

MAKALAH PDPN

METODE *ALTERNATING DIRECT IMPLICIT* (ADI) DALAM PENYELESAIAN PERSOALAN PERPINDAHAN PANAS

Oleh :

AYATUL LUTFI (0710940011)

MOHAMMAD GHANI (0810940011)

INDAH MUSTIKA DEWI (0810940007)



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2010**

KATA PENGANTAR

Makalah ini kami susun sesuai mata kuliah Persamaan Diferensial Parsial Numerik (PDPN), dimana dalam mata kuliah ini, mahasiswa diharapkan dapat menguasai pengetahuan, konsep, prinsip dan penerapan tentang PDPN serta mampu mengembangkannya.

Dalam makalah ini penulis mengangkat masalah bagaimana menyelesaikan persoalan perpindahan panas konduksi 2 dimensi dalam keadaan tidak tunak dengan metode Alternating Direct Implicit (ADI). Sehingga dapat diketahui skema yang terbentuk, system persamaan, kesalahan pemotongan, syarat kestabilan, dan simulasinya dalam MATLAB.

Puji syukur kehadiran Tuhan Yang Maha Esa selalu kami panjatkan, karena dengan berkat, rahmat dan hidayah-Nya kami dapat menyelesaikan makalah PSPN yang berjudul “Metode Alternating Direct Implicit (ADI) dalam Menyelesaikan Persoalan Perpindahan Panas Konduksi Dua Dimensi” ini. Ucapan terima kasih juga tidak lupa kami ucapkan kepada Bpk Agus Suryanto selaku dosen mata kuliah PDPN yang telah membimbing kami dalam pembuatan makalah ini. Serta teman teman yang selalu mendukung kami dari awal sampai selesainya pembuatan makalah kami.

Penulisan makalah ini tentunya sangat jauh dari sempurna, karena keterbatasan kemampuan dan pengetahuan yang kami memiliki. Dalam rangka penyempurnaan makalah ini, kritik dan saran yang membangun dari semua pembaca sangat kami harapkan. Kami juga berharap semoga makalah ini bermanfaat bagi semua pembaca.

Malang, November 2010

Penyusun

Abstrak

Untuk menyelesaikan kasus perpindahan panas dua dimensi keadaan tidak tunak, metode ADI mempunyai keunggulan dibandingkan metode yang lain dalam hal banyaknya iterasi yang diperlukan untuk mendapatkan hasil yang konvergen. Tulisan ini akan memaparkan metode Alternating Direct Implicit (ADI) yang dipergunakan dalam penyelesaian perpindahan panas konduksi 2 dimensi dalam keadaan tidak tunak yang dinyatakan dengan persamaan Laplace. Disini akan dijelaskan penurunan *persamaan panas* ke dalam skema numerik dengan metode *ADI*, sistem persamaan yang diperoleh, kesalahan pemotongan, kestabilan, serta simulasi dalam *MATLAB* dari persamaan yang diperoleh dari metode ADI.

Kata Kunci: Persamaan Panas, *ADI*, *MATLAB*

Abstract

To complete the two-dimensional case of heat transfer is steady state, the ADI method has advantages over other methods in terms of number of iterations required to obtain convergent results. This paper will describe the method Alternating Direct Implicit (ADI) which is used in the completion of Two-dimensional conduction heat transfer in a steady state expressed by the Laplace equation. Here is described a decrease *heat equation* into a numerical scheme with the *ADI* method, the system of equations obtained, cutting errors, stability, and simulations in *MATLAB* from the equation obtained from the ADI method.

Key words: *Heat equation, ADI, MATLAB*

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
ABSTRAK	ii
KATA PENGANTAR	iii
DAFTAR ISI	iv
DAFTAR LAMPIRAN	vi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan	2
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan Diferensial	3
2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa	3
2.1.2 Persamaan Diferensial Parsial	3
2.1.3 Persamaan Diferensial Parsial Non Linier.....	3
2.2 Persamaan Panas Dua Dimensi	4
2.3 Teorema Taylor	4
2.4 Deret Taylor	4
2.5 Metode Beda Hingga	5
2.6 Metode Crank Nicholson.....	6
2.7 Metode Alternating Direct Implisit (ADI).....	6
2.8 Syarat Awal dan Syarat Batas Dirichlet	7
2.9 Kesalahan Pemotongan	7
2.10 Kestabilan Von Neuman	7
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Penurunan Skema Alternating Direct Implicit (ADI)	9
3.2 Matrik yang Terbentuk dengan Metode ADI	10
3.3 Kesalahan Pemotongan	12
3.4 Kestabilan Metode ADI dalam Persamaan Panas Dua Dimensi	12

3.5 Simulasi dengan Program MATLAB	13
3.5.1 Plot Metode ADI	15
3.5.2 Analisa Plot	16

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	17
4.2 Saran	18

DAFTAR PUSTAKA	19
-----------------------------	----

LAMPIRAN	20
-----------------------	----

DAFTAR LAMPIRAN

LAMPIRAN 1	Penurunan Skema Numerik Metode ADI.....	20
LAMPIRAN 2	Matriks yang Terbentuk dengan Metode ADI.....	23
LAMPIRAN 3	Kesalahan Pemotongan.....	26
LAMPIRAN 4	Analisis Kestabilan.....	27

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Adanya kasus pada persoalan perpindahan panas konduksi dua dimensi yang dengan penyelesaian metode yang ada belum mampu menyelesaikan atau prosedur penyelesaiannya belum memuaskan, mendorong untuk menciptakan metode baru yang mampu mengatasi persoalan tersebut dan dengan prosedur yang dapat menghasilkan efisiensi yang tinggi. Adanya metode beda hingga, dan adanya perkembangan komputer yang cepat berubah menjadikan metode analitis tidak banyak berguna, meskipun cara analitis merupakan medan penerapan kemampuan matematika. Perkembangan juga terjadi pada metode beda hingga itu sendiri, segala usaha dilakukan untuk mendapatkan metode yang mampu mempunyai efisiensi yang tinggi, waktu yang diperlukan singkat dan memberikan hasil yang memuaskan serta menjangkau semua persoalan.

Penggunaan metode eksplisit untuk menyelesaikan persamaan diferensial parabolik menyebabkan batasan yang ketat pada ukuran langkah waktu. Ini membuat lambannya progres yang didapat terhadap perubahan waktu. Namun untuk menerapkan metode implisit pada kasus dimana terdapat lebih dari satu perubah ruang akan menyebabkan jumlah komputasi yang sangat banyak.

Alternating Direct Implicit method atau metode ADI adalah metode algoritma yang umum digunakan dalam metode beda hingga. Disini akan ditunjukkan bagaimana persamaan panas diselesaikan dengan metode ADI “Alternating Direct Implicit”. Inti dasar metode ADI adalah memecah persamaan menjadi dua tahap, masing-masing atas langkah waktu ∂t . Tahap pertama yaitu memecahkan secara implisit konduksi panas dalam satu arah saja dan langkah kedua memecah secara implisit untuk arah yang lain. Total waktu yang diperlukan metode ADI untuk menyelesaikan persoalan lebih singkat dari metode yang lainnya, hal ini terjadi karena jumlah iterasi yang diperlukan metode ADI secara keseluruhan lebih sedikit dari metode yang lain.

1.2 Rumusan Masalah

Dari uraian diatas dapat disimpulkan beberapa rumusan masalah sebagai berikut yaitu :

1. Bagaimana penurunan solusi numerik dari persamaan panas dua dimensi menggunakan metode ADI?
2. Bagaimana sistem persamaan (dalam bentuk matriks) yang terbentuk dengan metode ADI?
3. Bagaimana kesalahan pemotongan yang dihasilkan oleh metode ADI?
4. Bagaimana kestabilan yang dihasilkan oleh metode ADI?
5. Bagaimana simulasi dari metode ADI menggunakan software MATLAB?

1.3 Batasan Masalah

Penulisan makalah ini difokuskan pada pembahasan dengan beberapa batasan masalah, yaitu :

1. Pada makalah ini domain yang digunakan berupa plat berbentuk persegi empat dan homogen.
2. Diasumsikan bahwa pada batas tepi plat suhu dikondisikan agar suhu pada tiap waktunya adalah nol.
3. Diasumsikan lebar grid untuk arah x dan arah y adalah sama ($\Delta x = \Delta y$).
4. Diasumsikan bahwa pada saat awal, distribusi suhu pada plat mengikuti fungsi Gauss.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penulisan makalah ini adalah :

1. Mengetahui solusi numerik metode ADI dari penurunan persamaan panas dua dimensi yang didekati dengan metode beda hingga.
2. Mengetahui matriks yang terbentuk dengan metode ADI.
3. Mengetahui kesalahan pemotongan dari skema numerik yang dihasilkan dari metode ADI.
4. Mengetahui kestabilan dari skema numerik yang dihasilkan oleh metode ADI.
5. Mengetahui simulasi skema numerik dari metode ADI dengan menggunakan MATLAB.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu turunan atau lebih dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Persamaan diferensial dikatakan mempunyai orde (tingkat) n jika turunan tertinggi yang terdapat dalam persamaan diferensial tersebut adalah turunan ke n . Suatu persamaan diferensial disebut mempunyai derajat n jika turunan tertinggi dalam persamaan diferensial itu berderajat k (Edwards dan Penney, 2001).

2.1.2 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial yaitu persamaan fungsi diferensial yang memiliki lebih dari satu variabel bebas (dengan menganggap variabel lain sebagai tetapan atau konstanta). Secara umum, fungsi yang memiliki n variabel bebas akan memiliki n buah turunan parsial. Untuk menyatakan suatu diferensial parsial, maka notasi yang digunakan adalah notasi ∂ (dibaca ; do) (Roswati dan Frans, 1995).

2.1.3 Persamaan Diferensial Parsial Non-linier

Bentuk umum persamaan diferensial parsial non linear dalam dua variabel bebas x dan y dinyatakan dengan

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (2.1)$$

turunan kedua dari persamaan diferensial parsial nonlinier dua variabel bebas x dan y ditulis dalam

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = f(x) \quad (2.2)$$

Secara sama, bentuk umum dari persamaan orde dua nonlinear dalam variabel bebas selanjutnya dapat diperumum dalam suatu operator berbentuk

$$L_x u(x) = f(x) \quad (2.3)$$

Dimana L_x adalah operator differensial parsial dan $f(x)$ adalah fungsi yang mempunyai dua atau lebih variabel bebas $x = (x, y, \dots)$. Jika L_x bukan operator linear, disebut PDP *nonlinier*. Persamaan disebut persamaan linier homogen jika

$f(x) \neq 0$. Disisi lain, disebut sebagai persamaan linier homogen jika $f(x) = 0$ (Kreyszig, 2002).

2.2 Persamaan Panas Dua Dimensi

Persamaan panas 2 dimensi, yaitu:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.4)$$

Persamaan ini dikenal juga dengan persamaan difusi. Tetapi dalam ilmu fisika, persamaan ini dikenal sebagai *heat equation* (persamaan panas)

Dimana $\frac{\partial U}{\partial x}$ turunan pertama dari u terhadap x , $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ turunan kedua dari u terhadap x , dan $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ turunan kedua dari u terhadap y .

dengan $\sigma = \frac{k}{\rho c_p}$, k adalah konduktivitas panas, ρ massa jenis, c_p kapasitas panas dan σ disebut *thermal diffusivity*. (Suryanto, 2008)

2.3 Teorema Taylor

Misalkan $U(x_0) \in C^{N+1}[a, b]$, jika antara x_0 dan $x = x_0 + \Delta x$ terletak di $[a, b]$ maka:

$$U(x_0 + \Delta x) = \sum_{k=0}^n \frac{U^{(k)}(x_0)}{k!} \Delta x^k + O(\Delta x^{n+1}) \quad (2.5)$$

(Mathew, 2004)

2.4 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial. Jika suatu fungsi $U(x)$ diketahui di titik x_r dan semua turunan dari U terhadap x diketahui pada titik tersebut, maka nilai U pada titik x_{r+1} yang terletak pada jarak Δx dari titik x_r dapat ditentukan, yaitu dengan menggunakan deret Taylor:

$$U(x_{i+1}) = U(x_i) + \frac{\Delta x}{1!} U'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} U''(x_i) + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} U^{(n)}(x_i) + R^{n+1} \quad (2.6)$$

dengan :

$U(x_r)$: fungsi $U(x)$ di titik x_r

$U(x_{r+1})$: fungsi $U(x)$ di titik x_{r+1}

U', U'', \dots, U^n : turunan pertama, turunan kedua, ..., turunan ke- n dari fungsi u .

Δx : jarak antara x_r dan x_{r+1} .

R^{n+1} : kesalahan pemotongan.

Dari persamaan diatas kesalahan pemotongan R^{n+1} diberikan oleh bentuk berikut ini:

$$R^{n+1} = U^{n+1}(\xi) \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (2.7)$$

Dimana

$$x_r \leq \xi \leq x_{r+1}$$

(Triatmojo, 2002)

2.5 Metode Beda Hingga

Turunan parsial dapat diketahui dengan beda hingga. Misalkan terdapat suatu fungsi dengan dua variabel

$$U = U(x, y) \quad (2.8)$$

Di dalam domain D. Misal titik $U_{i,j}$ dari pendekatan diskrit untuk D dengan jarak yang sama Δx dan Δy , dinotasikan $U_{i,j} = U = U(\Delta x, \Delta y)$

Pendekatan beda maju untuk $\frac{\partial U}{\partial x_{ij}}$ di titik $(i\Delta x, \Delta y)$ dapat ditulis,

$$\frac{\partial U}{\partial x_{ij}} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x} \quad (2.9)$$

Untuk pendekatan beda mundur $\frac{\partial U}{\partial x_{ij}}$ dapat ditulis,

$$\frac{\partial U}{\partial x_{ij}} = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (2.10)$$

Pendekatan untuk $\frac{\partial U}{\partial x_{ij}}$ dengan beda pusat adalah,

$$\frac{\partial U}{\partial x_{ij}} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (2.11)$$

Sedangkan pendekatan untuk $\frac{\partial U}{\partial x_{ij}}$ menggunakan beda pusat adalah,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2_{ij}} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (2.12)$$

(Suryanto, 2008)

2.6 Metode Crank-Nicholson

Metode Crank-Nicolson diperoleh dengan menerapkan pendekatan beda maju untuk turunan pertama terhadap waktu (t), sedangkan turunan terhadap x didekati dengan rata-rata beda pusat pada tingkat waktu ke- s dan ke- $s + 1$:

$$\frac{U_r^{s+1} - U_r^s}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta x^2} \{ (U_{r+1}^{s+1} - 2U_r^{s+1} + U_{r-1}^{s+1}) + (U_{r+1}^s - 2U_r^s + U_{r-1}^s) \} \quad (2.13)$$

(Suryanto,2008)

2.7 Metode Alternating Direct Implisit (ADI)

Skema ADI “*Alternating Direction Implicit*”, pertama-tama diusulkan untuk solusi implisit aliran panas (sebuah persamaan diferensial parsial parabola) dalam dua dimensi geometris. Donald Peaceman dan Henry Rachford (1955), serta Jim Douglas Jr dan Rachford (1955), mampu menyelesaikan masalahnya ke komputer terbatas yang tersedia pada langkah waktu dengan memisahkan waktu menjadi dua langkah fraksional. Pertama menyelesaikan aliran dalam satu arah sambil memegang aliran ortogonal tetap, dan untuk aliran dalam arah lain sambil memegang aliran asli tetap. Menariknya, masing-masing operator tridiagonal menghasilkan matriks yang sederhana. Hal ini mungkin sedikit mengejutkan bahwa metode sederhana akan bekerja.

Bagaimanapun juga metode ADI “*Alternating Direction Implicit*” sangat banyak memiliki kegunaan. Metode ADI “*Alternating Direction Implicit*” digunakan di sejumlah besar aplikasi dari astrofisika dan aplikasi bioteknologi untuk pemodelan tsunami.

Dalam analisis numerik, Alternating Direction Implicit (ADI) adalah metode beda hingga, metode untuk memecahkan parabola dan persamaan diferensial parsial eliptik. Hal ini terutama digunakan untuk memecahkan masalah konduksi panas atau memecahkan persamaan difusi dalam dua dimensi atau lebih.

Metode tradisional untuk menyelesaikan persamaan konduksi panas adalah metode Crank-Nicolson. Keuntungan dari metode ADI adalah bahwa persamaan yang harus diselesaikan dalam setiap iterasi memiliki struktur lebih sederhana dan karena itu lebih mudah untuk dipecahkan.

Ide di balik metode ADI untuk membagi persamaan beda hingga menjadi dua, satu dengan derivatif x yang diambil secara implisit dan berikutnya dengan derivatif y diambil secara implisit. (Anonymous,2010)

2.8 Syarat Awal dan Syarat Batas Dirichlet

Untuk menyelesaikan suatu penyelesaian persamaan diferensial diperlukan syarat awal atau kondisi batas. Kata awal berkaitan dengan kenyataan bahwa dalam masalah fisika satu dari variable x, y, z menyatakan waktu. Jadi bentuk $U(x, y)$ pada $x=0$ dapat merupakan suatu syarat awal.

Dalam masalah dua dimensi pada interval $0 < x < 1, t > 0$, syarat batas memuat hanya dua titik terakhir, dan syarat batas Dirichlet diberikan sebagai

$$U(0, t) = g(t) \text{ dan } U(1, t) = h(t) \quad (2.14)$$

Sedangkan untuk syarat awal diberikan oleh,

$$U(0, t_0) = \phi(x) \quad (2.15)$$

Dimana $\phi(x)$ adalah sebuah fungsi.

Syarat awal suatu persamaan dapat diperoleh dari solusi eksak dari persamaan tersebut. (Suryanto, 2008)

2.9 Kesalahan Pemotongan

Deret Taylor akan memberikan perkiraan suatu fungsi dengan benar jika semua suku dari deret tersebut diperhitungkan. Dalam praktek hanya beberapa suku pertama saja yang diperhitungkan. Sehingga hasil perkiraan tidak tepat seperti pada penyelesaian analitik. Ada kesalahan karena tidak diperhitungkannya kesalahan pemotongan yang ditulis dalam bentuk

$$R_n = O(\Delta x^{n+1}) \quad (2.16)$$

Indeks bawah n menunjukkan bahwa deret yang diperhitungkan adalah sampai pada suku ke- n , sedangkan indeks atas $n + 1$ menunjukkan bahwa kesalahan pemotongan mempunyai order Δx^{n+1} atau kesalahan adalah sebanding dengan langkah ruang pangkat $n + 1$. Kesalahan pemotongan tersebut kecil apabila :

- ❖ Interval Δx adalah kecil.
- ❖ Memperhitungkan lebih banyak suku deret Taylor (Triatmojo, 2002)

2.10 Analisis Kestabilan Von-Neumann

Metode Von Neumann dapat digunakan untuk menganalisis kestabilan suatu persamaan beda hingga. Analisis kestabilan hanya digunakan pada persamaan diferensial parsial yang linier, sehingga jika persamaan tersebut nonlinier maka harus dilinierkan dahulu. (Hoffman, 2001)

Pada metode ini kesalahan disetiap titik grid pada level t_s , yang dinyatakan sebagai kombinasi linier dari deret Fourier, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\varepsilon(x_r, t_s) &= \varepsilon_r^s = \sum_{r=0}^m a_r e^{(i\beta x_r + \gamma t_s)} \\ &= \sum_{r=0}^m a_r e^{(\gamma(s\Delta t))} e^{(i\beta(r\Delta x))}\end{aligned}\quad (2.17)$$

dimana m adalah jumlah grid pada garis t , a_r adalah koefisien Fourier yang bernilai konstanta dan diasumsikan bahwa β bernilai real. Berdasarkan linieritas, dalam deret diatas dapat dianalisis salah satu komponen saja. Dengan demikian kesalahan pendekatan beda hingga yang ditulis secara terpisah adalah:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r^s &\approx \exp(\gamma(s\Delta t)) \exp(i\beta(r\Delta x)) \\ &= (\lambda)^s \exp(i\beta(r\Delta x))\end{aligned}\quad (2.18)$$

dengan $\lambda = \exp(\gamma\Delta t)$. Kesalahan awal dari persamaan (2.18) tidak meningkat sejalan dengan peningkatan t jika λ memenuhi

$$|\lambda| \leq 1$$

Kondisi diatas merupakan kestabilan Von-Neuman. (Noye, 1982)

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Penurunan Skema Alternating Direct Implicit (ADI)

Untuk menurunkan skema numerik dari metode ADI, dimulai dengan menurunkan persamaan panas untuk dua dimensi,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.1)$$

Metode ADI biasanya digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial parabolik dalam dua dimensi spasial menggunakan matrik tridiagonal. Untuk melakukannya, digunakan metode implisit Crank-Nicholson untuk menghasilkan persamaan beda hingga. Langkah-langkahnya sebagai berikut :

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{1}{2} \partial_{xx}^{n+1} + \frac{1}{2} \partial_{xx}^n \right) + \frac{1}{\Delta y^2} \left(\frac{1}{2} \partial_{yy}^{n+1} + \frac{1}{2} \partial_{yy}^n \right)$$

U_t didekati dengan beda maju, sedangkan ∂_{xx} dan ∂_{yy} berturut-turut adalah operator beda pusat untuk turunan kedua terhadap x dan turunan kedua terhadap y serta Δx dan Δy masing-masing adalah grid pada sumbu x dan grid pada sumbu y . Sehingga persamaan di atas menjadi :

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2\Delta x^2} [(U_{i+1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1}) + (U_{i+1,j}^n + 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n)] + \\ &\quad \frac{1}{2\Delta y^2} [(U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}) + (U_{i,j+1}^n + 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n)] \\ \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2} (\partial_x^2 + \partial_y^2)(U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j}^n) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dari persamaan tersebut diperoleh :

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \right) U_{i,j}^{n+1} = \left(1 + \frac{\Delta t}{2} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \right) U_{i,j}^n$$

Ide dibalik metode ADI adalah untuk membagi persamaan beda hingga menjadi dua, satu dengan derivative x yang diambil secara implisit dan berikutnya dengan derivative y diambil secara implisit. Dari persamaan (3.2) diperoleh dua persamaan beda hingga sebagai berikut

$$\frac{U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^n}{\frac{\Delta t}{2}} = \left(\partial_x^2 U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \partial_y^2 U_{i,j}^n \right) \quad (3.3)$$

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} = \left(\partial_x^2 U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \partial_y^2 U_{i,j}^{n+1} \right) \quad (3.4)$$

Dari persamaan (3.3) kita peroleh

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2} \partial_x^2\right) U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \partial_y^2\right) U_{i,j}^n \quad (3.5)$$

Dengan cara yang sama, dari persamaan (3.4) diperoleh

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2} \partial_y^2\right) U_{i,j}^{n+1} = \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \partial_x^2\right) U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

Dapat ditunjukkan bahwa persamaan (3.5) dan (3.6) ekuivalen dengan

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2} \partial_x^2\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \partial_y^2\right) U_{i,j}^{n+1} = \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \partial_x^2\right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \partial_y^2\right) U_{i,j}^n \quad (3.7)$$

3.2 Matriks yang Terbentuk dengan Metode ADI

Dari persamaan (3.5) diperoleh:

$$-sU_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 2s)U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - sU_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = tU_{i,j-1}^n + (1 - 2t)U_{i,j}^n + tU_{i,j+1}^n \quad (3.8)$$

Dari persamaan (3.6) diperoleh:

$$-tU_{i,j-1}^{n+1} + (1 + 2t)U_{i,j}^{n+1} - tU_{i,j+1}^{n+1} = sU_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - 2s)U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + sU_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

Dimana $s = \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}$ dan $t = \frac{\Delta t}{2(\Delta y)^2}$

Dengan memasukkan $i = 1, 2, \dots, N$ dan $j = 1, 2, \dots, N$ serta syarat batas ke dalam persamaan (3.8) dan (3.9), maka diperoleh matriks tridiagonal sebagai berikut:

➤ Untuk persamaan (3.8)

$$\begin{bmatrix} 1+2s & -s & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -s & 1+2s & -s & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -s & 1+2s & -s & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -s & 1+2s & -s \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -s & 1+2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ U_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ U_{N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ U_{N,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2t & t & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ t & 1-2t & t & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & t & 1-2t & t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 1-2t & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & 1-2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,1}^n \\ U_{i,2}^n \\ \vdots \\ U_{i,N-1}^n \\ U_{i,N}^n \end{bmatrix}$$

➤ Untuk persamaan (3.9)

$$\begin{bmatrix} 1+2t & -t & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -t & 1+2t & -t & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -t & 1+2t & -t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t & 1+2t & -t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -t & 1+2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,1}^{n+1} \\ U_{i,2}^{n+1} \\ \vdots \\ U_{i,N-1}^{n+1} \\ U_{i,N}^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2s & s & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ s & 1-2s & s & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & s & 1-2s & s & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s & 1-2s & s \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & s & 1-2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ U_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ U_{N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ U_{N,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

3.3 Kesalahan Pemotongan

Dengan mengekspansikan deret taylor ke dalam persamaan (3.2) diperoleh:

➤ Untuk turunan terhadap t

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (3.10)$$

➤ Untuk turunan terhadap x

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta x^2} [(U_{i+1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1}) + (U_{i+1,j}^n + 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n)] \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial x^2} \right) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (3.11)$$

➤ Untuk turunan terhadap y

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta y^2} [(U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}) + (U_{i,j+1}^n + 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n)] \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial y^2} \right) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dari persamaan (3.10), (3.11) dan (3.12) diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial y^2} \right) \\ + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dengan demikian, metode ADI terhadap persamaan panas dua dimensi memiliki kesalahan pemotongan orde pertama terhadap waktu (t) dan orde dua terhadap $space$ (x, y).

3.4 Kestabilan Metode ADI dalam Persamaan Panas Dua Dimensi

Suatu skema numerik (pendekatan beda hingga) disebut stabil jika kesalahan tidak meningkat selama proses perhitungan.

Dengan melakukan penggantian $U_{i,j}^n = \lambda^n e^{i\beta\Delta i j}$ pada persamaan (3.8) dan (3.9) maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} -s\lambda^{n+\frac{1}{2}}e^{i\beta_1(i-1)j} + (1+2s)\lambda^{n+\frac{1}{2}}e^{i\beta_1 i j} - s\lambda^{n+\frac{1}{2}}e^{i\beta_1(i+1)j} \\ = t\lambda^n e^{i\beta_1 i(j-1)} + (1-2t)\lambda^n e^{i\beta_1 i j} + t\lambda^n e^{i\beta_1 i(j+1)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} -t\lambda^{n+1}e^{i\beta_2 i(j-1)} + (1+2t)\lambda^{n+1}e^{i\beta_2 i j} - t\lambda^{n+1}e^{i\beta_2 i(j+1)} \\ = s\lambda^{n+\frac{1}{2}}e^{i\beta_2(i-1)j} + (1-2s)\lambda^{n+\frac{1}{2}}e^{i\beta_2 i j} + s\lambda^{n+\frac{1}{2}}e^{i\beta_2(i+1)j} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Untuk memperoleh nilai λ maka persamaan (3.14) dibagi dengan $\lambda^n e^{i\beta_1 i j}$ sehingga diperoleh:

$$\lambda_1 = \left(\frac{1 - 4t \sin^2 \frac{\beta_1 i}{2}}{1 + 4s \sin^2 \frac{\beta_1 j}{2}} \right)^2 \quad (3.16)$$

Secara sama, persamaan (3.15) dibagi dengan $\lambda^{n+\frac{1}{2}}e^{i\beta_2 i j}$ sehingga diperoleh:

$$\lambda_2 = \left(\frac{1 - 4s \sin^2 \frac{\beta_2 j}{2}}{1 + 4t \sin^2 \frac{\beta_2 i}{2}} \right)^2 \quad (3.17)$$

Dari persamaan (3.16) dan (3.17) dapat dilihat bahwa nilai λ tidak pernah negatif dan $\lambda \leq 1$. Dapat dikatakan bahwa skema selalu stabil tanpa syarat.

3.5 Simulasi dengan Program MATLAB

No	Listing Program
1.	clc;
2.	clear all;
3.	sigma = 0.1;
4.	dt = 4;
5.	dx = 1.5;
6.	t = 0:dt:400;
7.	x = -20:dx:20;
8.	N = length(t);
9.	M = length(x);
10.	mu = sigma*dt/dx^2
11.	mu2=mu/2
12.	A=zeros(M,M);
13.	for t=1:N
14.	for i=1:M
15.	for j=1:M
16.	if i==j
17.	A(i,j,t)=1+mu;
18.	B(i,j,t)=1-mu;
19.	end;
20.	if i==j+1
21.	A(i,j,t)=-mu2;
22.	B(i,j,t)=mu2;
23.	end;
24.	if j==i+1
25.	A(i,j,t)=-mu2;
26.	B(i,j,t)=mu2;
27.	end;
28.	end;
29.	end;
30.	end;
31.	u = zeros(M,M,N);

```

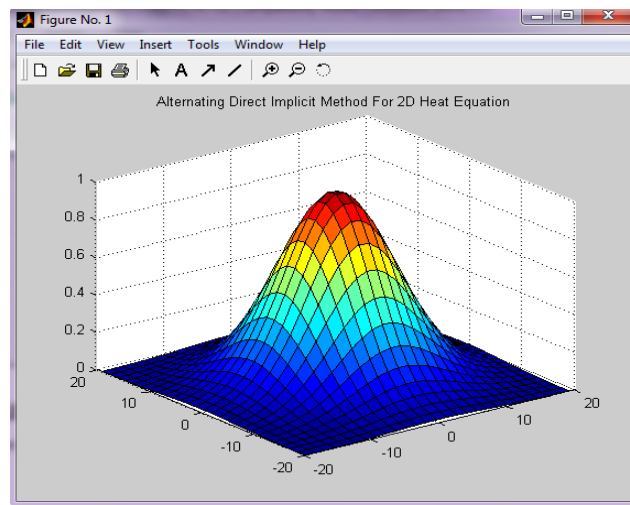
32. for j1=1:M
33.     for j2=1:M
34.         u(j1,j2,1)=exp(-((x(j1))^2+(x(j2))^2)/100);
35.     end;
36. end;
37. figure(1);
38. colormap(jet);
39. surf(x,x,u(:,:,1));
40. title(['Alternating Direct Implicit Method For 2D Heat Equation']);
41. MM=getframe;
42.
43. % Calculation For Step One (n+0.5)
44. for n = 1:N
45.     h=((floor(n+0.5))+1);
46.     for k=1:M
47.         v(k,:,h-1)=u(k,:,h-1);
48.     end;
49.     b=(v/A(i,j))*B(i,j);
50.     for l=1:M
51.         u(l,:,h) = b(l,:,h-1);
52.     end;
53. % Calculation For Step Two (n+1)
54.     for z=1:M
55.         v(:,z,h-1)=u(:,z,h);
56.     end;
57.     q=(A(i,j)\v)*B(i,j);
58.     for f=1:M
59.         u(:,f,h+1)=q(:,f,h-1);
60.     end;
61. % Plot Solution
62. figure(2);
63. colormap(cool);
64. xlabel('x');

```

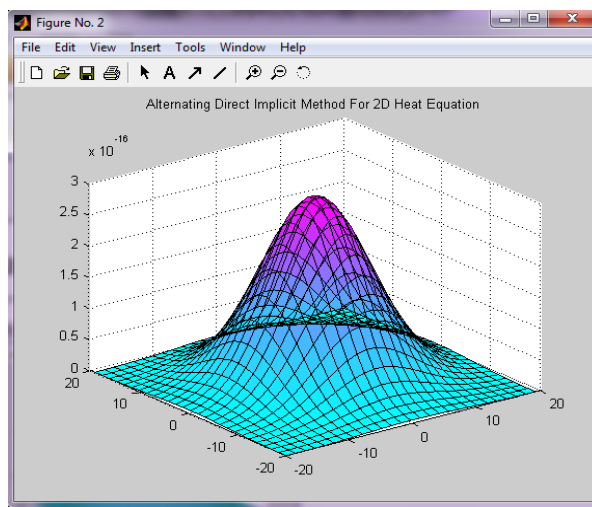
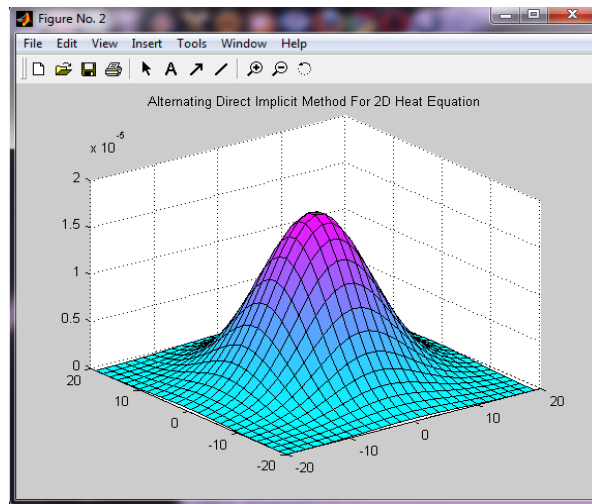
65.	<code>ylabel('y');</code>
66.	<code>zlabel('t');</code>
67.	<code>surf(x,x,u(:, :, h+1));</code>
68.	<code>title(['Alternating Direct Implicit Method For 2D Heat Equation']);</code>
69.	<code>MM=getframe;</code>
70.	<code>end;</code>

3.5.1 Plot Metode ADI

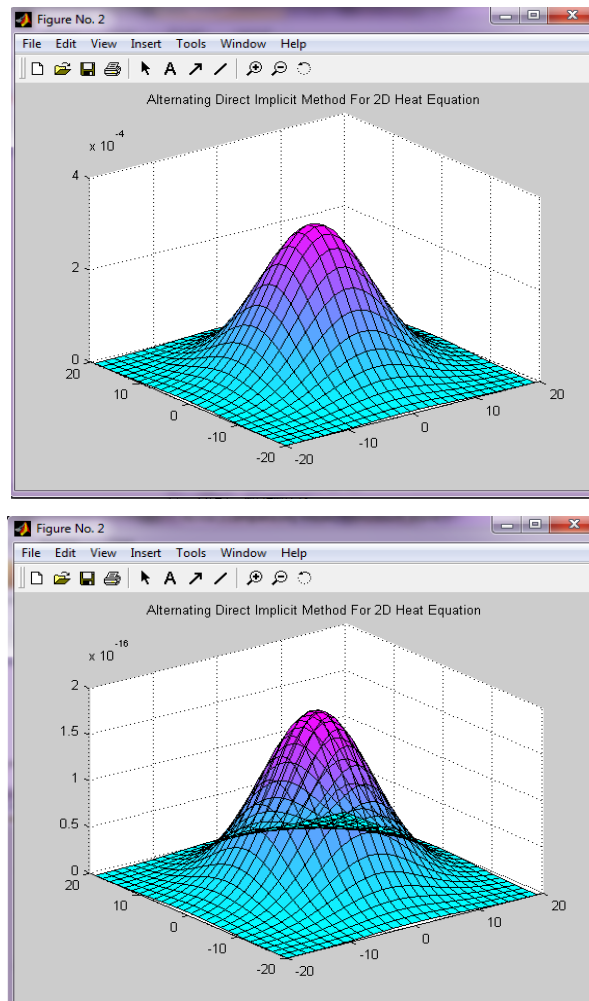
Plot untuk syarat awal dengan menggunakan Fungsi Gauss :



$$\Delta x = 1.5; \Delta t = 1; a = 0.1$$



$$\Delta x = 1.5; \Delta t = 1; a = 0.1$$



3.5.2 Analisa Plot

Untuk $\Delta x = 1.5, \Delta t = 1$, dengan nilai $a = 0.1$ dan $nu = a * dt/dx^2 = (0.1) * 1/(1.5)^2 = 0.044$ mendekati nol (mengalami penyebaran) sehingga tampak bahwa plot semakin lama bertambah landai. Sedangkan untuk $\Delta x = 1.5, \Delta t = 3$, dengan nilai $a = 0.1$ dan $nu = a * dt/dx^2 = (1) * 3/(1.5)^2 = 0.133$, dimana nu yang kedua lebih besar dari nilai nu yang awal juga menghasilkan perilaku plot yang sama dengan plot sebelumnya (bertambah landai). Apabila kita simpulkan bahwa metode ADI pada persamaan panas selalu stabil tanpa syarat berapapun nilai nu yang diberikan (nilai nu tidak ada batasannya/Unconditionally Stable).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan sebelumnya dapat disimpulkan beberapa hal, yaitu:

- 1) Dengan menggunakan metode ADI untuk menyelesaikan persamaan panas dua dimensi diperoleh dua persamaan beda hingga (skema numerik) sebagai berikut:

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2} \partial_x^2\right) U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \partial_y^2\right) U_{i,j}^n$$

Dan

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2} \partial_y^2\right) U_{i,j}^{n+1} = \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \partial_x^2\right) U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

- 2) Sistem persamaan yang diperoleh dari skema numerik ADI dapat ditunjukkan oleh matriks tridiagonal berikut:

$$= \begin{bmatrix} 1+2s & -s & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -s & 1+2s & -s & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -s & 1+2s & -s & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -s & 1+2s & -s \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -s & 1+2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ U_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ U_{N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ U_{N,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2t & t & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ t & 1-2t & t & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & t & 1-2t & t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 1-2t & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & 1-2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,1}^n \\ U_{i,2}^n \\ \vdots \\ U_{i,N-1}^n \\ U_{i,N}^n \end{bmatrix}$$

Dan

$$\begin{bmatrix} 1+2t & -t & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -t & 1+2t & -t & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -t & 1+2t & -t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t & 1+2t & -t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -t & 1+2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,1}^{n+1} \\ U_{i,2}^{n+1} \\ \vdots \\ U_{i,N-1}^{n+1} \\ U_{i,N}^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2s & s & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ s & 1-2s & s & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & s & 1-2s & s & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s & 1-2s & s \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & s & 1-2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ U_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ U_{N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ U_{N,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

- 3) Skema numerik ADI memiliki kesalahan pemotongan orde pertama untuk turunan terhadap waktu ($\mathcal{O}(\Delta t)$) dan orde kedua untuk turunan terhadap *space* ($\mathcal{O}(\Delta x^2), \mathcal{O}(\Delta y^2)$).
- 4) Skema numerik ADI stabil tanpa syarat, hal itu diakibatkan oleh nilai λ yang tidak pernah negatif dan $\lambda \leq 1$.
- 5) Dari hasil simulasi dengan software MATLAB dengan beberapa nilai Δx dan Δt menghasilkan perilaku yang sama yaitu plot semakin lama semakin landai (menuju nilai nol) dengan kata lain skema tersebut stabil tanpa syarat dan hal itu sesuai dengan analisa kestabilan.

4.2 Saran

Dalam pembuatan program dengan menggunakan software MATLAB untuk metode ADI (Alternating Direct Implisit) ini, pembuat program akan mengalami kesulitan dalam penginputan indeksinya. Oleh sebab itu, digunakan pemisalan indeks dengan variable lain. Dan untuk makalah selanjutnya sebaiknya menggunakan domain yang lebih bervariasi dan lebar grid yang berbeda untuk mengetahui karakteristik dari metode ADI lebih dalam lagi.

DAFTAR PUSTAKA

- Anonymous. http://www.uajy.ac.id/jurnal/jti/1999/3/4/doc/1999_3_4_5.doc. Tanggal akses: 29 Oktober 2010.
- Anonymous. http://en.wikipedia.org/wiki/Alternating_Direction_Implicit_Method. Tanggal akses: 01 November 2010.
- Basarudin, T. 1991. *Metode Beda Hingga untuk Persamaan Differensial*. Jakarta: PT. Elek Komputindo Gramedia.
- Hoffman, J. D. 2001. *Numerical Method For Engineers And Scientist 2rd Edition Revised and Expanded*. New York: Marcel Dekker Inc.
- Kreyszig, Edwin. 2005. *Advanced Mathematics for Engeenering 9th Edition*. USA: John Wiley and Sons.
- Mathew, J.H and Fink, K.D. 2004. *Numerical Method Using Matlab 4th Edition*. New Jersey: Person Education Inc.
- Mudjiarto, Roswati dan Frans J.Krips.1995. *Matematika Fisika I*. Bandung: ITB.
- Noye, J. 1981. *Numerical Solution of Partial Differntial Equation*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
- Suryanto, Agus. 2008. *Petunjuk praktikum persamaan Diffrensial Parsial Numerik*. Malang: Universitas Brawijaya.

Lampiran 1. Penurunan Skema Numerik Metode ADI

Diketahui persamaan panas dua dimensi:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

Metode ADI biasanya digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial parabolik dalam dua dimensi spasial menggunakan matriks tridiagonal. Untuk melakukannya, digunakan metode implisit *Crank-Nicholson* untuk menghasilkan persamaan beda hingga yaitu menggunakan beda maju untuk turunan terhadap waktu (t) dan menggunakan beda pusat rata-rata untuk turunan terhadap *space* (x, y). Sehingga persamaan (1) menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2\Delta x^2} [(U_{i+1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1}) + (U_{i+1,j}^n + 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n)] + \\ &\quad \frac{1}{2\Delta y^2} [(U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}) + (U_{i,j+1}^n + 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n)] \\ \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial y^2} \right) \\ \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2} (\partial_x^2 + \partial_y^2) (U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j}^n) \end{aligned} \quad (2)$$

Dari persamaan (2) diperoleh :

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} &= U_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} [(\partial_x^2 + \partial_y^2) U_{i,j}^{n+1} + (\partial_x^2 + \partial_y^2) U_{i,j}^n] \\ \left(1 - \frac{\Delta t}{2} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \right) U_{i,j}^{n+1} &= \left(1 + \frac{\Delta t}{2} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \right) U_{i,j}^n \end{aligned}$$

Ide dibalik metode ADI adalah untuk membagi persamaan beda hingga menjadi dua, satu dengan derivative x yang diambil secara implisit dan berikutnya dengan derivative y yang diambil secara implisit. Dari persamaan (2) dapat kita selesaikan menjadi :

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2} (\partial_x^2 + \partial_y^2) (U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j}^n) \\ \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2} [(\partial_x^2 + \partial_y^2) U_{i,j}^{n+1} + (\partial_x^2 + \partial_y^2) U_{i,j}^n] \\ \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2} (\partial_x^2 U_{i,j}^{n+1} + \partial_y^2 U_{i,j}^{n+1} + \partial_x^2 U_{i,j}^n + \partial_y^2 U_{i,j}^n) \\ \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{\partial_x^2 U_{i,j}^{n+1} + \partial_x^2 U_{i,j}^n}{2} + \frac{\partial_y^2 U_{i,j}^{n+1} + \partial_y^2 U_{i,j}^n}{2} \\ \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} &= \partial_x^2 \left(\frac{U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j}^n}{2} \right) + \frac{\partial_y^2 U_{i,j}^{n+1}}{2} + \frac{\partial_y^2 U_{i,j}^n}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} = \partial_x^2 U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\partial_y^2 U_{i,j}^{n+1}}{2} + \frac{\partial_y^2 U_{i,j}^n}{2}$$

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(2\partial_x^2 U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \partial_y^2 U_{i,j}^{n+1} + \partial_y^2 U_{i,j}^n)$$

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^n}{\frac{\Delta t}{2}} = \partial_x^2 U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \partial_y^2 U_{i,j}^{n+1} + \partial_x^2 U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \partial_y^2 U_{i,j}^n$$

$$\frac{U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^n}{\frac{\Delta t}{2}} + \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} = \left(\partial_x^2 U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \partial_y^2 U_{i,j}^{n+1} \right) + \left(\partial_x^2 U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \partial_y^2 U_{i,j}^n \right)$$

Sehingga diperoleh dua persamaan beda hingga sebagai berikut

$$\frac{U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^n}{\frac{\Delta t}{2}} = \left(\partial_x^2 U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \partial_y^2 U_{i,j}^n \right) \quad (3)$$

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} = \left(\partial_x^2 U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \partial_y^2 U_{i,j}^{n+1} \right) \quad (4)$$

Dari persamaan (3) diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^n}{\frac{\Delta t}{2}} &= \left(\partial_x^2 U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \partial_y^2 U_{i,j}^n \right) \\ U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} &= U_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\partial_x^2 U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \partial_y^2 U_{i,j}^n \right) \\ \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \partial_x^2 \right) U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} &= \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \partial_y^2 \right) U_{i,j}^n \end{aligned} \quad (5)$$

Dengan cara yang sama, dari persamaan (4) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} &= \left(\partial_x^2 U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \partial_y^2 U_{i,j}^{n+1} \right) \\ U_{i,j}^{n+1} &= U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \left(\partial_x^2 U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \partial_y^2 U_{i,j}^{n+1} \right) \\ \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \partial_y^2 \right) U_{i,j}^{n+1} &= \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \partial_x^2 \right) U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6)$$

Dapat ditunjukkan bahwa persamaan (5) dan (6) ekuivalen dengan

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2} \partial_x^2 \right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \partial_y^2 \right) U_{i,j}^{n+1} = \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \partial_x^2 \right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \partial_y^2 \right) U_{i,j}^n \quad (7)$$

Lampiran 2. Matriks yang Terbentuk dengan Metode ADI

Dari penurunan skema numerik persamaan panas dua dimensi dengan metode ADI diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$(1 - \frac{\Delta t}{2} \partial_x^2) U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = (1 - \frac{\Delta t}{2} \partial_y^2) U_{i,j}^n \quad (1)$$

$$(1 - \frac{\Delta t}{2} \partial_y^2) U_{i,j}^{n+1} = (1 + \frac{\Delta t}{2} \partial_x^2) U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (2)$$

- Untuk persamaan (1)

Persamaan (1) dapat dijabarkan menjadi:

$$U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} \left(U_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + U_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) = U_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2(\Delta y)^2} (U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n)$$

Dengan memisalkan $s = \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}$ dan $t = \frac{\Delta t}{2(\Delta y)^2}$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - s \left(U_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + U_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) &= U_{i,j}^n + t(U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n) \\ (1 + 2s)U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - sU_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - sU_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} &= (1 - 2t)U_{i,j}^n + tU_{i,j-1}^n + tU_{i,j+1}^n \\ -sU_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 2s)U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - sU_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} &= tU_{i,j-1}^n + (1 - 2t)U_{i,j}^n + tU_{i,j+1}^n \end{aligned} \quad (3)$$

Dengan mensubstitusikan $i = 1, 2, \dots, N$ dan $j = 1, 2, \dots, N$ serta syarat batas ke dalam persamaan (3) diperoleh:

$$\begin{aligned} i = 1, j = 1 &\rightarrow (1 + 2s)U_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - sU_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} = (1 - 2t)U_{1,1}^n + tU_{1,2}^n \\ i = 2, j = 2 &\rightarrow -sU_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 2s)U_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} - sU_{3,j}^{n+\frac{1}{2}} = tU_{2,1}^n + (1 - 2t)U_{2,2}^n + tU_{2,3}^n \\ i = 3, j = 3 &\rightarrow -sU_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 2s)U_{3,j}^{n+\frac{1}{2}} - sU_{4,j}^{n+\frac{1}{2}} = tU_{3,2}^n + (1 - 2t)U_{3,3}^n + tU_{3,4}^n \\ &\vdots \\ i = N, j = N &\rightarrow -sU_{N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + 2s)U_{N,j}^{n+\frac{1}{2}} = tU_{N,N-1}^n + (1 - 2t)U_{N,N}^n \end{aligned}$$

Sehingga matriks yang terbentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1+2s & -s & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -s & 1+2s & -s & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -s & 1+2s & -s & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -s & 1+2s & -s \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -s & 1+2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ U_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ U_{N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ U_{N,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1-2t & t & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ t & 1-2t & t & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & t & 1-2t & t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 1-2t & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & 1-2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,1}^n \\ U_{i,2}^n \\ \vdots \\ U_{i,N-1}^n \\ U_{i,N}^n \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- Untuk persamaan (2)

Secara sama persamaan (2) dapat dijabarkan menjadi:

$$U_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2(\Delta y)^2} (U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}) = U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} (U_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + U_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}})$$

Dengan memisalkan $s = \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}$ dan $t = \frac{\Delta t}{2(\Delta y)^2}$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
 U_{i,j}^{n+1} - t(U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}) &= U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + t(U_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + U_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}) \\
 (1+2t)U_{i,j}^{n+1} - tU_{i,j-1}^{n+1} - tU_{i,j+1}^{n+1} &= (1-2s)U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + sU_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + sU_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
 -tU_{i,j-1}^{n+1} + (1+2t)U_{i,j}^{n+1} - tU_{i,j+1}^{n+1} &= sU_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1-2s)U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + sU_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4)
 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan $i = 1, 2, \dots, N$ dan $j = 1, 2, \dots, N$ serta syarat batas ke dalam persamaan (4) diperoleh:

$$\begin{aligned}
 i = 1, j = 1 &\rightarrow (1+2t)U_{i,1}^{n+1} - tU_{i,2}^{n+1} = (1-2s)U_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} + sU_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
 i = 2, j = 2 &\rightarrow -tU_{i,1}^{n+1} + (1+2t)U_{i,2}^{n+1} - tU_{i,3}^{n+1} = sU_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1-2s)U_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} + sU_{3,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
 i = 3, j = 3 &\rightarrow -tU_{i,2}^{n+1} + (1+2t)U_{i,3}^{n+1} - tU_{i,4}^{n+1} = sU_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1-2s)U_{3,j}^{n+\frac{1}{2}} + sU_{4,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
 &\vdots \\
 i = N, j = N &\rightarrow -tU_{i,N-1}^{n+1} + (1+2t)U_{i,N}^{n+1} = sU_{N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1-2s)U_{N,j}^{n+\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Sehingga matriks yang terbentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1+2t & -t & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -t & 1+2t & -t & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -t & 1+2t & -t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t & 1+2t & -t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -t & 1+2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,1}^{n+1} \\ U_{i,2}^{n+1} \\ \vdots \\ U_{i,N-1}^{n+1} \\ U_{i,N}^{n+1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1-2s & s & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ s & 1-2s & s & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & s & 1-2s & s & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s & 1-2s & s \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & s & 1-2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ U_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ U_{N-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ U_{N,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Lampiran 3. Kesalahan Pemotongan

Dengan mengekspansikan deret taylor ke dalam persamaan:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2\Delta x^2} [(U_{i+1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1}) + (U_{i+1,j}^n + 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n)] + \\ &\quad \frac{1}{2\Delta y^2} [(U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}) + (U_{i,j+1}^n + 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n)] \quad (1) \end{aligned}$$

Maka diperoleh:

- Untuk turunan terhadap waktu (t)

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \left[\left(U_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{1!} \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial t^2} + \dots \right) - U_{i,j}^n \right] \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\Delta t}{1!} \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial t^2} + \dots \right) \\ &= \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial t^2} + \dots \\ &= \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (2) \end{aligned}$$

- Untuk turunan terhadap sweep- x

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\Delta x^2} [(U_{i+1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1}) + (U_{i+1,j}^n + 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n)] \\ &= \frac{1}{2\Delta x^2} \left[\left[\left(U_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial U_{i,j}^{n+1}}{\partial x} + \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial x^2} + \dots \right) - 2U_{i,j}^{n+1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(U_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial U_{i,j}^{n+1}}{\partial x} + \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial x^2} - \dots \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(U_{i,j}^n + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial x} + \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial x^2} + \dots \right) - 2U_{i,j}^n \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(U_{i,j}^n - \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial x} + \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial x^2} - \dots \right) \right] \right] \\ &= \frac{1}{2\Delta x^2} \left[\left((\Delta x)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{2(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 U_{i,j}^{n+1}}{\partial x^4} + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \left((\Delta x)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial x^2} + \frac{2(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 U_{i,j}^n}{\partial x^4} + \dots \right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^2}{4!} \frac{\partial^4 U_{i,j}^{n+1}}{\partial x^4} + \dots \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^2}{4!} \frac{\partial^4 U_{i,j}^n}{\partial x^4} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial x^2} \right) + \mathcal{O}(\Delta x^2)
\end{aligned} \tag{3}$$

- Untuk turunan terhadap sweep-y

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\Delta y^2} [(U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}) + (U_{i,j+1}^n + 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n)] \\
&= \frac{1}{2\Delta y^2} \left[\left[\left(U_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial U_{i,j}^{n+1}}{\partial y} + \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial y^2} + \dots \right) - 2U_{i,j}^{n+1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(U_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta y}{1!} \frac{\partial U_{i,j}^{n+1}}{\partial y} + \frac{\Delta y}{2!} \frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial y^2} - \dots \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\left(U_{i,j}^n + \frac{\Delta y}{1!} \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial y} + \frac{\Delta y}{2!} \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial y^2} + \dots \right) - 2U_{i,j}^n \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(U_{i,j}^n - \frac{\Delta y}{1!} \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial y} + \frac{\Delta y}{2!} \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial y^2} - \dots \right) \right] \right] \\
&= \frac{1}{2\Delta y^2} \left[\left((\Delta y)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial y^2} + \frac{2(\Delta y)^4}{4!} \frac{\partial^4 U_{i,j}^{n+1}}{\partial y^4} + \dots \right) \right. \\
&\quad \left. + \left((\Delta y)^2 \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial y^2} + \frac{2(\Delta y)^4}{4!} \frac{\partial^4 U_{i,j}^n}{\partial y^4} + \dots \right) \right] \\
&= \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial y^2} + \frac{(\Delta y)^2}{4!} \frac{\partial^4 U_{i,j}^{n+1}}{\partial y^4} + \dots \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial y^2} + \frac{(\Delta y)^2}{4!} \frac{\partial^4 U_{i,j}^n}{\partial y^4} + \dots \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial y^2} + \mathcal{O}(\Delta y^2) \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial y^2} + \mathcal{O}(\Delta y^2) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial y^2} \right) + \mathcal{O}(\Delta y^2)
\end{aligned} \tag{4}$$

Dari persamaan (2), (3) dan (4), persamaan (1) dapat dirubah menjadi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t) &= \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial x^2} \right) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial y^2} \right) + \mathcal{O}(\Delta y^2) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{i,j}^{n+1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial y^2} \right) + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta t) \quad (5)$$

Dari persamaan (5) dapat dilihat bahwa metode ADI memiliki kesalahan pemotongan orde pertama untuk turunan terhadap waktu (t) dan orde kedua untuk *space* (x, y).

Lampiran 4. Analisis Kestabilan

Suatu skema numerik (pendekatan beda hingga) disebut stabil jika kesalahan tidak meningkat selama proses perhitungan. Dalam menentukan skema itu stabil atau tidak, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

Sebelumnya sudah diketahui persamaan yang diperoleh dari metode ADI yaitu:

$$-sU_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1+2s)U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - sU_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = tU_{i,j-1}^n + (1-2t)U_{i,j}^n + tU_{i,j+1}^n \quad (1)$$

$$-tU_{i,j-1}^{n+1} + (1+2t)U_{i,j}^{n+1} - tU_{i,j+1}^{n+1} = sU_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1-2s)U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + sU_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (2)$$

Persamaan (1) dapat diselesaikan sebagai berikut:

Dengan melakukan penggantian $U_{i,j}^n = \lambda^n e^{i\beta_1 i j}$ pada persamaan (1) diperoleh:

$$\begin{aligned} -s\lambda^{n+\frac{1}{2}}e^{i\beta_1(i-1)j} + (1+2s)\lambda^{n+\frac{1}{2}}e^{i\beta_1 i j} - s\lambda^{n+\frac{1}{2}}e^{i\beta_1(i+1)j} \\ = t\lambda^n e^{i\beta_1 i(j-1)} + (1-2t)\lambda^n e^{i\beta_1 i j} \\ + t\lambda^n e^{i\beta_1 i(j+1)} \end{aligned} \quad (3)$$

Persamaan di atas dibagi dengan $\lambda^n e^{i\beta_1 i j}$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} -s\lambda^{\frac{1}{2}}e^{i\beta_1 j} + (1+2s)\lambda^{\frac{1}{2}} - s\lambda^{\frac{1}{2}}e^{i\beta_1 j} &= te^{-i\beta_1 i} + (1-2t) + te^{i\beta_1 i} \\ -s\lambda^{\frac{1}{2}}(e^{-i\beta_1 j} + e^{i\beta_1 j}) + (1+2s)\lambda^{\frac{1}{2}} &= t(e^{-i\beta_1 i} + e^{i\beta_1 i}) + (1-2t) \\ -s\lambda^{\frac{1}{2}}(\cos \beta_1 j - i \sin \beta_1 j + \cos \beta_1 j + i \sin \beta_1 j) + (1+2s)\lambda^{\frac{1}{2}} \\ &= t(\cos \beta_1 i - i \sin \beta_1 i + \cos \beta_1 i + i \sin \beta_1 i) + (1-2t) \\ -s\lambda^{\frac{1}{2}}(2 \cos \beta_1 j) + (1+2s)\lambda^{\frac{1}{2}} &= t(2 \cos \beta_1 i) + (1-2t) \\ \lambda^{\frac{1}{2}}(-2s \cos \beta_1 j + 2s) &= 2t \cos \beta_1 i + 1 - 2t \\ \lambda^{\frac{1}{2}} &= \frac{1 - 2t(1 - \cos \beta_1 i)}{1 + 2s(1 - \cos \beta_1 j)} \\ \lambda^{\frac{1}{2}} &= \frac{1 - 2t \sin^2(\frac{\beta_1 i}{2})}{1 + 2s \sin^2(\frac{\beta_1 j}{2})} \end{aligned}$$

λ_1

$$= \left(\frac{1 - 4t \sin^2\left(\frac{\beta_1 i}{2}\right)}{1 + 4s \sin^2\left(\frac{\beta_1 j}{2}\right)} \right)^2 \quad (4)$$

Secara sama persamaan (2) dapat diselesaikan sebagai berikut:

Dengan melakukan penggantian $U_{i,j}^n = \lambda^n e^{i\beta_2 ij}$ pada persamaan (2) diperoleh:

$$\begin{aligned} -t\lambda^{n+1}e^{i\beta_2 i(j-1)} + (1+2t)\lambda^{n+1}e^{i\beta_2 ij} - t\lambda^{n+1}e^{i\beta_2 i(j+1)} \\ = s\lambda^{n+\frac{1}{2}}e^{i\beta_2 (i-1)j} + (1-2s)\lambda^{n+\frac{1}{2}}e^{i\beta_2 ij} \\ + s\lambda^{n+\frac{1}{2}}e^{i\beta_2 (i+1)j} \end{aligned} \quad (5)$$

Persamaan (5) dibagi dengan $\lambda^{n+\frac{1}{2}}e^{i\beta_2 ij}$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} -t\lambda^{\frac{1}{2}}e^{-i\beta_2 i} + (1+2t)\lambda^{\frac{1}{2}} - t\lambda^{\frac{1}{2}}e^{i\beta_2 i} &= se^{-i\beta_2 j} + (1-2s) + se^{i\beta_2 j} \\ -t\lambda^{\frac{1}{2}}(e^{-i\beta_2 i} + e^{i\beta_2 i}) + (1+2t)\lambda^{\frac{1}{2}} &= s(e^{-i\beta_2 j} + e^{i\beta_2 j}) + (1-2s) \\ -t\lambda^{\frac{1}{2}}(\cos \beta_2 i - i \sin \beta_2 i + \cos \beta_2 i + i \sin \beta_2 i) + (1+2t)\lambda^{\frac{1}{2}} \\ &= s(\cos \beta_2 j - i \sin \beta_2 j + \cos \beta_2 j + i \sin \beta_2 j) + (1-2s) \\ -t\lambda^{\frac{1}{2}}(2 \cos \beta_2 i) + (1+2t)\lambda^{\frac{1}{2}} &= s(2 \cos \beta_2 j) + (1-2s) \\ \lambda^{\frac{1}{2}}(-2t \cos \beta_2 i + 1 + 2t) &= 2s \cos \beta_2 j + 1 - 2s \\ \lambda^{\frac{1}{2}} &= \frac{1 - 2s(1 - \cos \beta_2 j)}{1 + 2t(1 - \cos \beta_2 i)} \\ \lambda^{\frac{1}{2}} &= \frac{1 - 2s \sin^2\left(\frac{\beta_2 j}{2}\right)}{1 + 2t \sin^2\left(\frac{\beta_2 i}{2}\right)} \end{aligned}$$

λ_2

$$= \left(\frac{1 - 4s \sin^2\left(\frac{\beta_2 j}{2}\right)}{1 + 4t \sin^2\left(\frac{\beta_2 i}{2}\right)} \right)^2 \quad (6)$$

Dari perhitungan diatas dapat dilihat bahwa nilai λ_1 dan λ_2 tidak pernah bernilai negatif dan $\lambda_{1,2} \leq 1$. Sehingga dapat disimpulkan skema numerik yang diperoleh dengan metode ADI selalu stabil tanpa syarat.