



Софийски Университет "Св. Климент Охридски"

# Първа и втора лема на Щолц

Изготвил: Минко Гечев

Ръководител: доц. Първан Първанов



# 1 Теорема и доказателства

**Лема 1.** Нека  $\{y_n\}_{n=1}$  е строго монотонна, а

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \quad (1)$$

за  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 : \forall k > n > N_1 :$

$$\left| \frac{x_k - x_n}{y_k - y_n} - l \right| < \varepsilon_1 \quad (2)$$

*Доказателство:* За да докажем лемата ще разгледаме два случая, съответно, когато редицата е строго растяща и строго намаляваща.

1 сл. Нека  $y_n$  е строго растяща. От (1)  $\Rightarrow \exists N_1 : \forall n > N_1, n \in \mathbb{N}$  е изпълнено:

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - l \right| < \varepsilon_1 \quad (3)$$

Ще докажем, че това е търсеното  $N_1$ . Нека  $n, k \in \mathbb{N}$  и  $k > n > N_1$ . Понеже  $y_j > y_i$  за  $\forall j > i$

$$\left| \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} - l \right| < \varepsilon_1 \Leftrightarrow (l - \varepsilon_1)(y_j - y_i) < x_j - x_i < (l + \varepsilon_1)(y_j - y_i) \quad (4)$$

Ако приложим (4) за  $i = n, j = n + 1$  и  $j = n + 2, i = n + 1$  и т.н. получаваме:

$$+ \begin{cases} (l - \varepsilon_1)(y_{n+1} - y_n) < x_{n+1} - x_n < (l + \varepsilon_1)(y_{n+1} - y_n) \\ \dots \\ (l - \varepsilon_1)(y_k - y_{k-1}) < x_k - x_{k-1} < (l + \varepsilon_1)(y_k - y_{k-1}) \end{cases}$$

$$(l - \varepsilon_1)(\cancel{y_{n+1}} - y_n + \cancel{y_{n+2}} - y_{n+1} + \dots + y_k - \cancel{y_{k-1}}) < \\ x_{n+1} - x_n + x_{n+2} - x_{n+1} + \dots + x_k - x_{k-1} < (l + \varepsilon_1)(\cancel{y_{n+1}} - y_n + \cancel{y_{n+2}} - \cancel{y_{n+1}} + \dots + y_k - \cancel{y_{k-1}})$$

$$(l - \varepsilon_1)(y_k - y_n) < x_k - x_n < (l + \varepsilon_1)(y_k - y_n) \quad (5)$$

от тук намерихме  $N_1 : k > n > N_1$  и

$$\left| \frac{x_k - x_n}{y_k - y_n} - l \right| < \varepsilon_1, \text{ защото (5) е еквивалентно на (2).}$$

Случаят за монотонно намаляваща редица се доказва аналогично.

**Първа лема на Щолц.** Нека  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  е строго монотонна.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l, \text{ тогава } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l$$

Доказателство: Нека  $\varepsilon > 0, \varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ , то от Лема 1  $\Rightarrow \exists N : k > n > N$

$$\left| \frac{x_k - x_n}{y_k - y_n} - l \right| < \varepsilon$$

Нека фиксираме  $n > N$  и направим граничен преход при  $k \rightarrow \infty$  в горното неравенство. По условие  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  и  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  са намаляващи и клонят към 0 при  $n \rightarrow \infty \Rightarrow \left| \frac{x_n}{y_n} - l \right| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$  т.е.:

$$\forall n > N \Rightarrow \left| \frac{x_n}{y_n} - l \right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

**Втора лема на Щолц.** Нека  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  е строго растяща -  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l. \text{ Тогава:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l$$

Доказателство: Нека  $\varepsilon > 0$  и  $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ . От Лема 1 следва, че  $\exists N_1 : k > m > N_1 :$

$$\left| \frac{x_k - x_m}{y_k - y_m} - l \right| < \varepsilon_1$$

т.е.  $(l - \varepsilon_1)(y_k - y_m) < x_k - x_m < (l + \varepsilon_1)(y_k - y_m)$ . Нека  $m > N_1, y_m > 0$ . Нека разделим на  $y_k > 0$ :

$$(l - \varepsilon_1)\left(l - \frac{y_m}{y_k}\right) < \frac{x_k}{y_k} - \frac{x_m}{y_k} < (l + \varepsilon_1)\left(1 - \frac{y_m}{y_k}\right)$$

Като прехвърлим  $\frac{x_m}{y_k}$  получаваме:

$$(l - \varepsilon_1)(1 - \frac{y_m}{y_k}) + \frac{x_m}{y_k} < \frac{x_k}{y_k} < (l + \varepsilon_1)(1 - \frac{y_m}{y_k}) + \frac{x_m}{y_k} \quad (7).$$

Нека  $k \rightarrow \infty$ , понеже  $y_k \rightarrow \infty$ , при  $k \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} ((l - \varepsilon_1)(1 - \frac{y_m}{y_k}) + \frac{x_m}{y_k}) = l - \varepsilon_1 < l - \varepsilon, \text{ и}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} ((l + \varepsilon_1)(1 - \frac{y_m}{y_k}) + \frac{x_m}{y_k}) = l + \varepsilon_1 < l + \varepsilon$$

Следователно съществува  $N$ , такова че за всяко  $k > N$  е изпълнено:

$$l - \varepsilon < (l - \varepsilon_1)(1 - \frac{y_m}{y_k}) + \frac{x_m}{y_k} \text{ и } (l + \varepsilon_1)(1 - \frac{y_m}{y_k}) + \frac{x_m}{y_k} < l + \varepsilon$$

Като се върнем в (7) получаваме:

$$l - \varepsilon < \frac{x_k}{y_k} < l + \varepsilon \text{ или } \forall n > N \Rightarrow |\frac{x_n}{y_n} - l| < \varepsilon$$

**Теорема 1.** Нека  $(a_n)$  е редица от реални числа,  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} : \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ . Ако:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = b, b \in \mathbb{R}, b \neq 1$$

$$\text{То: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$$

$$\text{Доказателство: } \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \frac{\frac{1}{b_{n+1}}}{\frac{1}{b_n}} = \frac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} \frac{b_n}{b_{n+1}}}{1 - \frac{b_n}{b_{n+1}}} \rightarrow \frac{l - lb}{1 - b} = l.$$

**Теорема 2.** Нека е дадена редицата  $\{x_n\}$ . Ако  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, x \in (-\infty, \infty)$ , тогава:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = x$$

$$\text{Доказателство: Нека } b_n = n, a_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \text{ тогава } \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = x_{n+1} \rightarrow x.$$

## 2 Примери

**Пример 1.** Оценете  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}$ , където  $k \in \mathbb{N}$ .

Решение: Нека  $a_n = 1^k + 2^k + \dots + n^k$ ,  $b_n = n^{k+1}$ . Ясно е, че редицата  $b_n$  е с положителни членове, строго растяща и неограничена. Сега:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k}{(1 + \binom{k+1}{1}n + \binom{k+1}{2}n^2 + \dots + \binom{k+1}{k}n^k + n^{k+1}) - n^{k+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k/n^k}{(1 + \binom{k+1}{1}n + \binom{k+1}{2}n^2 + \dots + \binom{k+1}{k}n^k)/n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + 1/n)^k}{\binom{k+1}{k}} = \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

От тук използвайки лемата на Щолц получаваме, че границата е  $\frac{1}{k+1}$ .

**Пример 2.** Оценете  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k a_k}{n^2}$ , при  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ .

Решение: От втората лема на Щолц следва, че горната редица има същата граница като:

$$\frac{\sum_{k=1}^n k a_k - \sum_{k=1}^{n-1} k a_k}{n^2 - (n-1)^2} = \frac{n a_n}{2n-1} = \frac{a_n}{2 - 1/n} \rightarrow \frac{L}{2}$$

**Пример 3.** Нека  $\{x_n\}$  е редица от реални числа и нека:  $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$ ,  $\forall n \geq 0$ . Оценете:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \ln(n+1))$ .

Решение: Тъй като  $x_n$  е растяща и  $x_n \rightarrow \infty$ .

Означаваме  $y_n = e^{x_n - \ln(n+1)} = \frac{e^{x_n}}{n+1}$ . Нека приложим лемата на Щолц:

$$\frac{e^{x_{n+1}} - e^{x_n}}{n+2 - (n+1)} = e^{x_n} (e^{x_{n+1} - x_n} - 1) = \frac{e^{e^{-x_n}} - 1}{e^{-x_n}} \rightarrow 1$$

Тъй като  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$  и  $e^{-x_n} \rightarrow 0$ .

От Щолц следва, че  $y_n \rightarrow 1$ , което означава, че  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \ln(n+1) = 0$ .

**Пример 4.** Намерете:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \dots + n!}{n!}$$

*Решение:* Като приложим лемата на Щолц получаваме:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)! - n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

**Пример 5.** Дадена е редицата:  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ , намерете  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ .

*Решение:* Прилагайки лемата на Щолц получаваме:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{(n+1) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_n}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

**Литература:**

1. Уикипедия - [en.wikipedia.org/wiki/Stolz theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Stolz_theorem)
2. Marian Mureşan: A Concrete Approach to Classical Analysis. Springer 2008