

Magdalena Krampa

193195

## **PROJEKT 3**

### **APROKSYMACJA PROFILU WYSOKOŚCIOWEGO**

#### **1. WSTĘP:**

Celem projektu jest implementacja dwóch metod aproksymacji interpolacyjnej w celu określenia profilu wysokościowego różnych tras. Zaimplementowane w projekcie metody to:

1) metoda wykorzystująca wielomian interpolacyjny Lagrange'a

2) metoda wykorzystująca funkcje sklelane trzeciego stopnia.

Metoda wykorzystująca wielomian interpolacyjny Lagrange'a pozwala wyznaczyć wielomian przebiegający przez zbiór podanych punktów. Umożliwia to przybliżenie przebiegu danej funkcji, jedynie na podstawie znajomości wybranych punktów. Metoda ta wykorzystuje bazę Lagrange'a określoną wzorem:

Druga metoda wykorzystująca funkcje sklelane trzeciego stopnia również umożliwia dopasowanie funkcji na podstawie punktów, jednak pozwala ona osiągnąć zdecydowanie bardziej dopasowane efekty. Dzieje się tak, dzięki interpolacji lokalnej dla wyznaczonych podprzedziałów. Dla uzyskania zadowalających efektów wykorzystane zostaną funkcje sklelane trzeciego stopnia, które pozwalają uzyskać zdecydowanie lepsze efekty niż dla funkcji sklepanych pierwszego bądź drugiego stopnia.

#### **2. IMPLEMENTACJA:**

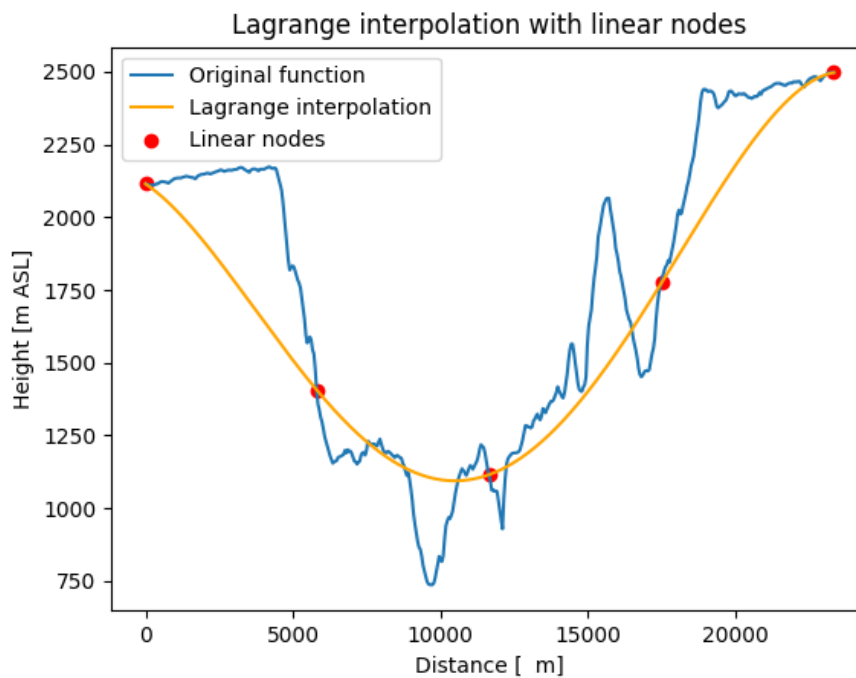
Projekt został zaimplementowany z wykorzystaniem języka Python. Skrypt zawiera samodzielnie napisane metody wykonujące interpolację z wykorzystaniem wielomianu Lagrange'a oraz funkcji sklepanych trzeciego stopnia.

### 3. PIERWSZA TRASA: Wielki Kanion Kolorado

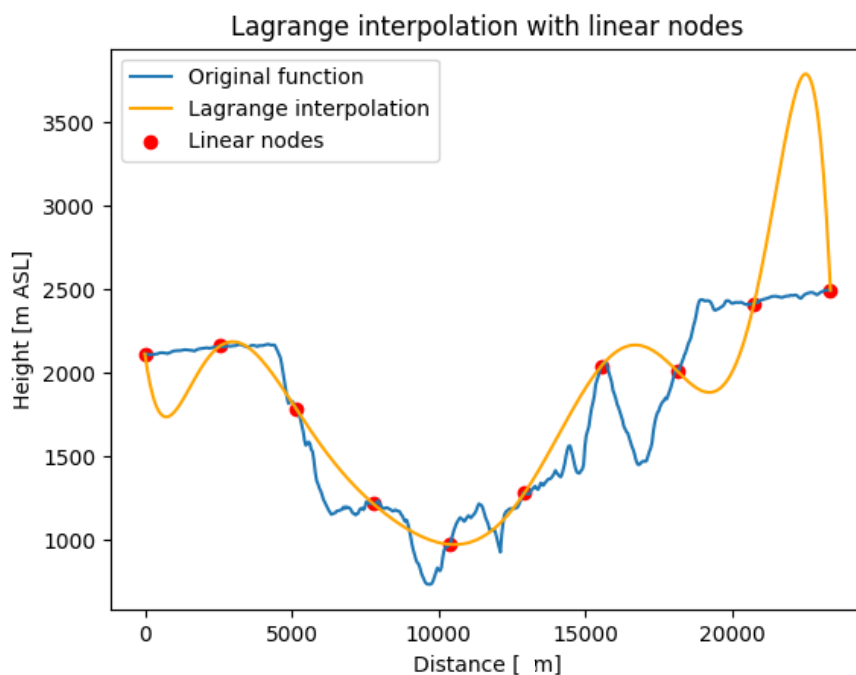
Pierwszą analizowaną funkcją jest Wielki Kanion w Kolorado, który charakteryzuje się nagłym i równoległym spadkiem wysokości, a następnie wzrostem (struktura kanionu).

#### 1) Metoda wykorzystująca wielomian interpolacyjny Lagrange'a z równomiernie oddalonymi:

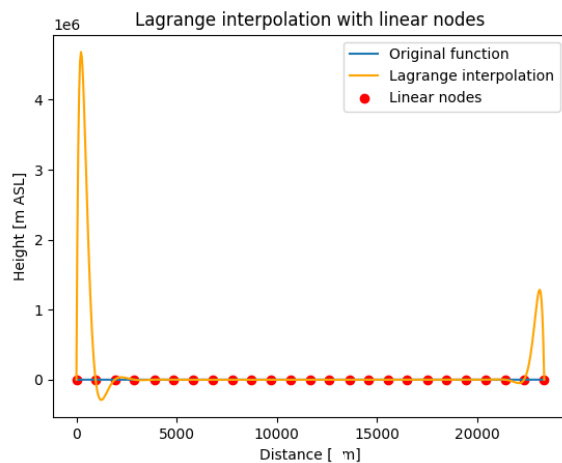
i. 5 węzłami



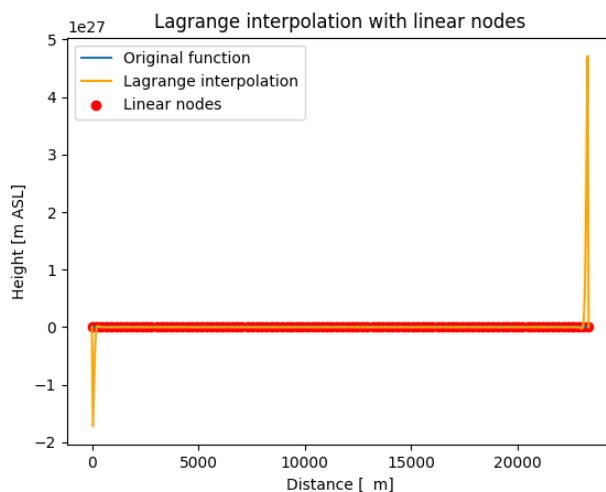
ii. 10 węzłami



### iii. 25 węzłami



### iv. 100 węzłami

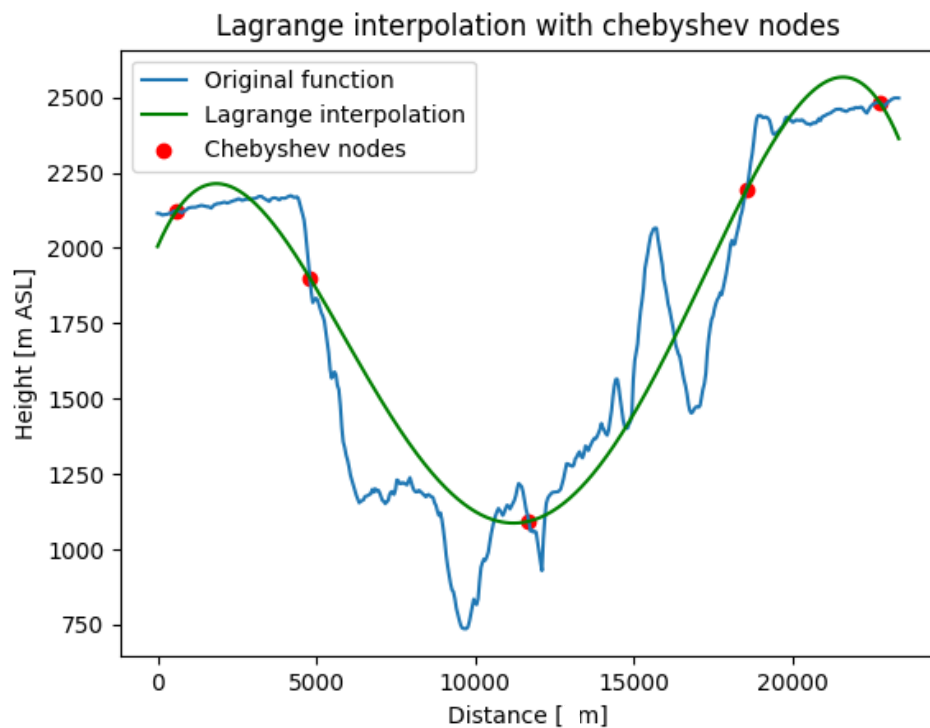


## **WNIOSKI:**

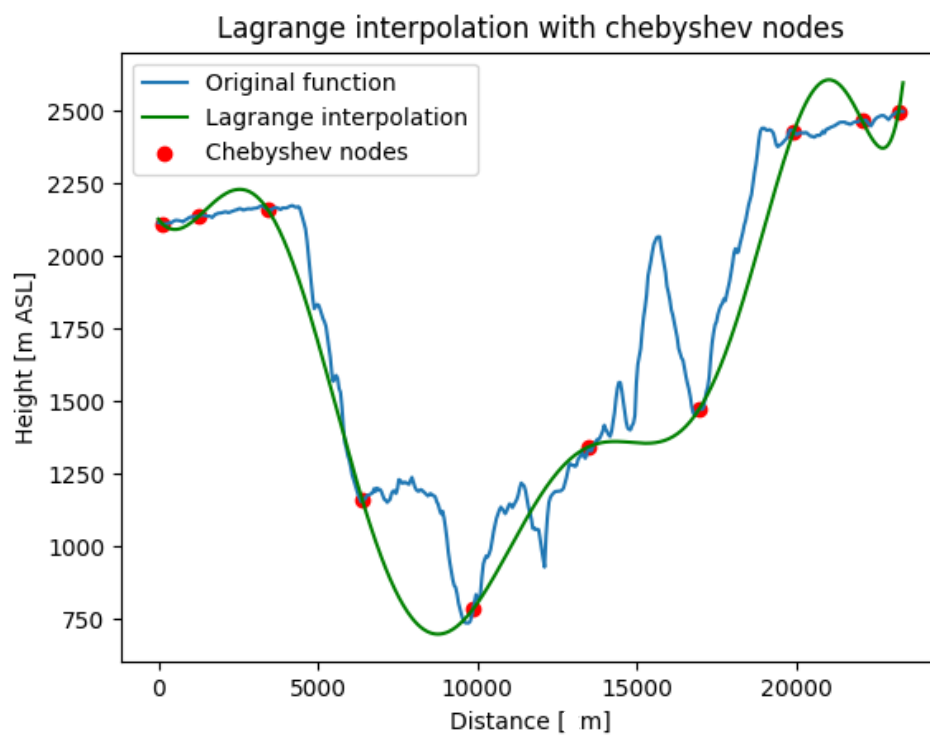
Liczba węzłów widocznie wpływa na otrzymany rezultat. Wynik interpolacji Lagrange'a dla 5 węzłów pokazuje główną tendencję kształtowania się wysokości n.p.m., jednak nie jest w stanie wyróżnić szczegółowego zmniejszania bądź zwiększania się wartości funkcji. Elementy te nieco lepiej wyszukuje rezultat otrzymany dla 10 węzłów, jednak na początku i końcu można zauważyć już pewne oscylacje. Na wykresie dla 25 i 100 węzłów oscylacje te osiągają już bardzo dużą wartość i są typowym przykładem efektu Runge'go, który jest charakterystycznym błędem pojawiającym się przy równomiernie odległych węzłach przy interpolacji wielomianowej o wysokich stopniach. Oscylacje dla 100 węzłów osiągają rząd  $10^{27}$ , gdzie normalne wartości osiągają maksymalnie  $\sim 3800$  m n.p.m.

## 2) Metoda wykorzystująca wielomian interpolacyjny Lagrange'a z:

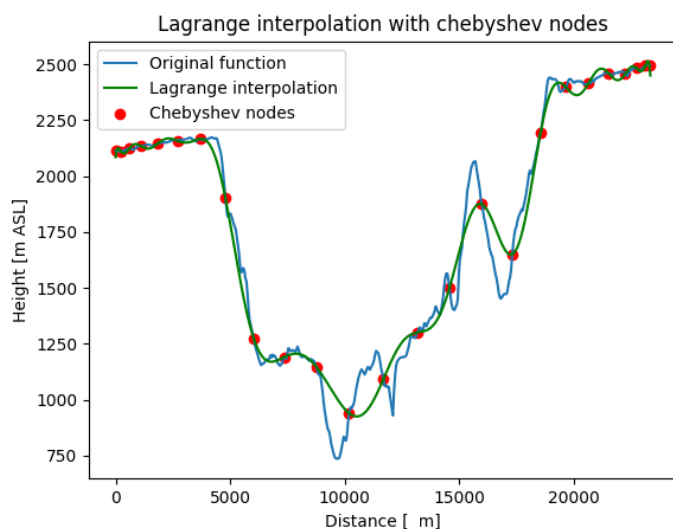
i. 5 węzłami Chebysheva



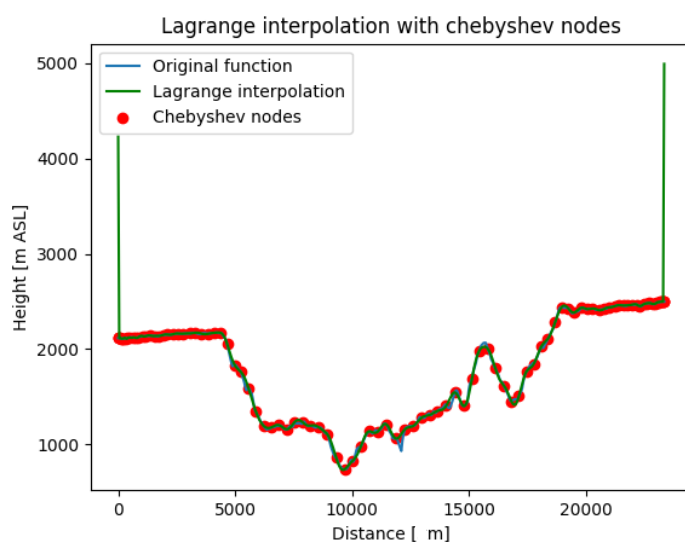
ii. 10 węzłami Chebysheva



### iii. 25 węzłami Chebysheva



### iv. 100 węzłami Chebysheva

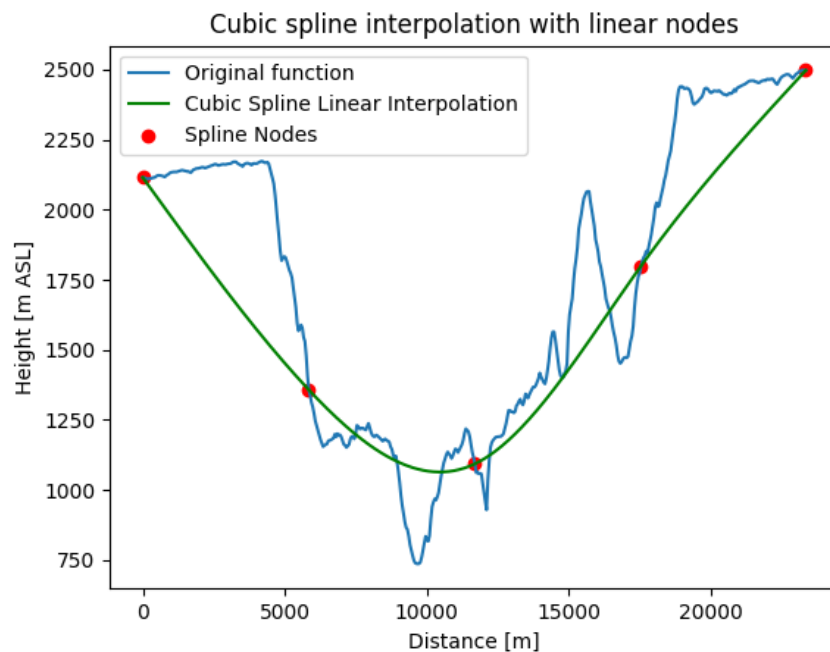


### **WNIOSKI:**

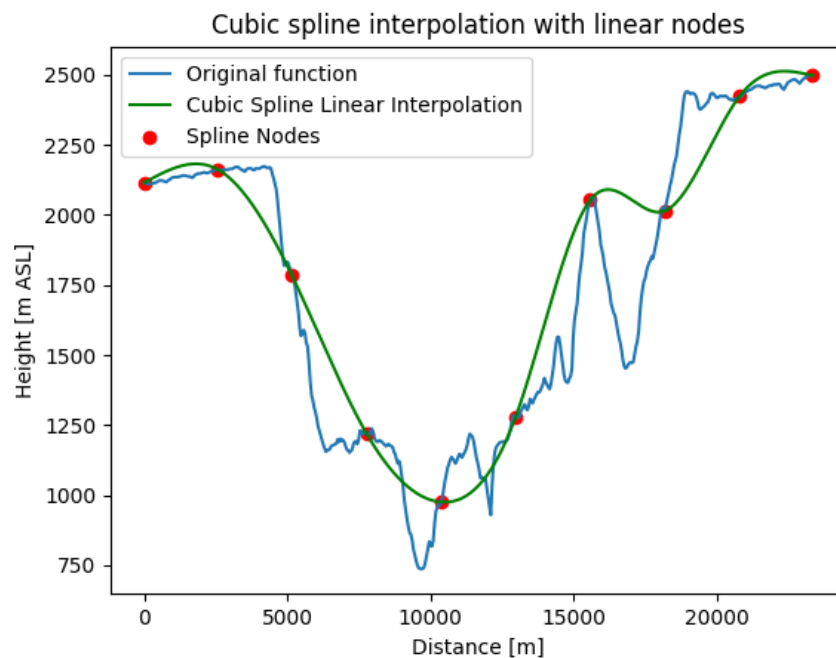
W tym przypadku zastosowane zostały węzły Chebyshev'a pierwszego rodzaju. Pozwalają one zahamować pojawiające się wraz ze wzrostem liczby węzłów oscylacje. Na wykresie przedstawiającym rezultat dla 25 węzłów Chebyshev'a zauważyć można dużo bardziej satysfakcjonujący efekt niż w poprzednim podpunkcie dla równomiernie odległych węzłów. Na wykresie widać, że poprawnie zostało wykryte większość zmian przebiegu funkcji, podając dużo bardziej satysfakcjonujący rezultat. Niestety w przypadku 100 węzłów również zauważyć już można efekt Rung'ego z oscylacjami około dwa razy większymi od realnych wartości. Węzły Chebyshev'a pozwalają osiągnąć lepsze wyniki, jednak dla dużej liczby węzłów nie są w stanie uniknąć efektu Rung'ego.

**3) Metoda wykorzystująca funkcje sklejane trzeciego stopnia z równomiernie oddalonymi:**

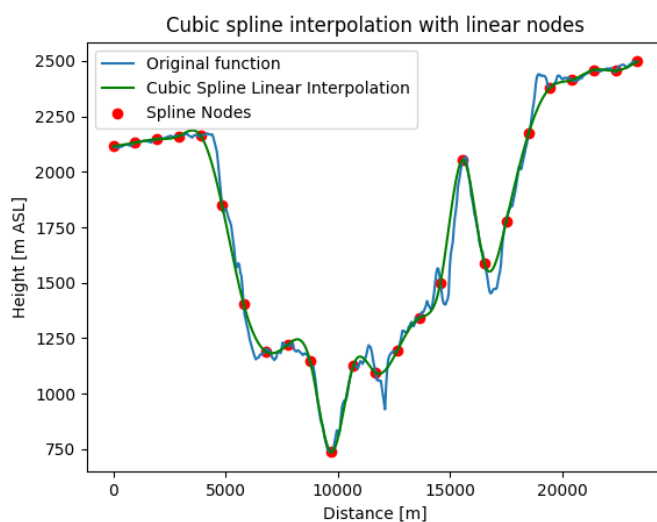
i. 5 węzłami



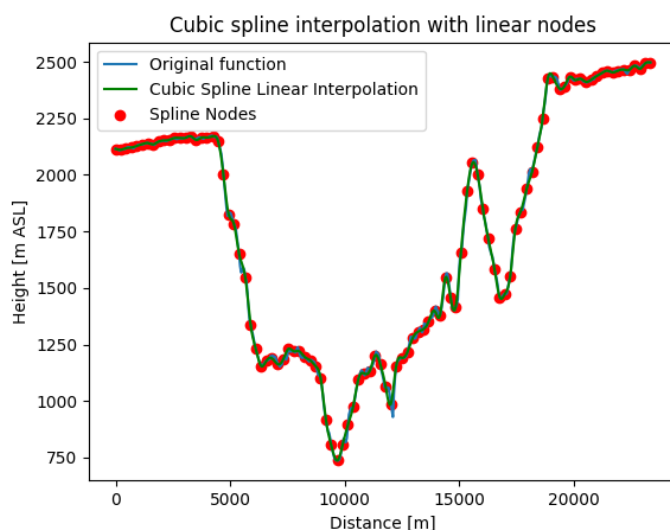
ii. 10 węzłami



### iii. 25 węzłami



### iv. 100 węzłami



## 4) WNIOSKI:

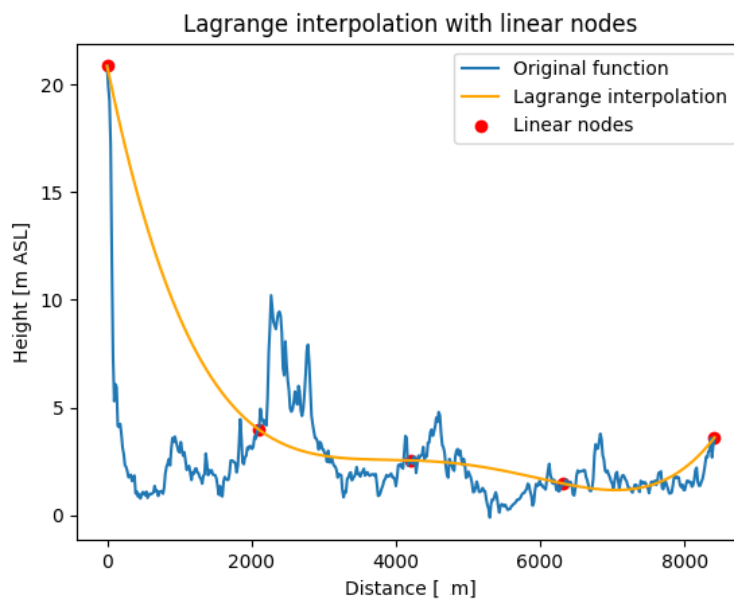
Jak widać na wykresach, metoda wykorzystująca funkcje sklejane trzeciego stopnia sprawdziła się bardzo dobrze. Dla 5 oraz 10 węzłów można zauważyć prawidłowo wykryty ogólny przebieg funkcji, a dla 25 węzłów prawie wszystkie zmiany przebiegu funkcji już zostały dobrze dopasowane. Rezultat ten jest zdecydowanie satysfakcjonujący, a dla 100 węzłów jest niemal idealny. Bez przybliżenia trudno zauważyć jest jakiegokolwiek odbiegające od oryginalnej funkcji fragmenty. W metodzie tej nie występuje efekt Rung'ego, co jest kolejnym atutem tej implementacji.

#### 4. DRUGA TRASA: Spacerniak Gdańsk

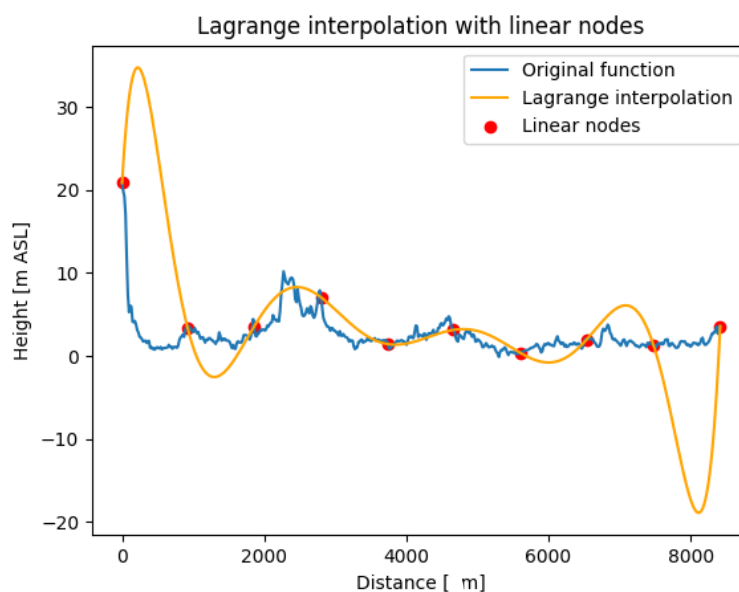
Drugą analizowaną funkcją jest plik o nazwie Spacerniak Gdańsk, który charakteryzuje się bardzo małymi różnicami wysokości na całej długości. Jedyny większy spadek występuje na samym początku i wynosi jedynie ~20m różnicy.

##### 1) metoda wykorzystująca wielomian interpolacyjny Lagrange'a z równomiernie oddalonymi:

###### i. 5 węzłami

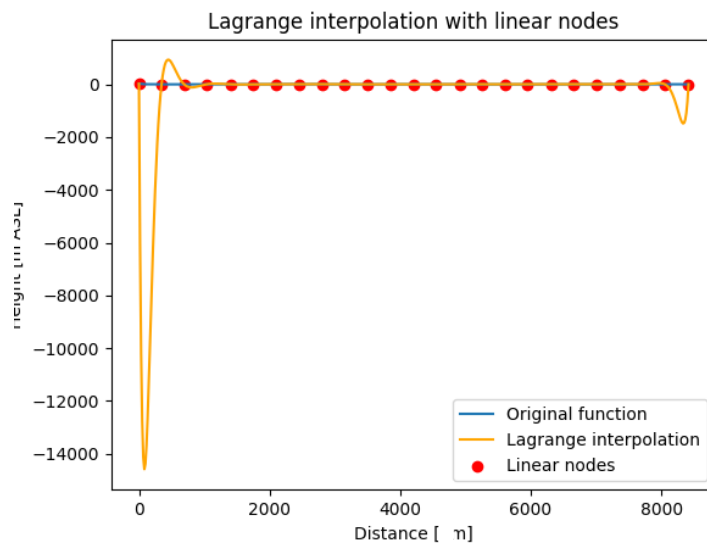


###### ii. 10 węzłami

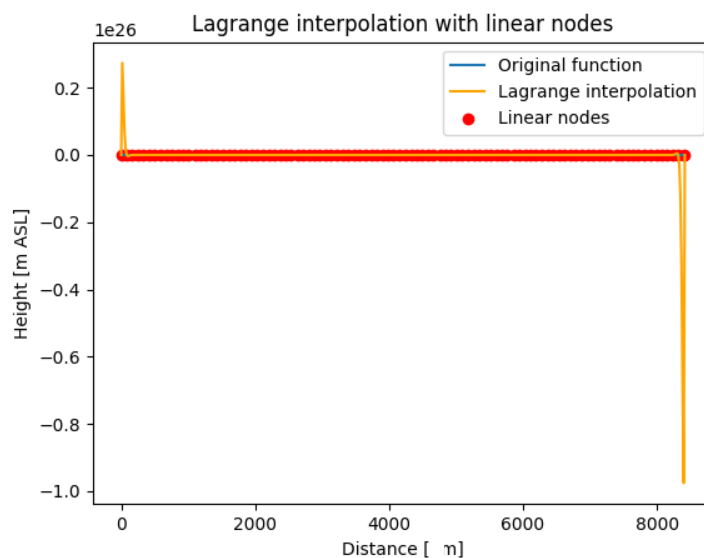




### iii. 25 węzłami



### iv. 100 węzłami

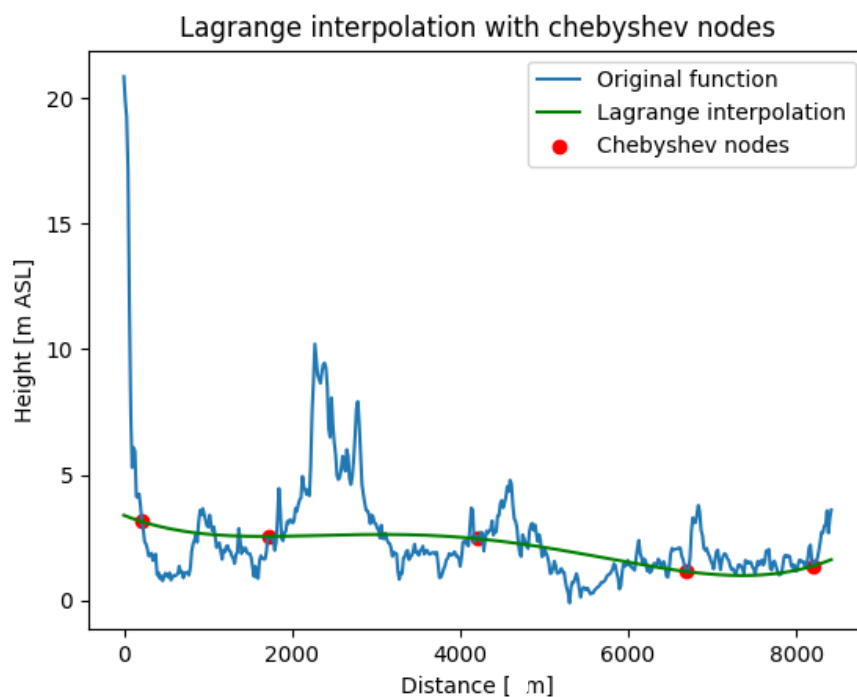


### WNIOSKI:

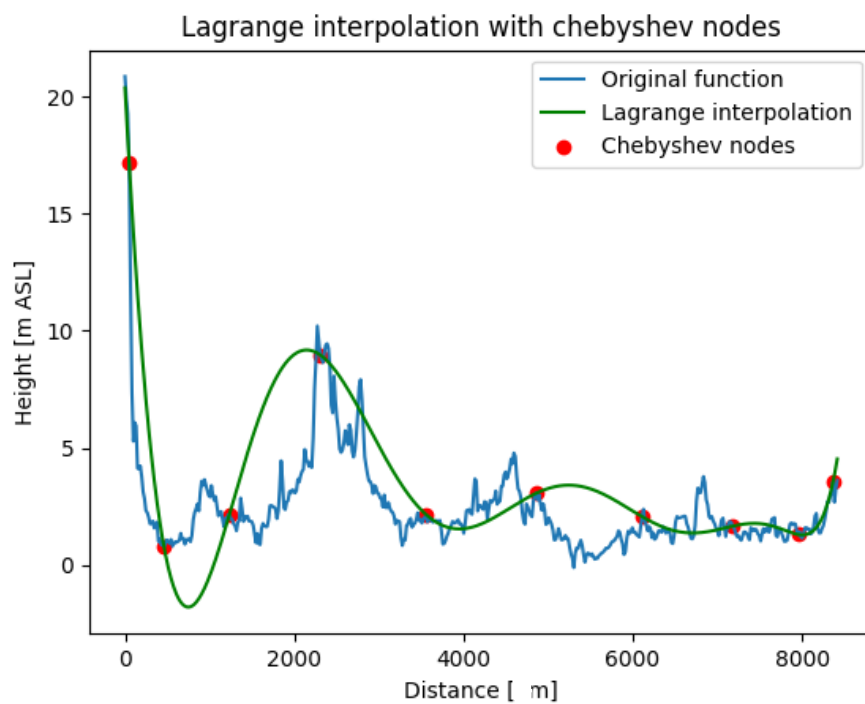
W przypadku dość płaskiej i mało zmieniającej się funkcji reprezentującej profil wysokościowy Spacerniaka metoda wykorzystująca interpolację Lagrange'a z równomiernie oddalonymi węzłami nie sprawdziła się zbyt dobrze. Dla 5 węzłów wykrywa ogólny spadek pomiędzy pierwszym a ostatnim węzłem, jednak nie wykrywa jednego dość znaczącego wzrostu na dystansie 2000-3000km. Sytuacja w tej kwestii lekko poprawia się dla 10 węzłów, jednak można zauważyć już tutaj pojawiające się na krańcach przedziału oscylacje. Dla 25 i 100 węzłów można zauważyć typowy efekt Rung'ego, gdzie oscylacje osiągają wartość rzędu  $10^3$ .

## 2) metoda wykorzystująca wielomian interpolacyjny Lagrange'a z:

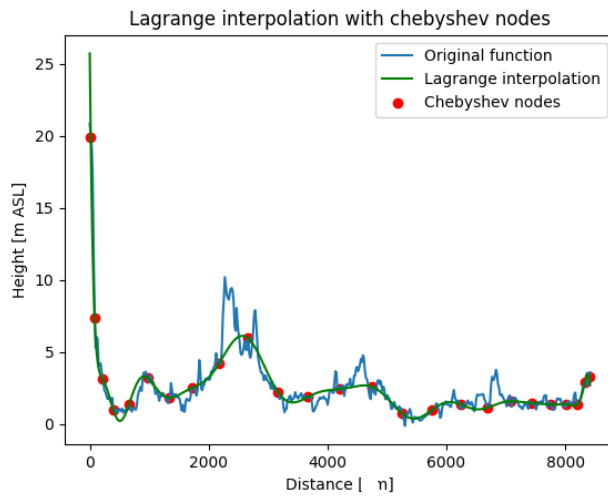
i. 5 węzłami Chebysheva



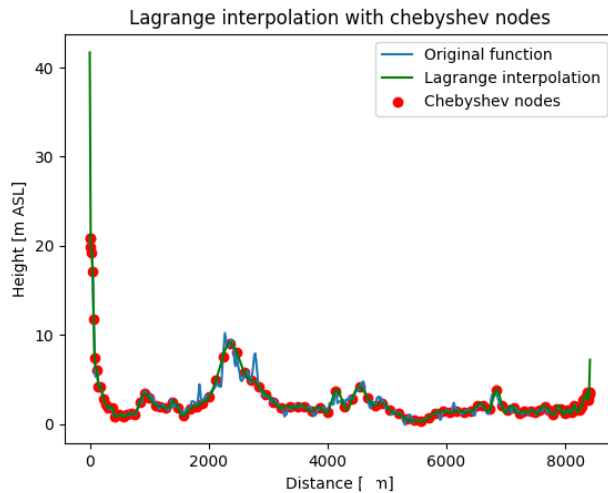
ii. 10 węzłami Chebysheva



### iii. 25 węzłami Chebysheva



### iv. 100 węzłami Chebysheva

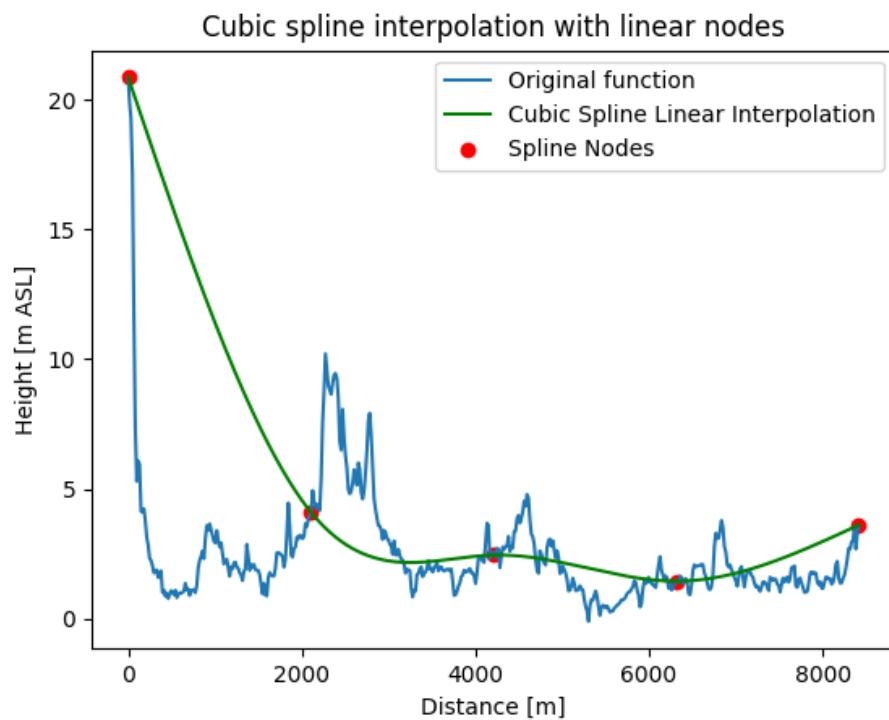


### WNIOSKI:

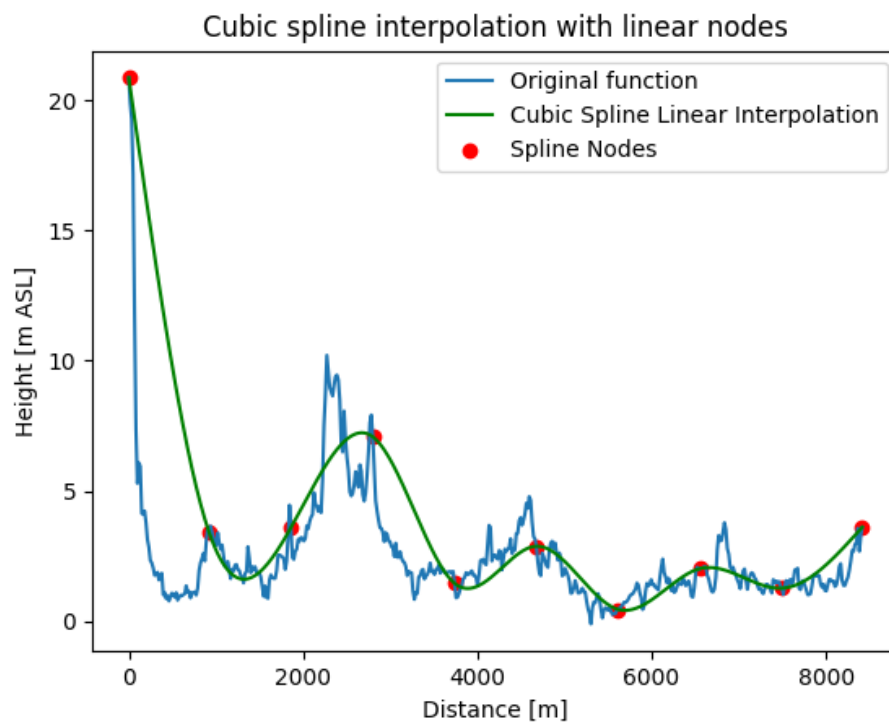
Zastosowana tutaj metoda sprawdziła się niezbyt dobrze dla 5 węzłów. Nie został wykryty początkowy dość duży spadek ani trochę mniejszy wzrost na dystansie 2000-3000 m. Zaprezentowany na wykresie rezultat ma charakter liniowy i nie wykazuje żadnych wzrostów ani obniżień. Sytuacja zdecydowanie lepiej wygląda dla 10 węzłów. Wykryte zostały pewne największe zmiany i rezultat nie ma już charakteru liniowego. Dla 25 węzłów wykres przedstawiający wynik interpolacji zaczyna przypominać oryginalną funkcję. Ponadto, dzięki zastosowaniu węzłów Chebyshev'a nie występuje efekt Rung'ego. W przypadku Spacerniaka nawet dla 100 węzłów nie są zauważalne żadne duże oscylacje, a rezultat jest bardzo zadowalający.

3) **metoda wykorzystująca funkcje sklejane trzeciego stopnia z równomiernie oddalonymi:**

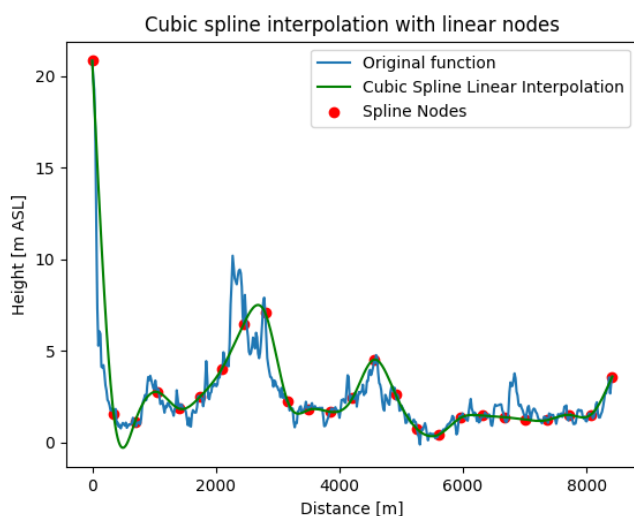
i. 5 węzłami



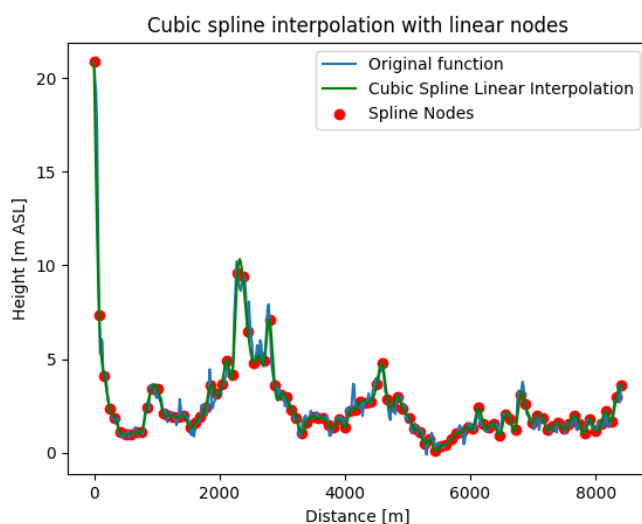
ii. 10 węzłami



### iii. 25 węzłami



### iv. 100 węzłami



## **WNIOSKI:**

Z wykorzystaniem metody funkcji sklejanych możemy zauważyć bardzo satysfakcjonujące wyniki. Dla 5 węzłów nakreślona została ogólna tendencja spadkowa wartości, a dla 10 węzłów wykryte zostały już najbardziej znaczące zmiany wysokości. Rezultat osiągnięty dla 25 węzłów z wyjątkiem dwóch małych niedociągnięć w okolicy 2000m i 7000m jest bardzo zbliżony do oryginalnego. Ostatni wykres przedstawiający wynik uzyskany z wykorzystaniem 100 węzłów jest prawie idealny i tylko w niektórych miejscach można zauważyć lekkie różnice z funkcją oryginalną. Dzięki zastosowanej metodzie, nie zaobserwowaliśmy efektu Rung'ego.

## 5. WPŁYW LICZBY PUNKTÓW WĘZŁOWYCH NA WYNIKI:

### 1) Metoda wykorzystująca interpolację Lagrange'a:

Im więcej węzłów tym wyniki są dokładniejsze, jednak gdy liczba staje się zbyt duże istnieje spore ryzyko na pojawienie się oscylacji na krańcach przedziału, zwanych efektem Rung'ego. Zjawisko to całkowicie uniemożliwia analizę interpolacji, gdyż wykres się spłaszcza, a widoczne są jedynie oscylacje osiągające duże większe wartości.

### 2) Metoda wykorzystująca funkcje sklepane trzeciego stopnia:

Im więcej węzłów tym lepiej aproksymowana jest funkcja. Zastosowanie wystarczająco dużej liczby węzłów pozwala na osiągnięcie prawie identycznej funkcji jak oryginalna. Minusem zwiększania się liczby węzłów jest znacząco mocniej rosnąca złożoność obliczeniowa i pamięciowa rozwiązania, w porównaniu do metody Lagrange'a.

## 6. WPŁYW ROZMIESZCZENIA PUNKTÓW WĘZŁOWYCH NA WYNIKI:

### 1) Równomiernie oddalone węzły

Regularne rozmieszczenie węzłów najlepiej sprawdza się dla metody wykorzystującej funkcje sklepane trzeciego stopnia, gdyż pozwala to na założenie, że odległość pomiędzy kolejnymi punktami jest taka sama dla każdego podprzedziału ( $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \text{itd.}$ ), co ułatwia wiele obliczeń potrzebnych w tej metodzie. W przypadku interpolacji Lagrange'a równomiernie oddalone węzły są niestety częstą przyczyną pojawiania się oscylacji na krańcach przedziału, czyli tzw. efektu Rung'ego, który zazwyczaj uniemożliwia zauważenie kształtowania się aproksymowanej funkcji.

### 2) Węzły Chebyshev'a pierwszego stopnia

Zmiana rozmieszczenia węzłów na mniej regularne pozwala zahamować tempo powstawania efektu Rung'ego. Dzięki zastosowaniu węzłów Chebyshev'a pierwszego rodzaju, w niektórych przykładach pierwsze zauważalne oscylacje zamiast przy już 10 węźle, pojawiały się dopiero przy np. 100 węzłach.

Metoda Chebyshev'a pierwszego stopnia wykorzystuje wzór:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2N}\pi\right)$$

## 7. WPŁYW CHARAKTERU TRASY NA WYNIKI:

- 1) Ukształtowanie jednorodne, o bardzo małych różnicach wysokości i jednej tendencji kształtowania się

W przypadku miejsc o mało urozmaiconym terenie pod względem profilu wysokościowego, dość dobre efekty można zauważyć już przy mniejszej liczbie węzłów. W takiej sytuacji wyznaczona zostanie ogólna tendencja kształtowania się funkcji, bez uwzględnionych nagłych zmian. Zastosowanie węzłów Chebyshev'a w takiej sytuacji dla małej liczby węzłów nie dało lepszych rezultatów niż dla rozmieszczenia równomiernego. Rezultatem była dość płaska, prawie stała funkcja, gdy podstawowe węzły wykryły na początku spadek i pod koniec delikatny wzrost, co jest zgodne z oryginalną funkcją.

- 2) Duża różnica wysokości, początkowy spadek, a następnie dość symetryczny wzrost (dolina/kanion)

W przypadku doliny mała liczba węzłów również pozwala na wyznaczenie głównej tendencji kształtowania się terenu. Zwiększanie tej liczby pozwala na uzyskanie lepszych wyników. Korzystając z interpolacji wykorzystującej funkcję Lagrange'a zdecydowanie lepiej sprawdza się w takiej sytuacji rozmieszczenie węzłów Chebyshev'a. Zastosowanie takiego rozmieszczenia zamiast równoległego pozwoliło w takim przypadku szybciej i lepiej określić zmiany wysokościowe.

Dla metody wykorzystującej funkcje sklepane trzeciego stopnia nie zauważyłam szczególnej różnicy w jakości aproksymacji zadanego profilu wysokościowego.

## 8. PODSUMOWANIE:

Metoda wykorzystująca funkcję Lagrange'a jest prosta w implementacji, jednak ciężko jest dopasować rodzaj oraz liczbę węzłów, aby otrzymać bardzo dokładne wyniki. Jeśli zależy nam na mniejszej dokładności, ale szybszej implementacji to powinniśmy wybrać tę metodę. Jest ona podatna na wystąpienie efektu Runge'ego, jednak można próbować to niwelować stosując węzły Chebyshev'a. Rozwiązanie to często jest wystarczające do uzyskania mało szczegółowej aproksymacji zadanej funkcji.

Metoda wykorzystująca funkcje sklepane trzeciego stopnia jest zdecydowanie trudniejsza w implementacji, zamuje dużo więcej czasu zrozumienie jej działania oraz ma większą złożoność pamięciową i obliczeniową. Jeśli jednak zależy nam na dość pewnym i skutecznym rozwiązaniu to jest to najlepsza metoda z omawianych w ramach tego zadania. Z jej wykorzystaniem można osiągnąć aproksymacje niemal identyczne z

funkcjami oryginalnymi, co będzie pomocnym rozwiązaniem, w przypadku, gdy potrzebujemy bardzo szczegółową analizę zmiany przebiegu funkcji.