TD : 6 Statistique Inférentielle : « Test d'hypothèse »

Ex : 5.1 – 5.2 – 5.3 – 5.5

Rappel :

1. Estimation ponctuelle du paramètre θ de la loi
2. Estimation de θ par les intervalles de confiance qui prend en compte les fluctuations d'échantillonnage. Elle nous permet d'évaluer la confiance que l'on peut avoir en une valeur.
3. En troisième point, vient le problème de décision au vu d'observations entre :

Hypothèse nulle : H_0

d'une Hypothèse alternative : H_1

Le Test d'hypothèses est un moyen nous permettant de choisir H_0 ou H_1.

2 types d'erreurs →
- Décider H_0 vraie / H_1 est vraie (Erreur de seconde espèce) β
- Décider H_1 vraie / H_0 vraie (Erreur de 1ère espèce) α

I : erreur de 1ère espèce : α

c'est la probabilité de rejeter à tort H_0 (de se tromper en choisissant H_1) appelé seuil ou niveau de signification

II. erreur de 2ème espèce : β

c'est la probabilité d'accepter à tort H_0 càd de rejeter H_1 à tort.

III. probabilité de décider H_1 / H_1 vraie : $1 - \beta$ → {puissance du test}

III. probabilité de décider H_0 / H_0 vraie : $1 - \alpha$ → {niveau confiance du test}

Décision \ Vérité	H_0	H_1
H_0	$1-\alpha$ niveau de confiance	β erreur de 2ème espèce
H_1	α erreur de 1ère espèce	$1-\beta$ Puissance du test

Rq : $\left\{ \text{$\underline{\underline{H_0}}$ est définie de telle sorte qu'elle soit l'hypothèse que l'on désire rejeter.} \right\}$

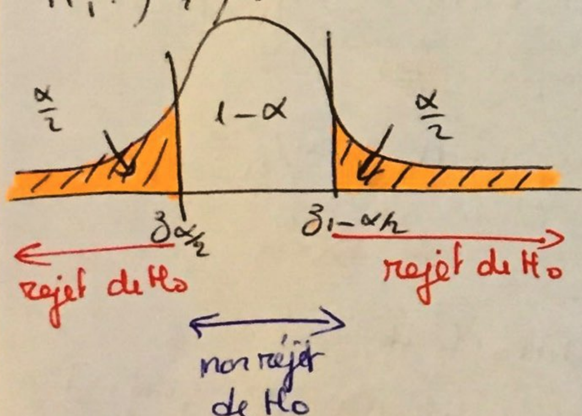
$H_0 \longrightarrow$ la situation contraire est respectée.

$H_1 \longrightarrow$ la vraie situation est respectée.

Test bi-latéral

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

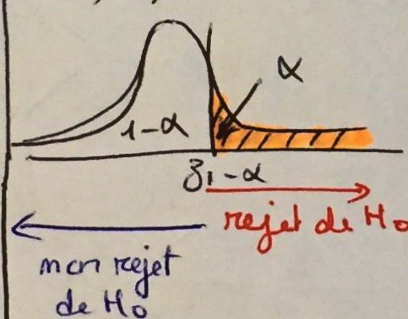


Test unilatéral

à droite

$H_0 : \mu = \mu_0$

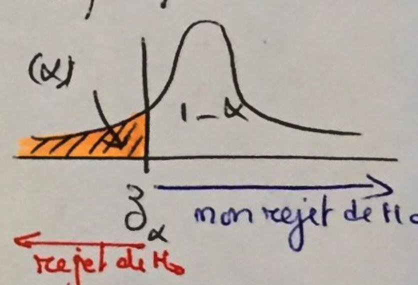
$H_1 : \mu > \mu_0$



à gauche

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu < \mu_0$



Etapes d'un Test d'hypothèse

1- Définir H_0 et H_1 de telle sorte de rejeter H_0

2- se fixer α : erreur de 1ère espèce (rejeter à tort H_0 / H_0 vraie)

3- Etablir la règle de rejet de H_0 à partir de la distribution de la statistique du test

4- Calculer la valeur observée de la statistique du test à partir de l'échantillon

5- Comparer la valeur observée à la valeur critique

6- Décision : (rejet ou non rejet de H_0)

Dans un cas concret, on est amené à définir les 4 étapes suivantes afin de conclure :

1 – Hypothèse et seuil : $\begin{cases} H_0 : \\ H_1 : \end{cases}$

2 – Règle de rejet de H_0 : Z : statistique du test

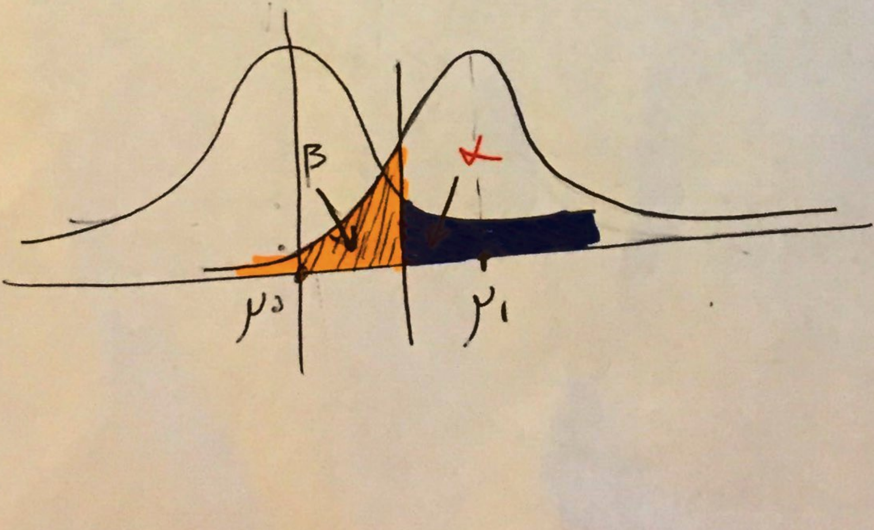
z_0 : valeur observée de z_0

$z_{(\alpha)}$ $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$: valeur critique qui dépend de l'erreur α

3 – Comparaison : valeur observée par rapport à la valeur critique

4 – Décision : rejet ou non rejet de H_0.

erreur du 2ème espèce β	Puissance du Test $1-\beta$
$\beta \searrow$: μ_1 s'éloigne de μ_0 $\beta \searrow$, quand $n \nearrow$ $\beta \searrow$, quand $\alpha \nearrow$	• dépend de H_1 Test unilatéral $>_{\text{puissant}}$ Test bilatéral • $(1-\beta) \nearrow$, quand $n \nearrow$ • $(1-\beta) \searrow$, quand $\alpha \searrow$



Exercice 5.1

$X \sim \mathcal{N}(\mu ; \sigma^2 = 0{,}04)$

$\mu_0 = 12{,}1$ mm.

Echantillon $\begin{cases} \text{taille } n = 64 \text{ pièces.} \\ \bar{x} = 12{,}095 \text{ mm} \longrightarrow \text{moyenne empirique} \end{cases}$

$\alpha = 10\% = 0{,}1$

Tester si $\hat{\mu} = 12{,}1$??

rq : $\hat{\mu}$ = moyenne estimée à partir d'un échantillon.

- $\mathcal{E}$: " On tire au hasard une bague "
- Ω : { l'ensemble de toutes les bagues }

Prob. uniforme car chaque bague a la mê probabilité d'être tiré.

- $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
  $b \longmapsto X(b)$: diamètre de la bague en mm.

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = (0{,}04)^2)$. $\sigma = 0{,}04$.

Test d'hypothèse :

1) Hypothèse et seuil

- On teste $H_0 : \mu = \mu_0 = 12{,}1$ mm
  $H_1 : \mu \neq \mu_0 = 12{,}1$ mm

Il s'agit d'un test bilatéral de la moyenne sur une population de variance connue.

- Seuil : $\alpha = 10\% = 0{,}1$ $\qquad \alpha/2 = 0{,}05$

2-| Règle de rejet

- **Définir la statistique du Test.**

- le paramètre est la moyenne μ
- l'estimateur de μ est $\overline{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

$\overline{x}_n = 12{,}095$ mm. (estimation)

- La loi de l'estimateur $\overline{X_n}$ est

$\overline{X}_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

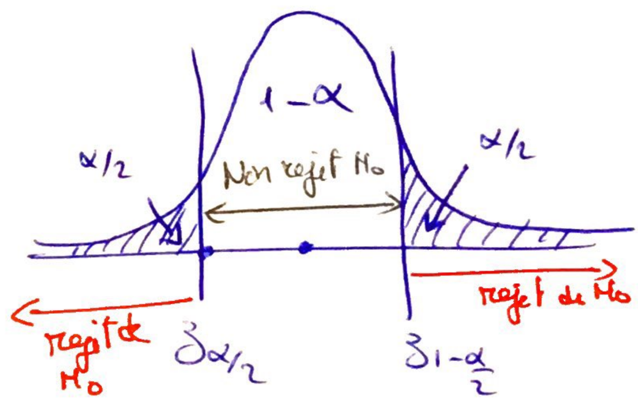
- On définit la statistique du test comme suit

sous H_0 ; $Z_0 = \dfrac{\overline{x}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1) \longrightarrow$ (Table normale)

$\sigma \longrightarrow \sigma$: connu

$P[z_{\alpha/2} \leq Z_0 \leq z_{1-\alpha/2}] = 1-\alpha$

$\boxed{\text{si } |z_0| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{, on rejette } H_0}$



3-| Comparaison : z_0 et $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

- Calculer la valeur observée z_0.

$$z_0 = \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{12{,}095 - 12{,}1}{0{,}04/\sqrt{64}} = \boxed{-1}$$

- Calculer la valeur critique $z_{1-\alpha/2}$

$\alpha = 10\% = 0{,}1 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}95$

Table 2 de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,95} = \boxed{1{,}6449}$

$\boxed{|z_0| < z_{1-\frac{\alpha}{2}}}$

4-] Décision

$|z_0| = 1 < z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,6449$

$\Rightarrow$ $z_0 \in$ à la zone de non rejet de H_0.

Par conséquent, on ne peut pas rejeter H_0

Conclusion:

On ne peut pas dire que le fournisseur a tort en affirmant que le diamètre moyen est de 12,1 mm.

Exercice: 5.2

$\mu_0 = 3$ tonnes

Echantillon $\longrightarrow$ $n = 100$ câbles , $\bar{x}_n = 3,5$ tonnes

Première partie : Test unilatéral pour μ

Deuxième partie : Test de proportion.

1] Décrire l'expérience

- $\mathcal{E}$ = " On choisit au hasard un câble".
- Ω = { l'ensemble de tous les câbles de la production}
- Probabilité uniforme (chaque câble a la même probabilité d'être choisi)
- $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

  $c \longmapsto X(c)$ = résistance à la rupture du cable c (force à exercer pour rompre c)

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = (0,38)^2)$ $\sigma = 0,38$ tonnes

2] Que représente μ, donner un estimateur de μ puis $\hat{\mu}$.

- μ représente la résistance moyenne à la rupture de l'ensemble des câbles de la population Ω.

- Un estimateur de μ serait $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

- Une estimation de μ est $\overline{x}_n = \hat{\mu} = 3,5$ tonnes.

obtenue à partir d'une réalisation

3] Tester si $\mu \overset{?}{>} 3$. $\alpha = 2,5\%$

1. Hypothèse et seuil:

- On teste $H_0 \quad \mu = (3 = \mu_0)$ $\mu_0 = 3$ tonnes

$H_1 : \mu > (3 = \mu_0)$

Ho : est l'hypothèse à rejeter

Il s'agit d'un test unilatéral à droite de la moyenne sur une population de variance connue.

- Seuil $\alpha = 2,5\% = 0,025$

2. Règle de rejet

- Définir la statistique du test

- le paramètre est la moyenne μ
- l'estimateur de μ est $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
- l'estimation de μ : $\hat{\mu} = \overline{x}_n = 3,5$ tonnes.
- La loi de l'estimateur $\overline{X}_n$ est

$$\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \longrightarrow \text{(connu)}$$

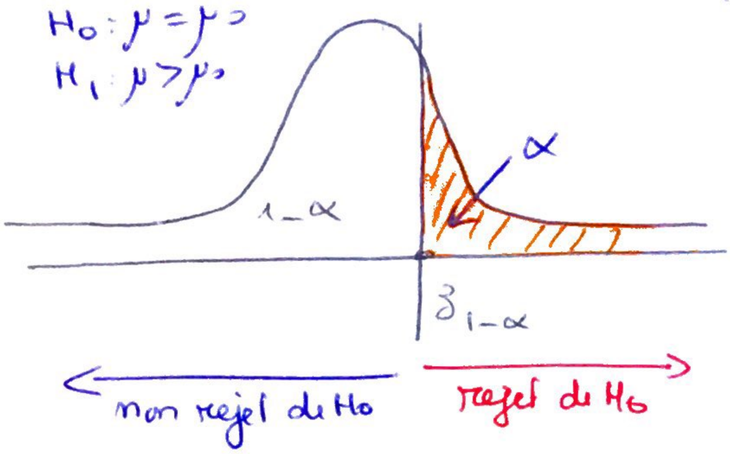
- On définit la statistique du test :

$$\text{sous } H_0,\ Z_0 = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1) \quad \text{(Table normale)}$$

$\sigma \longrightarrow$ connu

$P[z_o > z_{1-\alpha}] = \alpha$

si $\boxed{z_o > z_{1-\alpha} \text{, on rejete } H_o}$



3-) Comparaison : valeur observé - valeur critique

- Valeur observé $z_o = \dfrac{\bar{x}_n - \mu_o}{\sigma / \sqrt{n}} = \dfrac{3,5 - 3}{0,38/\sqrt{100}} = \boxed{13,15}$

- valeur critique $z_{1-\alpha} = z_{1-0,025} = z_{0,975} = \boxed{1,96}$

$(\alpha = 2,5\% = 0,025 \Rightarrow 1-\alpha = 1 - 0,025 = 0,975)$

(Table 1 de $\mathcal{N}(0,1)$) ou ($z_{1-0,025} = \underset{(R)}{\text{qnorm}}(1-0,025) = 1,9599$)

Rq si on regarde table 2, on cherche la valeur 2α

4-) Décision $\boxed{z_o > z_{1-\alpha}}$

$z_o = 13,15 > z_{1-\alpha} = 1,96$

$\Rightarrow z_o$ se trouve dans la zone de rèjet de Ho

Par conséquent, on rèjete Ho

Conclusion

En moyenne, la résistance est > 3 ce qui veut dire que les câbles sont conformes.

Deuxième partie

On s'intéresse à une ~~population~~ proportion de câbles conformes

Echantillon → taille $n = 100$ câbles

$$\hat{p} = 0,85 = \bar{y}_n$$

$p_0 = 0,8$

1] Décrire la variable Y et donner sa loi

- $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$c \longmapsto Y(c) = \begin{cases} 1 & \text{si le câble est conforme} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Rq. Un câble est conforme si sa résistance est > 3 tonnes

- $Y \sim \mathcal{B}(p)$ Bernoulli.

avec $p = P[Y = 1]$; p : inconnu sur la population

2] Estimation ponctuelle de p $(\hat{p} = ?)$

- Un estimateur de p est $\bar{Y}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$
- Une estimation de p est $\hat{p} = \bar{y}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$

à partir d'une réalisation $(y_1, \dots, y_n)$ de $(Y_1, \dots, Y_n)$

$$\hat{p} = \bar{y}_n = 0,85.$$

3] Tester si $p > (p_0 = 0,8)$?

1-] Hypothèses et seuil

- On teste $\begin{cases} H_0 : p = (p_0 = 0,8) \\ H_1 : p > (p_0 = 0,8) \end{cases}$

Il s'agit d'un Test unilatéral à droite de la proportion avec un échantillon de taille grande ($n=100$)

- Seuil : $\alpha = 5\% = 0,05$

2-) Règle de rejet

- Définir la statistique du test.
  - le paramètre est la proportion p
  - l'estimateur de p est $\overline{Y}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$
  - l'estimation de p sur l'échantillon est $\hat{p} = \overline{y}_n = 0,85$
  - la loi de l'estimateur $\overline{Y}_n$ selon (TCL)

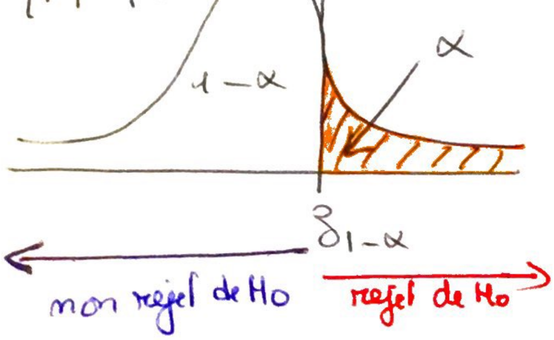
$$\overline{Y}_n \sim N\left(E(\overline{Y}_n) ; V(\overline{Y}_n)\right)$$

$$\overline{Y}_n \sim N\left(p ; \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

  - On définit la statistique du test par

sous H_0, $Z_0 = \dfrac{\overline{Y}_n - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$ (Table normale)

$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 = p > p_0 \end{cases}$



$$P[Z_0 > z_{1-\alpha}] = \alpha.$$

$\boxed{\text{• si } z_0 > z_{1-\alpha} \text{, on rejète } H_0}$

3-) Comparaison (valeur observée - valeur critique)

- Valeur observée $z_0 = \dfrac{\overline{y}_n - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \dfrac{0,85 - 0,8}{\sqrt{\dfrac{0,8 \cdot 0,2}{100}}} = \boxed{1,25}$

- valeur critique $z_{1-\alpha} = z_{1-0,05} = z_{0,95} = 1,6449 = \boxed{1,65}$

$\boxed{z_0 < z_{1-\alpha}}$

4-) Décision :

$z_0 = 1,25 < z_{1-\alpha} = 1,65$.

$\Rightarrow$ z_0 se trouve dans la zone de non rejet de H_0

Par conséquent, on ne peut pas rejeter H_0

Conclusion : la proportion de câbles conformes est bien inférieure ou égale à 0,8.

Exercice 53

- $\mathcal{E}$ = " On choisit au hasard un hectare dans l'exploitation agricole "
- Ω = { l'ensemble des hectares }
- Prob. uniforme
- $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

  $h \longmapsto X(h)$ = rendement moyen de l'hectare h.

$\mu_0 =$ 41,5 tonnes.

* La loi de X n'est pas précisée.

$$\begin{cases} - \ \mu = E(X) : \text{rendement moyen de la nouvelle variété à l'hectare} \\ - \ \sigma^2 = V(X) : \text{inconnue}. \end{cases}$$

* Echantillon de taille $n = 100$

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \overline{x_n} = 45 \text{ tonnes} \longleftarrow \text{estimation ponctuelle à partir d'une réalisation} \\ \hat{\sigma} = s^* = 11,25 \text{ tonnes} \longleftarrow \text{estimation ponctuelle de l'écart type} \\ \quad S^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \frac{n S^2}{n-1} \end{cases}$$

Tester si on peut favoriser la culture de la nouvelle variété.

$\Rightarrow$ il faut que le rendement moyen de la nouvelle variété soit supérieur à celui de l'ancienne variété

Donc, il faut tester si $\mu > (\mu_0 = 41{,}5)$

Test d'hypothèse

1-) Hypothèses et seuil

- On teste H_0 : $\mu = 41{,}5$ (équivalent à $\leq 41{,}5$)

  H_1 : $\mu > 41{,}5$

Il s'agit d'un test unilatéral à droite pour la moyenne avec une variance inconnue

- Seuil $\alpha = 1\,\%$ $\longrightarrow$ $1-\alpha = 0{,}99$

2-) Règle de rejet

- Définir la statistique du test
  - le paramètre est μ.
  - l'estimateur de μ et $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
  - l'estimation de μ est $\hat{\mu} = \bar{x}_n = 45$ tonnes
  - la loi de l'estimateur $\bar{X}_n$ est

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \longrightarrow \text{inconnu}$$

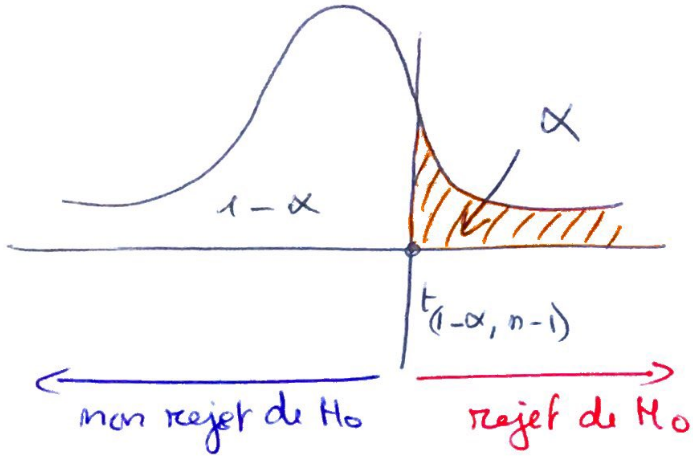
σ^2 inconnu $\Rightarrow$ σ^2 remplacé donc par S^{*2}

et la loi de $T_0 = \dfrac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{S^*}{\sqrt{n}}} \sim S^t(n-1)$
sous H_0

Loi de Student à $(n-1)$ d.ll. $\longrightarrow$ (Table de Student)

$$P[T_0 > t_{1-\alpha}] = \alpha$$

$$\boxed{\text{si } t_0 > t_{1-\alpha} \text{, on rejette } H_0}$$



4- Comparaison (valeur observée - valeur critique)

- valeur observée : $t_0 = \dfrac{\bar{x}_n - \mu_0}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}} = \dfrac{45 - 41{,}5}{\frac{11{,}25}{\sqrt{100}}} = \boxed{3{,}11}$

- valeur critique. $t_{((1-\alpha),(n-1))}$ à partir de la table de Student.

$\alpha = 1\% \rightarrow 1-\alpha = 0{,}99$
$n = 100 \rightarrow n-1 = 99$

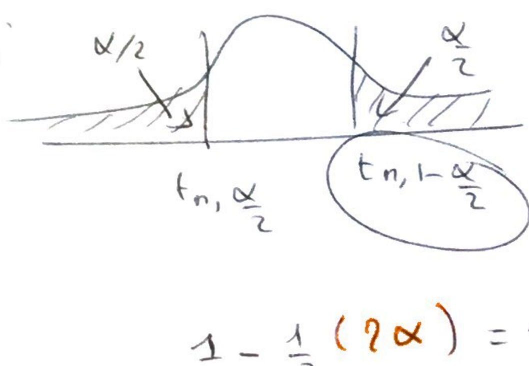
$t_{(0{,}99;99)} = ??$

selon la table de student de l'annexe :

$$2{,}36 < t_{0{,}99;99} < 2{,}37$$

car la table donne : la valeur qui correspond à α vérifiant $1 - \frac{1}{2}.\alpha$

n \ α	0,9	...	0,02	0,01
⋮			⋮	⋮
80			2,37	2,70
100			2,36	2,64



$$1 - \frac{1}{2}(2\alpha) = \underline{1-\alpha}$$

$P[\,|X| > t_{n,1-\frac{1}{2}\alpha}]$ or Nous voulons calculer la

$$P[T_0 > t_{n,1-\alpha}] = P[T_0 > t_{n,1-\frac{1}{2}(2\alpha)}]$$

Il faut donc regarder la colonne qui correspond à $2\alpha = 0{,}02$ dans la table.

On peut également trouver $t_{0,99;99}$ sous R

$$t_{0,99;99} = qt(0{,}99;99) = 2{,}364.$$

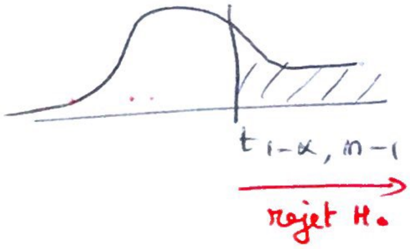
$$t_0 = 3{,}11 > t_{0,99;99} = 2{,}364.$$

4- Décision

On a $t_0 > t_{0,99;99}$ $\quad (3{,}11 > 2{,}364)$

$\Rightarrow$ t_0 se trouve dans la zone de rejet de H_0

Par conséquent, On rejete H_0



Conclusion:

Le rendement de la nouvelle variété sera en moyenne supérieur à celui de l'ancienne variété.

Question 2

Calculer la puissance du test si le vrai rendement moyen de la nouvelle variété est supposé égal à 44 tonnes

$\mu = 44$.

- Puissance du test $= 1-\beta = P[\text{Decider } H_1 / H_1 \text{ est vraie}]$

  Décision $\qquad$ vérité

  c'est la probabilité $P[H_1/H_1]$

  $P[\text{Décider } H_1 / H_1 \text{ vraie}] = P[\text{rejeter } H_0 / H_1 \text{ vraie}]$

- H_1 est vraie : si $\mu > 41{,}5$ or $\mu_0' = 44 > 41{,}5$.

  $\Rightarrow$ H_1 vraie est équivalent à la situation où $\mu_0' = 44$.

  $T_0' = \frac{\bar{X}_n - 44}{S^*/\sqrt{n}} \sim St(n-1)$

- Décider H_1 $\Rightarrow$ rejeter H_0

$\Rightarrow P[T_0 > t_{1-\alpha, n-1}]$.

$\Rightarrow$ P[décider H_1 / H_1 vraie]

= P[rejeter H_0 / H_1 vraie]

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 = \dfrac{\bar{X}_n - 41{,}5}{S^*/\sqrt{n}} \sim St(n-1) \\ t_{1-\alpha, n-1} = 2{,}364 \end{array} \right\}$$

μ_0

$$= P\left[T_0 > t_{1-\alpha, n-1} \,/\, \mu_0' = 44 \right]$$

$$= P\left[T_0 > t_{1-\alpha, n-1} \,/\, T_0' \right]$$

$$= P\left[\frac{\bar{X}_n - 41{,}5}{S^*/\sqrt{n}} > 2{,}364 \,/\, \frac{\bar{X}_n - 44}{S^*/\sqrt{n}} \right]$$

$$\left\{ T_0' = \frac{\bar{X}_n - 44}{S^*/\sqrt{n}} \sim St(n-1) \right\}$$

$$= P\left[\frac{\bar{x}_n - 44 + 44 - 41{,}5}{S^*/\sqrt{n}} > 2{,}364 \,/\, \frac{\bar{x}_n - 44}{S^*/\sqrt{n}} \right]$$

$s^* = 11{,}25$
$n = 100$

$$= P\left[\frac{\bar{x}_n - 44}{S^*/\sqrt{n}} + \frac{2{,}5}{S^*/\sqrt{n}} > 2{,}364 \,/\, \frac{\bar{x}_n - 44}{S^*/\sqrt{n}} \right]$$

$T \sim St(n-1)$

$$= P\left[T_0' > 0{,}14 \,/\, T_0' \right]$$

$$= P\left[T_0' > 0{,}14 \right] = 1 - \underbrace{P\left[T_0' < 0{,}14 \right]}$$

$= 0{,}44 = 44\ \%$

• $P[T < 0{,}14] = pt(0{,}14; 99) = 0{,}56$

Pour 1 %, la puissance du test est de 44 % (Puissance faible)

On a rejeté H_0 malgré une puissance faible du test.

• Calculer l'erreur de 2ème espece β : ?

$\beta = 1 -$ Puissance du test $= 1 - 0{,}44 = 0{,}56$

$= P[$ ne pas rejeter H_0 / H_1 vraie $]$

41,5 44

μ_0 μ_0'

$\mu_0' = 44$

$\mu_0 = 41,5$

Rq: Plus μ_0' est éloigné de μ_0, plus la puissance du test sera faible. Car cette puissance dépend de la nature de l'hypothèse H_1 $\mu > \mu_0$

Exercice 5.5

On s'interesse à la composition des acides aminés essentiels (Lysine) des repas de soja. (g/kg)

22,2 | 24,7 | 20,9 | 26 | 27 | 24,8 | 26,5 | 23,8 | 25,6 | 23,9

1- Peut-on dire à risque 1% que la variance de la Lysine est égale à 1 ?

Test d'hypothèse

i- hypothèse et seuil:

- On teste $H_0 : \sigma^2 = 1$

$H_1 : \sigma^2 \neq 1$

Il s'agit d'un test bilateral sur la variance

- seuil $\alpha = 1\% = 0,01$ $\frac{\alpha}{2} = 0,005$; $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$

2- Règle de rejet

- Définir la statistique du Test

- le paramètre est la variance σ^2
- l'estimateur de σ^2 est: $S^{*2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

$\left(S^{*2} = \frac{n}{n-1} \cdot S^2\right)$

- l'estimation de σ^2 est s^{*2} pour une réalisation.

$$s^{*2} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2$$

$$\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1}{10} (22{,}2 + \dots + 23{,}9) = \boxed{24{,}54}$$

$$\Rightarrow s^{*2} = \frac{1}{9} \left[(22{,}2 - 24{,}54)^2 + \dots + (23{,}9 - 24{,}54)^2 \right]$$

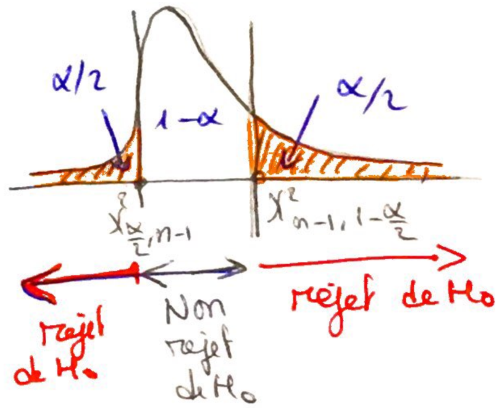
$$\boxed{s^{*2} = 3{,}6582}$$

$\Rightarrow$

- La loi de la statistique

sous H_0: $U_0 = \frac{(n-1) S^{*2}}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$ (table de Khi-2)

Loi Khi-2 (non symétrique)



$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ si } U_0 > \chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \\ \text{et} \\ \text{si } U_0 < \chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{on rejette } H_0}$$

3-) <u>Comparaison (valeur observée et valeur critique)</u>

- Valeur observée : $u_0 = \frac{(n-1) s^{*2}}{\sigma_0^2} = \frac{(10-1) \cdot 3{,}6582}{1} = \boxed{32{,}92}$

- Valeur critique. $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} = ?$, $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} = ?$ $\quad n = 10 \quad n-1 = 9$

$\frac{\alpha}{2} = 0{,}005$

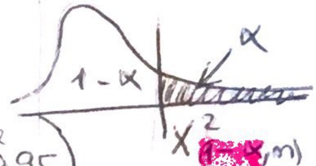
$* \ \chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{9; 0{,}005} = 1{,}735$

il faut regarder la colonne de α dans le tableau de Khi-2 qui correspond à $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}992$

selon la table de khi-2 donné dans le cours

$\alpha = 1\%$ $\quad \frac{\alpha}{2} = 0,005 \quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$.

• $X^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = X^2_{(0,005;9)} = \boxed{1,735}$



$1 - \alpha = 0,005 \Rightarrow$ (colonne $\alpha = 0,995$)

Table de khi-deux du cours

$n \backslash \alpha$	0,995
9	$\boxed{1,735}$

• $X^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = X^2_{(0,995;9)} = \boxed{23,59}$

$1 - \alpha = 0,995 \Rightarrow$ (colonne $\alpha = 0,005$)

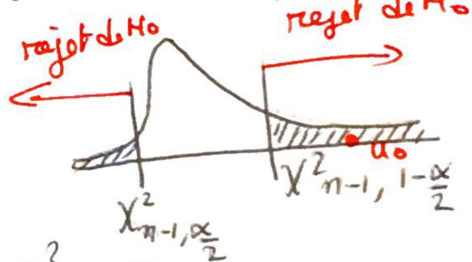
$n \backslash \alpha$	0,005
9	$\boxed{23,59}$

$u_0 > X^2_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}$ car $32,92 > 23,59$.

4-) Décision

$u_0 > X^2_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}$ car $32,92 > 23,59$

$\Rightarrow$ u_0 se trouve dans la zone de rejet de H_0



$\Rightarrow$ On rejete H_0

2) $IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1) S^{*2}}{X^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} ; \frac{(n-1) S^{*2}}{X^2_{(1-\alpha, n-1)}} \right]$

$= \left[\frac{9 \times 3,6582}{23,59} ; \frac{9 \times 3,6582}{1,735} \right]$

$= [1,396 ; 18,97]$

$\sigma^2 = 1 \notin IC_{(1-\alpha)}(\sigma^2)$ alors on rejete $H_0 : \sigma^2 = 1$.

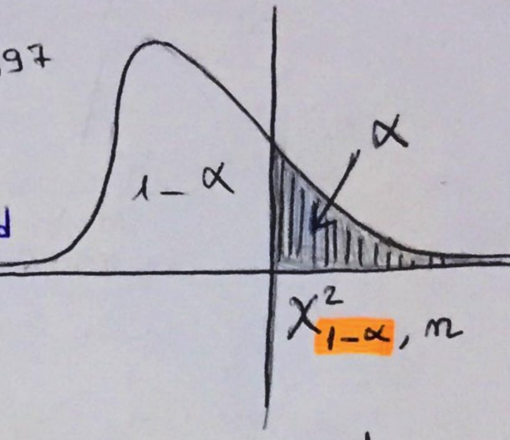
ce qui confirme la décision du rejet de H_0.

Notes : Calcul des valeurs critiques

selon la table de khi-2 donné dans le cours

On doit calculer pour $\alpha = 1\%$

$\frac{\alpha}{2} = 0{,}005$; $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}997$



Loi khi-deux

non symétrique.

- $\chi^2_{(\frac{\alpha}{2}, 9)} = \chi^2_{(0{,}005;9)} = 1{,}735$

Recherche de la colonne α qui correspond

- $1 - \alpha = 0{,}005 \Rightarrow \alpha = 0{,}995$

n \ α	... 0,995 ...
⋮	⋮
9	... $\boxed{1{,}735}$

- $\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2}, 9)} = \chi^2_{(0{,}995;9)} = 23{,}59$

Recherche de la colonne α qui correspond

- $1 - \alpha = 0{,}995 \Rightarrow \alpha = 0{,}005$

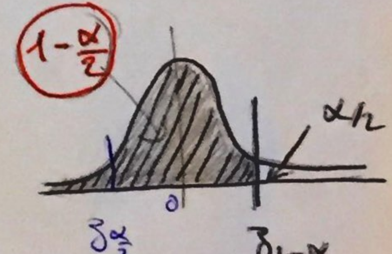
n \ α	 0,005
⋮	⋮
9	...... $\boxed{23{,}59}$

- $u_0 = 32{,}92 > \chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2}, 9)}$

Remarque :

Recherche des valeurs $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ou $z_{\frac{\alpha}{2}}$ ($z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, car ils sont symétriques).

$P[Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \frac{\alpha}{2}$



Loi normale

$N(0,1)$

- si je veux calculer $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pour

$\alpha = 5\% \rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}975} = 1{,}96$

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$

a	 0,06
⋮	⋮
1,9	...... $\boxed{0{,}975} = \phi(1{,}96)$

La partie hachurée correspond à $\phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 0{,}975$ (valeur à l'intérieur du tableau)

$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \phi^{-1}(0{,}975) = 1{,}96$