

Grau en Intel·ligència Artificial

Optimització

Projecte de Sistemes Dinàmics: Pèndol invertit en Simulink

Miquel Roperó Serrano i Maria Gil Casas

11 de Juny, 2024

Abstract

This work presents the development and implementation of a control system for an inverted pendulum, a classic and nonlinear system in the field of control engineering. The main objective is to achieve the stabilization of the pendulum in its vertical position using various control techniques. Initially, the dynamic model of the inverted pendulum is described, including the nomenclature and the equations of motion. Subsequently, the nonlinear model of the system is developed and then linearized to facilitate the application of linear control techniques.

Different controllers have been implemented, including the PID controller, the Linear Quadratic Regulator (LQR), the Linear Quadratic Gaussian (LQG) regulator, and the Kalman filter, to achieve the stabilization and tracking of the pendulum. Each controller has been designed and tested through simulations in Matlab and Simulink, and then experimentally validated. The document concludes with a discussion of the obtained results.

Català:

Aquest treball presenta el desenvolupament i implementació d'un sistema de control per a un pèndol invertit, un sistema clàssic i no lineal en el camp de l'enginyeria de control. L'objectiu principal és aconseguir l'estabilització del pèndol en la seva posició vertical utilitzant diverses tècniques de control. Inicialment, es descriu el model dinàmic del pèndol invertit, incloent la nomenclatura i les equacions de moviment. Posteriorment, es desenvolupa el model no lineal del sistema i es procedeix a la seva linearització per facilitar l'aplicació de tècniques de control lineals.

S'han implementat diferents controladors, incloent el controlador PID, el Regulador Quadràtic Lineal (LQR), el Regulador Quadràtic Lineal Gaussià (LQG) i el filtre de Kalman, per tal d'aconseguir l'estabilització i el seguiment del pèndol. Cada controlador s'ha dissenyat i provat mitjançant simulacions en Matlab i Simulink, i posteriorment s'ha validat experimentalment. El document acaba amb la discussió de les conclusions obtingudes.

Taula de continguts

1	Introducció	3
1.1	Motivació	3
1.2	Enunciat	3
1.3	Metodologia	3
2	Descripció del model: Pèndol Invertit	4
2.1	Nomenclatura	4
2.2	Equacions de moviment	5
2.3	Model no lineal	7
2.4	Linearització	7
2.5	Modelatge del State Space i Estabilitat del Sistema	11
3	PID	14
3.1	Introducció	14
3.2	Ús i Guanys	14
3.3	Implementació del PID i Tuning	15
4	LQR	18
4.1	Introducció	18
4.2	Implementació en Matlab i Simulink	20
4.3	Comparació de control clàssic i modern	22
5	Filtre de Kalman (KF)	23
5.1	Introducció	23
5.2	Implementació en Matlab i Simulink	25
6	LQG	27
6.1	Introducció	27
6.2	Principi de Separació	28
6.3	Implementació en Matlab i Simulink	29
7	Extensions lliures	31
7.1	Extensió 1	31
7.1.1	Implementació del soroll	31
7.1.2	Valors del PID	31
7.1.3	Model Simulink	31
7.1.4	Resultats	32
7.1.5	Conclusions	32
7.2	Extensió 2	33
7.2.1	Model Simulink	33
7.2.2	Resultats	33
7.2.3	Conclusions	34
8	Conclusions	35

1 Introducció

Els objectius del projecte són representar, dissenyar i analitzar sistemes dinàmics, adquirir conceptes com l'observabilitat, l'estabilitat i la controlabilitat d'aquests sistemes, i dissenyar controladors per a sistemes dinàmics que representin fenòmens físics temporals en un entorn real.

1.1 Motivació

La motivació per abordar aquest projecte es basa en que el pèndol invertit serveix com a base experimental per a l'aprenentatge de mètodes de control, com son el Regulador Quadràtic Lineal (LQR), el control PID (Proporcional-Integral-Derivatiu), el Regulador Quadràtic Lineal Gaussià (LQG) i el filtre de Kalman. Aquests mètodes són fonamentals per al disseny de sistemes de control robustos.

1.2 Enunciat

Per realitzar aquest projecte disposem d'un projecte de referència sobre el pèndol invertit:

<https://drive.google.com/file/d/1W2v3wKXBVW4FohB33kTv8iBEiOFgoS8d/view>

i un altre projecte que s'implementa amb Simulink com s'ha de fer en aquesta pràctica:

[1] Design of a Linear Quadratic Gaussian Control System for a Thrust Vector Controlled Rocket: <https://www.sjsu.edu/ae/docs/project-thesis/Alex.Ganbold-Su23.pdf>.

Hem d'imitar el treball de referència [1] sobre el pèndol invertit, i a més desenvolupar dos casos lliures que abordin dues referències com son l'angle i la posició del sistema dinàmic.

S'ha de lliurar un informe que contingui els objectius, la descripció del model, el treball desenvolupat i les conclusions, així com 5 diapositives de presentació. Finalment, s'ha de lliurar tot el codi creat durant el desenvolupament del projecte. L'avaluació es basa en la imitació del treball de referència, les dues extensions lliures i el lliurament de les diapositives de presentació.

1.3 Metodologia

Utilitzant les equacions de moviment per a un pèndol invertit controlat, es crearà un model en espai d'estats lineal i continu. Fent ús de les característiques dinàmiques conegudes d'un pèndol invertit, es dissenyaran les matrius necessàries per a un pèndol invertit lineal. Amb l'espai d'estats completament construït, es poden implementar diversos tipus de teories de sistemes de control per observar els canvis en l'actitud i l'estabilitat. Amb la teoria de control clàssica, s'implementarà el mètode PID per a la pertorbació de l'angle del pèndol. Com que el pèndol invertit és inherentment inestable, és necessari ajustar els guanys P, I i D per aconseguir eficientment la posició desitjada. A continuació, es dissenyarà i s'implementarà un LQR utilitzant MATLAB i Simulink per trobar els guanys Q i R necessaris per a la funció de cost i obtenir el guany òptim. Com que el sistema és totalment controlable i totalment observable, es dissenyarà un filtre de Kalman per estimar l'estat òptim del pèndol invertit a partir dels seus senyals de sortida. Utilitzant el principi de separació, es poden combinar el LQR i el filtre de Kalman per trobar la resposta òptima.

2 Descripció del model: Pèndol Invertit

2.1 Nomenclatura

Símbol	Definició	Unitats (SI)	A Matlab
M	Massa de la vareta del pèndol	kg	m
M	Massa total del pes de la plataforma incloent-hi la inèrcia motora	kg	M
M_c	Massa de la plataforma	kg	M_c
R_m	Resistència de l'armadura motora	Ω	Rm
r	Radi del pinyó motor	m	r
l	Longitud del pèndol des del pivot fins al centre de gravetat	m	l
I	Moment massiu d'inèrcia de la vareta del pèndol	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	I
J_m	Moment d'inèrcia del rotor motor	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Jm
k_b	Constant back EMF del motor	V/rad/s	kb
k_t	Constant del parell del motor	N · m/A	kt
c	Coefficient de fricció viscos per al desplaçament de la plataforma	N/m/s	c
b	Esmorteïment viscos al pivot del pèndol	N · m/rad/s	b
g	Constant gravitacional	m/s^2	g

Table 1: Nomenclatures i descripcions dels símbols del sistema de Pèndol Invertit

On:

$$M = M_c + \frac{J_m}{r^2}$$

T = Energia cinètica total del sistema.

U = Energia potencial total del sistema.

x_p = Coordenada x absoluta del centre de gravetat del pèndol.

y_p = Coordenada y absoluta del centre de gravetat del pèndol.

2.2 Equacions de moviment

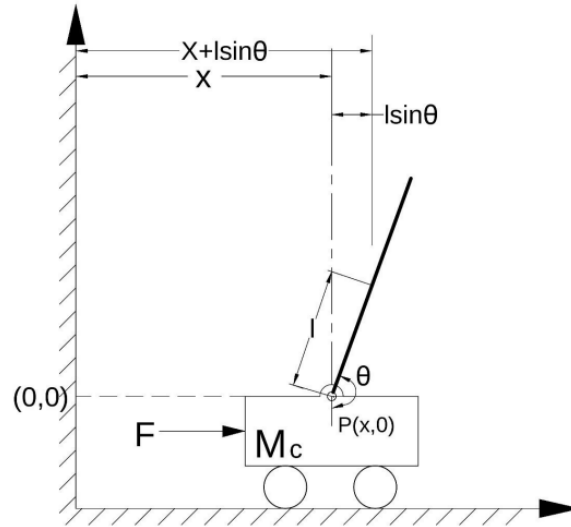


Figure 1: Diagrama del Sistema del Pèndol Invertit

Cinemàtica del sistema:

Les coordenades absolutes del centre de gravetat del pèndol són:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + l \sin \theta \\ -l \cos \theta \end{bmatrix}$$

La Lagrangiana no relativista per a un sistema de partícules es defineix com:

$$\mathcal{L} = T - U$$

L'energia Potencial total del sistema és:

$$U = -mgl \cos \theta$$

L'energia cinètica total del sistema és la suma de l'energia cinètica Translacional (T_t) i l'energia cinètica Rotacional (T_r):

$$T = T_t + T_r$$

L'energia cinètica Translacional total (T_t) ve donada per:

$$T_t = T_{tc} + T_{tp}$$

L'energia cinètica Translacional de la plataforma (T_{tc}) ve donada per:

$$T_{tc} = \frac{1}{2} M_c \dot{x}^2$$

L'energia cinètica Translacional del pèndol (T_{tp}) és:

$$T_{tp} = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dx_p}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_p}{dt} \right)^2 \right]$$

D'acord amb les equacions anteriors, obtenim:

$$T_{tp} = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{d}{dt}(x + l \sin \theta) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt}(-l \cos \theta) \right)^2 \right]$$

Resolent l'equació anterior, tenim:

$$T_{tp} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta$$

Així, l'energia cinètica Translacional total és:

$$T_t = \frac{1}{2}M_c\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta$$

L'energia cinètica Rotacional (T_r) ve donada per:

$$T_r = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

Per tant, l'energia cinètica total del sistema és:

$$T = \frac{1}{2}M_c\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

A partir de les equacions anteriors, la Lagrangiana és:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M_c\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

Com que el sistema té 2 graus de llibertat (2 Degrees Of Freedom), hi ha **dues equacions de Lagrange** del moviment, donades a continuació:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = F - c\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -b\dot{\theta}$$

A partir de les equacions anteriors, la Lagrangiana ens dona les equacions del moviment:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F - c\dot{x} \quad (1)$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta + mgl \sin \theta = -b\dot{\theta} \quad (2)$$

2.3 Model no lineal

Simulant les dues últimes equacions anteriors, les del moviment, obtenim el següent:

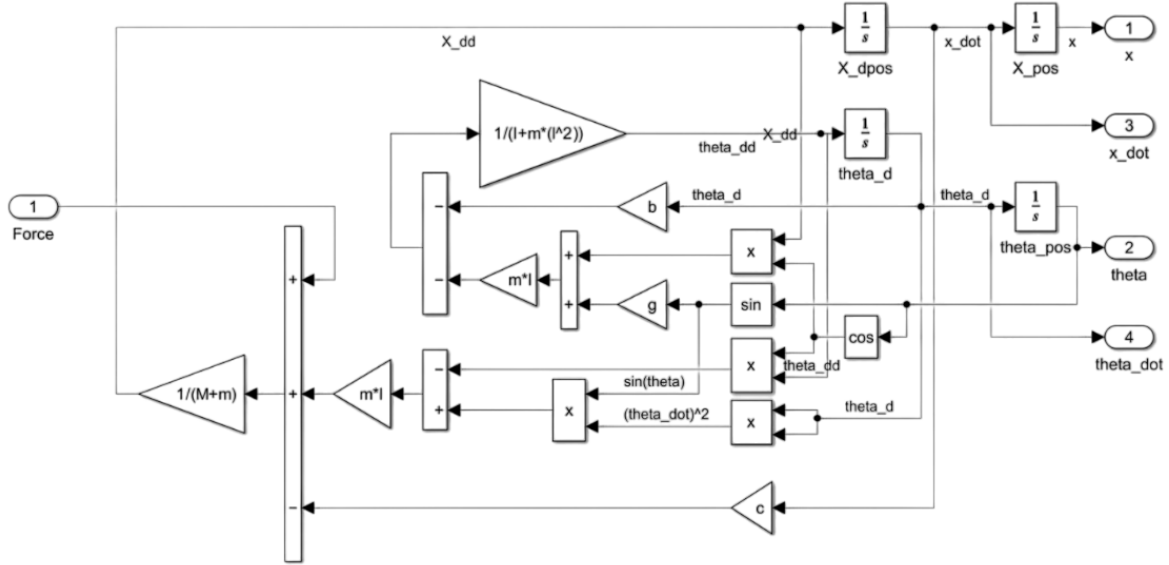


Figure 2: Simulació d'un model no lineal. Autor: Jitendra Singh

2.4 Linearització

Les equacions de moviment no lineals del pèndol invertit són (1) i (2). Agafem \ddot{x} de l'equació (2) i ens queda:

$$\ddot{x} = \frac{-b\dot{\theta} - mgl \sin \theta - (I + ml^2)\ddot{\theta}}{ml \cos \theta}$$

Substituïm el valor de \ddot{x} a l'equació (1) per obtenir el següent:

$$\ddot{\theta} = \frac{-(Fml \cos \theta - cml\dot{x} \cos \theta + m^2l^2\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta + (M + m)(b\dot{\theta} + mgl \sin \theta))}{m^2l^2 \sin^2 \theta + Mml^2 + (M + m)I}$$

De manera similar, si prenem $\ddot{\theta}$ de l'equació (1) tenim:

$$\ddot{\theta} = \frac{F - c\dot{x} - (M + m)\ddot{x} + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta}{ml \cos \theta}$$

Substituïm el valor de $\ddot{\theta}$ a l'equació (2) i s'obté el següent:

$$\ddot{x} = \frac{bml\dot{\theta} \cos \theta + m^2l^2g \sin \theta \cos \theta + (I + ml^2)(F - c\dot{x} + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta)}{m^2l^2 \sin^2 \theta + Mml^2 + (M + m)I}$$

Per posar aquestes equacions en forma d'estat, fem les següents substitucions:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \dot{x}, \quad x_4 = \dot{\theta}$$

Així, podem escriure \ddot{x} i $\ddot{\theta}$ a partir d'aplicar les substitucions a les equacions com:

$$\dot{x}_3 = \frac{bmlx_4 \cos x_2 + m^2 l^2 g \sin x_2 \cos x_2 + (I + ml^2)(F - cx_3 + mlx_4^2 \sin x_2)}{Mml^2 + (M + m)I + m^2 l^2 \sin^2 x_2}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{-(Fml \cos x_2 - cmlx_3 \cos x_2 + m^2 l^2 x_4^2 \sin x_2 \cos x_2 + (M + m)(bx_4 + mgl \sin x_2))}{Mml^2 + (M + m)I + m^2 l^2 \sin^2 x_2}$$

Així, tenim les equacions no lineals finals en forma d'espai d'estat del pèndol invertit:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{bmlx_4 \cos x_2 + m^2 l^2 g \sin x_2 \cos x_2 + (I + ml^2)(F - cx_3 + mlx_4^2 \sin x_2)}{Mml^2 + (M + m)I + m^2 l^2 \sin^2 x_2} \\ \frac{-(Fml \cos x_2 - cmlx_3 \cos x_2 + m^2 l^2 x_4^2 \sin x_2 \cos x_2 + (M + m)(bx_4 + mgl \sin x_2))}{Mml^2 + (M + m)I + m^2 l^2 \sin^2 x_2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$Y = CX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Si volem un sistema linealitzat al voltant del punt estacionari vertical, simplement linealitzem el sistema no lineal.

$$\mathbf{f}(X, U) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{bmlx_4 \cos x_2 + m^2 l^2 g \sin x_2 \cos x_2 + (I + ml^2)(F - cx_3 + mlx_4^2 \sin x_2)}{Mml^2 + (M + m)I + m^2 l^2 \sin^2 x_2} \\ \frac{-(Fml \cos x_2 - cmlx_3 \cos x_2 + m^2 l^2 x_4^2 \sin x_2 \cos x_2 + (M + m)(bx_4 + mgl \sin x_2))}{Mml^2 + (M + m)I + m^2 l^2 \sin^2 x_2} \end{bmatrix}$$

Linearització Utilitzant la Sèrie de Taylor i la Matriu Jacobiana

Tenim un model no lineal:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{U})$$

Volem trobar un model lineal "local" al voltant d'un punt d'operació:

$$(\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0) \rightarrow (\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \delta\mathbf{U})$$

$$\delta\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}, \quad \mathbf{U}_0 + \delta\mathbf{U})$$

Utilitzant l'expansió en sèrie de Taylor:

$$\delta\dot{\mathbf{X}} = f(X_0, U_0) + \frac{\partial f}{\partial X}(X_0, U_0)\delta X + \frac{\partial f}{\partial U}(X_0, U_0)\delta U + H.O.T$$

Assumim que el punt d'operació és:

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0) = 0$$

Punt de referència:

$$(\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0) = ([0 \quad \pi \quad 0 \quad 0], 0)$$

Despreciant els termes d'ordre superior (H.O.T), tenim:

$$\delta\dot{\mathbf{X}} = A\delta\mathbf{X} + B\delta\mathbf{U}$$

$$Y = C\delta X$$

Re-definim:

$$\delta\mathbf{X} \approx \mathbf{X} \quad i \quad \delta\mathbf{U} \approx \mathbf{U}$$

Això ens porta a:

$$\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X} + B\mathbf{U}$$

$$Y = C\mathbf{X}$$

On:

$$A = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{(\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0)}, \quad B = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{(\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0)}$$

Així, també podem linealitzar el nostre model no lineal (equació (3)) al voltant d'un punt de referència:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m^2 l^2 g}{\alpha} & \frac{-(I + ml^2)c}{\alpha} & \frac{-bml}{\alpha} \\ 0 & \frac{mgl(M + m)}{\alpha} & \frac{-mlc}{\alpha} & \frac{-b(M + m)}{\alpha} \end{bmatrix}$$

Prenent F (força) com a entrada U ($U = F$):

$$\alpha = I(M + m) + Mml^2$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{I + ml^2}{\alpha} \\ \frac{ml}{\alpha} \end{bmatrix}$$

El model linealitzat d'estat amb la força F com entrada U és:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{ml}{\alpha} & \frac{m^2 l^2 g}{\alpha} & \frac{-(I + ml^2)c}{\alpha} & \frac{-(I + ml^2)b}{\alpha} \\ 0 & \frac{mgl(M + m)}{\alpha} & \frac{-mlc}{\alpha} & \frac{-b(M + m)}{\alpha} \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{I + ml^2}{\alpha} \\ \frac{ml}{\alpha} \end{bmatrix} F$$

La força aplicada a la plataforma, F , és generada pel motor PMDC. La relació entre F i el voltatge aplicat, V_m , està donada per l'equació:

$$F = \frac{k_t V_m r - k_t k_b \dot{x}}{R_m r^2} = \frac{k_t V_m r - k_t k_b x_3}{R_m r^2}$$

El **model d'espai d'estat final linealitzat**, amb V_m (voltatge) com entrada U és:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m^2 l^2 g}{\alpha} & \frac{-(I + ml^2)(c + \frac{k_t k_b}{R_m r^2})}{\alpha} & \frac{-bml}{\alpha} \\ 0 & \frac{mgl(M + m)}{\alpha} & \frac{-ml(c + \frac{k_t k_b}{R_m r^2})}{\alpha} & \frac{-b(M + m)}{\alpha} \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(I + ml^2)k_t}{\alpha R_m r} \\ \frac{mlk_t}{\alpha R_m r} \end{bmatrix} V_m$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5.51 & -18.29 & -0.002 \\ 0 & 64.9 & -77.53 & -0.026 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.73 \\ 11.59 \end{bmatrix} V_m ,$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

2.5 Modelatge del State Space i Estabilitat del Sistema

El modelatge de l'espai d'estats de qualsevol sistema dinàmic proporciona una representació senzilla basada en matrius de la planta. Amb les característiques aerodinàmiques conegudes del vehicle, la representació de l'espai d'estats pot convertir-se en un model lineal invariant en el temps del sistema específic que pot representar completament el moviment amb qualsevol entrada.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

$$y = Cx + Du \quad (2)$$

El model d'espai d'estats consisteix en el vector d'estat, \dot{x} , i la matriu, A , el vector d'entrada, u , i la matriu, B , el vector de sortida, y , i la matriu C i la matriu de feedforward, D . Un diagrama de blocs senzill d'un espai d'estats es mostra a la Figura 3 a continuació amb totes les matrius i camins lògics representats.

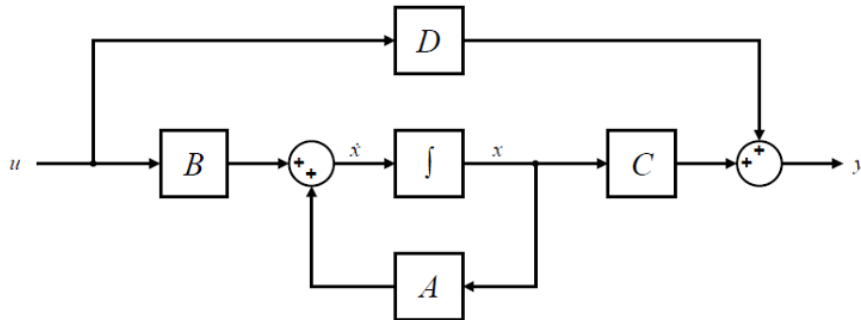


Figure 3: Diagrama de blocs de l'espai d'estats

Per a qualsevol sistema, és necessari que el sistema sigui controlable abans que es dissenyi cap tipus de sistema de control per a ell. De manera similar, també és crucial que el sistema sigui observable, el que significa que els estats d'un sistema es poden estimar a partir del comportament de sortida simulat. Si els rangs de les matrius de controlabilitat i observabilitat són el rang de n , llavors es diu que el sistema és controlable i observable. Seguidament, comprovem que el sistema sigui observable, controlable i estable mirant els valors propis de la matriu A .

Controlabilitat

Fem ús del codi $\text{rank}(\text{ctrb}(A, B))$; en Matlab. Aquest codi calcula el rang de la matriu de controlabilitat. Si el rang obtingut és igual a la dimensió de la matriu A, llavors el sistema és controlable. En el nostre cas, el rang obtingut és 4, que correspon a la dimensió de la matriu A. Això significa que el sistema és controlable.

Observabilitat

Fem ús del codi $\text{rank}(\text{obsv}(A, C))$; en Matlab. Aquest codi calcula el rang de la matriu d'observabilitat. Si el rang obtingut és igual a la dimensió de la matriu A, llavors el sistema és observable. En el nostre cas, el rang obtingut és 4, que correspon a la dimensió de la matriu A. Això significa que el sistema és observable.

Estabilitat

Utilitzant la següent línia de codi $\text{eig}(A)$ en Matlab, podem determinar si el sistema és totalment estable.

Per comprovar la estabilitat significa analitzar si el sistema en circuit obert (sense cap realimentació) és estable o no. Els valors propis de la matriu d'estat del sistema, 'A', poden determinar la estabilitat. Això és equivalent a trobar els pols de la funció de transferència del sistema.

$$AI = \lambda I.$$

On λ és el valor propi i I és el vector propi. Els valors propis ens diuen com la matriu A "actua" en diferents direccions (vectors propis).

Els valors propis de la matriu A són els valors de s on $\det(sI - A) = 0$. Un sistema és estable si la part real de tots els seus valors propis ha de situar-se a la meitat esquerra del pla s , com ara un nombre negatiu.

Els valors propis de la nostra matriu A són els següents:

Valors
0
-19.6327
6.9178
-5.6006

Table 2: Valors propis

Això significa que el sistema no és estable en un Open Loop, ja que no totes les parts reals dels valors propis són negatives.

Open Loop i Estats Desitjats En l'entorn de Simulink, un model de circuit obert és una ruta simple de realimentació amb una entrada externa adjunta.

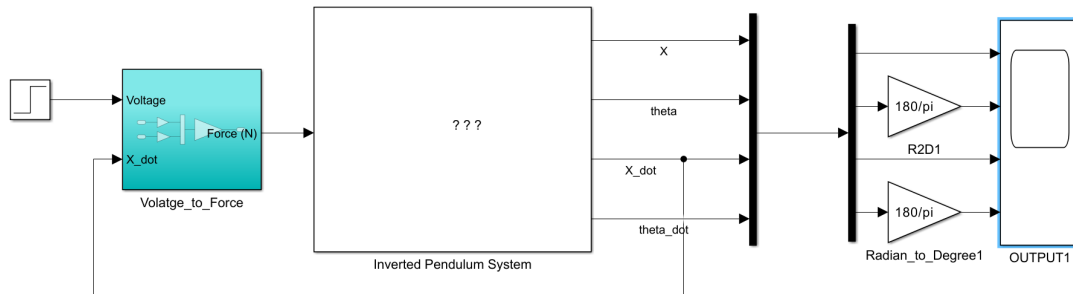


Figure 4: Open Loop en Simulink

La resposta en circuit obert del sistema després de la simulació es mostra a la figura 5:

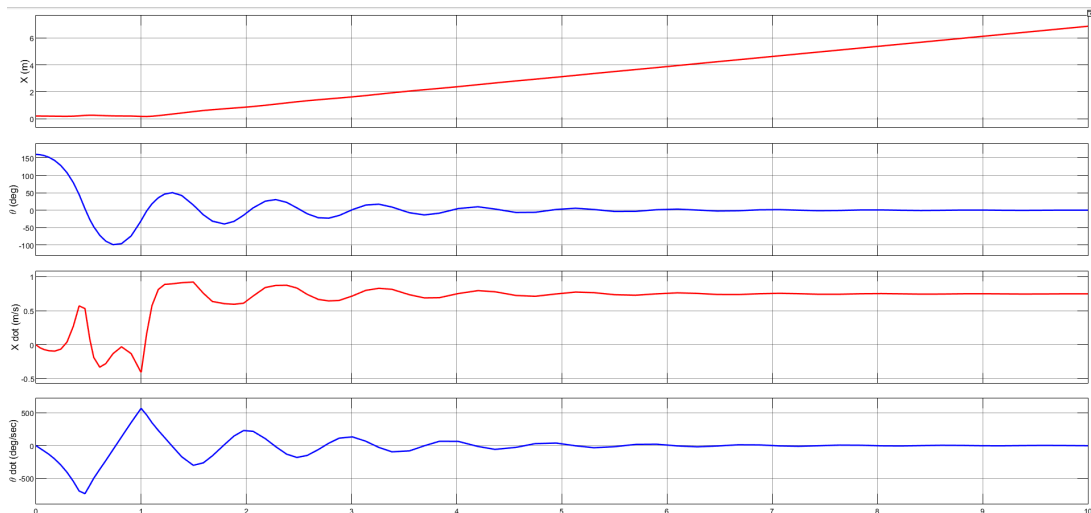


Figure 5: Open loop resposta

La resposta és conforme a la predicció ja que és molt inestable i es descontrola ràpidament.

Els valors desitjats dels estats en els quals volem establitzar el sistema són:

Variable	Valor
x_1	0
x_2	π
x_3	0
x_4	0

Table 3: Valors de les variables desitjats

3 PID

3.1 Introducció

El control clàssic, utilitzat des del segle XX, implica diverses tècniques com la transformada de Laplace, els diagrames de Bode i altres per analitzar i dissenyar bucles de control tancats. El mètode PID, desenvolupat el 1939, destaca com un dels més importants en sistemes de control, proporcionant simplicitat i eficàcia en el maneig del senyal d'error per obtenir la resposta desitjada.

Un dels mètodes de sistemes de control més importants i encara rellevants per a un sistema en bucle tancat és un controlador Proporcional, Integral i Derivatiu (PID). El PID es va desenvolupar per primera vegada el 1939 i, a causa de la seva simplicitat i facilitat de comprensió, s'ha utilitzat en la majoria de sistemes de control en el món tecnològic.

El PID actua com un compensador per a tot el sistema manipulant el senyal d'error e en un nou senyal d'entrada i obtenint la resposta desitjada. La Figura 6 mostra un diagrama de blocs bàsic d'un controlador PID amb cada guany.

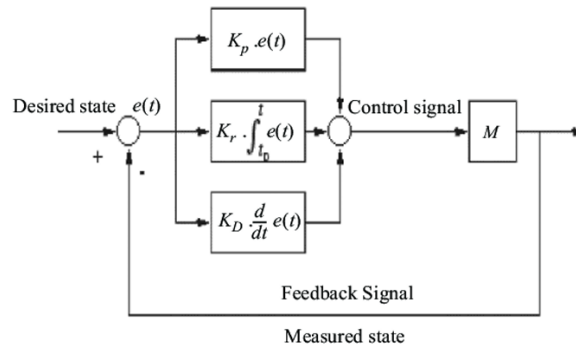


Figure 6: Diagrama de blocs bàsic d'un controlador PID

L'error es defineix com la diferència entre el senyal de referència (r) i el senyal de sortida (y). Aquest error es redirigeix cap al controlador, on és sotmès a funcions proporcionals, integrals i derivades amb guanys específics. Aquests guanys es poden optimitzar de manera intuïtiva i senzilla, i s'aconsegueix el senyal de resposta desitjat.

3.2 Ús i Guanys

La funció de transferència d'un PID es pot escriure en el domini de Laplace com:

$$G(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

Amb el domini del temps essent:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

Bàsicament, el senyal d'error es multiplica proporcionalment, s'integra i es deriva per obtenir un nou senyal d'entrada desitjat.

Per aconseguir la resposta òptima per a una entrada o pertorbació, els guanys de cada mecanisme de control han d'estar ajustats i provats. Hi ha diverses maneres d'ajustar els guanys del PID, però primer, és necessari entendre cada guany i els seus efectes sobre la resposta.

La taula 4 mostra la relació entre els paràmetres de resposta i la estabilitat amb l'augment dels diferents guanys del PID.

	Rise time	Overshoot	Settling time	Steady-State Error	Stability
Increase with K_P	Decrease	Increase	Small Increase	Decrease	Degrade
Increase with K_I	Small Decrease	Increase	Increase	Large Decrease	Degrade
Increase with K_D	Small Decrease	Decrease	Decrease	Minor Change	Improve

Table 4: PID Gains Effects

Per a aquest controlador PID, farem servir un autoajustador de Simulink programat dins del bloc PID per optimitzar els guanys.

3.3 Implementació del PID i Tuning

Per implementar el controlador PID fem ús de Matlab i Simulink per poder simular de la manera més precisa el sistema de resposta en bucle tancat complet (full closed loop) amb blocs PID i d'espai d'estat preprogramats.

La Figura 7 mostra el diagrama de control en bucle tancat complet que hem realitzat entorn el sistema linealitzat. En aquest model hem controlat només l'angle del pèndol.

PID sintonized over linear state

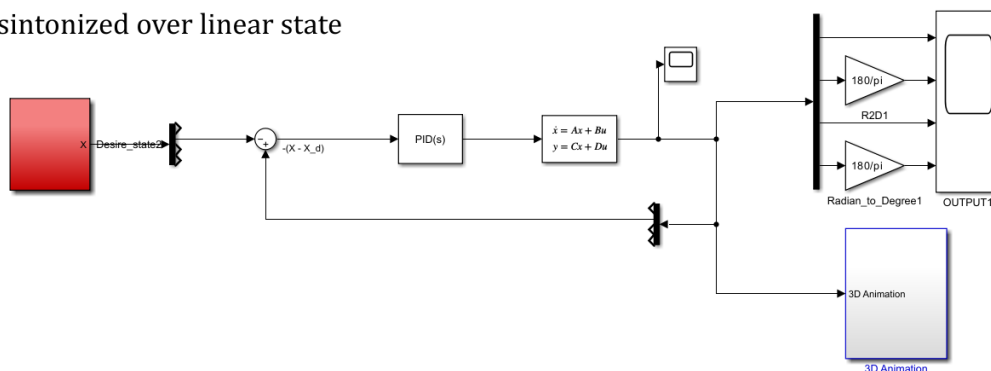


Figure 7: PID control over lineal state space

Seguidament, hem realitzat i avaluat el mateix bucle tancat complet entorn el sistema no lineal. La Figura 8 mostra l'esquema implementat en Simulink.

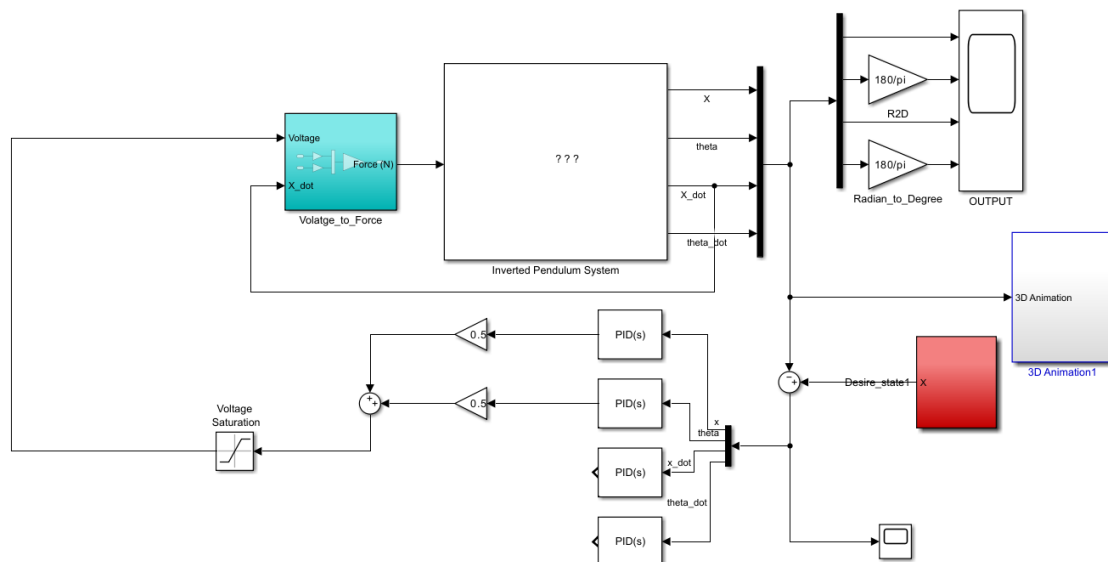


Figure 8: PID control over non linear state space

En aquest model, hem integrat dos controladors PID, un per a controlar la posició i un altre per al control de l'angle. Posteriorment, apliquem un factor de ponderació a les accions de control de cada PID, i els sumem per calcular l'entrada requerida per corregir els errors.

Hem utilitzat l'opció d'autoajust de Simulink per trobar guanys específics. Després d'obtenir aquests guanys, podem recórrer a la prova i l'error per millorar encara més la resposta. Els valors ajustats per a P, I, D són:

P	I	D
-74.7136	-31.0261	-6.3891

Table 5: Valors PID per la posició

P	I	D
139.5493	881.0941	4.2021

Table 6: Valors PID per l'angle

La gràfica 9 ens indica que el controlador PID aconsegueix estabilitzar el sistema en els valors de les variables d'estat desitjats. Amb un valor de referència de la theta de 180 graus.

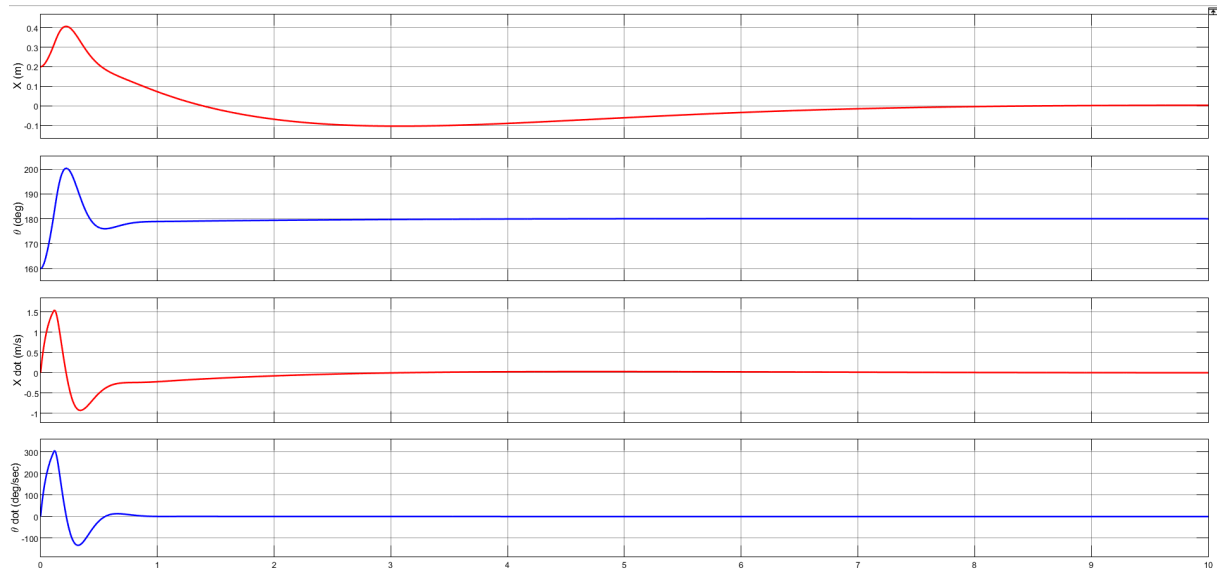


Figure 9: PID resposta controlador

En comparació amb el open loop, el controlador PID sí convergeix a la resposta desitjada.

4 LQR

4.1 Introducció

El Regulador Quadràtic Lineal (LQR) és una tècnica de control òptima que minimitza una funció de cost quadràtica, permetent obtenir una estabilització eficient del sistema. En aquesta secció, es detalla el procés de disseny del controlador LQR per al pèndol invertit, així com els resultats de les simulacions que demostren la seva efectivitat.

LQR és una llei de control òptima que utilitza una funció de cost quadràtica J , o un índex de prestació, per obtenir els factors de pesatge òptims Q i R i trobar la matriu de guany LQR K .

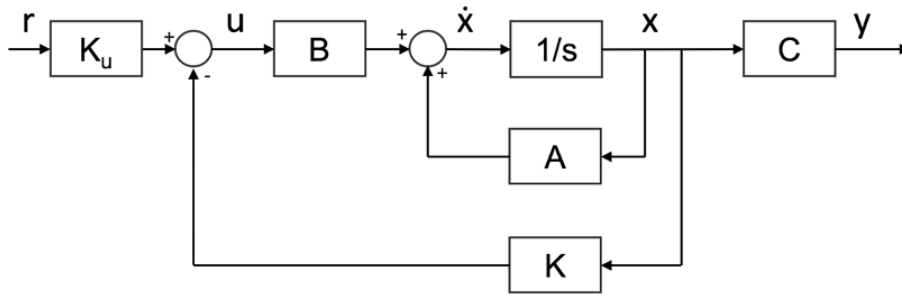


Figure 10: Diagrama de blocs de LQR

Per a un sistema lineal invariant amb el temps, una llei de control òptima busca trobar una entrada que permeti al sistema seguir una trajectòria òptima determinada que minimitza la funció de cost. El sistema, $\dot{x} = g(x(t), u(t), t)$, requereix una funció de cost o un criteri de rendiment:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} h(x(t), u(t), t) dt$$

per a un control òptim. L'equació de Hamilton-Jacobi es pot resoldre utilitzant un criteri de rendiment quadràtic per obtenir els paràmetres necessaris per a un guany òptim K . Definint una funció:

$$f(x, t) = \min \int_{t_0}^{T_1} h(x, u) dt$$

l'equació de Hamilton-Jacobi esdevé:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \min [h(x, u) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) g(x, u)]$$

on, si l'Equació J és una funció quadràtica, llavors l'índex de rendiment quadràtic esdevé:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

Substituint les equacions obtingudes, l'equació Hamilton-Jacobi es converteix:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\min[x^T Q x + u^T R u + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T (Ax + Bu)]$$

Un cop s'ha trobat el guany LQR, la nova entrada esdevé:

$$V_m = -Kx$$

Ja que per controlar el pèndol invertit sobre el carro l'input que fem entrar en el sistema és el voltatge que fa accionar el motor del carro ($u = V_m$).

K es defineix com:

$$K = R^{-1} B^T P$$

i P es troba a partir de l'equació de Riccati:

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

Com que totes les altres matrius són conegudes o ja estan prèviament definides, es pot calcular la solució pel guany LQR.

Els valors de les matrius Q i R d'aquest pèndol invertit trobades per calcular la matriu de guany són els següents:

$$Q = \begin{bmatrix} 1200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = 0.035$$

4.2 Implementació en Matlab i Simulink

Per trobar la matriu de guany del LQR en Matlab hem utilitzat la funció $\text{lqr}(A, B, Q, R)$ implementada en Matlab. Aquesta matriu resultant l'hem guardat en una variable anomenada KK , i l'hem utilitzat per construir el model en Simulink.

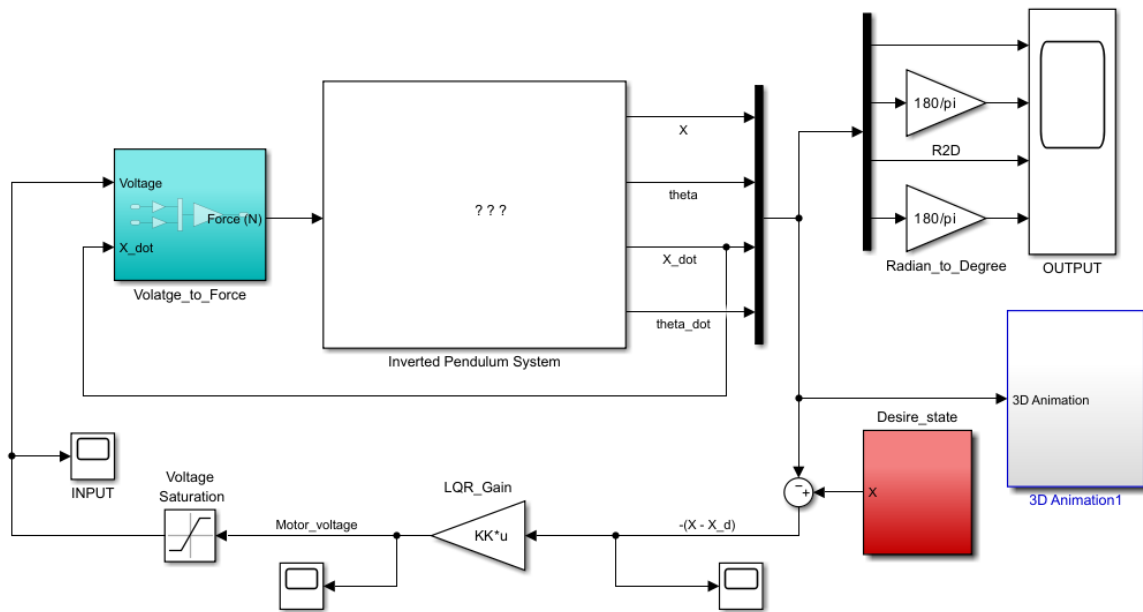


Figure 11: LQR Simulink diagrama de blocs

Amb aquesta implementació del LQR el sistema també s'estabilitza, tot i que triga un segon més que el PID en estabilitzar l'angle del pèndol en el valor desitjat.

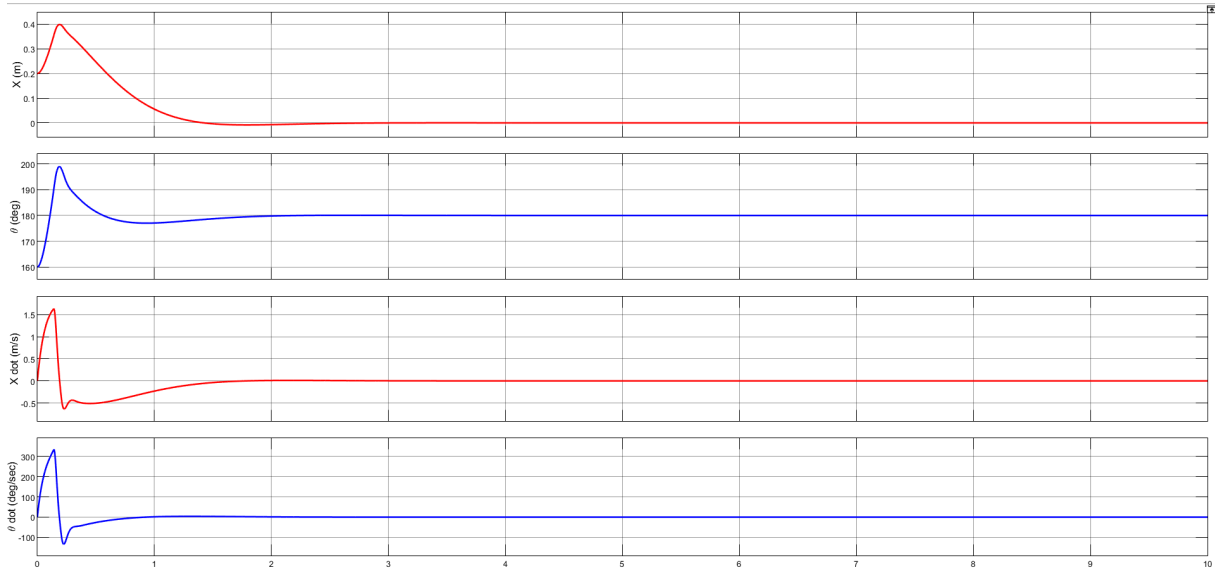


Figure 12: LQR resposta

La diferència entre el controlador PID i el LQR és poc significativa, ja que ambdós controladors no triguen menys de dos segons en estabilitzar totes les variables d'estat en els valors desitjats.

4.3 Comparació de control clàssic i modern

Tant el control PID com LQR convergixen cap a la referència amb una velocitat similar, tot i que el PID mostra una petita quantitat d'oscil·lació i inestabilitat en mantenir la resposta abans d'estabilitzar-se, que pot ser corregida amb un ajust simple dels guanys per als seus paràmetres respectius.

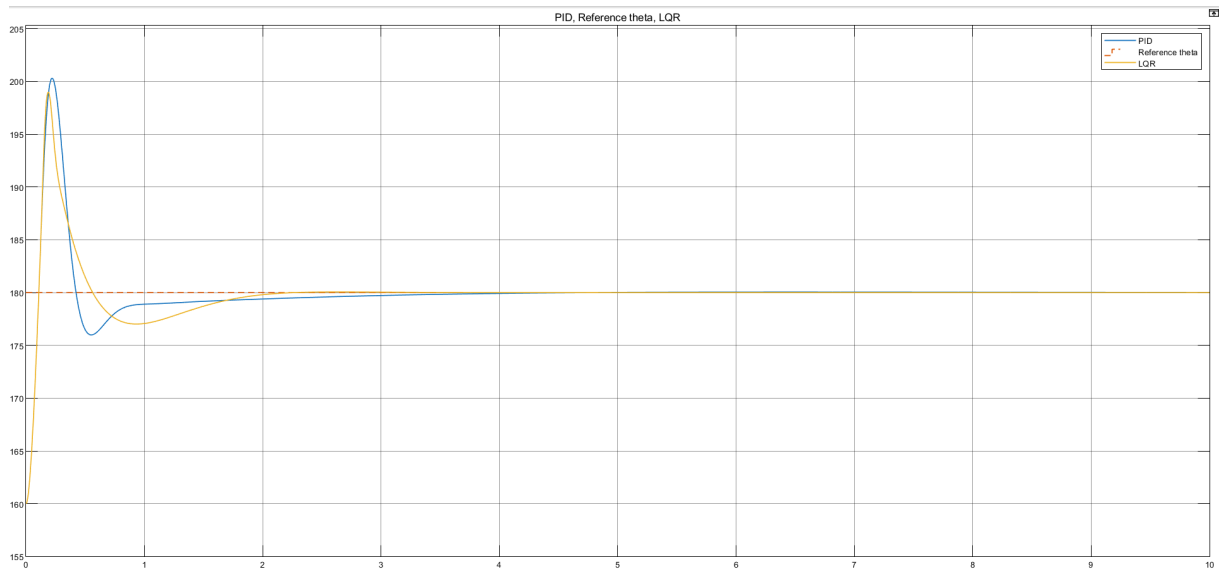


Figure 13: Comparació resposta angle en PID i LQR

5 Filtre de Kalman (KF)

5.1 Introducció

El filtre de Kalman és un algoritme recursiu que proporciona estimacions òptimes dels estats del sistema en presència de soroll. En aquesta secció, es descriu l'aplicació del filtre de Kalman en el control del pèndol invertit, destacant els resultats obtinguts a través de simulacions per validar la seva precisió i eficàcia.

El Filtre de Kalman és un dels mètodes que es poden utilitzar per estimar l'estat complet del sistema, utilitzant l'entrada i la sortida de la resposta del sistema. El Filtre de Kalman és un estimador òptim d'estat que utilitza el soroll del procés i el soroll de mesura, incloent l'entrada i la sortida, per estimar l'estat complet del sistema.

Suposem que tenim un estat estimat \hat{x} que estima el vector d'estat complet x :

$$\dot{\hat{x}} = Ax + Bu$$

$$\dot{e} = Ax - A\hat{x}$$

llavors l'error d'estimació de l'estat esdevé:

$$e = x - \hat{x}$$

Combinant les dues equacions podem veure que:

$$\dot{e} = Ae$$

Això significa que si la matriu A és asimptòticament estable, l'error convergirà a zero per a qualsevol entrada; és a dir que a mesura que el temps arribi a l'infinit, l'estat estimat \hat{x} convergirà a l'estat real x . Alternativament, si A és una matriu inestable, l'estat estimat es desviarà dels valors reals de l'estat. Per tal que el terme d'error arribi a un valor desitjat (és a dir, zero), s'aplica un valor de guany de Kalman L necessari a l'equació.

$$\dot{\hat{x}} = Ax + Bu + L(y - \hat{y})$$

$$\hat{y} = C\hat{x}$$

En aquesta última equació, a mesura que \hat{x} convergeix a x , \hat{y} també convergeix a y , negant el valor de guany i el sistema arribant al seu estat real.

El terme d'error, en canvi, esdevé:

$$\dot{e} = Ax - A\hat{x} - L(Cx - C\hat{x}) = (A - LC)e$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)x + Bu + Ly$$

L'equació de $\dot{\hat{x}}$ és coneguda com l'observador d'ordre complet (mostrat a la figura 14), que considera tant l'entrada com la sortida per al seu mètode d'estimació.

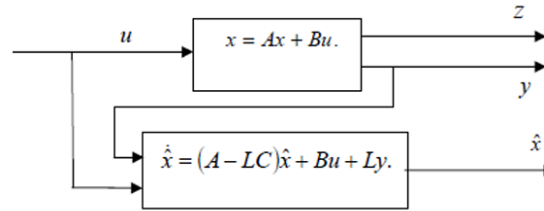


Figure 14: Observador d'ordre complet

Per al Filtre de Kalman, un estimador òptim en comparació amb un observador, s'introdueixen dos paràmetres diferents:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw(t)$$

$$y = Cx + v(t)$$

$$S_w(\omega) = Q_N$$

$$S_v(\omega) = R_N$$

on $w(t)$ i $v(t)$ són sorolls gaussians de mitjana zero amb Q i R com a matrius de covariància del soroll de procés i del soroll de mesura, respectivament.

Estimació d'Estat

El paràmetre més important del sistema que s'ha de considerar quan s'implica un observador és verificar si el sistema és observable o no. L'observabilitat d'un sistema es pot calcular trobant el rang de la matriu d'observabilitat. Si el sistema té n incògnites, llavors el sistema és observable si i només si el rang de la matriu d'observabilitat és també n .

$$\text{rang}[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = n$$

Anteriorment hem trobat que el rang del sistema és complet i la matriu d'observabilitat és la següent:

$$\text{rang}[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = n$$

$$Ob = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.30807 & 0 & 0.0009 \end{bmatrix}$$

5.2 Implementació en Matlab i Simulink

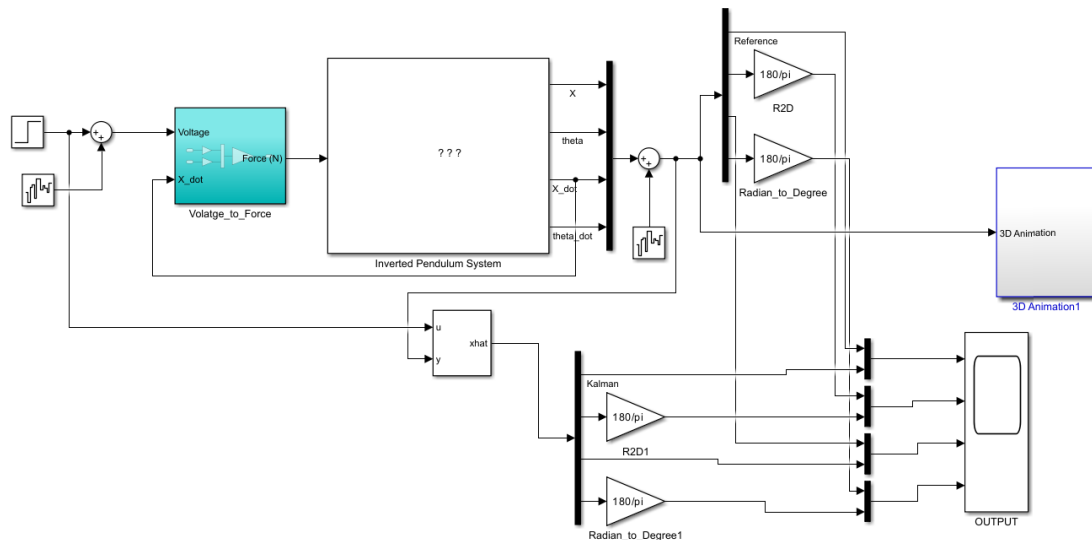


Figure 15: Model Simulink Filtre de Kalman

A la nostra implementació en Simulink, el sumatori combina la senyal de la força generada per l'ona sinusoidal amb altres senyals del sistema per obtenir la força total que s'aplica al sistema. El bloc "Voltage_to_Force" converteix el voltatge d'entrada en força. Aquesta força s'aplica al sistema del pèndol invertit per controlar la seva posició i angle. El bloc "Inverted Pendulum System" representa la dinàmica del pèndol invertit. Rep la força del bloc anterior i calcula les posicions i velocitats de la plataforma (X, \dot{X}) i del pèndol ($\theta, \dot{\theta}$).

El filtre de Kalman rep els senyals de posició i velocitat (possiblement sorollosos) i estima els estats més probables del sistema. Proporciona una estimació precisa i en temps real dels estats ocults del sistema, la qual cosa permet un control més robust i precís.

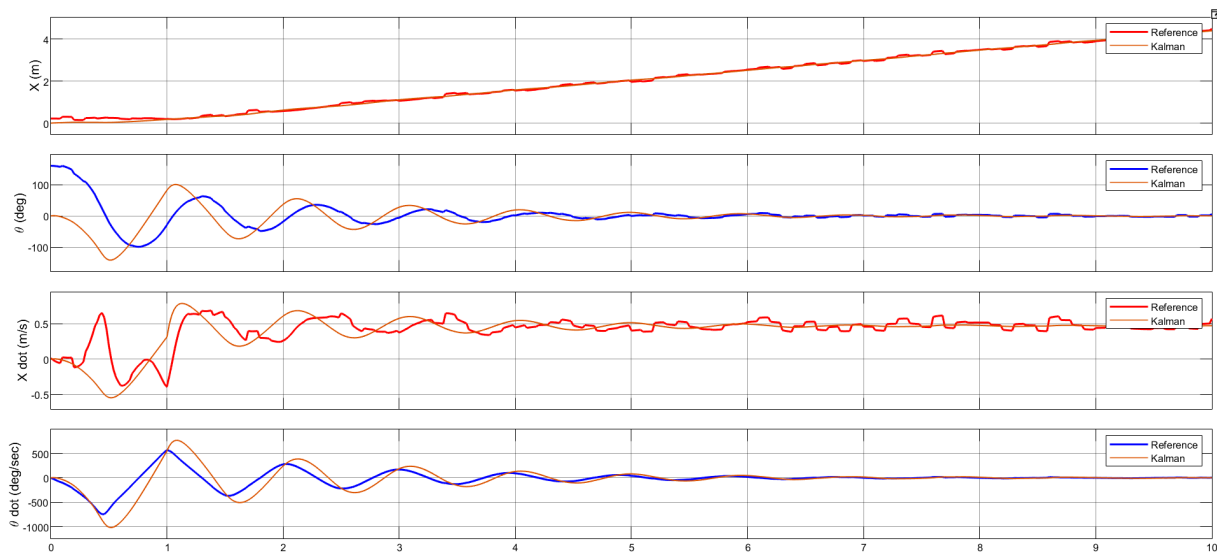


Figure 16: Resultats Filtre de Kalman

Les gràfiques resultants mostren una comparació detallada entre els valors predits pel Filtre de Kalman i els valors reals de les quatre variables de sortida del sistema de pèndol invertit: posició X , angle θ , velocitat \dot{X} i velocitat angular $\dot{\theta}$. En la primera gràfica, la posició X mostra una tendència ascendent contínua, amb els valors predits (en taronja) ajustant-se properament als valors reals (en vermell), indicant una predicció acurada del desplaçament de la plataforma.

A la segona gràfica, l'angle θ fa oscil·lacions que decreixen progressivament, amb els valors predits (en taronja) seguint de manera molt similar les dels valors reals (en blau), demostrant la capacitat del filtre de Kalman per seguir les dinàmiques angulars del pèndol. La tercera gràfica representa la velocitat \dot{X} , on els valors mostren una sèrie d'oscil·lacions i estabilitzacions, i de nou, els valors predits (en taronja) coincideixen amb els valors reals (en vermell), validant l'efectivitat del filtre en estimar la velocitat del carro.

Finalment, la quarta gràfica, que mostra la velocitat angular $\dot{\theta}$, també presenta un bon alineament entre els valors predits (en taronja) i reals (en blau), amb oscil·lacions que es mantenen dins d'un rang coherent al llarg del temps. En conjunt, aquestes gràfiques indiquen que el filtre de Kalman implementat és molt efectiu en la predicció dels estats del sistema de pèndol invertit, malgrat la presència de soroll i incerteses, proporcionant estimacions precises que s'alineen properament amb les mesures reals en totes les variables d'estat considerades.

6 LQG

6.1 Introducció

El Regulador Quadràtic Lineal Gaussià (LQG) combina el control òptim LQR amb el filtre de Kalman per a proporcionar una solució robusta davant incerteses i sorolls en les mesures. Aquesta secció explora el disseny i implementació del controlador LQG, mostrant els avantatges d'aquest enfocament mitjançant simulacions.

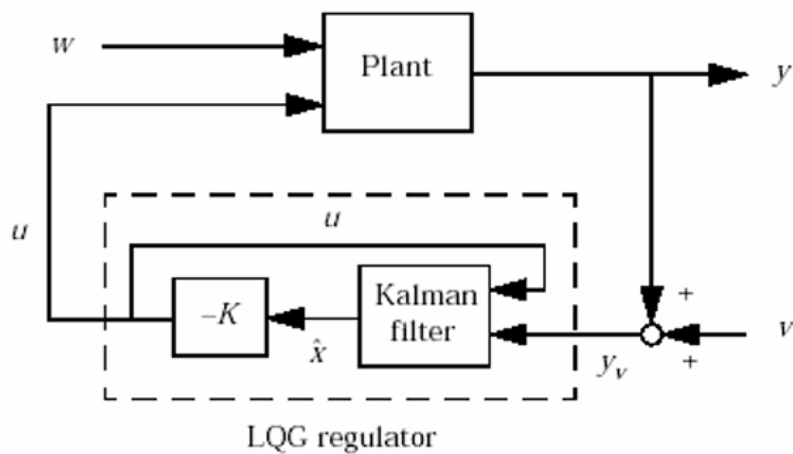


Figure 17: Configuració general de LQG

Amb un guany del controlador LQR connectat a la resposta en circuit obert (open loop) estimada, es pot generar una resposta en circuit tancat (closed loop) òptima, i el senyal d'error convergirà a zero.

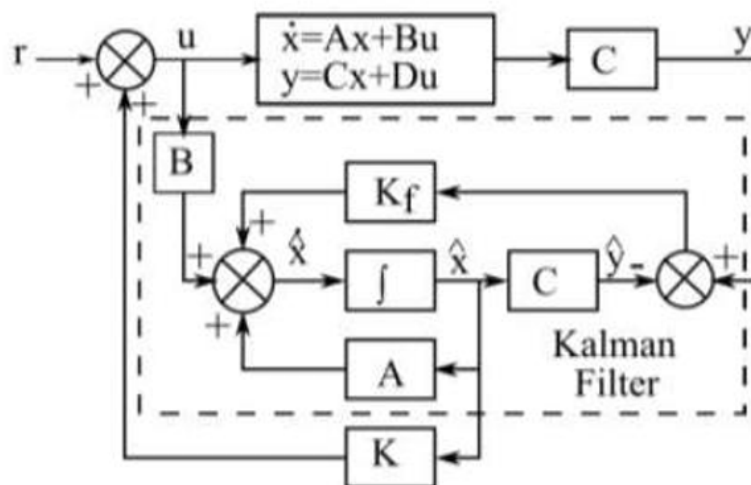


Figure 18: Diagrama de blocs LQG

6.2 Principi de Separació

Per a un sistema lineal invariant amb el temps, el principi de separació estableix que es poden dissenyar un observador òptim i un controlador de retroacció de manera separada i combinar-los per crear una resposta estable d'un sistema. A partir de les equacions de l'observador (essent L la matriu de guany de l'observador de Kalman),

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{x} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Ly}$$

les variables d'estat estimades $\hat{\mathbf{x}}$ s'obtenen i s'utilitzen a l'equació del guany LQR (essent u el Voltatge necessari per produir la força que mou el carro en el model),

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$$

per obtenir la entrada controlada òptima per al sistema. Substituint les equacions anteriors a l'equació d'error $e = x - \hat{x}$,

$$\dot{e} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})e$$

$$\dot{e} = -\mathbf{K}(x - \hat{e})$$

es pot obtenir la forma matricial de les dinàmiques en circuit tancat,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{KC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

Ja que els valors propis de la matriu consisteixen en $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ i $\mathbf{A} - \mathbf{KC}$, ambdós paràmetres són independents entre ells.

6.3 Implementació en Matlab i Simulink

Per a la implementació del controlador LQG en el nostre projecte, hem integrat la matriu de guany calculada en la secció de LQR amb la matriu de guany del filtre de Kalman, que s'ha calculat a la secció corresponent. Hem combinat aquestes dues matrius com s'ha explicat anteriorment per obtenir una solució robusta i estable per al nostre sistema. Hem combinat els diagrames de blocs de LQR i del filtre de Kalman per crear el model en Simulink, en el qual hem incorporat soroll en els sensors i les mesures de les variables estimades.

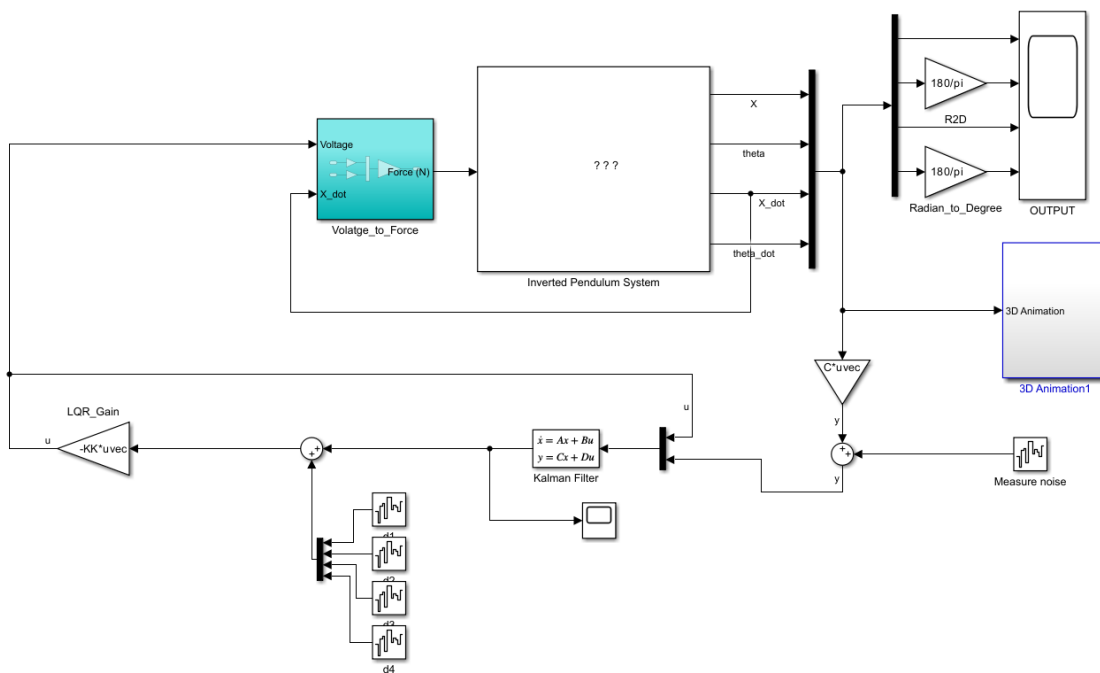


Figure 19: LQG diagrama de blocs

Aplicant un soroll de 0.05 d'amplitud obtenim els següents resultats per les variables d'estat a controlar.

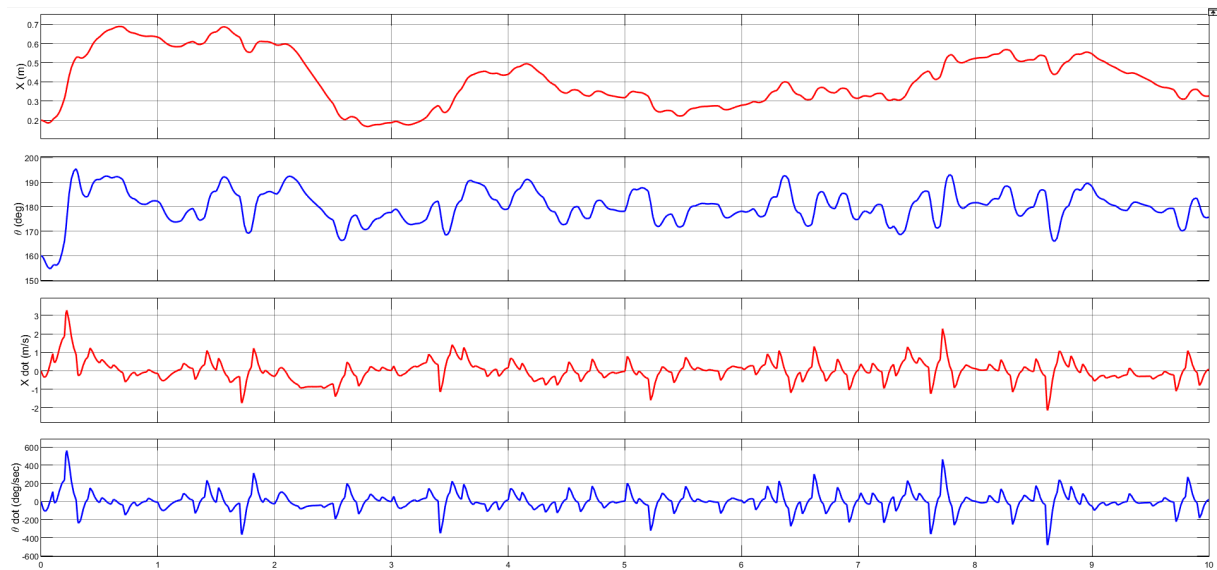


Figure 20: LQG resposta

La resposta del LQG és notablement estable, considerant la nostra intenció de mantenir el pèndol a 180 graus. Tot i que la posició i les variables derivades han de fer molts canvis bruscos per tal de mantenir el pèndol a l'estat desitjat, són capaces de romandre molt a prop del valor desitjat per a aquestes variables.

7 Extensions lliures

7.1 Extensió 1

Per la primera extensió del model, hem afegit soroll a les variables d'estat predites que es passen al model que utilitza el controlador PID. Això ens permet analitzar com el soroll afecta el rendiment del controlador PID en termes de manteniment de l'angle i la posició del sistema de pèndol invertit. Hem implementat dos controladors PID, cadascun associat a una de les variables d'estat clau (posició i angle). Cada controlador ajusta els seus senyals de sortida per mantenir els errors al mínim. Els blocs de ponderació (de 0.5) ponderen les accions de control abans de combinar-se per calcular l'input necessari per corregir els errors. Els senyals d'error per a cada variable es sumen i es passen als respectius PID, que ajusten els seus senyals de sortida.

7.1.1 Implementació del soroll

Per afegir soroll a les variables d'estat, hem utilitzat blocs de soroll gaussià i blocs de suma de Simulink. Aquesta implementació ens permet observar l'efecte del soroll en les variables d'estat i ajustar els paràmetres dels controladors PID per millorar la robustesa del sistema. S'ha afegit un bloc de soroll gaussià a les sortides del sistema de pèndol invertit (Inverted Pendulum System1). El bloc de soroll està configurat en un valor de 0.01 d'amplitut. La sortida del bloc de soroll gaussià es connecta a un bloc de suma, que també rep la sortida original del sistema de pèndol invertit. La sortida del bloc de suma (que ara conté el soroll sumat a la senyal original) es passa als controladors PID.

7.1.2 Valors del PID

Per calcular els valors del PID necessaris per estabilitzar el sistema fem ús del autotuning de Simulink. Els valors obtinguts són els següents:

P	I	D
-81.7136	-25.0261	-10.8743

Table 7: Valors PID per la posició

P	I	D
145.8743	850.5321	10.3376

Table 8: Valors PID per l'angle

7.1.3 Model Simulink

Amb aquesta configuració, podem observar com el soroll afecta el rendiment del controlador PID. Els controladors PID ajusten els seus senyals de sortida per mantenir l'angle i la posició del sistema de pèndol invertit dins dels valors desitjats, tot i la presència de soroll. Aquest anàlisi permet ajustar els paràmetres dels controladors PID per compensar l'impacte del soroll, millorant així la robustesa i estabilitat del sistema en entorns amb soroll.

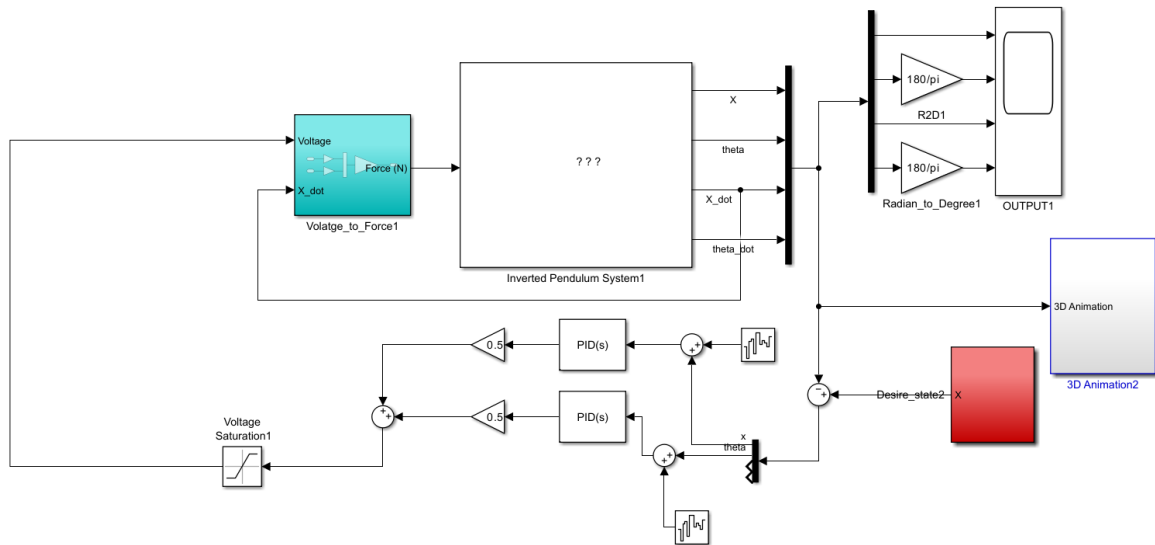


Figure 21: Model Simulink Extensió 1

7.1.4 Resultats

Les variables resultant s'estabilitzen en els valors desitjats, però la presència de soroll fa que els valors dels estats presentin petites inconsistències intentant predir els valors desitjats.

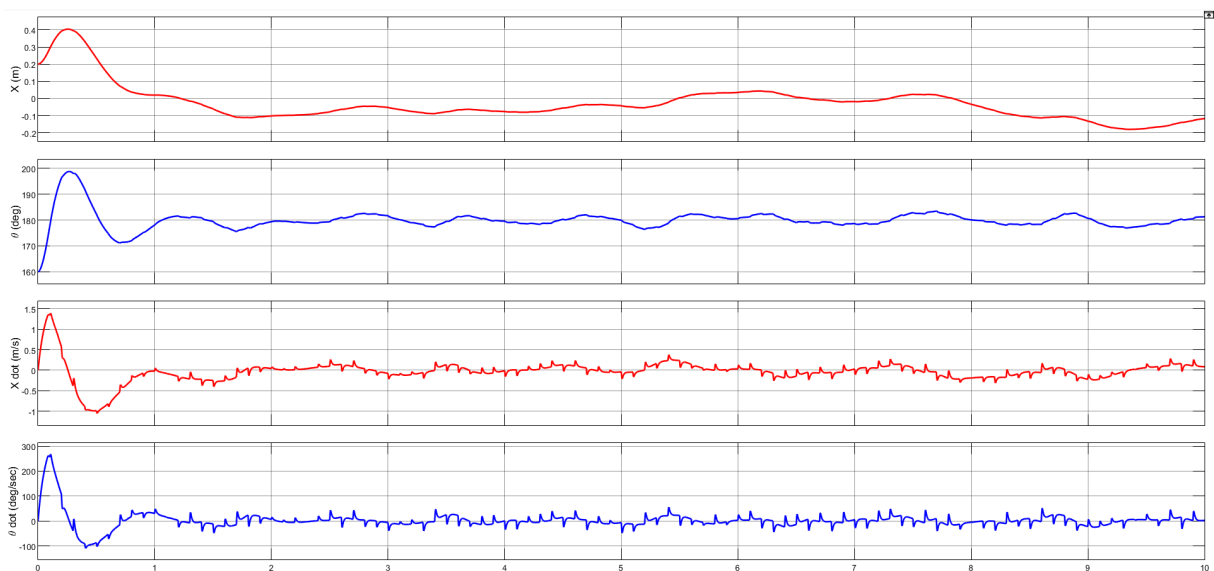


Figure 22: Resposta de les variables d'estat

7.1.5 Conclusions

L'addició de soroll en el model ens permet estudiar la robustesa del controlador PID i ajustar els seus paràmetres per mantenir el rendiment desitjat. Aquesta extensió ens permet assegurar que el sistema de pèndol invertit pot operar eficientment en condicions reals on el soroll és inevitable.

7.2 Extensió 2

Per aquesta extensió del model hem optat per afegir una força externa al controlador LQR. Li hem afegit un bloc generador d'ona sinusoidal per modular l'entrada del sistema, que afecta directament la força aplicada al sistema del pèndol invertit, ara té una entrada més complexa que simula com si la plataforma o el pèndol es trobessin amb una força externa que modifica el seu estat.

7.2.1 Model Simulink

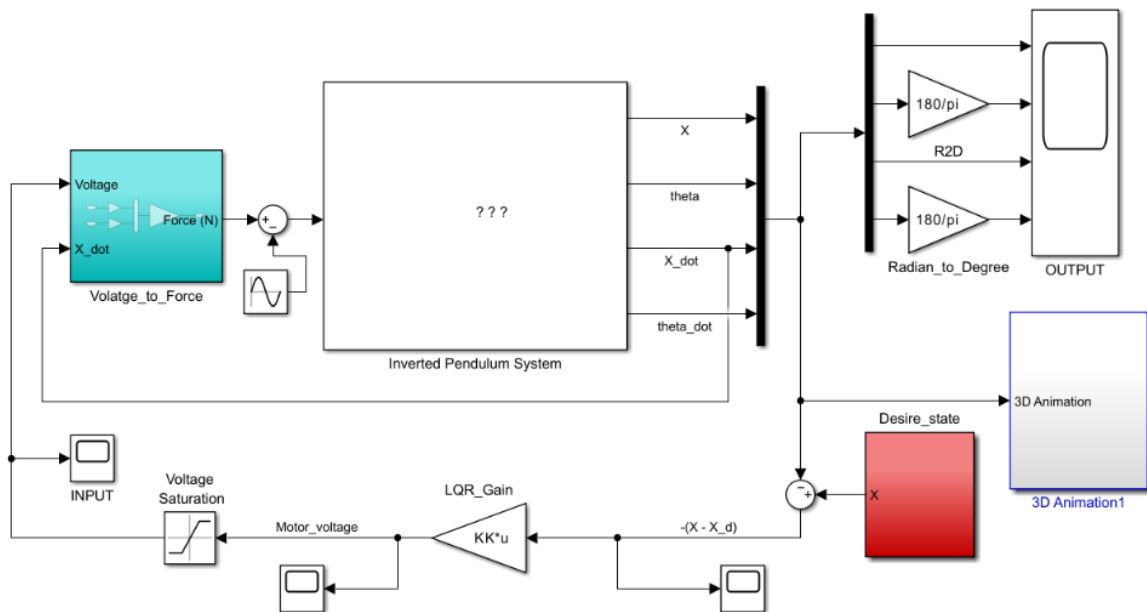


Figure 23: Model Simulink Extensió 2

7.2.2 Resultats

Inicialment, de la posició es pot observar una oscil·lació important que es redueix progressivament, però continua present fins al final de la simulació. L'angle del pèndol oscil·la al voltant dels 180 graus, amb variacions relativament petites. Similarment a la posició, la velocitat inicial mostra una gran oscil·lació que es redueix, però manté un patró oscil·latori lleu fins al final, al voltant de 0 m/s. La velocitat angular inicial presenta una oscil·lació significativa que es redueix ràpidament, estabilitzant-se en una oscil·lació menor i més regular, al voltant de 0 deg/sec.

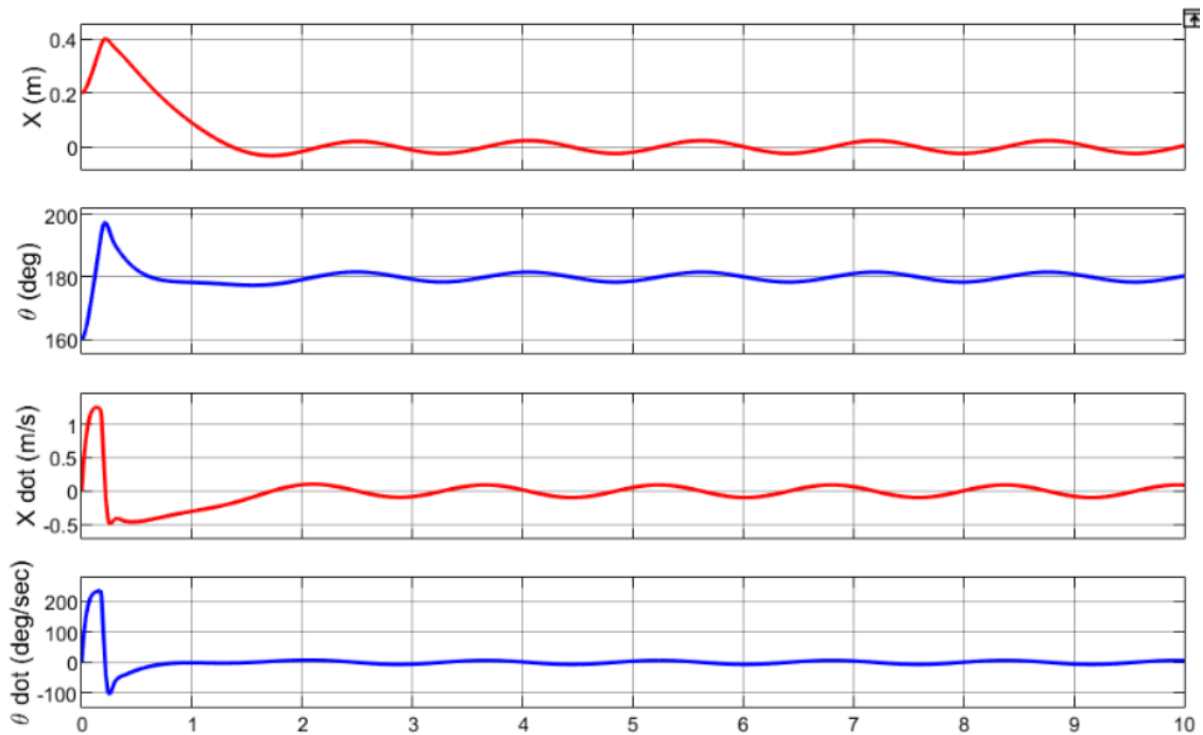


Figure 24: Extensió 2 resposta

7.2.3 Conclusions

Aquests resultats mostren com les oscil·lacions introduïdes per una ona sinusoidal poden afectar el comportament d'un sistema de pèndol invertit. El controlador LQR, tot i les pertorbacions addicionals, és capaç de mantenir l'estabilitat del sistema. Els resultats mostren una clara disminució de les oscil·lacions inicials en totes les variables mesurades, estabilitzant-se en un patró d'oscil·lació menor. Els resultats mostren que, tot i la introducció d'una entrada més complexa, el sistema aconsegueix estabilitzar les variables claus dins d'un rang acceptable d'oscil·lació, demostrant l'eficàcia del controlador LQR en aquestes condicions, perquè el pèndol s'estabilitza en la seva posició invertida.

8 Conclusions

La resposta del controlador PID aconsegueix estabilitzar el sistema en els valors desitjats, convergint més ràpidament que el sistema en bucle obert. A més, tant el control PID com el LQR converteixen cap a la referència amb una velocitat similar. El PID mostra una petita quantitat d'oscil·lació i inestabilitat abans d'estabilitzar-se, que es podria corregir ajustant els guanys. En canvi, el LQR manté una estabilitat més consistent.

La implementació del filtre de Kalman proporciona una estimació precisa i en temps real dels estats del sistema, millorant la robustesa i precisió del control. Les gràfiques resultants mostren una predicció acurada dels valors de posició, angle, velocitat i velocitat angular del pèndol invertit.

A la implementació del controlador LQG amb un soroll de 0.05 d'amplitud, el sistema es manté estable prop dels valors desitjats, tot i els canvis bruscos necessaris per mantenir el pèndol a 180 graus.

L'addició de soroll en el model per l'extensió 1 permet estudiar la robustesa del controlador PID i ajustar els seus paràmetres per mantenir el rendiment desitjat, assegurant que el sistema de pèndol invertit pot operar eficientment en condicions reals amb presència de soroll.

En l'extensió 2, el controlador LQR, tot i les pertorbacions addicionals, manté l'estabilitat del sistema amb una disminució clara de les oscil·lacions inicials en totes les variables mesurades, demostrant la seva eficàcia en aquestes condicions.

En conclusió, tant el controlador PID com el LQR són efectius per estabilitzar el sistema de pèndol invertit, amb el LQR oferint una lleugera avantatge en estabilitat. La integració del filtre de Kalman millora la precisió de les estimacions dels estats, i l'ús del controlador LQG proporciona una solució robusta en presència de soroll. Les extensions demostren la capacitat dels controladors per mantenir l'estabilitat en condicions reals, assegurant un rendiment eficient i robust.

References

- [1] Ganbold, A. (2023). *Design of a Linear Quadratic Gaussian Control System for a Thrust Vector Controlled Rocket*. Recuperado de San Jose State University, Department of Aerospace Engineering: <https://www.sjsu.edu/ae/docs/project-thesis/Alex.Ganbold-Su23.pdf>
- [2] Autor Desconocido. (n.d.). *[Documento de Google Drive]*. Recuperado de <https://drive.google.com/file/d/1W2v3wKXBVW4FohB33kTv8iBEi0FgoS8d/view>
- [3] MathWorks. (n.d.). *Kalman Filtering*. Recuperado de <https://es.mathworks.com/help/control/ug/kalman-filtering.html>
- [4] Autor Desconocido. (n.d.). *Simulink model of LQR controller*. Recuperado de ResearchGate: https://www.researchgate.net/figure/Simulink-model-of-LQR-controller_fig1_281255620
- [5] Usuario de StackExchange. (n.d.). *Implementing Quadratic Linear Regulator (LQR) in Simulink*. Recuperado de Electronics Stack Exchange: <https://electronics.stackexchange.com/questions/596146/implementing-quadratic-linear-regulator-lqr-in-simulink>
- [6] MathWorks. (n.d.). *Linear Quadratic Gaussian (LQG) Design*. Recuperado de <https://es.mathworks.com/help/control/getstart/linear-quadratic-gaussian-lqg-design.html>
- [7] MathWorks. (n.d.). *PID Control*. Recuperado de <https://es.mathworks.com/discovery/pid-control.html>