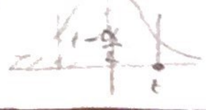
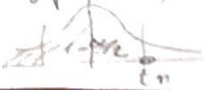
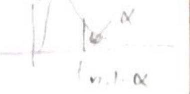
Estimation des paramètres par des intervalles de confiance

Les estimations ponctuelles du paramètre θ n'apportent pas d'information sur la précision des résultats. Elles ne tiennent pas en compte des erreurs dues aux fluctuations d'échantillonnage.

Pour évaluer la confiance que l'on peut avoir en une valeur, il est donc nécessaire de déterminer un intervalle contenant avec une grande probabilité $(1-\alpha)$ fixée au préalable la vraie valeur de θ.

Soient :
- θ : paramètre inconnu à estimer
- $(x_1, \dots, x_n)$: ensemble des valeurs observées. C'est la réalisation d'un n-échantillon aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$
- $\bar{x} = \dfrac{\sum_1^n x_i}{n}$: estimation ponctuelle de la moyenne de la réalisation $(x_1, \dots, x_n)$
- $s^2 = \dfrac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$: estimation ponctuelle de la variance de la réalisation $(x_1, \dots, x_n)$.

Trois lois sont utilisées pour estimer les $IC_{1-\alpha}$

Loi normale	Loi Student(n)	Loi Khi-deux (n)
	ddl	ddl
$\mathcal{N}(0,1)$	$T(n)$	$\chi^2(n)$
$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$	$Z = \dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim T(n)$ $\left\{\begin{matrix} X \sim \mathcal{N}(0,1) \\ Y \sim \chi^2(n) \end{matrix}\right\}$	$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$
Loi symétrique.	Loi symétrique	Loi non symétrique
	$* n \geq 30$ $T_n \sim \mathcal{N}(0,1)$	$* n \geq 30$ $\sqrt{2Z} - \sqrt{2n-1} \sim \mathcal{N}(0,1)$
$P[Z \leq t] = 1 - \frac{\alpha}{2}$ 	$P[Z \leq t_n] = 1 - \frac{\alpha}{2}$ 	$P[Z > t_{(1-\alpha, n)}] = \alpha$ 

Intervalle de confiance de θ

- si θ est la moyenne μ

$$IC_{(1-\alpha)}(\mu) \xrightarrow{2\text{ cas}} \begin{cases} \sigma^2 \text{ connue} \\ \sigma^2 \text{ inconnue} \end{cases}$$

- si θ est la variance σ^2

$$IC_{(1-\alpha)}(\sigma^2) \xrightarrow{2\text{ cas}} \begin{cases} \mu \text{ connue} \\ \mu \text{ inconnue} \end{cases}$$

Il s'agit d'un intervalle dans lequel se trouve θ avec une grande probabilité $(1-\alpha)$ fixé à l'avance.

α : risque d'erreur.

Rq: Plus la probabilité est grande $(1-\alpha \simeq 1)$, plus l'intervalle de confiance s'élargit (imprécision)

IC grand $\Longrightarrow$ Faible précision

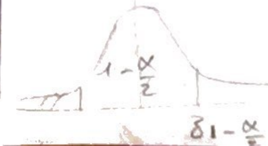
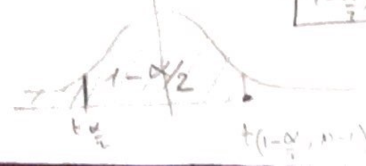
IC petit $\Longrightarrow$ Grande Précision

α petit $\Longrightarrow$ Grande Sûreté

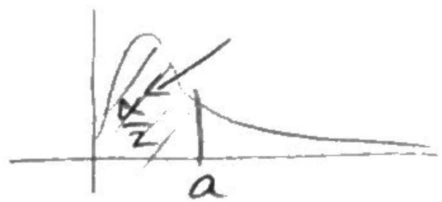
$\Longrightarrow$ Compromis

Intervalle de confiance pour la moyenne μ : $IC_{(1-\alpha)}(\mu)$

1.] Intervalle de confiance pour la moyenne μ

	σ^2 connue	σ^2 inconnue $\leftarrow S^{*2}$
$IC_{(1-\alpha)}(\mu)$	$\left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;;\; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$	$\left[\bar{x} - t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)} \cdot \frac{S^*}{\sqrt{n}} \;;\; \bar{x} + t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)} \frac{S^*}{\sqrt{n}}\right]$
Variable	$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S^*/\sqrt{n}}$ où $S^{*2} = \frac{\sum(X_i - \bar{X}_n)^2}{n-1}$
Loi	$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ $P[Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \frac{\alpha}{2}$	$Z \sim T(n-1)$ (Loi student $n-1$ ddl) $P[Z < t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}] = 1 - \frac{\alpha}{2}$
Table	Table normale $\mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \boxed{z_{1-\frac{\alpha}{2}} ?}$ 	Table de Student $(n-1)$ ddl $\Rightarrow \boxed{t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = ?}$ 

2. Intervalle de confiance pour la variance σ^2 : $IC_{(1-\alpha)}(\sigma^2)$

	μ inconnu $\leftarrow \overline{X}$
$IC_{1-\alpha}(\sigma^2)$	$\left[\dfrac{(n-1) S^{*2}}{t(\frac{\alpha}{2}, n-1)} ; \dfrac{(n-1) S^{*2}}{t(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)} \right]$
Variable	$Z = \dfrac{(n-1) S^{*2}}{\sigma^2}$ où $S^{*2} = \dfrac{\sum_{1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$
Loi	$Z \sim \chi^2_{n-1}$ $(n-1)$ ddl $P[Z \leq t(\frac{\alpha}{2}, n-1)] = \frac{\alpha}{2}$; $P[Z \leq t(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)] = 1 - \frac{\alpha}{2}$
Table	Table de χ^2_{n-1} $P[Z \leq a] = \frac{\alpha}{2}$ 

TD : 5 — statistiques Inferentielles « Intervalle de Confiance »

Ex : 5.1 - 5.2 - 5.3 - 5.4 - 5.5 - 5.6 - 5.7 .

$$\begin{cases} IC_{1-\alpha}(\theta) = \text{Intervalle de confiance pour } \theta \text{ de niveau } (1-\alpha) \\ P[a \leq \theta \leq b] = 1-\alpha \implies P[\theta < a] + P[\theta > b] = \alpha \\ P[X \leq q_\alpha] = \alpha = \text{quantile d'ordre } \alpha \text{ de la loi de } X \end{cases}$$

Exercice 5.1

Loi normale de variance σ^2 connue

1-1 niveau de confiance pour l'intervalle $\alpha = ??$

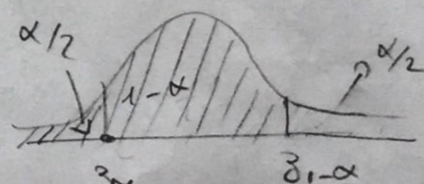
$$\bar{x} - 2{,}14 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 2{,}14 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Soit $\bar{x}$ la moyenne empirique de l'échantillon de taille n d'une population de loi normale de variance connue σ^2

On a : $IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

où $z_{\frac{\alpha}{2}}$ et $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ sont les quantiles de $N(0,1)$

trouver $\alpha = ??$ si $\mu \in \left[\bar{x} - 2{,}14 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \bar{x} + 2{,}14 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$



$z_{\frac{\alpha}{2}} = -2{,}14$ et $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2{,}14$.

table 2 (annexe C)

- D'après la table 1 de $N(0,1)$ (annexe B)

$P[Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}] = P[Z \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = \frac{\alpha}{2}$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2{,}14$ et $P[Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \frac{\alpha}{2}$

Or $P[Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = P[Z < 2{,}14] = \Phi(2{,}14) = 0{,}9838$

$\implies 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9838 \implies \alpha = 2(1 - 0{,}9838)$

$\alpha = 0{,}0324 = 3{,}24\ \%$

$$\implies \boxed{\alpha = 3{,}24\ \%}$$

$\Rightarrow$ le niveau de confiance est de : $100 - 3,24\ \% = 96,76\%$

$= \boxed{96,76\%}$

- d'après la table 2 (Annexe C)

On peut voir que α est comprise entre 0,03 et 0,04.

la table 2 donne directement la valeur $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

la valeur 2,14 se trouve entre 2,1701 et 2,0537

$\downarrow$ $\alpha = 0,03$ — 3%

$\downarrow$ $\alpha = 0,04$ — 4%

le niveau de confiance est entre : $100 - 3\%$ et $100 - 4\%$

càd. entre 97% et 96%.

2) niveau de confiance pour l'intervalle $\alpha = ??$

$$\bar{x} - 1,85 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 1,85 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$$\alpha = ?? \quad \text{si} \quad \mu \in \left[\bar{x} - 1,85 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + 1,85 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,85$$

$$P[Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \frac{\alpha}{2} = P[Z \leq 1,85]$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9678 \Rightarrow \alpha = 2(1 - 0,9678)$$

$$\alpha = 0,064\ \% = 6,44\%$$

le niveau de confiance est de $= 100 - 6,4\% = \boxed{93,56\%}$

<u>Rq</u>: Plus l'intervalle est petit ou serré plus la confiance est faible.

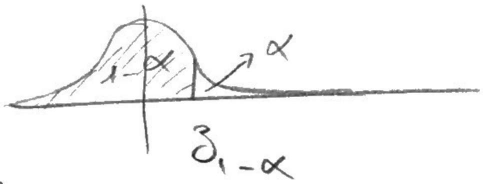
3] niveau de confiance pour l'intervalle $\alpha = ?$

$\alpha = ?$ si $\mu \leq \underbrace{\bar{x} + 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Il s'agit d'un intervalle de confiance unilatéral (non présenté dans le cours) de forme

$$\mu \leq \bar{x} + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$z_{1-\alpha} = 1{,}96$



$P[Z < z_{1-\alpha}] = 1-\alpha = \phi(1{,}96)$

$\Rightarrow 1-\alpha = 0{,}975 \Rightarrow \alpha = 2{,}5\,\%$

$\Rightarrow$ la confiance $= \boxed{97{,}5\,\%}$

Exercice 5.2

estimer un IC du gain d'un circuit électronique

gain $\sim \mathcal{N}(m, \sigma = 20)$

1-] Décrire l'expérience aléatoire, l'univers et X va.

$\mathcal{E} =$ " choisir un circuit électronique "

$\Omega = \{$ l'ensemble des circuits $\}$

$X =$ v.a. qui correspond au gain du circuit

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2 = 20^2)$

2-] $n =$ taille de l'échantillon . $\alpha =$ erreur

IC $(m) = ??$ (en fonction de n, σ, α)

On prend un échantillon de circuit de taille n

On peut estimer m avec $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ (estimateur de la moyenne)

Or $\bar{X}_n \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

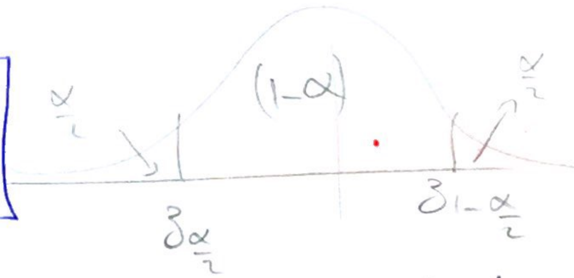
On détermine $IC_{1-\alpha}(m)$ tq. $\qquad z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$P\left[z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left[\bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left[\bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

alors $\boxed{m \in \left[\bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]}$



3-] Comment doit varier la longueur de l'IC en fonction de la taille de l'échantillon et le niveau de confiance ?

$L =$ la longueur de l'IC $= \left(\bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X}\right)$

$= z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$= -2 z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (car $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{\alpha}{2}}$ Sym de $N(0,1)$)

$= 2 z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(or $z_{\frac{\alpha}{2}} < 0 \Rightarrow -2 z_{\frac{\alpha}{2}} > 0$, de même pour $2 z_{1-\frac{\alpha}{2}} > 0$)

si $\sigma \nearrow \Rightarrow L \nearrow$

si $n \nearrow \Rightarrow L \searrow$

si

4-) confirmer la réponse en donnant l'IC selon les cas:

$$IC_{1-\alpha}(m) = \left[\bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

a- IC à 95% où $n=10$, $\hat{m}=1000$

$$IC_{1-\alpha}(m) = \left[1000 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; 1000 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$(1-\alpha = 0{,}95)$

si $C = 95\%$ et $n = 10$

$\Rightarrow \alpha = 5\%$ et $\frac{\alpha}{2} = 2{,}5\%$ donc

$P[Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow P[Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 0{,}975$

$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = -1{,}96$

$\Rightarrow IC_{0,95}(m) = \left[1000 - 1{,}96 \cdot \frac{20}{\sqrt{10}} ; 1000 + 1{,}96 \cdot \frac{20}{\sqrt{10}}\right]$

$$\boxed{IC_{0,95}(m) = [987{,}6039 ; 1012{,}396]}$$

b- IC à 95% où $n = 25$; $\hat{m} = 1000$

$1 - \alpha = 0{,}95$

$C = 95\%$ et $n = 10$

$\alpha = 5\% \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 2{,}5\%$

$P[Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P[Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 0{,}975$

$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$ et $z_{\frac{\alpha}{2}} = -1{,}96$

$\Rightarrow IC_{0,95}(m) = \left[1000 - 1{,}96 \cdot \frac{20}{\sqrt{25}} ; 1000 + 1{,}96 \cdot \frac{20}{\sqrt{25}}\right]$

$\Rightarrow \boxed{IC_{0,95}(m) = [992{,}16 ; 1007{,}84]}$

$n \nearrow \Rightarrow$ IC $\searrow$

c- IC à 99% $\quad n = 10$ et $\hat{m} = 1000$

$\alpha = 1\%$ $\qquad 1 - \alpha = 0,99$

$\frac{\alpha}{2} = 0,5\%$

$P[Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$

$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,5758$ et $z_{\frac{\alpha}{2}} = -2,5758$

$\Rightarrow IC_{0,99}(m) = [1000 - 2,5758 \cdot \frac{20}{\sqrt{10}} ; 1000 + 2,5758 \cdot \frac{20}{\sqrt{10}}]$

$\boxed{IC_{0,99}(m) = [983,7092 ; 1016,291]}$

d- IC à 99% $\quad n = 25$ et $\hat{m} = 1000$

$\alpha = 1\%$ $\qquad P[Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$

$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,5758$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = -2,5758$

$\Rightarrow IC_{0,99}(m) = [1000 - 2,5758 \cdot \frac{20}{\sqrt{25}} ; 1000 + 2,5758 \cdot \frac{20}{\sqrt{25}}]$

$\Rightarrow \boxed{IC_{0,99}(m) = [989,6968 ; 1010,303]}$

5-| Combien doit être la taille de $n = ?$ pour que la longueur de l'intervalle de confiance à 95% est 4 = ?

$L_{0,95}(IC) = 4 = -2 z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \sqrt{n} = (2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma) \cdot \frac{1}{4}$ $\qquad \begin{cases} \text{or } z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96 \\ \sigma = 20 \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2 \cdot 1,96 \cdot 20}{4} = 19,6 \Rightarrow n = (19,6)^2 = 384,16$

$\Rightarrow \boxed{n = 384,16}$

-7-

il faut un échantillon de plus que 385 individu pour que $L(IC)_{0,95}$ soit égale à 4.

Exercice 5.3

X = poids du paquet de poudre de lessive

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $\quad \sigma = 5\,g$

poids moyen sur les paquets $\mu = 710\,g$

échantillon de 10 paquets $n = 10$

poids moyen des échantillons /heure. $\bar{x} = 707\,g$

1-) Donner un estimateur de μ.

$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum X_i$ est un estimateur de μ.

où X_i = poids du paquet i.

$\hat{\mu} = \bar{x}_{10} = 707\,g$

2-) Donner $IC_{0,9}(\mu) = ?$ $\quad IC_{0,95}(\mu) = ?$

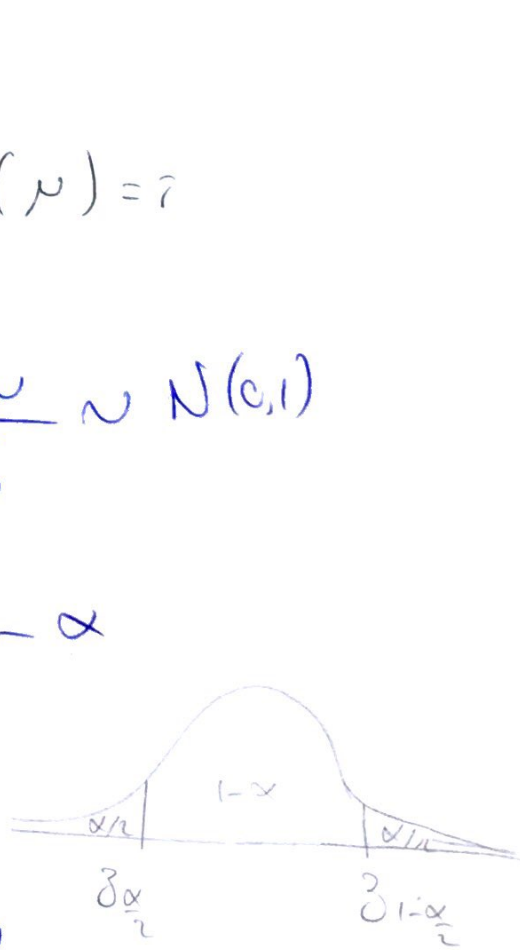
l'estimateur de μ est $\bar{X}_n$

$\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

On construit l'IC. tq.

$P[z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \alpha$

$\Rightarrow P[z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \alpha$



$\Rightarrow P[\bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}] = 1 - \alpha$

$\Rightarrow \mu \in [\bar{x}_n + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, ; \, \bar{x}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

- <u>pour IC à 0,90</u> $\Rightarrow \alpha = 10\% \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 5\%$

$P[Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow P[Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 0,95$

$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,65$ et $z_{\frac{\alpha}{2}} = -1,65$

$IC_{0,9}(\mu) = \left[707 \pm 1,65 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}}\right] \Rightarrow \boxed{IC_{0,9}(\mu) = [704,39 ; 709,608]}$

- <u>pour IC à 0,95</u> $\Rightarrow \alpha = 5\% \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 2,5\%$

$\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = -1,96$ et $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

$\Rightarrow IC_{0,95}(\mu) = \left[707 \pm 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}}\right] \Rightarrow \boxed{IC_{0,95}(\mu) = [703,9 ; 710,1]}$

- <u>pour IC à 0,99</u> $\Rightarrow \alpha = 1\% \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,5\%$

$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,5758$ et $z_{\frac{\alpha}{2}} = -2,5758$

$\Rightarrow IC_{0,99}(\mu) = \left[707 \pm 2,5758 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}}\right] = \boxed{IC_{0,99}(\mu) = [702,93 ; 711,07]}$

3) <u>$\alpha = ?$</u> $IC_{1-\alpha}(\mu) = [705 , 709]$

$= \left[707 + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; 707 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

Calculons la longueur de l'intervalle $L = ?$

$L = 4 = 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = -2 z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{2\sqrt{10}}{5} = 1,265$

- $P[Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}] = P[Z \leq 1,265] = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \frac{0,8962 + 0,8980}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 0,2058$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 20,58\%}$

Exercice 5.4

$\mathcal{E}$ = "Choisir un basque français"

Ω = { l'ensemble des Basques }

$X = \begin{cases} 1 & \text{si sang du Basque est du Rhésus négatif} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$X \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p = P[X=1] = 0,15$

Echantillon de taille 200 $\Rightarrow n = 200$

On trouve que 44 st du Rhésus négatif $\Rightarrow \hat{p} = \frac{44}{200} = 0,22$

$$\hat{p} = 0,22 = \overline{x}_n = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} x_i$$

Donner un $IC_{0,99}(p) = ??$

Le meilleur estimateur de la proportion P est $\hat{p} = \overline{X}_n$

D'après le TCL, On sait que $\overline{X}_n \sim N\left(p ; \frac{p(1-p)}{n}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$

On cherche $IC_{1-\alpha}(p)$ tq:

$$P\left[z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow p \in \left[\overline{X}_n + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} ; \overline{X}_n + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

$p = 0,15$, $n = 200$, $\hat{p} = 0,22 = \overline{x}_n$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = -2,5758$ pour $\alpha = 0,01$

$$\Rightarrow \boxed{p \in [0,154 ; 0,285]}$$

Ici p est connu (0.15) donc on l'utilise dans le calcul des bornes.
Si p est inconnu on utilise son estimation donc 0.22

Exercice 5.5

X_i = précipitation annuelle moyenne à l'année i
$\forall i = 1983 \longrightarrow 2002$

$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ μ et σ inconnus.

$IC_{0,95}(\mu) = ??$

Soient $\bar{x}$ et s^* la moyenne et l'écart type respectivement d'un échantillon tiré suivant une loi normale avec une variance inconnue σ^2.

$$l'\, IC_{0,95}(\mu) = \left[\bar{x} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \,;\, \bar{x} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}}\right]$$

En effet,

si σ^2 inconnue, on utilisera son meilleure estimateur S^{*2}

Selon Fisher : $\frac{n}{\sigma^2} \cdot S_n^2 \sim \chi^2_{n-1}$

$$\frac{n-1}{\sigma^2} S_n^{*2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

$$\Rightarrow T_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_n^*}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\frac{n-1}{\sigma^2} S^{*2}}{n-1}}} \sim \text{Loi de Student à } (n-1) \text{ ddl.}$$

- $t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$ = quantile d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à $(n-1)$ddl
- $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = 485,755$
- $S^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - 485,755)^2}{19} = 8161,0807$

$\Rightarrow S^* = 90,3387$

- IC à $95\% \Rightarrow \alpha = 5\% \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$

$t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} = t_{19\,;\,0{,}025} = 2{,}09$ (Table de Student annexe D)

$\Rightarrow$ $l'IC_{0,95}(\mu) = \left[485{,}755 \pm 2{,}09 \cdot \frac{90{,}337}{\sqrt{20}}\right]$

$$\boxed{IC_{0,95}(\mu) = [443{,}47\,;\,528{,}03]}$$

Exercice 5.6

soit s^* : l'écart type d'un échantillon tiré d'une loi normale avec variance inconnue, On doit estimer la variance σ^2 par $IC_{1-\alpha}(\sigma^2)$ $\begin{cases} n = 51 \\ s^* = 0{,}37 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{l} 1-\alpha = 95\% = 0{,}95 \\ \Rightarrow \alpha = 5\% \end{array}\right)$

μ étant inconnue $\Rightarrow$

$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)s^{*2}}{z_{1-\alpha/2, n-1}}\,;\,\frac{(n-1)s^{*2}}{z_{\alpha/2, n-1}}\right]$$

où $z_{\alpha/2, n-1}$: fractile d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ de la loi $\chi^2_{(n-1)}$

$z_{1-\alpha/2, n-1}$: " $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ "

$\frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0,025;50} = 32{,}35$

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975 \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0,975;50} = 71{,}42$

$n - 1 = 50$

$\Rightarrow \sigma^2 \in \left[\frac{50 \cdot (0{,}37)^2}{71{,}42}\,;\,\frac{50 \cdot (0{,}37)^2}{32{,}35}\right]$

$\Rightarrow IC_{0,95}(\sigma^2) = [0{,}0958\,;\,0{,}2115]$

$$\Rightarrow IC_{0,95}(\sigma) = \left[\sqrt{0,0958} \; ; \sqrt{0,2115}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{IC_{0,95}(\sigma) = [0,309 \; ; \; 0,459]}$$

Exercice 5.7

On a 2 populations Ω_A et Ω_B

$\mathcal{E}_A$: "choisir au hasard 1 ampoule du fabriquant A"

Ω_A : {l'ensemble des ampoules de A}

P_A : Prob. uniforme

soit : $X^A : \Omega_A \longrightarrow \mathbb{R}$

$i \longmapsto x_i^A$: durée de vie de l'ampoule i de A

$$E(X^A) = \mu_A = \mu_1$$
$$V(X^A) = \sigma_A^2 = \sigma_1^2 = 200^2$$

$\mathcal{E}_B$: "choisir au hasard 1 ampoule du fabriquant B"

Ω_B : {l'ensemble des ampoules de B}.

P_B : Prob. uniforme.

soit $X^B : \Omega_B \longrightarrow \mathbb{R}$

$i \longmapsto x_i^B$: durée de vie de l'ampoule i de B

$$E(X^B) = \mu_B = \mu_2$$
$$V(X^B) = \sigma_B^2 = \sigma_2^2 = 100^2$$

Il faut calculer l $IC_{0,95}(\theta)$ et l $IC_{0,99}(\theta)$

où θ = différence des durées de vie moyennes de A et B

$$\Rightarrow \theta = \mu_A - \mu_B = \mu_1 - \mu_2$$

$IC_{0,95}(\mu_1 - \mu_2) = ??$ $IC_{0,99}(\mu_1 - \mu_2) = ??$

Pour cela, il faut former un échantillon d'ampoules venant de A et de B

$\mathcal{E}_{(n_A, n_B)}$ = " choisir au hasard un échantillon de n_A ampoules de A et n_B ampoules de B "

$\Omega_{(n_A, n_B)} = E_{n_A} \times E_{n_B} = \left\{ \text{l'ensemble des couples } (e_{n_A}, e_{n_B}) \right\}$

$IC_{1-\alpha}(\mu_A - \mu_B) = ??$

- $\mu_A - \mu_B$ est inconnue $\Rightarrow$ on la remplace par son estimateur.

↳ meilleur estimateur de $\mu_A = \overline{X}_{n_A}$: $E_{n_A} \otimes E_{n_B} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(e_{n_A}, e_{n_B}) \longmapsto \overline{x}_{n_A}$

où $\overline{x}_{n_A}$ = durée de vie moyenne d'ampoules de l'échantillon e_{n_A}.

↳ meilleur estimateur de $\mu_B = \overline{X}_{n_B}$: $E_{n_A} \otimes E_{n_B} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(e_{n_A}, e_{n_B}) \longmapsto \overline{x}_{n_B}$

où $\overline{x}_{n_B}$ = durée de vie moyenne d'ampoules de e_{n_B}

$\Rightarrow$ l'estimateur de $\mu_A - \mu_B$ est $\overline{X}_{n_A} - \overline{X}_{n_B}$ tq :

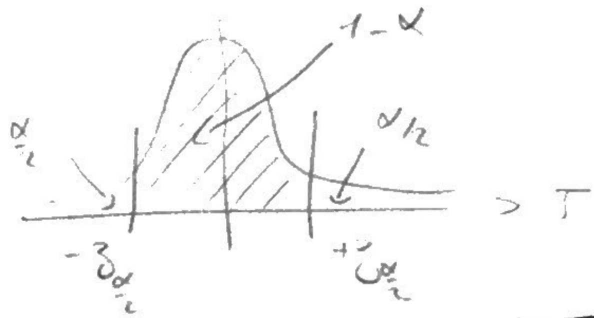
$\overline{X}_{n_A} - \overline{X}_{n_B}$: $E_{n_A} \otimes E_{n_B} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(e_{n_A}, e_{n_B}) \longmapsto \overline{x}_{n_A} - \overline{x}_{n_B}$

Or $\overline{X}_{n_A} \sim \mathcal{N}\left(\mu_A, \frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}}\right)$ et $\overline{X}_{n_B} \sim \mathcal{N}\left(\mu_B, \frac{\sigma_B}{\sqrt{n_B}}\right)$ (TCL n_A et $n_B \geq 30$)

$\Rightarrow \overline{X}_{n_A} - \overline{X}_{n_B} \sim \mathcal{N}\left(\mu_A - \mu_B ; \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}\right)$ (lois normales indép)

$$\Rightarrow T = \frac{(\overline{X}_{n_A} - \overline{X}_{n_B}) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$



$$P\left[-z_{\frac{\alpha}{2}} < T < z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left[(\overline{X}_{n_A} - \overline{X}_{n_B}) - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} < \mu_A - \mu_B < (\overline{X}_{n_A} - \overline{X}_{n_B}) + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}\right] = 1-\alpha$$

avec la réalisation des échantillons étudiés :

$$P\left[(\overline{x}_{n_A} - \overline{x}_{n_B}) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} < \mu_A - \mu_B < (\overline{x}_{n_A} - \overline{x}_{n_B}) + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}\right] = 1-\alpha$$

$$\begin{cases} \overline{x}_{n_A} = 1400 & n_A = 150 & \sigma_A = 200 \\ \overline{x}_{n_B} = 1200 & n_B = 100 & \sigma_B = 100 \end{cases}$$

si $\alpha = 0.05\ \% \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$ $(1-\alpha = 95\%)$

si $\alpha = 0,01\ \% \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,5758$ $(1-\alpha = 99\%)$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} IC_{0,95}(\mu_A - \mu_B) = [162,47 \,; 237,53] \\ \\ IC_{0,99}(\mu_A - \mu_B) = [150,68 \,; 249,32] \end{array}}$$