Dinamica di una macchina a regime periodico

Dati:

Della pompa volumetrica a stantuffo a singolo effetto sono noti i seguenti dati seguenti dati:

- pressione di mandata pm = 4.8 [bar]
- pressione di aspirazione pa = —0.5 [bar]
- corsa dello stantuffo c = 280 [mm]
- diametro dello stantuffo D = 210 [mm]
- momento d'inerzia del motore Jm = 0.1 [kgm]
- massa del piede di biella m= 54 kg
- velocità di rotazione media dell'albero di manovella n = 195 [rpm]
- rapporto di trasmissione τ = 1/7.5
- rendimento della trasmissione η t = 0.85
- M_0 = 308 [Nm]
- K_0 = —0.1225 [Nm/(rpm)]

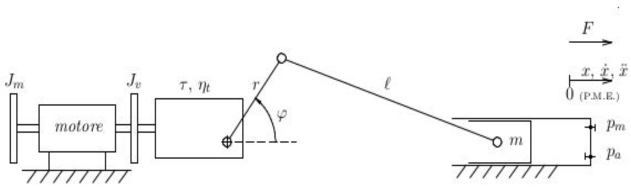

Figura 1: Schema dell'impianto di pompaggio

Richiesta:

- determinare il momento d'inerzia J_v del volano che garantisca di limitare il valore dell'irregolarità periodica ia 0.03;
- determinare la legge di moto a regime dell'albero di manovella della pompa con siderando come curva caratteristica del motore quella rappresentata in figura 2 di equazione:

$$M_m = M_0 + K n_m$$

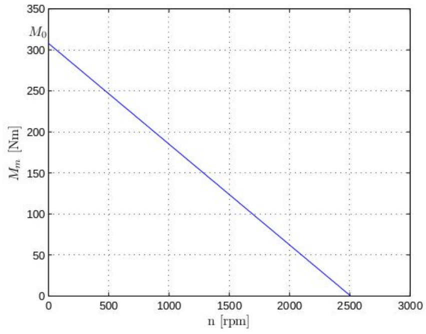

Figura 2: Curva caratteristica del motore

Soluzione:

Calcolo di ΔEmax :

Sappiamo dalla formula di progetto: $J = \frac{\Delta E_{rmax}}{i\omega^2}$, dove ΔE_{rmax} è la variazione massima di energia cinetica delle masse rotanti, J è il momento d'inerzia di tutte le masse rotanti ridotto all'albero di manovella, i è l'irregolarità periodica, ω è la velocità media di rotazione dell'albero.

Per il calcolo ΔE_{rmax} Scrivendo l'equazione di bilancio delle potenze del sistema si ottiene:

$$W_m^* + W_r + W_i = \frac{dE_r}{dt} \qquad (1)$$

Dove W_i è la potenza delle forze d'inerzia delle masse in moto alterno, W_m è la potenza motrice a valle della trasmissione, W_r è la potenza resistente.Esplicitando i termini:

$$M_m^*\dot{\varphi} + M_r^*\dot{\varphi} + M_i^*\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}(J_v^* + J_m^*)\dot{\varphi}^2] \qquad (2)$$

Dove M_i è la coppia d'inerzia ridotta all'albero di manovella corrispondente alla forza d'inerzia, J_v è il momento d'inerzia del volano, J_m è il momento d'inerzia dell'albero motore ridotto all'albero della manovella.

Integrando da 0 ad un generico angolo ϕ, si ottiene l'andamento dell'energia cinetica E_r in funzione dell'angolo di manovella:

$$\int_0^{\varphi}(M_m^* + M_r^* + M_i^*)\partial\varphi = E_r(\varphi) - E_r(0) \qquad (3)$$

Per il calcolo dell'energia massima si osserva che il suo massimo e il suo minimo saranno in corrispondenza degli zeri della funzione integranda.

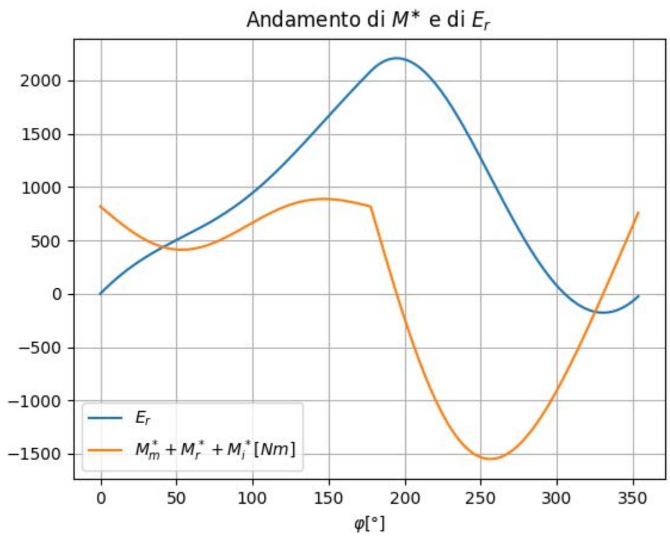

Figura 3: Andamento di M^* e di E_r

Momento resistente:

Nella figura sottostante è riportato l'andamento della forza resistente in funzione dell'angolo di manovella.

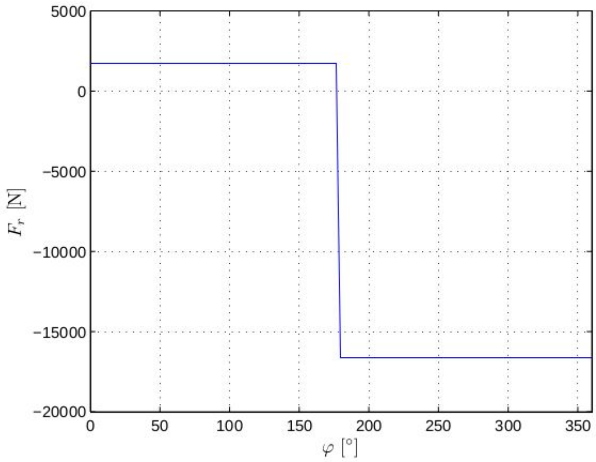

Figura 4: Andamento della forza resistente in funzione dell'angolo di manovella

Si riduce la forza resistente all'albero della manovella; Perciò si sviluppa la cinematica del manovellismo per determinare il rapporto di trasmissione.
Si consideri anche lo spostamento x positivo verso destra e con origine in corrispondenza del punto morto esterno e l'angolo di rotazione positivo per il verso antiorario, la relazione tra x e φ può essere scritta come segue:

$$x = -r[1 - cos(\varphi)] \qquad (4)$$

derivando otteniamo la velocità:

$$\dot{x} = -rsin(\varphi)\dot{\varphi} \qquad (5)$$

dove il termine: $\tau_m = [-rsin(\varphi)]$ rappresenta il rapporto di trasmissione tra la velocità angolare della manovella e del piede di biella.
il momento residente ridotto M_r^* sarà:

$$M_r^* = F_r\tau_m = F_r[-rsin(\varphi)] \qquad (6)$$

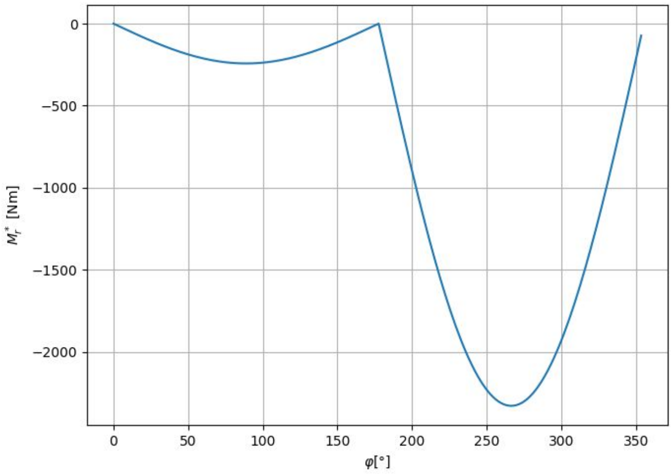

Figura 5: Andamento del momento resistente ridotto in funzione dell'angolo di manovella

Coppia d'inerzia:

Per il calcola la coppia d'inerzia alle masse in moto alterno M_i^*:

$$M_i^* = F_i \tau_m = -m\ddot{x}[-rsin(\varphi)] \tag{7}$$

derivando l'espressione (5) ricaviamo la accelerazione:

$$\ddot{x} = -r\dot{\varphi}^2 cos(\varphi) \tag{8}$$

sostituendo nell'equazione (7) si ottiene:

$$M_i = -mr^2\dot{\varphi}^2 cos(\varphi) sin(\varphi) \tag{9}$$

Una volta determinato ΔE_{rmax}, si può calcolare l'inerzia del volano J_v^*:

$$J_v^* = \frac{\Delta E_{rmax}}{i\overline{\omega}^2} - J_m^* \tag{10}$$

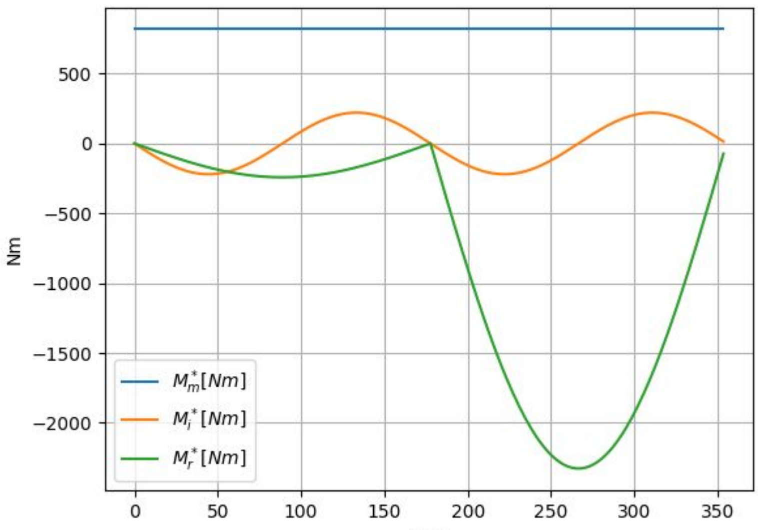

Figura 6: Andamento dei vari contributi

Legge di moto:

Integrando l'equazione del sistema si determina la legge di moto.
Dal bilancio delle potenze si ottiene:

$$M_m^*(\dot{\varphi})\omega + M_r^*\omega + M_i^*\omega = \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}(J_v^* + J_m^*)\omega^2] \tag{11}$$

da cui:

$$M_i^* = -m\ddot{x}\tau_m = -mr^2 sin(\varphi)[\dot{\varphi}^2 cos(\varphi) + \ddot{\varphi} sin(\varphi)] \tag{12}$$

L'equazione di moto diventa quindi:

$$M_m^*(\dot{\varphi}) + M_r^*(\varphi) - mr^2 sin(\varphi)[\dot{\varphi}^2 cos(\varphi) + \ddot{\varphi} sin(\varphi)] = (J_v^* + J_m^*)\ddot{\varphi} \tag{13}$$

da cui:

$$\ddot{\varphi} = \frac{M_m^*(\dot{\varphi}) + M_r^*(\varphi) - mr^2\dot{\varphi}^2 sin(\varphi) cos(\varphi)}{[J_v^* + J_m^* + mr^2 sin^2(\varphi)]} \tag{14}$$

La figura sottostante mostra il risultato dell'integrazione considerando la velocità iniziale del sistema un valore prossimo al regime.

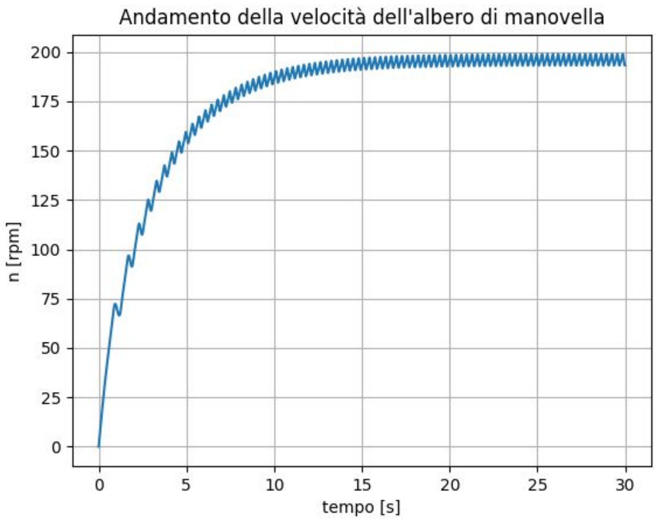

Figura 7: Legge di moto dell'albero di manovella

Codice:

```
# Author: Monse Ghalbi
# Date: 30/12/2019
# Description: moto periodico

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.interpolate import interp1d
from scipy import integrate

pa=-0.5e5 #pressione di aspirazione [Pa]
pm=4.8e5 #pressione di mandata [Pa]
c=280e-3 #corsa stantuffo [m]
r=c/2  #lunghezza manovella;
D=210e-3 #diametro stantuffo
A=np.pi*pow(D,2)/4
Jm=0.1 #momento d'inerzia motore [kgm^2]
m=54 #massa del piede di biella [kg]
n=195 #191.69 %(202)velocità di rotazione media albero manovella [rpm]
w=n*2*np.pi/60 #velocità di rotazione media albero manovella [rad/s]
i=0.03 #irregolarità periodica
tau=1/7.5
eta=0.85
M0=308 # [Nm]
K=-0.1225 # [Nm/rpm]

def motore(phip):
    nm = phip/(2*np.pi)*60/tau;
    Mm = M0 + K*nm
    Mmrid = Mm*eta/tau
    return Mmrid

# Coppia motrice
Fa = np.abs(pa)*A
Fm = -pm*A
Lr = Fa*c+np.abs(Fm)*c
Mmrid = Lr/(2*np.pi)

# Coppia resistente
dphi = np.pi/100
vphia = np.arange(0,np.pi,dphi)
vphim = np.arange(np.pi, 2*np.pi, dphi)
```

```
vphi =  np.concatenate((vphia, vphim), axis=None)
vhpigrad = vphi*18*np.pi
vFa = Fa*np.ones(len(vphia))
vFm = Fm*np.ones(len(vphim))
vFr = np.concatenate((vFa, vFm), axis=None)
taum = -r*np.sin(vphi)
vMr = vFr*np.array(taum).transpose()

#Andamento del momento resistente ridotto
plt.plot(vhpigrad,vMr, label='$M_r^* [Nm]$')

plt.xlabel(r'$\varphi [°]$')
plt.ylabel('$M_r^*$ [Nm]')
plt.grid()
plt.show()

# coppia d'inerzia
vMi =
-m*pow(r,2)*pow(w,2)*np.array(np.sin(vphi))*np.array(np.cos(vphi)).trans
pose()
# coppia totale
vMmrid = Mmrid*np.ones(len(vphi))
vMtot = vMmrid + vMr +vMi
plt.plot(vhpigrad,vMmrid, label='$M_m^* [Nm]$')
plt.plot(vhpigrad,vMi, label='$M_i^* [Nm]$')
plt.plot(vhpigrad,vMr, label='$M_r^* [Nm]$')
plt.legend(loc="lower left")
plt.xlabel(r'$\varphi [°]$')
plt.ylabel('Nm')
plt.grid()
plt.show()

vE=integrate.cumtrapz(vMtot,vphi, initial=0)

plt.plot(vhpigrad,vE,label='$E_r$')
plt.plot(vhpigrad,vMtot,label='$M_m^*+M_r^*+M_i^* [Nm]$')
plt.legend(loc="lower left")
plt.xlabel(r'$\varphi [°]$')
plt.title('Andamento di $M^*$ e di $E_r$')
plt.grid()
fig = plt.gcf()
fig.canvas.set_window_title('Andamento di $M^*$ e di $E_r$')
plt.show()

DEmax=np.max(vE)-np.min(vE)
```

```
Jtrid=DEmax/(i*pow(w,2))
Jv=Jtrid*pow(tau,2)/eta-Jm
Jvrid=Jv/pow(tau,2)*eta;
Jmrid=Jm/pow(tau,2)*eta;
dt=0.01; tf=30;
t=np.arange(0,tf,dt);
phi = [0]
phip = [0]

for j in np.arange(0,len(t)):
    Mmrid = motore(phip[j])
    phig = 2*np.pi*(phi[j]/(2*np.pi)-np.fix(phi[j]/(2*np.pi)))
    Mr = np.interp(phig,vphi,vMr)

phipp=(Mmrid+Mr-m*pow(r,2)*pow(phip[j],2)*np.sin(phi[j])*np.cos(phi[j]))
/(Jvrid+Jmrid+m*pow(r,2)*pow(np.sin(phi[j]),2))
    phip.append(phip[j]+phipp*dt)
    phi.append(phi[j]+phip[j]*dt)


plt.plot(t,np.array(phip[:-1])/(2*np.pi/60))
plt.grid()
plt.ylabel('n [rpm]')
plt.xlabel('tempo [s]')
fig = plt.gcf()
plt.title('Andamento della velocità dell\'albero di manovella')
fig.canvas.set_window_title("Andamento della velocità dell'albero di
manovella")
plt.show()
```