Софийски Университет "Св. Климент Охридски"

Първа и втора лема на Щолц

Изготвил: Минко Гечев
Ръководител: доц. Първан Първанов

1 Теореми и доказателства

Лема 1. *Нека* $\{y_n\}_{n=1}$ *е строго монотонна, а*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l \text{ (1)}$$

за $\forall\varepsilon\ >0, \exists N_1 : \forall k > n > N_1 :$

$$|\frac{x_k-x_n}{y_k-y_n}-l|<\varepsilon_1 \text{ (2)}$$

Доказателство: За да докажем лемата ще разгледаме два случая, съответно, когато редицата е строго растяща и строго намаляваща.

1 сл. Нека y_n *е строго растяща. От (1)* $\Rightarrow \exists N_1 : \forall n > N_1, n\in\mathbb{N}$ *е изпълнено:*

$$|\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}-l|<\varepsilon_1 \text{ (3)}$$

Ще докажем, че това е търсеното N_1. *Нека* $n,k\in\mathbb{N}$ *и* $k>n>N_1$. *Понеже* $y_j > y_i$ *за* $\forall j > i$

$$|\frac{x_j-x_i}{y_j-y_i}-l|<\varepsilon_1 \Leftrightarrow (l-\varepsilon_1)(y_j-y_i)<x_j-x_i<(l+\varepsilon_1)(y_j-y_i) \text{ (4)}$$

Ако приложим (4) за $i=n, j=n+1$ *и* $j=n+2, i=n+1$ *и т.н. получаваме:*

$$+\begin{cases}(l-\varepsilon_1)(y_{n+1}-y_n)<x_{n+1}-x_n<(l+\varepsilon_1)(y_{n+1}-y_n)\\ ...\\ (l-\varepsilon_1)(y_k-y_{k-1})<x_k-x_{k-1}<(l+\varepsilon_1)(y_k-y_{k-1})\end{cases}$$

$$(l-\varepsilon_1)(\cancel{y_{n+1}}-y_n+\cancel{y_{n+2}}-y_{n+1}+...+y_k-\cancel{y_{k-1}})<$$
$$x_{n+1}-x_n+x_{n+2}-x_{n-1}+...+x_k-x_{k-1}<(l+\varepsilon_1)(\cancel{y_{n+1}}-y_n+\cancel{y_{n+2}}-\cancel{y_{n+1}}+...+y_k-\cancel{y_{k-1}})$$

$$(l-\varepsilon_1)(y_k-y_n)<x_k-x_n<(l-\varepsilon_1)(y_k-y_n)(5)$$

от тук намерихме $N_1 : k > n > N_1$ *и*

$$|\frac{x_k - x_n}{y_k - y_n} - l| < \varepsilon_1, \text{ защото (5) е еквивалентно на (2).}$$

Случаят за монотонно намаляваща редица се доказва аналогично.

Първа лема на Щолц. *Нека* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *е строго монотонна.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \lim_{n\to\infty} y_n = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l, \text{ тогава } \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$$

Доказателство: Нека $\varepsilon > 0, \varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$, *то от Лема 1* $\Rightarrow \exists N : k > n > N$

$$|\frac{x_k - x_n}{y_k - y_n} - l| < \varepsilon$$

Нека фиксираме $n > N$ *и направим граничен преход при* $k \to \infty$ *в горното неравенство. По условие* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *и* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *са намаляващи и клонят към 0 при* $n \to \infty \Rightarrow |\frac{x_n}{y_n} - l| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$ *т.е.:*

$$\forall n > N \Rightarrow |\frac{x_n}{y_n} - l| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

Втора лема на Щолц. *Нека* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *е строго растяща -* $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ *и* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l$. *Тогава:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$$

Доказателство: Нека $\varepsilon > 0$ *и* $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$. *От Лема 1 следва, че* $\exists N_1 : k > m > N_1 :$

$$|\frac{x_k - x_m}{y_k - y_m} - l| < \varepsilon_1$$

т.е. $(l - \varepsilon_1)(y_k - y_m) < x_k - x_m < (l + \varepsilon_1)(y_k - y_m)$. *Нека* $m > N_1, y_m > 0$. *Нека разделим на* $y_k > 0$*:*

$$(l - \varepsilon_1)(l - \frac{y_m}{y_k}) < \frac{x_k}{y_k} - \frac{x_m}{y_k} < (l + \varepsilon_1)(1 - \frac{y_m}{y_k})$$

Като прехвърлим $\frac{x_m}{y_k}$ *получаваме:*

$$(l-\varepsilon_1)(1-\frac{y_m}{y_k})+\frac{x_m}{y_k}<\frac{x_k}{y_k}<(l+\varepsilon_1)(1-\frac{y_m}{y_k})+\frac{x_m}{x_k}\ (7).$$

Нека $k\to\infty$*, понеже* $y_k\to\infty$*, при* $k\to\infty$*:*

$$\lim_{k\to\infty}((l-\varepsilon_1)(1-\frac{y_m}{y_k})+\frac{x_m}{y_k})=l-\varepsilon_1<l-\varepsilon,\ и$$

$$\lim_{k\to\infty}((l+\varepsilon_1)(1-\frac{y_m}{y_k})+\frac{x_m}{y_k})=l+\varepsilon_1<l+\varepsilon$$

Следователно съществува N*, такова че за всяко* $k>N$ *е изпълнено:*

$$l-\varepsilon<(l-\varepsilon_1)(1-\frac{y_m}{y_k})+\frac{x_m}{y_k}\ и\ (l+\varepsilon_1)(1-\frac{y_m}{y_k})+\frac{x_m}{y_k}<l+\varepsilon$$

Като се върнем в (7) получаваме:

$$l-\varepsilon<\tfrac{x_k}{y_k}<l+\varepsilon\ или\ \forall n>N\Rightarrow|\frac{x_n}{y_n}-l|<\varepsilon$$

Теорема 1. *Нека* (a_n) *е редица от реални числа,* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}:\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$*. Ако:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n+1}}=b,b\in\mathbb{R},b\neq1$$

То: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$
Доказателство: $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\frac{\frac{1}{b_{n+1}}}{\frac{1}{b_{n+1}}}=\frac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-\frac{a_n}{b_n}\frac{b_n}{b_{n+1}}}{1-\frac{b_n}{b_{n+1}}}\to\frac{l-lb}{1-b}=l.$

Теорема 2. *Нека е дадена редицата* $\{x_n\}$*. Ако* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x,x\in(-\infty,\infty)$*, тогава:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}=x$$

Доказателство: Нека $b_n=n,a_n=x_1+x_2+...+x_n$*, тогава* $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=x_{n+1}\to x.$

2 Примери

Пример 1. *Оценете* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k + 2^k + ... + n^k}{n^{k+1}}$, *където* $k \in \mathbb{N}$.

Решение: Нека $a_n = 1^k + 2^k + ... + n^k, b_n = n^{k+1}$. *Ясно е, че редицата* b_n *е с положителни членове, строго растяща и неограничена. Сега:*

$$\lim_{n->\infty} \frac{a_{n+} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(1 + \binom{k+1}{1}n + \binom{k+1}{2}n^2 + ... + \binom{k+1}{k}n^k + n^{k+1}) - n^{k+1}} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k/n^k}{(1 + \binom{k+1}{1}n + \binom{k+1}{2}n^2 + ... + \binom{k+1}{k}n^k)/n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)^k}{\binom{k+1}{k}} = \frac{1}{k+1}.$$

От тук използвайки лемата на Щолц получаваме, че границата е $\frac{1}{k+1}$.

Пример 2. *Оценете* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k a_n}{n^2}$, *при* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Решение: От втората лема на Щолц следва, че горната редица има същата граница като:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k a_k - \sum_{k=1}^{n-1} k a_k}{n^2 - (n-1)^2} = \frac{n a_n}{2n-1} = \frac{a_n}{2 - 1/n} \to \frac{L}{2}$$

Пример 3. *Нека* $\{x_n\}$ *е редица от реални числа и нека:* $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}, \forall n \geq 0$.
Оценете: $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - \ln(n+1))$.
Решение: Тъй като x_n *е растяща и* $x_n \to \infty$.
Означаваме $y_n = e^{x_n - \ln(n+1)} = \dfrac{e^{x_n}}{n+1}$. *Нека приложим лемата на Щолц:*
$\dfrac{e^{x_{n+1}} - e^{x_n}}{n+2-(n+1)} = e^{x_n}(e^{x_{n+1}-x_n} - 1) = \dfrac{e^{e^{-x_n}} - 1}{e^{-x_n}} \to 1$
Тъй като $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{e^y - 1}{y} = 1$ *и* $e^{-x_n} \to 0$.
От Щолц следва, че $y_n \to 1$, *което означава, че* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n - \ln(n+1) = 0$.

Пример 4. *Намерете:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}$$

Решение: Като приложим лемата на Щолц получаваме:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)! - n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

Пример 5. *Дадена е редицата:* $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$*, намерете* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}$.
Решение: Прилагайки лемата на Щолц получаваме:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{(n+1) - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Литература:

1. **Уикипедия - en.wikipedia.org/wiki/Stolz theorem**
2. **Marian Mureşan: A Concrete Approach to Classical Analysis. Springer 2008**