

To print higher-resolution math symbols, click the
Hi-Res Fonts for Printing button on the jsMath control panel.

Задачи

Сайт: [Дистанционная подготовка](#)
Курс: Д. П. Кириенко. Программирование на языке Python (школа 179 г. Москвы)
Условия задач: Задачи
Printed by: maung myo
Date: Воскресенье 4 Март 2018, 01:43

Список задач

- [Задача А. Алгоритм Евклида](#)
- [Задача В. Бинарный алгоритм Евклида](#)
- [Задача С. Гипотеза Гольдбаха](#)
- [Задача D. Разложение на простые](#)
- [Задача Е. Сумма двух дробей](#)
- [Задача F. Отрезок](#)
- [Задача G. Сумма двух квадратов](#)
- [Задача H. Теорема Лагранжа](#)
- [Задача I. Расширенный алгоритм Евклида](#)
- [Задача J. Диофантово уравнение](#)
- [Задача K. Обратный элемент](#)
- [Задача L. Числовые функции](#)
- [Задача M. Делители - 30](#)
- [Задача N. Делители - 60](#)
- [Задача O. Дружественные числа](#)
- [Задача P. Выдача сдачи](#)
- [Задача Q. Выдача сдачи - 2](#)
- [Задача R. Количество целочисленных точек в круге](#)
- [Задача S. Исполнитель Водолей](#)
- [Задача T. Упорядоченные дроби](#)
- [Задача U. Решето Эратосфена](#)
- [Задача V. Фи-функция Эйлера](#)
- [Задача W. Разложение на четнопростые](#)

- [Задача X. Делимость степени](#)
 - [Задача Y. Делимость степени - 2](#)
 - [Задача Z. Пифагоровы тройки](#)
-

Алгоритм Евклида

Задача А. Алгоритм Евклида

Даны два натуральных числа. Вычислите их наибольший общий делитель при помощи алгоритма Евклида, реализованного без использования рекурсии.

Входные данные

Вводится два натуральных числа.

Выходные данные

Выведите ответ на задачу.

Примеры

Входные данные

12

14

Выходные данные

2

Бинарный алгоритм Евклида

Задача В. Бинарный алгоритм Евклида

В бинарном алгоритме Евклида не используются операции деления и остатка, а используется только проверка на чётность и деление на 2. Идея бинарного алгоритма Евклида следующая:

$\text{НОД}(a, b) = 2\text{НОД}(a/2, b/2)$, если a и b четные,

$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a/2, b)$, если a четное, b нечетное,

$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, b/2)$, если a нечетное, b четное,

$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b)$, если a и b нечетные, $a \geq b$.

Реализуйте бинарный алгоритм Евклида для вычисления НОД двух чисел.

Входные данные

Вводятся два натуральных числа.

Выходные данные

Выведите ответ на задачу.

Примеры

Входные данные

26

44

Выходные данные

2

Гипотеза Гольдбаха

Задача С. Гипотеза Гольдбаха

Гипотеза Гольдбаха (недоказанная до сих пор) утверждает, что любое четное число (кроме 2) можно представить в виде суммы двух простых чисел. Дано натуральное четное число, большее 2, выведите два простых числа, дающих в сумме данное.

Входные данные

Вводится натуральное четное число $N \leq 10^6$.

Выходные данные

Выведите ответ на задачу.

Ввод	Вывод
4	2 2

Разложение на простые

Задача D. Разложение на простые

Дано натуральное число $N > 1$. Выведите все его простые натуральные делители с учетом кратности. Алгоритм должен иметь сложность $O(\sqrt{n})$.

Входные данные

Вводится натуральное число $N \leq 2 * 10^9$.

Выходные данные

Выведите ответ на задачу.

Примеры

Входные данные

2

Выходные данные

2

Входные данные

8

Выходные данные

2 2 2

Сумма двух дробей

Задача Е. Сумма двух дробей

Даны две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ (числа a и c — целые, b и d — натуральные). Вычислите их сумму и запишите ее в виде смешанной дроби $X\frac{Y}{Z}$ (число X целое, числа Y и Z натуральные, дробь $\frac{Y}{Z}$ — правильная несократимая).

Входные данные

Программа получает на вход четыре числа a, b, c, d и должна вывести ответ в виде смешанной дроби.

Выходные данные

Если целая часть смешанной дроби равна 0, ее выводить не надо. Если дробная часть смешанной дроби равна 0, ее выводить не надо.

Если число отрицательное, то перед ним выводится знак “-”. Следуйте формату вывода, приведенному в примерах.

Примеры

Входные данные

1 2 1 3

Выходные данные

5/6

Входные данные

1 2 2 3

Выходные данные

1 1/6

Входные данные

3 2 2 4

Выходные данные

2

Входные данные

2 1 -4 2

Выходные данные

0

Входные данные

-1 2 -1 3

Выходные данные

-5/6

Входные данные

-1 2 -2 3

Выходные данные

-1 1/6

Входные данные

3 10 -1 10

Выходные данные

1/5

Отрезок

Задача F. Отрезок

На клетчатой бумаге нарисовали отрезок из точки с координатами (a, b) в точку с координатами (c, d) . Через сколько клеток проходит этот отрезок (считается, что отрезок проходит через клетку, если он проходит через ее внутренность, если же он проходит только через вершину или по границе клетки, считается, что он не проходит через клетку).

Входные данные

Программа получает на вход четыре целых числа: a, b, c, d .

Выходные данные

Выведите ответ на задачу.

Тесты к этой задаче закрытые.

Примеры

Входные данные

0 0 6 4

Выходные данные

8

Входные данные

3 3 -3 3

Выходные данные

0

Сумма двух квадратов

Задача G. Сумма двух квадратов

Дано натуральное число N . Определите, можно ли его представить в виде суммы двух точных натуральных квадратов.

Входные данные

Вводится натуральное число.

Выходные данные

Если число N представимо в виде суммы двух натуральных квадратов, выведите два натуральных числа a и b таких, что $a^2 + b^2 = N$, иначе выведите строку Impossible.

Примечание

Решение должно иметь сложность $O(\sqrt{n})$.

Примеры

Входные данные

20

Выходные данные

2 4

Входные данные

21

Выходные данные

Impossible

Теорема Лагранжа

Задача Н. Теорема Лагранжа

Теорема Лагранжа утверждает, что любое натуральное число можно представить в виде суммы не более, чем четырех точных квадратов. По данному числу N выведите от 1 до 4 натуральных чисел, квадраты которых в сумме дают значение N .

Входные данные

Вводится натуральное число $N \leq 10000$.

Выходные данные

Выведите ответ на задачу.

Примеры

Входные данные

7

Выходные данные

1 1 1 2

Расширенный алгоритм Евклида

Задача I. Расширенный алгоритм Евклида

Даны два натуральных числа a и b . Найдите их наибольший общий делитель d и два таких целых числа x и y , что $ax + by = d$. Программа должна вывести числа d, x, y .

Входные данные

Вводятся два натуральных числа.

Выходные данные

Выведите ответ на задачу.

Примеры

Входные данные

3

2

Выходные данные

1 1 -1

Диофантово уравнение

Задача J. Диофантово уравнение

Даны натуральные числа a, b, c . Если уравнение $ax + by = c$ имеет решения в целых числах, то выберите то решение, в котором число X имеет наименьшее неотрицательное значение и выведите это решение (два числа X и Y через **один пробел**). Если решения не существует, то выведите слово Impossible.

Входные данные

Вводятся три натуральных числа.

Выходные данные

Выведите ответ на задачу.

Примечание

Сложность алгоритма должна быть равна сложности алгоритма Евклида + константа.

Примеры

Входные данные

1 2 3

Выходные данные

1 1

Входные данные

10 6 8

Выходные данные

2 -2

Обратный элемент

Задача К. Обратный элемент

Пусть даны числа a и n . Обратным элементом к числу a в кольце вычетов по модулю n называется такое число b , что $ab \equiv 1 \pmod{n}$, то есть ab дает остаток 1 при делении на n .

Входные данные

Даны числа a и n .

Выходные данные

Выведите значение обратного элемента к числу a в кольце вычетов по модулю n . Если обратного элемента не существует, выведите число 0.

Примеры

Входные данные

2 3

Выходные данные

2

Числовые функции

Задача L. Числовые функции

Количество всех натуральных делителей натурального числа n обозначается $\tau(n)$. Сумма всех натуральных делителей числа n обозначается $\sigma(n)$.

Входные данные

Дано натуральное $n \leq 10^9$.

Выходные данные

Выведите $\tau(n)$ и $\sigma(n)$.

Примечание

Сложность алгоритма должна быть $O(\sqrt{n})$.

Примеры

Входные данные

2

Выходные данные

2 3

Входные данные

6

Выходные данные

4 12

Делители - 30

Задача М. Делители - 30

На региональном этапе Всероссийской олимпиаде школьников по информатике 23 января 2011 года предлагалась задача, условие которой в варианте на 30 баллов из 100 звучит так.

Дано натуральное число $n \leq 1000$. Подсчитайте количество таких пар чисел (a, b) , что:

1. a и b — делители n .
2. $a < b$.
3. a и b — взаимно простые (их НОД равен 1).
4. $ab \leq n$.

Входные данные

Вводится натуральное число.

Выходные данные

Выведите количество таких пар.

Примеры

Входные данные

10

Выходные данные

4

Делители - 60

Задача N. Делители - 60

Дано натуральное число $n \leq 10^8$. Подсчитайте количество таких пар чисел (a, b) , что:

1. a и b — делители n .
2. $a < b$.
3. a и b — взаимно простые.
4. $ab \leq n$.

Входные данные

Вводится натуральное число.

Выходные данные

Выведите количество таких пар.

Примеры

Входные данные

10

Выходные данные

4

Дружественные числа

Задача О. Дружественные числа

Два различных числа n и m называются дружественными, если сумма делителей числа n (включая 1, но исключая само n) равна числу m и наоборот. Например, 220 и 284 – дружественные числа.

Входные данные

Дано число $k \leq 50000$

Выходные данные

Выведите все пары дружественных чисел, каждое из которых не превосходит k . Пары необходимо выводить по одной в строке, разделяя числа в паре пробелом. Каждая пара должна быть выведена только один раз (перестановка чисел новую пару не дает).

Примеры

Входные данные

300

Выходные данные

220 284

Выдача сдачи

Задача Р. Выдача сдачи

Имеется неограниченное количество монет в 1, 2, 5, 10 рублей. Определите, сколькими способами можно выдать сдачу в N рублей. Например, 5 рублей можно выдать четырьмя способами:
 $5=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1$.

Входные данные

Программа получает на вход число N , не превышающее 100.

Выходные данные

Выведите ответ на задачу.

Примеры

Входные данные

2

Выходные данные

2

Входные данные

5

Выходные данные

4

Выдача сдачи - 2

Задача Q. Выдача сдачи - 2

Имеется неограниченное количество монет в 1, 2, 5, 10 рублей. Определите, сколькими способами можно выдать сдачу в n рублей. Например, 5 рублей можно выдать четырьмя способами:
 $5=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1$.

Входные данные

Программа получает на вход число n , не превышающее 1000000. Сложность алгоритма должна быть $O(n)$.

Выходные данные

Выведите ответ на задачу.

Примеры

Входные данные

2

Выходные данные

2

Входные данные

5

Выходные данные

4

Количество целочисленных точек в круге

Задача R. Количество целочисленных точек в круге

Дано натуральное число $R \leq 10^5$. Определите количество целочисленных точек, находящихся внутри и на границе круга радиуса R с центром в начале координат.

Ограничение по времени на решение — 1 секунда, сложность алгоритма должна быть $O(R)$.

Тесты к этой задаче закрытые.

Входные данные

Вводится натуральное число.

Выходные данные

Выведите ответ на задачу.

Примеры

Входные данные

2

Выходные данные

13

Исполнитель Водолей

Задача S. Исполнитель Водолей

У исполнителя “Водолей” есть два сосуда, первый объемом A литров, второй объемом B литров, а также кран с водой. Водолей может выполнять следующие операции:

1. Наполнить сосуд A (обозначается $>A$).
2. Наполнить сосуд B (обозначается $>B$).
3. Вылить воду из сосуда A (обозначается $A>$).
4. Вылить воду из сосуда B (обозначается $B>$).
5. Перелить воду из сосуда A в сосуд B (обозначается как $A>B$).
6. Перелить воду из сосуда B в сосуд A (обозначается как $B>A$).

Команда переливания из одного сосуда в другой приводят к тому, что либо первый сосуд полностью опустошается, либо второй сосуд полностью наполняется.

Входные данные

Программа получает на вход три натуральных числа A , B , N , не превосходящих 10^4

Выходные данные

Необходимо вывести алгоритм действий Водолея, который позволяет получить в точности N литров в одном из сосудов, если же такого алгоритма не существует, то программа должна вывести текст Impossible.

Количество операций в алгоритме не должно превышать 10^5 . Гарантируется, что если задача имеет решение, то есть решение, которое содержит не более, чем 10^5 операций.

Примеры

Входные данные

3 5 1

Выходные данные

$>A$

$A>B$

$>A$

$A>B$

Упорядоченные дроби

Задача Т. Упорядоченные дроби

Выведите в порядке возрастания все несократимые дроби, заключённые между 0 и 1, знаменатели которых не превышают N .

Входные данные

На вход подается одно число N , $N \leq 20$.

Выходные данные

В каждой строке нужно вывести по одному числу.

Примеры

Входные данные

5

Выходные данные

1/5

1/4

1/3

2/5

1/2

3/5

2/3

3/4

4/5

Решето Эратосфена

Задача U. Решето Эратосфена

Создайте массив $[True] * (K + 1)$. Заполните его значениями так, чтобы $IsPrime[i] == True$, если i — простое число и $IsPrime[i] == False$, если i — составное. Для этого сначала заполняем массив `True`. Затем “вычеркиваем” (то есть помечаем нулями) те элементы, которые делятся на 2, начиная с 4. Затем вычеркиваем те элементы, которые делятся на 3, начиная с 9. Затем вычеркиваем элементы, которые делятся на 5, начиная с 25... И так далее —находим следующее невычеркнутое число p и вычеркиваем все кратные p начиная с p^2 . В результате невычеркнутыми останутся только простые числа. Такая процедура называется “Решето Эратосфена”. Напишите программу, которая строит решето Эратосфена, потом считывает натуральное число N и выводит N -е по счету простое число. Гарантируется, что это число не превосходит $N \leq 100000$. Обратите внимание на то, что 100000-е простое число не является числом 100000.

Примеры

Входные данные

5

Выходные данные

11

Фи-функция Эйлера

Задача V. Фи-функция Эйлера

Дано натуральное число $n \leq 10^9$, определите количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n . Это число обозначается $f(n)$ и называется фи-функцией Эйлера. Сложность алгоритма должна быть $O(\sqrt{n})$.

Примеры

Входные данные

4

Выходные данные

2

Входные данные

5

Выходные данные

4

Разложение на четнопростые

Задача W. Разложение на четнопростые

В этой задаче рассматриваются только четные целые числа.

Четное натуральное число n будем называть четнопростым числом, если его нельзя представить в виде произведения двух четных чисел. Например, числа 2 и 6 — четнопростые.

Очевидно, что каждое число либо является четнопростым, либо разлагается в произведение четнопростых. Но такое разложение на четнопростые не всегда единственно.

Дано четное натуральное $n \leq 10^9$. Если это число — четнопростое, выведите слово `prime`. Если это число единственным образом разлагается в произведение двух и более четнопростых, то выведите слово `single`, а в следующей строке выведите разложение этого числа на четнопростые множители. Если число допускает несколько различных разложений на четнопростые, то выведите слово `many`, а в следующих двух строках выведите два каких-нибудь различных разложения числа на четнопростые множители.

Сложность алгоритма должна быть $O(\sqrt{n})$.

Примеры

Входные данные

6

Выходные данные

`prime`

Входные данные

4

Выходные данные

`single`

2 2

Входные данные

180

Выходные данные

`many`

90 2

6 30

Делимость степени

Задача X. Делимость степени

Даны два натуральных числа A и B ($2 \leq A, B \leq 2 * 10^9$). Найдите такое минимальное натуральное n , что B^n делится на A .

Входные данные

Программа получает на вход два числа A и B .

Выходные данные

Программа выводит одно значение n . Если никакая степень числа B не делится на A , то выведите число -1.

Примеры

Входные данные

54

60

Выходные данные

3

Входные данные

3

7

Выходные данные

-1

Делимость степени - 2

Задача Y. Делимость степени - 2

Даны два натуральных числа A и B ($2 \leq A, B \leq 2 * 10^{12}$). Найдите такое минимальное натуральное n , что B^n делится на A .

Входные данные

Программа получает на вход два числа A и B .

Выходные данные

Программа выводит одно значение n . Если никакая степень числа B не делится на A , то выведите число -1.

Примеры

Входные данные

54

60

Выходные данные

3

Входные данные

3

7

Выходные данные

-1

Пифагоровы тройки

Задача Z. Пифагоровы тройки

Три натуральных числа X , Y , Z называются пифагоровой тройкой, если $x^2 + y^2 = z^2$. Пифагорова тройка называется примитивной, если числа X , Y , Z являются взаимно простыми.

Входные данные

По данному натуральному $N \leq 50000$ найдите все примитивные пифаговы тройки, в которых все числа не превосходят N .

Выходные данные

Программа должна вывести в каждой строке по три натуральных числа X , Y , Z , причем $X < Y < Z$ и $x^2 + y^2 = z^2$ (т.е. числа в тройке упорядочены по возрастанию). Сами тройки должны быть упорядочены в лексикографическом порядке. Для эффективного поиска примитивных пифагоровых троек прочтите статью в википедии.
http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%E8%E0%E3%E0%E2%E0_%F2%E0%E9%E0

Примеры

Входные данные

40

Выходные данные

3 4 5

5 12 13

7 24 25

8 15 17

12 35 37

20 21 29