $B(x, y)$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ .

Итак, при фиксированном базисе  $e_1, \dots, e_n$  каждой билинейной форме  $B(x, y)$  соответствует квадратичная форма  $X_e^T A_e X_e$ , зависящая от координат элемента  $x$  в этом базисе. При переходе к другому базису по формуле  $f = e \cdot P$  происходит невырожденное линейное преобразование координат элементов по формуле  $X_e = P X_f$ , и квадратичная

форма  $X_e^T A_e X_e$  переходит в квадратичную форму  $X_f^T A_f X_f$  с матрицей  $A_f = P^T A_e P$ .

Отметим, что одна и та же квадратичная форма получается из различных билинейных форм, но среди них имеется ровно одна симметричная билинейная форма. Матрица квадратичной формы равна матрице этой симметричной билинейной формы. Например, квадратичная форма

$$Q(x) = (x^1)^2 - 2x^1x^2 + 4x^1x^3 + 6x^2x^3 - 7(x^2)^2 + (x^3)^2$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -7 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

получается из симметричной билинейной формы

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \\ &= x^1y^1 - x^1y^2 - x^2y^1 + 2x^1y^3 + 2x^3y^1 + 3x^2y^3 + 3x^3y^2 - 7x^2y^2 + x^3y^3, \end{aligned}$$

и эта же квадратичная форма  $Q(x)$  получается из несимметричной билинейной формы

$$\begin{aligned} \tilde{B}(x, y) &= \\ &= x^1y^1 - 5x^1y^2 + 3x^2y^1 + x^1y^3 + 3x^3y^1 - x^2y^3 + 7x^3y^2 - 7x^2y^2 + x^3y^3. \end{aligned}$$

Каждой квадратичной форме

$$Q(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i x^j$$

при фиксированном базисе линейного пространства соответствует симметричная билинейная форма  $B(x, y)$ , выражение которой через координаты  $x^1, \dots, x^n$  и  $y^1, \dots, y^n$  элементов  $x$  и  $y$  в этом базисе имеет вид

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i y^j.$$

**5. Канонический вид и канонический базис симметричной билинейной формы.** Пусть в некотором базисе  $f_1, \dots, f_n$  симметричная билинейная форма имеет вид

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi^i \eta^i,$$

$$\text{где } x = \sum_{i=1}^n \xi^i f_i, \quad y = \sum_{i=1}^n \eta^i f_i.$$

Такой вид симметричной билинейной формы называется ее *каноническим видом*, числа  $\lambda_i$  — *каноническими коэффициентами*, а базис  $f_1, \dots, f_n$  — *каноническим базисом* симметричной билинейной формы. Матрица билинейной формы в каноническом базисе является диагональной с элементами  $\lambda_i$  на главной диагонали.

**Теорема 6.** Для любой симметричной билинейной формы существует канонический базис.

**6. Метод нахождения канонического базиса и канонического вида симметричной формы.** Пусть симметричная билинейная форма  $B(x, y)$  имеет в базисе  $e_1, \dots, e_n$  матрицу  $B$ . Рассмотрим квадратичную форму  $Q(x) = B(x, x) = X_e^T B e X_e$ , зависящую от координат элемента  $x$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ . Для этой квадратичной формы существует невырожденное преобразование переменных  $X_e = PZ$ , которое приводит квадратичную форму к каноническому виду  $\sum_{i=1}^n \lambda_i(z^i)^2$ .

Матрица  $P$  является матрицей перехода к каноническому базису билинейной формы, а именно в базисе  $f_1, \dots, f_n$ , связанном с базисом  $e_1, \dots, e_n$  формулой  $f = eP$ , билинейная форма  $B(x, y)$  имеет канонический вид

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi^i \eta^i,$$

$$\text{где } x = \sum_{i=1}^n \xi^i f_i, \quad y = \sum_{i=1}^n \eta^i f_i.$$

### Контрольные вопросы и задания

- Сформулируйте определение билинейной формы.
- Напишите выражение билинейной формы  $B(x, y)$  через координаты элементов  $x$  и  $y$  в некотором базисе.
- Что такое матрица билинейной формы в данном базисе?
- Напишите формулу преобразования матрицы билинейной формы при переходе к другому базису.
- Какая билинейная форма называется симметричной?
- Известно, что матрица билинейной формы симметрична в некотором базисе. Будет ли она симметричной в любом базисе?
- Дано выражение билинейной формы через координаты элементов в некотором базисе

$$B(x, y) =$$

$$= 3x^1y^1 - x^1y^2 + 2x^2y^1 + 4x^1y^3 - 2x^3y^1 + x^2y^3 + x^3y^2 - x^2y^2 + 8x^3y^3.$$

Напишите соответствующую ей квадратичную форму  $B(x, x)$ .

- Укажите две различные билинейные формы, из которых получается квадратичная форма

$$Q(x^1, x^2, x^3) = -(x^1)^2 + 5x^1x^2 - x^1x^3 + 2x^2x^3 + (x^2)^2.$$

9. Для каких билинейных форм вводится понятие канонического вида и канонического базиса?
10. В чем состоит метод нахождения канонического базиса и канонического вида симметричной билинейной формы?

### Примеры решения задач

1. Билинейная форма  $B(x, y)$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$  имеет вид

$$B(x, y) = -2x^1y^1 + 3x^1y^2 + x^1y^3 + 5x^2y^1 + x^2y^3 - x^3y^2.$$

Найти выражение этой билинейной формы через координаты элементов в базисе  $f_1, f_2, f_3$ , если  $f_1 = e_2, f_2 = -e_1, f_3 = e_2 + e_3$ .

△ Составим матрицу  $P$  перехода от базиса  $e_1, e_2, e_3$  к базису  $f_1, f_2, f_3$  (ее столбцы состоят из координат элементов  $f_1, f_2, f_3$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$ ):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и воспользуемся формулой (2) преобразования матрицы билинейной формы

$$B_f = P^T \cdot B_e \cdot P,$$

где  $B_e$  и  $B_f$  — матрицы билинейной формы в базисах  $e_1, e_2, e_3$  и  $f_1, f_2, f_3$ .

Составим матрицу  $B_e$ :

$$B_e = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее вычисляем:

$$\begin{aligned} B_f &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ -3 & -2 & -4 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующий вид билинейной формы в базисе  $f_1, f_2, f_3$ :

$$B(x, y) = -5\xi^1\eta^2 + \xi^1\eta^3 - 3\xi^2\eta^1 - 2\xi^2\eta^2 - 4\xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^1 - 5\xi^3\eta^2,$$

где  $x = \sum_{i=1}^3 \xi^i f_i, y = \sum_{j=1}^3 \eta^j f_j$ . ▲

**2.** Найти канонический базис и канонический вид симметричной билинейной формы, заданной в базисе  $e_1, e_2, e_3$  выражением

$$B(x, y) = 3x^2y^2 + 3x^3y^3 + 2x^1y^2 + 2x^2y^1 + 2x^1y^3 + 2x^3y^1 - x^2y^3 - x^3y^2.$$

△ Рассмотрим соответствующую квадратичную форму

$$Q(x) = B(x, x) = 3(x^2)^2 + 3(x^3)^2 + 4x^1x^2 + 4x^1x^3 - 2x^2x^3.$$

В примере 1 из § 1 было показано, что эта квадратичная форма линейным невырожденным преобразованием  $X = PZ$ , где

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2/3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

приводится к каноническому виду

$$\tilde{Q}(z^1, z^2, z^3) = -\frac{4}{3}(z^1)^2 + 3(z^2)^2 + 8(z^3)^2.$$

Отсюда следует, что билинейная форма  $B(x, y)$  имеет канонический вид

$$B(x, y) = -\frac{4}{3}\xi^1\eta^1 + 3\xi^2\eta^2 + 8\xi^3\eta^3$$

в каноническом базисе  $f_1, f_2, f_3$ , связанном с базисом  $e_1, e_2, e_3$  соотношением

$$(f_1, f_2, f_3) = (e_1, e_2, e_3)P = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2/3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда  $f_1 = e_1 - \frac{2}{3}e_2$ ,  $f_2 = e_2$ ,  $f_3 = 2e_1 - e_2 + e_3$ . ▲

**3.** Доказать, что скалярное произведение в вещественном евклидовом пространстве представляет собой симметричную билинейную форму, у которой соответствующая квадратичная форма является положительно определенной.

△ Скалярное произведение  $(x, y)$  элементов  $x$  и  $y$  вещественного линейного пространства является числовой функцией аргументов  $x$  и  $y$ , обладающей следующими четырьмя свойствами (аксиомы скалярного произведения).

$$1^\circ. (x, y) = (y, x).$$

$$2^\circ. (x + y, z) = (x, z) + (y, z).$$

$$3^\circ. (\alpha x, y) = \alpha(x, y).$$

$$4^\circ. (x, x) > 0, \text{ если } x \neq \theta, \text{ и } (x, x) = 0, \text{ если } x = \theta.$$

Из свойств  $2^\circ, 3^\circ$  следует, что скалярное произведение  $(x, y)$  есть линейная функция по первому аргументу  $x$ . Пользуясь свойства-

ми  $1^\circ$ – $3^\circ$ , нетрудно показать, что скалярное произведение является линейной функцией и по второму аргументу. Действительно, в силу свойств  $1^\circ$  и  $2^\circ$  имеем

$$(x, y + z) = (y + z, x) = (y, x) + (z, x) = (x, y) + (x, z),$$

а используя свойства  $1^\circ$  и  $3^\circ$  устанавливаем, что справедливы равенства

$$(x, \alpha y) = (\alpha y, x) = \alpha(y, x) = \alpha(x, y).$$

Таким образом, из свойств  $1^\circ$ – $3^\circ$  следует, что скалярное произведение  $(x, y)$  есть симметричная билинейная форма. Из свойства  $4^\circ$  вытекает положительная определенность соответствующей квадратичной формы  $(x, x)$ :  $(x, x) \geq 0$ , причем  $(x, x) = 0$  только если  $x = \theta$ .

**Замечание.** Отметим, что в любом линейном вещественном пространстве скалярное произведение элементов можно ввести бесконечным числом способов, задавая в некотором базисе различные симметричные билинейные формы с положительно определенными матрицами. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

В упр. 13, 14:

1) напишите выражение (в произвольном фиксированном базисе) для симметричной билинейной формы, соответствующей данной квадратичной форме;

2) для полученной билинейной формы найдите канонический вид и матрицу перехода от исходного базиса к каноническому базису (для упр. 13 используйте результаты упр. 1, а для упр. 14 — результаты упр. 2).

13. а)  $2x^1x^2 + 2x^3x^4$ ;

б)  $(x^1)^2 + 2x^1x^2 + 2(x^2)^2 + 4x^2x^3 + 5(x^3)^2$ ;

в)  $(x^1)^2 + x^1x^2 + x^3x^4$ ;

г)  $(x^1)^2 - 4x^1x^2 + 2x^1x^3 + 4(x^2)^2 + (x^3)^2$ .

14. а)  $\frac{1}{3} [2(x^1)^2 + 4x^1x^2 - 2x^1x^3 - (x^2)^2 + 4x^2x^3 + 2(x^3)^2]$ ;

б)  $17(x^1)^2 - 16x^1x^2 + 8x^1x^3 + 17(x^2)^2 - 8x^2x^3 + 11(x^3)^2$ ;

в)  $11(x^1)^2 + 4x^1x^2 - 16x^1x^3 + 2(x^2)^2 + 20x^2x^3 + 5(x^3)^2$ ;

г)  $2x^1x^2 + 2x^3x^4$ ;

д)  $2(x^1)^2 + (x^2)^2 - 4x^1x^2 - 4x^2x^3$ ;

е)  $(x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 3(x^3)^2 - 4x^1x^2 - 4x^2x^3$ ;

ж)  $-2x^2x^3$ .

15. Докажите, что ранг и знак определителя матрицы билинейной формы не изменяются при переходе к другому базису.

16. Пусть  $\widehat{A}$  — линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_n$ . Докажите, что:
- скалярное произведение  $(x, \widehat{A}y)$  является билинейной формой аргументов  $x$  и  $y$ ;
  - в любом ортонормированном базисе матрица этой билинейной формы совпадает с матрицей оператора  $\widehat{A}$ , а если базис не является ортонормированным, то матрицы билинейной формы и оператора  $\widehat{A}$ , вообще говоря, не совпадают;
  - если  $\widehat{A}$  — симметричный оператор, то билинейная форма  $(x, \widehat{A}y)$  также симметрична.

#### § 4. Применение теории квадратичных форм в задачах о приведении к каноническому виду уравнения кривой второго порядка и уравнения поверхности второго порядка

**Постановка задачи и описание метода**

**1. Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.** Дано уравнение кривой второго порядка в прямоугольной системе координат  $Oxy$

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0. \quad (1)$$

Требуется с помощью поворота и параллельного переноса осей координат перейти к такой прямоугольной системе координат, в которой уравнение кривой имеет канонический вид.

Рассмотрим квадратичную форму, связанную с уравнением (1),

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Ее матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Приведем квадратичную форму к каноническому виду  $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$  ортогональным преобразованием переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Напомним, что  $\lambda_1, \lambda_2$  — собственные значения матрицы  $A$ , а столбцами матрицы  $P$  являются ортогональные нормированные собственные векторы (столбцы) матрицы  $A$ . Их всегда можно выбрать так, что  $\det P = 1$ . Матрица  $P$  в силу свойства ортогональных  $2 \times 2$ -матриц имеет вид (см. пример 1 на с. 104)

$$P = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

т. е.  $P$  — матрица оператора поворота на угол  $\varphi$  в пространстве  $V_2$  векторов на плоскости. При таком повороте прямоугольная система координат  $Oxy$  с координатными векторами  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  (базис в пространстве  $V_2$ ) переходит в прямоугольную систему координат  $Ox'y'$  с координатными векторами  $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$  (другой базис в пространстве  $V_2$ ), причем  $(\mathbf{i}' \mathbf{j}') = (\mathbf{i} \mathbf{j})P$ .

Пользуясь формулами (2), выразим линейные члены  $2b_1x + 2b_2y$  уравнения (1) через координаты  $x', y'$ . В результате в системе  $Ox'y'$  уравнение кривой примет вид

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + c = 0,$$

т. е. в уравнении отсутствует смешанный член (с произведением  $x'y'$ ).

Далее, выделив полные квадраты по обеим переменным (или по одной переменной, если одно из чисел  $\lambda_i$  равно нулю), с помощью параллельного переноса осей координат системы  $Ox'y'$  переходим к системе  $O''x''y''$ , в которой уравнение кривой имеет канонический вид.

Напомним, что уравнение кривой второго порядка может быть приведено к одному из следующих канонических видов:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  или  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$  или  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ , если кривая эллиптического типа;

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  или  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$  или  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ , если кривая гиперболического типа;

$x^2 = 2py$  или  $y^2 = 2px$  ( $p \neq 0$ ) или  $y^2 = a$  или  $x^2 = a$ , если кривая параболического типа.

**2. Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду.** Аналогичным методом можно привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + \\ + 2b_2y + 2b_3z + c = 0.$$

Сначала ортогональным преобразованием переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

приводим квадратичную форму

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

к каноническому виду

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2.$$

При этом система координат  $Oxyz$  с координатными векторами  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  перейдет в прямоугольную систему координат  $Ox'y'z'$  с координатными векторами  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ , которые связаны со старыми координатными векторами формулой

$$(\mathbf{i}' \mathbf{j}' \mathbf{k}') = (\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k})P.$$

Далее записываем уравнение поверхности в системе координат  $Ox'y'z'$ , а затем, произведя параллельный перенос осей координат системы  $Ox'y'z'$ , переходим к системе координат  $O'x''y''z''$ , в которой уравнение поверхности имеет канонический вид.

Напомним, что матрица  $P = (p_{ij})$  в силу свойства ортогональных  $3 \times 3$ -матриц, имеющих определитель, равный единице, является матрицей оператора поворота в пространстве вокруг некоторой прямой (см. упр. 26 гл. IV). Направляющий вектор прямой — это собственный вектор оператора поворота, соответствующий собственному значению  $\lambda = 1$ , а угол поворота определяется из равенства (докажите это)

$$\cos \varphi = \frac{p_{11} + p_{22} + p_{33} - 1}{2}.$$

### Контрольные вопросы и задания

1. Напишите в общем виде уравнение кривой второго порядка.
2. В чем состоит задача приведения уравнения кривой второго порядка к каноническому виду?
3. Изложите метод приведения кривой второго порядка к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования переменных, приводящего к каноническому виду квадратичную форму, связанную с этим уравнением. Каков геометрический смысл этого ортогонального преобразования?
4. Напишите в общем виде уравнение поверхности второго порядка.
5. Изложите метод приведения поверхности второго порядка к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования переменных. Каков геометрический смысл этого ортогонального преобразования?

### Примеры решения задач

#### 1. Привести уравнение кривой второго порядка

$$11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0 \quad (3)$$

к каноническому виду с помощью поворота осей координат системы  $Oxy$  и последующего параллельного переноса.

$\triangle$  Приведем квадратичную форму  $11x^2 - 20xy - 4y^2$ , связанную с

уравнением (3), ортогональным преобразованием к каноническому виду. С этой целью составим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -10 & -4 \end{pmatrix},$$

и запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 11 - \lambda & -10 \\ -10 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda - 144 = 0.$$

Оно имеет корни  $\lambda_1 = -9$ ,  $\lambda_2 = 16$ . Далее находим взаимно ортогональные нормированные собственные векторы (столбцы)  $F_1$  и  $F_2$  матрицы  $A$ : если  $\lambda_1 = -9$ , то  $F_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ ; если  $\lambda_2 = 16$ , то  $F_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ .

Следовательно, искомое ортогональное преобразование имеет матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

у которой  $\det P = 1$ . Матрица  $P$  является матрицей оператора поворота на угол  $\varphi$  такой, что  $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ . Повернув оси координат системы  $Oxy$  на угол  $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$  (против часовой стрелки), получим прямоугольную систему  $Ox'y'$ . При этом координаты точек преобразуются по формуле (см. (2))

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

или

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y'). \quad (4)$$

При ортогональном преобразовании (4) квадратичная форма переходит в форму

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = -9(x')^2 + 16(y')^2.$$

Запишем в новых координатах линейные члены уравнения (3):

$$-20x - 8y = -\frac{36}{\sqrt{5}}x' + \frac{32}{\sqrt{5}}y'.$$

В системе координат  $Ox'y'$  уравнение кривой принимает вид

$$-9(x')^2 + 16(y')^2 - \frac{36}{\sqrt{5}}x' + \frac{32}{\sqrt{5}}y' + 1 = 0.$$

Выделяя полные квадраты по обеим переменным, получаем

$$-9 \left( x' + \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 + 16 \left( y' + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 + 5 = 0.$$

Полагая

$$x'' = x' + \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{5}},$$

т. е. производя параллельный перенос осей координат так, что начало координат переходит в точку  $O' \left( -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ , приходим к каноническому уравнению данной кривой

$$\frac{(x'')^2}{5/9} - \frac{(y'')^2}{5/16} = 1.$$

Это — каноническое уравнение гиперболы в системе координат  $O'x''y''$ . ▲

**2.** С помощью поворота осей координат системы  $Oxy$  и последующего параллельного переноса привести уравнение кривой второго порядка

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \frac{5}{4} = 0 \quad (5)$$

к каноническому виду.

△ Составляем матрицу квадратичной формы, связанной с уравнением (5):

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},$$

и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -1 \\ -1 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0.$$

Оно имеет корни  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 6$ . Находим взаимно ортогональные нормированные собственные векторы матрицы  $A$ :

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Тем самым определена матрица

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (\det P = 1)$$

ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму, связанную с уравнением (5), к каноническому виду

$$4(x')^2 + 6(y')^2.$$

Это преобразование является поворотом осей координат на угол  $\varphi$  такой, что  $\cos \varphi = \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , откуда  $\varphi = 45^\circ$ . С помощью формул преобразования координат

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

выразим в новых координатах линейные члены уравнения (5):

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 2x'.$$

Итак, в системе координат  $Ox'y'$ , полученной из системы  $Oxy$  поворотом осей на угол  $45^\circ$ , уравнение кривой имеет вид

$$4(x')^2 + 6(y')^2 + 2x' + \frac{5}{4} = 0.$$

Выделив полный квадрат по переменной  $x'$ , получим уравнение

$$4\left(x' + \frac{1}{4}\right)^2 + 6(y')^2 + 1 = 0.$$

Положим  $x'' = x' + \frac{1}{4}$ ,  $y'' = y'$ , т. е. произведем параллельный перенос осей координат системы  $Ox'y'$  так, что начало координат перейдет в точку  $O'\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ . В новой системе координат  $O'x''y''$  уравнение данной кривой имеет канонический вид:

$$\frac{(x'')^2}{1/4} + \frac{(y'')^2}{1/6} = -1.$$

Это — уравнение мнимого эллипса. ▲

**3.** С помощью поворота осей координат системы  $Oxy$  и последующего параллельного переноса привести уравнение кривой второго порядка

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 2\sqrt{5}x + 3\sqrt{5}y + \frac{129}{20} = 0 \quad (6)$$

к каноническому виду.

△ Составляем матрицу квадратичной формы, связанной с уравнением (6):

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = 0.$$

Оно имеет корни  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 5$ . Находим взаимно ортогональные нормированные собственные векторы матрицы  $A$ :

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Они являются столбцами матрицы  $P$  ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

При этом преобразовании (как и в примере 1, это поворот на угол  $\varphi = \arccos(1/\sqrt{5})$ ) координаты точек преобразуются по формулам (4). Пользуясь этими формулами, запишем линейные члены уравнения (6) в координатах  $x'$ ,  $y'$ :

$$-2\sqrt{5}x + 3\sqrt{5}y = 4x' + 7y'.$$

Итак, уравнение данной кривой в системе координат  $Ox'y'$  полученной из системы  $Oxy$  поворотом осей на угол  $\varphi = \arccos(1/\sqrt{5})$ , имеет вид

$$5(y')^2 + 4x' + 7y' + \frac{129}{20} = 0.$$

В результате выделения полного квадрата по переменной  $y'$  получаем уравнение

$$5(y' + 0,7)^2 + 4(x' + 1) = 0.$$

Положим  $x'' = x' + 1$ ,  $y'' = y' + 0,7$ , т. е. произведем параллельный перенос осей координат системы  $Ox'y'$  так, что начало координат перейдет в точку  $O'(-1; -0,7)$ . В системе координат  $O'x''y''$  уравнение кривой имеет канонический вид:

$$(y'')^2 = -0,8x''.$$

Это — каноническое уравнение параболы. ▲

**4.** Перейти к такой прямоугольной системе координат, в которой уравнение поверхности

$$3y^2 + 3z^2 + 4xy + 4xz - 2yz - 12\sqrt{30}x - 14\sqrt{30}y + 2\sqrt{30}z + 506 = 0 \quad (7)$$

имеет канонический вид, и определить тип поверхности.

△ Квадратичная форма

$$3y^2 + 3z^2 + 4xy + 4xz - 2yz,$$

связанная с уравнением (7), имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы суть  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_{2,3} = 4$ , а столбцы (векторы)

$$F_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

являются попарно ортогональными нормированными ее собственными векторами (см. пример 1 на с. 160). Определитель матрицы, составленной из этих столбцов, равен  $-1$ . Поменяв местами первый и второй столбцы в матрице  $(F_1 F_2 F_3)$ , получим ортогональную матрицу

$$P = (F_1 F_2 F_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{30} \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix},$$

определитель которой равен единице.

Ортогональное преобразование переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{8}$$

приводит квадратичную форму к следующему каноническому виду:

$$4(x')^2 - 2(y')^2 + 4(z')^2.$$

С помощью формулы (8) вычислим в новых координатах линейные члены уравнения (7):

$$-12\sqrt{30}x - 14\sqrt{30}y + 2\sqrt{30}z = -40\sqrt{6}x' + 12\sqrt{5}y'.$$

Итак, в системе координат  $Ox'y'z'$  с координатными векторами  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$ ,  $\mathbf{k}'$  уравнение поверхности имеет вид

$$4(x')^2 - 40\sqrt{6}x' - 2(y')^2 + 12\sqrt{5}y' + 4(z')^2 + 506 = 0.$$

Выделив полные квадраты по переменным  $x'$  и  $y'$ , получим уравнение

$$4(x' - 5\sqrt{6})^2 - 2(y' - 3\sqrt{5})^2 + 4(z')^2 - 4 = 0.$$

Положим  $x'' = x' - 5\sqrt{6}$ ,  $y'' = y' - 3\sqrt{5}$ ,  $z'' = z'$ , т. е. произведем параллельный перенос осей координат системы  $Ox'y'z'$  так, что начало координат перейдет в точку  $O'(5\sqrt{6}, 3\sqrt{5}, 0)$ . В новой системе координат  $O'x''y''z''$  уравнение поверхности имеет канонический вид:

$$(x'')^2 - \frac{(y'')^2}{2} + (z'')^2 = 1.$$

Это — уравнение однополостного гиперболоида.

Обсудим геометрический смысл ортогонального преобразования  $\hat{P}$ , имеющего своею матрицей матрицу  $P$ . Это преобразование является оператором поворота пространства  $V_3$  на угол  $\varphi$  вокруг некоторой прямой  $L$ , и векторы  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$ ,  $\mathbf{k}'$  получаются соответственно из векторов  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  в результате такого поворота. Найдем направляющий вектор  $\mathbf{b} = \{b^1, b^2, b^3\}$  прямой  $L$  и угол поворота  $\varphi$ .

Вектор  $\mathbf{b}$  — это собственный вектор матрицы  $P$ , соответствующий ее собственному значению, равному единице, поэтому координаты  $b^1, b^2, b^3$  вектора  $\mathbf{b}$  удовлетворяют однородной системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} (P - 1 \cdot I) \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} -1 + 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{5} & -1 + 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{30} \\ 0 & 1/\sqrt{6} & -1 + 5/\sqrt{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда находим направляющий вектор:

$$\mathbf{b} = \left\{ \frac{\sqrt{5} + 1}{2} t, t, (\sqrt{6} + \sqrt{5})t \right\} \quad (t \neq 0).$$

Угол поворота  $\varphi$  вычислим, пользуясь формулой

$$\cos \varphi = \frac{p_{11} + p_{22} + p_{33} - 1}{2},$$

откуда следует, что

$$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{30} + 5}{2\sqrt{30}}. \quad \blacktriangle$$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

17. Приведите уравнение кривой второго порядка к каноническому виду с помощью поворота осей координат системы  $Oxy$  и последующего параллельного переноса. Укажите угол поворота и координаты нового начала координат (точки  $O'$ ) в системе  $Ox'y'$ ,

полученной в результате поворота осей системы  $Oxy$ . Укажите тип кривой:

а)  $9x^2 + 12xy + 4y^2 + ax + by + c = 0$ , где:

1°)  $a = 6\sqrt{13}$ ,  $b = 4\sqrt{13}$ ,  $c = 13$ ; 2°)  $a = 8\sqrt{13}$ ,  $b = \sqrt{13}$ ,  $c = 13$ ;

б)  $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8\sqrt{2}x + 16\sqrt{2}y + c = 0$ , где:

1°)  $c = 42$ ; 2°)  $c = 44$ ;

в)  $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$ ;

г)  $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$ ;

д)  $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 216 = 0$ ;

е)  $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$ .

18. Перейдите к такой прямоугольной системе координат, в которой уравнение данной поверхности имеет канонический вид. Определите тип поверхности и напишите формулы преобразования координат:

а)  $2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz + \frac{4}{3}x - \frac{16}{3}y + \frac{32}{3}z + 10 = 0$ ;

б)  $-2yz + ax - 3\sqrt{2}y + \sqrt{2}z - 7 = 0$ , где:

1°)  $\alpha = 5$ ; 2°)  $\alpha = 0$ ;

в)  $5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy + 4yz - 10x + 8y + 14z - 6 = 0$ ;

г)  $2x^2 + 5y^2 + 11z^2 - 20xy + 4xz + 16yz - 24x - 6y - 6z - 18 = 0$ ;

д)  $3x^2 - 2y^2 - z^2 + 4xy + 8xz - 12yz + 18x - 12y - 6z = 0$ ;

е)  $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz - 10x + 4y + 6 = 0$ ;

ж)  $y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 2x + 6y + 2z + 8 = 0$ .

## § 5. Приведение двух квадратичных форм к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием

### Основные понятия и теоремы

- 1. Теорема о приведении двух квадратичных форм к каноническому виду.** Пусть даны две квадратичные формы: положительно определенная квадратичная форма  $Q(x^1, \dots, x^n)$  с матрицей  $A$  и произвольная квадратичная форма  $G(x^1, \dots, x^n)$  с матрицей  $B$ . Многочлен (относительно переменной  $\lambda$ )  $\det(B - \lambda A)$  называется  $\lambda$ -многочленом этой пары форм.

**Теорема 7.** Существует невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее обе квадратичные формы: положительно определенную квадратичную форму  $Q(x^1, \dots, x^n)$  и квадратичную

форму  $G(x^1, \dots, x^n)$  — к каноническому виду, причем все коэффициенты квадратичной формы  $Q$  равны 1, т. е. она приводится к сумме квадратов переменных, а канонические коэффициенты квадратичной формы  $G$  равны корням  $\lambda$ -многочлена этой пары форм.

**2. Алгоритм приведения двух квадратичных форм к каноническому виду одним невырожденным линейным преобразованием.** 1°. Находим (описанными в § 1 методами) невырожденное линейное преобразование переменных  $X = RY$ , приводящее положительно определенную квадратичную форму  $Q(x^1, \dots, x^n)$  к сумме квадратов:

$$\tilde{Q}(y^1, \dots, y^n) = \sum_{k=1}^n (y^k)^2.$$

2°. При этом преобразовании квадратичная форма  $G(x^1, \dots, x^n)$  с матрицей  $B$  переходит в квадратичную форму

$$\tilde{G}(y^1, \dots, y^n) = Y^T \cdot C \cdot Y$$

с матрицей  $C = R^T BR$ .

3°. Квадратичную форму  $\tilde{G}(y^1, \dots, y^n)$  ортогональным преобразованием  $Y = PZ$  приводим к каноническому виду:

$$\tilde{\tilde{G}}(z^1, \dots, z^n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (z^k)^2.$$

4°. При ортогональном преобразовании  $Y = PZ$  квадратичная форма

$$\tilde{Q}(y^1, \dots, y^n) = \sum_{k=1}^n (y^k)^2$$

переходит снова в сумму квадратов:

$$\tilde{Q}(z^1, \dots, z^n) = \sum_{k=1}^n (z^k)^2.$$

Таким образом, невырожденное линейное преобразование  $X = RPZ$ , являющееся произведением преобразований  $X = RY$  и  $Y = PZ$ , приводит обе данные квадратичные формы к каноническому виду.

### Контрольные вопросы и задания

1. Какие две квадратичные формы можно привести одним невырожденным линейным преобразованием к каноническому виду?
2. Что такое  $\lambda$ -многочлен пары квадратичных форм?
3. Докажите, что ортогональное преобразование переводит сумму квадратов переменных снова в сумму квадратов переменных.
4. Изложите метод одновременного приведения пары квадратичных форм, одна из которых положительно определенная, к каноническому виду.

### Пример решения задачи

Даны квадратичные формы

$$\begin{aligned} Q(x^1, x^2, x^3) &= \\ &= X^T A X = (x^1)^2 + 17(x^2)^2 + 3(x^3)^2 + 4x^1 x^2 - 2x^1 x^3 - 14x^2 x^3, \\ G(x^1, x^2, x^3) &= X^T B X = (x^1)^2 - 15(x^2)^2 + 4x^1 x^2 - 2x^1 x^3 + 6x^2 x^3. \end{aligned}$$

Привести эту пару форм одним невырожденным линейным преобразованием переменных к каноническому виду.

△ Составим матрицы  $A$  и  $B$  квадратичных форм  $Q$  и  $G$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 17 & -7 \\ -1 & -7 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -15 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $A$  положительно определенная, так как все ее угловые миноры положительные:  $\delta_1 = 1$ ,  $\delta_2 = 13$ ,  $\delta_3 = 1$ . Для решения задачи применим метод, описанный в п. 1.

1°. Приведем невырожденным линейным преобразованием  $X = RY$  квадратичную форму  $Q(x^1, x^2, x^3)$  к сумме квадратов  $\sum_{k=1}^3 (y^k)^2$ .

С этой целью воспользуемся сначала методом Лагранжа. Выделим полный квадрат по переменной  $x^1$ :

$$\begin{aligned} Q(x^1, x^2, x^3) &= [(x^1)^2 + 4x^1 x^2 - 2x^1 x^3] + 17(x^2)^2 + 3(x^3)^2 - 14x^2 x^3 = \\ &= (x^1 + 2x^2 - x^3)^2 + 13(x^2)^2 + 2(x^3)^2 - 10x^2 x^3. \end{aligned}$$

Далее выделим полный квадрат по переменной  $x^3$ :

$$\begin{aligned} Q(x^1, x^2, x^3) &= (x^1 + 2x^2 - x^3)^2 + 2\left(x^3 - \frac{5}{2}x^2\right)^2 + \frac{1}{2}(x^2)^2 = \\ &= (v^1)^2 + \frac{1}{2}(v^2)^2 + 2(v^3)^2 = \overline{Q}(v^1, v^2, v^3), \end{aligned}$$

где

$$v^1 = x^1 + 2x^2 - x^3, \quad v^2 = x^2, \quad v^3 = -\frac{5}{2}x^2 + x^3.$$

Это преобразование переменных можно записать в матричном виде:

$$V = D \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X.$$

Сделаем теперь преобразование переменных

$$y^1 = v^1, \quad y^2 = \sqrt{\frac{1}{2}}v^2, \quad y^3 = \sqrt{2}v^3,$$

или

$$Y = UV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} V.$$

Оно приводит квадратичную форму  $\tilde{Q}(v^1, v^2, v^3)$  к сумме квадратов:

$$\tilde{Q}(y^1, y^2, y^3) = \sum_{k=1}^3 (y^k)^2.$$

Итак, преобразование  $X = RY$ , где  $R = D^{-1} \cdot U^{-1} = (U \cdot D)^{-1}$ , приводит квадратичную форму  $Q(x^1, x^2, x^3)$  к сумме квадратов. Вычисляя матрицы  $U \cdot D$  и  $R$ , получаем

$$U \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -5/\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 5/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

2°. Найдем матрицу  $C = R^T BR$  квадратичной формы  $\tilde{G}(y^1, y^2, y^3)$ , перемножив указанные матрицы. Имеем

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 5/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{и } \tilde{G}(y^1, y^2, y^3) = (y^1)^2 - \frac{1}{2}(y^2)^2 - \frac{1}{2}(y^3)^2 + 5y^2y^3.$$

3°. Ортогональным преобразованием  $Y = PZ$  приведем квадратичную форму  $\tilde{G}(y^1, y^2, y^3)$  к каноническому виду. Характеристический многочлен матрицы  $C$

$$\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \lambda & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

имеет корни  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 2$ .

Найдем попарно ортогональные нормированные собственные векторы матрицы  $C$ . Для  $\lambda = -3$  матрица однородной системы уравнений относительно координат собственных векторов имеет вид

$$C - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 5/2 \\ 0 & 5/2 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

Ее ранг равен 2, и фундаментальная совокупность решений системы состоит из одного решения (сразу выберем нормированное решение)

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Аналогично, для  $\lambda = 1$  получаем

$$C - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & 5/2 & -3/2 \end{pmatrix},$$

и фундаментальная совокупность решений состоит из одного решения

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, для  $\lambda = 2$  имеем

$$C - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5/2 & 5/2 \\ 0 & 5/2 & -5/2 \end{pmatrix},$$

и фундаментальная совокупность решений состоит из решения

$$F_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Так как все три собственных значения матрицы  $C$  различны, то собственные векторы  $F_1, F_2, F_3$  попарно ортогональны. Они являются столбцами искомой матрицы  $P$  ортогонального преобразования. Итак, ортогональное преобразование  $Y = PZ$ , где

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

приводит квадратичную форму  $\tilde{G}(y^1, y^2, y^3)$  к каноническому виду

$$\tilde{G}(z^1, z^2, z^3) = -3(z^1)^2 + (z^2)^2 + 2(z^3)^2.$$

4°. При ортогональном преобразовании  $Y = PZ$  квадратичная форма

$$\tilde{Q}(y^1, y^2, y^3) = \sum_{k=1}^3 (y^k)^2$$

вновь переходит в сумму квадратов:

$$\tilde{Q}(z^1, z^2, z^3) = \sum_{k=1}^3 (z^k)^2.$$

Таким образом, невырожденное линейное преобразование

$$X = RPZ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} Z,$$

или

$$x^1 = z^2 + z^3, \quad x^2 = z^1 + z^3, \quad x^3 = 2z^1 + 3z^3,$$

приводит обе квадратичные формы  $Q(x^1, x^2, x^3)$  и  $G(x^1, x^2, x^3)$  к каноническому виду. Проверим, что канонические коэффициенты формы  $\tilde{G}(z^1, z^2, z^3)$  являются корнями  $\lambda$ -многочлена  $\det(B - \lambda A)$ .

Вычислим определитель

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda A) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 - 2\lambda & -1 + \lambda \\ 2 - 2\lambda & -15 - 17\lambda & 3 + 7\lambda \\ -1 + \lambda & 3 + 7\lambda & -3\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 - 2\lambda & -15 - 17\lambda & 3 + 7\lambda \\ \lambda - 1 & 3 + 7\lambda & -3\lambda \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Умножив последнюю строку на 2 и прибавив к второй строке, получим

$$\begin{aligned} (1 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -9 - 3\lambda & \lambda + 3 \\ \lambda - 1 & 3 + 7\lambda & -3\lambda \end{vmatrix} &= \\ (1 - \lambda)(\lambda + 3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ \lambda - 1 & 3 + 7\lambda & -3\lambda \end{vmatrix} &= (1 - \lambda)(\lambda + 3)(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 2$ , т. е. корни  $\lambda$ -многочлена совпадают с каноническими коэффициентами формы  $G$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

**19.** Приведите две квадратичные формы  $Q$  и  $G$  одним невырожденным линейным преобразованием к каноническому виду, если:

а)  $Q(x^1, x^2) = (x^1)^2 - 2x^1x^2 + 4(x^2)^2$ ,  $G(x^1, x^2) = -4x^1x^2$ ;

б)  $Q(x^1, x^2) = (x^1)^2 + 26(x^2)^2 + 10x^1x^2$ ,

$$G(x^1, x^2) = (x^1)^2 + 56(x^2)^2 + 16x^1x^2;$$

в)  $Q(x^1, x^2, x^3) = 4(x^1)^2 + 3(x^2)^2 + (x^3)^2 + 4x^1x^2 - 2x^2x^3$ ,

$$G(x^1, x^2, x^3) = -4(x^1)^2 + 3(x^2)^2 + (x^3)^2 - 4x^1x^2 - 2x^2x^3.$$

Выпишите это преобразование.

# ГЛАВА VII

## ТЕНЗОРЫ

### § 1. Тензоры в $n$ -мерном линейном пространстве

#### Основные понятия и теоремы

**1. Примеры.** Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и  $f_1, f_2, \dots, f_n$  — базисы в  $n$ -мерном линейном пространстве  $R_n$ , и пусть переход от первого базиса ко второму осуществляется с помощью матрицы  $C = (c_q^p)$ :

$$f_q = c_q^p e_p, \quad q = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Если  $e = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n)$  и  $f = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n)$  — строки из базисных элементов, то равенство (1) можно записать в матричной форме:

$$f = e C.$$

Обратный переход от второго базиса к первому осуществляется с помощью обратной матрицы  $C^{-1}$ , элементы которой обозначим через  $\bar{c}_q^p$ :  $e = f C^{-1}$ , или

$$e_q = \bar{c}_q^p f_p, \quad q = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) использована краткая запись суммирования: если в каком-либо выражении встречаются два одинаковых индекса, причем один верхний, а другой нижний, то такая запись означает суммирование по этому индексу. Иначе говоря, запись  $c_q^p e_p$  есть

краткое обозначение суммы  $\sum_{p=1}^n c_q^p e_p$ . Отметим, что выбор буквы для

обозначения индекса, по которому ведется суммирование, несуществен; так, например,  $c_q^i e_i = c_q^p e_p$ . Если же одинаковыми являются два нижних (или два верхних) индекса, то по такому индексу суммирование

не ведется. Например,  $c_q^p e_q$  означает одночлен, а не сумму  $\sum_{q=1}^n c_q^p e_q$ .

Базис в линейном пространстве позволяет описывать многие объекты, связанные с этим пространством, в виде упорядоченной совокупности чисел — координат этих объектов в заданном базисе. Приведем примеры.

Пример 1. Пусть на вещественном линейном пространстве  $R_n$  определена числовая функция  $F(x)$  (т. е. каждому элементу  $x$  из  $R_n$

поставлено в соответствие некоторое число  $F(x)$ ) и пусть для любых  $x, y$  из  $R_n$  и любого вещественного числа  $\alpha$  функция  $F(x)$  удовлетворяет условиям:

- 1)  $F(x + y) = F(x) + F(y);$
- 2)  $F(\alpha x) = \alpha F(x).$

Тогда функция  $F(x)$  называется *линейной формой* (или *линейным функционалом*), определенной на линейном пространстве  $R_n$ .

Раскладывая произвольный элемент  $x$  по базису  $e_1, e_2, \dots, e_n$ :  $x = x^q e_q$ , приходим к равенству  $F(x) = b_q x^q$ , где  $b_q = F(e_q)$ . Это равенство показывает, что линейная форма  $F(x)$  определяется в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$   $n$  числами  $b_1, b_2, \dots, b_n$ : чтобы получить значение линейной формы на элементе  $x = x^q e_q$ , нужно вычислить сумму  $b_q x^q$ . При переходе к базису  $f_1, f_2, \dots, f_n$  элемент  $x$  будет иметь представление  $x = \bar{x}^q f_q$ , а  $F(x) = \bar{b}_q \bar{x}^q$ , где  $\bar{b}_q = F(f_q) = F(c_q^p e_p) = c_q^p F(e_p) = c_q^p b_p$ , т. е.

$$\bar{b}_q = c_q^p b_p, \quad q = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Таким образом, в базисе  $f_1, f_2, \dots, f_n$  линейная форма  $F(x)$  определяется  $n$  числами  $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n$ , которые выражаются через числа  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , определяющие форму  $F(x)$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , по формулам (3). Заметим, что формулы (3) имеют такой же вид, как (1), т. е. величины  $b_q$  при переходе к другому базису преобразуются так же, как базисные элементы.

**Пример 2.** Любой элемент  $x$  линейного пространства  $R_n$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  определяется  $n$  числами  $x^1, x^2, \dots, x^n$  — координатами элемента  $x$  в этом базисе:  $x = x^q e_q$ . При переходе к базису  $f_1, f_2, \dots, f_n$  элемент  $x$  будет иметь представление  $x = \bar{x}^q f_q$ , причем столбец  $X_e = (x^q)$  координат элемента  $x$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  связан со столбцом  $X_f = (\bar{x}^q)$  координат этого элемента в базисе  $f_1, f_2, \dots, f_n$  следующим образом:  $X_f = C^{-1} X_e$ , или

$$\bar{x}^q = \bar{c}_p^q x^p, \quad q = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Формулы (4) схожи с формулами (2): новые координаты  $\bar{x}^q$  элемента  $x$  выражаются через старые координаты  $x^p$  аналогично тому, как старые базисные элементы  $e_q$  выражаются через новые базисные элементы  $f_p$  (короче говоря, с помощью обратной матрицы  $C^{-1}$ ).

**Вывод.** В рассмотренных примерах есть нечто общее: и линейная форма, и элемент линейного пространства в каждом базисе определяются  $n$  числами, причем при переходе от одного базиса к другому эти числа преобразуются линейно. Но есть и важное различие: у линейной формы определяющие ее числа (координаты) преобразуются с помощью матрицы  $C$ , т. е. так же, как базисные элементы. В таком случае говорят, что они преобразуются *ковариантно* с базисными элементами, и индексы у координат пишут внизу. Координаты

элементов линейного пространства преобразуются с помощью матрицы  $C^{-1}$ , т. е., как говорят, *контравариантно* с базисными элементами. В этом случае индексы у координат пишут вверху. Иными словами, положение индексов внизу или вверху у координат того или иного объекта показывает, как именно (ковариантно или контравариантно) преобразуются эти координаты при переходе от одного базиса к другому.

Рассмотрим еще два примера.

**Пример 3.** Пусть  $B(x, y)$  — билинейная форма, определенная на линейном пространстве  $R_n$ ,  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — базис в этом пространстве,  $x = x^p e_p$ ,  $y = y^q e_q$ . Тогда

$$B(x, y) = B(x^p e_p, y^q e_q) = b_{pq} x^p y^q,$$

где  $b_{pq} = B(e_p, e_q)$ . При переходе к базису  $f_1, f_2, \dots, f_n$  по формулам (1) приходим к равенствам

$$x = \bar{x}^p f_p, \quad y = \bar{y}^q f_q, \quad B(x, y) = B(\bar{x}^p f_p, \bar{y}^q f_q) = \bar{b}_{pq} \bar{x}^p \bar{y}^q,$$

где  $\bar{b}_{pq} = B(f_p, f_q) = B(c_p^i e_i, c_q^j e_j) = c_p^i c_q^j b_{ij}$ , т. е.

$$\bar{b}_{pq} = c_p^i c_q^j b_{ij}, \quad p, q = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Таким образом, билинейная форма  $B(x, y)$  в каждом базисе определяется  $n^2$  числами, занумерованными с помощью двух индексов, причем при переходе от одного базиса к другому эти числа преобразуются по правилу (5), т. е. по каждому из двух индексов, так же, как базисные элементы (ковариантно).

**Пример 4.** Линейный оператор  $\hat{A}$ , действующий в линейном пространстве  $R_n$ , в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  имеет матрицу  $A_e = (a_q^p)$ . При переходе к базису  $f_1, f_2, \dots, f_n$  по формулам (1) эта матрица преобразуется в матрицу  $A_f = C^{-1} A_e C$ , элементы  $\bar{a}_q^p$  которой связаны с элементами матрицы  $A_e$  соотношениями

$$\bar{a}_q^p = \bar{c}_i^p c_q^j a_i^j, \quad p, q = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Таким образом, линейный оператор  $\hat{A}$  в каждом базисе определяется  $n^2$  числами, занумерованными с помощью двух индексов, причем при переходе от одного базиса к другому эти числа преобразуются по формулам (6), т. е. по нижнему индексу, так же, как базисные элементы (ковариантно), а по верхнему — с обратной матрицей, т. е. контравариантно по отношению к базисным элементам.

**2. Определение тензора.** Итак, мы рассмотрели четыре различных объекта: линейную форму, элемент линейного пространства, билинейную форму и линейный оператор. Каждый из этих объектов в

любом базисе линейного пространства описывается совокупностью  $n$  или  $n^2$  чисел, занумерованных с помощью одного или двух индексов, причем при переходе от одного базиса к другому эти числа преобразуются по указанным правилам.

Существуют другие объекты, которые в каждом базисе линейного пространства описываются упорядоченной совокупностью чисел (координат), занумерованных с помощью трех и более индексов, и при переходе от одного базиса к другому эти координаты преобразуются аналогично тому, как преобразовывались координаты объектов в рассмотренных примерах. Такие объекты называются тензорами. Дадим определение тензора.

**Определение.** Геометрический объект  $[A]_p^q$ , который в каждом базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейного пространства  $R_n$  определяется  $n^{p+q}$  координатами (числами)  $a_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q}$  (индексы  $i_1, \dots, i_q, j_1, \dots, j_p$  независимо друг от друга пробегают значения  $1, 2, \dots, n$ ), называется *тензором типа  $(p, q)$*  ( $p$  раз ковариантным и  $q$  раз контравариантным), если при переходе к базису  $f_1, f_2, \dots, f_n$  по формулам (1) его координаты преобразуются следующим образом:

$$\bar{a}_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q} = c_{j_1}^{\alpha_1} c_{j_2}^{\alpha_2} \dots c_{j_p}^{\alpha_p} \bar{c}_{\beta_1}^{i_1} \bar{c}_{\beta_2}^{i_2} \dots \bar{c}_{\beta_q}^{i_q} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_q}. \quad (7)$$

Здесь  $\bar{a}_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q}$  — координаты тензора  $[A]_p^q$  в базисе  $f_1, f_2, \dots, f_n$ ,  $\bar{c}_q^p$  — элементы обратной матрицы (см. (2)). Верхние индексы  $i_1, i_2, \dots, i_q$  называются *контравариантными индексами*, а нижние индексы  $j_1, j_2, \dots, j_p$  — *ковариантными индексами*. Число  $r = p + q$  называется *рангом тензора*.

Как следует из определения, тензор ранга  $r$  в  $n$ -мерном пространстве имеет  $n^r$  координат в каждом базисе. Скаляр, т. е. величину, имеющую во всех базисах одно и то же значение, можно рассматривать как тензор нулевого ранга.

Набор из  $n$  чисел  $(b_q)$  в примере 1 — координаты ковариантного тензора ранга 1; набор из  $n$  чисел  $(x^q)$  в примере 2 — координаты контравариантного тензора ранга 1; набор из  $n^2$  чисел  $(b_{pq})$  в примере 3 — координаты ковариантного тензора ранга 2; набор из  $n^2$  чисел  $(a_q^p)$  в примере 4 — координаты тензора ранга 2, один раз ковариантного и один раз контравариантного. Последний тензор называется также *смешанным* тензором ранга 2.

Если в каком-либо базисе координаты двух тензоров совпадают, то они совпадают и во всех других базисах, так как при переходе к другому базису координаты обоих тензоров преобразуются по одним и тем же формулам (7). Следовательно, чтобы задать тензор, достаточно задать его координаты в каком-нибудь базисе.

**Определение.** Тензор, координаты которого не меняют своего значения при перестановке двух верхних или двух нижних индексов, называется *симметричным* по этим индексам.

**Определение.** Тензор, у которого при перестановке каких-либо двух верхних или двух нижних индексов не меняются абсолютные значения координат, но изменяется их знак, называется *кососимметричным* тензором по данным индексам.

### 3. Операции над тензорами.

1) Сложение и вычитание тензоров. Пусть  $[A]_p^q$  и  $[B]_p^q$  — два тензора одного типа  $(p, q)$ , и пусть их координаты в некотором базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  равны соответственно  $a_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q}$  и  $b_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q}$ . Суммой  $[A]_p^q + [B]_p^q$  (разностью  $[A]_p^q - [B]_p^q$ ) этих тензоров называется тензор  $[D]_p^q$  того же типа  $(p, q)$ , координаты  $d_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q}$  которого в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  выражаются формулой

$$d_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q} = a_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q} + b_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q} \quad (d_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q} = a_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q} - b_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q}).$$

2) Умножение тензоров. Пусть  $[A]_p^q$  — тензор типа  $(p, q)$  с координатами  $a_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q}$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , а  $[B]_r^s$  — тензор типа  $(r, s)$  с координатами  $b_{m_1 m_2 \dots m_r}^{l_1 l_2 \dots l_s}$  в том же базисе. Составим всевозможные произведения координат тензора  $[A]_p^q$  на координаты тензора  $[B]_r^s$ :

$$a_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q} b_{m_1 m_2 \dots m_r}^{l_1 l_2 \dots l_s}.$$

Индексы у координат тензора  $[B]_r^s$  заменим новыми индексами, положив  $l_1 = i_{q+1}, \dots, l_s = i_{q+s}, m_1 = j_{p+1}, \dots, m_r = j_{p+r}$ . Получим произведения вида

$$a_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q} b_{j_{p+1} j_{p+2} \dots j_{p+r}}^{i_{q+1} i_{q+2} \dots i_{q+s}}. \quad (8)$$

Произведением тензора  $[A]_p^q$  на тензор  $[B]_r^s$  называется тензор  $[D]_{p+r}^{q+s}$  типа  $(p+r, q+s)$ , координаты  $d_{j_1 j_2 \dots j_{p+r}}^{i_1 i_2 \dots i_{q+s}}$  которого в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  равны величинам (8), т. е.

$$d_{j_1 j_2 \dots j_{p+r}}^{i_1 i_2 \dots i_{q+s}} = a_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q} b_{j_{p+1} j_{p+2} \dots j_{p+r}}^{i_{q+1} i_{q+2} \dots i_{q+s}}. \quad (9)$$

Например, произведением тензора  $[A]_1^1$  с координатами  $a_q^p$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  на тензор  $[B]_0^1$  с координатами  $b^i$  в том же базисе является тензор  $[D]_1^2$  с координатами  $d_q^{pi} = a_q^p b^i$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

Если  $[A]_0^0 = \alpha$  — тензор нулевого ранга, т. е. число, то при умножении его на тензор  $[B]_p^q$  получается тензор того же типа  $(p, q)$ , каждая координата которого равна произведению соответствующей координаты тензора  $[B]_p^q$  на число  $\alpha$ .

Умножение тензора не обладает свойством перестановочности, т. е. равенство  $[A]_q^p [B]_r^s = [B]_r^s [A]_q^p$ , вообще говоря, не имеет места.

Рассмотрим, например, произведение двух ковариантных тензоров  $[A]_1^0$  и  $[B]_1^0$  ранга 1 в пространстве  $R_2$ . Пусть в базисе  $e_1, e_2$  первый тензор имеет координаты  $a_1 = 1, a_2 = 2$ , а второй тензор имеет координаты  $b_1 = 3, b_2 = 5$ . Произведение  $[A]_1^0[B]_1^0 = [C]_2^0$  есть дважды ковариантный тензор, имеющий в том же базисе координаты

$$c_{11} = a_1 b_1 = 3, \quad c_{12} = a_1 b_2 = 5, \quad c_{21} = a_2 b_1 = 6, \quad c_{22} = a_2 b_2 = 10.$$

Произведение тех же тензоров в обратном порядке  $[B]_1^0[A]_1^0 = [D]_2^0$  есть также дважды ковариантный тензор, имеющий в базисе  $e_1, e_2$  координаты

$$d_{11} = b_1 a_1 = 3, \quad d_{12} = b_1 a_2 = 6, \quad d_{21} = b_2 a_1 = 5, \quad d_{22} = b_2 a_2 = 10.$$

Так как  $c_{12} \neq d_{12}$ , то  $[C]_2^0 \neq [D]_2^0$ .

3) Свертывание тензора. Пусть тензор  $[A]_p^q$  имеет координаты  $a_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q}$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Выделим какой-нибудь верхний индекс, например,  $i_\alpha$  (т. е. индекс с номером  $\alpha$ ) и какой-нибудь нижний индекс, например,  $j_\beta$ , и рассмотрим только те координаты, у которых эти индексы равны:

$$a_{j_1 \dots j_{\beta-1} i_\alpha j_{\beta+1} \dots j_p}^{i_1 \dots i_{\alpha-1} i_\alpha i_{\alpha+1} \dots i_q}.$$

Здесь индекс  $j_\beta$  заменен на равный индекс  $i_\alpha$ . Введем тензор  $[B]_{p-1}^{q-1}$ , координаты которого в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  выражаются формулой

$$b_{j_1 \dots j_{\beta-1} i_\alpha j_{\beta+1} \dots j_p}^{i_1 \dots i_{\alpha-1} i_\alpha i_{\alpha+1} \dots i_q} = a_{j_1 \dots j_{\beta-1} i_\alpha j_{\beta+1} \dots j_p}^{i_1 \dots i_{\alpha-1} i_\alpha i_{\alpha+1} \dots i_q}.$$

В соответствии с нашей договоренностью выражение в правой части равенства представляет собой сумму  $n$  слагаемых, в которых  $i_\alpha$  пробегает значения от 1 до  $n$ . Операция перехода от тензора  $[A]_p^q$  к тензору  $[B]_{p-1}^{q-1}$  называется *свертыванием* тензора  $[A]_p^q$  по двум выделенным индексам  $i_\alpha$  и  $j_\beta$ , а сам тензор  $[B]_{p-1}^{q-1}$  будем называть *свернутой* тензора  $[A]_p^q$  по указанным индексам.

Пример. Пусть тензор  $[A]_1^2$  имеет в базисе  $e_1, e_2$  линейного пространства  $R_2$  следующие координаты  $a_q^{pk}$ :  $a_1^{11} = -1, a_1^{12} = 2, a_1^{21} = 3, a_1^{22} = 1, a_2^{11} = 4, a_2^{12} = -5, a_2^{21} = 1, a_2^{22} = 6$ . Свертывание этого тензора по индексам  $k$  и  $q$  дает тензор  $[B]_1^0$ , имеющий в том же базисе  $e_1, e_2$  координаты  $b^1 = a_1^{1k} = a_1^{11} + a_2^{12} = -6$  и  $b^2 = a_2^{2k} = a_1^{21} + a_2^{22} = 9$ .

Операция свертывания часто применяется к произведению двух тензоров по индексам, взятым в разных сомножителях. Так, например, при свертывании произведения тензора  $[B]_1^0$ , определяющего линейную форму и имеющего координаты  $b_p$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , и тензора  $[X]_0^1$ , определяющего элемент  $x$  линейного пространства

и имеющего координаты  $x^k$  в том же базисе, получаем тензор нулевого ранга — скаляр  $b_k x^k$  — значение линейной формы на элементе  $x$ .

В случае тензоров ранга 1 и 2 их координаты в каком-либо базисе удобно записывать в виде матрицы. Например, если  $[B]_1^0$  — тензор ранга 1, то его координаты  $b_1, b_2, \dots, b_n$  в данном базисе линейного пространства можно записать в виде строки  $B = (b_k)$ ; если  $[A]_1^1$  — тензор ранга 2, то его координаты  $a_q^p$  можно записать в виде квадратной матрицы  $A = (a_q^p)$ ; если  $[C]_2^0$  — тензор ранга 2, то его координаты  $c_{pq}$  можно записать в виде квадратной матрицы  $C = (c_{pq})$ . При этом  $B$ ,  $A$  и  $C$  называются матрицами тензоров  $[B]_1^0$ ,  $[A]_1^1$  и  $[C]_2^0$  в данном базисе. Если матрица тензора ранга 2 — симметричная матрица, то такой тензор называется *симметричным тензором*.

Отметим следующее обстоятельство. Если в линейном пространстве  $R_n$  фиксирован базис, то смешанный тензор  $[A]_1^1$  описывается в этом базисе квадратной матрицей  $(a_q^p)$   $n$ -го порядка. Но матрицей  $(a_q^p)$  в том же базисе описывается и некоторый линейный оператор  $\hat{A}$ , действующий в пространстве  $R_n$ . Поэтому говорят, что если задан тензор  $[A]_1^1$ , то он определяет некоторый линейный оператор. Аналогично: если задан контравариантный тензор ранга 1, то он определяет элемент линейного пространства; если задан ковариантный тензор ранга 1, то он определяет линейную форму; если задан ковариантный тензор ранга 2, то он определяет билинейную форму.

### Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение тензора.
2. Объясните смысл терминов “ковариантный” и “контравариантный”.
3. В евклидовом пространстве зафиксируем два элемента  $x$  и  $y$ . Можно ли назвать скалярное произведение  $(x, y)$  этих элементов тензором? Если да, то каков его ранг?
4. Используя определение тензора, покажите, что:
  - а) матрица оператора, действующего в линейном пространстве  $R_n$ , в некотором базисе является матрицей тензора ранга 2, один раз ковариантного и один раз контравариантного, в том же базисе;
  - б) координаты элемента линейного пространства в некотором базисе являются координатами контравариантного тензора ранга 1 в том же базисе.
5. В четырехмерном линейном пространстве дан тензор ранга 3. Сколько слагаемых содержит выражение координаты этого тензора в одном базисе через координаты этого же тензора в другом базисе? Сколько сомножителей содержится в каждом слагаемом этого выражения?
6. Приведите пример тензоров, произведение которых:
  - а) перестановочно, т. е. не зависит от порядка сомножителей;
  - б) не перестановочно.

7. Даны тензоры  $[A]_1^1$  и  $[B]_1^1$  с координатами  $a_q^p$  и  $b_j^i$  в некотором базисе линейного пространства  $R_n$ . Какой тензор является сверткой произведения тензоров  $[A]_1^1[B]_1^1$  по индексам  $q, i$ ? Определяет ли эта свертка линейный оператор, действующий в пространстве  $R_n$ ?
8. Дан тензор  $[A]_1^1$  с координатами  $a_q^p$  в некотором базисе линейного пространства  $R_n$  и тензор  $[X]_0^1$  с координатами  $x^i$  в том же базисе. Какой тензор является сверткой произведения тензоров  $[A]_1^1[X]_0^1$  по индексам  $q, i$ ? Что определяет эта свертка: линейную форму; элемент пространства?

### Примеры решения задач

1. Тензор  $[D]_1^1$  имеет в некотором базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейного пространства  $R_n$  координаты

$$\delta_q^p = \begin{cases} 1, & \text{если } p = q, \\ 0, & \text{если } p \neq q, \end{cases} \quad p, q = 1, 2, \dots, n.$$

Изменяются ли его координаты при переходе к другому базису? Какой геометрический смысл имеет этот тензор?

△ Если переход от базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$  к базису  $f_1, f_2, \dots, f_n$  осуществляется с помощью матрицы  $C = (c_q^p)$ , то координаты  $\bar{\delta}_q^p$  тензора  $[D]_1^1$  в базисе  $f_1, f_2, \dots, f_n$  определяются формулами (см. (7))

$$\bar{\delta}_q^p = c_q^i \bar{c}_j^p \delta_i^j, \quad p, q = 1, 2, \dots, n,$$

где по индексам  $i$  и  $j$  ведется суммирование от 1 до  $n$ . Так как  $\delta_i^j = 0$  при  $i \neq j$ , то из  $n^2$  слагаемых в правой части последнего равенства можно оставить только те, для которых  $i = j$ . Поэтому  $\bar{\delta}_q^p = c_q^i \bar{c}_i^p = (C^{-1}C)_q^p = (I)_q^p = \delta_q^p$ . Таким образом, координаты тензора  $[D]_1^1$  одинаковы во всех базисах линейного пространства  $R_n$ .

Тензор  $[D]_1^1$  определяет тождественный оператор  $\hat{I}$ , т. е. оператор, матрица которого является единичной в любом базисе. ▲

2. Тензор  $[D]_2^0$  имеет в некотором базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейного пространства  $R_n$  координаты

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 1, & \text{если } p = q, \\ 0, & \text{если } p \neq q, \end{cases} \quad p, q = 1, 2, \dots, n.$$

Как преобразуются координаты этого тензора при переходе к другому базису? Какой геометрический смысл имеет этот тензор?

△ При переходе от базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$  к базису  $f_1, f_2, \dots, f_n$  с помощью матрицы  $C = (c_q^p)$  координаты тензора  $[D]_2^0$  преобразуются по формуле (см. (7))

$$\bar{\delta}_{pq} = c_p^i c_q^j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n c_p^i c_q^i = (C^T)_p^q = (C^T C)_q^p.$$

Отсюда следует, что если  $C^T C = I$  (в этом случае  $C$  — ортогональная матрица), то  $\bar{\delta}_{pq} = \delta_{pq}$ ,  $p, q = 1, 2, \dots, n$ , т. е. если переход от данного базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$  к новому базису осуществляется с помощью ортогональной матрицы, то координаты тензора  $[D]_2^0$  не изменяются. Если же  $C^T C \neq I$ , то координаты тензора  $[D]_2^0$  (по крайней мере какие-то из них) не сохраняют своих значений.

Тензор  $[D]_2^0$  определяет билинейную форму, которая в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  имеет канонический вид  $B(x, y) = \sum_{k=1}^n x^k y^k$ , где  $x^1, x^2, \dots, x^n$  и  $y^1, y^2, \dots, y^n$  — координаты элементов  $x, y$  линейного пространства  $R_n$ . ▲

**3.** Каждому базису в линейном пространстве  $R_n$  сопоставлены числа (одни и те же в каждом базисе)  $\bar{\delta}_{pq}^{ij} = \delta_p^i \delta_q^j - \delta_q^i \delta_p^j$ , где  $\delta_p^i$  — символ Кронекера (т. е.  $\delta_{pq}^{ij} = 1$ , если  $i = p \neq j = q$ ,  $\delta_{pq}^{ij} = -1$ , если  $i = q \neq j = p$ , и  $\delta_{pq}^{ij} = 0$  в остальных случаях). Являются ли эти числа координатами тензора?

△ Рассмотрим тензор  $[D]_2^2$ , имеющий своими координатами в некотором базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  заданные числа  $\bar{\delta}_{pq}^{ij}$ . При переходе от базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$  к базису  $f_1, f_2, \dots, f_n$  с помощью матрицы  $C = (c_q^p)$  координаты тензора  $[D]_2^2$  преобразуются по формуле (см. (7))

$$\bar{\delta}_{pq}^{ij} = c_p^l c_q^h \bar{c}_k^i \bar{c}_m^j \delta_{lh}^{km} = c_p^k c_q^m \bar{c}_k^i \bar{c}_m^j - c_p^m c_q^k \bar{c}_k^i \bar{c}_m^j,$$

где первая группа слагаемых в правой части получается при  $k = l \neq m = h$ , а вторая (со знаком минус) — при  $k = h \neq m = l$ . Изменяя порядок суммирования, получим

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{pq}^{ij} &= (\bar{c}_k^i c_p^k)(\bar{c}_m^j c_q^m) - (\bar{c}_k^i c_q^k)(\bar{c}_m^j c_p^m) = \\ &= (C^{-1}C)_p^i (C^{-1}C)_q^j - (C^{-1}C)_q^i (C^{-1}C)_p^j = \delta_p^i \delta_q^j - \delta_q^i \delta_p^j. \end{aligned}$$

Таким образом, координаты тензора  $[D]_2^2$  одинаковы во всех базисах. Следовательно, заданные числа являются координатами тензора  $[D]_2^2$ , дважды ковариантного и дважды контравариантного. ▲

**4.** Пусть в базисе  $e_1, e_2, e_3$  линейного пространства элементы  $x$  и  $y$  имеют координаты  $1, 0, -1$  и  $0, 1, 0$  соответственно. Тем самым заданы тензор  $[X]_0^1$  с координатами  $1, 0, -1$  и тензор  $[Y]_0^1$  с координатами  $0, 1, 0$  в том же базисе. Найти координаты произведения этих тензоров  $[A]_0^2 = [X]_0^1 \cdot [Y]_0^1$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$  и в базисе  $f_1, f_2, f_3$ , если  $f = eC$ , где

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\triangle$  Координаты тензора  $[A]_0^2$  выражаются через координаты сомножителей формулой (см. (8)):  $a^{pq} = x^p y^q$ ,  $p, q = 1, 2, 3$ . Поэтому матрица тензора  $[A]_0^2$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$ , составленная из координат тензора в этом базисе, имеет вид

$$(a^{pq}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При переходе к базису  $f_1, f_2, f_3$  координаты тензора  $[A]_0^2$  преобразуются по формуле (см. (7))  $\bar{a}^{pq} = \bar{c}_j^p \bar{c}_j^q a^{ij}$ , где  $\bar{c}_i^p$  — элементы матрицы  $C^{-1}$ , а по индексам  $i$  и  $j$  ведется суммирование от 1 до 3. Подставляя в эту формулу значения координат  $a^{ij}$ , получаем  $\bar{a}^{pq} = \bar{c}_1^p \bar{c}_2^q - \bar{c}_3^p \bar{c}_2^q = (\bar{c}_1^p - \bar{c}_3^p) \bar{c}_2^q$ . Далее находим обратную матрицу:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 21 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

и вычисляем координаты  $\bar{a}^{pq}$ . В результате получаем матрицу тензора  $[A]_0^2$  в базисе  $f_1, f_2, f_3$ :

$$\bar{a}^{pq} = \begin{pmatrix} -250 & 125 & 50 \\ 120 & -60 & -24 \\ 50 & -25 & -10 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

**5.** Даны дважды ковариантный тензор  $[B]_2^0$  с координатами  $b_{pq}$  в некотором базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейного пространства  $R_n$  и два контравариантных тензора  $[X]_0^1$  и  $[Y]_0^1$  с координатами  $x^i$  и  $y^j$  в том же базисе. Что представляет собой свертка произведения тензоров  $[B]_2^0 [X]_0^1 [Y]_0^1$  по индексам  $p$  и  $i$  и индексам  $q$  и  $j$ ?

$\triangle$  Произведение трех тензоров  $[B]_2^0$ ,  $[X]_0^1$  и  $[Y]_0^1$  есть тензор ранга 4 с координатами  $b_{pq} x^i y^j$ ,  $p, q, i, j = 1, 2, \dots, n$ , в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . По условию задачи производятся два свертывания: по индексам  $p$  и  $i$  и индексам  $q$  и  $j$ . Результатом этих действий будет тензор нулевого ранга, т. е. число, равное  $b_{pq} x^p y^q$ . Отметим, что это число есть значение билинейной формы  $B(x, y)$ , определяемой тензором  $[B]_2^0$ , на элементах  $x, y$ , определяемых тензорами  $[X]_0^1$  и  $[Y]_0^1$ .  $\blacktriangle$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Пусть в базисе  $e_1, e_2, e_3$  линейного пространства элементы  $x$  и  $y$  имеют координаты 2, 1, 0 и  $-1, 0, 3$ . Тем самым заданы тензоры  $[X]_0^1$  и  $[Y]_0^1$  с указанными координатами в том же базисе. Найдите

дите координаты тензора  $[A]_0^2$ , представляющего собой произведение тензоров  $[X]_0^1[Y]_0^1$ , в базисах  $e_1, e_2, e_3$  и  $f_1, f_2, f_3$ , если  $f = eC$ , где

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. При условиях задачи 1 найдите координаты в обоих базисах тензора  $[B]_0^2$ , представляющего собой произведение тензоров  $[Y]_0^1[X]_0^1$ . Сравните полученные результаты с результатами задачи 1.
3. Пусть  $a_{pq}$  — координаты дважды ковариантного тензора в некотором базисе  $n$ -мерного линейного пространства. Докажите, что если матрица  $A = (a_{pq})$  невырождена, то матрица этого тензора в любом другом базисе также невырождена.
4. Пусть  $a_{pq}$  — координаты дважды ковариантного тензора  $[A]_2^0$  в некотором базисе  $n$ -мерного линейного пространства, причем  $\det A = \det(a_{pq}) \neq 0$ , и пусть матрица  $A^{-1}$  является матрицей дважды контравариантного тензора  $[B]_0^2$  в том же базисе. Докажите, что и в любом другом базисе матрица тензора  $[B]_0^2$  является обратной для матрицы тензора  $[A]_2^0$ .
5. Дан смешанный тензор с координатами  $a_q^p$  в некотором базисе линейного пространства  $R_n$ . Убедитесь в том, что сверткой этого тензора по его двум индексам является число, равное следу матрицы  $A = (a_q^p)$  (т. е. сумме  $a_1^1 + a_2^2 + \dots + a_n^n$  элементов главной диагонали матрицы  $A$ ). Докажите, что след матрицы данного тензора является инвариантом относительно преобразования базиса.
6. В каждом базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейного пространства  $R_n$  определим  $n^2$  чисел  $b_{ij}$  как решение системы линейных уравнений

$$a^{ki} b_{ij} = \delta_j^k, \quad k, j = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\delta_j^k$  — символ Кронекера,  $a^{ki}$  — координаты дважды контравариантного тензора  $[A]_2^0$  в этом же базисе, причем  $\det(a^{ki}) \neq 0$ . Докажите, что числа  $b_{ij}$  являются координатами дважды ковариантного тензора в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

7. Пусть тензор  $[A]_2^0$  имеет в базисе  $e_1, e_2$  матрицу  $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ . Представьте этот тензор в виде произведения ковариантных тензоров  $[B]_1^0$  и  $[C]_1^0$  ранга 1 и найдите их координаты в том же базисе. Для любого ли тензора типа  $(2, 0)$  возможно такое представление?
8. Даны симметричный дважды ковариантный тензор  $[A]_2^0$  и косо-симметричный дважды контравариантный тензор  $[B]_0^2$ , имеющие в некотором базисе линейного пространства координаты  $a_{pq}$  и  $b^{ij}$

соответственно. Найдите координаты тензора, полученного в результате двойного свертывания произведения  $[A]_2^1 [B]_0^2$  по индексам  $p$  и  $i$  и индексам  $q$  и  $j$ , в произвольном базисе.

9. Тензоры  $[A]_1^1$ ,  $[B]_0^1$  и  $[C]_1^0$  заданы в некотором базисе линейного пространства  $R_4$  матрицами

$$A = (a_q^p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = (b^i) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$C = (c_j) = (0 \ -1 \ 1 \ 0).$$

Найдите координаты тензора, полученного в результате двойного свертывания произведения  $[A]_1^1 [B]_0^1 [C]_1^0$  по индексам  $p$  и  $j$  и по индексам  $q$  и  $i$ , в произвольном базисе.

## § 2. Тензоры в евклидовом пространстве.

### Примеры тензорных физических величин

#### Основные понятия

**1. Метрический тензор.** Скалярное произведение в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_n$  является симметричной билинейной формой. В произвольном базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  для любых элементов  $x = x^p e_p$  и  $y = y^q e_q$  имеем

$$(x, y) = g_{pq} x^p y^q,$$

где  $g_{pq} = (e_p, e_q) = g_{qp}$ . Числа  $g_{pq}$ , как следует из § 1, являются координатами дважды ковариантного тензора. Этот тензор (обозначим его  $[G]_2^0$ ) называется *ковариантным метрическим тензором* евклидова пространства  $\mathcal{E}_n$ .

Свертка произведения метрического тензора  $[G]_2^0$  с контравариантным тензором  $[X]_0^1$ , имеющим координаты  $x^q$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и определяющим элемент  $x$  евклидова пространства  $\mathcal{E}_n$ , есть ковариантный тензор  $[X]_1^0$  с координатами

$$x_p = g_{pq} x^q, \quad p = 1, 2, \dots, n, \tag{1}$$

в том же базисе.

Посредством формул (1) при заданном базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  каждому элементу  $x = x^q e_q$  ставится в соответствие определенный набор чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Верно и обратное: с помощью формул (1) каждому набору чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  можно поставить в соответствие определенный элемент  $x = x^q e_q$ . Это следует из того, что  $\det(g_{pq}) \neq 0$  (объясните почему), и поэтому для каждого набора чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  система уравнений (1) имеет единственное решение относительно

$x^1, x^2, \dots, x^n$ . Таким образом, числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  можно рассматривать как координаты (в каком-то смысле) элемента  $x$ . Назовем эти числа *ковариантными координатами* элемента  $x$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  (в отличие от *контравариантных координат*  $x^1, x^2, \dots, x^n$ ).

Чем различаются ковариантные и контравариантные координаты элемента  $x$ ? Контравариантные координаты элемента  $x$  являются коэффициентами разложения этого элемента по базису  $e_1, e_2, \dots, e_n$ :  $x = x^q e_q$ . Ковариантные координаты этого же элемента запишем в виде

$$x_p = g_{pq} x^q = (e_p, e_q) x^q = (e_p, x^q e_q) = (e_p, x).$$

Отсюда следует, что  $x_p$  — это проекция элемента  $x$  на базисный элемент  $e_p$ , умноженная на норму элемента  $e_p$ .

Если  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — ортонормированный базис, то  $g_{pq} = (e_p, e_q) = \delta_{pq}$ . Поэтому  $x_p = \delta_{pq} x^q = x^p$ . Таким образом, в ортонормированном базисе ковариантные и контравариантные координаты элемента совпадают.

Переход от контравариантных координат к ковариантным координатам элемента по формуле (1) часто называют *отпусканiem индекса*.

Матрица  $(g_{pq})$  метрического тензора  $[G]_2^0$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  имеет обратную матрицу (поскольку  $\det(g_{pq}) \neq 0$ ). Обозначим элементы обратной матрицы через  $g^{pq}$ . Тогда

$$g^{pi} g_{iq} = \delta_q^p, \quad p, q = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Числа  $g^{pq}$   $p, q = 1, 2, \dots, n$ , являются координатами в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  дважды контравариантного тензора  $[G]_0^2$ , обладающего тем свойством, что его матрица является обратной для матрицы тензора  $[G]_2^0$  в любом базисе.

Тензор  $[G]_0^2$  называется *контравариантным метрическим тензором*. Он используется для обратного перехода от ковариантных координат элемента  $x$  к его контравариантным координатам: чтобы *поднять индекс*, надо умножить обе части равенства (1) на  $g^{ip}$  и просуммировать по индексу  $p$ . Учитывая (2), получаем

$$g^{ip} x_p = g^{ip} g_{pq} x^q = \delta_q^i x^q = x^i. \quad (3)$$

**2. Физические примеры тензоров.** При описании многих физических явлений используются тензоры. На тензорном исчислении основан математический аппарат общей теории относительности. Тензоры находят применение в механике, электродинамике, теории упругости и других разделах физики. Рассмотрим некоторые примеры.

Тензор инерции. Этот тензор вводится при изучении движения твердого тела. Рассмотрим движение твердого тела  $G$  относительно прямоугольной системы координат  $Ox^1 x^2 x^3$  с началом в центре инерции тела. Пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — координатные векторы. Они

образуют ортонормированный базис в пространстве векторов. Скорость  $\mathbf{v}$  произвольной точки  $M$  тела представима в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}],$$

где  $\mathbf{V}$  — скорость центра инерции тела (она называется также скоростью поступательного движения тела),  $\boldsymbol{\Omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$  — угловая скорость вращения тела вокруг оси, проходящей через центр инерции тела (направление вектора  $\boldsymbol{\Omega}$  совпадает с направлением оси вращения),  $\mathbf{r} = \{x^1, x^2, x^3\}$  — радиус-вектор точки  $M$ , т. е.  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ ,  $[\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}]$  — векторное произведение векторов  $\boldsymbol{\Omega}$  и  $\mathbf{r}$ .

Кинетическая энергия  $T$  тела  $G$  определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} \iiint_G \rho(M) \cdot \mathbf{v}^2 dx,$$

где  $\rho(M)$  — плотность тела в точке  $M$ ,  $dx = dx^1 dx^2 dx^3$ . Используя выражение для  $\mathbf{v}$ , получаем

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{V}^2 + 2(\mathbf{V}, [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}]) + [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}]^2 = \mathbf{V}^2 + 2([\mathbf{V} \boldsymbol{\Omega}], \mathbf{r}) + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r}^2 - (\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r})^2.$$

Так как  $\mathbf{V}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  одинаковы для всех точек тела, то

$$\iiint_G \rho(M) ([\mathbf{V} \boldsymbol{\Omega}], \mathbf{r}) dx = \left( [\mathbf{V} \boldsymbol{\Omega}], \iiint_G \rho(M) \mathbf{r} dx \right).$$

Начало координат выбрано в центре инерции тела, поэтому

$$\iiint_G \rho(M) \mathbf{r} dx = \boldsymbol{\theta},$$

и для кинетической энергии  $T$  получаем выражение:

$$T = \frac{1}{2} \iiint_G \rho(M) \mathbf{V}^2 dx + \frac{1}{2} \iiint_G \rho(M) (\boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r}^2 - (\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r})^2) dx = T_{\Pi} + T_{\text{ВР}}.$$

Первое слагаемое  $T_{\Pi}$  есть кинетическая энергия поступательного движения тела, а второе слагаемое  $T_{\text{ВР}}$  — кинетическая энергия вращательного движения тела. Выразим  $\boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r}^2 - (\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r})^2$  через координаты векторов  $\boldsymbol{\Omega}$  и  $\mathbf{r}$ :

$$\boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r}^2 - (\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r})^2 = (\Omega_i \Omega_j \delta^{ij}) \mathbf{r}^2 - (\Omega_i x^i)(\Omega_j x^j) = \Omega_i \Omega_j (\mathbf{r}^2 \delta^{ij} - x^i x^j),$$

где  $\delta^{ij}$  — символ Кронекера. Формула для  $T_{\text{ВР}}$  примет вид

$$T_{\text{ВР}} = \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_j \iiint_G \rho(M) (\mathbf{r}^2 \delta^{ij} - x^i x^j) dx = \frac{1}{2} I^{ij} \Omega_i \Omega_j.$$

Числа  $I^{ij} = \iiint_G \rho(M)(\mathbf{r}^2 \delta^{ij} - x^i x^j) dx$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , являются координатами в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  дважды контравариантного тензора. Этот тензор называется *тензором моментов инерции* или, коротко, *тензором инерции* тела. Координата  $I^{ii}$  тензора инерции представляет собой момент инерции тела относительно оси  $Ox^i$ . Выпишем, например, координату  $I^{11}$ :

$$I^{11} = \iiint_G \rho(M)(\mathbf{r}^2 - (x^1)^2) dx = \iiint_G \rho(M)((x^2)^2 + (x^3)^2) dx.$$

Так как  $I^{ij} = I^{ji}$ , то тензор инерции симметричен. Поэтому существует прямоугольная система координат  $O\tilde{x}^1\tilde{x}^2\tilde{x}^3$  такая, что в соответствующем ей ортонормированном базисе  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$  матрица тензора инерции имеет диагональный вид:

$$\tilde{I}^{ii} = I^i, \quad \tilde{I}^{ij} = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

Величины  $I^1, I^2, I^3$  называются *главными моментами инерции* тела, а направления осей  $O\tilde{x}^1, O\tilde{x}^2, O\tilde{x}^3$  — *главными осями инерции*. В этой системе координат выражение для кинетической энергии вращательного движения имеет наиболее простой вид:

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} I^i \cdot \Omega_i^2.$$

**Тензор деформаций.** Рассмотрим деформацию некоторого тела. Положение каждой точки  $M$  тела до деформации определяется

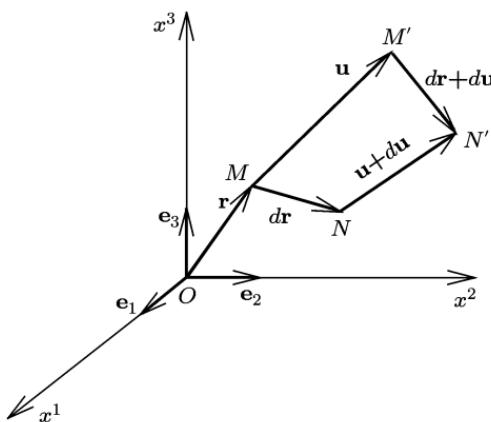


Рис. 5

в прямоугольной системе координат  $Ox^1 x^2 x^3$  радиус-вектором  $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r} = \{x^1, x^2, x^3\}$  (рис. 5). В результате деформации точка  $M$  сместится

ся на некоторый вектор  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ , зависящий от координат точки (т. е.  $u_i = u_i(x^1, x^2, x^3)$ ), и займет положение  $M'$ . Деформацию тела в окрестности точки  $M$  можно характеризовать изменением длин всевозможных отрезков  $MN$ , где точка  $N$  берется из малой окрестности точки  $M$ . Рассмотрим произвольную точку  $N$ , близкую к  $M$ . Пусть  $\overrightarrow{MN} = d\mathbf{r} = \{dx^1, dx^2, dx^3\}$  и пусть в результате деформации точка  $N$  переместится на вектор  $\mathbf{u} + d\mathbf{u} = \{u_1 + du_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3\}$  и займет положение  $N'$ . Тогда  $\overrightarrow{M'N'} = d\mathbf{r} + d\mathbf{u}$  (см. рис. 5). Изменение длины отрезка  $MN$  будем характеризовать величиной

$$D = \frac{1}{2} (\overrightarrow{M'N'}^2 - \overrightarrow{MN}^2) = \frac{1}{2} [(d\mathbf{r} + d\mathbf{u})^2 - (d\mathbf{r})^2] = (d\mathbf{u}, d\mathbf{r}) + \frac{1}{2} (d\mathbf{u})^2.$$

Выразим  $D$  через  $dx^1, dx^2, dx^3$ . Воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} du_i &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x^j} dx^j, \quad i = 1, 2, 3, \\ (d\mathbf{u})^2 &= \sum_{i=1}^3 (du_i)^2 = \sum_{i=1}^3 du_i du_i = \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x^j} dx^j \right) \left( \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x^k} dx^k \right) = \\ &= \sum_{j,k=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x^j} \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \right) dx^j dx^k, \\ (d\mathbf{u}, d\mathbf{r}) &= \sum_{k=1}^3 du_k dx^k = \sum_{k=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x^j} dx^j \right) dx^k = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x^j} dx^j dx^k. \end{aligned}$$

Меняя в последней сумме индексы  $j$  и  $k$  местами (от этого сумма не изменится), получаем  $(d\mathbf{u}, d\mathbf{r}) = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x^k} dx^j dx^k$ , и, следовательно, выражение для скалярного произведения  $(d\mathbf{u}, d\mathbf{r})$  можно записать в виде

$$(d\mathbf{u}, d\mathbf{r}) = \sum_{j,k=1}^3 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^j} \right) dx^j dx^k.$$

В итоге для  $D$  получается формула

$$D = \sum_{j,k=1}^3 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x^j} \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \right) dx^j dx^k = \sum_{j,k=1}^3 \gamma_{jk} dx^j dx^k, \quad (4)$$

причем  $\gamma_{jk} = \gamma_{kj}$ . Формула (4) показывает, что  $D$  является квадратичной формой от аргументов  $dx^1, dx^2, dx^3$  (производные, входящие

в  $\gamma_{jk}$ , вычисляются в точке  $M$ ). Отсюда следует, что коэффициенты квадратичной формы

$$\gamma_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x^j} \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \right)$$

представляют собой координаты дважды ковариантного тензора в ортонормированном базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , связанном с системой координат  $Ox^1x^2x^3$ . Этот тензор называется *тензором деформаций*. С его помощью по формуле (4) находится квадратичная форма  $D$ , характеризующая деформацию тела в окрестности точки  $M$ . Так как  $\gamma_{jk} = \gamma_{kj}$ , то тензор деформаций является симметричным тензором.

**Тензор напряжений.** Этот тензор вводится при исследовании внутренних сил, возникающих в упругом теле в результате его деформации. Рассмотрим произвольную точку  $M$  деформированного упругого тела. Через эту точку проведем плоскость, пересекающую тело, и рассмотрим в этой плоскости элементарную площадку  $S$ , содержащую точку  $M$  и имеющую площадь  $ds$ . Выберем одну из двух возможных сторон площадки  $S$  (такой выбор определяется заданием направления нормали  $\mathbf{n}$  к  $S$ ). Пусть на выбранную сторону площадки  $S$  действует упругая сила  $d\mathbf{P}$ . Отношение  $\mathbf{p}_n = \frac{d\mathbf{P}}{ds}$  называется *механическим напряжением* в точке  $M$  на элементарной площадке  $S$  с нормалью  $\mathbf{n}$ . Проводя различные плоскости через точку  $M$ , т. е. поворачивая площадку  $S$ , будем получать различные значения вектора  $\mathbf{p}_n$  в одной и той же точке  $M$ . Следовательно, напряженное состояние упругого тела в данной точке  $M$  не может быть описано одним вектором. Оказывается, чтобы описать напряженное состояние в точке  $M$ , достаточно знать механическое напряжение на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через точку  $M$ . Введем прямоугольную систему координат  $Mx^1x^2x^3$  с началом в точке  $M$  и координатными векторами  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Пусть  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  — механические напряжения в точке  $M$  на элементарных площадках  $S_1, S_2, S_3$ , нормали к которым имеют такие же направления, как векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Тогда механическое напряжение  $\mathbf{p}_n$  в точке  $M$  на элементарной площадке  $S$  с нормалью  $\mathbf{n} = \{\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3\}$  выражается формулой

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_1 \cos \alpha_1 + \mathbf{p}_2 \cos \alpha_2 + \mathbf{p}_3 \cos \alpha_3, \quad (5)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — углы, которые единичный вектор нормали  $\mathbf{n}$  составляет с векторами  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .

Разложим векторы  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  по базисным векторам  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= p_{11}\mathbf{e}_1 + p_{12}\mathbf{e}_2 + p_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{p}_2 &= p_{21}\mathbf{e}_1 + p_{22}\mathbf{e}_2 + p_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{p}_3 &= p_{31}\mathbf{e}_1 + p_{32}\mathbf{e}_2 + p_{33}\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Если числа  $p_{ij}$  для данной точки  $M$  известны, то формула (5) позволяет определить напряжение в точке  $M$  на любой элементарной площадке с заданным вектором нормали  $\mathbf{n}$ .

Вычислим проекцию механического напряжения  $\mathbf{p}_n$  на направление нормали  $\mathbf{n}$ . Используя формулы (5) и (6) и учитывая, что  $(\mathbf{e}_j, \mathbf{n}) = \cos \alpha_j$ , получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_n, \mathbf{n}) &= \left( \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i \cos \alpha_i, \mathbf{n} \right) = \left( \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 p_{ij} \mathbf{e}_j \right) \cos \alpha_i, \mathbf{n} \right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^3 p_{ij} \cos \alpha_i \cos \alpha_j. \end{aligned}$$

Можно показать, что  $p_{ij} = p_{ji}$ . Таким образом, проекция вектора  $\mathbf{p}_n$  на направление нормали  $\mathbf{n}$  является квадратичной формой от аргументов  $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3$ . Отсюда следует, что коэффициенты квадратичной формы — числа  $p_{ij}$  — являются координатами дважды ковариантного тензора в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Этот тензор называется *тензором напряжений*. Он полностью характеризует напряженное состояние тела в данной точке  $M$ . В физике обычно используются следующие обозначения для координат тензора напряжений:

$$p_{kk} = \sigma_k, \quad p_{ki} = \tau_{ki} \quad (i \neq k).$$

Координата  $\sigma_k$  тензора напряжений ( $k = 1, 2, 3$ ) представляет собой нормальную составляющую механического напряжения  $\mathbf{p}_k$  на элементарной площадке  $S_k$ , а координаты  $\tau_{ki}$  ( $i \neq k$ ) являются касательными составляющими вектора  $\mathbf{p}_k$ , т. е. лежат в плоскости  $S_k$ . Так как  $\tau_{ik} = \tau_{ki}$ , то тензор напряжений — симметричный тензор.

В различных разделах физики находят применение тензоры и более высокого ранга, чем в рассмотренных примерах.

### Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение ковариантного метрического тензора.
2. Что такое ковариантные и контравариантные координаты элемента евклидова пространства? Дайте их геометрическую интерпретацию.
3. Как связаны между собой ковариантные и контравариантные координаты элемента евклидова пространства в ортонормированном базисе?
4. Что такое контравариантный метрический тензор?
5. Как связаны между собой матрицы ковариантного и контравариантного метрических тензоров?
6. Какая физическая величина и каким образом выражается через тензор инерции? Каков физический смысл координат этого тензора с двумя одинаковыми индексами?
7. Какое физическое явление характеризует тензор деформаций? Какая величина и каким образом выражается через этот тензор?

8. Какое физическое явление характеризует тензор напряжений? Каков физический смысл координат этого тензора?

### Примеры решения задач

- 1.** Доказать, что матрица метрического тензора в любом базисе является невырожденной матрицей.

△ Пусть  $G$  — матрица метрического тензора, т. е. матрица симметричной билинейной формы  $(x, y)$ , в каком-то базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Покажем вначале, что если  $G$  — невырожденная матрица, то и в любом другом базисе матрица метрического тензора является невырожденной. При переходе от базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$  к другому базису с помощью матрицы перехода  $C$  матрица  $G$  билинейной формы переходит в матрицу  $C^T G C$ . Воспользуемся равенством

$$\det C^T G C = \det C^T \det G \det C = (\det C)^2 \det G.$$

Так как матрица  $C$  преобразования базисов невырожденная, то  $\det C \neq 0$ . Поэтому если матрица  $G$  невырожденная, т. е.  $\det G \neq 0$ , то и  $\det C^T G C \neq 0$ , т. е. матрица  $C^T G C$  невырожденная.

Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — ортонормированный базис. Тогда, как было показано ранее,  $g_{pq} = \delta_{pq}$ , и поэтому  $\det G = \det(g_{pq}) = 1$ . Отсюда следует, что матрица метрического тензора в любом базисе является невырожденной. ▲

- 2.** В линейном пространстве  $R_3$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$  задана матрица

$$G_e = (g_{pq}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

дважды ковариантного тензора  $[G]_2^0$ . Доказать, что этот тензор можно трактовать как метрический тензор пространства  $R_3$ .

△ Тензор  $[G]_2^0$  можно будет назвать метрическим тензором пространства  $R_3$ , если мы покажем, что скалярное произведение элементов  $x = x^p e_p$  и  $y = y^q e_q$  можно ввести по формуле

$$(x, y) = g_{pq} x^p y^q = x^1 y^1 + x^1 y^2 + x^2 y^1 + 2x^2 y^2 + 2x^2 y^3 + 2x^3 y^2 + 5x^3 y^3.$$

Чтобы это показать, нужно проверить выполнимость всех аксиом скалярного произведения. Тот факт, что первые три аксиомы имеют место, очевиден. Обратимся к последней аксиоме. С этой целью квадратичную форму

$$(x, x) = (x^1)^2 + 2x^1 x^2 + 2(x^2)^2 + 4x^2 x^3 + 5(x^3)^2$$

приведем методом Лагранжа к каноническому виду

$$(x, x) = (x^1 + x^2)^2 + (x^2 + 2x^3)^2 + (x^3)^2.$$

Отсюда следует, что  $(x, x) > 0$  для всех  $x$ , кроме случая, когда

$$\begin{cases} x^1 + x^2 = 0, \\ x^2 + 2x^2 = 0, \\ x^3 = 0. \end{cases}$$

Эта система уравнений имеет единственное решение  $x^1 = x^2 = x^3 = 0$ .

Таким образом,  $(x, x) \geq 0$ , причем  $(x, x) = 0$  только в том случае, когда  $x$  — нулевой элемент, т. е. четвертая аксиома имеет место.

Итак, формула  $(x, y) = g_{pq}x^p y^q$  задает скалярное произведение в пространстве  $R_3$ , и поэтому  $[G]_2^0$  — ковариантный метрический тензор в этом евклидовом пространстве. ▲

**3.** В евклидовом пространстве, рассмотренном в примере 2, найти матрицу контравариантного метрического тензора в базисе  $e_1, e_2, e_3$ .

△ По определению контравариантного метрического тензора его матрица  $G_1$  является обратной к матрице  $G_e$  ковариантного метрического тензора  $[G]_2^0$ . Вычисляя элементы обратной матрицы, находим

$$G_1 = G_e^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -5 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

**4.** В евклидовом пространстве, рассмотренном в примере 2, найти контравариантные координаты в базисе  $e_1, e_2, e_3$  элемента  $x$ , имеющего в том же базисе ковариантные координаты 3, 2,  $-3$ .

△ По формуле (3)  $x^i = g^{ip} \cdot x_p$ , где  $g^{ip}$  — элементы матрицы  $G_1$ , найденной в примере 3. Поэтому

$$\begin{aligned} x^1 &= 6 \cdot 3 + (-5) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 2, \\ x^2 &= (-5) \cdot 3 + 5 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) = 1, \\ x^3 &= 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = -1. \end{aligned}$$

Итак, контравариантные координаты элемента  $x$  в заданном базисе равны 2, 1,  $-1$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

**10.** В ортонормированном базисе  $e_1, e_2$  евклидова пространства элемент  $f_1$  имеет координаты 1 и 0, а элемент  $f_2$  — координаты  $\sqrt{3}/2$  и  $1/2$ :

- а) убедитесь в том, что элементы  $f_1, f_2$  образуют базис;
- б) найдите координаты метрического тензора  $[G]_2^0$  в базисе  $f_1, f_2$ ;
- в) найдите координаты контравариантного метрического тензора  $[G]_0^2$  в базисе  $f_1, f_2$ ;
- г) напишите выражение скалярного произведения  $(x, y)$  через координаты элементов  $x, y$  в базисе  $f_1, f_2$ .

11. Данна матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$  ковариантного метрического тензора в некотором базисе  $e_1, e_2, e_3$  трехмерного евклидова пространства:
- найдите ковариантные координаты элемента  $x$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$ , если известны его контравариантные координаты в том же базисе  $x^1 = -2, x^2 = 1, x^3 = -1$ ;
  - найдите контравариантные координаты элемента  $y$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$ , если даны его ковариантные координаты в том же базисе  $y_1 = 0, y_2 = -3, y_3 = 4$ .
12. Найдите двойную свертку произведения  $[G]_2^0 \cdot [G]_0^2$  метрических тензоров  $n$ -мерного евклидова пространства.
13. Трижды ковариантный тензор  $[A]_3^0$  имеет координаты  $a_{ijk}$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$   $n$ -мерного евклидова пространства, а контравариантный метрический тензор  $[G]_0^2$  имеет в том же базисе координаты  $g^{pq}$ . Определим координаты в том же базисе тензора  $[A]_1^2$  равенствами  $a_k^{pq} = g^{pl}g^{qh}a_{lkh}$ ,  $p, q, k = 1, 2, \dots, n$ . Выразите координаты тензора  $[A]_3^0$  через координаты тензора  $[A]_1^2$ .
14. Тензор, имеющий координаты  $a_j^i$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$   $n$ -мерного евклидова пространства, определяет линейный оператор  $\hat{A}$ . Найдите координаты тензора, определяющего сопряженный оператор  $\hat{A}^*$  в том же базисе.

# ГЛАВА VIII

## ГРУППЫ

### § 1. Определение группы. Примеры

#### Основные понятия и теоремы

##### 1. Понятие группы.

Определение. Множество  $G$  элементов любой природы называется *группой*, если на этом множестве задана операция (обычно ее называют умножением), ставящая в соответствие каждой упорядоченной паре элементов  $x, y$  из  $G$  однозначно определенный элемент  $z \in G$  (обозначение:  $z = xy$  или  $z = x \circ y$ ) так, что при этом выполнены следующие условия (аксиомы группы).

1°.  $\forall x, y, z$  из  $G$ :  $(xy)z = x(yz)$  (ассоциативность групповой операции).

2°. Существует элемент  $e \in G$  такой, что  $\forall x \in G$ :  $xe = ex = x$  (элемент  $e$  называется *единицей* группы).

3°.  $\forall x \in G$  существует *обратный* ему элемент  $x^{-1} \in G$  такой, что  $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ .

Определение. Группа  $G$  называется *коммутативной* или *абелевой*, если групповая операция коммутативна, т. е.  $\forall x, y$  из  $G$ :  $xy = yx$ .

Групповую операцию в коммутативной группе часто называют не умножением, а сложением (пишут  $z = x + y$ ); в этом случае единицу группы называют нулевым элементом и обозначают  $\theta$ , а элемент, обратный элементу  $x$ , называют *противоположным по отношению к* элементу  $x$  и обозначают  $-x$ .

В соответствии с названием групповой операции (умножение или сложение) будем называть группу группой по умножению (относительно операции умножения) или группой по сложению (относительно операции сложения).

Теорема 1. В группе существует единственная единица.

Теорема 2. Для каждого элемента группы существует единственный обратный элемент.

**2. Примеры групп.** 1) Если  $G$  — множество целых чисел, а групповой операцией является сложение целых чисел, то  $G$  — абелева группа по сложению. Нулевым элементом этой группы является число 0, а противоположным по отношению к элементу  $n$  является число  $-n$ .

Относительно операции умножения множество целых чисел не образует группу, так как не выполнено условие 3°: обратным по отношению к целому числу  $n$  является число  $1/n$ , но оно не является целым числом при  $n \neq 1$ .

Множество всех рациональных, множество всех вещественных, множество всех комплексных чисел также являются абелевыми группами по сложению.

2) Пусть  $k$  — фиксированное целое число. Если  $G$  — множество всех целых чисел, делящихся без остатка на число  $k$ , а групповая операция — сложение целых чисел, то  $G$  — абелева группа по сложению.

3) Пусть  $G$  — множество всех вещественных чисел, отличных от нуля, а групповая операция — умножение вещественных чисел. Тогда  $G$  — абелева группа по умножению. Единицей группы является число 1, а *обратным элементу  $x$*  является число  $1/x$ .

Если добавить к данному множеству число нуль, то получим множество всех вещественных чисел. Но оно не является группой относительно операции умножения, поскольку число нуль не имеет обратного.

Отметим, что множество всех вещественных чисел, отличных от нуля, не является группой относительно операции сложения, так как не выполнено условие 2° (отсутствует нулевой элемент).

4) Пусть  $G$  — множество, состоящее из одного числа 1, а групповая операция — умножение чисел. Тогда  $G$  — абелева группа по умножению.

**Замечание.** Группа, состоящая из конечного числа элементов, называется *конечной*, а число элементов в конечной группе называется ее *порядком*.

Согласно этой терминологии данная группа является группой порядка 1.

5) Пусть  $G$  — множество всех элементов линейного пространства  $R$ . В пространстве  $R$  определена операция сложения ее элементов, которая в силу аксиом линейного пространства является коммутативной и удовлетворяет условиям 1°–3° определения группы. Таким образом, множество  $G$  с указанной операцией сложения является абелевой группой по сложению.

### 3. Понятие подгруппы.

**Определение.** Подмножество  $G_1$  группы  $G$  называется *подгруппой* группы  $G$ , если оно удовлетворяет двум условиям:

- 1) если  $x \in G_1$ ,  $y \in G_1$ , то  $xy \in G_1$ ;
- 2) если  $x \in G_1$ , то  $x^{-1} \in G_1$

Очевидно, любая подгруппа группы  $G$  сама является группой (с той же групповой операцией), причем единицы группы и ее подгруппы совпадают.

## Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение группы.
2. Какая группа называется абелевой?
3. Что такое группа по умножению и группа по сложению?
4. Пусть  $G$  — множество комплексных чисел, отличных от нуля, а групповая операция — умножение комплексных чисел. \*) Образует ли множество  $G$  с указанной операцией группу? Если да, то является ли эта группа абелевой?
5. Приведите пример конечной группы. Что такое порядок конечной группы?
6. Пусть  $G$  — множество, состоящее из одного числа 0, а групповая операция — сложение чисел. Образует ли множество  $G$  с указанной операцией конечную группу? Если да, то каков ее порядок и является ли эта группа абелевой?
7. Пусть  $G$  — множество всех  $m \times n$ -матриц, элементами которых являются целые числа, а групповая операция — сложение матриц. Образует ли множество  $G$  с указанной операцией группу? Если да, то является ли эта группа абелевой?
8. Сформулируйте определение подгруппы.
9. Справедливо ли утверждение: подгруппа группы  $G$  — является группой? Ответ обоснуйте.

## Примеры решения задач

1. Пусть  $G$  — множество, состоящее из чисел 1 и  $-1$ , а групповая операция — умножение чисел. Образует ли множество  $G$  с указанной операцией группу? Если да, то каков порядок этой группы и является ли эта группа абелевой?

△ Прежде всего заметим, что в результате умножения двух чисел из данного множества  $G$  получается число, также принадлежащее этому множеству:

$$1 \times 1 = 1, \quad 1 \times (-1) = -1, \quad (-1) \times 1 = -1, \quad (-1) \times (-1) = 1,$$

т. е. операция умножения не выводит за пределы данного множества.

Условие 1° определения группы выполнено, так как умножение чисел обладает свойством ассоциативности. Далее, число 1 удовлетворяет, очевидно, условию 2°, а обратными к элементам 1 и  $-1$  являются сами эти элементы:  $1 \times 1 = 1$ ,  $(-1) \times (-1) = 1$ .

Итак, все условия 1°–3° определения группы выполнены, и, следовательно, данное множество  $G$  образует группу по умножению. Ее порядок равен числу элементов множества  $G$ , т. е. равен 2, а так как умножение чисел коммутативно, то эта группа абелева. ▲

\*) Для упрощения формулировки вопроса (задачи) мы часто уже в формулировке используем термин “групповая операция”, хотя по постановке задачи еще предстоит выяснить, удовлетворяет ли эта операция условиям 1°–3° определения группы.

**2.** Пусть  $G$  — множество всех невырожденных матриц  $n$ -го порядка с вещественными элементами, а групповой операцией является операция умножения матриц. Образует ли множество  $G$  с указанной операцией группу? Если да, то является ли она абелевой?

△ Отметим прежде всего, что произведение двух невырожденных матриц с вещественными элементами также является невырожденной матрицей с вещественными элементами, т. е. результат умножения двух таких матриц принадлежит множеству  $G$ . Умножение матриц обладает свойством ассоциативности. Поэтому условие 1° определения группы выполнено.

Единичная матрица  $I$   $n$ -го порядка невырождена и удовлетворяет условию 2° определения группы (для любой матрицы  $A$  из множества  $G$ :  $AI = IA = A$ ).

Наконец, для каждой невырожденной матрицы  $A$  с вещественными элементами существует обратная матрица  $A^{-1}$ , также невырожденная и с вещественными элементами.

Таким образом, множество  $G$  с указанной операцией является группой по умножению.

Умножение матриц не обладает свойством коммутативности, т. е. для произвольных матриц  $A$  и  $B$ , вообще говоря,  $AB \neq BA$ . Следовательно, группа  $G$  не является абелевой. ▲

**3.** Доказать, что множество матриц  $A(\varphi)$  вида

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $\varphi$  — произвольное вещественное число, образует подгруппу группы невырожденных матриц второго порядка (относительно операции умножения матриц).

△ Прежде всего заметим, что для любого значения  $\varphi$  матрица  $A(\varphi)$  невырожденная, так как  $\det A(\varphi) = 1 \neq 0$ .

Проверим теперь, выполнены ли условия 1) и 2) определения подгруппы. Для любых  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  имеем (убедитесь в этом сами, перемножив матрицы  $A(\varphi_1)$  и  $A(\varphi_2)$ )

$$A(\varphi_1)A(\varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix} = A(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Тем самым произведение двух матриц из данного множества является матрицей также из данного множества.

Обратной для матрицы  $A(\varphi)$  является матрица (проверьте это)

$$A^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} = A(-\varphi).$$

Итак,  $A^{-1}(\varphi) = A(-\varphi)$ , т. е. обратная матрица также принадлежит множеству матриц вида (1).

Таким образом, выполнены условия 1) и 2) определения подгруппы, и, следовательно, множество матриц вида (1) является подгруппой группы невырожденных матриц второго порядка. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

- Пусть  $G$  — множество всех комплексных чисел, по модулю равных 1, а групповая операция — умножение комплексных чисел. Докажите, что множество  $G$  с указанной операцией образует абелеву группу.
- Пусть  $G$  — множество, состоящее из четырех комплексных чисел:  $1, i, -1, -i$ , а групповая операция — умножение комплексных чисел. Докажите, что множество  $G$  с указанной операцией образует абелеву группу. Чему равен ее порядок?
- Образует ли группу множество положительных вещественных чисел с групповой операцией:
  - $x \circ y = x^y$ ;
  - $x \circ y = x^2y^2$ ?
- Образует ли группу множество всех корней  $n$ -й степени из единицы (как вещественных, так и комплексных) относительно операции умножения комплексных чисел?
- Образует ли группу множество всех матриц  $n$ -го порядка, элементами которых являются целые числа, а определитель равен:
  - 1;
  - 1 или  $-1$ ;
 относительно операции умножения матриц?
- Образует ли группу множество вещественных многочленов степени, не превосходящей  $n$ , относительно операции сложения многочленов?
- Докажите теорему: в группе существует единственная единица.
- Докажите теорему: для каждого элемента группы существует единственный обратный элемент.
- Докажите, что если для любого элемента  $x$  группы  $G$  выполнено условие  $x \circ x = e$ , то  $G$  — абелева группа.
- Докажите, что в любой группе равенство  $ax = b$  равносильно равенству  $x = a^{-1} \cdot b$ .
- Докажите, что для любых элементов  $x, y$  группы выполняется равенство  $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ .
- Докажите, что если  $x \circ y = x$ , то  $y = e$ , где  $e$  — единица группы.
- Докажите, что если  $G$  — конечная группа, то для любого  $x \in G$  существует такое натуральное число  $n$ , что  $x^n = e$ , где  $x^n$  — произведение  $n$  сомножителей, равных  $x$ ,  $e$  — единица группы.

- 14.** Докажите, что если  $G_1$  — непустое конечное подмножество группы  $G$ , такое, что  $\forall x, y \in G_1: x \circ y \in G_1$ , то  $G_1$  — подгруппа группы  $G$ .

## § 2. Группы преобразований

### Основные понятия

**1. Группа движений.** В элементарной геометрии рассматриваются преобразования плоскости (пространства), которые называются движениями (их называют также перемещениями или наложениями). *Движение* — это такое преобразование плоскости (пространства), при котором сохраняются расстояния между точками, т. е. для любых точек  $A$  и  $B$  плоскости (пространства) выполняется равенство

$$A'B' = AB,$$

где  $A'$  и  $B'$  — точки, в которые переходят точки  $A$  и  $B$  при данном преобразовании,  $AB$  — расстояние между точками  $A$  и  $B$ .

Примерами движений являются параллельный перенос плоскости (пространства) на данный вектор, центральная симметрия плоскости (пространства) относительно данной точки, осевая симметрия плоскости (пространства) относительно данной прямой, зеркальная симметрия пространства относительно данной плоскости, поворот плоскости на заданный угол вокруг данной точки.

Множество всех движений плоскости (пространства) образует группу. Групповой операцией является композиция двух движений, т. е. последовательное выполнение двух движений в заданном порядке. Ясно, что композиция двух движений является движением. Композиция движений обладает свойством ассоциативности. Единицей группы движений является тождественное преобразование, при котором все точки плоскости (пространства) переходят сами в себя. И наконец, обратное преобразование к данному движению также сохраняет расстояние между точками, т. е. является движением.

Важную роль играют различные подгруппы группы движений, например подгруппа поворотов плоскости вокруг данной точки (см. пример 1 на с. 217).

**2. Группа преобразований линейного пространства.** Каждый линейный невырожденный оператор, действующий в линейном пространстве, осуществляет взаимно однозначное отображение линейного пространства на себя.

Множество всех линейных невырожденных операторов, действующих в данном  $n$ -мерном линейном пространстве, образует группу относительно операции умножения операторов. Единицей группы является тождественный оператор, а обратным элементом для операто-

ра  $\widehat{A}$  является обратный оператор  $\widehat{A}^{-1}$ . Эта группа называется также *группой преобразований* данного линейного пространства и обозначается  $GL(n)$ .

Множество всех ортогональных операторов, действующих в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, образует подгруппу группы  $GL(n)$ . Она обозначается  $O(n)$  и называется *ортогональной группой* (см. пример 2 на с. 218).

### 3. Изоморфизм групп

**Определение.** Группы  $G$  и  $G'$  называются *изоморфными*, если между их элементами существует такое взаимно однозначное соответствие, при котором для любых элементов  $x, y$  из  $G$  и соответствующих им элементов  $x', y'$  из  $G'$  выполняется равенство

$$(x \circ y)' = x' \circ y', \quad (1)$$

где  $(x \circ y)'$  — элемент из  $G'$ , соответствующий элементу  $x \circ y$  из  $G$ .

Указанное соответствие между изоморфными группами  $G$  и  $G'$  называется *изоморфизмом*.

Группа преобразований данного  $n$ -мерного линейного пространства  $GL(n)$  изоморфна группе (по умножению) всех невырожденных квадратных матриц  $n$ -го порядка (см. пример 2 на с. 214), а группа  $O(n)$  ортогональных операторов изоморфна группе всех ортогональных матриц  $n$ -го порядка.

### Контрольные вопросы и задания

- Что называется движением плоскости (пространства) в элементарной геометрии?
- Приведите примеры движений.
- Является ли движением композиция любых двух движений?
- Какое преобразование является единицей группы движений?
- Образует ли множество всех параллельных переносов плоскости (пространства) подгруппу группы движений?
- Что такое группа преобразований данного линейного пространства?
- Что такое ортогональная группа? Укажите какую-нибудь подгруппу ортогональной группы  $O(2)$ .
- Дайте определение изоморфных групп.
- Приведите пример изоморфных групп.

### Примеры решения задач

#### 1. Доказать, что:

- всевозможные повороты плоскости вокруг данной точки образуютabelеву группу относительно операции композиции двух поворотов;

б) эта группа поворотов изоморфна группе, элементами которой являются матрицы вида

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (2)$$

а групповой операцией является умножение матриц.

△ а) При повороте плоскости на угол  $\varphi$  вокруг данной точки  $O$  сама точка  $O$  остается на месте, а произвольная точка  $M$  плоскости, отличная от  $O$ , переходит в точку  $M'$  такую, что  $OM' = OM$  и радиус  $OM$  окружности с центром  $O$  совмещается с радиусом  $OM'$  в результате поворота на угол  $\varphi$ . При этом поворот производится по часовой стрелке, если  $\varphi < 0$ , и против часовой стрелки, если  $\varphi > 0$ . При  $\varphi = 0$  все точки плоскости остаются на месте, т. е. поворот на угол  $\varphi = 0$  является тождественным преобразованием. Ясно, что композиция (т. е. последовательное выполнение) двух поворотов на углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  является поворотом на угол  $\varphi_1 + \varphi_2$ , причем независимо от того, в каком порядке выполняются повороты на углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , т. е. композиция поворотов обладает свойством коммутативности. Очевидно также, что эта операция ассоциативна и для поворота на угол  $\varphi$  обратным преобразованием является поворот на угол  $-\varphi$ .

Итак, всевозможные повороты плоскости вокруг данной точки образуют абелеву группу, которая является подгруппой группы движений плоскости.

б) Множество матриц  $A(\varphi)$  вида (2) образует группу относительно операции умножения матриц (см. пример 3 на с. 214).

Поставим в соответствие повороту плоскости на угол  $\varphi$  вокруг данной точки (обозначим этот поворот  $P_\varphi$ ) матрицу  $A(\varphi)$ . Тем самым между элементами  $P_\varphi$  группы поворотов и элементами  $A(\varphi)$  группы матриц вида (2) установлено взаимно однозначное соответствие.

Убедимся в том, что это соответствие является изоморфизмом, т. е. удовлетворяет условию (1).

В самом деле, композицией поворотов  $P_{\varphi_1}$  и  $P_{\varphi_2}$  является поворот  $P_{\varphi_1+\varphi_2}$ , которому соответствует матрица  $A(\varphi_1 + \varphi_2)$ . Но  $A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1)A(\varphi_2)$ , т. е. композиции двух поворотов соответствует матрица, являющаяся произведением матриц, соответствующих этим поворотам. Это и означает, что в данном случае выполнено условие (1). Итак, указанные группы изоморфны. ▲

**2.** Обозначим через  $SO(2)$  множество всех операторов из ортогональной группы  $O(2)$ , у каждого из которых определитель матрицы в ортонормированном базисе равен 1. Доказать, что:

а)  $SO(2)$  является подгруппой группы  $O(2)$ ;

б) группа  $SO(2)$  изоморфна группе матриц  $A(\varphi)$  вида (2).

△ а) Пусть  $\widehat{Q}_1$  и  $\widehat{Q}_2$  — операторы из множества  $SO(2)$ , т. е.  $\det Q_1 = 1$  и  $\det Q_2 = 1$ , где  $Q_1$  и  $Q_2$  — матрицы операторов  $\widehat{Q}_1$  и  $\widehat{Q}_2$  в ор-

тонормированном базисе. Матрицей оператора  $\widehat{Q}_1 \widehat{Q}_2$  в этом базисе является матрица  $Q_1 Q_2$ . Так как  $\det Q_1 Q_2 = \det Q_1 \cdot \det Q_2 = 1$ , то оператор  $\widehat{Q}_1 \widehat{Q}_2$  принадлежит множеству  $SO(2)$ . Матрицей оператора  $\widehat{Q}_1^{-1}$  в указанном базисе является матрица  $Q_1^{-1}$ , и так как  $\det Q_1^{-1} = 1/\det Q_1 = 1$ , то оператор  $\widehat{Q}_1^{-1}$  также принадлежит множеству  $SO(2)$ . Таким образом, для множества операторов  $SO(2)$  выполнены условия 1) и 2) определения подгруппы, и поэтому  $SO(2)$  является подгруппой ортогональной группы  $O(2)$ .

б) Зафиксируем какой-нибудь ортонормированный базис в двумерном евклидовом пространстве. В данном базисе каждому оператору  $\widehat{Q}$  из группы  $SO(2)$  соответствует матрица  $Q$  этого оператора, которая является ортогональной с определителем, равным 1. Пусть

$$Q = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}.$$

Согласно свойству ортогональной матрицы имеем

$$p_1^2 + q_1^2 = 1, \quad p_2^2 + q_2^2 = 1.$$

Поэтому существуют такие  $\varphi$  и  $\psi$ , что  $p_1 = \cos \varphi$ ,  $q_1 = \sin \varphi$ ,  $p_2 = \cos \psi$ ,  $q_2 = \sin \psi$ . Так как, кроме того,  $p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0$  и  $\det Q = p_1 q_2 - q_1 p_2 = 1$ , то  $\cos \varphi \cdot \cos \psi + \sin \varphi \cdot \sin \psi = 0$  и  $\sin \varphi \cdot \sin \psi - \sin \varphi \cdot \cos \psi = 1$ , т. е.  $\cos(\psi - \varphi) = 0$ ,  $\sin(\psi - \varphi) = 1$ . Отсюда получаем

$$\psi = \varphi + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

и, следовательно,

$$p_1 = \cos \varphi, \quad q_1 = \sin \varphi, \quad p_2 = -\sin \varphi, \quad q_2 = \cos \varphi.$$

Итак, матрица  $Q$  произвольного оператора  $\widehat{Q}$ , из множества  $SO(2)$  в данном базисе имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

т. е.  $Q = A(\varphi)$ , где  $A(\varphi)$  — матрица вида (2).

Очевидно, верно обратное: каждой матрице  $A(\varphi)$  вида (2) при фиксированном ортонормированном базисе соответствует ортогональный оператор из множества  $SO(2)$ , матрицей которого в этом базисе является  $A(\varphi)$ .

Тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между операторами из  $SO(2)$  и матрицами  $A(\varphi)$ . Поскольку матрицей произведения операторов  $\widehat{Q}_1$  и  $\widehat{Q}_2$  с матрицами  $A(\varphi_1)$  и  $A(\varphi_2)$  в данном базисе является произведение матриц  $A(\varphi_1)A(\varphi_2)$ , то установленное взаимно однозначное соответствие является изоморфизмом, а значит, группа  $SO(2)$  изоморфна группе матриц  $A(\varphi)$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

15. Докажите, что композиция движений плоскости (пространства) обладает свойством ассоциативности.
16. Докажите, что множество движений, состоящее из поворотов пространства вокруг оси  $Oz$  данной прямоугольной системы координат, зеркальной симметрии относительно плоскости  $Oxy$  и всевозможных композиций указанных движений, образует подгруппу группы движений пространства. Укажите группу квадратных матриц третьего порядка, изоморфных этой подгруппе движений.
17. Докажите, что множество движений, состоящее из зеркальных симметрий относительно координатных плоскостей данной прямоугольной системы координат и всевозможных композиций этих симметрий, образует конечную подгруппу группы движений пространства. Найдите порядок этой подгруппы и укажите изоморфную ей группу квадратных матриц третьего порядка.
18. Докажите, что множество унитарных операторов, действующих в  $n$ -мерном унитарном пространстве, образуют группу относительно операции умножения операторов (эта группа называется *унитарной* и обозначается  $U(n)$ ).
19. Докажите, что множество всех операторов из группы  $U(n)$  (см. задачу 18), у каждого из которых определитель матрицы в ортонормированном базисе равен 1 или  $-1$ , образует подгруппу группы  $U(n)$ . Образуют ли подгруппу те операторы из  $U(n)$ , у которых указанный определитель равен: а) 1; б)  $-1$ ?

### § 3. Группа преобразований Лоренца

#### Основные понятия

**1. Псевдоевклидово пространство.** Пусть в  $n$ -мерном линейном пространстве  $R$  задана невырожденная симметрична билинейная форма  $B(x, y)$ , у которой соответствующая квадратичная форма  $B(x, x)$  является знакопеременной. Такая билинейная форма не удовлетворяет четвертой аксиоме скалярного произведения, согласно которой должно выполняться неравенство  $B(x, x) > 0$  при  $x \neq 0$ . Откажемся от этой аксиомы и введем скалярное произведение в пространстве  $R$  с помощью данной билинейной формы:

$$(x, y) = B(x, y). \quad (1)$$

Определение. Линейное пространство  $R$  со скалярным произведением (1) называется *псевдоевклидовым пространством*.

Если квадратичная форма  $B(x, x)$  имеет  $p$  положительных и  $q$  отрицательных канонических коэффициентов ( $p + q = n$ ), то псевдоевклидово пространство обозначается  $\mathcal{E}_{(p,q)}^n$ .

**2. Пространство Минковского. Преобразование Лоренца.** Псевдоевклидово пространство  $\mathcal{E}_{(1,3)}^4$  называется *пространством Минковского*. Оно играет важную роль в физике, поскольку является пространством событий в специальной теории относительности (СТО). Координаты элементов (точек) этого пространства обозначают обычно через  $x^0, x^1, x^2, x^3$ . В СТО координата  $x^0$  считается временной, а координаты  $x^1, x^2, x^3$  — пространственными. Временную координату  $x^0$  полагают равной  $ct$ , где  $t$  — время,  $c$  — скорость света. При этом все четыре координаты измеряются в одинаковых единицах.

Среди всевозможных систем координат особую роль играют такие системы (они называются *галилеевыми*), в которых скалярное произведение (1) имеет вид

$$(x, y) = x^0 y^0 - \sum_{i=1}^3 x^i y^i. \quad (2)$$

Величину  $(x, x) = (x^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (x^i)^2$  называют квадратом *пространственно-временного интервала* (или просто *интервала*) и обозначают  $S^2(x)$ .

Введем матрицу

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

которая является матрицей билинейной формы (2) в галилеевой системе координат. Отметим, что элементы этой матрицы являются координатами дважды ковариантного тензора, который называется *метрическим тензором* пространства  $\mathcal{E}_{(1,3)}^4$  (см. § 2 гл. VII).

С помощью матрицы  $J$  квадрат интервала в галилеевой системе координат можно записать в виде

$$S^2(x) = X^T J X, \quad (3)$$

где  $X$  — столбец, элементами которого являются координаты  $x^0, x^1, x^2, x^3$  точки  $x$ .

Перейдем к новой галилеевой системе координат. Пусть при этом

$$X = B \tilde{X},$$

где  $\tilde{X}$  — столбец, составленный из новых координат  $\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$  точки  $x$ ,  $B = (b_j^i)$  — матрица преобразования координат. Будем называть данное преобразование координат преобразованием с матрицей  $B$ .

Квадрат интервала в новых координатах имеет вид

$$S^2(x) = \tilde{X}^T (B^T J B) \tilde{X},$$

а так как новая система координат по условию является галилеевой, то должно выполняться равенство вида (3), т. е.

$$S^2(x) = \tilde{X}^T J \tilde{X},$$

откуда следует, что

$$B^T J B = J. \quad (4)$$

**Определение.** Преобразование координат с матрицей  $B$ , удовлетворяющей условию (4), называется *преобразованием Лоренца* пространства Минковского.

Множество всех преобразований Лоренца образует группу относительно композиции (т. е. последовательного выполнения) преобразований. Единицей группы является тождественное преобразование с единичной матрицей, а обратным для преобразования с матрицей  $B$  является преобразование с матрицей  $B^{-1}$ .

Важную роль в специальной теории относительности играет подгруппа преобразований Лоренца, при которых координаты  $x^2$  и  $x^3$  не изменяются ( $\tilde{x}^2 = x^2$ ,  $\tilde{x}^3 = x^3$ ), а координаты  $\tilde{x}^0$  и  $\tilde{x}^1$  выражаются через  $x^0$  и  $x^1$  формулами

$$\tilde{x}^0 = \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \tilde{x}^1 = \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (5)$$

где  $\beta$  — произвольное число из интервала  $(-1, 1)$ .

Полагая в формулах (5)  $x^0 = ct$ ,  $\tilde{x}^0 = \tilde{ct}$ ,  $\beta = v/c$ , получим

$$\tilde{t} = \frac{t - \frac{v}{c^2} x^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \tilde{x}^1 = \frac{x^1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6)$$

Соотношения (6) представляют собой знаменитые формулы Лоренца в том виде, как их обычно записывают в физике. При этом величина  $v$  имеет смысл скорости, с которой новая система координат движется относительно старой в направлении оси  $x^1$ .

### Контрольные вопросы и задания

1. Какое линейное пространство называется псевдоевклидовым?
2. Что такое пространство Минковского?
3. Напишите выражение для скалярного произведения в галилеевой системе координат пространства Минковского.
4. Напишите выражение для пространственно-временного интервала.
5. Какое преобразование называется преобразованием Лоренца пространства Минковского?

6. Напишите формулы преобразования Лоренца, при которых две пространственные координаты не изменяются, а изменяются только одна пространственная и временная координаты.

### Примеры решения задач

**1.** Доказать, что преобразования Лоренца (т. е. преобразования, удовлетворяющие условию (4)) образуют группу относительно операции композиции преобразований.

△ Рассмотрим два преобразования Лоренца с матрицами  $B_1$  и  $B_2$ . Согласно определению (см. равенство (4)) имеем

$$B_i^T J B_i = J, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Композицией этих двух преобразований ( $X = B_1 \tilde{X}$  и  $\tilde{X} = B_2 \bar{X}$ ) является преобразование  $X = B_1 B_2 \bar{X}$  с матрицей  $B = B_1 B_2$ . Убедимся в том, что матрица  $B$  удовлетворяет условию (4). В самом деле, используя формулу  $(B_1 B_2)^T = B_2^T B_1^T$ , ассоциативность умножения матриц и равенства (7), получаем

$$\begin{aligned} B^T J B &= (B_1 B_2)^T J (B_1 B_2) = (B_2^T B_1^T) J (B_1 B_2) = \\ &= B_2^T (B_1^T J B_1) B_2 = B_2^T J B_2 = J. \end{aligned}$$

Итак,  $B^T J B = J$ , т. е. матрица  $B$  удовлетворяет условию (4), и, следовательно, композиция двух преобразований Лоренца является преобразованием Лоренца. В силу ассоциативности умножения матриц композиция преобразований Лоренца также обладает свойством ассоциативности. Далее, единичная матрица (матрица тождественного преобразования), очевидно, удовлетворяет условию (4), т. е. тождественное преобразование является преобразованием Лоренца, а так как композиция любого данного преобразования и тождественного есть данное преобразование, то тождественное преобразование удовлетворяет требованию, предъявляемому к единице группы.

Наконец, убедимся в том, что обратное преобразование по отношению к преобразованию Лоренца с матрицей  $B$  также является преобразованием Лоренца. Для этого нужно проверить, что матрица  $B^{-1}$  обратного преобразования удовлетворяет условию (4), т. е.

$$(B^{-1})^T J B^{-1} = J. \quad (8)$$

Для матрицы  $B$  равенство (4) выполнено. Умножая это равенство на матрицу  $(B^T)^{-1}$  слева и на матрицу  $B^{-1}$  справа, получаем

$$(B^T)^{-1} B^T J B B^{-1} = (B^T)^{-1} J B^{-1}. \quad (9)$$

Но  $(B^T)^{-1}B^T = I$ ,  $BB^{-1} = I$ ,  $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$ , и поэтому соотношение (9) принимает вид

$$J = (B^{-1})^TJB^{-1},$$

т. е. имеет место равенство (8).

Таким образом, для композиции преобразований Лоренца выполнены все аксиомы группы. Тем самым доказано, что преобразования Лоренца образуют группу относительно операции композиции преобразований. ▲

**2.** Доказать, что преобразования координат, при которых координаты  $x^2$  и  $x^3$  не изменяются ( $x^2 = \tilde{x}^2$ ,  $x^3 = \tilde{x}^3$ ), а координаты  $x^0$  и  $x^1$  преобразуются по формулам (5), где  $\beta$  — произвольное число из интервала  $(-1, 1)$ , образуют группу.

△ Данное преобразование координат можно записать в виде

$$\tilde{X} = B(\beta)X, \quad (10)$$

$$\text{где } X = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x}^0 \\ \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \tilde{x}^3 \end{pmatrix},$$

$$B(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & -\beta & 0 & 0 \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Композицией двух преобразований  $\tilde{X} = B(\beta_1)X$  и  $\tilde{\tilde{X}} = B(\beta_2)\tilde{X}$  является преобразование  $\tilde{\tilde{X}} = B(\beta_2)B(\beta_1)X$ . Проделав соответствующие вычисления, приходим к равенству

$$B(\beta_2)B(\beta_1) = B(\beta),$$

где

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}. \quad (12)$$

Нетрудно доказать, что из неравенств  $-1 < \beta_1 < 1$  и  $-1 < \beta_2 < 1$  следует, что  $-1 < \beta < 1$ . Таким образом, композицией двух преобразований вида (10) является преобразование вида (10).

Ассоциативность композиции преобразований вида (10) следует из ассоциативности умножения матриц. При  $\beta = 0$  матрица (11) является единичной матрицей, соответствующей тождественному преобразованию, которое играет роль единицы группы. Наконец, вычислив

обратную матрицу для матрицы  $B(\beta)$ , получим

$$B^{-1}(\beta) = B(-\beta),$$

и поэтому обратное к (10) преобразование координат имеет вид

$$X = B(-\beta)\tilde{X},$$

т. е. также является преобразованием вида (10).

Таким образом, множество преобразований вида (10), где  $-1 < \beta < 1$ , образует группу. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

20. Матрица  $B(\beta)$  задана формулой (11). Докажите, что:
  - а)  $B(\beta_1)B(\beta_2) = B(\beta)$ , где  $\beta$  определено формулой (12);
  - б) если  $\beta_1 \in (-1, 1)$ ,  $\beta_2 \in (-1, 1)$ , то  $\beta \in (-1, 1)$ .
21. Докажите, что композицией двух преобразований Лоренца вида (6) с параметрами  $v_1$  и  $v_2$  является преобразование Лоренца вида (6) с параметром  $v$ , связанным с  $v_1$  и  $v_2$  формулой
 
$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$
 (формула сложения скоростей в специальной теории относительности).
22. Докажите, что обратной для матрицы  $B(\beta)$ , определенной формулой (11), является матрица  $B(-\beta)$ .

## ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

### Глава I

1. а)  $\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 1 & 2 \\ -11 & 8 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \\ 1 & -16 \end{pmatrix}$ ; в)  $x = y = 0$ .
3. а)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; в)  $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -1 & 11 \\ -14 & 0 \end{pmatrix}$ .
5. а)  $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A^T B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  
 $B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;
- б)  $AB = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $BA = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $A^T B^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ ,  
 $B^T A^T = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ ;
- в)  $AB = BA = A^T B^T = B^T A^T = (a_{ij} b_{ij} \delta_{ij})_{n \times n}$ ;
- г)  $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $BA = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ ,  $A^T B^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ -5 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ ,  
 $B^T A^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ;
- д)  $AB = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $BA = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  
 $A^T B^T = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & -5 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B^T A^T = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
8. а)  $\begin{pmatrix} 16 & -32 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$ ;
- б)  $\begin{pmatrix} a & b \\ 2-2a & 1-2b \end{pmatrix}$ , где  $a$  и  $b$  — произвольные числа;

в)  $X$  не существует;

г)  $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ; д)  $\begin{pmatrix} 24 & -13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$ ; е)  $\begin{pmatrix} 0 & 1/6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

9. а)  $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 0 & 1/8 \\ 1/4 & 1/32 \end{pmatrix}$ ; в)  $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ ;

г)  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; д)  $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ ; е)  $(a_{ii}^{-1} \delta_{ij})_{n \times n}$ .

12. а) 0; б)  $4ab$ ; в) 40; г)  $3abc - a^3 - b^3 - c^3$ ;

д)  $abc + x(ab + bc + ca)$ ; е) -20; ж)  $x^2y^2$ .

13. ★ а), б) Воспользоваться тем, что определитель имеет две одинаковые строки, если  $a = b$  или  $b = c$  или  $c = a$ ;

в) воспользоваться тем, что третий столбец равен разности второго и первого столбцов.

14. а)  $x = -10$  и  $x = 2$ ; б)  $x = 2$ .

15. а)  $-6 < x < -4$ ; б)  $x < 0$  и  $x > 2$ .

16.  $10x^4 - 5x^3$ .

17. а)  $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ ; в)  $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1,5 \\ 2 & -5 & -1,5 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ .

18.  $\begin{pmatrix} E_k & -B \\ \theta & E_e \end{pmatrix}$ .

19. а)  $\begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ ; в)  $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ; г)  $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$ .

20. г)★ Использовать метод математической индукции.

21. а) Поменяются местами  $k$ -й и  $l$ -й столбцы;

б)  $k$ -й столбец умножится на число  $1/x$ ;

в) из  $l$ -го столбца вычитается  $k$ -й столбец, умноженный на число  $x$ .

22. а)  $3^{n+1} - 2^{n+1}$ . ★ Сначала с помощью разложения данного определителя (обозначим его  $D_n$ ) по элементам первой строки получить рекуррентную формулу  $D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$ . Затем воспользоваться тем же приемом, что и при вычислении определителя в примере 3 на с. 17.

б)  $(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})$ . ★ Воспользоваться тем, что определитель имеет два одинаковых столбца, если для каких-нибудь неравных индексов  $i$  и  $j$  выполняется равенство  $x_i = x_j$ .

## Г л а в а II

4. е) Не выполняется аксиома  $6^0$ :  $\alpha(\beta x) \neq (\alpha\beta)x$ , например, если  $x = 1$ ,  $\alpha = 1/5$ ,  $\beta = 5$ .

7. а) да; б) да; в) да, если  $a = 0$ ; нет, если  $a \neq 0$ ; г) да; д) да, если  $a = 0$ ; нет, если  $a \neq 0$ ; е) да, если  $\mathbf{a} = \theta$ ; нет, если  $\mathbf{a} \neq \theta$ ; ж) да; з) да.

8. а) Множество векторов, параллельных плоскости с нормальным вектором  $\mathbf{x}_0$ ;

б) множество векторов, коллинеарных вектору  $\mathbf{x}_0$ .

- 11.** а) Множество векторов, коллинеарных данному вектору;  
 б) множество векторов, коллинеарных данным векторам;  
 в) множество векторов, параллельных плоскости, которой параллельны данные векторы;

г) множество векторов, параллельных плоскости данных векторов, если среди них есть неколлинеарные векторы, и множество векторов, коллинеарных данным векторам, если они коллинеарные;

д) множество всех векторов.

**12.** ★ Сначала доказать, что столбцы матрицы  $AB$  являются линейными комбинациями столбцов матрицы  $A$ .

**19.** ★ Воспользоваться тем, что  $x$  и  $y$  линейно зависимы, если существует число  $\alpha$  такое, что  $y = x^\alpha$ , либо  $x = y^\alpha$ .

**21.** Размерность линейного пространства равна:

а)  $m \cdot n$ ; б)  $\frac{n^2 + n}{2}$ ; в)  $n$ ; г)  $n - 1$ ; д)  $n + 1$ ; е)  $n$ .

**24.** ★ Воспользоваться теоремой о базисном миноре.

**25.** ★ Воспользоваться тем, что ранг матрицы равен размерности линейной оболочки ее столбцов.

**27.** ★ Сначала доказать, что однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда столбцы матрицы ее коэффициентов линейно зависимы. Затем воспользоваться утверждением из упр. 24.

**28.** ★ Воспользоваться тем, что определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда ранг матрицы меньше числа столбцов. Затем воспользоваться утверждением из упр. 24.

**29.** ★ Воспользоваться утверждениями из упр. 27, 24, 28.

**30.** ★ Пусть  $A_1, \dots, A_r$  — базисные столбцы матрицы  $A$ . Представить каждый из остальных столбцов матрицы  $A$  в виде линейной комбинации базисных столбцов:  $A_l = c_{1l}A_1 + \dots + c_{rl}A_r$  ( $l = r + 1, \dots$ ). Затем представить матрицу  $A$  в виде суммы  $A = \sum_{i=1}^r B_i$ , где матрица  $B_i$  получается из

матрицы  $A$ , если положить  $A_j = \Theta$  при  $j \neq i$  ( $\Theta$  — нулевой столбец).

31. а) да; б) нет; в) нет; г) нет; д) да.

32. а) 3; б) 3; в) 4; г)  $n - 1$ ; д) 2.

34. Ранг матрицы равен: а) 2; б) 2; в) 1; г) 2; д) 2; е) 3; ж) 2; з) 3; и) 3; к) 4; л) 6.

**35.** Ответы неоднозначные. Приводим один из вариантов ответа:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**38.** ★ Если  $C = A \cdot B$  и  $\det B \neq 0$ , то  $A = C \cdot B^{-1}$ . Далее воспользоваться утверждением из упр. 36 и 37.

39. Да.

40. Размерность линейной оболочки равна: а) 2; б) 2; в) 2. Базис определяется неоднозначно, например: а)  $x_1, x_2$ ; б)  $x_1, x_2$ ; в)  $x_1, x_2$ .

**41.** Ответы неоднозначные. Приводим один из вариантов столбцов координат базисных элементов:

а)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;

в)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**42.** Размерность линейного пространства равна:

- а)  $n - 1$ ; б) 6; в) 3; г) 4; д)  $n$ ; е) 4; ж) 2.

Базис определяется неоднозначно. В качестве базиса можно взять:

а)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;

б)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;

в)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;

г)  $x - 2, x^2 - 4, x^3 - 8, x^4 - 16$ ;

д)  $x, x^2 - 1, x^3, x^4 - 1$ ;

е)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;

ж)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**43.** Базис:  $p_1, p_3, p_4$ .

**45.** а) Поменяются местами две строки;

б) поменяются местами два столбца;

в) новая матрица получается из старой в результате симметрии относительно своего центра.

**46.** Координаты элемента  $x$  равны: а) 1, 4, -3; б) 1, 2, 3; в) 0, 8, -5.

**47.** 0,25; 0,25; 0,5; 0,5.

48. а)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 2 & 0,5 & 1 \\ 1 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$ ;

в)  $F_{1f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_{1g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, G_{3f} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, G_{3g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;

г)  $Y_g = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 6,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ .

49. Матрица  $\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 & \dots & (-a)^n \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 & \dots & n(-a)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$  с размера-

ми  $(n+1) \times (n+1)$ . В  $(k+1)$ -м столбце матрицы стоят числа  $(-a)^k$ ,  $c_k^{k-1} \cdot (-a)^{k-1}$ , ...,  $c_k^1(-a)$ , 1, 0, 0, ..., 0, где  $c_k^l = \frac{k(k-1)\dots(k-l+1)}{l!}$ .

50.  $80 + 107(x-3) + 54(x-3)^2 + 12(x-3)^3 + (x-3)^4$ .

51. Координаты вектора  $\mathbf{x}$  в базисе  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$  равны: 11, 5; 11, 5; -9. Координаты вектора  $\mathbf{x}$  в базисе  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$  равны: -11, -1, 6. Матрица перехода от базиса  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$  к базису  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ :  $\begin{pmatrix} 0 & 3,5 & 2,5 \\ 1 & 4,5 & 4,5 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ , матрица обратного

перехода  $\begin{pmatrix} -9 & 1 & -9 \\ -4 & 0 & -5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ .

52.  $f = 3f_1 - 4f_2 + 5f_3 - 2f_4$ .

53. а)  $\begin{pmatrix} -7/9 & -4/9 & -4/9 \\ -4/9 & -1/9 & -8/9 \\ 4/9 & -8/9 & -1/9 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ ;

в)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  или  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  в зависимости от направления пово- рота.

55. ★ Выбрать базисы  $e_1, \dots, e_n$  и  $e'_1, \dots, e'_n$  в пространствах  $R$  и  $R'$  и далее элементу  $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$  пространства  $R$  поставить в соответствие элемент  $x' = x_1e'_1 + \dots + x_ne'_n$  пространства  $R'$ . Для доказательства обратного утверждения воспользоваться тем, что при изоморфизме линейно независимым элементам пространства  $R$  соответствуют линейно независимые элементы пространства  $R'$ .

56. ★ Воспользоваться тем, что если  $R \sim R'$ , то линейно независимым элементам пространства  $R$  соответствуют линейно независимые элементы пространства  $R'$ .

57. а) 3; б) 2; в) 4; г) 5; д) 6; е) 7.

### Глава III

1. а) система совместна; б) система несовместна; в) система несовместна.

2. а) 1; б) 5; в) 10; г)  $c$  — любое число, не равное 7.

3. а)  $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; в)  $\begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; г)  $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

4. ФСР определяется неоднозначно. Приводим один из возможных вариантов ответа.

- а) ФСР:  $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; общее решение системы:  $X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3$ , где  $c_1, c_2, c_3$  — произвольные числа;
- б) ФСР:  $X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; общее решение системы:  $X = cX_1$ , где  $c$  — произвольное число;
- в) ФСР:  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; общее решение системы:  $X = cX_1$ , где  $c$  — произвольное число;
- г) ФСР:  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; общее решение системы:  $X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3$ , где  $c_1, c_2, c_3$  — произвольные числа;
- д) ФСР:  $X_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; общее решение системы:  $X = c_1X_1 + c_2X_2$ , где  $c_1, c_2$  — произвольные числа;
- е) ФСР:  $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ; общее решение системы:  $X = c_1X_1 + c_2X_2$ , где  $c_1, c_2$  — произвольные числа;
- ж) ФСР:  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; общее решение системы:  $X = c_1X_1 + c_2X_2$ , где  $c_1, c_2$  — произвольные числа.

**7.**  $x_1, x_2; x_1, x_4; x_2, x_3; x_2, x_5; x_3, x_4; x_4, x_5$ .

**8.**  $n+1-k$ .

**9.** Например,  $2x - 3x^2 + x^3, 6x - 7x^2 + x^4$ .

**10.** Например:

а)  $\begin{cases} 10x_1 + 12x_3 - x_4 - 16x_5 = 0, \\ 10x_2 + 62x_3 - x_4 - 86x_5 = 0; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} 10x_1 + 12x_3 - x_4 - 16x_5 = 0, \\ 10x_2 + 62x_3 - x_4 - 86x_5 = 0, \\ 10x_1 + 10x_2 + 74x_3 - 2x_4 - 102x_5 = 0 \end{cases}$  (последнее уравнение получено в результате сложения уравнений системы в п. а));

в)  $\begin{cases} 10x_1 + 12x_3 - x_4 - 16x_5 = 0, \\ 10x_2 + 62x_3 - x_4 - 86x_5 = 0, \\ 10x_1 + 10x_2 + 74x_3 - 2x_4 - 102x_5 = 0, \\ 10x_1 - 10x_2 - 50x_3 + 70x_5 = 0 \end{cases}$  (последнее уравнение — разность уравнений системы из п. а)).

**11.** Нет.

**12.** а)  $x_1 = 1 - c_1 - c_2 - c_3$ ,  $x_2 = c_1$ ,  $x_3 = c_2$ ,  $x_4 = c_3$ , где  $c_1, c_2, c_3$  — произвольные числа;

б)  $x_1 = 1 + 4c$ ,  $x_2 = 1 - 13c$ ,  $x_3 = 7c$ ,  $x_4 = 0$ , где  $c$  — произвольное число;

в)  $x_1 = c$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}(a+b) - c$ ,  $x_3 = \frac{1}{2}(a-b)$ , где  $c$  — произвольное число;

г)  $x_1 = c_1$ ,  $x_2 = c_2$ ,  $x_3 = c_3$ ,  $x_4 = 10$ , где  $c_1, c_2, c_3$  — произвольные числа;

д)  $x_1 = \frac{23}{5} - 8c_1 - 4c_2$ ,  $x_2 = -\frac{6}{5} + 11c_1 - 2c_2$ ,  $x_3 = -\frac{23}{5} - 2c_1 + 4c_2$ ,  $x_4 = 5c_1$ ,  $x_5 = c_2$ , где  $c_1, c_2$  — произвольные числа;

е) система уравнений несовместна;

ж)  $x_1 = c_1$ ,  $x_2 = 1 + c_1 - c_2$ ,  $x_3 = c_1$ ,  $x_4 = 1 - c_1 + c_2$ ,  $x_5 = c_1$ ,  $x_6 = c_2$ , где  $c_1, c_2$  — произвольные числа;

з)  $x_1 = \frac{5}{3} - 7c_1 + 5c_2$ ,  $x_2 = 3c_1$ ,  $x_3 = 3c_2$ ,  $x_4 = -1$ , где  $c_1, c_2$  — произвольные числа;

и)  $x_1 = -2c_1 - 2c_2$ ,  $x_2 = 1 - c_1$ ,  $x_3 = c_1$ ,  $x_4 = c_2$ ,  $x_5 = 0$ , где  $c_1, c_2$  — произвольные числа.

**14.** а)  $x_1 = -1 + c_1 + 2c_2$ ,  $x_2 = -3 + c_1 + 2c_2$ ,  $x_3 = c_1$ ,  $x_4 = c_2$ , где  $c_1, c_2$  — произвольные числа;

б)  $x_1 = 6 - c$ ,  $x_2 = -5 + c$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_4 = -1 - c$ ,  $x_5 = c$ , где  $c$  — произвольное число.

**15.** а) При  $c \neq 5$  система несовместна; при  $c = 5$  система совместна и ее общее решение можно записать в виде  $x_1 = -4 - 6a$ ,  $x_2 = \frac{11}{2} + 7a$ ,  $x_3 = 2a$ , где  $a$  — произвольное число;

б) при  $c = -2$  система несовместна; при  $c \neq -2$  и  $c \neq 1$  система имеет единственное решение  $x_1 = x_2 = x_3 = (2 + c)^{-1}$ ; при  $c = 1$  система совместна и ее общее решение можно записать в виде  $x_1 = 1 - c_1 - c_2$ ,  $x_2 = c_1$ ,  $x_3 = c_2$ , где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные числа;

в) при  $c = 0$  система несовместна; при  $c \neq 0$  и  $c \neq 1$  система имеет единственное решение  $x_1 = \frac{1}{c}$ ,  $x_2 = \frac{1}{c} - 2$ ,  $x_3 = -\frac{1}{c}$ ; при  $c = 1$  система совместна и ее общее решение можно записать в виде  $x_1 = \frac{1}{3} - 2a$ ,  $x_2 = -\frac{2}{3} + a$ ,  $x_3 = 3a$ , где  $a$  — произвольное число;

г) при  $c = 2$  система несовместна; при  $c \neq 2$  система совместна и ее общее решение можно записать в виде  $x_1 = \frac{1}{2}(2 - c)a + \frac{3}{2(c - 2)}$ ,  $x_2 = 2a + \frac{3}{c - 2}$ ,  $x_3 = -\frac{2 + c}{2}a + \frac{4c + 7}{2(2 - c)}$ ,  $x_4 = a$ , где  $a$  — произвольное число.

**17.** Например,  $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

**18.** Например,  $1 + x - 2x^2$ ,  $1 + 3x - 5x^2 + x^3$ ,  $1 + 15x - 17x^2 + x^5$ .

## Г л а в а IV

1. Нет.

2. а) 1°) Нет; 2°) да; 3°) да;

б) в случае 2°:  $(x, y) = -2$ ,  $\|x\| = \sqrt{5}$ ,  $\|y\| = \sqrt{2}$ ,  $\varphi = \arccos(-2/\sqrt{10})$ ;  
в случае 3°:  $(x, y) = 0$ ,  $\|x\| = \sqrt{2}$ ,  $\|y\| = 1$ ,  $\varphi = 90^\circ$ .

3. В случае 2°:  $(f, g) = -9$ ,  $\|f\| = \sqrt{3}$ ,  $\|g\| = 3\sqrt{5}$ ,  $\varphi = \arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{15}}\right)$ ;

в случае 3°:  $(f, g) = -12$ ,  $\|f\| = \sqrt{3}$ ,  $\|g\| = 3\sqrt{6}$ ,  $\varphi = \arccos\left(-\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$ .

5. 9.

6. ★ Воспользуйтесь тем, что если  $|(x, y)| = \|x\| \cdot \|y\|$ , то дискриминант квадратного относительно  $\lambda$  трехчлена  $(\lambda x - y, \lambda x - y) = \lambda^2 \|x\|^2 - 2\lambda(x, y) + \|y\|^2$  равен нулю и, следовательно, квадратный трехчлен имеет вещественный корень.

8. Да, если  $\alpha = 0$ ; нет, если  $\alpha \neq 0$ .

10. а) 1° нет; 2° да; 3° нет; б)  $(A, B) = 2 + 8i$ ,  $\|A\| = \sqrt{15}$ ,  $\|B\| = \sqrt{7}$ .

12.  $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$ .

15. ★ Используйте результат примера 2 на с. 90.

16. а)  $e_1 - 2e_2 + 2e_3$ ,  $2e_1 + 2e_2 + e_3$ ,  $6e_1 - 3e_2 - 6e_3$ ;

б)  $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ ,  $2e_1 + 2e_2 - 2e_3 - 2e_4$ ,  $-e_1 + e_2 - e_3 + e_4$ .

17. Ответы неоднозначны. Например:

а) 2°)  $c_1(e_1 + e_2 + e_3) + c_2(-e_1 + e_2 + e_4)$ ; 3°)  $e_1 + e_2 + e_3$ ,  $-e_1 + e_2 + e_4$ ;

б) 2°)  $c_1(2e_1 + 3e_2 + e_3) + c_2(-e_1 - 4e_2 + e_4)$ ; 3°)  $2e_1 + 3e_2 + e_3$ ,  $e_1 - e_2 + e_3 + e_4$ , где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные числа.

18. В приведенных ниже ответах использованы обозначения:  $m = \dim L$ ;  $y_1, \dots, y_m$  — ортонормированный базис в  $L$ ;  $y_{m+1}, \dots, y_n$  — элементы, дополняющие ортонормированный базис в  $L$  до ортонормированного базиса всего евклидова пространства.

а) 1°)  $m = 3$ ;  $x_1, x_2, x_3$ ; 2°)  $y_1 = \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 + 2e_3)$ ,  $y_2 = -\frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 + e_3)$ ,  $y_3 = \frac{1}{9}(6e_1 - 3e_2 - 6e_3)$ ;

б) 1°)  $m = 3$ ;  $x_1, x_2, x_3$ ; 2°)  $y_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$ ,  $y_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4)$ ,  $y_3 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 + e_4)$ ; 3°)  $y_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4)$ ;

в) 1°)  $m = 2$ ;  $x_1, x_2$ ; 2°)  $y_1 = x_1\sqrt{15}$ ,  $y_2 = x_2\sqrt{15}$ ; 3°)  $y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3)$ ,  $y_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-e_1 + e_2 + e_4)$ ;

г) 1°)  $m = 2$ ;  $x_1, x_2$ ; 2°)  $y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{12}}$ ,  $y_2 = \frac{x_2}{\sqrt{42}}$ ; 3°)  $y_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}(2e_1 + 3e_2 + e_3)$ ,  $y_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 + e_4)$ ;

д) 1°)  $m = 3$ ;  $x_1, x_2, x_3$ ; 2°)  $y_1 = \frac{1}{4}(e_1 + e_2 - e_3 + 2e_4 + 3e_5)$ ,  $y_2 = \frac{1}{4\sqrt{15}}(e_1 + e_2 + 15e_3 + 2e_4 + 3e_5)$ ,  $y_3 = \frac{1}{\sqrt{135}}(6e_1 + e_2 + 7e_4 - 7e_5)$ ;

3°)  $y_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-e_1 - e_2 + e_4)$ ,  $y_5 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-3e_1 + 4e_2 + e_4 - e_5)$ .

**19.** а)  $n - 1$ ; б)  $n - \dim L(x_1, \dots, x_m)$ .

**21.** а)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -32 \\ -17 \\ 10 \end{pmatrix}$ .

**22.** а)  $y = x$ ,  $z = \theta$ ; б)  $y = x$ ,  $z = \theta$ ;

в)  $y = \frac{1}{3}(e_1 - e_2 + 2e_4)$ ,  $z = \frac{1}{3}(2e_1 + 4e_2 + 3e_3 + e_4)$ ;

г)  $y = \frac{1}{14}(-5e_1 + 3e_2 + e_3 + 7e_4)$ ,  $z = \frac{1}{14}(19e_1 + 11e_2 + 13e_3 + 7e_4)$ ;

д)  $y = \frac{1}{27}(21e_1 + 14e_2 + 27e_3 + 35e_4 + 28e_5)$ ,  $z = \frac{1}{27}(6e_1 + 13e_2 - 8e_4 - e_5)$ .

**23.** а)  $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -9 \\ -8 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\sqrt{116}$ ; б)  $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ , 4.

**24.** а)  $Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ;

б)  $Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**25.**  $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 11/15 & 2/15 & 2/3 \\ 2/15 & 14/15 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ .

**26.**

$$\begin{pmatrix} a^2(1 - \cos \varphi) + \cos \varphi & ab(1 - \cos \varphi) - c \sin \varphi & ac(1 - \cos \varphi) + b \sin \varphi \\ ab(1 - \cos \varphi) + c \sin \varphi & b^2(1 - \cos \varphi) + \cos \varphi & bc(1 - \cos \varphi) - a \sin \varphi \\ ac(1 - \cos \varphi) - b \sin \varphi & bc(1 - \cos \varphi) + a \sin \varphi & c^2(1 - \cos \varphi) + \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

## Г л а в а V

**1.**  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .    **2.**  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .    **3.**  $\begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ .

**4.** а)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ .

**5.**  $A_e = \frac{1}{1+k^2} \begin{pmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{pmatrix}$ . ★ Наиболее просто находится матрица оператора  $\widehat{A}$  в базисе  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{f}_2 = -k\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ .

**6.**  $A_e = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 13 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ . ★ Наиболее просто находится матрица оператора  $\widehat{A}$  в базисе  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{f}_2 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ .

7.  $A_e = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ . ★ Наиболее просто находится матрица оператора  $\hat{A}$  в базисе  $\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$ .

8. а)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; б)  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ ;

в)  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ; г)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

10. а)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

11. а)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -64 \end{pmatrix}$ .

12. а)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ ;

в)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ ; г)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ .

13. а)  $\begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) & -\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) \end{pmatrix}$ ;

б)  $\begin{pmatrix} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & -\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \end{pmatrix}$ ;

в)  $\begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix}$ ; г)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

14. ★ Пусть  $A$  — матрица искомого оператора  $\hat{A}$  в том же базисе, в котором заданы координаты элементов  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Отсюда находим } A = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 2 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. а)  $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} -3 & 8 & -5 \\ 0 & -5 & -4 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ ; в)  $\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ 4 & 5 & -4 \\ 3 & 13 & -8 \end{pmatrix}$ .

**16.** а)  $\begin{pmatrix} 60 & -12 \\ 48 & 12 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; в)  $\begin{pmatrix} 25 & -10 \\ 40 & -15 \end{pmatrix}$ ; г)  $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$ .

**19.** Собственных векторов нет.

**20.**  $c(2e_1 + (1 + \sqrt{7})e_2)$  — множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению  $\lambda = \sqrt{7}$ ;  $c(2e_1 - (1 + \sqrt{7})e_2)$  — множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению  $\lambda = -\sqrt{7}$ , где  $c$  — любое вещественное число, не равное нулю.

**21.** а)  $\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  — множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению  $\lambda = 2$ ;  $\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$  — множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению  $\lambda = 1$ ;  $\begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ c \end{pmatrix}$  — множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению  $\lambda = -1$ , где  $c$  — любое вещественное число, не равное нулю;

б)  $\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  — множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению  $\lambda = -1$ , где  $c$  — любое вещественное число, не равное нулю;  $\begin{pmatrix} -c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  — множество всех собственных векторов, соответствующих двукратному собственному значению  $\lambda = 1$ , где  $c_1$  и  $c_2$  — любые вещественные числа, не равные нулю одновременно;

в)  $\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  — множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению  $\lambda = 2$  кратности 3, где  $c$  — любое вещественное число, не равное нулю.

**22.**  $c_1e_1 + (2c_1 + c_2)e_2 + c_2e_3 + 2c_2e_4$  — множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению  $\lambda = 1$  кратности 4, где  $c_1$  и  $c_2$  — любые вещественные числа, одновременно не равные нулю.

**24.** Если  $\lambda \neq 0$  — собственное значение оператора  $\widehat{A}$ , то  $1/\lambda$  — собственное значение оператора  $\widehat{A}^{-1}$ .

**26.** Если  $\lambda$  — собственное значение оператора  $\widehat{A}$ , то  $\lambda - \alpha$  — собственное значение оператора  $\widehat{A} - \alpha\widehat{I}$ .

**27.** Если  $\lambda$  — собственное значение оператора  $\widehat{A}$ , то  $\lambda^k$  — собственное значение оператора  $\widehat{A}^k$ , а  $p(\lambda)$  — собственное значение оператора  $p(\widehat{A})$ .

**29.** Инвариантные подпространства:

1)  $\theta$ -пространство;

2)  $\{cx_1\}$ , где  $x_1$  — собственный вектор оператора  $\widehat{A}$ , соответствующий собственному значению  $\lambda = 1$ ,  $c$  — любое вещественное число;

3)  $M = \{c_1x_2 + c_2x_3\}$ , где  $x_2, x_3$  — линейно независимые собственные векторы оператора  $\widehat{A}$ , соответствующие двукратному собственному значению  $\lambda = 0$ ,  $c_1, c_2$  — любые вещественные числа;

4)  $\{ca\}$ , где  $a$  — фиксированный ненулевой вектор из  $M$ ,  $c$  — любое вещественное число;

5)  $\{c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{x}_1\}$ , где  $\mathbf{a}, \mathbf{x}_1$  — векторы, введенные выше, а  $c_1$  и  $c_2$  — любые вещественные числа;

6) пространство  $B_3$ .

**30.** При  $\varphi = \pi$  оператор поворота имеет двукратное собственное значение, равное  $-1$ . Любой ненулевой вектор из  $V_2$  является собственным вектором, соответствующим этому собственному значению.

**31.** Собственное значение  $\lambda = 0$ ; соответствующие собственные векторы — ненулевые векторы, коллинеарные вектору  $\mathbf{y}$ .

**32.** Собственное значение  $\lambda = 0$ ; соответствующие собственные векторы  $p(x) = \text{const} \neq 0$ .

**33.** а) Собственных векторов нет;

б) собственное значение  $\lambda = -1$ , соответствующие собственные вектора  $c_1 \cos x + c_2 \sin x$ , где  $c_1, c_2$  — любые вещественные числа, не равные одновременно нулю;

в) собственных векторов нет.

**35.**  $\sqrt{k/m}, \sqrt{2k/m}$ .

$$\mathbf{38.} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{39.} \widehat{A}^* p = \int_a^b K(t, x) p(t) dt.$$

**40.** а)  $f_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - 2e_2 + e_3)$ ,  $f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2e_1 + e_2)$ ,  $f_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}(-e_1 + 2e_2 + 5e_3)$  — ортонормированный базис из собственных векторов;

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

б)  $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ ,  $f_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}(e_1 - e_2 - 4e_3)$ ,  $f_3 = \frac{1}{3}(2e_1 - 2e_2 + e_3)$  — ортонормированный базис из собственных векторов;  $A_f = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$ ;

в)  $f_1 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 + e_3)$ ,  $f_2 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 - 2e_3)$ ,  $f_3 = \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 + 2e_3)$  — ортонормированный базис из собственных векторов;

$$A_f = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{43.} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**49.**  $A_f^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 2-i \end{pmatrix}$ ;  $\widehat{A}^*$  не является эрмитовым оператором.

$$\mathbf{50.} \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 4-i \\ 2i & -1 & 1+2i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

**53.** а) Да; б) нет; в) да.

**55.** а) Собственные значения равны  $-1$  и  $1$ ;  $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + ie_2)$ ,  $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2)$  — ортонормированный базис из собственных векторов;

б) собственные значения равны  $-1$  и  $5$ ;  $f_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}((2+i)e_1 - e_2)$ ,  $f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 + (2-i)e_2)$  — ортонормированный базис из собственных векторов.

**56.** Собственные значения  $1$  и  $3$ ;  $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + ie_3)$ ,  $f_2 = e_2$ ,  $f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_3)$  — ортонормированный базис из собственных векторов.

**58.** а) Нет; б) да.

**59.** а) Да; б) нет.

**61.** Собственные значения  $i$  и  $-i$ ;  $f_1 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}((1+\sqrt{2})ie_1 + e_2)$ ,  $f_2 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(e_1 + (1+\sqrt{2})ie_2)$  — ортонормированный базис из собственных векторов.

**62.** Собственные значения равны  $1$ ,  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ,  $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ;  $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + ie_2)$ ,  $f_2 = \frac{1}{2}(e_1 - ie_2 - \sqrt{2}e_3)$ ,  $f_3 = \frac{1}{2}(e_1 - ie_2 + \sqrt{2}e_3)$  — ортонормированный базис из собственных векторов.

**64.**  $\begin{pmatrix} -2i & 1-2i & i \\ -1-2i & 0 & -1+4i \\ i & 1+4i & 2i \end{pmatrix}$ ; нет.

**65.** Не всегда. ★ Воспользуйтесь задачей 64.

**67.**  $2i(a_2b_3 - a_3b_2)\hat{\sigma}_1 - 2i(a_1b_3 - a_3b_1)\hat{\sigma}_2 + 2i(a_1b_2 - a_2b_1)\hat{\sigma}_3$ .

## Г л а в а VI

**1.** Канонический вид квадратичной формы и преобразование переменных определяются неоднозначно. Приводим один из возможных вариантов ответа:

$$\text{а) } 2(y^1)^2 - 2(y^2)^2 + 2(y^3)^2 - 2(y^4)^2; \quad Y = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & -0,5 \end{pmatrix} X;$$

$$\text{б) } (y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2; \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X;$$

$$\text{в) } (y^1)^2 - (y^2)^2 + (y^3)^2 - (y^4)^2; \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & -0,5 \end{pmatrix} X;$$

$$\text{г) } -(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2; \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X, \quad \text{где } X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad Y =$$

$$= \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}.$$

2. а)  $-(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2; \quad X = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 2\sqrt{6} & -1 \\ -2\sqrt{5} & \sqrt{6} & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 5 \end{pmatrix} Y;$

б)  $9(y^1)^2 + 9(y^2)^2 + 27(y^3)^2; \quad X = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & -2/3 \\ 0 & -4/3\sqrt{2} & 1/3 \end{pmatrix} Y;$

в)  $9(y^1)^2 + 18(y^2)^2 - 9(y^3)^2; \quad X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} Y;$

г)  $(y^1)^2 + (y^2)^2 - (y^3)^2 - (y^4)^2; \quad X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} Y;$

д)  $4(y^1)^2 + (y^2)^2 - 2(y^3)^2; \quad X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} Y;$

е)  $2(y^1)^2 - (y^2)^2 + 5(y^3)^2; \quad X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} Y;$

ж)  $(y^2)^2 - (y^3)^2; \quad X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} Y, \text{ где } X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad Y =$   
 $= \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}.$

6.  $\delta_k = (-1)^k \Delta_k$ , где  $\delta_k$  и  $\Delta_k$  — угловые миноры порядка  $k$  матриц квадратичных форм  $Q(x^1, \dots, x^n)$  и  $-Q(x^1, \dots, x^n)$ .

7. ★ Воспользоваться примером 3 на с. 166, взяв в качестве матрицы  $A$  единичную матрицу, а в качестве  $P$  матрицу  $C$ .

8. ★ Воспользоваться примером 3 на с. 166, взяв в качестве  $A$  матрицу  $A^T$ , а в качестве  $P$  матрицу  $A^{-1}$ .

б) Для произвольного  $i$  найти значение квадратичной формы  $X^T A X$  при  $x^i = 1$ ,  $x^j = 0$  ( $j \neq i$ ).

11. а) Нет; б) нет.

12. Отрицательно определенная, если  $b < -5$ .

13. Канонический вид и матрица перехода определяются неоднозначно. В качестве ответа к п. 2° можно взять матрицу, обратную матрице преобразования из упр. 1 а)–г). Например:

а) 1°)  $B(x, y) = x^1 y^2 + x^2 y^1 + x^3 y^4 + x^4 y^3; \quad 2°) 2\xi^1 \eta^1 - 2\xi^2 \eta^2 + 2\xi^3 \eta^3 -$

$- 2\xi^4 \eta^4; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$

$$6) \quad 1^{\circ}) \quad B(x, y) = x^1 y^1 + x^1 y^2 + x^2 y^1 + 2x^2 y^2 + 2x^2 y^3 + 2x^3 y^2 + 5x^3 y^3;$$

$$2^{\circ}) \quad \xi^1 \eta^1 + \xi^2 \eta^2 + \xi^3 \eta^3; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Канонический вид и матрица перехода определяются неоднозначно. В качестве ответа к п. 2<sup>о</sup> можно взять матрицу, транспонированную по отношению к матрице ортогонального преобразования из упр. 2, а)-ж).

Например: г) 2<sup>о</sup>)  $\xi^1 \eta^1 + \xi^2 \eta^2 - \xi^3 \eta^3 - \xi^4 \eta^4; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

17. а)  $\varphi = \arcsin \left( -\frac{3}{\sqrt{13}} \right)$ ,  $O'(0, -1)$ ; 1<sup>о</sup>)  $(y'')^2 = 0$  (две совпадающие прямые); 2<sup>о</sup>)  $(y'')^2 = -x''$  (парабола);

б)  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,  $O'(-2, -3)$ ; 1<sup>о</sup>)  $(x'')^2 + \frac{(y'')^2}{0,5} = 1$  (эллипс); 2<sup>о</sup>)  $(x'')^2 + \frac{(y'')^2}{0,5} = 0$  (вырожденный эллипс — точка);

в)  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,  $O'(\sqrt{2}, 0)$ ,  $\frac{(x'')^2}{4} + \frac{(y'')^2}{16} = 1$  (эллипс);

г)  $\varphi = \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}$ ,  $O'\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ ,  $(x'')^2 - \frac{(y'')^2}{9} = 1$  (гипербола);

д)  $\varphi = \arcsin \frac{4}{\sqrt{17}}$ ,  $O'\left(\frac{13}{3\sqrt{17}}, \frac{4}{5\sqrt{17}}\right)$ ,  $\frac{x''^2}{25} - \frac{y''^2}{9} = 1$  (гипербола);

е)  $\varphi = \arcsin \frac{4}{5}$ ,  $O'(0, 0)$ ,  $y'^2 = 2x'$  (парабола).

18. а)  $x''^2 + y''^2 - \frac{z''^2}{2} = -1$  (двуполостной гиперболоид),  $x'' = \frac{1}{3}(2x - 2y + z) + 1$ ,  $y'' = \frac{1}{3}(2x + y - 2z) - 1$ ,  $z'' = \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) - 1$ ;

б) 1<sup>о</sup>)  $x'' = \frac{(z'')^2}{5} - \frac{(y'')^2}{5}$  (гиперболический параболоид),  $x'' = x - 2$ ,  $y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y + z) + 2$ ,  $z'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + z) + 1$ ; 2<sup>о</sup>)  $\frac{(z'')^2}{10} - \frac{(y'')^2}{10} = 1$  (гиперболический цилиндр),  $x'' = x$ ,  $y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y + z) + 2$ ,  $z'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + z) + 1$ ;

в)  $\frac{(x'')^2}{6} + \frac{(y'')^2}{3} + \frac{(z'')^2}{2} = 1$  (эллипсоид),  $x'' = \frac{1}{3}(2x + 2y - z) - 1$ ,  $y'' = \frac{1}{3}(2x - y + 2z)$ ,  $z'' = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z) + 1$ ;

г)  $(x'')^2 + \frac{(y'')^2}{2} - \frac{(z'')^2}{2} = 1$  (однополостный гиперболоид),  $x'' = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z)$ ,  $y'' = \frac{1}{3}(2x - y + 2z) - 1$ ,  $z'' = \frac{1}{3}(2x + 2y - z) + 1$ ;

д)  $(x'')^2 + 2(y'')^2 - 3(z'')^2 = 0$  (конус),  $x'' = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z) - 1$ ,  $y'' = \frac{1}{3}(-2x + y - 2z) - 1$ ,  $z'' = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z) - 1$ ;

е)  $\frac{(x'')^2}{2} + (y'')^2 = z''$  (эллиптический параболоид),  $x'' = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z) + \frac{2}{3}$ ,  $y'' = \frac{1}{3}(-2x + y - 2z) + \frac{2}{3}$ ,  $z'' = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z) - \frac{1}{3}$ ;

ж)  $\frac{(x'')^2}{2} - \frac{(y'')^2}{2} = z''$  (гиперболический параболоид),  $x'' = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z) - \frac{1}{3}$ ,  $y'' = \frac{1}{3}(-2x + y - 2z) - \frac{1}{3}$ ,  $z'' = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z) - \frac{4}{3}$ .

**19.** а)  $\tilde{Q} = (z^1)^2 + (z^2)^2$ ,  $\tilde{G} = -2(z^1)^2 + \frac{2}{3}(z^2)^2$ ,  $x^1 = z^1 + \frac{z^2}{\sqrt{3}}$ ,  $x^2 = \frac{z^1}{2} - \frac{z^2}{2\sqrt{3}}$ ;

б)  $\tilde{Q} = (z^1)^2 + (z^2)^2$ ,  $\tilde{G} = 4(z^1)^2 - 2(z^2)^2$ ,  $x^1 = -2\sqrt{2}z^1 + 3\sqrt{2}z^2$ ,  $x^2 = \frac{z^1 - z^2}{\sqrt{2}}$ ;

в)  $\tilde{Q} = (z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2$ ,  $\tilde{G} = -(z^1)^2 + 3(z^2)^2 + (z^3)^2$ ,  $x^1 = \frac{z^1 - z^2}{2}$ ,  $x^2 = z^2$ ,  $x^3 = z^2 - z^3$ .

## Глава VII

**1.**  $A_e = (a^{pq}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  и  $A_f = (\bar{a}^{pq}) = \begin{pmatrix} -99 & -36 & 72 \\ -44 & -16 & 32 \\ 77 & 28 & -56 \end{pmatrix}$ .

**2.**  $B_e = A_e^T$ ,  $B_f = A_f^T$ , где  $A_e$  и  $A_f$  — матрицы из задачи 1.

**3. ★** Сначала доказать, что матрица  $\bar{A}$  дважды ковариантного тензора в новом базисе выражается через данную матрицу  $A$  формулой  $\bar{A} = C^T AC$ , где  $C$  — матрица перехода к новому базису.

**4. ★** Пусть  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$  — матрицы тензоров  $[A]_2^0$  и  $[B]_0^2$  в новом базисе,  $C$  — матрица перехода от старого базиса к новому. Выразить матрицу  $\bar{A}$  через  $A$  и  $C$ , а матрицу  $\bar{B}$  через  $A^{-1}$  и  $C^{-1}$ , и убедиться в том, что  $\bar{B} = (\bar{A})^{-1}$ .

**6. ★** Ввести матрицы  $A = (a^{ki})_{n \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{n \times n}$ , доказать, что  $B = A^{-1}$  и воспользоваться задачей 4.

**7.**  $b_1 = \frac{2}{c}$ ,  $b_2 = -\frac{4}{c}$  и  $c_1 = c$ ,  $c_2 = -c$ , где  $c$  — любое вещественное число, отличное от нуля. Представление тензора типа  $(2, 0)$  в виде произведения двух тензоров типа  $(1, 0)$  возможно тогда и только тогда, когда матрица тензора  $[A]_2^0$  вырожденная.

**8.** Получается тензор нулевого ранга — число, равное 0 в любом базисе.

**9.** Получается тензор нулевого ранга — число, равное 2 в любом базисе.

**10. б)**  $g_{11} = (f_1, f_1) = 1$ ,  $g_{12} = g_{21} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $g_{22} = (f_2, f_2) = 1$ ;

в)  $g^{11} = 4$ ,  $g^{12} = g^{21} = -2\sqrt{3}$ ,  $g^{22} = 4$ ;

г) если  $x^1$ ,  $x^2$  — координаты элемента  $x$ , а  $y^1$ ,  $y^2$  — координаты элемента  $y$  в базисе  $f_1$ ,  $f_2$ , то  $(x, y) = x^1y^1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x^1y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2y^1 + x^2y^2$ .

**11. а)**  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = -7$ ; **б)**  $y^1 = 23$ ,  $y^2 = -7$ ,  $y^3 = -2$ .

**12.**  $g_{pq}g^{pq} = \delta_q^q = n$ .

**13.**  $a_{ijk} = g_{ip}g_{jq}g_k^{pq}$ , где  $g_{pq}$  — координаты ковариантного метрического тензора, т. е. элементы матрицы, обратной для матрицы  $(g^{pq})$ .

**14.**  $g^{iq}g_{pj}a_q^p$ , где  $g^{iq}$  и  $g_{pj}$  — координаты соответственно контравариантного и ковариантного метрических тензоров в данном базисе.

**Г л а в а VIII**

**2.** Порядок группы равен 4.

**3.** а) Нет; б) нет.

**4.** Да.

**5.** а) Да; б) да.

**6.** Да.

**14.** ★ Воспользоваться задачей 13.

**16.** Указанная подгруппа движений изоморфна группе матриц вида  
$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$
, где  $\varphi$  — произвольное вещественное число,  $a$  равно 1 или  $-1$ , а групповой операцией является умножение матриц.

**17.** Порядок подгруппы движений равен 8. Эта подгруппа изоморфна группе квадратных матриц третьего порядка, у которых элементы главной диагонали равны 1 или  $-1$ , а остальные элементы равны нулю, и групповой операцией является умножение матриц.

**19.** а) Да; б) нет.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгебраические дополнения и ми-  
норы 14  
Альтернатива Фредгольма 97

Базис 38  
Базисный минор 43  
Билинейные формы 167

Взаимно однозначное соответст-  
вие 59

Гиперплоскость 29  
Группа абелева 211  
— движений 216  
— коммутативная 211  
— конечная 212  
— Лоренца 220  
— ортогональная 217  
— по сложению 211  
— — умножению 211  
— преобразований 216  
— унитарная 220

Движение 216

Единица группы 211

Закон инерции квадратичных  
форм 159

Изоморфизм групп 217  
Изоморфизм линейных пространств  
59  
Инвариантные подпространства 125

Канонические коэффициенты 158  
— билинейной формы 171

Канонический базис симметрич-  
ной билинейной формы 170  
— вид квадратичной формы 158  
— — симметричной билинейной  
формы 170  
Квадратичная форма 157  
— неотрицательная 164  
— неположительная 164  
— отрицательно определенная 164  
— положительно определенная  
164  
Ковариантные координаты эле-  
мента 202  
Ковариантный метрический тен-  
зор 201  
Коммутатор 111  
Контравариантный метрический  
тензор 202  
Контравариантные координаты  
202  
Координаты элемента 38  
Критерий Сильвестра 165

Линейная комбинация элементов  
28  
— оболочка 28  
Линейное преобразование пере-  
менных 158  
— пространство 23

Матрица билинейной формы 168  
— вычисление ранга 44  
— единичная 7  
— квадратичной формы 157  
— линейного оператора 109  
— — преобразования 158  
— невырожденная 14  
— обратная 7  
— Паули 107

- Матрица перехода 54  
 — положительно определенная 165  
 — присоединенная 19  
 — с размерами  $m \times n$  5  
 — симметричная 27  
 — транспонированная 6  
 — треугольная 16  
 — унитарная 101  
 — эрмитова 145  
 — эрмитово сопряженная 103  
 Матрицы равные 5  
 Метод Лагранжа 158  
 — ортогональных преобразований 159  
 Минор порядка  $r$  43  
 — элемента 14  
 Многочлены Лежандра 95
- Наклонная** 97  
**Неравенство Коши–Буняковского**  
 81  
 — треугольника 87  
**Норма (длина) элемента** 81  
**Нормальная ФСР** 69  
**Нулевой элемент** 23
- Образ элемента** 59  
**Оператор дифференцирования** 108  
 — единичный 108  
 — линейный 108  
 — обратный 111  
 — ортогональный 135  
 — поворота 108  
 — подобия 108  
 — самосопряженный 135  
 — сопряженный 134, 145  
 — унитарный 146  
 — эрмитов (самосопряженный) 145  
**Операторы равные** 110  
**Операция сложения элементов** 23  
 — умножения на вещественные числа 23  
 — транспонирования 6  
**Определение линейного пространства** 23  
**Определитель Вендермонда** 22  
 —  $n$ -го порядка 12  
**Ортогональное дополнение** 97  
**Ортогональность элементов** 88  
**Ортогональные матрицы** 101  
**Ортонормированный базис** 88

- Основная матрица системы** 63
- Перпендикуляр** 97  
**Подгруппа** 212  
**Подпространство** 28  
**Порождающая система линейной оболочки** 29  
**Порядок группы** 212  
**Правило треугольников** 15  
**Преобразование вырожденное** 158  
 — линейного пространства 108  
 — Лоренца 221  
 — невырожденное 158  
 — ортогональное 159  
**Проекция элемента** 89  
**Произведение линейного оператора на число** 110  
 — линейных операторов 110  
 — матрицы на матрицу 6  
 — — — число 5  
 — тензоров 194  
**Прообраз элемента** 59  
**Пространственно-временной интервал** 221  
**Пространство** 79  
 — евклидово 79  
 — Минковского 221  
 — псевдоевклидово 220  
 — унитарное 80  
**Противоположный элемент** 23  
**Прямая сумма** 97
- Разложение элемента по базису** 38  
**Размерность линейного пространства** 39  
**Разность матриц** 5  
**Ранг матрицы** 43  
 — тензора 193  
**Расстояние элемента до подпространства** 97  
**Расширенная матрица системы** 63
- Свертка тензора** 195  
**Символ Кронекера** 7  
**Симметричные билинейные формы** 169  
**Система уравнений совместная** 63  
**Системы координат галилеевы**  
 221  
 — линейных уравнений 63

- Собственное значение матрицы 124
  - подпространство оператора 124
- Собственные векторы 123
  - значения 123
- Собственный вектор матрицы 124
- Сумма матриц 5
  - тензоров 194
  - линейных операторов 110
- Тензор 193
  - деформаций 204
  - инерции 204
  - напряжений 207
- Угловые миноры 165
- Угол между элементами 81
- Унитарные матрицы 102
- Формулы Крамера 64
- Фундаментальная совокупность решений 67
- Характеристический многочлен 124
- Характеристическое уравнение 124
- Числовое поле 24
- Элементы линейно зависимые 32
  - — независимые 32

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
-----------------------	---

### ГЛАВА I МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 1. Матрицы . . . . .	5
§ 2. Определители . . . . .	12

### ГЛАВА II ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Определение и свойства линейного пространства . . . . .	23
§ 2. Подпространства линейного пространства . . . . .	28
§ 3. Линейная зависимость и независимость элементов линейного пространства . . . . .	32
§ 4. Базис и координаты. Размерность линейного пространства . . . . .	38
§ 5. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре . . . . .	43
§ 6. Преобразование базиса и координат . . . . .	54
§ 7. Изоморфизм линейных пространств . . . . .	59

### ГЛАВА III СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Существование решения системы линейных уравнений . . . . .	63
§ 2. Однородные системы линейных уравнений . . . . .	67
§ 3. Неоднородные системы линейных уравнений . . . . .	74

### ГЛАВА IV ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Определение евклидова и унитарного пространства . . . . .	79
§ 2. Ортонормированный базис . . . . .	88
§ 3. Разложение евклидова пространства на прямую сумму взаимно ортогональных подпространств. Альтернатива Фредгольма для квадратной системы линейных уравнений . . . . .	96
§ 4. Ортогональные и унитарные матрицы . . . . .	101

**ГЛАВА V  
ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ**

§ 1. Линейные операторы в линейном пространстве . . . . .	108
§ 2. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов . . . . .	123
§ 3. Линейные операторы в евклидовом пространстве . . . . .	134
§ 4. Линейные операторы в унитарном пространстве . . . . .	145

**ГЛАВА VI  
КВАДРАТИЧНЫЕ И БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ**

§ 1. Определение квадратичной формы. Канонический вид квадратичной формы . . . . .	157
§ 2. Знакопределенные квадратичные формы . . . . .	164
§ 3. Билинейные формы . . . . .	167
§ 4. Применение теории квадратичных форм в задачах о приведении к каноническому виду уравнения кривой второго порядка . . . . .	175
§ 5. Приведение двух квадратичных форм к каноническому виду од- ним линейным невырожденным преобразованием . . . . .	184

**ГЛАВА VII  
ТЕНЗОРЫ**

§ 1. Тензоры в $n$ -мерном линейном пространстве . . . . .	190
§ 2. Тензоры в евклидовом пространстве. Примеры тензорных физи- ческих величин . . . . .	201

**ГЛАВА VIII  
ГРУППЫ**

§ 1. Определение группы. Примеры . . . . .	211
§ 2. Группы преобразований . . . . .	216
§ 3. Группа преобразований Лоренца . . . . .	220
Ответы и указания . . . . .	226
Предметный указатель . . . . .	243

Учебное издание

*БУТУЗОВ Валентин Федорович  
КРУТИЦКАЯ Наталья Чары  
ШИШКИН Александр Александрович*

**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА  
В ВОПРОСАХ И ЗАДАЧАХ**

Редактор *Е.Ю. Ходан*  
Оригинал-макет *Н.Л. Ивановой*

ЛР №071930 от 06.07.99. Подписано в печать 01.08.02.  
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 15,5. Уч.-изд. л. 17,6. Тираж 3000 экз. Заказ №

Издательская фирма “Физико-математическая литература”  
МАИК “Наука/Интерperiодика”  
117864 Москва, ул. Профсоюзная, 90

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ППП “Типография “Наука”  
121099 Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-9221-0285-0

A standard linear barcode representing the ISBN number 5-9221-0285-0. The barcode is composed of vertical black bars of varying widths on a white background.

9 785922 102858