Magdalena Krampa, 193195

PROJEKT 2

UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

1. WSTĘP:

Celem projektu jest implementacja i analiza dwóch metod iteracyjnych oraz jednej metody bezpośredniej, służących do rozwiązywania układów równań liniowych. Wspomniane metody to kolejno metoda Jacobiego, Gaussa-Seidla oraz faktoryzacji LU.

2. IMPLEMENTACJA:

Zadanie zostało wykonane z wykorzystaniem C++ oraz Matlab'a. Wszelkie obliczenia oraz metody rozwiązywania układów równań zostały napisane w jeżyku C++. Matlab został wykorzystany do stworzenia wykresów, na podstawie zebranych danych.

3. ZADANIA:

A. OPIS RÓWNANIA MACIERZOWEGO:

W projekcie rozwiązywane będzie równanie macierzowe o postaci:

$$\mathbf{Ax = b,}$$

gdzie:

- **A** – macierz systemowa, a w tym przypadku również macierz pasmowa o rozmiarze 995x995. Macierz ta zawiera pięć diagonali:
  - główna z elementami o wartości 6
  - cztery sąsiednie z elementami o wartości -1,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

- **b** – wektor pobudzenia o długości 995, którego n−ty element ma wartość sin(4*n),
  - Pierwsze 10 wartości wektora b:

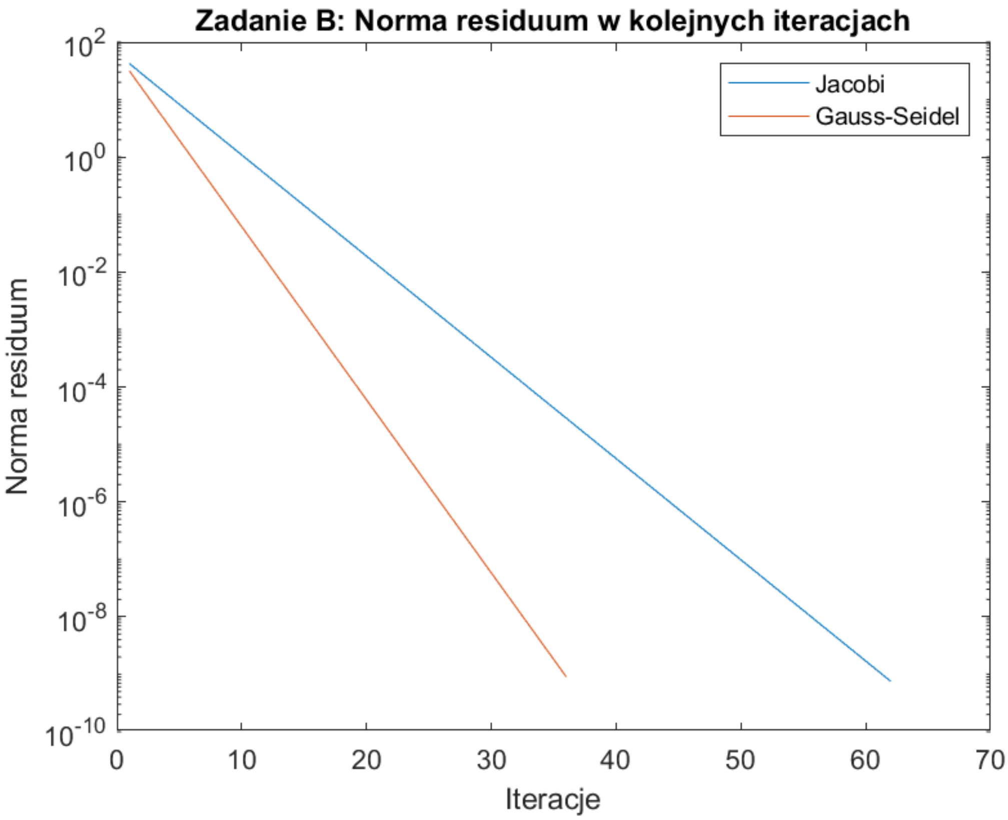
```
%%% Wektor b %%%
 0
-0.756802
 0.989358
-0.536573
-0.287903
 0.912945
-0.905578
 0.270906
 0.551427
-0.991779
```

- **x** - wektor przechowujący rozwiązanie układu równań o długości 995.

B. METODA JACOBI’EGO ORAZ GAUSS-SEIDL'A:

Powyższe metody zostały wykorzystane do rozwiązania układu równań o podanych w zadaniu A parametrach macierzy A oraz wektora b, gdzie norma residuum ma być mniejsza od 10^{-9}. Liczba iteracji, norma residuum oraz czas mają wartości:

```
%%%%%%%%%% ZAD B %%%%%%%%%%

~~ JACOBI ~~
Iterations: 62
Residual norm: 7.52504e-10
Time: 0.182s

~~ GAUSS-SEIDEL ~~
Iterations: 36
Residual norm: 9.0225e-10
Time: 0.125s
```



C. WYKORZYSTANIE METOD ITERACYJNYCH DLA INNEGO UKŁADU RÓWNAŃ:

Równanie macierzowe ma postać:

Ax = b ,

gdzie:

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ o rozmiarze 995x995,
- **b** – wektor pobudzenia o długości 995, którego n–ty element ma wartość sin(4*n),
- **x** - wektor przechowujący rozwiązanie układu równań o długości 995.

Liczba iteracji, norma residuum oraz czas mają wartości:

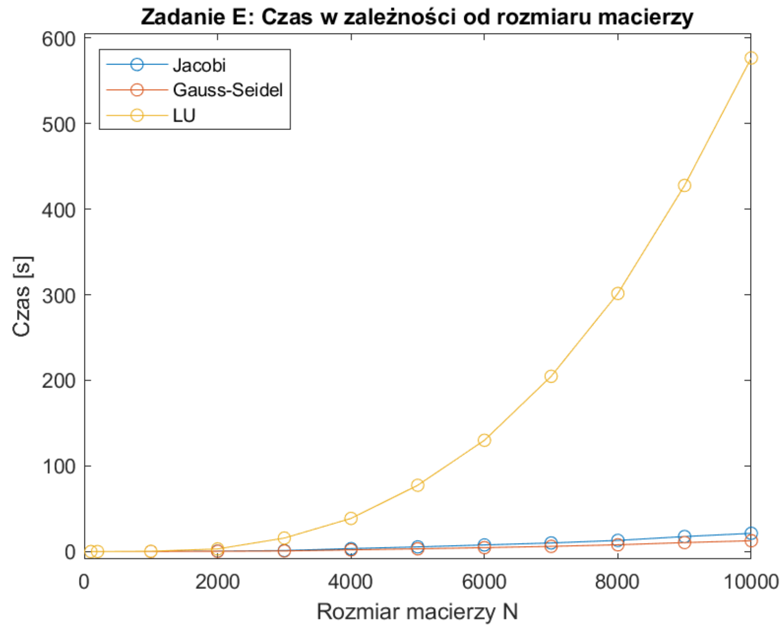
```
%%%%%%%%%% ZAD C %%%%%%%%%%

~~ JACOBI ~~
Iterations: 1000
Residual norm: 2.58126e+126
Time: 2.859s

~~ GAUSS-SEIDEL ~~
Iterations: 1000
Residual norm: inf
Time: 2.261s
```

D. WYKORZYSTANIE METODY FAKTORYZACJI LU DLA UKŁADU RÓWNAŃ:

Wykorzystana została metoda bezpośrednia faktoryzacji LU do rozwiązania układu równań o parametrach podanych w zadaniu C. Norma residuum oraz czas mają wartości:

```
%%%%%%%%%% ZAD D %%%%%%%%%%
~~ LU ~~
Residual norm: 1.83941e-13
Time: 0.257s
```

E. PORÓWNANIE CZASU ROZWIĄZANIA UKŁADÓW RÓWNAŃ W ZALEŻNOŚCI OD METODY ORAZ WIELKOŚCI MACIERZY:



PORÓWNANIE DLA KONKRETNYCH METOD ORAZ ROZMIARÓW MACIERZY						
METODA / ROZMIAR	JACOBI [s]		GAUSS-SEIDEL [s]		FAKTORYZACJA LU [s]	
	CZAS [s]	NORMA RESIDUUM	CZAS [s]	NORMA RESIDUUM	CZAS[s]	NORMA RESIDUUM
100 x 100	0.004	7.0451e-10	0.003	9.56963e-10	0.002	1.01016e-15
200 x 200	0.010	7.18253e-10	0.005	7.5204e-10	0.004	1.35555e-15
1000 x 1000	0.179	7.54434e-10	0.005	9.04537e-10	0.357	3.08472e-15
2000 x 2000	0.539	7.16007e-10	0.304	6.45105e-10	3.040	4.39602e-15
3000 x 3000	1.170	8.78868e-10	0.666	7.92385e-10	15.742	5.42762e-15
4000 x 4000	3.435	6.77286e-10	1.964	9.16334e-10	38.676	6.24615e-15
5000 x 5000	5.413	7.57734e-10	3.159	5.12651e-10	77.422	7.03793e-15
6000 x 6000	7.715	8.30424e-10	4.544	5.61912e-10	129.991	7.71474e-15
7000 x 7000	10.020	8.97248e-10	6.035	6.07203e-10	204.724	8.35853e-15
8000 x 8000	13.006	9.59425e-10	7.875	6.49327e-10	301.537	8.90899e-15
9000 x 9000	17.517	6.78534e-10	10.457	6.88889e-10	427.746	9.41634e-15
10000 x 10000	21.271	7.15345e-10	12.621	7.263e-10	576.748	9.88172e-15

F. WNIOSKI:

a. Macierz A poza 5 diagonalami jest wypełniona zerami. Wykorzystując gotowe narzędzia do rozwiązywania układów równań, korzystniejsze byłoby zapisanie tej macierzy w formacie rzadkim, jednak z uwagi na założenia projektu, wykorzystany został format pełny.

b. W zadaniu B lepiej sprawdziła się metoda Gaussa-Seidla. Układ równań z zadania A został rozwiązany w 36 iteracjach co jest wartością blisko dwa razy mniejszą niż dla metody Jacobiego (62 iteracje). Czas wykonywanych obliczeń metodą Gaussa-Seidla również jest szybszy o około 35%. Korzystając z tej metody potrzebowano 0.086s, zaś dla metody Jacobiego 0.134s. Jak można zauważyć na wykresie w tym konkretnym przypadku, metoda Gaussa-Seidla od samego początku osiągała mniejsze wartości normy residuum oraz szybciej zbliżała się do wartości rzędu 10^{-9}.

c. Jak można zauważyć na wykresie, metody iteracyjne, wykorzystane do rozwiązania układu równań z nowymi wartościami macierzy A w zadaniu C, nie zbiegają. Norma residuum obu metod bardzo szybko rośnie z każdą iteracją. Dla metody Jacobiego osiąga wartość rzędu $2.58126 \cdot 10^{126}$, zaś dla Gaussa-Seidla już w 509 iteracji przekracza wartość rzędu 10^{154}, osiągając w ten sposób wartość INF. Metody iteracyjne,dla podanej w omawianym zadaniu macierzy A, zdecydowanie się nie sprawdziły, z uwagi na zauważalny na wykresie brak zbieżności.

d. W przeciwieństwie do metod iteracyjnych z zadania D, metoda faktoryzacji LU bardzo dobrze poradziła sobie z rozwiązaniem układu równań z zadania C. Obliczenia zajęły 0.257s, a norma residuum osiągnęła wartość $1.83941 \cdot 10^{-13}$. Metoda faktoryzacji LU jest znacznie dokładniejsza.

e. Jak widać na wykresie załączonym w zadaniu E, wzrost czasu rozwiązywania układu równań w zależności do rozmiaru dla metody Jacobiego i Gaussa-Seidla jest bardzo podobny. Metoda Jacobiego w każdym przypadku zajmuje trochę więcej czasu niż metoda Gaussa-Seidla, jednak jest to maksymalnie dwa razy większa wartość. Inaczej jest dla metody faktoryzacji LU. Na wykresie można zauważyć drastyczny i nieporównywalny wzrost czasu rozwiązywania równań. Nagły i duży wzrost rozpoczyna się przy macierzy o rozmiarze około 2000 x 2000, gdzie metoda faktoryzacji LU potrzebuje do 10 razy więcej czasu, niż metody iteracyjne. Dla macierzy o rozmiarze 10000 x 10000 czas obliczeń osiąga ponad 9.5 minuty i jest ponad 27 razy większy niż czas potrzebny dla metody Jacobiego oraz ponad 45 razy większy niż dla metody Gaussa-Seidla. Metoda faktoryzacji LU potrzebuje więcej czasu na wykonanie obliczeń, jednak jak można zauważyć w tabeli jest dokładniejsza niż metody iteracyjne dla omawianych przypadków.