Първа и втора лема на Щолц

Минко Гечев

Софийски Университет, Факултет по Математика и Информатика

03.04.2013

Лема 1

Лема 1:

Нека $\{y_n\}_{n=1}$ е строго монотонна, а

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l$$

за $\forall \varepsilon_1 \ > 0, \exists N_1 : \forall k > n > N_1$:

$$|\frac{x_k - x_n}{y_k - y_n} - l| < \varepsilon_1$$

Доказателство (1)

1 сл. $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ е строго растяща $\Rightarrow y_j > y_i$ за $\forall j > i$

Доказателство (2)

$$|\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} - l| < \varepsilon_1 \Leftrightarrow$$
$$(l - \varepsilon_1)(y_j - y_i) < x_j - x_i < (l + \varepsilon_1)(y_j - y_i) \ (1)$$

Доказателство (3)

Ако приложим (1) за $i = n, j = n+1$ и $j = n+2, i = n+1$ и т.н. получаваме:

$$+\begin{cases} (l-\varepsilon_1)(y_{n+1}-y_n) < x_{n+1}-x_n < (l+\varepsilon_1)(y_{n+1}-y_n) \\ \ldots \\ (l-\varepsilon_1)(y_k-y_{k-1}) < x_k-x_{k-1} < (l+\varepsilon_1)(y_k-y_{k-1}) \end{cases}$$

Доказателство (4)

$$(l-\varepsilon_1)(\cancel{y_{n+1}} - y_n + \cancel{y_{n+2}} - y_{n+1} + \ldots + y_k - \cancel{y_{k-1}}) <$$
$$x_{n+1} - x_n + x_{n+2} - x_{n-1} + \ldots + x_k - x_{k-1} <$$
$$(l+\varepsilon_1)(\cancel{y_{n+1}} - y_n + \cancel{y_{n+2}} - \cancel{y_{n+1}} + \ldots + y_k - \cancel{y_{k-1}})(l-\varepsilon_1)(y_k - y_n) <$$
$$x_k - x_n < (l-\varepsilon_1)(y_k - y_n)$$

Доказателство (5)

От тук намерихме $N_1 : k > n > N_1$ и $|\dfrac{x_k - x_n}{y_k - y_n} - l| < \varepsilon_1$

Първа лема на Щолц

Лема:

Нека $(a_n)_{n\geq 1}$ и $(b_n)_{n\geq 1}$ са две редици от реални числа. Нека също b_n е строго растяща, неограничена редица и съществува следната граница:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \ell$$

Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ съществува и е равна на ℓ.

Доказателство (1)

От Лема 1 $\Rightarrow \exists N : k > n > N$

$$|\frac{x_k - x_n}{y_k - y_n} - l| < \varepsilon$$

Доказателство (2)

Нека фиксираме $n > N$ и направим граничен преход при $k \to \infty$ в горното неравенство. По условие $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ са намаляващи и клонят към 0 при $n \to \infty \Rightarrow |\frac{x_n}{y_n} - l| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$ т.е.:

$$\forall n > N \Rightarrow |\frac{x_n}{y_n} - l| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

Втора лема на Щолц

Лема:

Нека $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ е строго растяща - $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l$. Тогава:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$$

Доказателство (1)

Лема 1 следва, че $\exists N_1 : k > m > N_1$:

$$|\frac{x_k - x_m}{y_k - y_m} - l| < \varepsilon_1 \text{ т.е.}$$

$$(l - \varepsilon_1)(y_k - y_m) < x_k - x_m < (l + \varepsilon_1)(y_k - y_m).$$

Доказателство (2)

Нека $m > N_1, y_m > 0$. Нека разделим на $y_k > 0$:

$$(l - \varepsilon_1)(l - \frac{y_m}{y_k}) < \frac{x_k}{y_k} - \frac{x_m}{y_k} < (l + \varepsilon_1)(1 - \frac{y_m}{y_k})$$

Доказателство (3)

Нека $k \to \infty$, понеже $y_k \to \infty$, при $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty}((l-\varepsilon_1)(1-\frac{y_m}{y_k})+\frac{x_m}{y_k}) = l-\varepsilon_1 < l-\varepsilon, \text{ и}$$

$$\lim_{k\to\infty}((l+\varepsilon_1)(1-\frac{y_m}{y_k})+\frac{x_m}{y_k}) = l+\varepsilon_1 < l+\varepsilon$$

Теорема 1

Теорема 1:

Нека (a_n) е редица от реални числа, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} : \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Ако:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = b, b \in \mathbb{R}, b \neq 1$$

То: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$

Доказателство

$$\frac{a_{n+1} - a_n \frac{1}{b_{n+1}}}{b_{n+1} - b_n \frac{1}{b_{n+1}}} = \frac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n}\frac{b_n}{b_{n+1}}}{1 - \frac{b_n}{b_{n+1}}} \to \frac{l - lb}{1 - b} = l.$$

Теорема 2

Теорема 2:

Нека е дадена редицата $\{x_n\}$. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x, x \in (-\infty, \infty)$, тогава:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = x$$

Доказателство

Нека $b_n = n, a_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$, тогава от
$\dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = x_{n+1} \to x$.

Пример 1

Оценете $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k + 2^k + ... + n^k}{n^{k+1}}$, където $k \in N$.

Решение

Нека $a_n = 1^k + 2^k + ... + n^k, b_n = n^{k+1}$. Ясно е, че редицата b_n е с положителни членове, строго растяща и неограничена. Сега:

$$\lim_{n->\infty} \frac{a_{n+} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(1 + \binom{k+1}{1}n + \binom{k+1}{2}n^2 + ... + \binom{k+1}{k}n^k + n^{k+1}) - n^{k+1}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k/n^k}{(1 + \binom{k+1}{1}n + \binom{k+1}{2}n^2 + ... + \binom{k+1}{k}n^k)/n^k} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)^k}{\binom{k+1}{k}} = \frac{1}{k+1}.$$

Пример 2

Намерете:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}$$

Решение

Като приложим лемата на Щолц получаваме:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)! - n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

Пример 3

Нека $\{x_n\}$ е редица от реални числа и нека:

$$x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}, \forall n \geq 0.$$

Оценете: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - \ln(n+1))$.

Решение

x_n е растяща, $x_n \to \infty$. Означаваме $y_n = e^{x_n - \ln(n+1)} = \dfrac{e^{x_n}}{n+1}$. Нека приложим лемата на Щолц:

$$\frac{e^{x_{n+1}} - e^{x_n}}{n+2-(n+1)} = e^{x_n}\left(e^{x_{n+1}-x_n} - 1\right) = \frac{e^{e^{-x_n}} - 1}{e^{-x_n}} \to 1$$

Решение

Тъй като $\lim_{y \to 0} \dfrac{e^y - 1}{y} = 1$ и $e^{-x_n} \to 0$.
От Щолц следва, че $y_n \to 1$, което означава, че $\lim_{n \to \infty} x_n - \ln(n+1) = 0$.

Благодаря за вниманието