

Estimation des paramètres par des intervalles de confiance

les estimations ponctuelles du paramètre θ n'apportent pas d'information sur la précision des résultats.

Elle ne tiennent pas en compte des erreurs dues aux fluctuations d'échantillonnage.

Pour évaluer la confiance que l'on peut avoir en une valeur, il est donc nécessaire de déterminer un intervalle contenant avec une grande probabilité $(1-\alpha)$ fixée au préalable la vraie valeur de θ .

Soient : θ : paramètre inconnue à estimer

- (x_1, \dots, x_n) : ensemble des valeurs observées.
c'est la réalisation d'un n -échantillon aléatoire (x_1, \dots, x_n)
- $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$: estimation ponctuelle de la moyenne de la réalisation (x_1, \dots, x_n)

- $s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$: estimation ponctuelle de la variance de la réalisation (x_1, \dots, x_n) .

Trois fois sont utilisées pour estimer les IC_{1-α}

Loi normale

$$\mathcal{N}(0, 1)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Loi symétrique.

$$P[Z \leq z] = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Loi Student(n)

$$T(n)$$

$$Z = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim T(n) \quad \left\{ \begin{array}{l} X \sim N(0, 1) \\ Y \sim \chi^2(n) \end{array} \right.$$

Loi symétrique

$$* n \geq 30 \quad T_m \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$P[Z \leq z] = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Loi Khi-deux (m)

$$\chi^2(m)$$

$$Z = \sum_{i=1}^m X_i^2$$

Loi non symétrique

$$* m \geq 30 \quad \sqrt{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$P[Z > z] = 1 - \int_{z^2}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-t/2} dt$$

Intervalles de confiance de θ

• si θ est la moyenne μ

$$IC_{(1-\alpha)}(\mu) \xrightarrow{2 \text{ cas}} \begin{cases} \sigma^2 \text{ connue} \\ \sigma^2 \text{ inconnue} \end{cases}$$

• si θ est la variance σ^2

$$IC_{(1-\alpha)}(\sigma^2) \xrightarrow{2 \text{ cas}} \begin{cases} \mu \text{ connue} \\ \mu \text{ inconnue} \end{cases}$$

Il s'agit d'un intervalle dans lequel se trouve θ avec une grande probabilité $(1-\alpha)$ fixée à l'avance.
 α : risque d'erreur.

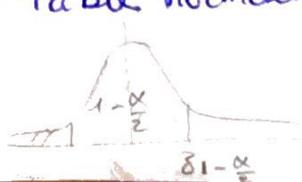
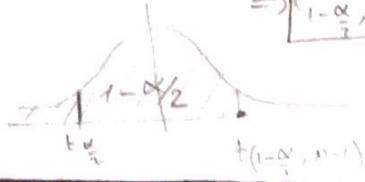
Rq: Plus la probabilité est grande ($1-\alpha \approx 1$), plus l'intervalle de confiance s'élargit (imprécision)

IC grand \Rightarrow Faible précision

IC petit \Rightarrow Grande précision

α petit \Rightarrow Grande sécurité \Rightarrow Compromis

1.1 Intervalles de confiance pour la moyenne μ : $IC_{(1-\alpha)}(\mu)$

	σ^2 connue	σ^2 inconnue $\leftarrow S^2$
$IC_{(1-\alpha)}(\mu)$	$\left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$	$\left[\bar{x} - t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)} \cdot \frac{S^*}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)} \cdot \frac{S^*}{\sqrt{n}} \right]$
Variable	$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$Z = \frac{\bar{x}_n - \mu}{S^*/\sqrt{n}}$ où $S^* = \sqrt{\sum (x_i - \bar{x}_n)^2 / (n-1)}$
Loi	$Z \sim N(0,1)$ $P[Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \frac{\alpha}{2}$	$Z \sim T(n-1)$ (Loi Student) $P[Z < t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}] = 1 - \frac{\alpha}{2}$
Table	Table normale $N(0,1) \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 	Table de Student $(n-1)$ ddl $\Rightarrow t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)} = ?$ 

2. Intervalle de confiance pour la variance σ^2 : IC _{$1-\alpha$} -3-

($1-\alpha$)

	μ inconnu $\leftarrow \bar{x}$
IC _{$1-\alpha$} (σ^2)	$\left[\frac{(n-1) S^*^2}{t(\frac{\alpha}{2}, n-1)} ; \frac{(n-1) S^*^2}{t(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)} \right]$
variable	$Z = \frac{(n-1) S^*^2}{\sigma^2}$ où $S^*^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$
Loi	$Z \sim \chi_{n-1}^2$ (n-1) ddl $P[Z \leq t(\frac{\alpha}{2}, n-1)] = \frac{\alpha}{2}$; $P[Z \leq t(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)] = 1 - \frac{\alpha}{2}$
Table	Tabl du χ_{n-1}^2 $P[Z \leq a] = \frac{\alpha}{2}$ 

Ex: 5.1 - 5.2 - 5.3 - 5.4 - 5.5 - 5.6 - 5.7.

$$\left\{ \begin{array}{l} IC_{1-\alpha}(\theta) = \text{intervalle de confiance pour } \theta \text{ de niveau } 1-\alpha \\ P[a \leq \theta \leq b] = 1-\alpha \Rightarrow P[\theta < a] + P[\theta > b] = \alpha \\ P[X \leq q_\alpha] = \alpha = \text{quantile d'ordre } \alpha \text{ de la loi de } X \end{array} \right.$$

Exercice 5.1
Loi normale de variance σ^2 connue1-1 niveau de confiance pour l'intervalle $\underline{\alpha = ?}$.

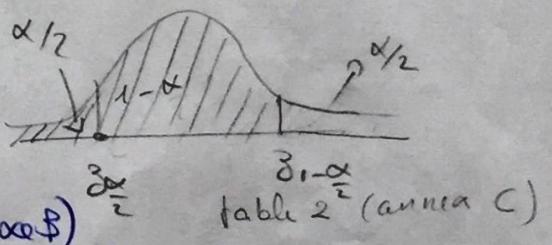
$$\bar{x} - 2,14 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 2,14 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Soit \bar{x} la moyenne empirique de l'échantillon de taille n d'une population de loi normale de variance connue σ^2

On a: $IC_{1-\alpha}(\mu) = [\bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

où $z_{\frac{\alpha}{2}}$ et $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ sont les quantiles de $N(0,1)$ niveau $\alpha = ?$ si $\mu \in [\bar{x} - 2,14 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + 2,14 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = -2,14 \text{ et } z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,14.$$

D'après la table 1 de $N(0,1)$ (annexe)

$$P[Z < z_{\frac{\alpha}{2}}] = P[Z \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = \frac{\alpha}{2}$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,14 \text{ et } P[Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$P[z < 2,14] = \Phi(2,14) = 0,9838$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9838 \Rightarrow \alpha = 2(1 - 0,9838)$$

$$\alpha = 0,0324 = 3,24\%$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha = 3,24\%}$$

\Rightarrow le niveau de confiance est de : $100 - 3,24 \cdot 1 = 96,76\%$

$$= \boxed{96,76\%}$$

• d'après la table 2 (Annexe C)

On peut voir que α est comprise entre 0,03 et 0,04.

la table 2 donne directement la valeur $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

la valeur 2,14 se trouve entre 2,1701 et 2,0537

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \alpha = 0,03 & & \alpha = 0,04 \\ 3\% & & 4\% \end{array}$$

le niveau de confiance est entre : $100 - 3\%$ et $100 - 4\%$.
càd. entre 97% et 96%.

2) niveau de confiance pour l'intervalle $\alpha = ??$

$$\bar{x} - 1,85 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 1,85 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\alpha = ?? \text{ si } \mu \in [\bar{x} - 1,85 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + 1,85 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,85$$

$$P[Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \frac{\alpha}{2} = P[Z \leq 1,85]$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9678 \Rightarrow \alpha = 2 \cdot (1 - 0,9678) \\ \alpha = 0,064 \% = 0,44\%$$

le niveau de confiance est de = $100 - 0,44\% = \boxed{99,56\%}$

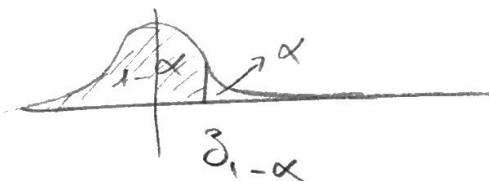
Rq: Plus l'intervalle est petit ou serré plus la confiance est faible.

3] niveaux de confiance pour l'intervalle $\alpha = ?$

$$\alpha = ? \text{ si } \mu \leq \bar{x} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

je s'agit d'un intervalle de confiance unilatéral
(non présenté dans le cours) de forme

$$\mu \leq \bar{x} + \underbrace{z_{1-\alpha}}_{\text{Z}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



$$z_{1-\alpha} = 1,96$$

$$P[Z < z_{1-\alpha}] = 1 - \alpha = \Phi(1,96)$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha = 0,975 \Rightarrow \alpha = 2,5\%$$

$$\Rightarrow \text{la confiance} = \boxed{97,5\%}$$

Exercice 5.2

estimer un IC du gain d'un circuit électronique

$$\text{gain} \sim N(m, \sigma = 20)$$

1-1 Décire l'expérience aléatoire, l'universel X va.

ξ = "choisir un circuit électronique"

$\Omega = \{ \text{l'ensemble des circuits} \}$

$X = \text{va. qui correspond au gain du circuit}$

$$X \sim N(m, \sigma^2 = 20^2)$$

2-1 $n = \text{taille de l'échantillon. } \alpha = \text{erreur}$
 $IC(m) = ??$ (en fonction de n, σ, α)

On prend un échantillon de taille n

On peut estimer m avec $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ (estimateur de la moyenne)

Or $\bar{X}_n \sim N(m, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

On détermine $I.C.(m)$ tq.

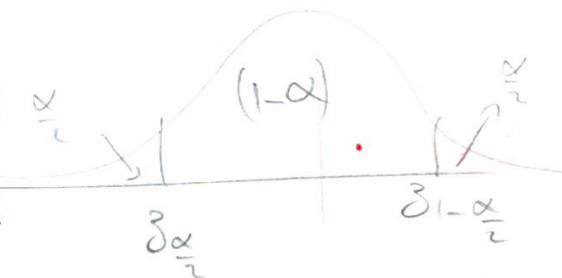
$$\beta_{1-\frac{\alpha}{2}} = -\beta_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$P\left[\beta_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \beta_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P\left[\bar{x} + \beta_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} - \beta_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P\left[\bar{x} + \beta_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + \beta_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

alors $m \in [\bar{x} + \beta_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \beta_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$



3-1 Comment doit varier la longueur de l'IC. en fonction de la taille de l'échantillon et le niveau de confiance ?

$$L = \text{la longueur de l'IC} = \left(\bar{x} + \beta_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\bar{x} - \beta_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \beta_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \beta_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &= -2 \beta_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{car } \beta_{1-\frac{\alpha}{2}} = -\beta_{\frac{\alpha}{2}}) \\ &= 2 \beta_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

(or $\beta_{\frac{\alpha}{2}} < 0 \Rightarrow -2\beta_{\frac{\alpha}{2}} > 0$, de même pour $2\beta_{\frac{\alpha}{2}} > 0$)

Si $\sigma \nearrow \Rightarrow L \nearrow$
Si $n \nearrow \Rightarrow L \nearrow$

4-] confirmer la réponse en donnant l'IC selon les cas:

$$IC(m) = \left[\bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

a- IC à 95% où $n=10$, $\hat{m}=1000$

$$IC(m) = \left[1000 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; 1000 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

si $C=95\%$ et $n=10$ ($1-\alpha=0,95$)

$\Rightarrow \alpha=5\%$ et $\frac{\alpha}{2}=2,5\%$ donc

$$P[z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P[z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 0,975$$

$$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = -1,96$$

$$\Rightarrow IC_{0,95}(m) = \left[1000 - 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} ; 1000 + 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} \right]$$

$$IC_{0,95}(m) = [987,6039 ; 1012,396]$$

b- IC à 95% où $n=25$; $\hat{m}=1000$

$C=95\%$ et $n=10$

$1-\alpha=0,95$.

$$\alpha=5\% \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=2,5\%$$

$$P[z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P[z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 0,975$$

$$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96 \text{ et } z_{\frac{\alpha}{2}} = -1,96$$

$$\Rightarrow IC_{0,95}(m) = \left[1000 - 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{25}} ; 1000 + 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{25}} \right]$$

$$\Rightarrow IC_{0,95}(m) = 992,16 ; 1007,84$$

$n \nearrow \Rightarrow$
IC ↘

c - IC à 99% $n=10$ et $\hat{m}=1000$

$$\alpha = 1\%$$

$$1-\alpha = 0,99$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0,5\%$$

$$P[Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$$

$$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,5758 \quad \text{et } z_{\frac{\alpha}{2}} = -2,5758$$

$$\Rightarrow \underset{0,99}{\text{IC}}(m) = [1000 - 2,5758 \cdot \frac{20}{\sqrt{10}}; 1000 + 2,5758 \cdot \frac{20}{\sqrt{10}}]$$

$\text{IC}(m) = [983,7092; 1016,291]$

d - IC à 99% $n=25$ et $\hat{m}=1000$

$$\alpha = 1\% \quad P[Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$$

$$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,5758, \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = -2,5758$$

$$\Rightarrow \underset{0,99}{\text{IC}}(m) = [1000 - 2,5758 \cdot \frac{20}{\sqrt{25}}; 1000 + 2,5758 \cdot \frac{20}{\sqrt{25}}]$$

$$\Rightarrow \underset{0,99}{\text{IC}}(m) = [989,6968; 1010,303]$$

5-1 Combien doit être la taille de l'échantillon pour que la longueur de l'intervalle de confiance à 95% est de 4?

$$L(\text{IC}) = 4 = 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \left(2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} \quad \begin{cases} \text{or } z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96 \\ \sigma = 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2 \cdot 1,96 \cdot 20}{4} = 19,6 \Rightarrow n = (19,6)^2 = 384,16$$

$m = 384,16$

Il faut un échantillon de plus que 385 individus pour que $I_{0.95}$ soit égale à 4.

Exercice 5.3

X = poids du papier de poche de fissure

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \sigma = 5 \text{ g}$$

poids moyen sur les paquets $\mu = 710 \text{ g}$

échantillon de 10 paquets $n = 10$

poids moyen des échantillons $\bar{x} = 707 \text{ g}$

1-1 Donner un estimateur de μ .

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum x_i \text{ est un estimateur de } \mu.$$

où x_i = poids du paquet i .

$$\hat{\mu} = \bar{x}_{10} = 707 \text{ g}$$

2-1 Donner $I_{0.95}(\mu) = ?$ $I_{0.95}(\nu) = ?$

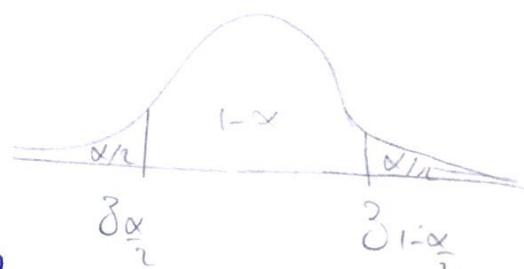
l'estimateur de μ est \bar{x}_n

$$\bar{x}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{x}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

On construit l'IC. Iq.

$$P[\bar{x}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x}_n \leq \bar{x}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}] = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P\left[\bar{x}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x}_n \leq \bar{x}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$



$$\Rightarrow P\left[\bar{x}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \mu \in \left[\bar{x}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

• pour $\text{IC}_{\alpha_0, g_0} \Rightarrow \alpha = 10\% \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 5\%$

$$P[Z \leq \bar{z}_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow P[Z \leq \bar{z}_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 0,95$$

$$\Rightarrow \bar{z}_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,65 \quad \text{et} \quad \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} = -1,65$$

$$\text{IC}_{0,9}(\mu) = [707 \pm 1,65 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}}] \Rightarrow \boxed{\text{IC}_{0,9}(\mu) = [704,39; 709,608]}$$

• pour $\text{IC} \text{ à } 0,95 \Rightarrow \alpha = 5\% \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 2,5\%$

$$\Rightarrow \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} = -1,96 \quad \text{et} \quad \bar{z}_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

$$\Rightarrow \text{IC}_{0,95}(\mu) = [707 \pm 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}}] \Rightarrow \boxed{\text{IC}_{0,95}(\mu) = [703,9; 714,1]}$$

• pour $\text{IC} \text{ à } 0,99 \Rightarrow \alpha = 1\% \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,5\%$

$$\Rightarrow \bar{z}_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,5758 \quad \text{et} \quad \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} = -2,5758$$

$$\Rightarrow \text{IC}_{0,99}(\mu) = [707 \pm 2,5758 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}}] \Rightarrow \boxed{\text{IC}_{0,99}(\mu) = [702,93; 711,07]}$$

3)

$$\alpha = ?$$

$$\text{IC}_{1-\alpha}(\mu) = [705, 709]$$

$$= [707 + \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; 707 + \bar{z}_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

Calculons la longueur de l'intervalle $L = ?$

$$L = L = 2 \cdot \bar{z}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = -2 \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \bar{z}_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sigma} = 2 \frac{\sqrt{10}}{5} = 1,265$$

$$\bullet P[Z \leq \bar{z}_{1-\frac{\alpha}{2}}] = P[Z \leq 1,265] = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{0,8962 + 0,8980}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 0,2058$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 20,58\%}$$

Exercice 5.4

Σ = "choisir un basque français"

Ω = l'ensemble des Basques

$X = \begin{cases} 1 & \text{si sang du Basque est du Rhéesus négatif} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$X \sim \beta(p) \quad \text{ave} \quad p = P[X=1] = 0,15$$

Echantillon de taille 200 $\Rightarrow n = 200$

D'on trouve que le₄ st du Rhéesus négatif $\Rightarrow \hat{p} = \frac{44}{200} = 0,22$

$$\hat{p} = 0,22 = \bar{x}_n = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} x_i$$

Donner un IC_{0,99}(p) = ?

Le meilleur estimateur de la proportion P est $\hat{p} = \bar{x}_n$

D'après le TCL, D'on sait que $\bar{x}_n \sim N(p; \frac{p(1-p)}{n})$

$$\Rightarrow \frac{\bar{x}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$

D'on cherche IC_{1-α}(p) tq:

$$P\left[\frac{\bar{x}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z_{1-\alpha}\right] = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P \in \left[\bar{x}_n + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \cdot z_{1-\alpha}; \bar{x}_n + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \cdot z_{1-\alpha} \right]$$

$$p=0,15, n=200, \hat{p}=0,22=\bar{x}_n; z_{\frac{\alpha}{2}} = -2,5758 \text{ pour } \alpha=0,01$$

$$\Rightarrow P \in [0,154; 0,285]$$

Ici p est connu (0,15) donc on l'utilise dans le calcul des bornes.

Si p est inconnu on utilise son estimation donc 0,22

Exercice 5.5

X_i = précipitation annuelle moyenne à l'anneau i
 $\forall i = 1983 \rightarrow 2002$

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ μ et σ inconnus.

$$\text{IC}_{0,95}(\mu) = ??$$

soient \bar{x} et s^* la moyenne et l'écart type respectivement
d'un échantillon tiré suivant une loi normale avec
une variance inconnue σ^2 .

$$\text{l' IC}_{0,95}(\mu) = \left[\bar{x} - t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \right]$$

En effet,

si σ^2 inconnue, on utilisera son meilleure estimation s^2

$$\text{Selon Fisher: } \frac{n}{\sigma^2} \cdot s_n^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

$$\frac{n-1}{\sigma^2} s_n^{*2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

$$\Rightarrow T_{n-1} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\frac{n-1}{\sigma^2} s^*2}{n-1}}} \sim \text{Loi de Student à } (n-1) \text{ d.d.l.}$$

$t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}$ = quantile d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à $(n-1)$ d.d.l

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = 485,755$$

$$s^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - 485,755)^2}{19}} = 8161,0807$$

$$\Rightarrow s^* = 90,3387$$

$$\cdot IC \approx 95\% \Rightarrow \alpha = 5\% \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$t_{m-1, \frac{\alpha}{2}} = t_{19; 0,025} = 2,09 \quad (\text{Table de Student annexe D})$$

$$\Rightarrow IC_{0,95}(\mu) = [485,755 \pm 2,09 \cdot \frac{90,337}{\sqrt{20}}]$$

$$IC(\mu) = [443,47; 528,03]$$

Exercice 5.6

soit s^* : l'écart type d'un échantillon tiré d'une loi normale avec variance inconnue, on doit estimer la variance σ^2 par $IC_{1-\alpha}(\sigma^2)$. $\begin{cases} n=51 \\ s^*=0,37 \end{cases}$ $(1-\alpha=95\% = 0,95)$ $\Rightarrow \alpha = 5\%$

μ étant inconnue \Rightarrow

$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)s^*{}^2}{\hat{\delta}_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} ; \frac{(n-1)s^*{}^2}{\hat{\delta}_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \right]$$

où $\hat{\delta}_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$: fractile d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ de la loi $\chi^2_{(n-1)}$

$$\hat{\delta}_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} : \quad : \quad : \quad : (1-\frac{\alpha}{2})^{-1}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0,025; 50} = 71,42$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0,975; 50} = 32,35$$

$$n-1 = 50$$

$$\Rightarrow \sigma^2 \in \left[\frac{50 \cdot (0,37)^2}{71,42} ; \frac{50 \cdot (0,37)^2}{32,35} \right]$$

$$\Rightarrow IC_{0,95}(\sigma^2) = [0,0958 ; 0,2115]$$

$$\Rightarrow I_{0,95}^C(\sigma) = [\sqrt{0,0958} ; \sqrt{0,2115}]$$

$$\Rightarrow I_{0,95}^C(\sigma) = [0,309 ; 0,459]$$

Exercice 5.7

On a 2 populations Ω_A et Ω_B

ε_A : "choisir au hasard 1 ampoule du fabricant A"

Ω_A : l'ensemble des ampoules de A

P_A : Prob. uniforme

soit: $X^A: \Omega_A \rightarrow \mathbb{R}$
 $i \mapsto x_i^A$: durée de vie de l'ampoule i de A

$$E(X^A) = \mu_A = \mu_1$$

$$V(X^A) = \sigma_A^2 = \sigma_1^2 = 200^2$$

ε_B : "choisir au hasard 1 ampoule du fabricant B"

Ω_B : l'ensemble des ampoules de B

P_B : Prob. uniforme

soit $X^B: \Omega_B \rightarrow \mathbb{R}$
 $i \mapsto x_i^B$: durée de vie de l'ampoule i de B

$$E(X^B) = \mu_B = \mu_2$$

$$V(X^B) = \sigma_B^2 = \sigma_2^2 = 100^2$$

Il faut calculer l' $I_{0,95}^C(\theta)$ et l' $I_{0,99}^C(\theta)$

où $\theta = \text{différence des durées de vie moyennes de A et B}$

$$\Rightarrow \theta = \mu_A - \mu_B = \mu_1 - \mu_2$$

$$IC_{0,95} (\mu_1 - \mu_2) = ??$$

$$IC_{0,99} (\mu_1 - \mu_2) = ??$$

Pour cela, il faut former un échantillon d'ampoules venant de A et de B

$\Sigma_{(n_A, n_B)} =$ "choisir au hasard un échantillon de n_A ampoules de A et n_B ampoules de B"

$$\Omega_{(n_A, n_B)} = E_{n_A} \times E_{n_B} = \left\{ \begin{array}{l} \text{l'ensemble des couples} \\ (e_{n_A}, e_{n_B}) \end{array} \right\}$$

$$IC_{1-\alpha} (\mu_A - \mu_B) = ??$$

$\cdot \mu_A - \mu_B$ est inconnue \Rightarrow on la remplace par son estimateur.

$$\hookrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{meilleur estimateur de } \mu_A = \bar{x}_{n_A} : E_{n_A} \otimes E_{n_B} \rightarrow \mathbb{R} \\ (e_{n_A}, e_{n_B}) \mapsto \bar{x}_{n_A} \end{array} \right.$$

où $\bar{x}_{n_A} = \frac{\sum e_{n_A}}{n_A}$: durée de vie moyenne d'ampoules de l'échantillon

$$\hookrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{meilleur estimateur de } \mu_B = \bar{x}_{n_B} : E_{n_A} \otimes E_{n_B} \rightarrow \mathbb{R} \\ (e_{n_A}, e_{n_B}) \mapsto \bar{x}_{n_B} \end{array} \right.$$

où $\bar{x}_{n_B} = \frac{\sum e_{n_B}}{n_B}$: durée de vie moyenne d'ampoules de e_{n_B}

\Rightarrow l'estimateur de $\mu_A - \mu_B$ est $\bar{x}_{n_A} - \bar{x}_{n_B}$ tq:

$$\bar{x}_{n_A} - \bar{x}_{n_B} : E_{n_A} \otimes E_{n_B} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(e_{n_A}, e_{n_B}) \mapsto \bar{x}_{n_A} - \bar{x}_{n_B}$$

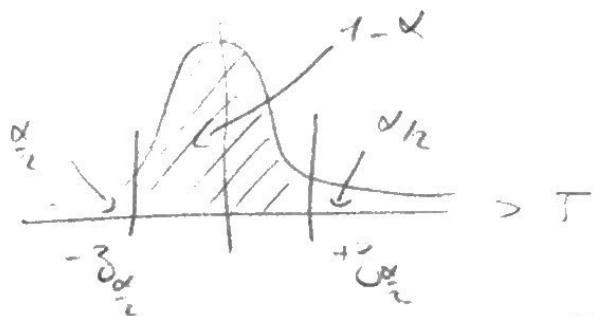
Or $\bar{x}_{n_A} \sim N(\mu_A, \frac{\sigma_A^2}{n_A})$ et $\bar{x}_{n_B} \sim N(\mu_B, \frac{\sigma_B^2}{n_B})$ (TCL)

$$\Rightarrow \bar{x}_{n_A} - \bar{x}_{n_B} \sim N\left(\mu_A - \mu_B; \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}\right)$$

(loi normale indép.)

$$\Rightarrow T = \frac{(\bar{X}_{n_A} - \bar{X}_{n_B}) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} \sim N(0,1)$$

-14-



$$P[-3\frac{\alpha}{2} < T < 3\frac{\alpha}{2}] = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P\left[(\bar{X}_{n_A} - \bar{X}_{n_B}) - 3\frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} < \mu_A - \mu_B < (\bar{X}_{n_A} - \bar{X}_{n_B}) + 3\frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}\right] = 1 - \alpha$$

avec la réalisation des échantillons étudiés :

$$P\left[(\bar{x}_{n_A} - \bar{x}_{n_B}) - 3\frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} < \mu_A - \mu_B < (\bar{x}_{n_A} - \bar{x}_{n_B}) + 3\frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}\right] = 1 - \alpha$$

$$\begin{cases} \bar{x}_{n_A} = 1400 \\ \bar{x}_{n_B} = 1200 \end{cases} \quad \begin{matrix} n_A = 150 \\ n_B = 100 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \sigma_A = 200 \\ \sigma_B = 100 \end{matrix}$$

$$\text{Si } \alpha = 0,05 \% \Rightarrow 3\frac{\alpha}{2} = 1,96 \quad (1 - \alpha = 95\%)$$

$$\text{Si } \alpha = 0,01 \% \Rightarrow 3\frac{\alpha}{2} = 2,5758 \quad (1 - \alpha = 99\%)$$

$$\Rightarrow \boxed{IC_{0,95}(\mu_A - \mu_B) = [162,47 ; 237,53]}$$

$$\boxed{IC_{0,99}(\mu_A - \mu_B) = [150,68 ; 249,32]}$$