

---

# **Dispense del Corso di Analisi 2**

## **Modulo di Esercitazione**

---

**Ultimo aggiornamento: 7 maggio 2025**

**Dr. Michele Ginesi**

N.B. Queste note non hanno alcuna pretesa nè di completezza nè di correttezza. Non costituiscono una  
referenza sufficiente a prepararsi all'esame ed è altamente probabile la presenza di errori.



# Capitolo 1

## Curve

### 1.1 Curve regolari e semplici, versori tangenti e lunghezza di una curva

Sia  $\gamma$  una curva parametrizzata da  $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

**Definizione 1.1.1.** La curva è *chiusa* se  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ .

**Definizione 1.1.2.** La curva è *semplice* se non esistono  $t_0 \neq t_1 \in [a, b]$  tali che  $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(t_1)$  ad esclusione, eventualmente, del caso  $t_0 = a, t_1 = b$ .

Detto a parole, una curva è semplice quando non interseca se stessa ad eccezione, eventualmente, del caso di una curva chiusa in cui il punto iniziale e finale coincidono.

**Definizione 1.1.3.** Una partizione  $\mathcal{T} = \{t_0 = a, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = b : t_i < t_{i+1} \forall i = 0, 1, \dots, n-1\}$  associa a  $\gamma$  una poligonale “inscritta” costituita da tutti i segmenti di estremi  $\mathbf{r}(t_i)$  e  $\mathbf{r}(t_{i+1})$ . Possiamo usare questa poligonale per stimare per difetto la lunghezza della curva  $\gamma$ :

$$\ell(\mathcal{T}) = \sum_{i=0}^{n-1} \|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)\|.$$

La curva è *rettificabile* se la lunghezza di ogni sua poligonale definita dalla partizione  $\mathcal{T}$  è finita. In tal caso, la lunghezza di  $\gamma$  è definita come l'estremo superiore, rispetto all'insieme di tutte le possibili partizioni di  $[a, b]$ , della lunghezza della poligonale:

$$\ell(\gamma) \doteq \sum_{\mathcal{T} \in \Omega} \ell(\mathcal{T}) < +\infty.$$

**Teorema 1.1.1.** Se  $\gamma$  è regolare, allora è anche rettificabile e

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt.$$

A volte utilizzeremo la cosiddetta *forma polare*  $\rho = f(\theta)$  per indicare una curva nel piano. Questo significa che la curva è parametrizzata dalla funzione

$$\mathbf{r}(\theta) = (\rho(\theta) \cos(\theta), \rho(\theta) \sin(\theta)).$$

Per curve scritte in questo modo si ha che la norma della velocità si può esprimere in un modo piuttosto semplice:

$$\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \left\| \begin{bmatrix} \dot{\rho}(\theta) \cos(\theta) - \rho(\theta) \sin(\theta) \\ \dot{\rho}(\theta) \sin(\theta) + \rho(\theta) \cos(\theta) \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\dot{\rho}^2(\theta) + \rho^2(\theta)}.$$

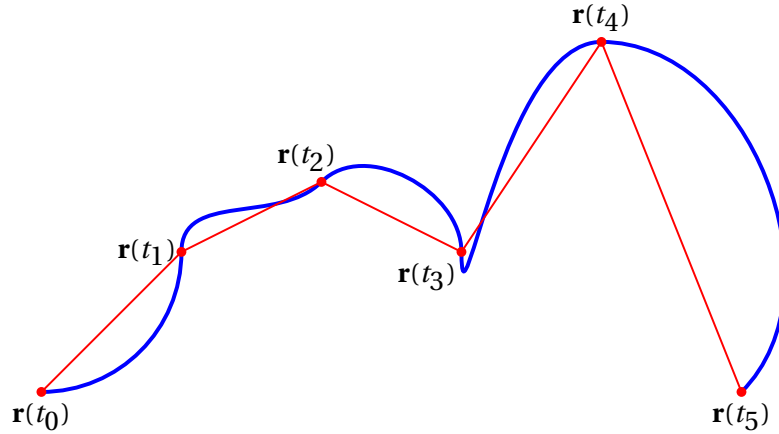


Figura 1.1: Esempio di rettificazione di una curva

Esercizio 1.1.1. Sia  $\gamma$  la curva parametrizzata da

$$\mathbf{r}(t) = \left( \frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2} \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

per  $a > 0$ . Se ne discuta continuità, semplicità e regolarità.

La curva è continua in quanto entrambe le componenti della parametrizzazione sono continue. Per verificarne la semplicità, notiamo che la seconda componente è strettamente crescente. Infatti

$$\frac{d}{dt} \frac{2at^3}{1+t^2} = \frac{2a}{(1+t^2)^2} (3t^2 + t^4)$$

è sempre maggiore o uguale a zero e si annulla solo in un punto. Ne segue che non possono esistere due distinti valori di  $t$  per cui la seconda componente abbia lo stesso valore. Quindi la curva è semplice.

Calcolando

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{2a}{(1+t^2)} (2t, 3t^2 + t^4)$$

si nota che si annulla solo in  $t = 0$ . Di conseguenza  $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$  è l'unico punto singolare, e la curva è regolare a tratti.

Esercizio 1.1.2. Si dimostri che la spirale logarimica parametrizzata, in forma polare, come

$$\rho(\theta) = ae^{b\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}_{>0}$$

è regolare e semplice.

Poiché  $\rho$  è una funzione strettamente crescente in  $\theta$ , la curva è semplice. La velocità della curva è

$$\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \sqrt{\dot{\rho}^2(\theta) + \rho^2(\theta)} = \sqrt{a^2 b^2 e^{2b\theta} + a^2 e^{2b\theta}} = ae^{b\theta} \sqrt{1 + b^2}$$

è sempre non nulla per  $a > 0$  e  $\gamma$  è regolare.

Esercizio 1.1.3. Si consideri la curva  $\gamma$  parametrizzata da

$$\mathbf{r}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) + \theta \sin(\theta) \\ \sin(\theta) - \theta \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

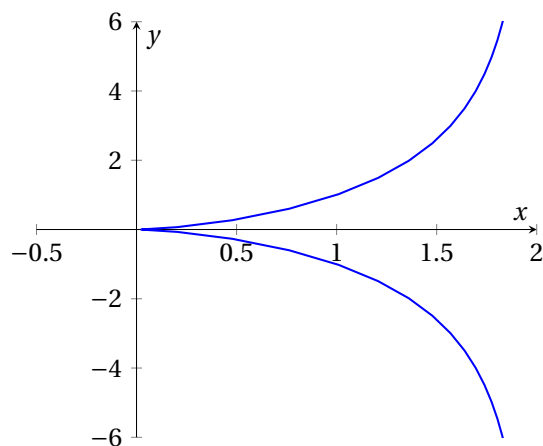


Figura 1.2: Curva dell'Esercizio 1.1.1, con  $a = 1$ .

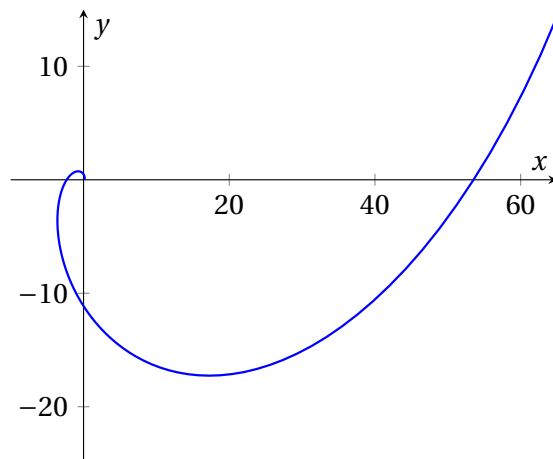


Figura 1.3: Curva dell'Esercizio 1.1.2 con  $a = 0.1, b = 1$ .

Discutere semplicità e regolarità della curva. Calcolare il versore tangente e la lunghezza della curva.

Calcoliamo la velocità

$$\dot{\mathbf{r}}(\theta) = (\theta \cos(\theta), \theta \sin(\theta))$$

e notiamo che si annulla in  $\theta = 0$ . Quindi la curva è regolare a tratti. La norma della velocità è

$$\|\dot{\mathbf{r}}(\theta)\| = |\theta|$$

per cui il versore tangente è

$$\hat{\mathbf{t}}(\operatorname{sgn}(\theta) \cos(\theta), \operatorname{sgn}(\theta) \sin(\theta)), \theta \neq 0.$$

Notiamo che  $\theta \sin(\theta) \geq 0$  e, in particolare, si annulla solo in  $\{-\pi, 0, \pi\}$ . Quindi la seconda componente di  $\dot{\mathbf{r}}(\theta)$  è una funzione iniettiva e la curva è quindi semplice.

Calcoliamo la lunghezza:

$$\ell(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt = \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \pi^2.$$

Esercizio 1.1.4. Si consideri la curva  $\gamma$  parametrizzata da

$$\mathbf{r}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) + \theta \sin(\theta) \\ \sin(\theta) - \theta \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

Discutere semplicità e regolarità della curva. Calcolare il versore tangente.

La curva è  $\mathcal{C}^1([0, 1])$  in quanto entrambe le componenti sono  $\mathcal{C}^1$ . Calcoliamo

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (t-1) \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ (3-t)e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Poiché  $(1-t)e^{-t} \geq 0$  e si annulla in punti singolari, la curva è semplice. Ad essere più precisi,  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  coincide col vettore nullo se e solo se  $t = 1$ . Ne segue che la curva è semplice in  $[0, 1)$ . Calcoliamo

$$\|\dot{\mathbf{r}}(t) = (1-t)e^{-t} \sqrt{1 + (3-t)^2} = (1-t) \sqrt{t^2 - 6t + 10} e^{-t}$$

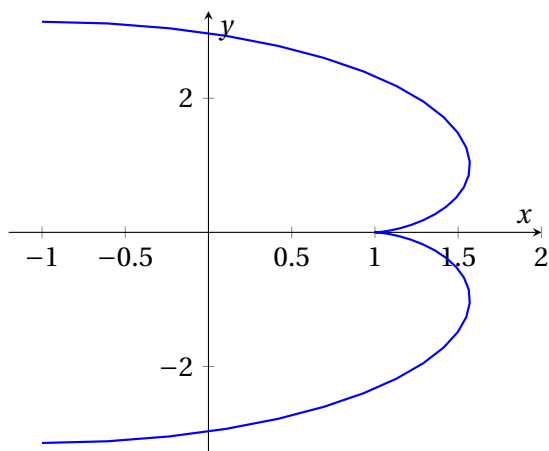


Figura 1.4: Curva dell'Esercizio 1.1.3.

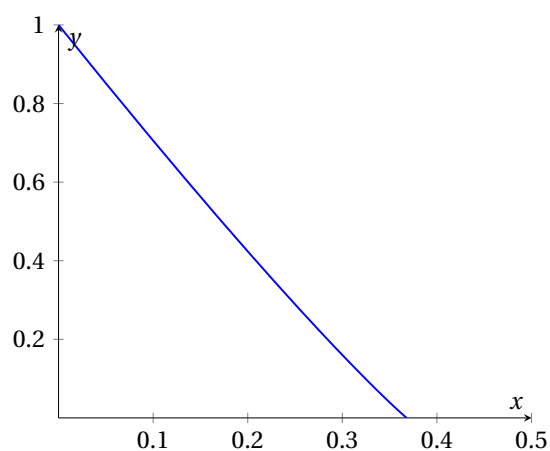


Figura 1.5: Curva dell'Esercizio 1.1.4.

da cui il versore tangente è

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 6t + 10}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 - t \end{bmatrix}.$$

Esercizio 1.1.5. Data la curva  $\gamma$  parametrizzata da

$$\mathbf{r}(t) = (t \cos(t), t \sin(t), t^2), \quad t \in [0, 2\pi],$$

si dica se è regolare o semplice. Si calcoli il versore tangente.

Poiché la terza componente è iniettiva, la curva è sicuramente semplice. La curva è  $\mathcal{C}^1([0, 2\pi])$ . Calcoliamo la derivata

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (\cos(t) - t \sin(t), \sin(t) + t \cos(t), 2t)$$

e la sua norma

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2 &= (\cos^2(t) + t^2 \sin^2(t) - 2t \cos(t) \sin(t)) + (\sin^2(t) + t^2 \cos^2(t) + 2t \cos(t) \sin(t)) + 4t^2 = 1 + 5t^2 \\ \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| &= \sqrt{1 + 5t^2} \end{aligned}$$

La velocità non si annulla mai e  $\gamma$  è quindi regolare.

Il versore tangente è

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 5t^2}} \begin{bmatrix} \cos(t) - t \sin(t) \\ \sin(t) + t \cos(t) \\ 2t \end{bmatrix}.$$

Esercizio 1.1.6. Data la curva espressa in curva polare

$$\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi]$$

si dica se è semplice o regolare, e se ne calcoli il versore tangente e la lunghezza.

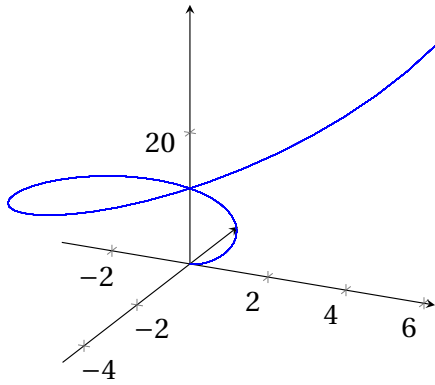


Figura 1.6: Curva dell'Esercizio 1.1.5.

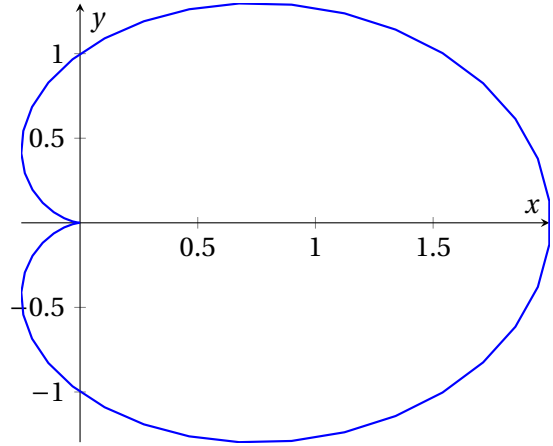


Figura 1.7: Curva dell'Esercizio 1.1.6.

Essendo espressa in forma polare su un singolo periodo di  $2\pi$  e poiché  $\rho(\theta) = 0$  se e solo se  $\theta = \pm\pi$ , si ha che la curva è chiusa e semplice. Inoltre, la curva è  $\mathcal{C}^1([-\pi, \pi])$ . Il vettore tangente è

$$\dot{\mathbf{r}}(\theta) = (-\sin(\theta)(1 + 2\cos(\theta)), \cos(\theta) + \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$$

la cui norma è

$$\sqrt{\dot{\rho}^2(\theta) + \rho^2(\theta)} = \sqrt{(-\sin(\theta))^2 + (1 + \cos(\theta))^2} = \sqrt{\sin^2(\theta) + 1 + \cos^2(\theta) + 2\cos(\theta)} = \sqrt{2(1 + \cos(\theta))}.$$

Il versore normale è quindi

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos(\theta))}} \begin{bmatrix} -\sin(\theta)(1 + 2\cos(\theta)) \\ \cos(\theta) + \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Calcoliamo ora la lunghezza dell'arco di curva:

$$\ell(\gamma) = \sqrt{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 + \cos(\theta)} d\theta.$$

Tramite l'identità  $1 + \cos(\theta) = 2\cos^2(\theta/2)$  l'integrale diventa (poiché  $\cos(\theta/2) \geq 0$  in  $[-\pi, \pi]$ )

$$\ell(\gamma) = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta/2) d\theta = 2 [2\sin(\theta/2)]_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} = 8.$$

Esercizio 1.1.7. Data la curva  $\gamma$  parametrizzata da

$$\mathbf{r}(t) = (t^2(1+t), t^2(1-t)), \quad t \in [-1, 1]$$

si dica se è semplice, regolare, e se ne calcoli il versore tangente e la lunghezza.

Per dimostrarne la semplicità, notiamo che la norma al quadrato di  $\mathbf{r}$  è una funzione pari:  $\|\mathbf{r}(t)\|^2 = t^4((1+t)^2 + (1-t)^2)$ . Inoltre, poiché la prima componente di  $\mathbf{r}$  è iniettiva in  $[0, 1]$ , mentre la seconda è iniettiva in  $[-1, 0]$ , ogni punto  $\mathbf{x}$  in cui la curva si autointerseca dovrebbe soddisfare  $\mathbf{r}(\tilde{t}) = \mathbf{r}(-\tilde{t}) = \mathbf{x}$ . Tuttavia, consideriamo la prima componente di  $\mathbf{r}(t)$ ,  $x(t)$ . Si ha che  $x(t) = x(-t)$  se e solo se  $(1+t) = (1-t)$ , ovvero  $t = 0$ . Quindi, l'unico punto in cui la curva potrebbe autointersecarsi è l'origine. Ma poiché  $\mathbf{r}(t) = (0, 0)$  se e solo se  $t = 0$ , allora la curva è semplice.

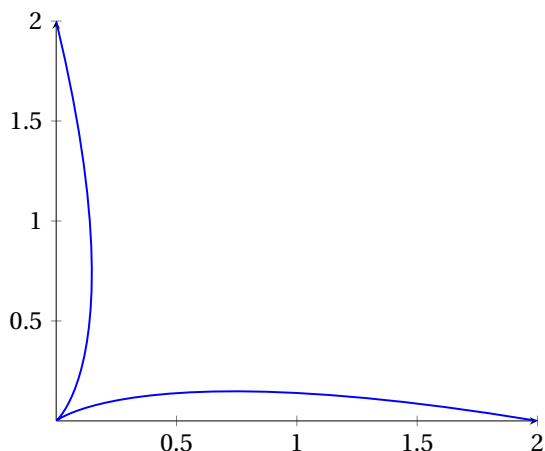


Figura 1.8: Curva dell'Esercizio 1.1.7.

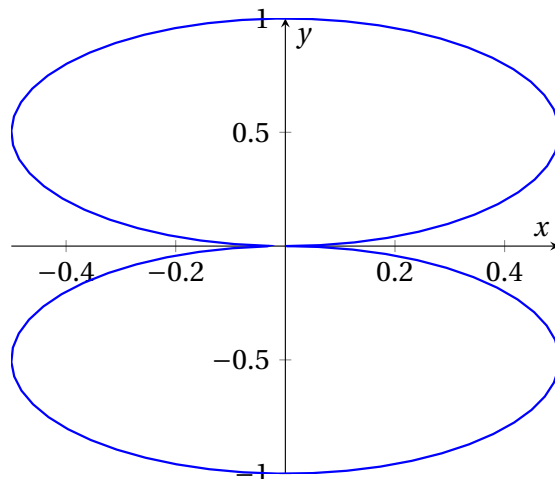


Figura 1.9: Curva dell'Esercizio 1.1.8.

La curva è  $\mathcal{C}^1$  in tutto il dominio. Calcoliamo

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = t(3t+2, -3t+2)$$

che si annulla sono in  $t = 0$ . Dunque, la curva è regolare a tratti. Calcoliamo

$$\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = |t|\sqrt{2(4+9t^2)}$$

da cui il versore tangente è

$$\hat{\mathbf{t}} = t \begin{bmatrix} 3t+2 \\ -3t+2 \end{bmatrix} \frac{1}{|t|\sqrt{2(4+9t^2)}} = \begin{bmatrix} 3t+2 \\ -3t+2 \end{bmatrix} \frac{\text{sgn}(t)}{\sqrt{2(4+9t^2)}}.$$

La lunghezza della curva è

$$\ell(\gamma) = \int_{-1}^1 |t|\sqrt{2(4+9t^2)} dt = 2\sqrt{2} \int_0^1 t\sqrt{4+9t^2} dt = 2\sqrt{2} \left[ \frac{2}{3 \cdot 18} (4+9t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2\sqrt{2}}{27} (13^{\frac{3}{2}} - 8)$$

Esercizio 1.1.8. Data la curva  $\gamma$  parametrizzata in forma polare

$$\rho(\theta) = |\sin(\theta)|, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

si dica se è semplice, regolare, e se ne calcoli il versore tangente e la lunghezza.

La curva non è semplice in quanto  $\rho(\theta) = 0$  per tre valori distinti:  $0, \pi, 2\theta$ . Non è nemmeno regolare in quanto la componente  $x(\theta) = |\sin(\theta)| \cos(\theta)$  presenta un punto angoloso in  $\theta = \pi$  e non è quindi  $\mathcal{C}^1$ . Calcoliamo

$$\dot{\mathbf{r}}(\theta) = \begin{bmatrix} \text{sgn}(\sin(\theta)) \cos(\theta) - |\sin(\theta)| \sin(\theta) \\ \text{sgn}(\sin(\theta)) \sin(\theta) + |\sin(\theta)| \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

e

$$\|\dot{\mathbf{r}}(\theta)\| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1.$$

Ne segue che  $\ell(\gamma) = 2\pi$  e che  $\dot{\mathbf{r}}(\theta)$  definisce il versore tangente.



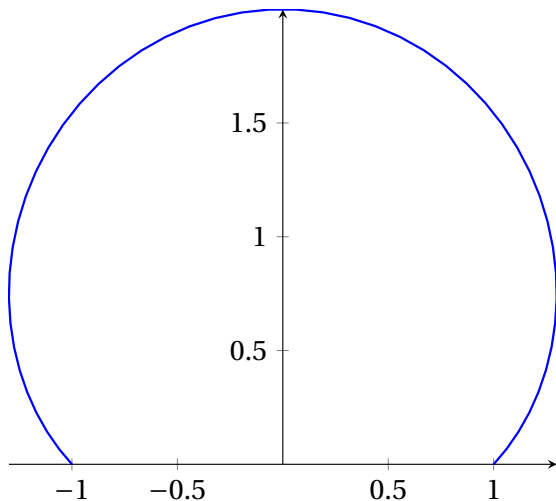


Figura 1.10: Curva dell'Esercizio 1.1.9.

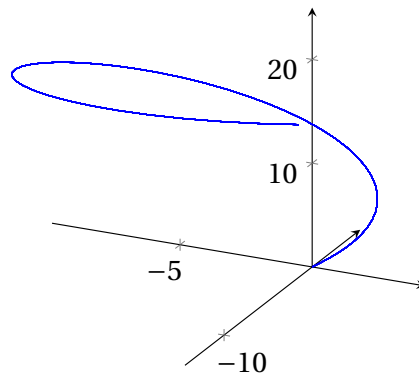


Figura 1.11: Curva dell'Esercizio 1.1.10.

Esercizio 1.1.9. Data la curva  $\gamma$  parametrizzata in forma polare

$$\rho(\theta) = 1 + \sin(\theta), \quad \theta \in [0, \pi]$$

si dica se è semplice, regolare, e se ne calcoli il versore tangente e la lunghezza.

Poiché  $\rho(\theta) > 0$ , la curva è semplice. La norma della velocità è  $\sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2} = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$  e la curva è quindi regolare e la lunghezza è pari a  $\pi$ . Il versore tangente è

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{r}'(\theta) = (\cos^2(\theta) - (1 + \sin(\theta))\sin(\theta), \cos^2(\theta) + (1 + \sin(\theta))\cos(\theta)).$$

Esercizio 1.1.10. Data la curva  $\gamma$  parametrizzata come

$$\mathbf{r}(t) = (3t \cos(t), 3t \sin(t), 4t), \quad \theta \in [0, 5]$$

si dica se è semplice, regolare, e se ne calcoli il versore tangente.

La curva è sicuramente semplice in quanto la terza componente è strettamente crescente. La curva è banalmente  $\mathcal{C}^1$ . Calcoliamo

$$\mathbf{r}'(t) = (3 \cos(t) - 3t \sin(t), 3 \sin(t) + 3t \cos(t), 4)$$

da cui  $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{25 + 9t^2}$ . Poiché la velocità è sempre positiva, la curva è regolare. Il versore tangente è

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{1}{\sqrt{25 + 9t^2}} (3 \cos(t) - 3t \sin(t), 3 \sin(t) + 3t \cos(t), 4).$$

## Capitolo 2

# Regolarità di funzioni in $\mathbb{R}^n$

### 2.1 Continuità, derivabilità, e differenziabilità

**Definizione 2.1.1** (Continuità). Una funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *continua* in un punto  $\mathbf{x}_0 \in A$  se

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

La funzione  $f$  si dice inoltre continua in  $A$  se è continua in ogni punto di  $A$ .

**Definizione 2.1.2** (Derivabilità). Una funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *derivabile* in un punto  $\mathbf{x}_0 \in A$  se in quel punto esistono finite le derivate parziali (dove, nella seguente equazione,  $\mathbf{e}_i$  indica l' $i$ -simo vettore della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ )

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \doteq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

La funzione  $f$  si dice inoltre derivabile in  $A$  se è derivabile in ogni punto di  $A$ .

Se  $f$  è derivabile, si chiama *gradiente* il vettore

$$\nabla f = [\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f, \dots, \partial_{x_n} f]^\top.$$

**Definizione 2.1.3** (Differenziabilità). Una funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *differenziabile* in un punto  $\mathbf{x}_0 \in A$  se è derivabile in quel punto e

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rangle|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0.$$

La funzione  $f$  si dice inoltre differenziabile in  $A$  se è continua in ogni punto di  $A$ .

**Proposizione 2.1.1.** Se una funzione  $f$  è derivabile in un intorno aperto  $A$  di  $\mathbf{x}_0$  e le derivate parziali di  $f$  esistono in  $A$  e sono continue in  $\mathbf{x}_0$  allora  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ .

Prima di vedere alcuni esercizi, ricordiamo che per calcolare un limite in  $\mathbb{R}^n$  è necessario trovare una *maggiorante radiale* e non si può semplicemente iterare il limite.

*Esempio 2.1.1.* Data

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2}$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^4} = +\infty,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{y^2} = 0.$$

Anche nel caso in cui i diversi limiti iterati assumessero lo stesso valore, non significa che il limite esista ed abbia effettivamente quel valore.

*Esempio 2.1.2.* Data

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0.$$

Tuttavia, se provassimo a calcolare il limite direzionale lungo la retta  $y = mx$  si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

ed il limite dipende quindi dal valore di  $m$ .

Inoltre, anche nel caso in cui esistano coincidenti i limiti lungo ogni retta non basta ad affermare che il limite esista ed abbia quel valore

*Esempio 2.1.3.* Per la funzione  $f(x, y) = x^y$ ,  $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$  il limite verso l'origine lungo ogni retta  $y = mx$  è pari a 1:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{mx} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp(\log(x^{mx})) = \lim_{x \rightarrow 0} \exp(m \log(x^x)) = 1$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$ . Tuttavia, sarebbe sbagliato concludere che il limite verso l'origine di  $x^y$  sia pari ad 1. Si consideri ad esempio, per  $k > 0$  il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \log_k(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\log_k(x)} = k.$$

Esiste quindi una famiglia di curve lungo cui la funzione può assumere qualsiasi valore positivo. Se ne conclude che il limite non esiste.

Esercizio 2.1.1. Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \log(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$

Iniziamo ricordando che

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 + z}{z} = 1$$

e notando che

$$\frac{y \log(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = y g(x, y), \quad g(x, y) = \frac{\log(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

Passando in coordinate polari

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\rho \sin \theta \log(1 + \rho^2)|}{\rho^2} \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho |\sin \theta| \frac{\log(1 + \rho^2)}{\rho^2} \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \frac{\log(1 + \rho^2)}{\rho^2}$$

Poiché la frazione tende a 1 per  $\rho \rightarrow 0$ , abbiamo che il limite è nullo.

Esercizio 2.1.2. Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{-y} \cos x + \frac{\exp(-(x^2 + y^2)^{-1})}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Per il primo termine possiamo calcolare immediatamente il limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{-y} \cos x = 1.$$

Per il secondo termine, invece abbiamo che in coordinate polari

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\exp(-\rho^{-2})}{\rho^2} = 0.$$

Abbiamo quindi che il limite cercato è 1.

Esercizio 2.1.3. Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \log(1 + xy)}{x^2 \sin^2(x) + 2y^2}.$$

Calcoliamo il limite lungo due diverse restrizioni  $\gamma_1(t) = (t, t)$  e  $\gamma_2(t) = (t, t^2)$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \log(1 + t^2)}{t^2 \sin^2(t) + 2t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{t^4 + 2t^2} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \log(1 + t^3)}{t^2 \sin^2(t) + 2t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{3t^4} = \frac{1}{3}.$$

Poiché i due limiti differiscono, non può esistere il limite “in senso classico”.

Esercizio 2.1.4. Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{\log(x^2 + y^2)} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

se ne discuta continuità, derivabilità, e differenziabilità nell'origine.

Iniziando con la continuità, esprimiamo  $|f|$  in coordinate polari ( $x = \rho \cos(\theta)$ ,  $y = \rho \sin(\theta)$ ):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\rho \cos(\theta)}{\log(\rho^2)} \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho |\cos(\theta)|}{|\log(\rho^2)|} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho |\cos(\theta)|}{2|\log(\rho)|}.$$

Poiché  $|\cos(\theta)| \leq 1$  per ogni  $(\theta)$ , abbiamo

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho |\cos(\theta)|}{2|\log(\rho)|} \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho}{2|\log(\rho)|} = 0.$$

Avendo trovato una maggiorante radiale che tende a 0, abbiamo dimostrato che il limite della funzione è nullo, e quindi  $f$  è continua.

Passiamo ora alla derivabilità. Poiché siamo interessati solo all'origine, non vale la pena calcolare la derivata parziale e valutarla nell'origine. Invece, è più rapido calcolare le derivate parziali come limite del rapporto incrementale:

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\log(x^2)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\log(x^2)} = 0.$$

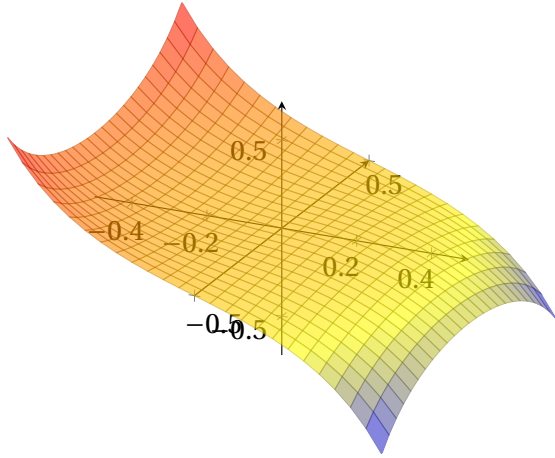


Figura 2.1: Funzione dell'Esercizio 2.1.4.

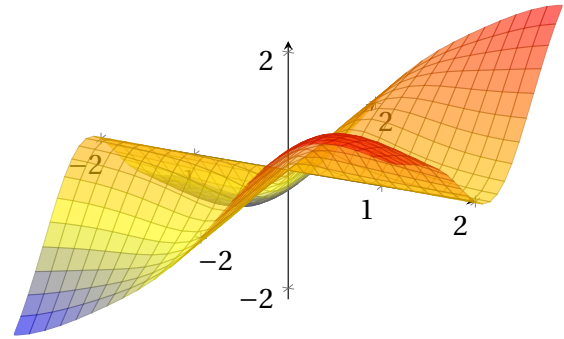


Figura 2.2: Funzione dell'Esercizio 2.1.5.

Ancor più semplicemente,  $f(0, y) \equiv 0$  da cui  $\partial_y f(0, 0) = 0$ . La funzione è quindi derivabile nell'origine ed il gradiente in quel punto è nullo.

Studiamo infine la differenziabilità. Notiamo subito che il limite

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0}) - \langle \nabla f(\mathbf{0}), (\mathbf{x} - \mathbf{0}) \rangle|}{\|\mathbf{x}\|}$$

diventa, nel nostro caso

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\|x - y\|}$$

in quanto  $f(0, 0) = 0$  e  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ . Passando in coordinate polari e cercando una maggiorante radiale

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\|x - y\|} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\frac{\rho |\cos(\theta)|}{|\log(\rho^2)|}}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\cos(\theta)|}{\log(\rho^2)} \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\rho^2)} = 0$$

si dimostra che il limite è nullo e la funzione è quindi differenziabile.

Esercizio 2.1.5. Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2 - x \sin(xy)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

se se discuta continuità, derivabilità, e differenziabilità nell'origine.

Iniziando con la continuità, passiamo in coordinate polari

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y)| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{2\rho^3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - \rho \cos(\theta) \sin(\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta))}{\rho^2} \right|$$

ed utilizziamo la disuguaglianza triangolare ( $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ ) per ottenere

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y)| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{2\rho^3 \cos(\theta) \sin^2(\theta)}{\rho^2} \right| + \left| \frac{\rho \cos(\theta) \sin(\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta))}{\rho^2} \right|.$$

Studiamo separatamente i due termini:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{2\rho^3 \cos(\theta) \sin^2(\theta)}{\rho^2} \right| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho^3}{\rho} = 0$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\rho \cos(\theta) \sin(\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta))}{\rho^2} \right| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3}{\rho^2} = 0$$

dove, nel secondo limite, abbiamo utilizzato la maggiorazione  $|\sin(z)| \leq |z|, \forall z \in \mathbb{R}$  per avere <sup>1</sup>

$$|\sin(\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta))| \leq |\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta)| \leq \rho^2.$$

Il limite è quindi nullo e la funzione è continua.

Per la derivabilità, notiamo che  $f(x, 0) \equiv 0$  e  $f(0, y) \equiv 0$ . Di conseguenza, le derivate parziali nell'origine sono entrambe nulle e  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ .

Passiamo infine alla differenziabilità. Poiché  $f(0, 0)$  e  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ , si ha che  $f$  è differenziabile nell'origine se e solo se  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} = 0$ . Scriviamo il limite in coordinate polari

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|2\rho^3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - \rho \cos(\theta) \sin(\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta))|}{\rho^3}.$$

Facendo le stesse maggiorazioni di prima, otteniamo che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|2\rho^3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - \rho \cos(\theta) \sin(\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta))|}{\rho^3} \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| 2\frac{\rho^3}{\rho^3} - \frac{\rho^3}{\rho^3} \right| = 1.$$

Non siamo quindi riusciti a trovare una maggiorante radiale, ma questo *non basta a concludere che il limite non sia nullo*: una maggiorante radiale potrebbe comunque esistere.

Se il limite esiste nullo, allora il limite lungo una qualsiasi curva  $\gamma$  dovrebbe risultare nullo. Consideriamo quindi la curva  $\gamma(t) = (t, t)$  e calcoliamo

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t)}{\|\gamma(t)\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^3 - t \sin(t^2)}{2t^2 \sqrt{2}t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^3 - t t^2}{2\sqrt{2}t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{2\sqrt{2}t^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ne concludiamo che, se il limite esistesse, dovrebbe essere pari a  $1/2\sqrt{2} \neq 0$ . Di conseguenza,  $f$  non è differenziabile.

Esercizio 2.1.6. Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

se se discuta continuità, derivabilità, e differenziabilità nell'origine.

Calcolando il limite passando in coordinate polari si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y)| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\rho^3 \cos^3(\theta) + 2\rho^4 \sin^4(\theta)|}{\rho^2} \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 + 2\rho^4}{\rho^2} = 0$$

e la funzione è quindi continua.

<sup>1</sup> Si noti che con la maggiorazione "più debole"  $|\sin(z)| \leq 1$  non avremmo trovato una maggiorante radiale tendente a zero.

Calcoliamo ora le derivate parziali in  $(0, 0)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} = 1, \\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y^4}{y^3} = 0.\end{aligned}$$

La funzione  $f$  è quindi derivabile nell'origine e  $\nabla f(0,0) = (1, 0)$ .

Per studiare la differenziabilità iniziamo calcolando

$$\langle \nabla f(0,0), (x, y) \rangle = \langle (1, 0), (x, y) \rangle = x,$$

da cui

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle|}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| \frac{x^3+2y^4}{x^2+y^2} - x \right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|2y^4 - xy^2|}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Separando i due termini, abbiamo (dove abbiamo tolto i moduli dai termini già positivi in quanto potenze pari di un numero reale)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|2y^4 - xy^2|}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy^2|}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Studiamo i due limiti separatamente. Il primo risulta, dopo esser passati in coordinate polari,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho^4 \cos^4(\theta)}{\rho^3} \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho^4}{\rho^3} = 0, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy^2|}{(x^2+y^2)^{3/2}} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 |\cos(\theta) \sin^2(\theta)|}{\rho^3} \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3}{\rho^3} \leq 1.\end{aligned}$$

Non abbiamo quindi trovato una maggiorante radiale. Analogamente a quanto fatto per l'esercizio precedente, proviamo a calcolare l'ultimo limite lungo la curva  $\gamma(t) = (t, t)$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t^3|}{t^3} = 1.$$

Di conseguenza, se il limite esiste è non nullo. Ne segue che la funzione non è differenziabile.

Esercizio 2.1.7. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2+y^2) \sin(x^2+y^2) + xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

se ne discuta continuità, derivabilità, e differenziabilità nell'origine.

Calcoliamo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y)| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\rho^2 \sin(\rho^2) + \rho^3 \cos(\theta) \sin^2(\theta)|}{\rho} \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^4 + \rho^3}{\rho} = 0,$$

da cui si conclude che la funzione è continua.

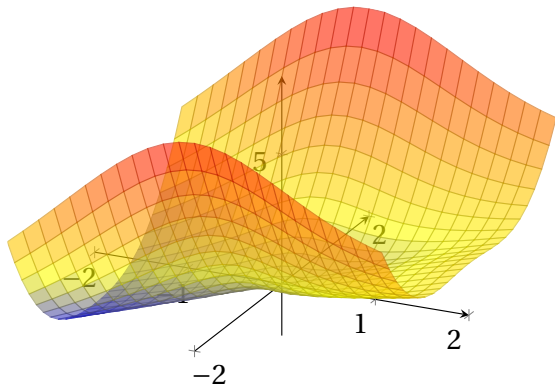


Figura 2.3: Funzione dell'Esercizio 2.1.6.

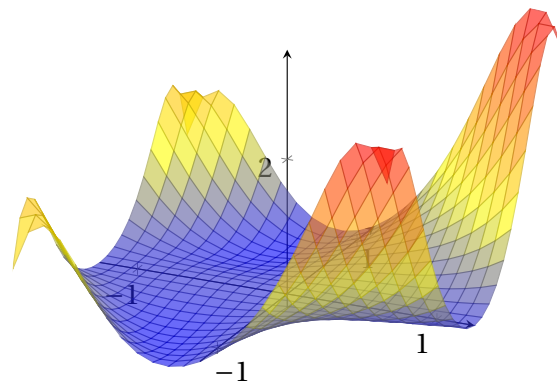


Figura 2.4: Funzione dell'Esercizio 2.1.7.

Calcoliamo le derivate parziali

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(x^2)}{|x|x} = 0, \\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 \sin(y^2)}{|y|y} = 0.\end{aligned}$$

La funzione  $f$  è quindi derivabile in  $(0,0)$  ed il gradiente è nullo.

Per verificare la differenziabilità iniziamo calcolando la quantità

$$\frac{|f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle|}{\|(x,y)\|} = \frac{|(x^2 + y^2) \sin(x^2 + y^2) + xy^2|}{x^2 + y^2}$$

che, in coordinate polari, diventa

$$\frac{|\rho^2 \sin(\rho^2) + \rho^3 \cos(\theta) \sin^2(\theta)|}{\rho^2} \leq \frac{\rho^4 + \rho^3}{\rho^2}$$

Abbiamo quindi trovato una maggiorante radiale che tende a 0 per  $\rho \rightarrow 0$ . Ne segue che la funzione è differenziabile.

Esercizio 2.1.8. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x \log(x^2 + y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

se ne discuta continuità, derivabilità, e differenziabilità nell'origine.

Scrivendo  $f$  in coordinate polari, si nota subito che è continua:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |\rho \cos(\theta) \log(\rho^2)| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\rho |\log(\rho)| \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0.$$

Al contrario, notiamo che  $f(x,0) = 2x \log|x|$  che non è derivabile in  $x = 0$ . Ne segue che  $f$  non è derivabile e, quindi, nemmeno differenziabile.



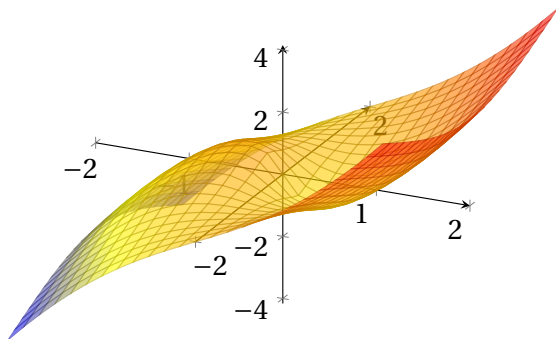


Figura 2.5: Funzione dell'Esercizio 2.1.8.

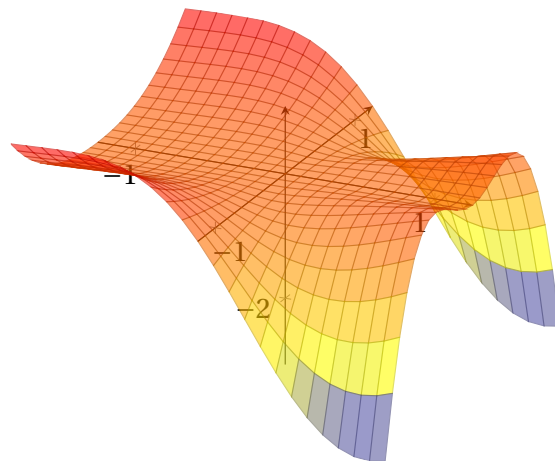


Figura 2.6: Funzione dell'Esercizio 2.1.9.

Esercizio 2.1.9. Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{\sin(x)} \frac{x^2 y^2 - 2xy^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

se se discuta continuità, derivabilità, e differenziabilità nell'origine.

Per  $x \rightarrow 0$  abbiamo che  $e^{\sin(x)} \rightarrow 1$ . La funzione è quindi continua se e solo se la frazione tende a zero per  $(x, y)$  che tende all'origine. Scrivendo il modulo della frazione in forma polare abbiamo

$$\left| \frac{\rho^4 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) - 2\rho^5 \cos(\theta) \sin^4(\theta)}{\rho^2} \right| \leq \frac{|\rho^4 - 2\rho^5|}{\rho^2} \leq \frac{\rho^4}{\rho^2} + 2\frac{\rho^5}{\rho^2} \leq \rho^2 + 2\rho^3.$$

Avendo trovato una maggiorante radiale che tende a zero per  $\rho \rightarrow 0$ , abbiamo dimostrato che il limite è nullo e la funzione è continua.

Notando che  $f(x, 0) = f(0, y) = 0$  per ogni  $x, y \in \mathbb{R}$  si ha che  $f$  è derivabile nell'origine e il gradiente è il vettore nullo.

Poiché il gradiente è nullo e  $f(0, 0) = 0$  abbiamo che  $f$  è differenziabile se e solo se

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0.$$

Calcolando il limite a sinistra passando in coordinate polari abbiamo

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\rho^4 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) - 2\rho^5 \cos(\theta) \sin^4(\theta)}{\rho^3} \right| \lim_{\rho \rightarrow 0} \leq \frac{|\rho^4 - 2\rho^5|}{\rho^3} \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \leq \frac{\rho^4}{\rho^3} + 2\frac{\rho^5}{\rho^3} \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho + 2\rho^2 = 0,$$

dimostrando la differenziabilità di  $f$ .

Esercizio 2.1.10. Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

se se discuta continuità, derivabilità, e differenziabilità nell'origine.

Iniziamo dimostrando la continuità. Passando in coordinate polari, calcoliamo il limite  $f$  per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\rho^3 \cos(\theta) \sin^2(\theta)}{\rho^2} \right| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho = 0.$$

Calcoliamo le derivate parziali nell'origine:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

La funzione  $f$  è quindi derivabile in  $(0, 0)$  ed il gradiente è il vettore nullo.

Per verificare la differenziabilità, consideriamo il limite

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left| \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \langle \nabla f(0, 0), (x, y) \rangle}{\|(x, y)\|} \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\rho} \frac{\rho^3 \cos(\theta) \sin^2(\theta)}{\rho^2} \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0} |\cos(\theta) \sin^2(\theta)|.$$

per cui non abbiamo trovato una maggiorante radiale.

Calcoliamo la derivata direzionale di direzione  $(1, 1)$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3}{2t^2}}{t} = \frac{1}{2}.$$

Essendo questo limite non nullo, possiamo concludere che  $f$  non è differenziabile in  $(0, 0)$ .

Esercizio 2.1.11. Si discuta continuità, derivabilità, e differenziabilità nell'origine della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Iniziando con la continuità, calcoliamo il limite all'origine. Passando in coordinate polari,

$$\begin{aligned} |f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))| &= \left| \frac{\rho^3 (\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta))}{\rho} \right| \\ &= \rho^2 |\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta)| \\ &\leq \rho^2 (|\cos^3(\theta)| + |\sin^3(\theta)|) \\ &\leq \rho^2 \end{aligned}$$

Avendo trovato una maggiorante radiale che tende a zero, abbiamo che il limite è nullo e la funzione è continua.

Calcoliamo il gradiente nell'origine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)|_{(x, y) = (0, 0)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{|x|}}{x} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)|_{(x, y) = (0, 0)} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{y^3}{|y|}}{y} = 0. \end{aligned}$$

I limiti esistono. Quindi, la funzione è derivabile nell'origine e il gradiente coincide col vettore nullo.

Per verificarne la differenziabilità, calcoliamo

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left| \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \langle \nabla f(0, 0), (x, y) \rangle}{\|(x, y)\|} \right| = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right|.$$

Passando in coordinate polari,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\rho^3 (\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta))}{\rho^2} \right| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3}{\rho^2} |\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta)| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho^3}{\rho^2} = 0.$$

Poiché il limite è nullo, la funzione è differenziabile.

Esercizio 2.1.12. Data la funzione  $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{|1 - \cos(xy)|^\alpha}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

se ne discuta continuità, derivabilità, e differenziabilità in  $(0, 0)$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Per verificare la continuità, calcoliamo il limite verso l'origine. Ricordando che per  $z \sim 0$ , si ha  $1 - \cos(z) \sim z^2/2$  abbiamo la seguente identità:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} |f_\alpha(x, y)| = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left| \frac{\left| \frac{(xy)^2}{2} \right|^\alpha}{x^2 + y^2} \right| = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1}{2^\alpha} \frac{|xy|^{2\alpha}}{x^2 + y^2}.$$

Passando in coordinate polari, questo limite diventa

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2^\alpha} \frac{|\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta)|^{2\alpha}}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{4\alpha-2} |\cos(\theta) \sin(\theta)|^{2\alpha} \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{4\alpha-2}.$$

Abbiamo trovato una maggiorante radiale che tende a zero per  $4\alpha - 2 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 1/2$ . Ciò significa che  $f$  è continua se  $\alpha > 1/2$ , ma *non basta ad affermare che sia discontinua altrimenti* (potremmo non esser stati abbastanza bravi nel trovare una maggiorante radiale).

Calcoliamo il limite di  $f_\alpha$  lungo la curva  $(t, t)$  per  $t \rightarrow 0$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_\alpha(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|1 - \cos(t^2)|^\alpha}{2t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{4\alpha}}{2^\alpha 2t^2}$$

Questo limite tende a infinito se  $\alpha < 1/2$ . Per  $\alpha = 1/2$ , invece, il limite vale  $(2\sqrt{2})^{-1} \neq 0$ . Si conclude che  $f_\alpha$  è continua nell'origine se e solo se  $\alpha > 1/2$ .

Calcoliamo le derivate parziali in  $(0, 0)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(x, y)|_{(x, y) = (0, 0)} &= \lim_{x \rightarrow 0} (x \rightarrow 0) \frac{f_\alpha(x, 0) - f_\alpha(0, 0)}{x} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} f_\alpha(x, y)|_{(x, y) = (0, 0)} &= \lim_{y \rightarrow 0} (y \rightarrow 0) \frac{f_\alpha(0, y) - f_\alpha(0, 0)}{y} = 0. \end{aligned}$$

Questi limiti seguono dal fatto che  $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ . Segue che  $f_\alpha$  è derivabile nell'origine per ogni  $\alpha > 1/2$  e il gradiente coincide con il vettore nullo.

Per determinare la differenziabilità, calcoliamo il limite

$$I_\alpha = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f_\alpha(x, y) - f_\alpha(0, 0) - \langle \nabla f(0, 0), (x, y) \rangle}{\|(x, y)\|} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f_\alpha(x, y)}{\|(x, y)\|} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|1 - \cos(xy)|^\alpha}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Per lo stesso limite notevole considerato per la continuità, abbiamo

$$I_\alpha = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1}{2^\alpha} \frac{|xy|^{2\alpha}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

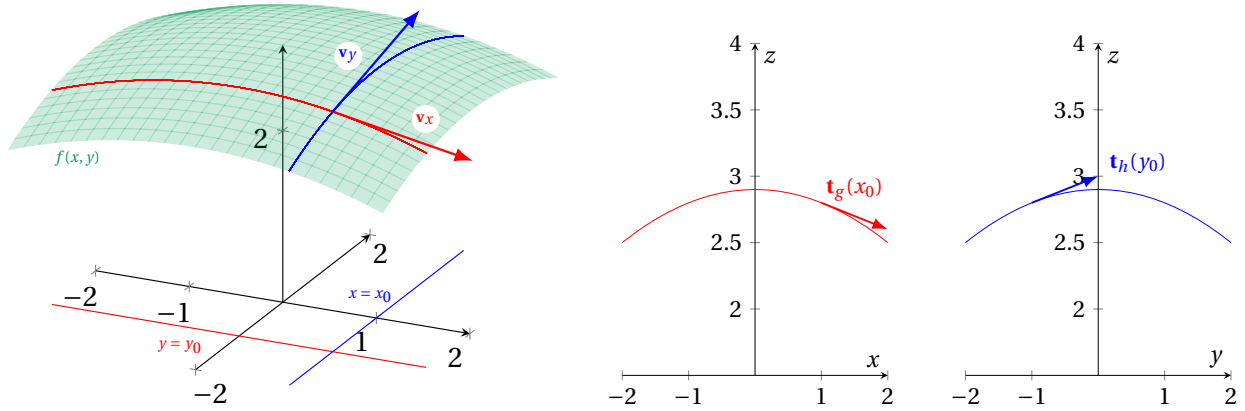


Figura 2.7: Rappresentazione schematica del ragionamento per definire piano tangente e versore normale.

Passando in coordinate polari,

$$I_\alpha = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2^\alpha} \frac{\rho^{4\alpha} |\cos(\theta) + \sin(\theta)|^\alpha}{\rho^3} \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2^\alpha} \rho^{4\alpha-3}.$$

Questo limite sarà nullo per  $\alpha > 3/4$ . Come prima, questo non basta ad affermare che la funzione non sia derivabile per  $\alpha \leq 3/4$ .

Come prima, calcoliamo il limite lungo una particolare curva, la retta  $y = x$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f_\alpha(x, x)}{\|(x, x)\|} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2^\alpha} \frac{x^{4\alpha}}{2^{\frac{3}{2}} x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2^\alpha 2^{\frac{3}{2}}} x^{4\alpha-3}.$$

Per  $\alpha < 3/4$ , il limite tende a infinito, mentre per  $\alpha = 3/4$  il limite assume un valore non nullo. Si conclude che  $f_\alpha$  è derivabile se e solo se  $\alpha > 3/4$ .

## 2.2 Piano tangente e versore normale

Data una funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto, immaginiamo di voler determinare il piano tangente e il versore normale alla superficie  $\Sigma = \{(x, y, z) : (x, y) \in A, z = f(x, y)\}$  in un punto  $(x_0, y_0) \in A$ . Con riferimento alla Figura 2.7, possiamo considerare le restrizioni di  $f$  alle rette  $x = x_0$  e  $y = y_0$ . Ognuna di queste definisce una funzione da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ :

$$g(x) \doteq f(x, y_0),$$

$$h(y) \doteq f(x_0, y).$$

Per ognuna di queste, possiamo considerare un vettore tangente:

$$\mathbf{t}_g(x_0) = \left( 1, \frac{d}{dx} g(x) \Big|_{x=x_0} \right), \quad \mathbf{t}_h(y_0) = \left( 1, \frac{d}{dy} h(y) \Big|_{y=y_0} \right).$$

Riportati in  $\mathbb{R}^3$ , possiamo considerare i vettori tangenti a  $f$  in  $x_0, y_0$ :

$$\mathbf{v}_x(x_0, y_0) = \left( 1, 0, \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \right), \quad \mathbf{v}_y(x_0, y_0) = \left( 0, 1, \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \right)$$

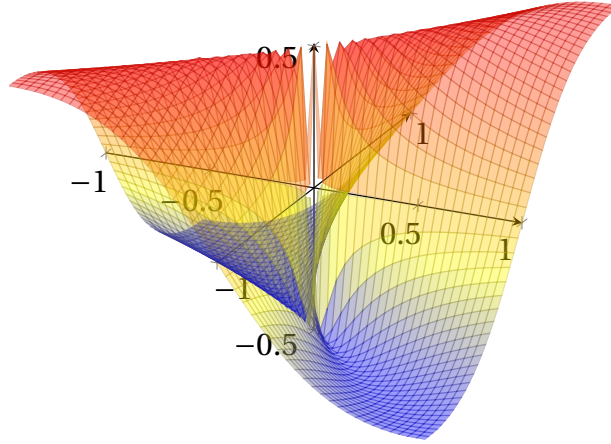


Figura 2.8: La funzione dell'Esempio 2.2.1.

Il *piano tangente* a  $f$  in  $(x_0, y_0)$  è il piano generato dai vettori  $\mathbf{v}_x(x_0, y_0)$ ,  $\mathbf{v}_y(x_0, y_0)$  ed ha equazione

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) (y - y_0),$$

mentre il vettore tangente a  $f$  in  $(x_0, y_0)$  è il prodotto vettoriale tra  $\mathbf{v}_x(x_0, y_0)$  e  $\mathbf{v}_y(x_0, y_0)$ :

$$\mathbf{n}(x_0, y_0) = \mathbf{v}_x(x_0, y_0) \times \mathbf{v}_y(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f(x_0, y_0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f(x_0, y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_x f(x_0, y_0) \\ -\partial_y f(x_0, y_0) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Purtroppo però, la derivabilità di  $f$  non implica la continuità, né l'esistenza del piano tangente. È necessario che la funzione  $f$  sia differenziabile.

Più in generale, si può estendere il concetto di piano tangente a una superficie ad uno spazio tangente a una generica varietà.

**Definizione 2.2.1.** Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto, e sia  $\mathbf{x}_0 \in A$  tale che  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ . Si dice *iperpiano tangente* al grafico di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  l'iperpiano di equazione

$$z = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

**Definizione 2.2.2.** Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto, e sia  $\mathbf{x}_0 \in A$  tale che  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ . Si dice *iperpiano tangente* al grafico di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  l'iperpiano di equazione

$$z = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

*Esempio 2.2.1.* La funzione

$$\begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è tale per cui  $f(t, 0) = f(0, t) = 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Di conseguenza, anche le derivate parziali sono nulle. Al contrario, per  $t \neq 0$ ,  $f(t, t) = 1/2$  e  $f(t, -t) = -1/2$ . Quindi  $f$  non è nemmeno continua e non si può definire il piano tangente.

Esercizio 2.2.1. Calcolare il vettore tangente alla superficie parametrizzata da

$$f(x, y) = x^3 - y^3$$

nel punto  $(x, y) = (0, 1)$ .

La funzione  $f$  è differenziabile in tutto  $\mathbb{R}^2$  in quanto polinomio. Calcoliamo le derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 3x^2, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -3y^2,$$

ottenendo il piano tangente in  $(0, 1)$

$$\begin{aligned} z &= f(0, 1) + \langle \nabla f(0, 1), (x - 0, y - 1) \rangle \\ &= -1 + \langle (0, -3), (x, y - 1) \rangle \\ &= -3y + 2 \end{aligned}$$

Il vettore normale in  $(0, 1)$  è

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Normalizzandolo, otteniamo il versore normale

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2.2.2. Calcolare il vettore tangente alla superficie parametrizzata da

$$f(x, y) = x^y + y^x$$

nel punto  $(x, y) = (1, 1)$ .

Notiamo che  $f$  è continua in  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ . Calcoliamo le derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = yx^{y-1} + \log(y)y^x, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \log(x)x^y + xy^{x-1}.$$

Poiché il gradiente  $\nabla f$  esiste continuo in  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ , allora  $f$  è differenziabile nello stesso insieme. Il piano tangente richiesto è

$$z = f(1, 1) + \langle (1, 1), (x - 1, y - 1) \rangle = x + y$$

mentre il vettore normale è

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da cui il versore normale è

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2.2.3. Calcolare il vettore tangente alla superficie parametrizzata da

$$f(x, y) = x^y \sin(x \log(y))$$

nel punto  $(x, y) = (1, 1)$ .

La funzione è continua in  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ . Calcoliamo le derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = y x^{y-1} + \cos(x \log(y)) \log(y), \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \log(x) x^y + \cos(x \log(y)) \frac{x}{y}.$$

Il gradiente esiste continuo in  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$  ed è quindi differenziabile nello stesso insieme. Il piano tangente è dato da

$$z = f(1, 1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix} \right\rangle = x + y - 1.$$

Il vettore (e versore) normale è

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

## 2.3 Esercizi extra

Esercizio extra 2.1. Data la funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{|\sin(xy)|^\alpha}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

- se ne discuta continuità, derivabilità, e differenziabilità in  $\mathbb{R}^2$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,
- per  $\alpha = 2$ , se ne scriva l'equazione del piano tangente e del versore normale in  $(1, \pi)$ .

Esercizio extra 2.2. Si determini per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|\sin(xy) - xy|^\alpha}{(x^2 + y^2)^3} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è continua nell'origine

Esercizio extra 2.3. Si determini per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|y|^\alpha}{x} \exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è continua nell'origine

Esercizio extra 2.4. Si determini per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{N}$  la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|^{\frac{1}{\alpha}}}{x^2 + y^2 + |x|} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è continua nell'origine

## Capitolo 3

# Ottimizzazione libera e vincolata

### 3.1 Studio dei punti critici liberi: il test dell'Hessiana

**Teorema 3.1.1.** Siano  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^2(A)$  con  $A$  aperto e  $\mathbf{x}_0 \in A$  un punto critico per  $f$  (i.e.  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ ). Sia  $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$  la matrice Hessiana di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ :  $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)|_{i,j} = \partial_{x_i, x_j}^2 f(\mathbf{x}_0)$ . Allora:

- se  $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$  è definita positiva, allora  $\mathbf{x}_0$  è un punto di minimo locale forte;
- se  $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$  è definita negativa, allora  $\mathbf{x}_0$  è un punto di massimo locale forte;
- se  $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$  è indefinita, allora  $\mathbf{x}_0$  è un punto di sella.

Ricordiamo che

- se tutti gli autovalori di una matrice sono positivi, allora la matrice è definita positiva;
- se tutti gli autovalori di una matrice sono negativi, allora la matrice è definita negativa.

Infine, ricordiamo che se la matrice Hessiana ha almeno una coppia di autovalori di segno discorde allora il punto critico è una sella.

Esercizio 3.1.1. Si determinino i punti critici di

$$f(x, y) = x^2y - xy^2 + xy$$

e se ne studi la natura.

Calcoliamo le derivate parziali:

$$\partial_x f(f, x) = 2xy - y^2 + y = y(2x - y + 1),$$

$$\partial_y f(f, x) = x^2 - 2xy + x = x(x - 2y + 1).$$

Determiniamo i punti critici ponendo il gradiente pari al vettore nullo:

$$\begin{cases} y(2x - y + 1) = 0 \\ x(x - 2y + 1) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione si annulla per  $y = 0$  e per  $y = 2x + 1$ . Per  $y = 0$  la seconda equazione restituisce  $x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$  da cui otteniamo i punti critici  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ . Per  $y = 2x + 1$ , invece, la seconda equazione restituisce  $x(-3x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, -1/3\}$ , da cui otteniamo i punti critici  $(1, 0)$  e  $(1/3, -1/3)$ .



Calcoliamo le derivate seconde ricordando che, poiché  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ , le derivate miste sono simmetriche:

$$\begin{aligned}\partial_{xx}^2 f &= 2y, \\ \partial_{xy}^2 f &= \partial_{yx}^2 f = 2x - 2y + 1, \\ \partial_{yy}^2 f &= -2x.\end{aligned}$$

L'Hessiana è quindi

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{bmatrix} 2y & 2x - 2y + 1 \\ 2x - 2y + 1 & -2x \end{bmatrix}.$$

Nell'origine, abbiamo che l'Hessiana

$$\mathbf{H}_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ha autovalori  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ . Ne segue che l'origine è un punto di sella.

Nel punto  $(0, 1)$  abbiamo

$$\mathbf{H}_f(0, 1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

il polinomio caratteristico è  $(2 - \lambda)(-\lambda) + 1$  ed ha come radici gli autovalori (di segno discorde)  $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ . Ne segue che il punto  $(0, 1)$  è un punto di sella.

Similmente, nel punto  $(-1, 0)$  si ha che l'Hessiana ha la forma

$$\mathbf{H}_f(-1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

per cui il polinomio caratteristico è lo stesso di prima. Ne segue che anche il punto  $(-1, 0)$  è un punto di sella.

Infine, consideriamo il punto  $(-1/3, 1/3)$  per cui l'Hessiana diventa

$$\mathbf{H}_f\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori sono  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1/2$ , quindi l'Hessiana è definita positiva e  $(-1/3, 1/3)$  è un punto di minimo relativo.

Esercizio 3.1.2. Si determinino i punti critici di

$$f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$$

e se ne studi la natura.

Il gradiente  $\nabla f = (6x^2 - 6x, 3y^2 - 3)$  si annulla per  $x \in \{0, 1\}$  e  $y \in \{1, -1\}$ . I punti critici sono quindi  $(0, 1), (0, -1), (1, 1), (1, -1)$ .

L'Hessiana di  $f$  è

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{bmatrix} 12x - 6 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}.$$

Notiamo subito che gli autovalori di  $\mathbf{H}_f$  sono  $\lambda_1(x) = 12x - 6, \lambda_2 = 6y$ . Ne segue che

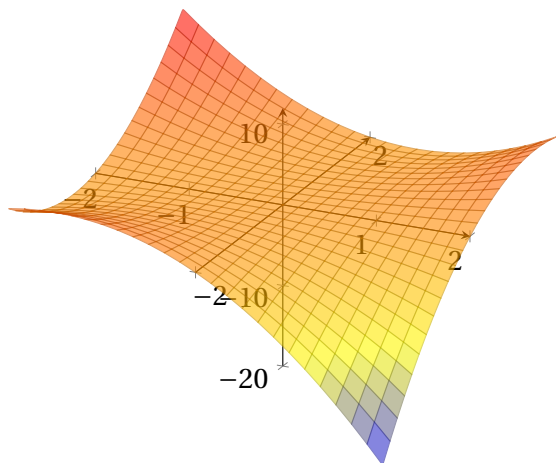


Figura 3.1: Funzione dell'Esercizio 3.1.1.

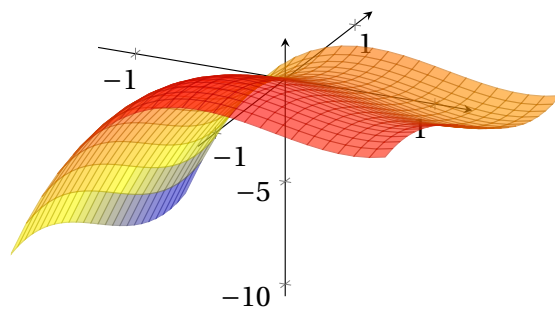


Figura 3.2: Funzione dell'Esercizio 3.1.2.

- $(0, 1)$  è un punto di sella:  $\lambda_1 = -6, \lambda_2 = 6$ ,
- $(0, -1)$  è un punto di massimo locale:  $\lambda_1 = -6, \lambda_2 = -6$ ,
- $(1, 1)$  è un punto di minimo locale:  $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 6$ ,
- $(1, -1)$  è un punto di sella:  $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -6$ ,

Esercizio 3.1.3. Si determinino i punti critici di

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - (1 + x + y)^3$$

e se ne studi la natura.

Notiamo che  $f(x, y) = f(y, x)$ . Possiamo quindi limitarci a studiare il semipiano  $y \geq x$  ed estendere i risultati per simmetria. Il gradiente

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 3(x^2 - (1 + x + y)^2) \\ 3(y^2 - (1 + x + y)^2) \end{bmatrix}$$

si annulla per

$$\begin{cases} y = \pm x \\ x^2 - (1 + x \pm x)^2 = 0 \end{cases}.$$

Studiamo separatamente i due casi. Se  $y = x$  la seconda equazione diventa  $3x^2 + 4x + 1 = 0$  le cui soluzioni sono

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-3}}{3} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -1,$$

ottenendo i punti  $(-1/3, -1/3)$  e  $(-1, -1)$ .

Se invece  $y = -x$  la seconda equazione diventa  $x^2 - 1 = 0$ , restituendo i punti  $(1, -1)$  e  $(-1, 1)$  (per simmetria, studieremo solo il secondo).

La matrice Hessiana è

$$\mathbf{H}_f(x, y) = -6 \begin{bmatrix} 1 + y & 1 + x + y \\ 1 + x + y & 1 + x \end{bmatrix}.$$

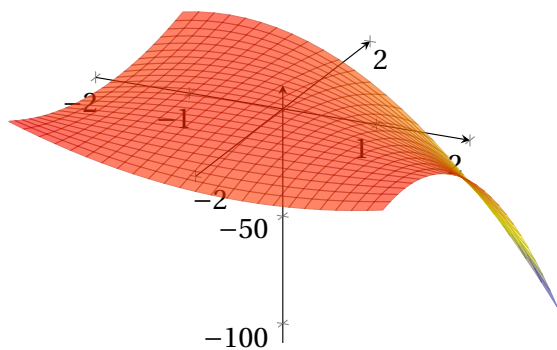


Figura 3.3: Funzione dell'Esercizio 3.1.3.

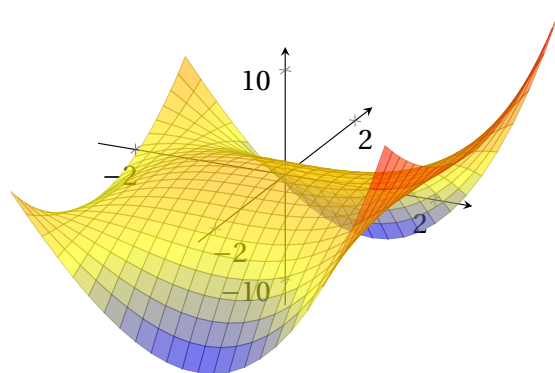


Figura 3.4: Funzione dell'Esercizio 3.1.4.

Analizziamo ora i singoli casi. Per  $(-1/3, -1/3)$  la matrice Hessiana diventa

$$\mathbf{H}_f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è  $p(\lambda) = (-4 - \lambda)^2 - 4$ , che si annulla per  $-4 - \lambda = \pm 2$ . Gli autovalori sono quindi  $\lambda_1 = -6, \lambda_2 = -2$  e il punto è un massimo relativo.

Per  $(-1, -1)$  la matrice Hessiana diventa

$$\mathbf{H}_f(-1, -1) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix},$$

per cui gli autovalori sono  $\lambda_{1,2} = \pm 6$  e il punto è un punto di sella.

Per  $(1, -1)$  la matrice Hessiana diventa

$$\mathbf{H}_f(1, -1) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -12 \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è  $p(\lambda) = \lambda^2 + 12\lambda - 36$  le cui radici sono  $\lambda_{1,2} = -6 \pm \sqrt{26}$ . Gli autovalori hanno segno discorde e  $(1, -1)$  (e, per simmetria, anche  $(-1, 1)$ ) è un punto di sella.

Esercizio 3.1.4. Si determinino i punti critici di

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{2} - 2y^2 + \frac{x^3}{3}$$

e se ne studi la natura.

Le derivate parziali sono

$$\partial_x f(x, y) = x(y^2 + x), \quad \partial_y f(x, y) = y(x^2 - 4).$$

Cerchiamo i punti stazionari:

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2) = 0 \\ y(x^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

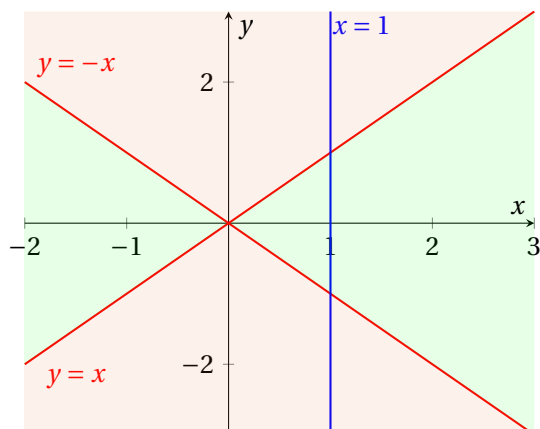


Figura 3.5: Schema della partizione del dominio per la funzione in Esercizio 3.1.5. Nella parte di piano in verde la funzione è positiva mentre nella porzione in arancione è negativa. La funzione si annulla sulle rette disegnate in rosso e in blu.

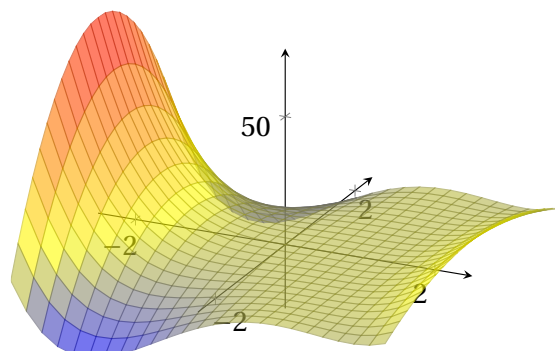


Figura 3.6: Funzione dell'Esercizio 3.1.5.

La seconda equazione si annulla per  $y = 0$  e per  $x = \pm 2$ . Se  $y = 0$  la prima equazione impone  $x = 0$ . Se invece  $x = \pm 2$  la prima equazione pone  $y = \pm\sqrt{2}$  quando  $x = -2$  mentre non viene mai soddisfatta per  $x = +2$ . Riassumendo, i punti critici sono  $(0,0)$  e  $(-2, \pm\sqrt{2})$ . L'Hessiana di  $f$  è

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x + y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2 - 4 \end{bmatrix}.$$

Valutata in  $(-2, \pm\sqrt{2})$  la matrice è

$$\mathbf{H}_f(-2, \pm\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} -2 & \mp 4\sqrt{2} \\ \mp 4\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono  $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{33}$  ed hanno segno discorde. Ne segue che entrambi i punti  $(-2, \pm\sqrt{2})$  sono punti di sella.

Studiamo ora l'origine. L'Hessiana in  $(0,0)$

$$\mathbf{H}_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

ha un autovalore nullo (mentre l'altro è positivo). Quindi, il test dell'Hessiana non basta a determinare la natura del punto critico. Si noti tuttavia che  $f(x, 0) = x^3/3$  ha un flesso in  $x = 0$ . Di conseguenza, l'origine non può essere né un minimo né un massimo per  $f$ , ed è quindi un punto di sella.

Esercizio 3.1.5. Si determinino i punti critici di

$$f(x, y) = (x-1)^2(x^2 - y^2)$$

e se ne studi la natura.

Le componenti del gradiente sono date da

$$\partial_x f(x, y) = 2(x-1)(2x^2 - y^2 - x), \quad \partial_y f(x, y) = -2y(x-1)^2.$$

La seconda componente si annulla se  $y = 0 \vee x = 1$ . Se  $y = 0$ , la prima equazione si annulla per  $x \in \{0, 1/2, 1\}$ . Se invece  $x = 1$ , la prima equazione si annulla per ogni valore di  $y$ . I punti stazionari sono quindi  $(0, 0)$ ,  $(1/2, 0)$ , e la retta  $x = 1$ .

La matrice Hessiana è

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{bmatrix} 12x^2 - 2y^2 - 12x + 2 & -4y(x-1) \\ -4y(x-1) & -2(x-1)^2 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di  $\mathbf{H}_f(0, 0)$  sono  $\lambda_{1,2} = \pm 2$  e l'origine è quindi un punto di sella. La matrice  $\mathbf{H}_f(1/2, 0)$  è definita negativa e  $(1/2, 0)$  è un punto di massimo relativo. Sulla retta  $x = 1$  la matrice Hessiana

$$\mathbf{H}_f(1, y) = \begin{bmatrix} 2(1-y)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha sempre un autovalore nullo e il test dell'Hessiana non basta.

Per studiare la natura del punto critico notiamo che  $f(1, y) = 0$  per ogni  $y \in \mathbb{R}$ . Possiamo quindi studiare la natura del punto critico studiando il segno di  $f(x, y) = (x-1)^2(x-y)(x+y)$ . Notiamo che il primo fattore è sempre non negativo. Il prodotto degli altri due fattori, invece, divide il piano in quattro porzioni delimitate dalle rette  $y = \pm x$ . In particolare, nelle aree a destra e sinistra dell'origine la funzione è positiva, mentre è negativa nelle aree sopra e sotto l'origine. Ne segue che, attorno alla retta verticale  $x = 1$  la funzione è positiva se  $|y| < 1$  ed è negativa se  $|y| > 1$ . In conclusione, i punti  $(1, y)$  con  $|y| < 1$  sono dei minimi locali, i punti  $(1, y)$  con  $|y| > 1$  sono dei massimi locali, e i punti  $(1, \pm 1)$  sono dei punti di sella.

Esercizio 3.1.6. Per  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la funzione

$$f_\alpha(x, y) = \alpha x^3 y - (1 - \alpha)(x^2 + y^2)$$

l'origine è un punto critico. Se ne studi la natura al variare di  $\alpha$

Calcoliamo l'hessiana di  $f_\alpha$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_\alpha(x, y) &= 6\alpha xy - 2(1 - \alpha), \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f_\alpha(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f_\alpha(x, y) = 3\alpha x^2, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_\alpha(x, y) &= -2(1 - \alpha). \end{aligned}$$

L'hessiana è quindi

$$\mathbf{H}_\alpha(x, y) = \begin{bmatrix} 6\alpha xy - 2(1 - \alpha) & 3\alpha x^2 \\ 3\alpha x^2 & -2(1 - \alpha) \end{bmatrix}$$

che, valutata nell'origine, risulta essere

$$\mathbf{H}_\alpha(0, 0) = \begin{bmatrix} -2(1 - \alpha) & 0 \\ 0 & -2(1 - \alpha) \end{bmatrix}$$

e gli autovalori sono  $\lambda_1 = \lambda_2 = -2(1 - \alpha)$ . Ne segue che

- se  $1 - \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$  l'origine è un massimo relativo
- se  $1 - \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$  l'origine è un minimo relativo

Se  $\alpha = 1$  il test dell'hessiana fallisce. Consideriamo quindi  $f_1(x, y) = x^3 y$  e notiamo che per ogni  $\varepsilon > 0$  abbiamo  $f_1(\varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon^4 > 0$  e  $f_1(\varepsilon, -\varepsilon) = -\varepsilon^4 < 0$ . Ne segue che, in ogni intorno dell'origine, la funzione  $f_1$  cambia segno. Ne segue che per  $\alpha = 1$ , l'origine è un punto di sella.

## 3.2 Studio dei punti critici vincolati: moltiplicatori di Lagrange

**Teorema 3.2.1** (moltiplicatori di Lagrange). *Sia  $A \in \mathbb{R}^n$  aperto,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $\mathcal{C}^1(A)$ . Sia inoltre  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $\mathcal{C}^1(A)$ . Allora, se  $\bar{\mathbf{x}} \in A$  è estrema relativo di  $f$  sotto al vincolo  $g = 0$  con  $\nabla g(\bar{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$  allora esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  per cui*

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) - \lambda \nabla g(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}.$$

La funzione  $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) \doteq f(\mathbf{x}) - \lambda g(\mathbf{x})$  è chiamata ‘Lagrangiana’.

Esercizio 3.2.1. Determinare i massimi e minimi assoluti di

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

sull’insieme

$$S = \{(x, y) : (x-1)^2 + 4y^2 = 4\}.$$

Il vincolo si può esprimere come  $g(x, y) = 0$  con  $g(x, y) = (x-1)^2 + 4y^2 - 4$ . Entrambe le funzioni  $f, g$  sono  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ . Inoltre il gradiente di  $g$   $\nabla g(x, y) = (2(x-1), 8y)$  si annulla solo nel punto  $(1, 0)$  per il quale  $g(1, 0) = -4 \neq 0$ . Possiamo quindi applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definiamo allora la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda((x-1)^2 + 4y^2 - 4)$$

e calcoliamone il gradiente rispetto a  $(x, y)$

$$\nabla_{(x,y)} \mathcal{L}(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - 2\lambda(x-1) \\ 2y - 8\lambda y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x - \lambda x + \lambda \\ y - 4\lambda y \end{bmatrix}.$$

Quindi, i punti critici si ottengono risolvendo

$$\begin{cases} x - \lambda x + \lambda = 0 \\ y(1 - 4\lambda) = 0 \\ (x-1)^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

La seconda componente si annulla per  $y = 0$  o per  $\lambda = 1/4$ . Se  $y = 0$ , l’equazione del vincolo pone  $(x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x-1 = \pm 2$ , ottenendo i valori  $x_1 = 3, x_2 = -1$ . La prima equazione diventa

$$x - \lambda x + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(1 - \lambda) = -\lambda \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-\lambda}{1 - \lambda}$$

che, per  $\lambda = 1/4$  restituisce  $x = -1/3$ . Sostituendo nell’equazione del vincolo,

$$(x-1)^2 + 4y^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 4y^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4y^2 = \frac{20}{9} \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

I possibili punti critici sono quindi  $(-1, 0)$ ,  $(3, 0)$ , e  $(-1/3, \pm\sqrt{5}/3)$ . Se valutiamo la funzione in questi punti abbiamo

$$f(-1, 0) = 1, \quad f(3, 0) = 9, \quad f\left(-\frac{1}{3}, \pm \frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Se ne conclude che  $(3, 0)$  è un punto di massimo assoluto vincolato, mentre i punti  $(-1/3, \pm\sqrt{5}/3)$  sono entrambi punti di minimo assoluto vincolato.

Esercizio 3.2.2. Determinare i massimi e minimi assoluti di

$$f(x, y) = x^3 + 4xy^2 - 4x$$

sulla circonferenza unitaria centrata nell'origine.

Il vincolo può essere scritto come  $g(x, y) \doteq x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Sia  $f$  che  $g$  sono funzioni  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$  in quanto funzioni polinomiali. Inoltre, il gradiente di  $g$ ,  $\nabla g = (2x, 2y)$  si annulla solo nell'origine, che non appartiene al vincolo. Possiamo quindi utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Scriviamo la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^3 + 4xy^2 - 4x - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ne segue che i punti critici soddisfano

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 - 4 - 2\lambda x = 0 \\ 8xy - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

dove, ricordiamo, le prime due equazioni annullano il gradiente (rispetto a  $(x, y)$ ) della lagrangiana  $\mathcal{L}$ , mentre l'ultima permette di soddisfare il vincolo.<sup>1</sup> La seconda equazione si riscrive come  $2y(4x - \lambda) = 0$  e viene soddisfatta per  $y = 0$  o  $\lambda = 4x$ . Nel caso  $y = 0$ , il vincolo impone  $x = \pm 1$ . Se invece sostituiamo  $\lambda = 4x$  nella prima otteniamo  $3x^2 + 4y^2 - 4 - 8x^2 = -5x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ . Sostituendo  $y^2 = 1 - x^2$  si ottiene  $x = 0$ . Di conseguenza, i punti critici sono  $(\pm 1, 0)$ ,  $(0, \pm 1)$ .

Per calcolo diretto,

$$f(1, 0) = -3, \quad f(-1, 0) = 3, \quad f(0, \pm 1) = 0,$$

e se ne conclude che  $(1, 0)$  è punto di minimo assoluto vincolato, mentre  $(-1, 0)$  è punto di massimo assoluto vincolato.

Equivalentemente, l'esercizio si può risolvere parametrizzando il vincolo tramite la curva  $\gamma$  parametrizzata da  $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Definendo quindi  $h(t) = f(\cos(t), \sin(t)) = \cos^3(t) + 4\cos(t)\sin^2(t) - 4\cos(t)$  possiamo trovare i massimi e minimi di  $f$  studiando i punti critici di  $h$ . Derivando,

$$\frac{d}{dt}h(t) = -3\cos^2(t)\sin(t) + 8\cos^2(t) - 4\sin^3(t) + 4\sin(t) = \sin(t)(5\cos^2(t) - 4\sin^2(t) + 4) = 9\sin(t)\cos^2(t)$$

otteniamo che i punti critici si hanno per  $t \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ . Calcolando la derivata seconda,

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) = -18\cos(t)\sin^2(t) + 9\cos^3(t) = 9\cos(t)(\cos^2(t) - 2\sin^2(t))$$

e valutandola nei punti critici,

$$h''(0) = 9, \quad h''\left(\frac{\pi}{2}\right) = h''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \quad h''(\pi) = -9,$$

otteniamo che il minimo si ha per  $t = 0$  (i.e. nel punto  $(1, 0)$ ), mentre il massimo si ottiene per  $t = \pi$  (i.e. nel punto  $(-1, 0)$ ).

---

<sup>1</sup>Alternativamente, si può pensare alla terza equazione come la derivata parziale di  $\mathcal{L}$  rispetto a  $\lambda$ . Con questa interpretazione, i punti critici si determinano annullando il gradiente di  $\mathcal{L}$  rispetto a  $(x, y, \lambda)$ .

Esercizio 3.2.3. Determinare i massimi e minimi assoluti di

$$f(x, y) = \sin(x) + \sin(y)$$

soggetta al vincolo

$$g(x, y) \doteq \cos(x) - \cos(y) + 1 = 0.$$

Prima di risolvere l'esercizio, notiamo che sia  $f$  che  $g$  sono periodiche in entrambe le variabili  $x$  e  $y$ . È naturale quindi attendersi la stessa periodicità anche nei punti critici. Sia  $f$  che  $g$  sono  $\mathcal{C}^1$  in tutto  $\mathbb{R}^2$ . Il gradiente di  $g$ ,  $\nabla g(x, y) = (-\sin(x), \sin(y))$  si annulla nei punti  $z_{hk} = (h\pi, k\pi)$  con  $h, k \in \mathbb{Z}$ . Abbiamo

$$g(h\pi, k\pi) = (-1)^h - (-1)^k + 1 = \begin{cases} 1 & \text{se } h \text{ e } k \text{ sono entrambi pari o entrambi dispari} \\ 3 & \text{se } h \text{ è pari e } k \text{ è dispari} \\ -1 & \text{se } h \text{ è dispari e } k \text{ è pari} \end{cases}.$$

Di conseguenza, il gradiente di  $g$  non si annulla in nessun punto appartenente al vincolo e possiamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definiamo quindi la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = \sin(x) + \sin(y) - \lambda(\cos(x) - \cos(y) + 1).$$

Possiamo determinare i punti critici risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \cos(x) + \lambda \sin(x) = 0 \\ \cos(y) - \lambda \sin(y) = 0 \\ \cos(x) - \cos(y) + 1 = 0 \end{cases}$$

Sicuramente la soluzione soddisferà  $\sin(x) \neq 0$ ,  $\sin(y) \neq 0$ . Infatti, se  $\sin(x) = 0$ , allora la prima equazione implica  $\cos(x) = 0$ . Ma per nessun valore di  $x$  sia il coseno che il seno si possono annullare. Lo stesso vale per  $y$ .

Possiamo quindi dividere la prima equazione per  $\sin(x)$  e la seconda per  $\sin(y)$  ottenendo

$$\cotan(x) = -\lambda, \quad \cotan(y) = \lambda.$$

Ciò implica  $\cotan(x) = \cotan(-y)$  e quindi  $x = -y + m\pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Sostituendo nel vincolo

$$\cos(x) - \cos(-x + m\pi) + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - \cos(x - m\pi) + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - (-1)^m \cos(x) + 1 = 0.$$

Se  $m$  è pari, l'equazione non ha soluzioni. Se  $m$  invece è dispari si ha  $2\cos(x) = -1 \Leftrightarrow \cos(x) = -1/2$ , da cui otteniamo le soluzioni

$$x_1 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A questi corrispondono i seguenti valori per  $y$  (ottenuti ricordando che  $x = -y + m\pi$  e  $\cos(y) = 1/2$ )

$$y_1 = \frac{\pi}{3} + 2h\pi, \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2h\pi, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}, \\ f(x_2, y_2) &= \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ne segue che i punti  $(2\pi/3 + 2k\pi, \pi/3 + 2h\pi)$  sono punti di massimo assoluto vincolato, mentre i punti  $(4\pi/3 + 2k\pi, -\pi/3 + 2h\pi)$  sono punti di minimo assoluto vincolato.



Esercizio 3.2.4. Determinare i massimi e minimi assoluti di  $f(x, y) = e^x + e^y$  sulla retta di equazione  $y = -x + 2$ .

Il vincolo non è compatto e non si può applicare il teorema di Weierstrass, per cui la funzione potrebbe non ammettere massimi o minimi.

Ad essere più precisi,  $f$  non ammette massimo assoluto: per qualsiasi successione  $(x_n, 2 - x_n)$  con  $x_n \rightarrow +\infty$  o  $x_n \rightarrow -\infty$  si ha che  $f(x_n, 2 - x_n) \rightarrow +\infty$ . La funzione deve però ammettere, allora, un minimo assoluto. Per trovarlo, studiamo la funzione ristretta alla retta. Definiamo  $h(t) = f(t, 2 - t) = e^t + e^{2-t}$  e calcoliamo  $h'(t) = e^t - e^{2-t}$  che si annulla solo per  $t = 1$ . Ne segue che il punto  $(1, 1)$  è un minimo assoluto.

Esercizio 3.2.5. Determinare i massimi e minimi (sia relativi che assoluti) di

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 + \frac{x}{2}$$

nell'insieme

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

Iniziamo cercando i massimi e minimi liberi di  $f$  (verificheremo dopo se appartengono a  $\text{int}(S)$ ). Il gradiente di  $f$ ,  $\nabla f(x, y) = (2x + 1/2, 6y)$  si annulla in  $(-1/4, 0) \in \text{int}(S)$ . L'Hessiana di  $f$ ,

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

è definita positiva ed il punto  $(-1/4, 0)$  è un minimo relativo.

Passiamo ora allo studio del bordo di  $S$ . Questo può essere parametrizzato dalla curva chiusa semplice  $\gamma$  parametrizzata da  $\mathbf{r}(t) = (2\cos(t), \sin(t))$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . La restrizione di  $f$  su  $\gamma$  è  $h(t) \doteq f(\mathbf{r}(t)) = \cos^2(t) + \cos(t) + 3$ . La sua derivata è

$$h'(t) = -2\cos(t)\sin(t) - \sin(t) = -\sin(t)(2\cos(t) + 1)$$

e si annulla per  $t \in \{0, \pi, 2\pi/3, 4\pi/3\}$ , cui corrispondono, rispettivamente, i punti  $(2, 0), (-2, 0), (-1, \sqrt{3}/2), (-1, -\sqrt{3}/2)$ . La derivata seconda di  $h$  è

$$h''(t) = -2\cos(2t) - \cos(t)$$

che, valutata nei punti critici, restituisce

$$h''(0) = -3, \quad h''(\pi) = -1, \quad h''\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{3}{2}, \quad h''\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{3}{2}.$$

Quindi, per  $t \in \{0, \pi\}$  abbiamo dei massimi relativi, mentre per  $t \in \{2\pi/3, 4\pi/3\}$  abbiamo dei minimi relativi.

Calcoliamo infine

$$f(2, 0) = 5, \quad f(-2, 0) = 3, \quad f\left(-1, \frac{\pm\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{11}{4}, \quad f\left(-\frac{1}{4}, 0\right) = -\frac{1}{16}.$$

Quindi, il massimo assoluto vincolato è  $(2, 0)$ , mentre il minimo assoluto vincolato è  $(-1/4, 0)$ .

Esercizio 3.2.6. Determinare i massimi e minimi assoluti di

$$f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$$

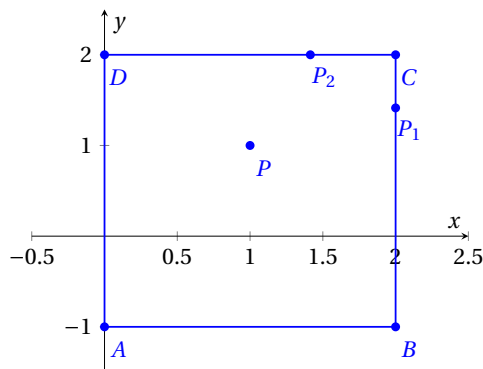


Figura 3.7: Rappresentazione del dominio dell'Esercizio 3.2.7.

soggetta al vincolo  $g(x, y) \doteq x^2 - y^2 - 1 = 0$ .

Abbiamo  $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ . Inoltre  $\nabla g(x, y) = (2x, -2y)$  si annulla solo nell'origine, che non appartiene al vincolo. Possiamo quindi applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definiamo la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = xe^{-x^2-y^2} - \lambda(x^2 - y^2 - 1)$$

ed annulliamone il gradiente (soddisfacendo, contemporaneamente, il vincolo):

$$\begin{cases} e^{-x^2-y^2}(1 - 2x^2 - 2\lambda x) = 0 \\ 2y(\lambda - xe^{-x^2-y^2}) = 0 \\ x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Ponendo  $y = 0$  (dalla seconda equazione), il vincolo impone  $x = \pm 1$ . Se invece, sempre dalla seconda equazione, poniamo  $\lambda = xe^{-x^2-y^2}$  e sostituiamo nella prima, otteniamo che questa si risolve solo per  $x = \pm 1/2$ , che però non appartiene al vincolo.

Gli unici punti critici sono quindi  $(\pm 1, 0)$  per cui la funzione assume valore  $f(\pm 1, 0) = \pm 1/e$ . Se ne conclude che  $(1, 0)$  è il punto di massimo assoluto vincolato, mentre  $(-1, 0)$  è il punto di minimo assoluto vincolato.

Esercizio 3.2.7. Determinare i massimi e minimi assoluti di

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

su  $S = [0, 2] \times [-1, 2]$ .

Poiché  $f$  è continua ed  $S$  è compatto,  $f$  ammette massimo e minimo assoluto in  $S$ . Iniziamo studiando i punti critici liberi. Il gradiente

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{bmatrix}$$

si annulla nei punti  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$ . Di questi, solo  $(1, 1)$  è interno al vincolo. L'Hessiana di  $f$  è

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$$

ed è definita positiva in  $(1, 1)$ , che è quindi un punto di minimo locale.

Studiamo ora il bordo, studiando separatamente i quattro lati del rettangolo  $\partial S$  rappresentati in Figura 3.8. Il lato  $AB$  viene parametrizzato come  $\mathbf{r}(t) = (t, -1)$ ,  $t \in [0, 2]$ . La restrizione di  $f$  su  $AB$  è

$$h_1(t) = f(t, -1) = t^3 + 3t - 1.$$

Questa funzione è strettamente crescente, per cui  $h_1$  ha un minimo per  $t = 0$  (vertice  $A$ ) ed un massimo per  $t = 2$  (vertice  $B$ ).

Il lato  $BC$  si parametrizza come  $\mathbf{r}(t) = (2, t)$ ,  $t \in [-1, 2]$ . La restrizione di  $f$  è

$$h_2(t) = f(2, t) = t^3 - 6t + 8$$

che ammette punti stazionari in  $\pm\sqrt{2}$ , di cui solo  $\sqrt{2}$  rispetta il vincolo. Poiché la derivata seconda di  $h_2$  è positiva in  $\sqrt{2}$ , il punto  $(2, \sqrt{2})$  è un minimo relativo.

Il lato  $CD$  si parametrizza come  $\mathbf{r}(t) = (t, 2)$ ,  $t \in [0, 2]$ . La restrizione di  $f$  è

$$h_3(t) = f(t, 2) = t^3 + 8 - 6t$$

che, analogamente a prima, ammette un minimo relativo per  $t = \sqrt{2}$ , ovvero per il punto  $(\sqrt{2}, 2)$ .

Infine, il lato  $DA$  viene parametrizzato come  $\mathbf{r}(t) = (0, t)$ ,  $t \in [-1, 2]$ . La restrizione

$$h_4(t) = f(0, t) = t^3$$

è crescente in  $t$ .

Rimane dunque da valutare la funzione nei vertici del rettangolo, e negli altri punti critici determinati prima:

$$f(0, -1) = -1, \quad f(2, -1) = 13, \quad f(2, 2) = 4, \quad f(0, 2) = 8, \quad f(1, 1) = -1, \quad f(2, \sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, 2) = 8 - 4\sqrt{2}.$$

Si ottiene quindi che il vertice  $(0, -1)$  e il punto  $(1, 1)$  sono minimi assoluti vincolati, mentre il vertice  $(2, -1)$  è il punto di massimo assoluto vincolato.

Esercizio 3.2.8. Determinare i massimi e minimi assoluti di

$$f(x, y, z) = x + y^2 + z^2$$

sull'insieme

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 = 1\}.$$

Prima di risolvere l'esercizio verifichiamo che i massimi e minimi esistano. La funzione  $f$  è continua. L'insieme  $S$  è chiuso in quanto intersezione di due chiusi (controimmagini di chiusi attraverso funzioni continue). È inoltre limitato: il primo vincolo impone  $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ , mentre il secondo vincolo impone anche  $|z| \leq 1$ . L'insieme  $S$  è quindi compatto e si può applicare il teorema di Weierstrass sull'esistenza di massimo e minimo assoluto.

Chiamiamo

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x^2 + z^2 - 1$$

e notiamo che il gradiente di entrambi i vincoli  $\nabla g_1 = (2x, 2y, 0), \nabla g_2 = (2x, 0, 2z)$  si annullano solo nell'origine, che non appartiene a nessuno dei due vincoli. Si può quindi utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La lagrangiana è

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda, \mu) = f(x, y, z) - \lambda g_1(x, y, z) - \mu g_2(x, y, z) = x + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1) - \mu(x^2 + z^2 - 1).$$

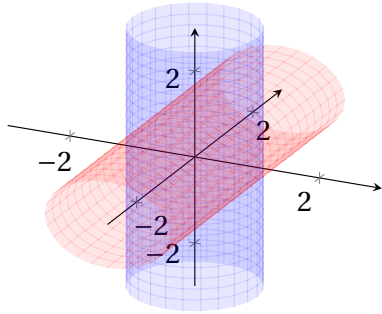


Figura 3.8: Rappresentazione dei due vincoli dell'Esercizio 3.2.8. Il cilindro in blu è quello di equazione  $x^2 + y^2 = 1$ , mentre quello in rosso è quello di equazione  $x^2 + z^2 = 1$ .

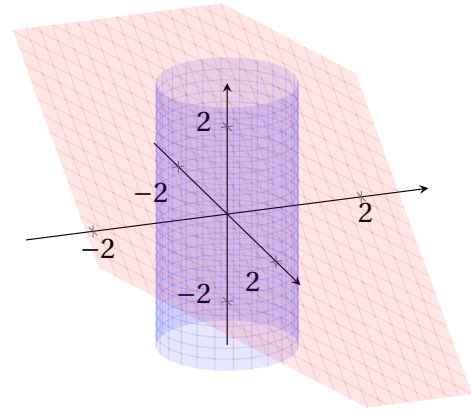


Figura 3.9: Rappresentazione dei due vincoli dell'Esercizio 3.2.9.

Il sistema da risolvere diventa

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x - 2\mu x = 0 \\ 2y - 2\lambda y = 0 \\ 2z - 2\mu z = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

La seconda e terza equazione si semplificano, rispettivamente, in  $2y(1-\lambda) = 0$  e  $2z(1-\mu) = 0$ . Analizziamo i diversi casi:

$$\begin{aligned} y = 0 &\Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow z = 0 \\ z = 0 &\Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = 0 \\ \lambda = 1, \mu = 1 &\Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}, z = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}. \end{aligned}$$

I punti stazionari sono quindi

$$\begin{aligned} P_1 &= (-1, 0, 0), & P_2 &= (1, 0, 0), & P_3 &= \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right), \\ P_4 &= \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4}\right), & P_5 &= \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right), & P_6 &= \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4}\right). \end{aligned}$$

Valutando la funzione nei sei punti,

$$f(P_1) = -1, \quad f(P_2) = 1, \quad f(P_3) = f(P_4) = f(P_5) = f(P_6) = \frac{17}{4},$$

si ottiene che  $P_1$  è punto di minimo assoluto vincolato, mentre i punti  $P_3, P_4, P_5, P_6$  sono punti di massimo assoluto vincolati.

Esercizio 3.2.9. Determinare i massimi e minimi assoluti di

$$f(x, y, z) = x^2 - x + y^2 + y(x + z - 1)$$

sull'insieme

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1\}.$$

Prima di risolvere l'esercizio verifichiamo che i massimi e minimi esistano. La funzione  $f$  è continua. L'insieme  $S$  è chiuso in quanto intersezione di due chiusi (controimmagini di chiusi attraverso funzioni continue). È inoltre limitato: il primo vincolo impone  $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ , e, di conseguenza, il secondo vincolo impone  $|z| \leq 3$ . L'insieme  $S$  è quindi compatto e si può applicare il teorema di Weierstrass sull'esistenza di massimo e minimo assoluto.

Definiamo le funzioni

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x + y + z - 1$$

e notiamo che il gradiente di nessuna delle due si annulla sul vincolo:

$$\nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = 0, y = 0,$$

$$\nabla g_2(x, y, z) = (1, 1, 1) \neq \mathbf{0} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Possiamo quindi applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definendo la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda, \mu) = x^2 - x + y^2 + y(x + z - 1) - \lambda(x^2 + y^2 - 1) - \mu(x + y + z - 1)$$

otteniamo che i punti critici soddisferanno il sistema

$$\begin{cases} 2x - 1 + y - 2\lambda x - \mu = 0 \\ 2y + x + z - 1 - 2\lambda y - \mu = 0 \\ y - \mu = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Dalla terza equazione si ottiene  $\mu = y$ . Sostituendo nella prima otteniamo  $2x(1 - \lambda) = 1$ . Se  $\lambda = 1$  non si ha soluzione. Quindi possiamo porre, senza perdita di generalità,  $\lambda \neq 1$  e

$$x = \frac{1}{2(1 - \lambda)}.$$

Sostituendo la quinta equazione nella seconda,

$$2y + x + z - 1 - 2\lambda y - \mu = 0 \Leftrightarrow 2y + x + (1 - x - y) - 1 - 2\lambda y - \mu = 0 \Leftrightarrow y - 2\lambda y - y = 0 \Leftrightarrow \lambda y = 0.$$

Se  $\lambda = 0$ , allora  $x = 1/2$ , da cui  $y^2 = 3/4$ , ottenendo i punti

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right), \quad P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right).$$

Se invece  $y = 0$ , allora  $x = \pm 1$ , ottenendo i punti

$$P_3 = (1, 0, 0), \quad P_4 = (-1, 0, 2).$$

Valutando la funzione nei quattro punti, abbiamo che  $P_1, P_2$  sono minimi assoluti vincolati, mentre  $P_3, P_4$  sono massimi assoluti vincolati:

$$f(P_1) = f(P_2) = -\frac{1}{4}, \quad f(P_3) = f(P_4) = 2.$$

Esercizio 3.2.10. Tra tutti i parallelepipedi inscritti in una sfera, quello di volume massimo è il cubo. Si dimostri che questo è vero in genere in  $\mathbb{R}^n$ : dato un generico parallelepipedo  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$  inscritto in una sfera, si dimostri che quello di iper-volume  $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$  massimo è l'ipercubo.

Per simmetria, centriamo il parallelepipedo e la sfera nell'origine. Possiamo quindi scrivere l'iper-volume come

$$\mathcal{V} = [-l_1, l_1] \times [-l_2, l_2] \times \cdots [-l_n, l_n] = \prod_{i=1}^n 2l_i.$$

Il vincolo, invece, diventa (dopo aver posto, senza perdita di generalità, il raggio pari a 1)

$$\sum_{i=1}^n l_i^2 = 1.$$

La lagrangiana è

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{l}; \lambda) &= \prod_{i=1}^n 2l_i - \lambda \left( \sum_{i=1}^n l_i^2 - 1 \right) \\ &= 2^n \prod_{i=1}^n l_i - \lambda \left( \sum_{i=1}^n l_i^2 - 1 \right). \end{aligned}$$

Calcoliamo le componenti del gradiente:

$$\frac{\partial}{\partial l_j} \mathcal{L} = 2^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n l_i - 2\lambda l_j.$$

Annullare il gradiente significa porre ognuna di queste componenti pari a zero:

$$\frac{\partial}{\partial l_j} \mathcal{L} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2^{n-1} \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n l_i}{l_j}.$$

Questa relazione deve essere vera, con lo stesso  $\lambda$  per ogni indice  $j$ . In particolare, per due indici distinti  $j_1 \neq j_2$  abbiamo

$$\frac{2^{n-1} \prod_{i \neq j_1} l_i}{l_{j_1}} = \frac{2^{n-1} \prod_{i \neq j_2} l_i}{l_{j_2}}.$$

Questa identità si può riscrivere come

$$l_{j_2}^2 \prod_{\substack{i \neq j_1 \\ i \neq j_2}} l_i = l_{j_1}^2 \prod_{\substack{i \neq j_1 \\ i \neq j_2}} l_i,$$

da cui  $l_{j_1} = l_{j_2}$  per ogni coppia di indici  $j_1, j_2$ . Segue che tutti i lati del parallelepipedo devono coincidere, ed il parallelepipedo è un cubo.

### 3.3 Esercizi extra

Esercizio extra 3.1. Data la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come

$$f(x, y) = y^3 + 4x^2y - 4y,$$

- se ne determinino i punti critici,
- se ne studi la natura,
- si trovino, o si dimostri che non esistono, il massimo e il minimo assoluti di  $f$  vincolata all'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ .

Esercizio extra 3.2. Data la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come

$$f = x^3 - y^3,$$

- se ne determinino i punti critici,
- se ne studi la natura,
- si trovino il massimo e il minimo di  $f$  vincolata all'insieme  $\{x^4 + y^4 = 1\}$ .

Esercizio extra 3.3. Dopo aver verificato che l'origine è un punto critico, se ne discuta la natura al variare di  $\alpha$  per la funzione

$$f_\alpha(x, y, z) = (1 - \alpha)xyz + (1 - \alpha)xz + \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Esercizio extra 3.4. Si determinino massimi e minimi assoluti di

$$f(x, y) = x(x^2 + y^2)$$

vincolati all'insieme

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$$

Esercizio extra 3.5. Si determinino massimi e minimi assoluti di

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

vincolati all'insieme

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, x^2 + xy + z = 1\}.$$

Esercizio extra 3.6. Tra tutti i triangoli di perimetro  $2p$ , dimostrare che quello di area massimo è quello equilatero.

## Capitolo 4

# Teorema della funzione implicita

### 4.1 Teorema del Dini in $\mathbb{R}^2$

**Teorema 4.1.1** (funzione implicita in  $\mathbb{R}^2$ ). Siano  $D \subset \mathbb{R}^2$  aperto e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $D$ . Sia inoltre  $(x_0, y_0) \in D$  un punto tale per cui  $f(x_0, y_0) = 0$ . Supponiamo inoltre che in un intorno di  $(x_0, y_0)$  esista continua la derivata parziale  $\partial_y f(x, y)$  con  $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$ .

Allora esistono  $U$  e  $V$  intorno di  $x_0$  e  $y_0$  rispettivamente ed un'unica funzione continua  $\varphi : U \rightarrow V$  tale che

$$\{(x, y) \in D : f(x, y) = 0\} \cap (U \times V) = \{(x, \varphi(x)) : x \in U\}, \quad \varphi(x_0) = y_0.$$

Si dice che  $\varphi$  esplica localmente  $f$  rispetto a  $x$  in un intorno di  $x_0$ .

**Corollario 4.1.1.** Nelle ipotesi precedenti, si assuma inoltre che  $f$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$ . Allora la funzione  $\varphi$  è derivabile in  $x_0$  e

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\partial_x f(x_0, y_0)}{\partial_y f(x_0, y_0)}.$$

Se inoltre,  $f$  è differenziabile in un intorno  $U \times V$  di  $(x_0, y_0)$ , allora

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))}, \quad \forall x \in U.$$

Esercizio 4.1.1. Dimostrare che esiste una e una sola funzione continua e derivabile  $y = \varphi(x)$  definita in un intorno di  $x = 2$  soddisfacente

$$f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - 1 = 0.$$

con  $\varphi(2) = 1$ . Calcolare  $\varphi'(2), \varphi''(2)$ .

Notiamo che  $f$  è continua e che, effettivamente,  $f(2, 1) = 0$ . Calcoliamo

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 2x - 2y, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 3y^2 - 2x,$$

e notiamo che  $\partial_y f(2, 1) = -1 \neq 0$ . Quindi, per il teorema del Dini, esiste una e una sola  $\varphi$  continua definita in un intorno di 2 tale che  $f(x, \varphi(x)) = 0$  e  $\varphi(2) = 1$ . Poiché  $f$  è differenziabile (essendo un polinomio in  $x, y$ ), allora anche  $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ . Si ha

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))} = -\frac{2x - 2\varphi(x)}{3\varphi^2(x) - 2x},$$



da cui  $\varphi'(2) = 2$ .

Inoltre,

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{2x - 2\varphi(x)}{3\varphi^2(x) - 2x} \right) \\ &= - \frac{(2 - 2\varphi'(x))(3\varphi^2(x) - 2x) - (2x - 2\varphi(x))(2x - 2\varphi(x))(6\varphi(x)\varphi'(x) - 2)}{(3\varphi^2(x) - 2x)^2}\end{aligned}$$

e  $\varphi''(2) = 18$ .

Esercizio 4.1.2. Dimostrare che esiste una e una sola funzione continua e derivabile  $y = \varphi(x)$  definita in un intorno di  $x = 1$  soddisfacente

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2y^3 = 0.$$

con  $\varphi(1) = 1$ . Calcolare lo sviluppo di Taylor di  $\varphi$  al secondo ordine in  $x = 1$ .

La funzione è continua in tutto  $\mathbb{R}^2$  e  $f(1, 1) = 0$ . Inoltre, la derivata parziale  $\partial_y f(x, y) = 2xy - 6y^2$  valutata nel punto  $(1, 1)$  risulta diversa da zero. Si può quindi applicare il teorema del Dini. La derivata prima della funzione  $\varphi$  è

$$\varphi'(x) = - \frac{\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))} = - \frac{2x^2 + \varphi^2(x)}{2x\varphi(x) - 6\varphi^2(x)}.$$

Ne segue che la derivata seconda è, invece,

$$\varphi''(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} = - \frac{(6x + 2\varphi(x)\varphi'(x))(2x\varphi(x) - 6\varphi^2(x))}{(2x\varphi(x) - 6\varphi^2(x))^2} + \frac{(3x^2 + \varphi^2(x))(2\varphi(x) + 2x\varphi'(x) - 12\varphi(x)\varphi'(x))}{(2x\varphi(x) - 6\varphi^2(x))^2}.$$

Abbiamo quindi  $\varphi'(1) = 1$  e  $\varphi''(1) = 0$ , da cui

$$\varphi(x) = 1 + (x - 1) + o((x - 1)^2), \quad x \rightarrow 1.$$

Esercizio 4.1.3. Dimostrare che l'identità

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 - y} - 2x + y = 0.$$

definisce implicitamente una e una sola funzione  $y = \varphi(x)$  in  $(2, 3)$ . Si ricavi uno sviluppo di Taylor al primo ordine di  $\varphi$  in  $x = 2$ .

La funzione  $f$  è continua, e  $f(2, 3) = 0$ . Calcoliamo

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = - \frac{1}{3(x^2 - y)^{-\frac{2}{3}}} + 1,$$

e notiamo che  $\partial_y f(2, 3) = 2/3 \neq 0$ . Si può quindi applicare il teorema della funzione implicita. Calcoliamo

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{2x}{3(x^2 - y)^{-\frac{2}{3}}} - 2,$$

da cui

$$\varphi'(2) = - \frac{\partial_x f(2, 3)}{\partial_y f(2, 3)} = 1$$

e lo sviluppo in serie di Taylor di  $\varphi$  per  $x \rightarrow 2$  è

$$\varphi(x) = \varphi(2) + \varphi'(2)(x - 2) + o(x - 2) = 3 + (x - 2) + o(x - 2).$$

Esercizio 4.1.4. Data

$$f(x, y) = y \cos(x) + 2(x-1) \cos\left(\frac{\pi}{3}y\right).$$

si dimostri che  $f(x, y)$  definisce implicitamente una e una sola funzione  $x = \psi(y)$  in un intorno di  $y = 1$ . Si calcoli  $\psi'(1)$ .

La funzione è continua e differenziabile in quanto somma e prodotto di polinomi con coseni. Abbiamo inoltre  $f(x, 1) = \cos(x) + x - 1$  e  $f(x_0, 1) = 0$  se e solo se  $x_0 = 0$ . Calcoliamo le derivate parziali e valutiamole in  $(0, 1)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} f(x, y) &= -y \sin(x) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}y\right), & \frac{\partial f}{\partial x} f(0, 1) &= 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) &= \cos(x) - \frac{2}{3}\pi(x-1) \sin\left(\frac{\pi}{3}y\right), & \frac{\partial f}{\partial y} f(0, 1) &= 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi.\end{aligned}$$

In particolare,  $\partial_x f(0, 1) \neq 0$  e possiamo applicare il teorema del Dini.

Abbiamo infine

$$\psi'(1) = -\frac{\partial_y f(0, 1)}{\partial_x f(0, 1)} = -\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right).$$

Esercizio 4.1.5. Sia

$$f(x, y) = e^{xy} - e^{-2y} \cos(x) - 1.$$

Si dimostri che  $f(x, y) = 0$  definisce implicitamente una e una sola funzione  $y = \varphi(x)$  in un intorno di  $x_0 = \pi/2$ . Si calcoli poi  $\varphi'(x_0)$ .

La funzione  $f$  è differenziabile in quanto somma e prodotto di funzioni differenziabili in tutto  $\mathbb{R}^2$ . per  $x = x_0$  abbiamo che  $f(x_0, y) = \exp(\pi/2 y) - 1$  si annulla solo in  $y_0 = 0$ .

Calcoliamo le derivate parziali

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= ye^{xy} + e^{-2y} \sin(x), & \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= xe^{2y} + 2e^{-2y} \cos(x).\end{aligned}$$

Si ha quindi  $\partial_x f(\pi/2, 0) = 1$  e  $\partial_y f(\pi/2, 0) = \pi/2$ . Poiché  $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$  si può applicare il teorema del Dini e abbiamo

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}.$$

Esercizio 4.1.6. Dimostrare che esiste una e una sola funzione continua e derivabile  $y = \varphi(x)$  definita in un intorno di  $x = 1$  soddisfacente

$$f(x, y) = e^{-xy} - (x+1) + y^3(x-1).$$

Si sviluppi  $\varphi$  tramite serie di Taylor fino al primo ordine.

La funzione è differenziabile in tutto  $\mathbb{R}^2$ . Calcoliamo  $f(1, y) = e^{-y} - 2$  che si annulla in  $y_0 = -\log 2$ . Calcoliamo le derivate parziali

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= -ye^{-xy} - 1 + y^3, & \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= -xe^{-xy} + 3y^2(x-1).\end{aligned}$$

Poiché  $\partial_y f(1, -\log 2) = -2 \neq 0$  si può applicare il teorema del Dini. La funzione  $\varphi$  soddisfa  $\varphi(1) = -\log 2$ . Calcoliamo ora  $\varphi'(x)$ :

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))} = -\frac{-\varphi(x)e^{-x\varphi(x)} + 1 + \varphi^3(x)}{-xe^{-x\varphi(x)} + 3\varphi^2(x)(x-1)}$$

da cui  $\varphi'(1) = \log 2 - 1/2 - 1/2 \log^3(2)$  e lo sviluppo di Taylor di  $\varphi$  è

$$\varphi(x) = -\log(2) + \left( \log(2) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log^3(2) \right) (x-1) + o(x-1).$$

Esercizio 4.1.7. Si verifichi che l'equazione

$$f(x, y) = x^2 + \log(1 + xy) + ye^{2y}$$

definisce implicitamente, in un intorno dell'origine, una funzione  $y = \varphi(x)$  e se ne calcoli lo sviluppo di Taylor al secondo ordine.

La funzione  $f$  è continua e, effettivamente, soddisfa  $f(0, 0) = 0$ . Calcoliamo la derivata parziale lungo  $y$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{x}{1 + xy} + e^{2y}(1 + 2y)$$

e notiamo che  $\partial_y f(0, 0) = 1 \neq 0$ . Per il teorema del Dini, esiste un'unica funzione  $y = \varphi(x)$  tale che in un intorno di  $x = 0$   $x^2 + \log(1 + x\varphi(x)) + \varphi(x)e^{2\varphi(x)} = 0$ . Derivando rispetto a  $x$ , abbiamo

$$2x + \frac{\varphi(x) + x\varphi'(x)}{1 + x\varphi(x)} + \varphi'(x)e^{2\varphi(x)} + 2\varphi(x)\varphi'(x)e^{2\varphi(x)} = 0.$$

Poiché in  $x_0 = 0$  si ha  $\varphi(x_0) = 0$  allora l'equazione precedente restituisce  $\varphi'(x_0) = 0$ .

Derivando ancora rispetto a  $x$  otteniamo l'identità

$$2 + \frac{(2\varphi'(x) + x\varphi''(x))(1 + x\varphi(x)) - (\varphi(x) + x\varphi'(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x))}{(1 + x\varphi(x))^2} + \varphi''(x)e^{2\varphi(x)} + 2(\varphi'(x))^2 e^{2\varphi(x)} + 2((\varphi'(x))^2 + \varphi(x)\varphi''(x) + 2\varphi(x)(\varphi'(x))^2) e^{2\varphi(x)} = 0$$

In  $x_0 = 0$  abbiamo che  $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$  e l'identità restituisce  $\varphi''(x_0) = -2$  da cui otteniamo la serie di Taylor richiesta

$$\varphi(x) = -x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

#### 4.1.1 Involuppi

**Definizione 4.1.1** (Involuppo). Sia  $\Gamma$  una famiglia di curve nel piano. Diremo che una curva  $\sigma$  è *involuppo* di  $\Gamma$  se è tangente in ogni suo punto a tutte le curve di  $\Gamma$  passanti per il medesimo punto

Supponiamo che  $\Gamma = \{\gamma_\alpha\}_{\alpha \in I}$  con  $I$  intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ , e che  $\gamma_\alpha$  sia implicitamente definita dall'equazione  $F(x, y; \alpha) = 0$ . Condizione necessaria affinché una curva  $\sigma$  sia involuppo della famiglia  $\Gamma$  è che  $\sigma$  sia definita implicitamente dal sistema

$$\begin{cases} F(x, y; \alpha) = 0 \\ \partial_\alpha F(x, y; \alpha) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

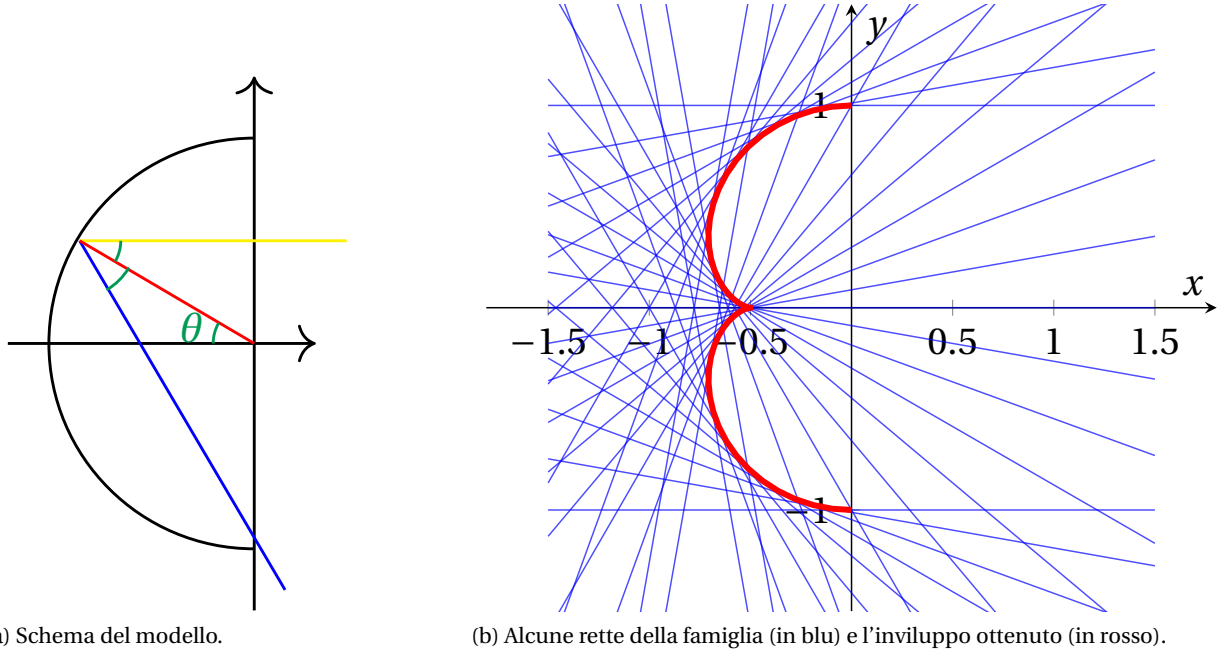


Figura 4.1: La nefroide in Esercizio 4.1.8.

Supponiamo infatti che questo sistema definisca una curva inviluppo  $\sigma = \sigma(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$  parametrizzata da  $\alpha$ . Si ha allora  $F(\sigma(\alpha), \alpha) = 0$  per ogni  $\alpha$ . Derivando, si ottiene, per la regola della catena,

$$\nabla F(x(\alpha), y(\alpha); \alpha) \cdot \dot{\sigma}(\alpha) = -\frac{\partial}{\partial \alpha} F(x(\alpha), y(\alpha), \alpha).$$

Poiché, per ipotesi,  $\sigma$  è inviluppo di  $\Gamma$ , il vettore  $\dot{\sigma}$  è tangente a  $\gamma_\alpha$  in  $\sigma(\alpha)$ , e d'altra parte  $\nabla F(\sigma(\alpha); \alpha)$  è ortogonale a  $\gamma_\alpha$  nello stesso punto. Di conseguenza  $\nabla F(x(\alpha), y(\alpha); \alpha) \cdot \dot{\sigma}(\alpha) = 0$  da cui

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} F(x, y; \alpha)|_{(x,y)=\sigma(\alpha)} = 0.$$

Supposto ora che il sistema (4.1) definisca implicitamente una curva  $\sigma(\alpha)$ , affinché tale curva sia un inviluppo, è necessario che per ogni  $\alpha$  la derivata  $\dot{\sigma}(\alpha)$  esista e sia non nulla, e che anche il gradiente  $\nabla F(\sigma(\alpha), \alpha)$  sia non nullo.

**Esercizio 4.1.8 (Nefroide).** Si consideri la semicirconferenza sinistra di raggio 1 ed il fascio di rette parallele all'asse  $x$  che intersecano la semi-circonferenza. Sia  $\Gamma$  la famiglia delle rette ottenute riflettendo le rette del fascio sulla semicirconferenza stessa (con angolo di riflessione pari a quello di incidenza). Si determini l'inviluppo di  $\Gamma$ .

Definendo l'angolo  $\theta$  come in Figura 4.1a, denotiamo i punti sulla semi-circonferenza come  $P_\theta = (-\cos(\theta), \sin(\theta))$  con  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Il triangolo con vertici  $P_\theta$ , l'origine, e il punto di intersezione tra l'asse  $x$  e la retta di riflessione forma un triangolo isoscele. Di conseguenza, questa retta interseca l'asse  $x$  con un angolo di  $\pi - 2\theta$ . Ne segue che la generica retta in  $\Gamma$  passante per  $P_\theta$  è

$$r_\theta : y = \tan(\pi - 2\theta)x + q = -\tan(2\theta)x + q.$$

Ponendo il passaggio per  $P_\theta$ :

$$\begin{aligned}
 y - \sin(\theta) - \tan(2\theta)(x + \cos(\theta)) &\Leftrightarrow y - \sin(\theta) = -\frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)}(x + \cos(\theta)) \\
 &\Leftrightarrow y \cos(2\theta) - \sin(\theta) \cos(2\theta) = -\sin(2\theta)(x + \cos(\theta)) \\
 &\Leftrightarrow x \sin(2\theta) + y \cos(2\theta) = \sin(\theta) \cos(2\theta) - \sin(2\theta) \cos(\theta) \\
 &\Leftrightarrow x \sin(2\theta) + y \cos(2\theta) = \sin(\theta)(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) - (2 \sin(\theta) \cos(\theta)) \cos(\theta) \\
 &\Leftrightarrow x \sin(2\theta) + y \cos(2\theta) = -\sin(\theta)
 \end{aligned}$$

da cui le rette in  $\Gamma$  soddisfano

$$F(x, y; \theta) \doteq x \sin(2\theta) + y \cos(2\theta) + \sin(\theta) = 0.$$

Derivando rispetto a  $\theta$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} F(x, y, \theta) = 2x \cos(2\theta) - 2y \sin(2\theta) + \cos(\theta),$$

otteniamo che l'involuppo soddisfa il sistema (scritto in forma matriciale)

$$\begin{bmatrix} \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \\ 2 \cos(2\theta) & -2 \sin(2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Questo sistema può essere risolto tramite la regola di Cramer. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \\ 2 \cos(2\theta) & -2 \sin(2\theta) \end{vmatrix} = -2, \\
 D_x &= \begin{vmatrix} -\sin(\theta) & \cos(2\theta) \\ -\cos(\theta) & -2 \sin(2\theta) \end{vmatrix} = \frac{3 \cos(\theta) - \cos(3\theta)}{2}, \\
 D_y &= \begin{vmatrix} \sin(2\theta) & -\sin(\theta) \\ 2 \cos(2\theta) & -\cos(\theta) \end{vmatrix} = \frac{\sin(3\theta) - 3 \sin(\theta)}{2}
 \end{aligned}$$

ottenendo, infine, l'equazione dell'involuppo:

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4} (3 \cos(\theta) - \cos(3\theta), \sin(3\theta) - 3 \sin(\theta)).$$

**Esercizio 4.1.9 (Cardioide).** Sia  $C$  la circonferenza centrata in  $(-1, 0)$  e di raggio 1. Sia  $\Gamma$  la famiglia di circonferenze centrate nei punti di  $C$  e passanti per l'origine. Calcolare l'involuppo di  $\Gamma$ .

Parametrizzando  $C$  come  $(\cos(\theta) - 1, \sin(\theta))$ ,  $\theta \in (0, 2\pi)$ , la famiglia  $\Gamma$  si scrive come  $F(x, y; \theta) = 0$  con

$$F(x, y; \theta) = (x + 1 - \cos(\theta))^2 + (y - \sin(\theta))^2 - (\sin^2(\theta) + (\cos(\theta) - 1)^2).$$

$F$  è praticamente il luogo dei punti con distanza dal punto  $(1 - \cos(\theta), \sin(\theta))$  pari a  $\sqrt{\sin^2(\theta) + (\cos(\theta) - 1)^2}$ . Calcoliamo

$$\frac{\partial}{\partial \theta} F(x, y; \theta) = 2(x + 1 - \cos(\theta)) \sin(\theta) - 2(y - \sin(\theta)) \cos(\theta) - (2 \sin(\theta) \cos(\theta) - 2(\cos(\theta) - 1) \sin(\theta))$$

Il sistema (4.1) si semplifica in

$$\begin{cases} x^2 - 2x \cos(\theta) + 2x + y^2 - 2y \sin(\theta) = 0 \\ x \sin(\theta) - y \cos(\theta) = 0 \end{cases}.$$

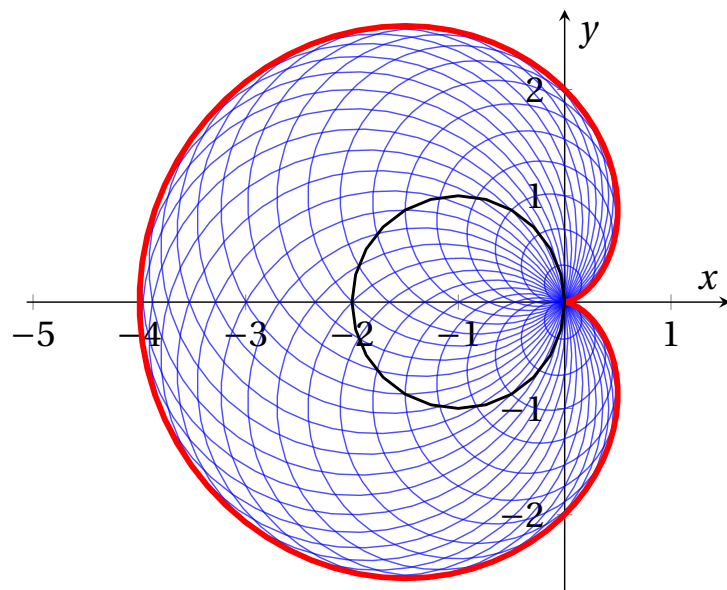


Figura 4.2: La cardiode in Esercizio 4.1.9 (in rosso). In nero viene mostrata la circonferenza di raggio unitario e centro in  $(-1, 0)$ . In blu vengono mostrate alcune delle circonferenze della famiglia  $\Gamma$ .

Ponendo  $\cos(\theta) \neq 0$ , moltiplichiamo la prima equazione per  $\cos^2(\theta)$ , sostituiamo nella seconda, e semplifichiamo per ottenere

$$x^2 - 2x \cos(\theta)(1 - \cos(\theta)) = 0.$$

Per  $x \neq 0$  si ha

$$x(\theta) = 2(1 - \cos(\theta)) \cos(\theta).$$

Similmente, ponendo  $\sin(\theta) \neq 0$ , moltiplichiamo la prima equazione per  $\sin^2(\theta)$ , sostituiamo nella seconda, e semplifichiamo per ottenere

$$y^2 - 2y \sin(\theta)(1 - \cos(\theta)) = 0.$$

Per  $y \neq 0$  si ha

$$y(\theta) = 2(1 - \cos(\theta)) \sin(\theta).$$

Rimangono da studiare i casi  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $\cos(\theta) = 0$ ,  $\sin(\theta) = 0$ . Si ha che se  $x = 0$ , allora o  $y = 0$  o  $\cos(\theta) = 0$ , ottenendo i punti  $(0, 0)$ ,  $(0, \pm 2)$ . Similmente, se  $y = 0$  allora o  $x = 0$  o  $\sin(\theta) = 0$ , ottenendo i punti  $(0, 0)$ ,  $(-4, 0)$ . Osserviamo che questi punti già appartengono a

$$\sigma(\theta) = 2(1 - \cos(\theta)) (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

#### 4.1.2 Grafici qualitativi di luoghi di punti

Esercizio 4.1.10 (folium di Cartesio). Si tracci un grafico qualitativo del seguente luogo di punti:

$$\Gamma = \{(x, y) \text{ in } \mathbb{R}^2 : x^3 - 3xy + y^3 = 0\}.$$

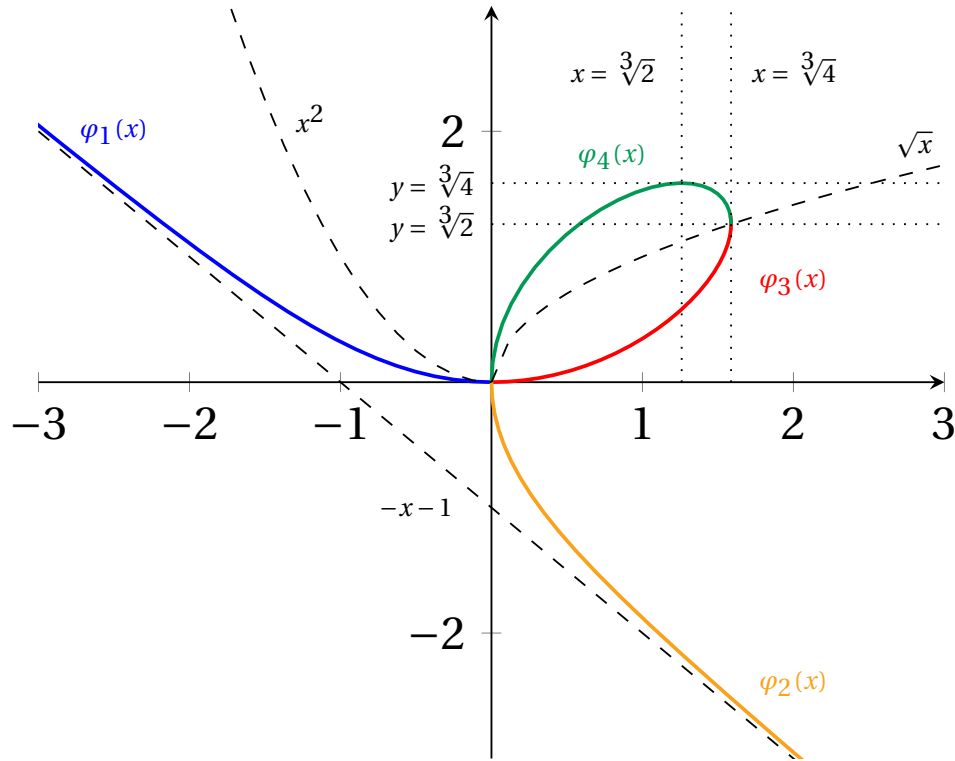


Figura 4.3: Il folium di Cartesio dell'Esercizio 4.1.10.

Notiamo che, definita

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$$

si ha  $f(x, y) = f(y, x)$  e segue che  $\Gamma$  è simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Iniziamo determinando il numero di funzioni definite implicitamente dall'identità  $f(x, y) = 0$  per ogni  $x$ . Per fare ciò, consideriamo le intersezioni di  $\Gamma$  con le rette  $x = k, k \in \mathbb{R}$ . Consideriamo quindi il polinomio

$$p_k(y) \doteq f(k, y) = k^3 - 3ky + y^3,$$

ed osserviamo che, per ogni  $k$ ,  $p_k$  ha almeno una radice e ne ha al massimo tre. Quindi l'identità  $f = 0$  definisce al più tre funzioni  $y = \varphi(x)$ .

Calcoliamo la derivata prima e seconda di  $p_k$ :

$$p'_k(y) = 3y^2 - 3k = 3(y^2 - k),$$

$$p''_k(y) = 6y.$$

Ragioniamo ora su diversi valori di  $k$ .

$k < 0$  In questo caso, la funzione  $y \mapsto p_k(y)$  è strettamente crescente ( $y^2 - k > 0 \forall y \in \mathbb{R}$ ). Ne segue che il polinomio  $p_k$  ammette una e una sola radice  $y_k \in \mathbb{R}$ . Notiamo che  $p_k(0) = k^3 < 0$ , da cui segue che lo zero è positivo:  $y_k > 0$ . Inoltre, poiché  $p_k$  è crescente, allora  $0 < p_k(k^2) = k^6 - 2k^3$ , e  $y_k < k^2$ . Se ne conclude che, per  $x < 0, 0 < y < x^2$ .

Riassumendo, per  $x < 0$  l'identità  $f(x, y) = 0$  definisce una e una sola funzione  $\varphi_1 : (-\infty, 0) \rightarrow (0, \infty)$  tale che  $f(x, \varphi_1(x)) = 0$ . Calcoliamo la derivata parziale rispetto a  $y$  per ottenere

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, \varphi_1(x)) = 3\varphi_1^2(x) - 3x$$

che per  $x < 0$  non si annulla mai. Inoltre, la derivata di  $\varphi'_1(x)$  è

$$\varphi'_1(x) = -\frac{\partial_y f(x, \varphi_1(x))}{\partial_x f(x, \varphi_1(x))} = -\frac{x^2 - \varphi_1(x)}{\varphi_1^2(x) - x}. \quad (4.2)$$

Poiché  $x < 0$  e, in questi punti,  $\varphi_1(x) < x^2$ , si ha che sia numeratore che denominatore in (4.2) sono positivi, e  $\varphi_1$  è monotona decrescente. Per  $x$  che tende a zero, abbiamo che l'identità  $x^3 - 3x\varphi_1(x) + \varphi_1^3(x) = 0$  implica  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi_1(x) = 0$ .

Studiamo ora la presenza di asintoti. Supponiamo che  $(x, mx) \in \Gamma, x < 0$ . La quantità

$$f(x, mx) = x^3 - 3x(mx) + m^3 x^3 = (m^3 + 1)x^3 - 3mx^2 = x^2((m^3 + 1)x - 3m)$$

è pari a zero per  $x = \frac{3m}{m^3+1}$  da cui segue che  $x \rightarrow -\infty$  se e solo se  $m \rightarrow -1$ . Otteniamo dunque (poiché  $mx = \varphi_1(x)$  per costruzione)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\varphi_1(x)}{x} = \lim_{m \rightarrow -1^+} \frac{\frac{3m^2}{m^3+1}}{\frac{3m}{m^3+1}} = -1.$$

Determiniamo ora l'intercetta:

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_1(x) - (-x) = \lim_{m \rightarrow -1} \frac{3m^2}{m^3+1} + \frac{3m}{m^3+1} = -1.$$

Se ne conclude che  $\varphi_1(x)$  ammette asintoto obliquo  $y = -x - 1$ . Notiamo infine che  $\varphi_1$  è a tangenza orizzontale in  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\varphi_1(x) - \varphi_1(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\varphi_1(x)}{x} = 0.$$

$k = 0$  La funzione  $y \mapsto p_k(y)$  restituisce  $p_0(y) = y^3$  che si annulla solo in 0. Ne segue che  $(0, 0) \in \Gamma$  ma, localmente, il teorema del Dini non si può applicare:  $\partial_y f(0, 0) = 0$ .

$k > 0$  La derivata prima di  $p_k$  si annulla se e solo se  $y = \pm\sqrt{k}$ . Di conseguenza,  $p_k$  ammette massimo in  $y = -\sqrt{k}$  e minimo in  $y = \sqrt{k}$ . Questi massimo e minimo assumono valore

$$m_k = p_k(\sqrt{k}) = k^{\frac{3}{2}}(k^{\frac{3}{2}} - 2), \quad M_k = p_k(-\sqrt{k}) = k^{\frac{3}{2}}(k^{\frac{3}{2}} + 2).$$

Se  $m_k > 0$  o  $M_k < 0$ , allora  $p_k$  si annulla in uno e un solo punto. Se invece  $m_k < 0 < M_k$ , il polinomio  $p_k$  ha tre zeri. Poiché  $k > 0$ , questa catena di disuguaglianze diventa

$$k^{\frac{3}{2}} - 2 < 0 < k^{\frac{3}{2}} + 2 \Rightarrow -2 < k^{\frac{3}{2}} < 2,$$

e si hanno tre soluzioni se  $0 < k < \sqrt[3]{4}$  ed una se  $k > \sqrt[3]{4}$ . Nel caso di tre soluzioni, la maggiore è strettamente maggiore di  $\sqrt{k}$ , la minore è strettamente minore di zero (e sarà la "riflessione" di  $\varphi_1$  rispetto alla retta  $y = x$ , chiamiamola  $\varphi_2$ ), e l'altra sarà strettamente positiva ma minore di  $\sqrt{k}$ .

Le radici positive (e distinte) definiscono le ultime due funzioni  $\varphi_3, \varphi_4 : (0, \sqrt[3]{4}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Poiché  $x^3 - 3x\varphi_i(x) + \varphi_i^3(x) = 0, i = 3, 4$ , si ottiene, passando al limite per  $x \rightarrow 0^+$ , che  $\varphi_i(x) \rightarrow 0, i = 3, 4$ . Inoltre si ha  $\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{4}} \varphi_i(x) = \sqrt[3]{2}, i = 3, 4$ .

Se ora calcoliamo il differenziale di  $f$ :

$$df(x, y) = \partial_x f(x, y)dx + \partial_y f(x, y)dy = (3x^2 - 3y)dx + (3y^2 - 3x)dy$$



e lo valutiamo in  $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ , notiamo che  $df(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}) = (3\sqrt[3]{16} - 3\sqrt[3]{2})dx$  e nel punto  $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$  il grafico ha tangente verticale. Per simmetria, in  $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$  la tangente a  $\Gamma$  è orizzontale.

Poiché se  $y > \sqrt[3]{4}$  allora  $x < 0$ , si ha che

$$\Gamma \cap (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}) \subset [0, \sqrt[3]{4}] \times [0, \sqrt[3]{4}].$$

Il teorema del Dini è applicabile perché, poiché  $\varphi_3(x) < \sqrt{x}$  e  $\varphi_4(x) > \sqrt{x}$  si ha

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, \varphi_3(x)) = 3(\varphi_3^2(x) - x) < 0 \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, \varphi_4(x)) = 3(\varphi_4^2(x) - x) > 0$$

In  $(0, \sqrt[3]{2})$ , il grafico di  $\varphi_4$  è simmetrico, rispetto a  $y = x$ , al grafico di  $\varphi_3$ . Nello stesso intervallo,  $\varphi_4$  non ammette tangente orizzontale e, di conseguenza,  $\varphi_4$  è strettamente crescente (e, per riflessione, anche  $\varphi_3$ ). Poiché  $\varphi_4(x) \geq \sqrt{x}$ , nell'origine  $\varphi_4$  ha tangente verticale, e  $\varphi_3$  ha (per simmetria) tangente orizzontale.

In  $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ ,  $\partial_x f(x, \varphi_4(x)) = 3(x^2 - \varphi_4(x)) < 0$  e  $\varphi_4$  è strettamente decrescente in  $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ .

Esercizio 4.1.11 (chiocciola di Pascal). Si tracci un grafico qualitativo del seguente luogo di punti:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 2x)^2 = x^2 + y^2\}$$

Iniziamo osservando che, chiamata

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2x)^2 - (x^2 + y^2)$$

si ha  $f(x, -y) = f(x, y)$ , ed il grafico di  $\Gamma$  è simmetrico rispetto all'asse  $x$ .

Determiniamo le intersezioni di  $\Gamma$  con gli assi cartesiani:

$$f(x, 0) = x^2(x - 3)(x - 1), \quad f(0, y) = y^2(y^2 - 1).$$

Abbiamo quindi i punti  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, \pm 1)$ .

Calcoliamo ora

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 4(x^2 + y^2 - 2x)(x - 1) - 2x, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 4(x^2 + y^2 - 2x)y - 2y.$$

Notiamo che in  $(0, \pm 1)$ ,  $\partial_y f$  è non nullo e possiamo quindi applicare il teorema del Dini: l'identità  $f(x, y) = 0$  definisce in entrambi i punti una funzione  $y = \varphi_{1,2}(x)$  con

$$\varphi'_{1,2}(x) = -\frac{\partial_x f(0, \pm 1)}{\partial_y f(0, \pm 1)} = -\frac{-4}{\pm 2} = \pm 2.$$

Abbiamo quindi che le rette tangenti a  $\Gamma$  in  $(0, \pm 1)$  sono le rette  $y = \pm 2x \pm 1$ .

Nei punti  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 3)$ , la derivata parziale lungo  $y$  è nulla e non si può applicare il teorema del Dini. Tuttavia, nei punti  $(0, 1)$ ,  $(0, 3)$ , la derivata lungo  $x$  è non nulla. Questo significa che, localmente, l'identità  $f(x, y) = 0$  definisce implicitamente una funzione  $x = \psi_{1,2}(y)$  con derivata nulla in  $y = 0$ . Ne segue che le rette tangenti a  $\Gamma$  in  $(0, 1)$ ,  $(0, 3)$  sono le rette verticali  $x = 1$  ed  $x = 3$ .

Nell'origine, entrambe le derivate parziali sono nulle e non si può concludere nulla.

Notiamo che l'insieme  $\Gamma$  è compatto. È infatti chiuso in quanto controimmagine di un chiuso attraverso una funzione continua:  $\Gamma = f^{-1}(\{0\})$ . Per dimostrare che è limitato, scriviamo l'insieme in coordinate polari. Iniziamo scrivendo  $f$  in coordinate polari:

$$\begin{aligned} f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) &= (\rho^2 - 2\rho \cos(\theta))^2 - \rho^2 \\ &= \rho^4 - 4\rho^3 \cos(\theta) + 4\rho^2 \cos^2(\theta) - \rho^2 \end{aligned}$$

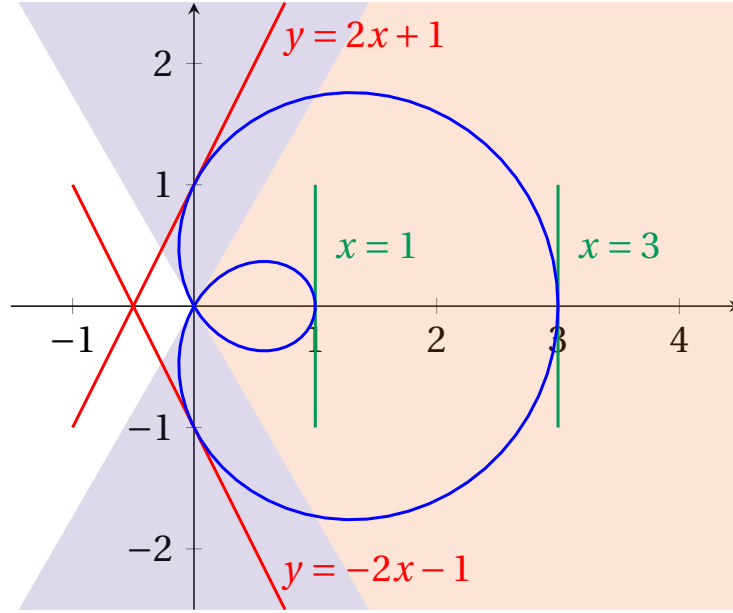


Figura 4.4: La chiocciola di Pascal dell'Eserizio 4.1.11. Il piano è diviso nelle tre parti in cui una semiretta che parte dall'origine interseca  $\Gamma$  in zero (in bianco), uno (in viola), e due (in arancione) punti.

Ponendo questa quantità pari a zero è equivalente a scrivere

$$\rho^4 = 4\rho^3 \cos(\theta) - 4\rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2.$$

Da cui segue la relazione

$$\begin{aligned} \rho^4 &= |4\rho^3 \cos(\theta) - 4\rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2| \\ &\leq |4\rho^3 \cos(\theta)| + |4\rho^2 \cos^2(\theta)| + |\rho^2| \\ &\leq 4\rho^3 + 5\rho^2. \end{aligned}$$

Otteniamo infine che i punti in  $(x, y) \in \Gamma$  soddisfano

$$\|(x, y)\|^4 - 4\|(x, y)\|^3 - 5\|(x, y)\|^2 \leq 0. \quad (4.3)$$

Poiché questo è un polinomio del quarto grado con coefficiente principale positivo, l'insieme per cui tale polinomio è minore o uguale a zero è un insieme limitato. Detto in altre parole, i punti  $(x, y)$  che soddisfano (4.3) sono contenuti in una palla aperta di raggio  $K$  abbastanza grande. Segue che  $\Gamma \subset B(\mathbf{0}, K)$ . L'insieme  $\Gamma$  è quindi chiuso e limitato, e ne segue che è compatto.

Per terminare lo studio, riscriviamo

$$f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = \rho^2(\rho - 2\cos(\theta) - 1)(\rho - 2\cos(\theta) + 1).$$

Da questa scrittura si ottiene che l'insieme  $\Gamma$  si può scrivere come l'unione  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  dell'immagine di due curve espresse in forma polare:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) : \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi], \rho = 2\cos(\theta) + 1\}, \\ \Gamma_2 &= \{(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) : \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi], \rho = 2\cos(\theta) - 1\}. \end{aligned}$$

Studiamo massimi e minimi di  $\rho$ . Chiamiamo  $h(\theta) = 2\cos(\theta) + 1$ ,  $\tilde{h}(\theta) = 2\cos(\theta) - 1$ . Chiaramente,  $h(\theta) \geq 0$  se e solo se  $\theta \in [0, 2\pi/3] \cup [4\pi/3, 2\pi]$ . Equivalentemente,  $\tilde{h}(\theta) \geq 0$  se e solo se  $\theta \in [0, \pi/3] \cup [5\pi/3, 2\pi]$ .  
Calcoliamo ora

$$h'(\theta) = \tilde{h}'(\theta) = -2\sin(\theta),$$

$$h''(\theta) = \tilde{h}''(\theta) = -2\cos(\theta).$$

Quindi, il raggio  $\rho$  ha massimi locali in 0 e valgono  $h(0) = 3$  (che è anche massimo assoluto),  $\tilde{h}(0) = 1$ .

Esercizio 4.1.12 (Trifolium). Si tracci un grafico qualitativo del seguente luogo dei punti:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \doteq (x^2 + y^2)^2 - x^3 + 3xy^2 = 0\}.$$

Iniziamo scrivendo la funzione  $f$  in coordinate polari:

$$\begin{aligned} f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) &= \rho^4 - \rho^3 \cos^3(\theta) + 3\rho^3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) \\ &= \rho^3 (\rho - \cos^3(\theta) + 3\cos(\theta) \sin^2(\theta)) \\ &= \rho^3 (\rho + \cos(\theta)(3\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta))) \\ &= \rho^3 \left( \rho + \cos(\theta) \left( \frac{3}{2}(1 - \cos(2\theta)) - \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)) \right) \right) \\ &= \rho^3 (\rho + \cos(\theta)(1 - 2\cos(2\theta))) \end{aligned}$$

L'identità  $f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = 0$  permette di definire  $\Gamma$  come l'immagine della curva espressa in forma polare come

$$\rho = \cos(\theta)(2\cos(2\theta) - 1). \quad (4.4)$$

Poiché  $\rho \geq 0$ , possiamo determinare i valori di  $\theta$  per cui ciò è vero. Il primo fattore si ottiene immediatamente:

$$\cos(\theta) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right].$$

Il secondo richiede qualche passaggio in più ma è ugualmente semplice da ottenere:

$$2\cos(2\theta) - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(2\theta) \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2\theta \in \left[2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[2k\pi + \frac{5}{3}\pi, 2k\pi + 2\pi\right],$$

da cui si ottiene

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5}{6}\pi, \pi\right] \cup \left[\pi, \frac{7}{6}\pi\right] \cup \left[\frac{11}{6}\pi, 2\pi\right] = \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi\right] \cup \left[\frac{11}{6}\pi, 2\pi\right]$$

Riassumendo,  $\rho \geq 0$  se e solo se

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi\right] \cup \left[\frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi\right] \cup \left[\frac{11}{6}\pi, 2\pi\right]. \quad (4.5)$$

Quindi, possiamo dividere il piano in sei settori, ognuno di ampiezza  $\pi/3$ . In tre di questi settori non vi è nessun punto di  $\Gamma$  (esclusa l'origine).

La periodicità del dominio di  $\rho$  suggerisce una periodicità anche nella funzione  $\rho$ . Partendo da (4.4) e passando nella forma esponenziale complessa del coseno, abbiamo

$$\rho(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \left( 2 \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} - 1)$$

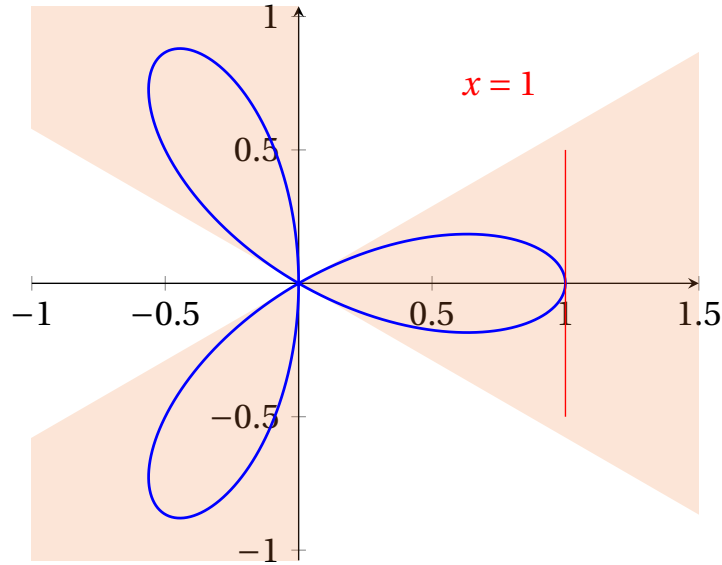


Figura 4.5: Luogo dei punti  $\Gamma$  dell'Esercizio 4.1.12. I settori in arancione sono quelli per cui vale (4.5).

Svolgendo il prodotto e semplificando, si ottiene

$$\rho(\theta) = \cos(3\theta).$$

ed effettivamente abbiamo una periodicità di  $2\pi/3$  per  $\rho$ .

Se ora calcoliamo

$$\dot{\rho}(\theta) = -3\sin(3\theta)$$

abbiamo che la distanza massima dall'origine di  $\Gamma$  si ha per i valori  $\theta = 2/3 k\pi$ , per  $k = 0, 1, 2$ , e vale  $\rho(0) = 1$ .

Cerchiamo le intersezioni con gli assi

$$f(x, 0) = x^4 - x^3 = x^3(x - 1),$$

$$f(0, y) = y^4,$$

da cui si ottiene il punto  $(1, 0)$  (oltre all'origine).

Calcoliamo ora

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 4y(x^2 + y^2) + 6xy.$$

Questa quantità è nulla sia in  $(0, 0)$  che in  $(1, 0)$ . Quindi, in nessuno dei punti di intersezione di  $\Gamma$  con gli assi cartesiani si può definire una funzione implicita  $y = \varphi(x)$ .

Calcolando il differenziale di  $f$ :

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \\ &= (4x(x^2 + y^2) - 3x^2 + 3y^2) dx + (4y(x^2 + y^2) + 6xy) dy \end{aligned}$$

Nell'origine,  $df = 0$  e non si può determinare una retta tangente a  $\Gamma$ . In  $(1, 0)$ , invece,  $df = dx$  e la tangente a  $\Gamma$  è la retta verticale  $x = 1$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup>si poteva ottenere, equivalentemente, questo risultato osservando che, poiché il punto  $(1, 0)$  si ha per  $\theta = 0$  in cui  $\rho$  ha un massimo, la tangente deve essere perpendicolare al raggio.

## 4.2 Teorema del Dini in generici spazi metrici

**Teorema 4.2.1** (funzione implicita). *Siano  $X, Y, Z$  spazi normati completi, sia  $D$  un aperto di  $X \times Y$ , sia  $f : D \rightarrow Z$  continua, e sia  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in D$  tale che  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ . Supponiamo che in un intorno di  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  esista continua  $\partial_Y f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  e che  $\partial_Y f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  sia un isomorfismo di  $Y$  su  $Z$ .*

*Esistono allora  $U \subset X, V \subset Y$  intorno rispettivamente di  $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$  ed un'unica funzione continua  $\varphi : U \rightarrow V$  tale che*

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\} \cap (U \times V) = \{(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in U\}, \quad \varphi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0.$$

*Se inoltre  $f$  è differenziabile in  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  si ha*

$$\varphi'(\mathbf{x}_0) = -(\partial_Y f(\mathbf{x}_0, \varphi(\mathbf{x}_0)))^{-1} \circ \partial_X f(\mathbf{x}_0, \varphi(\mathbf{x}_0)).$$

Esercizio 4.2.1. Sia  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{2+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + y_1^2 + 2y_1 + y_2 \\ e^{x_1} - 1 + x^2 + y_2 \end{bmatrix}$$

Mostrare che  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  definisce implicitamente una funzione  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  e calcolare la jacobiana di  $\varphi$  in  $\mathbf{0}$ .

Essendo entrambe le componenti funzioni analitiche,  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^4)$ . Inoltre,  $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

Calcoliamo lo jacobiano rispetto a  $\mathbf{y}$  di  $\mathbf{f}$ :

$$\partial_Y \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = J_Y \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 2y_1 + 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nell'origine, la matrice jacobiana ha rango massimo, e definisce quindi un isomorfismo da  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^2$ . La sua inversa è

$$(J_Y \mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}))^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Inoltre, la matrice jacobiana rispetto a  $\mathbf{x}$  è

$$\partial_X \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = J_X \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 1 & 1e^{x_1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Otteniamo quindi che lo jacobiano di  $\mathbf{f}$  in  $\mathbf{0}$  è

$$J\varphi(\mathbf{0}) = -(J_Y \mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}))^{-1} \circ J_X \mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4.2.2. Il sistema

$$\begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 2 = 0 \\ g(x, y, z) = xy + 2yz - xz + 7 = 0 \end{cases}$$

è verificato per  $x = 1, y = -1, z = 2$ .

Mostrare che questo definisce  $y$  e  $z$  come funzioni implicite di  $x$  in un intorno di  $x = 1$  con  $y(1) = -1$  e  $z(1) = 2$ . Si calcoli inoltre  $y'(1), z'(1)$ .

Per risolvere l'esercizio, cerchiamo di ricondurci al teorema del Dini. Per fare ciò, poniamo  $\mathbf{y} = (y, z)$  e definiamo

$$F(x, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} f(x, y, z) \\ g(x, y, z) \end{bmatrix}.$$

Banalmente,  $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ . Calcoliamo

$$\partial_{\mathbf{y}} F = J_{\mathbf{y}} F = \begin{bmatrix} 2y & -2z \\ x+2z & 2y-x \end{bmatrix}$$

e notiamo che

$$\text{rk}(J_{\mathbf{y}} F(1, -1, 2)) = \text{rk} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = 2.$$

Poiché la matrice jacobiana ha rango massimo, essa definisce un isomorfismo da  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^2$ . Possiamo quindi definire una funzione  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $F(x, \varphi(x)) = 0$  in un intorno di  $x = 1$  e  $\varphi(1) = (-1, 2)$ . Calcoliamo inoltre

$$\partial_x F = \begin{bmatrix} 2x \\ y-z \end{bmatrix}$$

che, valutato in  $(1, -1, 2)$  restituisce il vettore  $(2, -3)$ . L'inversa della jacobiana rispetto a  $\mathbf{y}$  è

$$J_{\mathbf{y}}^{-1} F(1, -1, 2) = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Otteniamo quindi che la derivata rispetto a  $x$  di  $\varphi$  in  $x = 1$  è

$$\partial_x \varphi(1) = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e si ottiene, quindi, che  $y'(1) = 9/13$  e  $z'(1) = 2/13$ .

### 4.3 Esercizi extra

Esercizio extra 4.1. Si dimostri che l'identità  $f(x, y) = 0$  con

$$f(x, y) = xe^{-2y^2} - 2ye^{-x},$$

definisce implicitamente una funzione  $y = \varphi(x)$  nel punto  $x_0 = 2$  e si calcoli uno sviluppo in serie di Taylor di  $\varphi$  in  $x_0$

Esercizio extra 4.2. Si dimostri che l'identità  $f(x, y) = 0$  con

$$f(x, y) = \arctan(xy) - e^{-2y(x-1)}$$

definisce implicitamente una funzione  $y = \varphi(x)$  nel punto  $x_0 = 1$  e si calcoli uno sviluppo in serie di Taylor di  $\varphi$  in  $x_0$

Esercizio extra 4.3. Si dimostri che l'identità  $f(x, y) = 0$  con

$$f(x, y) = y \log x + x^2 y \log y - y^2,$$

definisce implicitamente una funzione  $x = \psi(y)$  nel punto  $y_0 = 1$  e si calcoli uno sviluppo in serie di Taylor di  $\varphi$  in  $y_0$

Esercizio extra 4.4. Si dimostri che l'identità  $f(x, y) = 0$  con

$$f(x, y) = 2x(y-1)^2 + 3y + \frac{1}{16}(y-2)(x-1)^5,$$

definisce implicitamente una funzione  $x = \psi(y)$  nel punto  $y_0 = 2$  e si calcoli uno sviluppo in serie di Taylor di  $\varphi$  in  $y_0$

Esercizio extra 4.5. Data la funzione  $f: \mathbb{R}^{2+3} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita come

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2 \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + y_3 - 1 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + y_3^2 - 1 \end{bmatrix}$$

si dimostri che l'equazione  $f = \mathbf{0}$  definisce implicitamente una funzione  $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$  con  $\varphi(0, 0) = (0, 1, 1)$ . Si calcoli lo jacobiano di  $\varphi$  in quel punto.

Esercizio extra 4.6. Sia  $C$  la circonferenza centrata nell'origine di raggio 1. Sia  $\Gamma$  la famiglia delle circonferenze con centro sulla circonferenza  $C$  e tangenti all'asse  $x$ . Si determini l'involuppo di  $\Gamma$ .

Esercizio extra 4.7. Si consideri il luogo dei punti definito dall'insieme

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \doteq (x^2 + y^2)^2 - (x + y^2 + xy^2) = 0\},$$

- si determinino i punti  $P_i = (x_i, y_i)$  di intersezioni con gli assi cartesiani,
- per ognuno dei punti  $P_i$  si dica se l'identità  $f(x, y) = 0$  definisce implicitamente una funzione  $y = \varphi_i(x)$  in un intorno di  $x_i$  tale che  $y_i = \varphi_i(x_i)$ ,
- per ogni punto  $P_i$ , si determini l'equazione della retta tangente a  $\Gamma$  in  $P_i$
- si dica se  $\Gamma$  è compatto
- si tracci un grafico qualitativo di  $\Gamma$ .

Esercizio extra 4.8 (Bifolium). Si consideri il luogo dei punti definito dall'insieme

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \doteq (x^2 + y^2)^2 - 4xy^2 = 0\},$$

- si determinino i punti  $P_i = (x_i, y_i)$  di intersezioni con gli assi cartesiani,
- per ognuno dei punti  $P_i$  si dica se l'identità  $f(x, y) = 0$  definisce implicitamente una funzione  $y = \varphi_i(x)$  in un intorno di  $x_i$  tale che  $y_i = \varphi_i(x_i)$ ,
- per ogni punto  $P_i$ , si determini l'equazione della retta tangente a  $\Gamma$  in  $P_i$ ,
- si scriva  $f$  in coordinate polari e si determini il semipiano in cui giace  $\Gamma$ ,
- si dica se  $\Gamma$  è compatto.
- si tracci un grafico qualitativo di  $\Gamma$ .

## Capitolo 5

# Serie di potenze, di funzioni, e di Fourier

### 5.1 Successioni e serie numeriche

**Teorema 5.1.1.** *Condizione necessaria affinché una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converga è che  $a_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .*

Per verificare la convergenza di una serie numerica si possono usare diversi criteri.

**Proposizione 5.1.1** (criterio del confronto). *Siano  $\sum_n a_n$  e  $\sum_n b_n$  due serie a termini non negativi tali che  $a_n \leq b_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Allora*

- *se la serie  $\sum_n b_n$  è convergente, allora anche la serie  $\sum_n a_n$  è convergente;*
- *se la serie  $\sum_n a_n$  è divergente, allora anche la serie  $\sum_n b_n$  è divergente.*

**Proposizione 5.1.2** (criterio del confronto asintotico). *Se le due successioni a termini positivi  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sono asintotiche,  $a_n \sim b_n$ , allora le serie  $\sum_n a_n, \sum_n b_n$  hanno lo stesso carattere (o sono entrambe convergenti o entrambe divergenti).*

**Proposizione 5.1.3** (criterio della radice). *Sia  $\sum_n a_n$  una serie a termini non negativi. Se esiste il limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$$

*allora*

- *se  $\ell < 1$  allora la serie  $\sum_n a_n$  converge,*
- *se  $\ell > 1$  allora la serie  $\sum_n a_n$  diverge,*
- *se  $\ell = 1$  allora non si può concludere nulla sulla natura della serie  $\sum_n a_n$ .*

**Proposizione 5.1.4** (criterio del rapporto). *Sia  $\sum_n a_n$  una serie a termini non negativi. Se esiste il limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$$

*allora*

- *se  $\ell < 1$  allora la serie  $\sum_n a_n$  converge,*
- *se  $\ell > 1$  allora la serie  $\sum_n a_n$  diverge,*
- *se  $\ell = 1$  allora non si può concludere nulla sulla natura della serie  $\sum_n a_n$ .*



**Definizione 5.1.1.** Una serie  $\sum_n a_n$  si dice *assolutamente convergente* se la serie  $\sum_n |a_n|$  converge.

**Teorema 5.1.2.** La convergenza assoluta di una serie ne implica la convergenza semplice.

**Proposizione 5.1.5** (criterio di Leibniz). Data la serie a segni alterni

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se la successione  $(a_n)_n$  è decrescente e  $a_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , allora la serie è convergente.

Esercizio 5.1.1. Si discuta la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{2n^3+2n+2}.$$

La serie è a termini positivi. Di conseguenza, convergenza semplice e assoluta coincidono. Per il criterio del confronto asintotico,

$$\frac{n+3}{2n^3+2n+2} \sim \frac{1}{n^2}$$

e la serie converge.

Esercizio 5.1.2. Si discuta la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} 3^{n+1}}{n!}.$$

La serie è a termini positivi. Di conseguenza, convergenza semplice e assoluta coincidono. Per il criterio del rapporto, scriviamo la quantità  $a_{n+1}/a_n$ :

$$\frac{\frac{\sqrt{n+1} 3^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{\sqrt{n} 3^{n+1}}{n!}} = \frac{\sqrt{n+1} 3^{n+2}}{(n+1) n!} \frac{n!}{\sqrt{n} 3^{n+1}} = 3 \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \frac{1}{n}.$$

Questa quantità tende a zero per  $n \rightarrow \infty$ . Di conseguenza la serie converge semplicemente e assolutamente.

Esercizio 5.1.3. Si discuta la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^{\frac{n}{2}}}.$$

La serie è a termini positivi. Di conseguenza, convergenza semplice e assoluta coincidono. Per il criterio della radice, calcoliamo

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^{\frac{n}{2}}}} = \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Per  $n \rightarrow \infty$  il termine a destra converge a zero, e la serie converge semplicemente e assolutamente.

Esercizio 5.1.4. Si discuta la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}.$$

I coefficienti  $a_n$  non sono tutti non-negativi, e non si può quindi applicare nè il criterio della radice nè il criterio del rapporto. Studiamo direttamente la convergenza assoluta:

$$|a_n| = \left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| = \frac{|\sin(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo utilizzato il fatto che, poiché  $\sin(x) \in [-1, 1], \forall x \in \mathbb{R}$ , allora  $|\sin(x)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . Per il criterio del confronto, poiché  $\sum_n n^{-2}$  converge, anche la serie  $\sum_n |\sin(n)n^{-2}|$  converge. La serie converge assolutamente e, di conseguenza, converge anche semplicemente.

Esercizio 5.1.5. Si discuta la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n+\sqrt{n}}.$$

Il termine  $a_n = (1+n+\sqrt{n})^{-1}$  è strettamente positivo per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Si ha che  $a_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Inoltre, notiamo che la successione dei termini è strettamente decrescente:

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+(n+1)+\sqrt{n+1}} < \frac{1}{1+n+\sqrt{n}} = a_n.$$

Quindi si può applicare il criterio di Leibniz e la serie converge semplicemente.

Al contrario, poiché  $|a_n| \sim n^{-1}$  si ha, per il criterio del confronto asintotico, che la serie non converge assolutamente.

Esercizio 5.1.6. Si discuta la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{\frac{2+n^2}{n+1}}}{2^{2n}}.$$

La serie è a termini positivi. Di conseguenza, convergenza semplice e assoluta coincidono. Per il criterio della radice, calcoliamo

$$\sqrt[n]{\frac{3^{\frac{2+n^2}{n+1}}}{2^{2n}}} = \frac{3^{\frac{2+n^2}{n^2+n}}}{2^2}$$

e osserviamo che

$$\frac{n^2+2}{n^2+n} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Di conseguenza,

$$\frac{3^{\frac{2+n^2}{n^2+n}}}{2^2} \rightarrow \frac{3}{4} < 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Segue che la serie converge assolutamente e semplicemente.

Esercizio 5.1.7. Si discuta la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}.$$

Studiamo direttamente la convergenza assoluta, ovvero la convergenza di  $\sum_n \frac{2^n}{n!}$ . Per il criterio del rapporto, calcoliamo

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1) n!} \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

La serie converge assolutamente e, di conseguenza, anche semplicemente.

Esercizio 5.1.8. Si discuta la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n + \sqrt{n}}.$$

Notiamo che per  $n$  intero,  $\cos(n\pi) = (-1)^n$  e la serie si può riscrivere come

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sqrt{n}}.$$

Chiaramente

$$\frac{1}{n + \sqrt{n}} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n + \sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty, \quad \frac{1}{(n+1) + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{n + \sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e si può applicare il criterio di Leibniz, per cui la serie converge semplicemente.

Al contrario, poiché

$$\frac{1}{n + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$$

si ha che, per il criterio del confronto asintotico, la serie non converge assolutamente.

## 5.2 Serie di potenze

**Definizione 5.2.1.** Siano  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di numeri reali. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{5.1}$$

è detta *serie di potenze* di coefficienti  $a_n$  e centro  $x_0$ .

**Definizione 5.2.2.** Per una serie di potenze come in (5.1), si dice *raggio di convergenza* il numero  $R \geq 0$

$$R = \sup \left\{ r \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{ converge} \right\}.$$

Esercizio 5.2.1. Si determini il raggio di convergenza  $R$  della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{3^n}$$

studiando anche la convergenza della serie per  $x = \pm R$ .

$$\sqrt[n]{\frac{n^2 x^n}{3^n}} = \frac{n^{\frac{2}{n}} x}{3} \rightarrow \frac{x}{3}, \quad n \rightarrow \infty$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo utilizzato il fatto che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .<sup>1</sup> La serie converge se  $x < 3$  e quindi  $R = 3$ .

Agli estremi abbiamo che, se  $x = 3$ , la serie  $\sum_n n^2$  è divergente. Se invece  $x = -3$ , la serie  $\sum_n (-1)^n n^2$  è irregolare.

Esercizio 5.2.2. Si determini il raggio di convergenza  $R$  della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n!}$$

studiando anche la convergenza della serie per  $x = \pm R$ .

Per il criterio del rapporto,

$$\frac{10^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{10^n x^n} = \frac{10}{n+1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Notiamo che il limite è nullo indipendentemente dal valore di  $x$ . Di conseguenza la serie converge su tutto  $\mathbb{R}$ :  $R = +\infty$ .

Esercizio 5.2.3. Si determini il raggio di convergenza  $R$  della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^e x^n}{e^n}$$

studiando anche la convergenza della serie per  $x = \pm R$ .

Per il criterio della radice

$$\sqrt[n]{\frac{n^e x^n}{e^n}} = \frac{n^{\frac{e}{n}} x}{e} \rightarrow \frac{x}{e}, \quad n \rightarrow \infty$$

si ha che il raggio di convergenza è  $R = e$ . Studiando gli estremi si ha che, se  $x = e$  la serie diventa  $\sum_n n^e$  che diverge. Se invece  $x = -e$ , la serie  $\sum_n (-1)^n n^e$  è irregolare.

## 5.3 Serie di funzioni

**Definizione 5.3.1.** Sia  $D \subset \mathbb{R}^m$  un aperto,  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione. Diremo allora

- $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente a  $f$  se

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|f_i(x) - f(x)\| = 0, \quad \forall x \in D,$$

- $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $f$  se

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|f_i(x) - f(x)\|_{\infty} \doteq \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{x \in D} \|f_i(x) - f(x)\| = 0,$$

---

<sup>1</sup>per dimostrarlo, scrivere  $\sqrt[n]{n}$  come  $\exp(\log(\sqrt[n]{n})) \dots$

**Definizione 5.3.2.** Sia  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  un intervallo aperto,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Consideriamo la successione  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  di somme parziali

$$s_n : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad s_n(x) \doteq \sum_{j=0}^n f_j(x)$$

e sia  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremo allora che la serie  $\sum_n f_n(x)$

- converge puntualmente a  $s$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n(x) - s(x)| = 0 \quad \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x) \right], \quad \forall x \in I$$

- converge uniformemente a  $s$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - s\|_\infty = 0$$

- converge totalmente a  $s$  se converge puntualmente ed esiste una successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tale che

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty.$$

**Proposizione 5.3.1.** La convergenza totale implica quella uniforme, e la convergenza uniforme implica quella puntuale.

**Proposizione 5.3.2.** Se  $f_n \in \mathcal{C}(I), \forall n \in \mathbb{N}$  con  $I$  chiuso e limitato. Se la serie  $\sum_n f_n$  converge totalmente a una funzione  $s$ , allora  $s \in \mathcal{C}^0(I)$ .

**Proposizione 5.3.3.** Se  $f_n \in \mathcal{C}(I), \forall n \in \mathbb{N}$  con  $I$  chiuso e limitato. Se la serie  $\sum_n f_n$  converge totalmente a una funzione  $s$ , allora

$$\int_I s(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(x) dx.$$

Esercizio 5.3.1. Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto nx \exp(-n^2 x^2).$$

Notiamo che, per ogni  $x$  fissato,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx \exp(-n^2 x^2) = 0.$$

Di conseguenza, la successione converge puntualmente alla funzione identicamente nulla.

Se  $(f_n)$  convergesse uniformemente dovrebbe convergere a  $f \equiv 0$ . Calcoliamo

$$f'_n(x) = n(1 - 2n^2 x^2) \exp(-n^2 x^2)$$

che si annulla in  $x_n^\pm = \pm(\sqrt{2}n)^{-1}$ . Quindi,  $f_n$  ammette minimo e massimo in, rispettivamente  $x = \mp(\sqrt{2}n)^{-1}$ , e  $f_n(\mp(\sqrt{2}n)^{-1}) = \mp e^{-2} (2)^{-1/2}$ .

Poiché  $f_n$  è regolare per ogni  $n$ , e  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ , si ha che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = |f_n(x_n^\pm)| = e^{-2} \sqrt{2}$$

e la successione non converge uniformemente.

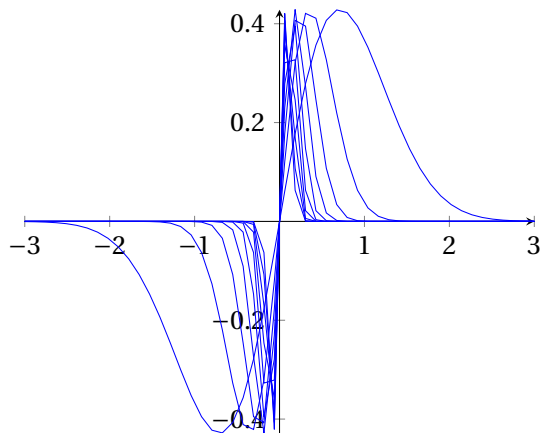


Figura 5.1: Alcune funzioni della successione in Esercizio 5.3.1.

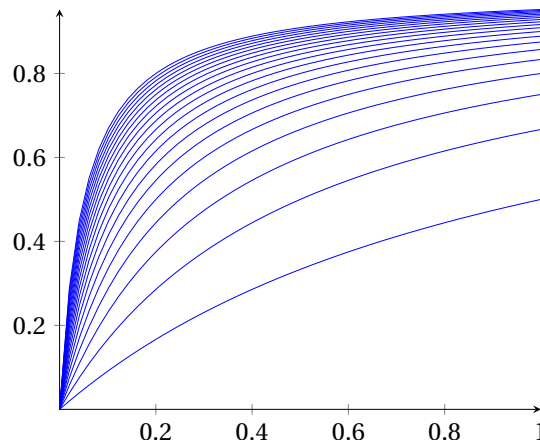


Figura 5.2: Alcune funzioni della successione in Esercizio 5.3.2.

Esercizio 5.3.2. Si studi convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{nx}{1 + nx}$$

Abbiamo che  $f_n(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Inoltre, per ogni  $x \in (0, 1]$  fissato, si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$ . La successione  $f_n$  tende quindi puntualmente alla funzione discontinua

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \in (0, 1] \end{cases}.$$

Se ci fosse convergenza uniforme, la funzione  $f$  dovrebbe essere continua in  $[0, 1]$ . Non essendo così, non vi può essere convergenza uniforme.

Tuttavia, possiamo dimostrare che vi è convergenza uniforme in tutti gli intervalli chiusi  $[\varepsilon, 1], \varepsilon > 0$

$$\sup_{x \in [\varepsilon, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [\varepsilon, 1]} \left| \frac{nx}{1 + nx} - 1 \right| = \sup_{x \in [\varepsilon, 1]} \left| \frac{-1}{1 + nx} \right| = \frac{1}{1 + n\varepsilon}$$

La quantità a destra tende a zero per  $n \rightarrow \infty$  per ogni valore di  $\varepsilon > 0$ .

Esercizio 5.3.3. Si dimostri che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+x}$$

converge puntualmente ma non uniformemente su  $(0, +\infty)$ , e converge totalmente in  $(x, +\infty)$ , con  $c > 0$ .

Applicando il criterio del rapporto, calcoliamo

$$\frac{e^{-(n+1)x}}{n+1+x} \frac{n+x}{e^{-nx}} = e^{-x} \frac{n+x}{n+1+x}$$

Poiché  $e^{-x} < 1$  per  $x > 0$  e  $\frac{n+x}{n+1+x} < 1$ , si ha che la quantità a destra è strettamente minore di uno per ogni  $x > 0$ . Ne segue che la serie converge puntualmente.

Verifichiamo ora che la convergenza non è uniforme in  $(0, \infty)$ . Per ogni  $M > N, M, N \in \mathbb{N}$ , consideriamo il “resto” della serie

$$\sup_{x>0} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+x} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{-nx}}{n+x} \right| = \sup_{x>0} \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+x} \right| \geq \sup_{x>0} \left| \sum_{n=N}^M \frac{e^{-nx}}{n+x} \right|.$$

Consideriamo ora una successione  $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  con  $x_j \rightarrow 0^+$ . Allora

$$\sup_{x>0} \left| \sum_{n=N}^M \frac{e^{-nx}}{n+x} \right| \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=N}^M \frac{e^{-nx_j}}{n+x_j} \right| = \left| \sum_{n=N}^M \frac{1}{n} \right|.$$

Poiché la serie  $\sum_n 1/n$  diverge, allora esiste  $M > 0$  tale che

$$\sum_{n=N}^M \frac{1}{n} > N$$

e

$$\sup_{x>0} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+x} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{-nx}}{n+x} \right| > N \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty.$$

Si conclude che la serie non converge uniformemente in  $(0, +\infty)$ .

Sia ora  $c > 0$  fissato. Determiniamo

$$\sum_{x \in (c, +\infty)} |f_n(x)| = \sum_{x \in (c, +\infty)} f_n(x).$$

Per fare ciò, calcoliamo

$$f'_n(x) = -e^{-nx} \frac{1+n^2+nx}{(n+x)^2}$$

e  $f'_n(0) = 0$  per  $x = -(1+n^2)n^{-1} < 0$ . Ne segue che  $f_n$  è decrescente su  $[c, +\infty)$ . Di conseguenza

$$\sup_{x \in (c, +\infty)} |f_n(x)| = f_n(c)$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in (c, +\infty)} |f_n(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(c).$$

Il termine a destra converge per convergenza puntuale. Si ha quindi convergenza totale su  $(c, +\infty)$ .

Esercizio 5.3.4. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x}{n^3+x}$$

si dimostri che converge puntualmente in  $[0, +\infty)$  e totalmente sui compatti di  $[0, +\infty)$ . Dimostrare che la convergenza su  $[0, +\infty)$  non è uniforme.

Per ogni  $x$  fissato, la serie converge per il criterio del confronto asintotico ( $\frac{n+x}{n^3+x} \sim \frac{1}{n^2}$ ). Chiamiamo  $K$  un generico compatto di  $[0, +\infty)$ . Allora esiste  $R > 0$  tale che  $K \subset B(0, R)$  da cui

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K} \left| \frac{n+x}{n^3+x} \right| &\leq \frac{n+R}{n^3}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in K} \left| \frac{n+x}{n^3+x} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{R}{n^3} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}. \end{aligned}$$

L'ultimo termine è finito e la serie converge quindi totalmente su  $K$ .

Dimostriamo ora che la convergenza non è uniforme su  $[0, +\infty)$ . Consideriamo  $M, N \in \mathbb{N}$  con  $M > N$  e consideriamo

$$\sup_{x \geq 0} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x}{n^3+x} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{n+x}{n^3+x} \right| = \sup_{x \geq 0} \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{n+x}{n^3+x} \right| \geq \sup_{x \geq 0} \left| \sum_{n=N}^M \frac{n+x}{n^3+x} \right|.$$

Per una successione  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  tendente a  $+\infty$  si ottiene

$$\sup_{x \geq 0} \left| \sum_{n=N}^M \frac{n+x}{n^3+x} \right| \geq \sum_{n=N}^M 1 = M - N + 1.$$

In particolare, per  $M = 2N - 1$ , la serie diverge per  $N \rightarrow \infty$ .

Esercizio 5.3.5. Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left( 1 + \frac{x}{n^2} \right)$$

converge puntualmente in  $[0, +\infty)$  e totalmente sui compatti di  $[0, +\infty)$ . Si determini inoltre

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \log \left( 1 + \frac{x}{n^2} \right) dx.$$

Poiché  $\log(1+x) < x, \forall x > 0$  si ha che, per ogni  $K$  compatto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in K} \left| \log \left( 1 + \frac{x}{n^2} \right) \right| \leq \sup_{x \in K} |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

e la serie converge quindi totalmente su  $K$ . In particolare, converge totalmente sul compatto  $[0, 1]$  e

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \log \left( 1 + \frac{x}{n^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \log \left( 1 + \frac{x}{n^2} \right) dx.$$

Procediamo per cambio di variabili:  $u = 1 + x/n^2$  da cui  $dx = n^2 du$ , ottenendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{1+\frac{1}{n^2}} n^2 \log(u) du = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [u \log(u) - u]_{u=1}^{u=1+\frac{1}{n^2}}.$$

Semplificando e riarrangiando si ottiene la quantità

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 1) \log \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) - 1.$$

### 5.3.1 Serie di Fourier

**Definizione 5.3.3.** Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica. Chiameremo la *serie di Fourier* di  $f$  la serie

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad (5.2)$$

dove i coefficienti  $a_n, b_n$  sono definiti come

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \end{aligned}$$



**Teorema 5.3.1.** Se  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ , allora la serie di Fourier converge in norma  $L^2$  a  $f$ .

**Proposizione 5.3.4.** Se  $f$  è differenziabile in  $x_0$ , allora la serie di Fourier converge puntualmente a  $f$  in  $x_0$ .

**Corollario 5.3.1.** Se in  $x_0$  la funzione  $f$  presenta una discontinuità di tipo salto ed  $f$  ammette derivate destra e sinistra, allora la serie di Fourier converge, in  $x_0$  alla media tra limite destro e sinistro di  $f$  in  $x_0$ .

**Proposizione 5.3.5** (identità di Parseval). Per una funzione  $f$  con serie di Fourier definita come in (5.2) vale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

Esercizio 5.3.6 (onda triangolare). Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'estensione  $2\pi$ -periodica, pari, tale che

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - x, \quad x \in [0, \pi].$$

Se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier e si studi la convergenza della serie ottenuta.

Poiché  $f$  è pari, tutti i coefficienti  $b_n$  in (5.2) sono nulli. Calcoliamo allora

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = 0, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(nx) dx. \end{aligned}$$

Integrando per parti, l'ultimo integrale diventa

$$\frac{2}{\pi} \left( \underbrace{\left[ \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_{x=0}^{x=\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi} -\frac{\sin(nx)}{n} dx \right) = \frac{2}{n\pi} \left[ -\frac{\cos(nx)}{n} \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n^2}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che, per  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ ,

Si conclude che la serie di Fourier è

$$s(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

Poiché  $f$  è limitata, allora  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  e la serie di Fourier converge in norma  $L^2$  ad  $f$ . Per  $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ,  $f$  è continua e derivabile e, di conseguenza, la serie converge puntualmente a  $f$ . Per  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ,  $f$  è continua e ammette derivate destra e sinistra ed abbiamo quindi anche  $s(k\pi) = f(k\pi)$  ed  $s$  converge puntualmente a  $f$  su tutto  $\mathbb{R}$ .

Esercizio 5.3.7 (onda a dente di sega). Sia  $f(t)$  la funzione  $2\pi$ -periodica definita in  $[-\pi, \pi)$  come  $f(t) = t$ . Se ne calcoli la serie di Fourier e se ne discuta la convergenza.

Dato che  $f$  è dispari, i coefficienti  $a_0, a_n$  sono nulli. Calcoliamo allora

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left( \left[ -\frac{t \cos(nt)}{n} \right]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{\cos(nt)}{n} dt \right) = -\frac{2}{n} (-1)^n.$$

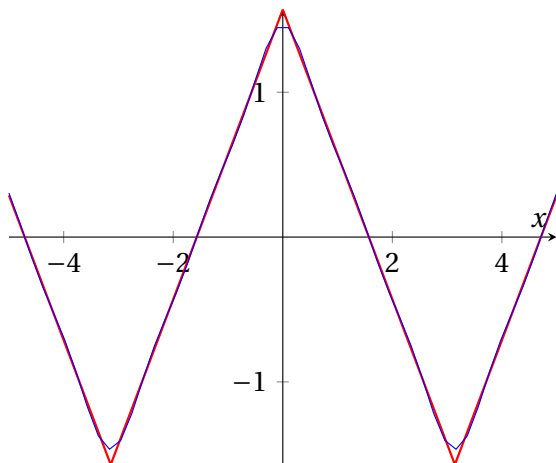


Figura 5.3: L'onda triangolare dell'Esercizio 5.3.6. In rosso la funzione, in blu la serie di Fourier fino a  $n = 5$ .

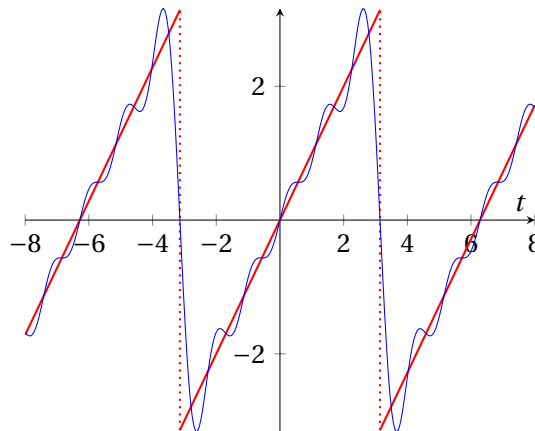


Figura 5.4: L'onda a dente di sega dell'Esercizio 5.3.7. In rosso la funzione, in blu la serie di Fourier fino a  $n = 5$ .

La serie di Fourier è quindi

$$s(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt).$$

La funzione  $f$  è  $L^2(-\pi, \pi)$ , quindi la serie converge in norma  $L^2$  ad  $f$ . Per  $t \neq \pi + 2k\pi$ ,  $s$  converge puntualmente a  $f$  in quanto  $f$  è continua e derivabile. In  $t = \pi + 2k\pi$ , la serie è nulla:  $\sin(n(\pi + 2k\pi)) = \sin(n\pi(1 + 2k)) = 0$ .

Esercizio 5.3.8. Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione  $2\pi$ -periodica definita, su un singolo periodo, come

$$f(t) = \begin{cases} -1 & t \in [-\pi, 0) \\ 2 & t \in (0, \pi) \end{cases}.$$

Se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier e se ne studi la convergenza puntuale.

Notiamo che  $a_n = 0, n \geq 1$ . Questo perché la funzione  $f$  è una traslazione di una funzione dispari. Detto in altro modo, la funzione  $g(t) = f(t) - 1/2$  è dispari.

Calcoliamo i coefficienti  $a_0$  e  $b_n$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 1 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -\sin(nt) dt + \int_0^{\pi} 2 \sin(nt) dt \right) = \frac{3}{n\pi} (1 - (-1)^n). \end{aligned}$$

La serie di Fourier di  $f$  è quindi

$$s(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin(nt).$$

La serie converge puntualmente per  $t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$  in quanto  $f$  è continua e derivabile in quei punti. Al contrario, per  $t = k\pi$  la serie converge a  $1/2$ .

Esercizio 5.3.9. Si consideri la funzione dispari,  $2\pi$ -periodica data, in  $[0, \pi]$  da  $f(x) = x(\pi - x)$ . Se ne calcoli la serie di Fourier

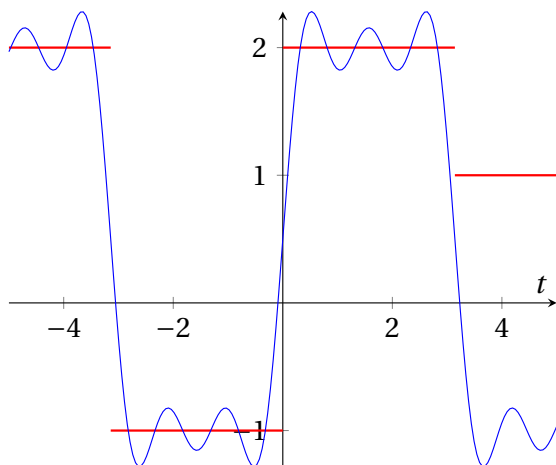


Figura 5.5: L'onda quadra dell'Esercizio 5.3.8. In rosso la funzione, in blu la serie di Fourier fino a  $n = 5$ .

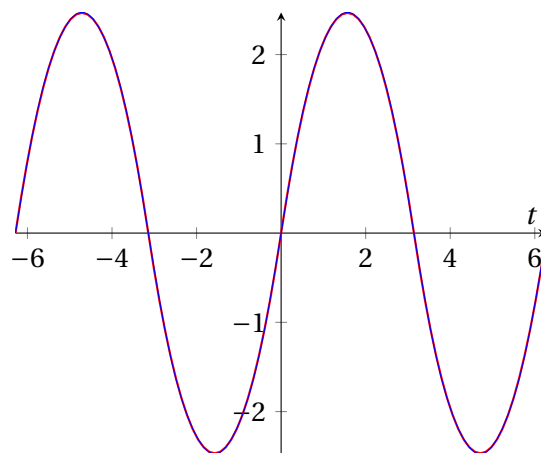


Figura 5.6: L'onda a arco di parabola dell'Esercizio 5.3.9. In rosso la funzione, in blu la serie di Fourier fino a  $n = 5$ .

*Osservazione 5.3.1.* Si osservi che per funzioni più regolari, i coefficienti della serie di Fourier tendono a convergere a zero più velocemente. Ad esempio per funzioni come quelle in Esercizio 5.3.7 e 5.3.8, che hanno punti di discontinuità, i coefficienti della serie sono proporzionali a  $n^{-1}$ . Al contrario, per la funzione in Esercizio 5.3.6, che è continua ma presenta punti angolosi, i coefficienti sono proporzionali a  $n^{-2}$ . Infine, per la funzione in Esercizio 5.3.9, che è di classe  $\mathcal{C}^1$  in tutto il dominio, i coefficienti sono proporzionali a  $n^{-3}$ .

Esercizio 5.3.10. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -periodica definita, in  $[-\pi, \pi)$  da

$$f(t) = \begin{cases} -t & t \in [-\pi, 0) \\ \pi & t \in [0, \pi) \end{cases}.$$

Se ne calcoli lo sviluppo in serie di Fourier e se ne discuta la convergenza puntuale.

Poiché  $f$  non è né pari né dispari, dobbiamo calcolare sia i coefficienti  $a_n$  che i coefficienti  $b_n$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t dt + \int_0^{\pi} \pi dt \right) = \frac{3\pi}{2}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t \cos(nt) dt + \int_0^{\pi} \pi \cos(nt) dt \right) = -\frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t \sin(nt) dt + \int_0^{\pi} \pi \sin(nt) dt \right) = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Otteniamo dunque la serie di Fourier

$$s(t) = \frac{3}{4}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos(nt) + \frac{1}{n} \sin(nt).$$

La serie converge puntualmente per  $t \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Infatti, la funzione  $f$  è continua e differenziabile per  $t \neq k\pi$ , ma per i punti  $t = \pi + 2k\pi$  la funzione  $f$  è continua e ammette derivate destra e sinistra. Nei punti  $t = 2k\pi$  la funzione ha delle discontinuità di tipo salto, e la serie di Fourier assume il valore medio tra limite destro e sinistro:  $s(2k\pi) = \frac{\pi}{2}$ .

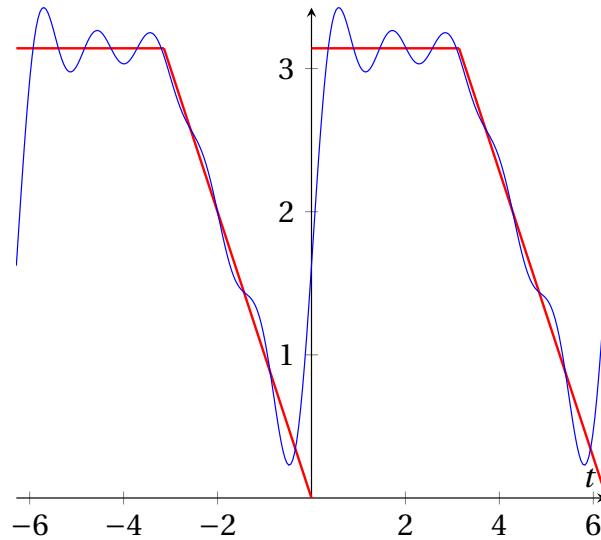


Figura 5.7: Esercizio 5.3.10. In rosso la funzione, in blu la serie di Fourier fino a  $n = 5$ .

## 5.4 Esercizi extra

Esercizio extra 5.1. Si studi la convergenza puntuale, uniforme, e totale della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+n}} e^{-nx} \sin(\sin(nx))$$

in  $I = [0, +\infty)$ .

Esercizio extra 5.2. Si studi la convergenza puntuale, uniforme, e totale della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n} + n^2 - \log(n)}{n^5 + e^{-2n} + 1} \cos(nx)$$

in  $I = \mathbb{R}$ .

Esercizio extra 5.3. Si studi la convergenza puntuale, uniforme, e totale della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n) + n - \log(6n)}{n^6 + e^{-5n} + 3} \cos(nx)$$

in  $I = \mathbb{R}$ .

Esercizio extra 5.4. Si studi la convergenza puntuale, uniforme, e totale della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}} e^{-4t} \cos(nx)$$

per  $(t, x) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$ .

Esercizio extra 5.5. Si calcoli lo sviluppo in serie di Fourier di

$$f(x) = |\sin(x)|, \quad x \in \mathbb{R}$$

e se ne discuta la convergenza puntuale.

Esercizio extra 5.6. Si calcoli lo sviluppo in serie di Fourier di

$$f(x) = \cos^4(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

e se ne discuta la convergenza puntuale.

Esercizio extra 5.7. Si calcoli lo sviluppo in serie di Fourier di

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \in [-\pi, 0] \\ \frac{x^2}{\pi} & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

estesa per  $2\pi$ -periodicità, e se ne discuta la convergenza puntuale.

## Capitolo 6

# Integrali per funzioni $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

### 6.1 Formula dell'integrale iterato e cambio di variabili

Facendo riferimento alla Figura 6.1, si immagini di voler calcolare l' integrale  $\iint \cdots \iint_A f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$  su un dominio  $A \subset \mathbb{R}^n$  espresso rispetto alle variabili  $x_i$ . Per fare ciò possiamo considerare un isomorfismo  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{u} = \varphi(\mathbf{x})$ . Allora, si ha

$$\begin{aligned} \iint \cdots \iint_A f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ = \iint \cdots \iint_{\varphi(A)} f(\varphi^{-1}(u_1, u_2, \dots, u_n)) |\det(\mathbf{J}_{\varphi^{-1}}(u_1, u_2, \dots, u_n))| du_1 du_2 \cdots du_n. \end{aligned} \quad (6.1)$$

dove  $\mathbf{J}_{\varphi^{-1}}$  è la matrice jacobiana della funzione inversa  $\varphi^{-1}$ . Si ricorda che questa è pari all'inversa della matrice jacobiana  $\mathbf{J}_{\varphi}$ , e che il determinante dell'inversa di una matrice è pari all'inverso del determinante della matrice stessa.

Esercizio 6.1.1. Calcolare l'integrale

$$I = \iint_D xy dx dy$$

dove  $D$  è la porzione di piano delimitata dalle parabole di equazione  $y^2 - 4x = 0$  e  $x^2 - 4y = 0$ .

Scriviamo il dominio  $D$  come (si veda Figura 6.2)

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 4], y \in \left[ \frac{x^2}{4}, 2\sqrt{x} \right] \right\}.$$

Così facendo, l'integrale  $I$  può essere scritto come

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 \int_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} xy dy dx \\ &= \int_0^4 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y=\frac{x^2}{4}}^{y=2\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^4 2x^2 - \frac{x^5}{32} dx \\ &= \left[ \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^6}{192} \right]_{x=0}^{x=4} \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

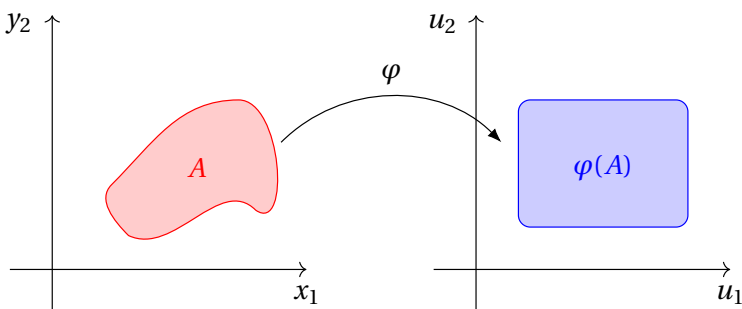


Figura 6.1: Rappresentazione schematica del cambio di variabili in  $\mathbb{R}^2$ .

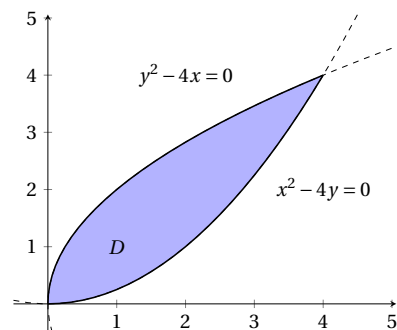


Figura 6.2: Dominio di integrazione dell'Esercizio 6.1.1.

Esercizio 6.1.2. Calcolare

$$I = \iint_D \frac{y}{1+x} dx dy$$

dove  $D$  è il triangolo di vertici  $(-1, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(2, 0)$ .

Con riferimento alla Figura 6.3 abbiamo che i lati del triangolo giacciono sulle seguenti rette:

$$r_1 : y = 0,$$

$$r_2 : y = 2x + 2,$$

$$r_3 : y = -x + 2.$$

Il dominio  $D$  può essere quindi scritto come l'unione di due domini come segue:

$$D = \underbrace{\{(x, y) : x \in [-1, 0], y \in [0, 2x + 2]\}}_{D_1} \cup \underbrace{\{(x, y) : x \in [0, 2], y \in [0, 2 - x]\}}_{D_2}.$$

Possiamo quindi scrivere l'integrale su  $D$  come la somma dei due integrali su  $D_1$  e  $D_2$  (si noti che andrebbe tolto l'integrale su  $D_1 \cap D_2 = \{(0, y), y \in [0, 2]\}$  che però è nullo):

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^0 \int_0^{2x+2} \frac{y}{1+x} dy dx + \int_0^2 \int_0^{2-x} \frac{y}{1+x} dy dx \\ &= \int_{-1}^0 \left[ \frac{y^2}{2(1+x)} \right]_{y=0}^{y=2x+2} + \int_0^2 \left[ \frac{y^2}{2(1+x)} \right]_{y=0}^{y=2-x} \\ &= \int_{-1}^0 (2x+2) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x - 5 + \frac{9}{1+x} dx \\ &= [x^2 + 2x]_{x=-1}^{x=0} + \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} - 5x + 9 \log|1+x| \right]_{x=0}^{x=2} \\ &= -3 + \frac{9}{2} \log(3) \end{aligned}$$

Esercizio 6.1.3. Calcolare

$$I = \iint_D |x| dx dy$$

dove  $D$  è la parte di piano interna al quadrato di vertici  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$ .

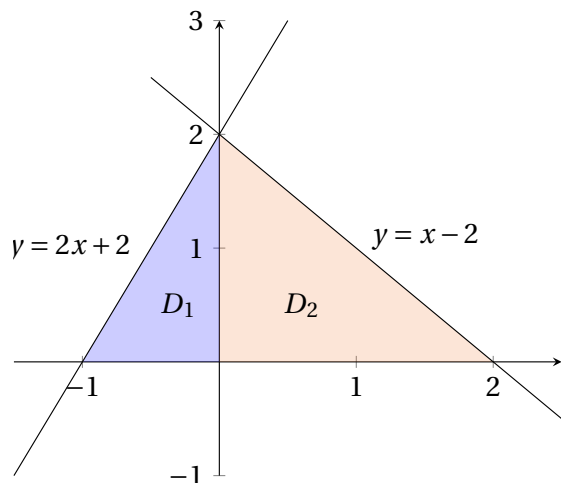


Figura 6.3: Dominio di integrazione dell'Esercizio 6.1.2.

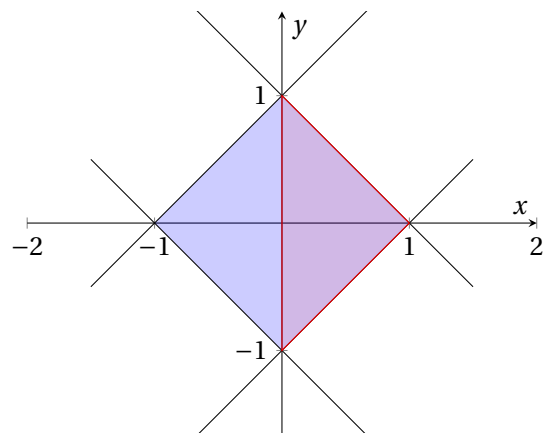
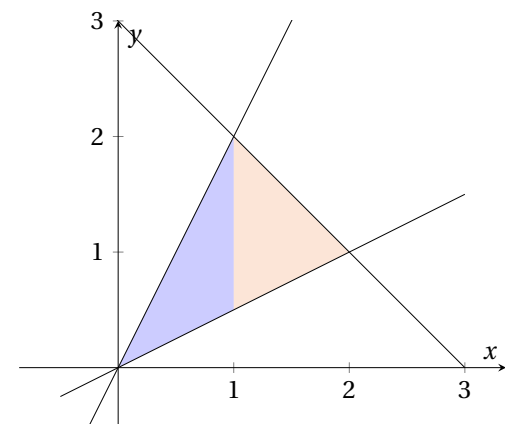
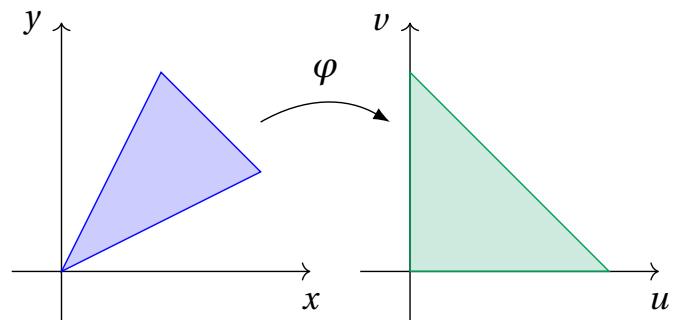


Figura 6.4: Dominio  $D$  dell'Esercizio 6.1.3 (in blu). In rosso il bordo del triangolo  $D_1$ .



(a) Dominio



(b) Cambio di variabili

Figura 6.5: Dominio e cambio di variabili per l'Esercizio 6.1.4.

Per simmetria

$$I = 2 \iint_{D_1} |x| dx dy$$

dove  $D_1$  è il triangolo di vertici  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$  e

$$I = 2 \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} |x| dy dx = 2 \int_0^1 x(2-2x) dx = \left[ -\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 6.1.4. Calcolare

$$I = \iint_D x dx dy$$

dove  $D$  è la parte di piano contenuta nel triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$ .



Con riferimento alla Figura 6.5a, possiamo scrivere il dominio  $D$  come  $D = D_1 \cup D_2$  con

$$D_1 = \left\{ (x, y) : x \in [0, 1], y \in \left[ \frac{x}{2}, 2x \right] \right\}, \quad D_2 = \left\{ (x, y) : x \in [1, 2], y \in \left[ \frac{x}{2}, 3-x \right] \right\}.$$

Ne segue che l'integrale  $I$  può essere scritto come la somma di due integrali, uno su  $D_1$  e l'altro su  $D_2$ :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{2x} x \, dy \, dx + \int_1^2 \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} x \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 x \frac{3x}{2} \, dx + \int_1^2 x \left( 3 - \frac{3x}{2} \right) \, dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{2} \right]_{x=0}^{x=1} + \left[ \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right]_{x=1}^{x=2} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Equivalentemente, con riferimento alla Figura 6.5b, possiamo passare alle coordinate  $(u, v)$  tali per cui il triangolo ha vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ . Per fare ciò, cerchiamo la mappa lineare  $\varphi$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \varphi \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

tale che

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si noti che, per definizione di funzione lineare, l'origine viene mappata nell'origine. Inoltre mappare i vertici  $(2, 1) \mapsto (1, 0)$  e  $(1, 2) \mapsto (0, 1)$  implica che i segmenti che costituiscono i lati del triangolo in  $x, y$  vengono mappati nei segmenti che costituiscono i lati del triangolo in  $u, v$ . Notiamo, infine, che la matrice jacobiana di  $\varphi$  coincide con la matrice  $\mathbf{A}$ .

Si ha

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \det(\mathbf{A}^{-1}) = 3.$$

Ne segue che

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-u} (2u+v) 3 \, dv \, du = 3 \int_0^1 2u(1-u) + \frac{(1-u)^2}{2} \, du = \frac{3}{2}.$$

Esercizio 6.1.5. Calcolare

$$I = \iint_D (y-x) \, dx \, dy$$

dove  $D$  è la porzione di piano interna al parallelogramma di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(2, 2)$ .

Poiché  $D$  è un parallelogramma con un vertice nell'origine, possiamo cercare una mappa lineare  $\varphi$  che mappi il dominio  $D$  nel quadrato  $[0, 1]^2$ . Infatti, l'origine viene mappata nell'origine. Inoltre, se determiniamo  $\varphi$  lineare tale che  $\varphi(1, 3) = (0, 1)$  e  $\varphi(2, 2) = (1, 0)$  allora, per linearità di  $\varphi$ , si ha

$$\varphi(3, 5) = \varphi((1, 3) + (2, 2)) = (0, 1) + (1, 0) = (1, 1)$$

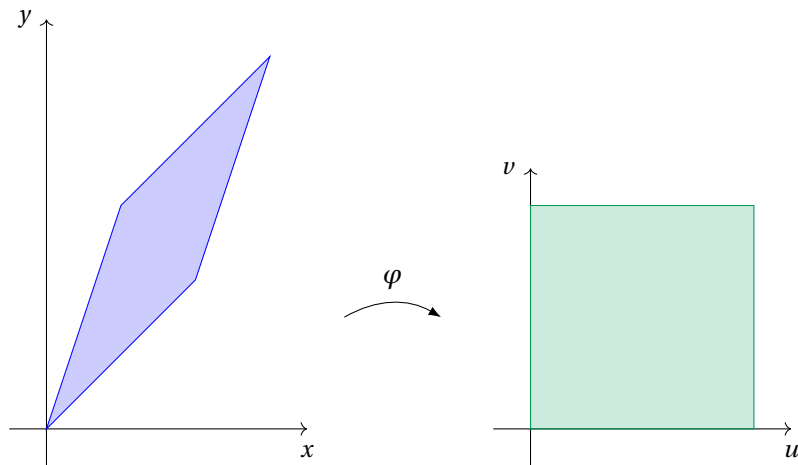


Figura 6.6: Cambio di variabili per l'Esercizio 6.1.5.

Vogliamo quindi determinare

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

tale che

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det(\mathbf{A}^{-1}) = 4.$$

Il cambio di variabili è quindi

$$x = 2u + v, \quad y = 2u + 3v.$$

Possiamo quindi calcolare l'integrale:

$$I = 4 \int_0^1 \int_0^1 2v dv du = 4 \int_0^1 [v^2]_{v=0}^{v=1} du = 4.$$

Esercizio 6.1.6. Calcolare

$$I = \iint_D \frac{|xy|}{x^2 + y^2} dx dy$$

dove  $D$  è il cerchio unitario di raggio  $R$ .

Per risolvere l'esercizio, passiamo in *coordinate polari*. Questo significa considerare l'isomorfismo

$$(x, y) = \varphi^{-1}(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)), \quad \rho \in [0, R], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Calcoliamone lo jacobiano:

$$\mathbf{J}_{\varphi^{-1}}(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \partial_\rho \varphi_1 & \partial_\theta \varphi_1 \\ \partial_\rho \varphi_2 & \partial_\theta \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad \det(\mathbf{J}_{\varphi^{-1}}(\rho, \theta)) = \rho,$$

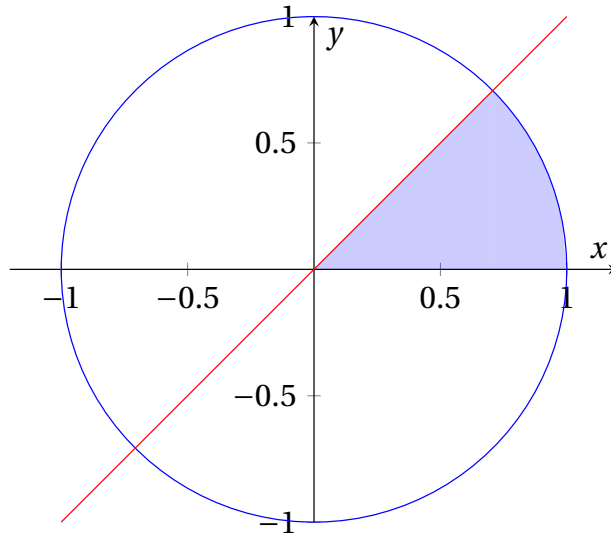


Figura 6.7: Dominio dell'Esercizio 6.1.7.

L'integrale diventa

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{|\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta)|}{\rho^2} \rho \, d\theta \, d\rho \\
 &= \left( \int_0^R \rho \, d\rho \right) \left( \int_0^{2\pi} |\cos(\theta) \sin(\theta)| \, d\theta \right) \\
 &= \frac{R^2}{2} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) \sin(\theta) \, d\theta \\
 &= 2R^2 \left[ \frac{\sin^2(\theta)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= R^2
 \end{aligned}$$

Esercizio 6.1.7. Calcolare l'integrale

$$I = \iint_D \frac{x+y}{1+x^2+y^2} \, dx \, dy$$

dove  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, 0 < y < x\}$ .

Passando in coordinate polari, con riferimento alla Figura 6.7, il dominio si scrive

$$\tilde{D} = \varphi(D) = \{(\rho, \theta) : \rho \in [0, 1], \theta \in [0, \pi/4]\}.$$

L'integrale diventa

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \frac{\rho(\cos(\theta) + \sin(\theta))}{1 + \rho^2} \rho \, d\rho \, d\theta \\
 &= \left( \int_0^1 \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} \, d\rho \right) \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(\theta) \sin(\theta) \, d\theta \right) \\
 &= \left( \int_0^1 1 - \frac{1}{1 + \rho^2} \, d\rho \right) [\sin(\theta) - \cos(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \\
 &= (1 - \arctan(1)) \\
 &= 1 - \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Esercizio 6.1.8. Calcolare

$$I = \iint_D |x|y^2 \, dx \, dy$$

dove  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

Consideriamo il cambio di coordinate *ellittiche*

$$(x, y) = \varphi^{-1}(\rho, \theta) = (1/2\rho \cos(\theta), \sin(\theta))$$

il cui jacobiano è

$$\mathbf{J}_{\varphi^{-1}}(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cos(\theta) & -\frac{1}{2} \rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

ed il determinante vale  $\det(\mathbf{J}_{\varphi^{-1}}) = \frac{1}{2}\rho$ . Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho |\cos(\theta)| \rho^2 \sin^2(\theta) \frac{\rho}{2} \, d\theta \, d\rho \\
 &= \frac{1}{4} \left( \int_0^1 \rho^4 \, d\rho \right) \left( \int_0^{2\pi} |\cos(\theta)| \sin^2(\theta) \, d\theta \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left[ \frac{\rho^5}{5} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) \sin^2(\theta) \, d\theta \\
 &= \frac{1}{5} \left[ \frac{\sin^3(\theta)}{3} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{15}
 \end{aligned}$$

Esercizio 6.1.9. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse  $x$  e la curva scritta in forma polare come  $\rho(\theta) = \theta, \theta \in [0, \pi]$

L'area si scrive come

$$\mathcal{A} = \iint_D 1 \, dx \, dy.$$

Passando in coordinate polari, si ottiene

$$\mathcal{A} = \int_0^\pi \int_0^\theta \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^\pi \frac{\theta^2}{2} \, d\theta = \frac{\pi^3}{6}.$$

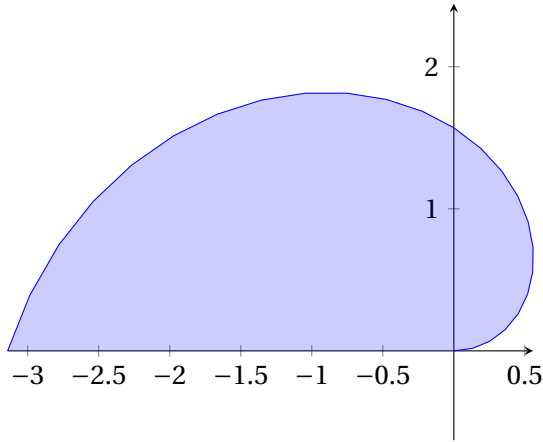


Figura 6.8: Dominio dell'Esercizio 6.1.9.

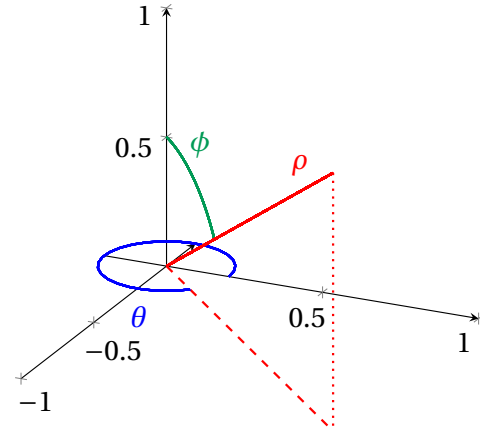


Figura 6.9: Schema delle coordinate sferiche.

Esercizio 6.1.10. Calcolare

$$I = \iiint_D |xy|y^2 dx dy dz$$

dove  $D$  è la sfera di raggio  $R$  centrata nell'origine.

Con riferimento alla Figura 6.9, definiamo le coordinate sferiche

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \varphi^{-1} \left( \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \\ \theta \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \rho \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \rho \cos(\phi) \end{bmatrix}.$$

La matrice jacobiana è

$$\mathbf{J}_{\varphi^{-1}}(\rho, \phi, \theta) = \begin{bmatrix} \sin(\phi) \cos(\theta) & -\rho \sin(\phi) \sin(\theta) & \rho \cos(\phi) \cos(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) & -\rho \sin(\phi) \cos(\theta) & \rho \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\phi) & 0 & -\rho \sin(\phi) \end{bmatrix}$$

il cui determinante è

$$\det(\mathbf{J}_{\varphi^{-1}}) = \rho^2 \sin(\phi).$$

Di conseguenza, l'integrale diventa

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\rho \sin(\phi) \cos(\theta)| \rho \cos(\phi) |(\rho \sin(\phi) \sin(\theta))^2| \rho^2 \sin(\phi) d\theta d\phi d\rho \\ &= \left( \int_0^R \rho^6 d\rho \right) \left( \int_0^\pi |\sin(\phi) \cos(\phi)| \sin^4(\phi) d\phi \right) \left( \int_0^{2\pi} |\cos(\theta)| \sin^2(\theta) d\theta \right) \\ &= \left( \int_0^R \rho^6 d\rho \right) \left( 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\phi) \sin^5(\phi) d\phi \right) \left( 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) \sin^2(\theta) d\theta \right) \\ &= 8 \left[ \frac{\rho^7}{7} \right]_{\rho=0}^{\rho=R} \left[ \frac{\sin^6(\phi)}{6} \right]_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\sin^3(\theta)}{3} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\ &= 8 \frac{R^7}{7} \frac{1}{6} \frac{1}{3} \\ &= \frac{4R^7}{63} \end{aligned}$$

Esercizio 6.1.11. Calcolare

$$I = \iiint_D z dx dy dz$$

dove  $D$  è il cono di altezza  $h$ , raggio  $R$ , e base posta sul piano  $(x, y)$ , con asse di simmetria coincidente all'asse  $z$ .

Passando in *coordinate cilindriche*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \varphi^{-1} \left( \begin{bmatrix} \rho \\ \theta \\ \zeta \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \rho \cos(\theta) \\ \rho \sin(\theta) \\ \zeta \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}_{\varphi^{-1}}(\rho, \theta, \zeta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(\mathbf{J}_{\varphi^{-1}}) = \rho,$$

l'integrale si riscrive come

$$\begin{aligned} I &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{h-\zeta} \zeta \rho d\rho d\theta d\zeta \\ &= 2\pi \int_0^h \zeta \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_{\rho=0}^{\rho=(h-\zeta)} d\zeta \\ &= \frac{\pi R^2}{h} \int_0^h \zeta (\zeta^2 - 2h\zeta + h^2) d\zeta \\ &= \frac{\pi R^2 h^2}{12} \end{aligned}$$

Esercizio 6.1.12. Calcolare

$$I = \iint_D \exp\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right) \left| \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \right| dx dy$$

dove  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + 4y^2 \leq 16\}$

Iniziamo riscrivendo il dominio  $D$

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (x, y) : x \geq 0, y \geq 0, \left(\frac{x^2}{2}\right) + y^2 \leq 4 \right\} \\ &= \{(2x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\} \\ &= \left\{ (2\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) : \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \rho \in [0, 2] \right\} \end{aligned}$$

Questo suggerisce il cambio di coordinate ellittiche

$$\varphi^{-1}(\rho, \theta) = (2\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$$

il cui jacobiano è

$$\mathbf{J}_{\varphi^{-1}}(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} 2\cos(\theta) & -2\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

ed ha determinante pari a  $\det(\mathbf{J}_{\varphi^{-1}}) = 2\rho$ . L'integrale si riscrive

$$I = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\rho^2} |\rho^2 - 1| 2\rho d\theta d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^2 e^{\rho^2} |\rho^2 - 1| 2\rho d\rho$$

L'integrale si risolve tramite il cambio di coordinate  $\sigma = \rho^2$  per cui  $d\sigma = 2\rho d\rho$  e

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^4 e^{\sigma} |\sigma - 1| d\sigma = \frac{\pi}{2} (e^4 + e - 1).$$

Esercizio 6.1.13. Calcolare

$$I = \iint_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

dove, per  $R > 1$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ .

Passando in coordinate polari,  $D = \{(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) : \rho \in [1, R], \theta \in [0, \pi/2]\}$ . L'integrale diventa quindi

$$I = \int_1^R \int_0^{\pi/2} \frac{\rho \cos(\theta)}{\rho^4} \rho d\rho d\theta = \left( \int_1^R \rho^{-2} d\rho \right) \left( \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta \right) = 1 - \frac{1}{R}$$

## 6.2 Integrali Curvilinei e Superficiali non orientati

### 6.2.1 Integrali di linea

**Teorema 6.2.1.** Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione e sia  $\gamma$  una curva di classe  $\mathcal{C}^1$  parametrizzata da  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Allora

$$\int_{\gamma} f d\ell = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt.$$

Esercizio 6.2.1. Data la funzione

$$f(x, y, z) = z^3$$

e la curva  $\gamma$  parametrizzata da

$$\mathbf{r}(t) = (t \cos(t), t \sin(t), t), t \in [\sqrt{2}, \sqrt{7}]$$

si calcoli l'integrale di linea  $\int_{\gamma} f d\ell$ .

Abbiamo che  $f(\mathbf{r}(t)) = t^3$  e

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (\cos(t) - t \sin(t), \sin(t) + t \cos(t), 1),$$

$$\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \sqrt{2 + t^2}.$$

L'integrale di linea diventa quindi

$$\int_{\gamma} f d\ell = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{7}} t^3 \sqrt{2 + t^2} dt$$

Tramite il cambio di variabili  $u = \sqrt{2 + t^2}$  da cui  $du = \frac{t}{\sqrt{2 + t^2}} dt$  abbiamo che l'integrale diventa

$$\int_2^3 u^4 - 2u^2 du = \left[ \frac{u^5}{5} - \frac{2}{3} u^3 \right]_{u=2}^{u=3} = \frac{383}{15}.$$

Esercizio 6.2.2. Data la funzione

$$f(x, y) = x$$

e la curva  $\gamma$  parametrizzata da

$$\mathbf{r}(t) = 2e^t (\cos(t), \sin(t)), \quad t \in [0, 4\pi]$$

si calcoli l'integrale di linea  $\int_{\gamma} f d\ell$ .

La curva si può scrivere in forma polare come  $\rho(\theta) = 2e^{\theta}$ . La velocità è quindi  $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \sqrt{\dot{\rho}^2(t) + \rho^2(t)} = 2\sqrt{2}e^t$ . L'integrale di linea si scrive quindi

$$\int_{\gamma} f d\ell = \int_0^{4\pi} 2e^t \cos(t) 2\sqrt{2}e^t dt = 4\sqrt{2} \int_0^{4\pi} e^{2t} \cos(t) dt.$$

Applicando due volte integrazione per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int e^{2t} \cos(t) dt &= \frac{e^{2t}}{2} \cos(t) + \int \frac{e^{2t}}{2} \sin(t) dt \\ &= \frac{e^{2t}}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} \left( \frac{e^{2t}}{2} \sin(t) - \int \frac{e^{2t}}{2} \cos(t) dt \right) \\ &= \frac{e^{2t}}{2} \cos(t) + \frac{e^{2t}}{4} \sin(t) - \frac{1}{4} \int e^{2t} \cos(t) dt \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{5}{4} \int e^{2t} \cos(t) dt = \frac{e^{2t}}{2} \cos(t) + \frac{e^{2t}}{4} \sin(t) \Rightarrow \int e^{2t} \cos(t) dt = \frac{e^{2t}}{5} (2 \cos(t) + \sin(t)) + C.$$

Infine

$$\int_0^{4\pi} \frac{e^{2t}}{2} \cos(t) dt = \left[ \frac{e^{2t}}{5} (2 \cos(t) + \sin(t)) \right]_{t=0}^{t=4\pi} = \frac{2}{5} (e^{8\pi} - 1)$$

da cui l'integrale cercato è  $4\sqrt{2} \frac{2}{5} (e^{8\pi} - 1) = \frac{8\sqrt{2}}{5} (e^{8\pi} - 1)$ .

Esercizio 6.2.3. Data la funzione

$$f(x, y, z) = z^2$$

e la curva  $\gamma$  parametrizzata da

$$\mathbf{r}(t) = (4 \cos(t), 4 \sin(t), 3t), \quad t \in [0, 4\pi]$$

si calcoli l'integrale di linea  $\int_{\gamma} f d\ell$ . Calcoliamo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= (-4 \sin(t), 4 \cos(t), 3), \\ \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2 &= 16 \sin^2(t) + 16 \cos^2(t) + 9 = 25, \\ \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| &= 5. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\int_{\gamma} f d\ell = \int_0^{4\pi} 9t^2 5 dt = 45 \left[ \frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^{t=4\pi} = 960\pi^3.$$

Esercizio 6.2.4. Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{2y - y^2}$$

e la curva  $\gamma$  parametrizzata da

$$\mathbf{r}(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)), \quad t \in [0, \pi]$$



si calcoli l'integrale di linea  $\int_{\gamma} f d\ell$ .

Calcoliamo

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= (1 - \cos(t), \sin(t)), \\ \|\mathbf{r}(t)\|^2 &= (1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t) = 2 - 2\cos(t), \\ \|\mathbf{r}(t)\| &= \sqrt{2(1 - \cos(t))}, \\ f(\mathbf{r}(t)) &= \sqrt{2 - 2\cos(t) - (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t))} = \sqrt{1 - \cos^2(t)} = |\sin(t)|.\end{aligned}$$

Ne segue

$$\int_{\gamma} f d\ell = \int_0^{\pi} |\sin(t)| \sqrt{2(1 - \cos(t))} dt = \int_0^{\pi} \sin(t) \sqrt{2(1 - \cos(t))} dt = \frac{2}{3} \sqrt{2} \left[ (1 - \cos(t))^{\frac{3}{2}} \right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{8}{3}.$$

Esercizio 6.2.5. Calcolare l'integrale di linea

$$I = \int_{\gamma} x + y d\ell$$

dove  $\gamma$  è l'arco di curva parametrizzato da

$$\mathbf{r}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t)), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= (-3\cos^2(t)\sin(t), 3\sin^2(t)\cos(t)) \\ \|\mathbf{r}(t)\|^2 &= 9\cos^4(t)\sin^2(t) + 9\sin^4(t)\cos^2(t) = 9\cos^2(t)\sin^2(t).\end{aligned}$$

L'integrale cercato è quindi

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3(t) + \sin^3(t)) 3|\cos(t)||\sin(t)| dt$$

Poiché in  $(0, \pi/2)$  sia il seno che il coseno sono positivi, possiamo rimuovere i moduli

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^4(t)\sin(t) + 3\sin^4(t)\cos(t) dt = 3 \left[ \frac{-\cos^5(t)}{5} + \frac{\sin^5(t)}{5} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}$$

Valutando l'integrale si ottiene  $I = 6/5$ .

Esercizio 6.2.6. Calcolare l'integrale di linea  $I = \int_{\gamma} yz d\ell$  dove  $\gamma$  è l'arco di curva parametrizzato da

$$\mathbf{r}(t) = (R\cos(t), R\sin(t), ht), \quad t \in [0, \pi]$$

con  $R, h > 0$ .

Calcoliamo

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= (-R\sin(t), R\cos(t), h), \\ \|\mathbf{r}(t)\| &= \sqrt{R^2 + h^2}.\end{aligned}$$

da cui

$$I = \int_0^{\pi} Rht\sin(t)\sqrt{R^2 + h^2} dt = Rh\sqrt{R^2 + h^2} \int_0^{\pi} t\sin(t) dt = Rh\sqrt{R^2 + h^2} \pi.$$

### 6.2.2 Integrali di superficie

**Teorema 6.2.2.** Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione, con  $A$  contenente la superficie  $\Sigma$  parametrizzata  $\mathbf{r} : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v)$  tale che  $\mathbf{r}(R) = \Sigma$ . Allora Allora

$$\int_{\Sigma} f d\sigma = \iint_R f(\mathbf{r}(u, v)) \|\partial_u \mathbf{r}(u, v) \times \partial_v \mathbf{r}(u, v)\| du dv.$$

Esercizio 6.2.7. Calcolare l'integrale

$$I = \iint_{\Sigma} y d\sigma$$

dove  $\Sigma$  è la superficie parametrizzata da

$$\mathbf{r}(x, y) = \left(x, y, \frac{x^2}{2}\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1.$$

Abbiamo che le derivate parziali di  $\mathbf{r}$  rispetto a  $x$  e  $y$  sono

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, x),$$

$$\mathbf{r}_y = (0, 1, 0).$$

Il loro prodotto vettoriale è

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

la cui norma è

$$\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\|^2 = 1 + x^2.$$

L'integrale cercato è quindi

$$I = \iint_{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1} y dx dy = \int_{-2}^2 \int_{-3\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}}^{3\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}} y \sqrt{1+x^2} dy dx = \int_{-2}^2 \sqrt{1+x^2} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{-3\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}}^{3\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}} = 0.$$

Esercizio 6.2.8. Calcolare l'integral di superficie

$$I = \iint_{\Sigma} x^2 y z d\sigma$$

dove  $\Sigma$  è la superficie parametrizzata da

$$\mathbf{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), \rho), \quad \rho \in [0, 1], \quad \theta \in [0, \pi].$$

Calcoliamo

$$\mathbf{r}_{\rho}(\rho, \theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 1),$$

$$\mathbf{r}_{\theta}(\rho, \theta) = (-\rho \sin(\theta), \rho \cos(\theta), 0),$$

$$\mathbf{r}_{\rho} \times \mathbf{r}_{\theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \\ -\rho \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho \cos(\theta) \\ -\rho \sin(\theta) \\ \rho \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{r}_{\rho} \times \mathbf{r}_{\theta}\| = \sqrt{2} \rho.$$

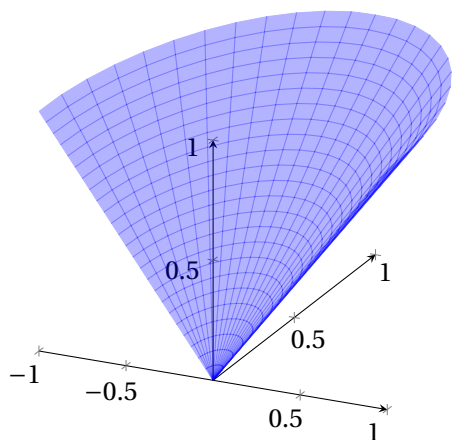


Figura 6.10: Superficie dell'Esercizio 6.2.8.

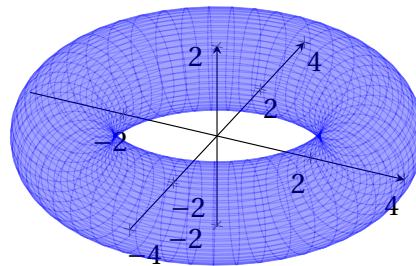


Figura 6.11: Superficie dell'Esercizio 6.2.10 con  $R = 3, r = 1$ .

L'integrale richiesto si scrive quindi come

$$I = \iint_{[0,1] \times [0,\pi]} \rho^2 \cos^2(\theta) \rho \sqrt{2} \rho d\rho d\theta \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 \cos^2(\theta) \rho \sqrt{2} \rho d\rho d\theta.$$

Poiché l'integranda è un prodotto tra una funzione in  $\rho$  ed una in  $\theta$ , l'integrale diventa

$$I = \sqrt{2} \left( \int_0^\pi \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta \right) \left( \int_0^1 \rho^5 d\rho \right) = \sqrt{2} \left[ \frac{-\cos^3(\theta)}{3} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left[ \frac{\rho^6}{6} \right]_{\rho=0}^{\rho=1}$$

che risulta essere pari a  $I = \sqrt{2}/9$ .

Esercizio 6.2.9. Calcolare l'integrale

$$\iint_{\Sigma} \frac{xy^2}{(1+z^2)(x^2+y^2)} d\sigma$$

dove  $\Sigma$  è la porzione di calotta sferica parametrizzata da

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (R \sin(\varphi) \cos(\theta), R \sin(\varphi) \sin(\theta), R \cos(\varphi)), \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\theta &= (-R \sin(\varphi) \sin(\theta), R \sin(\varphi) \cos(\theta), 0), \\ \mathbf{r}_\varphi &= (R \cos(\varphi) \cos(\theta), R \cos(\varphi) \sin(\theta), -R \sin(\varphi)), \\ \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi &= -R^2 \sin^2(\varphi) (\sin(\varphi) \cos(\theta), \sin(\varphi) \sin(\theta), \cos(\varphi)) \\ \|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi\|^2 &= R^4 \sin^2(\varphi) \end{aligned}$$

L'integrale si scrive quindi come

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3 \sin^2(\varphi) \cos(\varphi) \cos(\theta) \sin(\theta)}{(1 + R^2 \cos^2(\varphi))(R^2 \sin^2(\varphi))} R^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta.$$

Poiché l'integranda si può scrivere come il prodotto di due funzioni, una in  $\varphi$  ed una in  $\theta$ , l'integrale doppio si può scrivere come il prodotto di due integrali:

$$\begin{aligned} I &= R^3 \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \right) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi)}{1 + R^2 \cos^2(\varphi)} d\varphi \right) \\ &= R^3 \left[ \frac{\sin^2(\theta)}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \left[ -\frac{\log(R^2 \cos^2(\varphi) + 1)}{2R^2} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{R}{8} \log(1 + R^2) \end{aligned}$$

Esercizio 6.2.10. Calcolare l'integrale

$$I = \iint_{\Sigma} x^2 d\sigma$$

dove  $\Sigma$  è la superficie parametrizzata da

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = ((R + r \cos(\phi)) \cos(\theta), (R + r \cos(\phi)) \sin(\theta), r \sin(\phi)), \quad \theta, \phi \in [0, 2\pi]$$

con  $R > r > 0$ .

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\theta} &= (-(R + r \cos(\phi)) \sin(\theta), (R + r \cos(\phi)) \cos(\theta), 0) \\ \mathbf{r}_{\phi} &= (-r \sin(\phi) \cos(\theta), -r \sin(\phi) \sin(\theta), r \cos(\phi)) \\ \mathbf{r}_{\theta} \times \mathbf{r}_{\phi} &= (R + r \cos(\phi)) (r \cos(\theta) \cos(\phi), r \sin(\theta) \cos(\phi), r \sin(\phi)) \\ \|\mathbf{r}_{\theta} \times \mathbf{r}_{\phi}\| &= |R + r \cos(\phi)| r \end{aligned}$$

Osserviamo che  $r \cos(\phi) \geq -r$  e, unito al fatto che  $R > r$ , si ha  $R + r \cos(\phi) > 0$  e possiamo togliere il modulo nella norma di  $\mathbf{r}_{\theta} \times \mathbf{r}_{\phi}$ .

L'integrale si scrive dunque

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (R + r \cos(\phi) \cos^2(\theta)) (R + r \cos(\phi)) r d\phi d\theta \\ &= \left( \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \right) \left( \int_0^{2\pi} (R + r \cos(\phi))^3 d\phi \right) \\ &= \pi r \int_0^{2\pi} R^3 + 3R^2 r \cos(\phi) + 3Rr^2 \cos^2(\phi) + r^3 \cos^3(\phi) d\phi \\ &= \pi^2 r R (2R^2 + 3r^2) \end{aligned}$$

## 6.3 Esercizi extra

Esercizio extra 6.1. Si calcoli il seguente integrale

$$\iint_D |x| y^2 dx dy, \quad D = \{(x, y) : 4x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Esercizio extra 6.2. Si calcoli il seguente integrale

$$\iint_D x^4 + y^4 dx dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R\}.$$

Esercizio extra 6.3. Si calcoli il seguente integrale

$$\iint_D \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}.$$

Esercizio extra 6.4. Si calcoli il seguente integrale

$$\iiint_D z \exp(-(x^2 + y^2)) dx dy dz, \quad D = \left\{ (x, y, z) : z \in [0, h], x^2 + y^2 \leq \left(\frac{Rz}{h}\right)^2 \right\}.$$

Esercizio extra 6.5. Si calcoli il seguente integrale

$$\iiint_D e^x dx dy dz, \quad D = \left\{ (x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z \leq 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2} \right\}.$$

Esercizio extra 6.6. Si calcoli il seguente integrale curvilineo non orientato dove la curva  $\gamma$  è parametrizzata dalla funzione  $\mathbf{r}$

$$\int_{\Gamma} (y^2 + z^2) d\ell, \quad \mathbf{r}(t) = \left( R \cos(t), R \sin(t), \frac{h}{2\pi} t \right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Esercizio extra 6.7. Si calcoli il seguente integrale curvilineo non orientato dove la curva  $\gamma$  è parametrizzata dalla funzione  $\mathbf{r}$

$$\int_{\Gamma} \sqrt{z} d\ell, \quad \mathbf{r}(t) = (t \cos t, t \sin t, t^2), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Esercizio extra 6.8. Si calcoli il seguente integrale superficiale non orientato dove  $\Sigma$  è il sostegno della superficie parametrizzata da  $\mathbf{r}$

$$\iint_{\Sigma} \sqrt{\frac{z}{x^2 + y^2}} d\sigma, \quad \mathbf{r} = (t \cos \theta, t \sin \theta, (1 - t)^2), \quad t \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$$

Esercizio extra 6.9. Si calcoli il seguente integrale superficiale non orientato dove  $\Sigma$  è il sostegno della superficie parametrizzata da  $\mathbf{r}$

$$\iint_{\Sigma} y d\sigma, \quad \mathbf{r} = (t \cos u, 2t \sin u, t), \quad t \in [0, 1], \quad u \in [0, \pi]$$

Esercizio extra 6.10. Si calcoli il seguente integrale superficiale non orientato dove  $\Sigma$  è il sostegno della superficie parametrizzata da  $\mathbf{r}$

$$\iint_{\Sigma} 3z^2 d\sigma, \quad \mathbf{r} = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}), \quad x^2 + y^2 \leq R^2$$

Esercizio extra 6.11. Si calcoli il seguente integrale superficiale non orientato dove  $\Sigma$  è il sostegno della superficie parametrizzata da  $\mathbf{r}$

$$\iint_{\Sigma} x^2 + y^2 d\sigma, \quad \mathbf{r} = ((R + r \cos \varphi) \cos \theta, (R + r \cos \varphi) \sin \theta, r \sin \varphi), \quad \varphi, \theta \in [0, 2\pi]$$

## Capitolo 7

# Equazioni Differenziali

### 7.1 Equazioni differenziali ordinarie (ODE)

#### 7.1.1 Variazione delle costanti

Dato il problema differenziale ordinario lineare e non-omogeneo

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} + \sum_k = 0^{n-1} a_k(x) \frac{d^k y(x)}{dx^k} = b(x) \quad (7.1)$$

sia  $\{\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_n(x)\}$  una base dello spazio vettoriali delle soluzioni al problema omogeneo

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} + \sum_k = 0^{n-1} a_k(x) \frac{d^k y(x)}{dx^k} = 0. \quad (7.2)$$

Allora, una soluzione particolare al problema non omogeneo (7.1) è

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) \sigma_k(x)$$

con  $c_k$  funzioni differenziabili tali che

$$\sum_{k=1}^n c'_k(x) \frac{d^j \sigma_k(x)}{dx^j}, \quad j = 0, 1, \dots, n-2. \quad (7.3)$$

Esercizio 7.1.1. Si risolva l'equazione

$$y'' + y = \tan(x).$$

L'equazione omogenea  $z'' + z = 0$  ha come soluzione generica

$$z(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x).$$

Utilizzando il metodo di variazione delle costanti cerchiamo una soluzione nella forma

$$y(x) = c_1(x) \cos(x) + c_2(x) \sin(x).$$

Derivando,

$$y'(x) = c'_1(x) \cos(x) - c_1(x) \sin(x) + c'_2(x) \sin(x) + c_2(x) \cos(x)$$

e ponendo, come in (7.3),

$$c_1'(x) \cos(x) + c_2'(x) \sin(x) = 0$$

otteniamo

$$y'(x) = -c_1(x) \sin(x) + c_2(x) \cos(x).$$

Derivando ancora

$$y''(x) = -c_1'(x) \sin(x) - c_1(x) \cos(x) + c_2'(x) \cos(x) - c_2(x) \sin(x).$$

Sostituendo nell'equazione differenziale di partenza,

$$\underbrace{-c_1'(x) \sin(x) - c_1(x) \cos(x) + c_2'(x) \cos(x) - c_2(x) \sin(x)}_{y''(x)} + \underbrace{c_1(x) \cos(x) + c_2(x) \sin(x)}_{y(x)} = \tan(x)$$

$$\Leftrightarrow -c_1'(x) \sin(x) + c_2'(x) \cos(x) = \tan(x).$$

Otteniamo quindi il seguente sistema da risolvere (già scritto in forma matrice vettore)

$$\begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tan(x) \end{bmatrix}.$$

La matrice a sinistra è ortogonale (i.e. l'inversa coincide con la trasposta), da cui la soluzione è

$$\begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \tan(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(x) \tan(x) \\ \sin(x) \end{bmatrix}.$$

Otteniamo immediatamente che  $c_2(x) = -\cos(x) + C_2$  Calcoliamo  $c_1(x)$ :

$$c_1(x) = -\int \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos(x)} dx = \sin(x) - \int \frac{1}{\cos(x)} dx.$$

Tramite la sostituzione  $t = \tan(x/2)$  e notando che  $\cos(x) = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \cos^2(x/2)(1 - \tan^2(x/2))$  otteniamo

$$\sin(x) - \int \frac{2}{1-t^2} dt = \sin(x) - \int \left( \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = \sin(x) - \log|1+t| + \log|1-t| + C_1.$$

Sostituendo  $t = \tan x/2$  si ottiene, finalmente

$$c_1(x) = \sin(x) - \log \left| 1 + \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right| + \log \left| 1 - \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right| + C_1.$$

Una soluzione particolare è quindi

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) &= \cos(x) \sin(x) - \cos(x) \left( \log \left| 1 + \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right| + \log \left| 1 - \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right| \right) - \cos(x) \sin(x) \\ &= -\cos(x) \left( \log \left| 1 + \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right| + \log \left| 1 - \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right| \right) \end{aligned}$$

da cui si ottiene la soluzione generica

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) - \cos(x) \left( \log \left| 1 + \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right| + \log \left| 1 - \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right| \right).$$

Esercizio 7.1.2. Si risolva l'equazione

$$y'''(x) - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x}.$$

L'equazione omogenea associata,

$$z'''(x) - 3z'' + 3z' - z = 0,$$

ha come polinomio caratteristico il polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3.$$

La soluzione generale all'omogenea associata è quindi è

$$z(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x.$$

Cerchiamo ora una soluzione all'equazione originale tramite variazione delle costanti. Cerchiamo quindi una soluzione del tipo

$$y(x) = c_1(x) e^x + c_2(x) x e^x + c_3(x) x^2 e^x. \quad (7.4)$$

La condizione (7.3) diventa, nel nostro caso,

$$c_1'(x) e^x + c_2'(x) x e^x + c_3'(x) x^2 e^x = 0, \quad (7.5a)$$

$$c_1'(x) e^x + c_2'(x) (x+1) e^x + c_3'(x) x(x+2) e^x = 0. \quad (7.5b)$$

Derivando ora l'espressione per  $y$  in (7.4)

$$y'(x) = c_1'(x) e^x + c_1(x) e^x + c_2'(x) x e^x + c_2(x) (x+1) e^x + c_3'(x) x^2 e^x + c_3(x) x(x+2) e^x$$

Utilizzando la condizione (7.5a) otteniamo

$$y'(x) = c_1(x) e^x + c_2(x) (x+1) e^x + c_3(x) x(x+2) e^x.$$

Derivando ancora, otteniamo

$$y''(x) = c_1'(x) e^x + c_1(x) e^x + c_2'(x) (x+1) e^x + c_2(x) (x+2) e^x + c_3'(x) x(x+2) e^x + c_3(x) (x^2 + 4x + 2) e^x$$

che, utilizzando la condizione (7.5a), si semplifica in

$$y''(x) = c_1(x) e^x + c_2(x) (x+2) e^x + c_3(x) (x^2 + 4x + 2) e^x.$$

Derivando una terza volta, si ottiene

$$y'''(x) = c_1'(x) e^x + c_1(x) e^x + c_2'(x) (x+2) e^x + c_2(x) (x+3) e^x + c_3'(x) (x^2 + 4x + 2) e^x + c_3(x) (x^2 + 6x + 6) e^x.$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione differenziale richiesta e semplificando si ottiene

$$y'''(x) - 3y''(x) + 3y'(x) - y(x) = c_1'(x) e^x + c_2'(x) (x+2) e^x + c_3'(x) e^x.$$

Otteniamo quindi il seguente sistema da risolvere (scritto già in forma matriciale)

$$\begin{bmatrix} e^x & x e^x & x^2 e^x \\ e^x & (x+1) e^x & x(x+2) e^x \\ e^x & (x+2) e^x & (x^2 + 4x + 2) e^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ c_3'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{e^x}{x} \end{bmatrix}.$$



Risolvendolo,

$$\begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ c_3'(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} e^{-x} \begin{bmatrix} x^2 + 2x + 2 & -2x(x+1) & x^2 \\ -2(x+1) & 2(2x+1) & -2x \\ -1-21 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{e^x}{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2x} \end{bmatrix}$$

da cui

$$c_1(x) = \frac{x^2}{4}, \quad c_2(x) = -x, \quad c_3(x) = \frac{1}{2} \log|x|.$$

La soluzione generica è quindi

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + e^x \left( \frac{x^2}{4} - x^2 + \frac{x^2}{2} \log|x| \right) \\ &= c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + e^x x^2 \left( \frac{\log|x|}{2} - \frac{3}{4} \right). \end{aligned}$$

## 7.1.2 Metodo degli annichilatori

Data un'equazione lineare non omogenea come in (7.1), sia il polinomio caratteristico  $P(\lambda)$  dell'equazione omogenea (7.1):  $P(\lambda)y = 0$ . Sia inoltre  $A(\lambda)$  un polinomio caratteristico, chiamato *annichilatore* tale che  $A(\lambda)b(x) = 0$  (i.e. un polinomio caratteristico tale per cui una soluzione al problema omogeneo associato sia il termine noto di (7.1)). Allora, una soluzione al problema (7.1) si può trovare cercando nello spazio delle soluzioni al problema  $P(\lambda)A(\lambda)y = 0$ .

Esercizio 7.1.3. Si trovi la soluzione generica a

$$y'' + y = x e^{-x}.$$

Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 1.$$

Un annichilatore (anzi, l'annichilatore minimo) per  $x e^{-x}$  è

$$A(\lambda) = (\lambda + 1)^2$$

da cui

$$P(\lambda)A(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1)^2.$$

Cerchiamo allora una soluzione del tipo

$$y(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x}.$$

Notiamo che se sostituiamo questa espressione nell'equazione differenziale, abbiamo che le costanti  $c_1$  e  $c_2$  verranno moltiplicate per zero poiché le quantità  $c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)$  appartengono al nucleo dell'operatore differenziale  $y'' + y$  (in quanto soluzione dell'equazione omogenea). Ne segue che, sostituendo questa espressione nell'equazione differenziale, otteniamo

$$\begin{aligned} y''(x) + y(x) &= \frac{d^2}{dx^2} (c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x}) + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x} \\ &= 2c_3 e^{-x} + 2c_4 e^{-x}(x-1) \\ &= 2(c_3 - c_4) e^{-x} + 2c_4 x e^{-x}. \end{aligned}$$

Per risolvere l'equazione differenziale, questa quantità deve essere pari a  $xe^{-x}$ . Mettendo a sistema abbiamo dunque

$$\begin{cases} 2(c_3 - c_4) = 0 \\ 2c_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 = \frac{1}{2} \\ c_4 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

La soluzione generica all'equazione differenziale è quindi

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \frac{e^{-x}}{2} + \frac{xe^{-x}}{2}.$$

Esercizio 7.1.4. Si trovi la soluzione generica a

$$y'' - y = x \sin(x)$$

Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è  $P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1) - (\lambda - 1)$ . L'annichilatore minimo per  $x \sin(x)$  è  $A(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2$ . Abbiamo quindi

$$P(\lambda)A(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)^2.$$

Cerchiamo quindi una soluzione del tipo

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x) + c_5 x \cos(x) + c_6 x \sin(x).$$

L'operatore differenziale diventa

$$\begin{aligned} y'' - y &= -2c_3 \cos(x) - 2c_4 \sin(x) + c_5(-2 \sin(x) - x \cos(x) - x \cos(x)) + c_6(2 \cos(x) - 2x \sin(x)) \\ &= \cos(x)(-2c_3 + 2c_6) + \sin(x)(-2c_4 - 2c_5) + x \cos(x)(-2c_5) + x \sin(x)(-2c_6) \end{aligned}$$

Per risolvere l'esercizio, questa quantità deve essere pari a  $x \sin(x)$ . Dobbiamo quindi porre

$$\begin{cases} -2c_3 + 2c_6 = 0 \\ -2c_4 - 2c_5 = 0 \\ -2c_5 = 0 \\ -2c_6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 = -\frac{1}{2} \\ c_4 = 0 \\ c_5 = 0 \\ c_6 = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Otteniamo infine la soluzione generica

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \cos(x) - \frac{1}{2} x \sin(x).$$

Esercizio 7.1.5. Si trovi la soluzione generica a

$$y''(x) - y(x) = xe^x.$$

Il polinomio dell'equazione omogenea è  $P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$ . Un annichilatore di  $xe^x$  è  $A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ . Otteniamo dunque

$$P(\lambda)A(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^3.$$

Cerchiamo quindi una soluzione del tipo

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 x e^x + c_4 x^2 e^x$$

da cui

$$y''(x) - y(x) = 2c_3 e^x + 2c_4 e^x (2x + 1).$$

Il termine a destra deve essere pari a  $x e^x$ . Poniamo quindi

$$\begin{cases} 2c_3 + 2c_4 = 0 \\ 4c_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 = -\frac{1}{4} \\ c_4 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

ottenendo la soluzione

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x - \frac{1}{4} x e^x + \frac{1}{4} x^2 e^x.$$

Esercizio 7.1.6. Trovare la soluzione generica a

$$y'''(x) - y = e^x.$$

Il polinomio caratteristico dell'omogenea associata è  $P(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$ . L'annichilatore minimo per  $e^x$  è  $A(\lambda) = \lambda - 1$ . Abbiamo quindi

$$P(\lambda)A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + \lambda + 1).$$

Cerchiamo quindi una soluzione nella forma

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_4 e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Otteniamo quindi

$$y''' - y = c_3 \frac{d^3}{dx^3} (x e^x) - c_2 x e^x = 3c_2 e^x.$$

Risolvendo,  $c_2 = 1/3$ , ottenendo

$$y(x) = c_1 e^x + c_3 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_4 e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{x e^x}{3}.$$

Esercizio 7.1.7. Trovare la soluzione a

$$y''''(x) - 2y''(x) + y = x^2.$$

Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2.$$

L'annichilatore minimo è  $A(\lambda) = \lambda^3$ , da cui

$$P(\lambda)A(\lambda) = \lambda^3(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2.$$

Cerchiamo quindi una soluzione nella forma

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x} + c_5 x^2 + c_6 x + c_7.$$

Applicando a questa l'operatore differenziale otteniamo

$$y'''' - 2y'' + y = -4c_5 + c_5x^2 + c_6x + c_7.$$

Per risolvere il problema differenziale dobbiamo porre il termine a destra pari a  $x^2$ :

$$\begin{cases} c_5 = 1 \\ c_6 = 0 \\ -4c_5 + c_7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_5 = 1 \\ c_6 = 0 \\ c_7 = 4 \end{cases}.$$

La soluzione è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x} + x^2 + 4.$$

## 7.2 Equazioni alle derivate parziali (PDE)

Esercizio 7.2.1 (equazione del calore in  $\mathbb{R}$ ). Si trovi la soluzione al seguente problema alle derivate parziali

$$\begin{cases} u_t(t, x) - \rho^2 u_{xx}(t, x) = 0 & x \in (0, \pi), \quad t > 0 & (7.6a) \\ u(t, 0) = 0 & t > 0 & (7.6b) \\ u(t, \pi) = 0 & t > 0 & (7.6c) \\ u(0, x) = u_0(x) = 1 & x \in (0, \pi) & (7.6d) \end{cases}$$

Per separazione di variabili, cerchiamo una soluzione nella forma

$$u(t, x) = f(t)g(x)$$

L'equazione differenziale (7.6a) diventa

$$f'(t)g(x) - \rho^2 f(t)g''(x) = 0$$

la quale può essere riarrangiata come

$$\frac{f'(t)}{\rho^2 f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)}.$$

Poiché i termini a destra e sinistra dell'uguale sono funzioni che dipendono da variabili diverse, è necessario che entrambi i termini siano costanti:

$$\frac{f'(t)}{\rho^2 f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Otteniamo quindi le due equazioni differenziali lineari

$$g''(x) - \lambda g(x) = 0, \quad f'(t) - \rho^2 \lambda f(t) = 0.$$

Iniziando con la componente spaziale, studiamo la soluzione in base al segno di  $\lambda$ .

Se  $\lambda > 0$ , la soluzione è

$$g(x) = A e^{\sqrt{\lambda}x} + B e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Le condizioni al bordo di Dirichlet (7.6b), (7.6c) equivalgono a porre  $g(0) = g(\pi) = 0$ . Ponendo queste condizioni, le costanti  $A$  e  $B$  sono entrambe nulle, da cui  $g(x) \equiv 0$ .

Se  $\lambda = 0$ , la soluzione è

$$g(x) = Ax + B$$

e, ponendo  $g(0) = g(\pi) = 0$  si ottiene, di nuovo,  $A = B = 0$ .

Se, infine,  $\lambda < 0$  la soluzione alla componente spaziale è

$$g(x) = A \sin(\sqrt{\lambda}x) + B \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Ponendo  $g(0) = 0$  si ottiene  $B = 0$ . Ponendo  $g(\pi) = 0$  si ottiene  $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}$ . La generica soluzione è quindi una combinazione lineare di

$$g_k(x) = A_k \sin(kx), \quad k \in \mathbb{N}.$$

L'equazione della componente temporale diventa quindi

$$f'(t) - \rho^2 k^2 f(t) = 0,$$

la cui soluzione è una componente lineare di

$$f_k(t) = C_k \exp(-\rho^2 k^2 t), \quad k \in \mathbb{N}.$$

La generica soluzione all'equazione del calore (7.6a) è quindi data da combinazioni lineari di

$$u_k(t, x) = C_k e^{-\rho^2 k^2 t} \sin(kx), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ne segue che la generica soluzione è data dalla serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\rho^2 k^2 t} \sin(kx).$$

I coefficienti  $b_k$  si trovano notando che

$$u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

Di conseguenza, possiamo estendere per disparità e per  $2\pi$ -periodicità il dato iniziale  $u_0(x)$  in (7.6d), ed i coefficienti  $b_k$  sono quelli dello sviluppo in serie di Fourier. I coefficienti sono quelli dell'onda quadra:

$$b_k = \frac{2(1 - (-1)^k)}{\pi k}.$$

Otteniamo quindi che la soluzione a (7.6) è

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^k)}{\pi k} \sin(kx) e^{-\rho^2 k^2 t}.$$

*Osservazione 7.2.1.* Notiamo che i termini a frequenza spaziale più alta tendono a zero più velocemente nel tempo (quadraticamente rispetto alla frequenza stessa). Questo fenomeno è noto come “effetto regolarizzante dell'equazione del calore”.

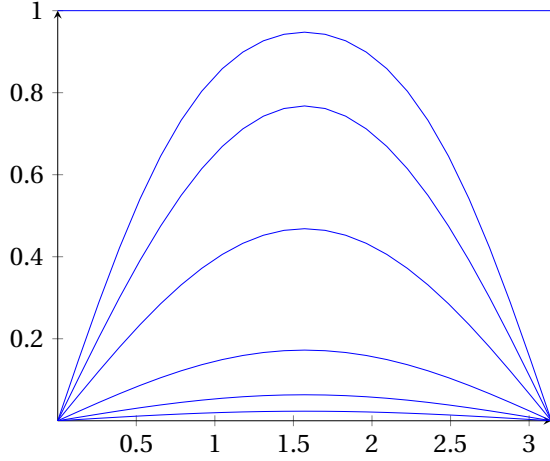


Figura 7.1: Evoluzione temporale della soluzione dell'equazione del calore in Esercizio 7.2.1 con  $\rho = 1$ . I tempi mostrati sono  $t = 0, 0.25, 0.5, 1, 2, 3, 4$ .

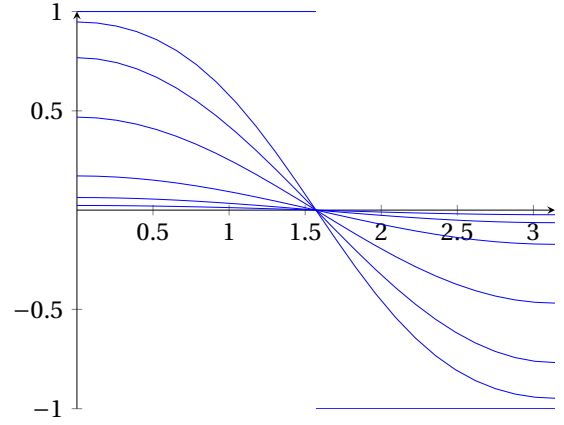


Figura 7.2: Evoluzione temporale della soluzione dell'equazione del calore in Esercizio 7.2.2 con  $\rho = 1$ . I tempi mostrati sono  $t = 0, 0.25, 0.5, 1, 2, 3, 4$ .

Esercizio 7.2.2 (equazione del calore in  $\mathbb{R}$ , condizioni di Neumann). Si trovi la soluzione al seguente problema alle derivate parziali

$$\begin{cases} u_t(t, x) - \rho^2 u_{xx}(t, x) = 0 & x \in (0, \pi), \quad t > 0 \\ u_x(t, 0) = 0 & t > 0 \\ u_x(t, \pi) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \pi/2) \\ -1 & x \in [\pi/2, \pi) \end{cases} & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

Con un procedimento identico a quanto fatto prima, arriviamo a dire che la soluzione generica è data da combinazioni lineari di funzioni nella forma

$$u_k(t, x) = A + e^{-\rho^2 k^2 t} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \right).$$

Le condizioni di Neumann implicano che, per ogni  $k \in \mathbb{N}$  dobbiamo avere  $b_k = 0$ . Per determinare i coefficienti  $A$  e  $a_k$ , estendiamo il dato iniziale  $u_0$  per parità e  $2\pi$ -periodicità. Otteniamo quindi

$$A = 0, \quad a_k = \frac{4}{\pi} \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k}.$$

Esercizio 7.2.3 (equazione d'onda in  $\mathbb{R}$ ). Si trovi la soluzione al seguente problema alle derivate parziali

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - \rho^2 u_{xx}(t, x) = 0 & x \in (0, \pi), \quad t > 0 & (7.7a) \\ u(t, 0) = 0 & t > 0 & (7.7b) \\ u(t, \pi) = 0 & t > 0 & (7.7c) \\ u(0, x) = u_0(x) = \frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right| & x \in (0, \pi) & (7.7d) \\ u_t(0, x) = 0 & x \in (0, \pi) & (7.7e) \end{cases}$$

Per separazione di variabili, cerchiamo una soluzione nella forma  $u(t, x) = f(t)g(x)$ . Sostituendo questa espressione in (7.7a) si ottiene

$$f''(t)g(x) - \rho^2 f(t)g''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f''(t)g(x) = \rho^2 f(t)g''(x).$$

Dividendo entrambi i termini per  $\rho^2 f(t)g(x)$  e semplificando, questa identità si riscrive come

$$\frac{f''(t)}{\rho^2 f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)}.$$

Analogamente a quanto visto per l'equazione del calore, si ha che le due quantità devono essere costanti, in quanto funzioni di variabili diverse:

$$\frac{f''(t)}{\rho^2 f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

L'equazione che governa la componente spaziale è la stessa vista nell'equazione del calore:  $g''(x) = \lambda g(x)$ . Segue che, se  $\lambda \leq 0$  l'unica soluzione che soddisfa le condizioni al bordo di Dirichlet (7.7b), (7.7c) è la funzione nulla  $g(x) = 0$ .

Se invece  $\lambda < 0$ , la soluzione è  $g(x) = C_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$ . Le condizioni al bordo (7.7b), (7.7c) impongono  $C_2 = 0$  e  $\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{N}$  (i.e.  $\lambda = -n^2$ ). Abbiamo quindi che una soluzione è una qualsiasi combinazione lineare di funzioni del tipo

$$g_n(x) = C_n \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Studiamo ora la componente temporale, governata dalla legge  $f''(t) = -n^2 \rho^2 f(t)$ . Similmente a prima, una soluzione è

$$f_n(t) = D_1 \sin(\rho n t) + D_2 \cos(\rho n t).$$

La condizione iniziale (7.7e) impone  $D_1 = 0$ . La soluzione generica è quindi una generica combinazione lineare di funzioni del tipo

$$f_n(x) = D_n \cos(\rho n x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Abbiamo quindi che la soluzione  $u(t, x)$  si scrive, in forma di serie, come

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \cos(\rho n t).$$

I coefficienti  $b_n$  si trovano esprimendo il dato iniziale in serie di Fourier. Infatti

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$$

Estendendo quindi  $u_0(x)$  per disparità e  $2\pi$ -periodicità, possiamo calcolare

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \frac{8 \sin^3\left(\frac{\pi n}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{n^2}.$$

Esercizio 7.2.4 (equazioni del **calore** e **d'onda** in  $\mathbb{R}^2$ ). Si risolva l'equazione differenziale

$$\begin{cases} u_t(t, x, y) - \rho^2 \nabla^2 u(t, x, y) = 0 & (x, y) \in \Omega = (0, \pi)^2, \quad t > 0 \\ u(t, x, y) = 0 & (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(0, x, y) = u_0(x, y) = 1 & (x, y) \in (0, \pi)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x, y) - \rho^2 \nabla^2 u(t, x, y) = 0 & (x, y) \in \Omega = (0, \pi)^2, \quad t > 0 \\ u(t, x, y) = 0 & (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(0, x, y) = u_0(x, y) = 1 & (x, y) \in (0, \pi)^2 \\ u_t(0, x, y) = 0 & (x, y) \in (0, \pi)^2 \end{cases}$$

dove  $\nabla^2 u$  è l'operatore Laplaciano  $\nabla^2 u = \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ .

Procedendo per separazione di variabili, cerchiamo una soluzione nella forma  $u(t, x, y) = f(t)g(x)h(y)$ . Sostituendola nell'equazione differenziale otteniamo

$$\begin{aligned} f'(t)g(x)h(y) - \rho^2 (f(t)g''(x)h(y) + f(t)g(x)h''(y)) &= 0 \\ f''(t)g(x)h(y) - \rho^2 (f(t)g''(x)h(y) + f(t)g(x)h''(y)) &= 0 \end{aligned}$$

Dividendo entrambi i termini per  $\rho f(t)g(x)h(y)$  e con ragionamenti analoghi a quanto fatto prima, si ottiene

$$\frac{f'(t)}{\rho f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} = \frac{h''(y)}{h(y)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \frac{f''(t)}{\rho f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} = \frac{h''(y)}{h(y)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Se  $\lambda \leq 0$ , l'unica soluzione che soddisfa le condizioni al bordo è la soluzione identicamente nulla. Per  $\lambda < 0$  si ha invece che

$$\begin{aligned} g_m(x) &= b_m \sin(mx), & h_n(y) &= c_n \sin(ny), \\ f_{m,n}(t) &= d_{m,n} e^{-\rho^2 \omega_{m,n}^2 t}, & f_{m,n}(t) &= d_{m,n} \cos(\rho \omega_{m,n} t), \end{aligned}$$

dove  $\omega_{m,n}^2 = m^2 + n^2$ . La generica soluzione in forma di serie è quindi

$$\begin{aligned} u(t, x, y) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} k_{mn} \sin(mx) \sin(ny) e^{-\rho^2 \omega_{m,n}^2 t} \\ u(t, x, y) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} k_{mn} \sin(mx) \sin(ny) \cos(\rho \omega_{m,n} t). \end{aligned}$$

I coefficienti  $k_{m,n}$  si trovano calcolando la serie di Fourier di  $u_0(x, y) = 1$  estesa per  $2\pi$ -periodicità e disparità sia in  $x$  che in  $y$ :

$$\begin{aligned} k_{m,n} &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \sin(mx) \sin(ny) dx dy \\ &= \frac{4}{\pi^2} \left( \int_0^\pi \sin(mx) dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(ny) dy \right) \\ &= \frac{4}{\pi^2} \frac{(-1)^m - 1}{m} \frac{(-1)^n - 1}{n} \end{aligned}$$



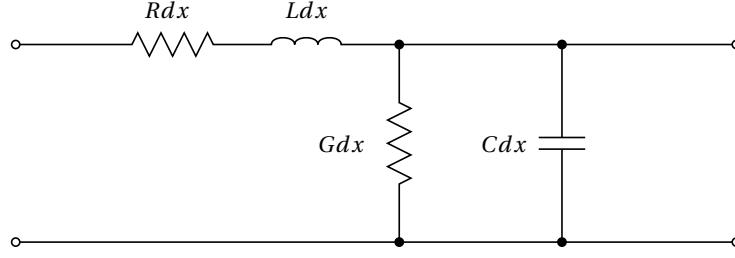


Figura 7.3: Rappresentazione schematica delle componenti di una linea di trasmissione.

Esercizio 7.2.5 (equazione del telegrafo). Facendo riferimento allo schema in Figura 7.3 si ha che, volendo descrivere il voltaggio  $V$  e la corrente  $I$  lungo una linea di trasmissione abbiamo il seguente modello alle equazioni differenziali

$$\begin{cases} V_x = -L I_t - R I \\ I_x = -C V_t - G V \end{cases}$$

dove  $L > 0$  è l'induttanza,  $R > 0$  la resistenza,  $C > 0$  la capacità, e  $G > 0$  la conduttanza.

Notiamo che le due equazioni possono essere combinate in un'unica PDE avente come unica incognita  $V$  o  $I$

$$\begin{aligned} V_{xx} &= -L I_{xt} - R I_x \\ &= -L(-C V_{tt} - G V_t) - R(-C V_t - G V) \\ &= CL V_{tt} + (LG + RC) V_t + RG V \\ I_{xx} &= -C V_{xt} - G V_x \\ &= -C(-L I_{tt} - R I_t) - G(-L I_t - R I) \\ &= CL I_{tt} + (CR + GL) I_t + GRI \end{aligned}$$

ottenendo, per le due, la stessa legge differenziale.

Consideriamo ad esempio  $V(t, x)$  per  $x \in (0, \pi)$ . La PDE diventa

$$\begin{cases} V_{xx} - CL V_{tt} = (LG + RC) V_t + RG V & x \in (0, \pi), \quad t > 0 \\ V(t, 0) = 0 & t > 0 \\ V(t, \pi) = 0 & t > 0 \\ V(0, x) = v_0(x) & x \in (0, \pi) \\ V_x(0, x) = w_0(x) & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

Iniziamo notando che nel caso ideale del segnale senza perdite,  $\boxed{R = G = 0}$ , otteniamo esattamente l'equazione d'onda.

Rilassando la restrizione, e considerando quindi  $\boxed{RG = 0}$ , abbiamo che la legge differenziale diventa

$$V_{xx} - \alpha V_{tt} - 2\beta V_t = 0, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (7.8)$$

Questa coincide con l'equazione d'onda smorzata. Per separazione di variabili, cerchiamo una soluzione nella forma  $V(t, x) = u(t)v(x)$  ottenendo che l'equazione differenziale (7.8) diventa

$$u(t)v_{xx}(x) = \alpha u_{tt}v(x) + 2\beta u_t(t)v(x).$$

Dividendo entrambi i termini per  $u(t)v(x)$  si ottiene

$$\frac{v_{xx}(x)}{v(x)} = \frac{\alpha u_{tt}(t) + 2\beta u_t(t)}{u(t)} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Similmente all'equazione d'onda classica, l'unica opzione per cui la soluzione della componente spaziale possa essere non nulla è porre  $\lambda > 0$ . In particolare, ponendo le condizioni al bordo  $v(0) = v(\pi) = 0$ , si ottiene

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

La componente temporale è l'ODE lineare omogenea

$$\alpha u_{tt}(t) + 2\beta u_t(t) + \lambda u = 0.$$

Poiché  $\lambda = n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , abbiamo che il polinomio caratteristico associato è

$$P(\mu) = \alpha \mu^2 + 2\beta \mu + n^2 = 0$$

che si risolve per

$$\mu_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha n^2}}{\alpha}.$$

Assumendo, coerentemente al caso fisico, che  $\alpha n^2 > \beta^2$  abbiamo

$$\mu_{1,2} = \frac{\beta \pm i\omega_n}{\alpha}$$

con  $\omega_n = \sqrt{\alpha n^2 - \beta^2}$ . Se ne conclude che la soluzione è una serie con termini nella forma

$$u_n(t, x) = A e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} \cos\left(\frac{\omega_n}{\alpha} t\right) + B e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} \sin\left(\frac{\omega_n}{\alpha} t\right).$$

Ponendo  $w_0(x) = 0 \Leftrightarrow u'(0) = 0$  si ha  $B = 0$  e la soluzione è

$$V(t, x) = \exp\left(-\frac{\beta}{\alpha} t\right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \cos\left(\frac{\omega_n}{\alpha} t\right) \right)$$

con  $\alpha = CL$ ,  $\beta = LG + RC$ , e  $\omega_n = \sqrt{(LG + RC)^2 - CLn^2}$ . Si noti che la soluzione è identica a quella dell'equazione d'onda con l'aggiunta di un termine smorzante.

Infine, se  $\boxed{RG = \gamma \neq 0}$ , l'equazione differenziale (7.8) diventa

$$V_{xx} - \alpha V_{tt} - \beta V_t - \gamma V = 0.$$

Definendo  $k = \beta/\alpha$ ,  $a = 1/\alpha$ ,  $b = \gamma/\alpha$ , la possiamo riscrivere come

$$V_{t,t}(t, x) + k V_t(t, x) + b V(t, x) = a V_{xx}(t, x) \quad (7.9)$$

Come prima, cerchiamo una soluzione per separazione di variabili. Definiamo  $V(t, x) = u(t)v(x)$  e sostituiamo in (7.9) ottenendo

$$u_{tt}v + k u_t v + b u v = a u v_{xx} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u_{tt} + k u_t + b u}{u} = \frac{a v_{xx}}{v} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Per soddisfare  $v(0) = v(\pi) = 0$  occorre porre  $\lambda < 0$  (al fine di non ottenere solo la funzione nulla come soluzione). Abbiamo quindi che una soluzione è

$$v_n(x) = K_n \sin(nx), \quad \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2 = n \in \mathbb{N}.$$

L'equazione per  $u$  è lineare omogenea:

$$u_{tt} + ku_t + (b - \lambda)u = 0.$$

Il polinomio caratteristico è

$$P(\mu) = \mu^2 + k\mu + (b - \lambda)$$

e si annulla per

$$\mu_{1,2} = -\tilde{k} \pm i\omega, \quad \tilde{k} = \frac{k}{2}, \quad \omega = \frac{\sqrt{(b - \lambda) - k^2}}{2}.$$

La soluzione per  $u$  è

$$u(t) = Ae^{-\tilde{k}t} \cos(\omega t) + Be^{-\tilde{k}t} \sin(\omega t) = Ae^{-\tilde{k}t} \cos(\omega t + \phi)$$

La soluzione generica in forma di serie per  $V$  è quindi

$$V(t, x) = e^{-\tilde{k}t} \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin(nx) \cos(\omega_n t + \phi_n).$$

Esercizio 7.2.6. Si trovi una soluzione, in forma di serie, al seguente sistema alle derivate parziali:

$$\begin{cases} u_t(t, x) - 9u_{xx}(t, x) = 0 & t > 0, x \in (0, \pi/2) \\ u(t, 0) = 0 & t > 0 \\ u_x(t, \pi/2) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = \sin^5(x) & x \in (0, \pi/2) \end{cases}$$

e si discuta la convergenza puntuale, uniforme, e totale della soluzione trovata.

Per separazione di variabili, cerchiamo una soluzione nella forma

$$u(t, x) = f(t)g(x)$$

L'equazione differenziale (7.6a) diventa

$$f'(t)g(x) - 9f(t)g''(x) = 0$$

la quale può essere riarrangiata come

$$\frac{f'(t)}{9f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)}.$$

Poiché i termini a destra e sinistra dell'uguale sono funzioni che dipendono da variabili diverse, è necessario che entrambi i termini siano costanti:

$$\frac{f'(t)}{9f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Otteniamo quindi le due equazioni differenziali lineari

$$g''(x) - \lambda g(x) = 0, \quad f'(t) - 9\lambda f(t) = 0.$$

Iniziando con la componente spaziale, studiamo la soluzione in base al segno di  $\lambda$ .

Se  $\lambda > 0$ , la soluzione è

$$g(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

La condizione al bordo di Dirichlet sinistra equivale a porre  $g(0) = 0 \Leftrightarrow A + B = 0$ . La condizione al bordo di Neumann destra, invece, pone

$$g'(x) \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\lambda}Ae^{\sqrt{\lambda}x} - \sqrt{\lambda}Be^{-\sqrt{\lambda}x} \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\lambda}Ae^{\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\lambda}Be^{-\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}} = 0,$$

Poiché  $A = -B$ , l'espressione sopra diventa

$$\sqrt{\lambda}Ae^{\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}} + \sqrt{\lambda}Ae^{-\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}} = 0$$

che è soddisfatta solo per  $A = 0$ . Concludendo, si ottiene  $A = B = 0$ .

Se  $\lambda = 0$ , la soluzione è

$$g(x) = Ax + B$$

e, ponendo  $g(0) = g'(\pi/2) = 0$  si ottiene, di nuovo,  $A = B = 0$ .

Se, infine,  $\lambda < 0$  la soluzione alla componente spaziale è

$$g(x) = A \sin(\sqrt{-\lambda}x) + B \cos(\sqrt{-\lambda}x).$$

Ponendo  $g(0) = 0$  si ottiene  $B = 0$ . Ponendo  $g'(\pi/2) = 0$  si ha

$$A\sqrt{-\lambda} \cos\left(\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

che pone

$$\sqrt{-\lambda} = 2n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -(2n + 1)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La legge della componente temporale diventa

$$f'(t) = 9\lambda f(t) = -9(2n + 1)^2 f(t)$$

che ha come soluzione

$$f(t) = C \exp(-9(2n + 1)^2 t).$$

La soluzione  $u$  in forma di serie diventa quindi

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp(-9(2n + 1)^2 t) \sin((2n + 1)x)$$

Per i coefficienti  $b_n$ , dobbiamo porre

$$u(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin((2n + 1)x) = \sin^5(x).$$

Non c'è bisogno di calcolare i coefficienti come serie di Fourier. Infatti, partendo da

$$\sin^5(x) = \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \right)^5$$

sviluppiamo l'elevamento alla potenza sesta

$$\begin{aligned} \sin^6(x) &= \frac{1}{2^5} (e^{5ix} - 5e^{4ix}e^{-ix} + 10e^{3ix}e^{-2ix} - 10e^{2ix}e^{-3ix} + 5e^{ix}e^{-4ix} - e^{-5ix}) \\ &= \frac{1}{2^5} (e^{5ix} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix}) \end{aligned}$$

e riarrangiando

$$\begin{aligned} \sin^5(x) &= \frac{1}{2^4} \left( \frac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{2} - 5 \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2} + 10 \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{16} (\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)) \end{aligned}$$

ottenendo i coefficienti

$$b_0 = \frac{5}{8}, \quad b_1 = \frac{-5}{16}, \quad b_2 = \frac{1}{16}, \quad b_k = 0, \quad k > 2.$$

### 7.3 Esercizi extra

Esercizio extra 7.1. Si trovi una soluzione alla seguente equazione differenziale:

$$y'''(x) - y'' + y' - y(x) = \sin(x).$$

Esercizio extra 7.2. Si trovi una soluzione alla seguente equazione differenziale:

$$y'''(x) + y''(x) - y' - y = \cos(x).$$

Esercizio extra 7.3. Si trovi una soluzione alla seguente equazione differenziale:

$$y''(x) - y'(x) - 2y = 2 - 2x - 2x^2.$$

Esercizio extra 7.4. Si determini una soluzione in forma di serie per il seguente sistema differenziale, e si studi convergenza puntuale, uniforme, e totale della serie trovata:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - 3u_{xx}(t, x) = 0 & t > 0, \quad x \in (0, \pi) \\ u(t, 0) = 0 & t > 0 \\ u(t, \pi) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = x(x - \pi) & x \in (0, \pi) \\ u_t(0, x) = 0, & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

Esercizio extra 7.5. Si determini una soluzione in forma di serie per il seguente sistema differenziale, e si studi convergenza puntuale, uniforme, e totale della serie trovata:

$$\begin{cases} u_t(t, x) - 4u_{xx}(t, x) = 0 & t > 0, \quad x \in (0, \pi) \\ u(t, 0) = 0 & t > 0 \\ u(t, \pi) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = \left| x - \frac{\pi}{2} \right| - \frac{\pi}{2} & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

Esercizio extra 7.6. Si determini una soluzione in forma di serie per il seguente sistema differenziale, e si studi convergenza puntuale, uniforme, e totale della serie trovata:

$$\begin{cases} -u_t + 2u_{xx} + 3u_x + u = 0, & t > 0, \quad x \in (0, \pi) \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = \exp\left(-\frac{3}{4}x\right) \left(\frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|\right) & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

Esercizio extra 7.7. Si determini una soluzione in forma di serie per il seguente sistema differenziale, e si studi convergenza puntuale, uniforme, e totale della serie trovata:

$$\begin{cases} -u_{tt} + 3u_{xx} = 0 & t > 0, \quad x \in (0, \pi) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = 0 & x \in (0, \pi) \\ u_t(0, x) = x & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

## Capitolo 8

# Campi Vettoriali

### 8.1 Campi vettoriali, potenziali, e lavoro

**Definizione 8.1.1.** Il *lavoro* di un campo vettoriale  $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lungo un arco di curva  $\gamma$  è

$$L = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\ell$$

**Definizione 8.1.2.** Un campo vettoriale  $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice *conservativo* se esiste una funzione  $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (detta *potenziale*) tale che  $\mathbf{F} = \nabla U$ .

**Proposizione 8.1.1.** Sia  $\mathbf{F} = \nabla U$  un campo vettoriale conservativo,  $\gamma$  un arco di curva regolare con dominio  $[t_0, t_1]$  tale che  $\gamma(t_0) = p, \gamma(t_1) = q$ . Allora il lavoro lungo  $\gamma$  dipende solo da  $p$  e  $q$

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\ell = U(q) - U(p).$$

**Proposizione 8.1.2.** Se  $\mathbf{F}$  è un campo vettoriale conservativo, allora è anche irrotazionale:  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ .

Il viceversa non è vero in generale ma è necessario che il dominio sia semplicemente connesso.

**Proposizione 8.1.3.** Sia  $\mathbf{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vettoriale irrotazionale in un dominio  $\Omega$  semplicemente connesso. Allora il campo è anche conservativo in  $\Omega$ .

Esercizio 8.1.1. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, z)$$

lungo l'arco di curva  $\gamma$  parametrizzato da

$$\mathbf{r}(t) = ((3 + \cos(3t)) \cos(t), (3 + \cos(3t)) \sin(t), \sin(3t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Calcoliamo

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = ((3 + \cos(3t)) \sin(t), -(3 + \cos(3t)) \cos(t), \sin(3t)),$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} -3 \sin(3t) \cos(t) - (3 + \cos(3t)) \sin(t) \\ -3 \sin(3t) \sin(t) + (3 + \cos(3t)) \cos(t) \\ 3 \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Abbiamo quindi che il lavoro si calcola come segue:

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (-(3 + \cos(3t))^2 + 3 \cos(3t) \sin(3t)) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (-(3 + \cos(3t))^2) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} -(9 + \cos^2(3t) + 6 \cos(3t)) dt \\
 &= -19\pi
 \end{aligned}$$

Esercizio 8.1.2. Calcolare la circuitazione del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$$

lungo l'arco di curva  $\gamma$  parametrizzato da

$$\mathbf{r}(\theta) = (R \cos^3(\theta), R \sin^3(\theta)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Abbiamo

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta)) = (-R \sin^3(\theta), R \cos^3(\theta)), \quad \dot{\mathbf{r}}(\theta) = (-3R \cos^2(\theta) \sin(\theta), 3R \sin^2(\theta) \cos(\theta)).$$

Il lavoro risulta quindi

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{2\pi} -3R^2 \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) + 3R^2 \sin^2(\theta) \cos^4(\theta) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} 3R^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) d\theta \\
 &= 3R^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) d\theta \\
 &= \frac{3}{4} \pi R^2
 \end{aligned}$$

Esercizio 8.1.3. Calcolare il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left( \frac{2xz - y}{x^2 + y^2}, \frac{2yz + x}{x^2 + y^2}, \log(x^2 + y^2) \right),$$

dire se è irrotazionale, conservativo e, in tal caso, determinarne un potenziale.

Calcoliamo il rotore:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{2xz-y}{x^2+y^2} & \frac{2yz+x}{x^2+y^2} & \log(x^2+y^2) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2} \\ -\left(\frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\right) \\ \frac{(x^2+y^2)-2x(2xz-y)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{(x^2+y^2)-2x(2xz-y)}{(x^2+y^2)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ne segue che il campo  $\mathbf{F}$  è irrotazionale in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$  ed è quindi conservativo in sottoinsiemi semplicemente connessi che non contengono l'asse  $z$ .



Cerchiamo un potenziale. Poiché  $\nabla U = \mathbf{F}$  si ha, in particolare, che  $\partial_x U(x, y, z) = \mathbf{F}_1(x, y, z)$  da cui

$$U = \int \frac{2xz - y}{x^2 + y^2} dx = z \log(x^2 + y^2) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c(y, z).$$

Calcoliamo ora

$$\frac{\partial}{\partial y} U = \frac{2yz}{x^2 + y^2} - \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \partial_y c(y, z) = \frac{2yz + x}{x^2 + y^2} + \partial_y c(y, z).$$

Questa quantità deve essere pari alla seconda componente del campo  $\mathbf{F}$ , ovvero

$$\partial_y c(y, z) = 0 \Rightarrow c(y, z) = c(z).$$

Calcolando ora la derivata rispetto a  $z$  si ha

$$\frac{\partial}{\partial z} U = \log(x^2 + y^2) + c'(z)$$

che, dovendo essere uguale a  $\mathbf{F}_3(x, y, z) = \log(x^2 + y^2)$  pone  $c(z) = C \in \mathbb{R}$ .

Un generico potenziale è quindi

$$U = z \log(x^2 + y^2) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + C.$$

Il potenziale è definito per  $y \neq 0$ . Poiché non è prolungabile su tutto  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ , il campo vettoriale non è conservativo.

Esercizio 8.1.4. Dire se il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left( \frac{y}{1 + z^2}, \frac{x}{1 + z^2} - \frac{2yz}{(1 + y^2)^2}, -\frac{2z(1 + xy)}{(1 + z^2)^2} + \frac{1}{1 + y^2} \right)$$

è conservativo e, in tal caso, calcolarne un potenziale.

Iniziamo calcolando il rotore  $\nabla \times \mathbf{F}$ :

$$\nabla \times \mathbf{F}|_1 = \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = -\frac{2xz}{(1 + z^2)^2} + \frac{-2y}{(1 + y^2)^2} - \left( \frac{-2xz}{(1 + z^2)^2} - \frac{2y}{(1 + y^2)^2} \right) = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{F}|_2 = \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{-2yz}{(1 + z^2)^2} - \left( \frac{-2zy}{(1 + z^2)^2} \right) = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{F}|_3 = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{1}{1 + z^2} - \frac{1}{1 + z^2} = 0.$$

$\mathbf{F}$  è irrotazionale su  $\mathbb{R}^3$  che è semplicemente connesso. Ne segue che il campo è anche conservativo in  $\mathbb{R}^3$ .

Calcoliamo il potenziale. Partendo con la prima componente, si ha

$$\partial_x U = F_1 \Rightarrow U = \frac{xy}{1 + z^2} + c(y, z).$$

Se ora deriviamo rispetto a  $y$ ,

$$\partial_y U = \frac{x}{1 + z^2} + \partial_y c(y, z) \Rightarrow \partial_y c(y, z) = \frac{-2yz}{(1 + y^2)^2} \Rightarrow c(y, z) = \frac{z}{1 + y^2} + d(z).$$

Derivando il potenziale costruito fino a qui rispetto a  $z$ , otteniamo

$$\partial_z U = -\frac{2xyz}{(1+z^2)^2} + \frac{1}{1+y^2} + d'(z) \Rightarrow d'(z) = -\frac{2z}{(1+z^2)^2} \Rightarrow d(z) = \frac{1}{1+z^2} + C.$$

Il generico potenziale è quindi

$$U(x, y, z) = \frac{xy+1}{1+z^2} + \frac{z}{1+y^2} + C.$$

Esercizio 8.1.5. Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left( \frac{-z}{(x+y^2)^2}, \frac{-2yz}{(x+y^2)^2} + \frac{1}{z}, \frac{1}{x+y^2} - \frac{y}{z^2} + 2z \right)$$

su  $\mathbb{R}_{>0}^3$ . Verificare che è conservativo e calcolare un potenziale.

Calcoliamo il rotore

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{-2y}{(x+y^2)^2} - \frac{1}{z^2} - \left( \frac{-2y}{(x+y^2)^2} - \frac{1}{z^2} \right) \\ \frac{-1}{(x+y^2)^2} - \left( \frac{-1}{(x+y^2)^2} \right) \\ \frac{4yz}{(x+y^2)^2} - \left( \frac{4yz}{(x+y^2)^2} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Il campo è irrotazionale su  $\mathbb{R}_{>0}^3$ , il quale è semplicemente connesso. Ne segue che  $\mathbf{F}$  è conservativo. Per cercare un potenziale  $U$ , iniziamo ponendo  $\partial_z U = F_3$ , da cui

$$U = \frac{z}{x+y^2} + \frac{y}{z} + z^2 + c(x, y).$$

Derivando rispetto a  $x$  otteniamo

$$\partial_x U = \frac{-z}{(x+y^2)^2} + \partial_x c(x, y)$$

da cui si ottiene che  $c$  è funzione solo di  $y$ :  $c(x, y) = d(y)$ . Derivando ora rispetto a  $y$ , si ottiene

$$\partial_y U = \frac{-2yz}{(x+y^2)^2} + \frac{1}{z} + d'(y)$$

da cui otteniamo la condizione  $d'(y) = 0$ .

Riassumendo, il potenziale è

$$U(x, y, z) = \frac{z}{x+y^2} + \frac{y}{z} + z^2 + C.$$

Esercizio 8.1.6. Dato il campo vettoriale planare

$$\mathbf{F}(x, y) = (y(y-x), x(x-y))$$

dire se è conservativo e, in tal caso, calcolarne il potenziale. Calcolare il lavoro sul triangolo di vertici  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,2)$  percorso in senso antiorario.

Iniziamo calcolando il rotore. Per un campo vettoriale planare, il rotore avrà le prime due componenti nulle e

$$\nabla \times \mathbf{F}|_3 = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x(x-y)) - \frac{\partial}{\partial y}(y(y-x)) = 2x - 2y.$$

Poiché il campo non è irrotazionale, ne segue che non è nemmeno conservativo.

Per calcolarne il lavoro, definiamo tre curve,  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , ognuna che permetta di percorrere un lato del triangolo. Queste curve sono parametrizzate, rispettivamente, da

$$\mathbf{r}_1(t) = (t, 0), \quad t \in [0, 1], \quad \mathbf{r}_2(t) = (1 - t, 2t), \quad t \in [0, 1], \quad \mathbf{r}_3(t) = (0, 2 - t), \quad t \in [0, 2].$$

Il lavoro lungo l'intero triangolo è dato dalla somma sui singoli lati:

$$L = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\ell + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\ell + \int_{\gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\ell.$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\ell &= \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ t^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle dt = 0, \\ \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\ell &= \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} 2t(3t-1) \\ (1-t)(1-3t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 -6t + 2 dt = [-3t^2 + 2t]_{t=0}^{t=1} = -1, \\ \int_{\gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\ell &= \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} (2-t)^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle dt = 0. \end{aligned}$$

Si ottiene, infine, che il lavoro totale è  $L = -1$ .

Esercizio 8.1.7. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, z, x^2)$$

lungo l'arco di curva  $\gamma$  parametrizzato da

$$\mathbf{r}(\theta) = (R \sin(\theta), R \sin(\theta), R \cos(\theta)), \quad \theta \in [0, \pi].$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta)) &= (R^2 \sin^2(\theta), R \cos(\theta), R^2 \sin^2(\theta)), \\ \dot{\mathbf{r}}(\theta) &= (R \cos(\theta), R \cos(\theta), -R \sin(\theta)). \end{aligned}$$

Calcoliamo allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\ell &= \int_0^{\pi} R^3 \sin^2(\theta) \cos(\theta) + R^2 \cos^2(\theta) - R^3 \sin^3(\theta) d\theta \\ &= R^3 \int_0^{\pi} \sin^2(\theta) \cos(\theta) d\theta + R^2 \int_0^{\pi} \cos^2(\theta) d\theta - R^3 \int_0^{\pi} \sin^3(\theta) d\theta \\ &= R^3 \left[ \frac{\sin^3(\theta)}{3} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} + R^2 \int_0^{\pi} \cos^2(\theta) d\theta - R^3 \left( \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta - \int_0^{\pi} \sin(\theta) \cos^2(\theta) d\theta \right) \\ &= R^2 \int_0^{\pi} \cos^2(\theta) d\theta - R^3 \left( [-\cos(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\pi} + \left[ \frac{\cos^3(\theta)}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \right) \\ &= R^2 \int_0^{\pi} \cos^2(\theta) d\theta - R^3 \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Calcoliamo

$$\int_0^{\pi} \cos^2(\theta) d\theta = [\sin(\theta) \cos(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\pi} + \int_0^{\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} 1 - \cos^2(\theta) d\theta = \pi - \int_0^{\pi} \cos^2(\theta) d\theta$$

da cui

$$\int_0^\pi \cos^2(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Il lavoro totale è

$$L = \frac{\pi}{2} R^2 - \frac{4}{3} R^3.$$

### 8.1.1 Formula di Gauss-Green

**Teorema 8.1.1** (Gauss-Green). *Sia  $\gamma$  un arco di curva planare, chiusa, semplice, regolare a tratti, e orientata positivamente parametrizzata da  $\mathbf{r}$ . Sia inoltre  $D \subset \mathbb{R}^2$  la regione delimitata dall'immagine di  $\gamma$ :*

$$\partial D = \Gamma = \{(x, y) : \exists t, (x, y) = \mathbf{r}(t)\}.$$

*Siano inoltre  $F_1, F_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$  derivabili e con derivate parziali continue. Allora, chiamato  $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ , si ha*

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\ell = \oint_\gamma F_1 dx + F_2 dy = \iint_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dx dy. \quad (8.1)$$

Esercizio 8.1.8. Date le funzioni

$$P(x, y) = y^2,$$

$$Q(x, y) = x^2,$$

ed il dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 > 1, y < 3 - x\}$$

si verifichi che vale la formula di Gauss-Green.

La formula di Gauss-Green (8.1) afferma, in questo caso, che

$$\oint_{\partial^+ D} y^2 dx + x^2 dy = \iint_D (2x - 2y) dx dy.$$

Calcoliamo il termine a destra con la formula dell'integrale iterato. Definiti

$$\tilde{D} = \{(x, y) : x \in [0, 3], y \in [0, 3 - x]\},$$

$$\hat{D} = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

si ha che  $D = \tilde{D} \setminus \hat{D}$ , da cui

$$\begin{aligned} \iint_D (2x - 2y) dx dy &= \iint_{\tilde{D}} (2x - 2y) dx dy - \iint_{\hat{D}} (2x - 2y) dx dy \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-x} (2x - 2y) dy dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (2\rho \cos(\theta) - 2\rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^3 [2xy - y^2]_{y=0}^{y=3-x} dx - \left( \int_0^1 2\rho^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) - \sin(\theta) d\theta \right) \\ &= \int_0^3 (-3x^2 + 12x - 9) dx - \left( \left[ \frac{2}{3} \rho^3 \right]_{\rho=0}^{\rho=1} [\sin(\theta) + \cos(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \right) \\ &= [-x^3 + 6x^2 - 9x]_{x=0}^{x=3} - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

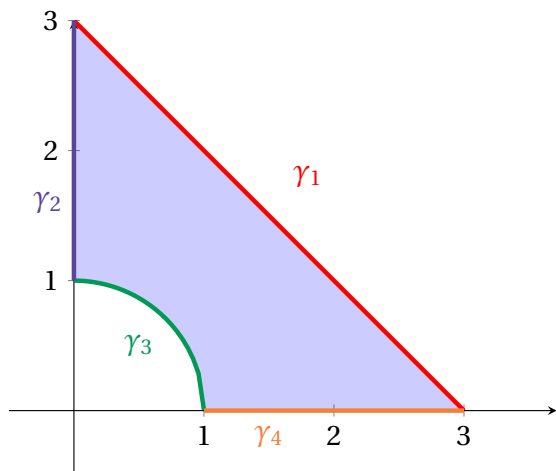


Figura 8.1: Dominio  $D$  nell'Esercizio 8.1.8.

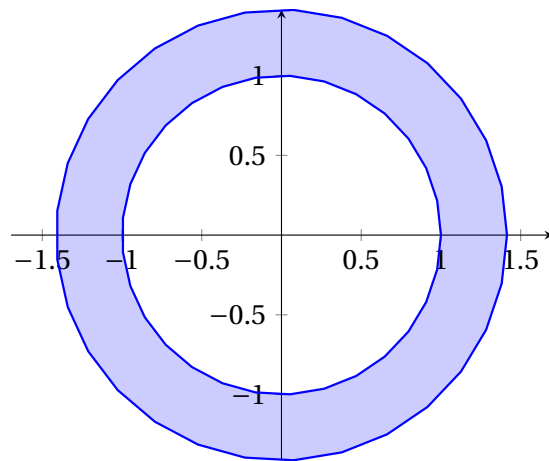


Figura 8.2: Dominio  $D$  nell'Esercizio 8.1.9.

Similmente,  $\partial^+ D$  si può scrivere come la composizione di quattro curve  $\gamma_i, i = 1, 2, 3, 4$  parametrizzate, rispettivamente, da

$$\mathbf{r}_1(t) = (3 - t, t), \quad t \in [0, 3],$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (0, 3 - t), \quad t \in [0, 2],$$

$$\mathbf{r}_3(t) = \left( \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \right), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\mathbf{r}_4(t) = (t, 0), \quad t \in [1, 3].$$

Ricordando che

$$\int_{\gamma} f \cdot d\ell = \int_{t_0}^{t_1} \langle f(\mathbf{r}(t)), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle dt$$

abbiamo

$$\int_{\gamma_1} y^2 dx + x^2 dy = \int_0^3 \left\langle \begin{bmatrix} t^2 \\ (3-t)^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle dt = \int_0^3 (-t^2 + t^2 + 9 - 6t) dt = 0$$

$$\int_{\gamma_2} y^2 dx + x^2 dy = \int_0^2 \left\langle \begin{bmatrix} (3-t)^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle dt = 0$$

$$\int_{\gamma_3} y^2 dx + x^2 dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \begin{bmatrix} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \\ -\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \end{bmatrix} \right\rangle dt = 0$$

$$\int_{\gamma_4} y^2 dx + x^2 dy = \int_1^3 \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ t^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle dt = 0$$

Concludiamo quindi

$$\oint_{\partial^+ D} y^2 dx + x^2 dy = 0.$$

Esercizio 8.1.9. Calcolare

$$I = \iint_D x^2 dx dy$$

dove

$$D = \overline{B(\mathbf{0}, \sqrt{2})} \setminus B(\mathbf{0}, 1).$$

Abbiamo

$$\partial B(\mathbf{0}, \sqrt{2}) = \left\{ \left( \sqrt{2} \cos(\theta), \sqrt{2} \sin(\theta) \right), \theta \in [0, 2\pi] \right\}, \quad \partial B(\mathbf{0}, 1) = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Vogliamo ricondurci alle formule di Gauss-Green

$$\iint_{B_i} (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dx dy$$

da cui possiamo scegliere  $F_2 = x^3/3, F_1 = 0$ . Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \iint_{B(\mathbf{0}, \sqrt{2})} x^2 dx dy &= \oint_{\partial^+ B(\mathbf{0}, \sqrt{2})} \frac{x^3}{3} dy = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos^3(\theta) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \sin(\theta) \\ \sqrt{2} \cos(\theta) \end{bmatrix} \right\rangle d\theta = \pi \\ \iint_{B(\mathbf{0}, 1)} x^2 dx dy &= \oint_{\partial^+ B(\mathbf{0}, 1)} \frac{x^3}{3} dy = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\cos^3(\theta)}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix} \right\rangle d\theta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

da cui

$$I = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi.$$

Esercizio 8.1.10. Calcolare l'area del dominio racchiuso dalla curva definita in forma polare come

$$\rho^2(\theta) = 2 \cos(2\theta).$$

Il dominio  $2\theta \in [0, 2\pi]$  va ridotto ai valori per cui  $\cos(2\theta) \geq 0$ . Consideriamo allora  $\theta \in [-\pi/4, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4]$ . La parametrizzazione di  $\gamma$  è  $\mathbf{r}(\theta) = \rho(\theta)(\cos(\theta), \sin(\theta))$ .

Ponendo  $F_1 = 0, F_2 = x$  abbiamo  $\partial_x F_2 - \partial_y F_1 = 1$  e

$$\iint_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dx dy = \oint_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left\langle \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{r}(\theta)) \\ F_2(\mathbf{r}(\theta)) \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{r}}(\theta) \right\rangle d\theta$$

Calcoliamo

$$\dot{\mathbf{r}}(\theta) = \begin{bmatrix} \dot{\rho}(\theta) \cos(\theta) - \rho(\theta) \sin(\theta) \\ \dot{\rho}(\theta) \sin(\theta) + \rho(\theta) \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Possiamo quindi calcolare l'area richiesta come

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \rho(\theta) \cos(\theta) (\dot{\rho}(\theta) \sin(\theta) + \rho(\theta) \cos(\theta)) d\theta + \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \rho(\theta) \cos(\theta) (\dot{\rho}(\theta) \sin(\theta) + \rho(\theta) \cos(\theta)) d\theta$$

Cerchiamo la primitiva:

$$\begin{aligned} \int \rho(\theta) \cos(\theta) (\dot{\rho}(\theta) \sin(\theta) + \rho(\theta) \cos(\theta)) d\theta &= \frac{1}{2} \int \rho(\theta) \dot{\rho}(\theta) \sin(2\theta) d\theta + \int \rho^2(\theta) \cos^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{d}{d\theta} (\rho^2(\theta)) \sin(2\theta) d\theta + \int \cos^2(\theta) d\theta + \int \cos(2\theta) d\theta \end{aligned}$$

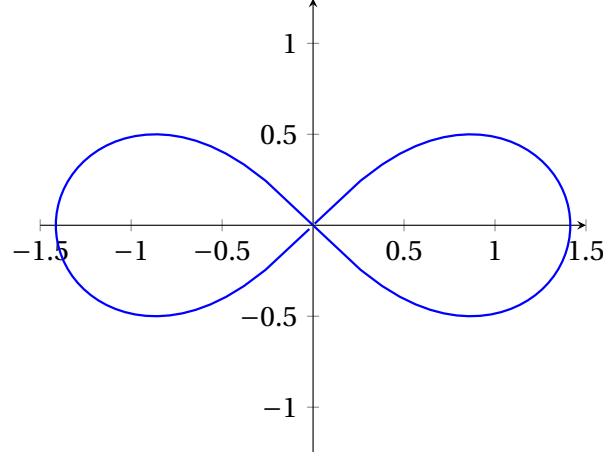


Figura 8.3: Curva dell'Esercizio 8.1.10.

Di conseguenza

$$I = - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(2\theta) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2\theta) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta + \left( - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^2(2\theta) d\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos^2(2\theta) d\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta \right)$$

Poiché le integrande sono  $\pi$ -periodiche,

$$I = 2 \left( - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(2\theta) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2\theta) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta \right)$$

Notiamo che

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(\theta) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(2\theta) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\pi - 2\theta) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2\theta) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\theta) d\theta$$

Concludendo

$$I = 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta = 2.$$

## 8.2 Flusso di un campo vettoriale

**Definizione 8.2.1.** Dati una superficie segolare orientata  $\Sigma$  con versore normale  $\hat{\mathbf{n}}$  ed un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  di classe  $\mathcal{C}^1$  in un intorno di  $\Sigma$ . Allora, si definisce *flusso* del campo  $\mathbf{F}$  attraverso  $\Sigma$  nella direzione e verso di  $\hat{\mathbf{n}}$  l'integrale

$$\Phi(\mathbf{F}, \Sigma) = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma. \quad (8.2)$$

Ricordando che, se  $\Sigma$  è parametrizzata da una funzione  $\mathbf{r}(u, v)$  per  $(u, v) \in A$ , allora

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$$

e

$$d\sigma = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv.$$

Si ottiene quindi che il flusso in (8.2) si scrive come

$$\Phi(\mathbf{F}, \Sigma) = \iint_A \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv.$$

**Esercizio 8.2.1.** Calcolare il flusso uscente dalla superficie sferica di raggio  $R$  e centro l'origine, per il campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, 0, y)$ .

Scriviamo la superficie in forma cartesiana come unione di due semisfere  $S^+$  e  $S^-$ . La semisfera superiore  $S^+$  è definita da  $z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$ , per  $x^2 + y^2 < R^2$  orientata con normale verso l'alto

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} \\ \frac{y}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Il flusso è quindi

$$\Phi(\mathbf{F}, S^+) = \iint_{x^2 + y^2 < R^2} \left( \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} + y \right) dx dy.$$

Per simmetria,

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{F}, S^+) &= \iint_{x^2 + y^2 < R^2} \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \int_0^R \frac{\rho^3}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho \end{aligned}$$

Tramite la sostituzione  $\sigma = \rho^2$

$$\Phi(\mathbf{F}, S^+) = \int_0^{2\pi} \left( \frac{\cos(2\theta) + 1}{2} \right) d\theta \frac{1}{2} \int_0^{R^2} \frac{\sigma}{\sqrt{R^2 - \sigma}} d\sigma.$$

Sostituendo ora  $\mu = R^2 - \sigma$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{F}, S^+) &= \frac{\pi}{2} \int_{R^2}^0 \frac{R^2 - \mu}{\sqrt{\mu}} d\mu \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_0^{R^2} \frac{\mu - R^2}{\sqrt{\mu}} d\mu \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_0^{R^2} \left( \sqrt{\mu} - \frac{R^2}{\sqrt{\mu}} \right) d\mu. \end{aligned}$$

A questo punto possiamo calcolare l'integrale

$$\Phi(\mathbf{F}, S^+) = -\frac{\pi}{2} \left[ \frac{2}{3} \mu^{\frac{3}{2}} - 2R^2 \mu^{\frac{1}{2}} \right]_{\mu=0}^{\mu=R^2} = \frac{2\pi}{3}.$$

La semisfera inferiore  $S^-$  è definita da

$$z = -\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$$



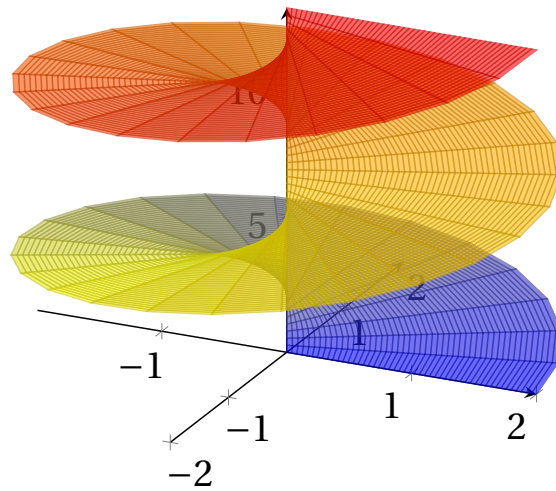


Figura 8.4: Superficie dell'Esercizio 8.2.2.

per  $x^2 + y^2 < R^2$  con normale uscente verso il basso (in questo caso la normale punta verso il basso per essere uscente dalla superficie, coerentemente a quanto fatto prima)

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} \\ \frac{y}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Con calcoli simili a quanto fatto prima

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{F}, S^-) &= \iint_{x^2 + y^2 < R^2} \left( \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} - y \right) dx dy \\ &= \iint_{x^2 + y^2 < R^2} \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy \\ &= \pi \frac{2}{3} R^3 \end{aligned}$$

Il flusso totale uscente è dunque pari a  $4/3\pi R^3$ .

Esercizio 8.2.2. Si consideri la superficie  $\Sigma$  parametrizzata da

$$\mathbf{r}(t, \theta) = (t \cos(\theta), t \sin(\theta), \theta), \quad t \in [0, 2], \quad \theta \in [0, 4\pi].$$

Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, z)$$

attraverso  $\Sigma$  orientata con normale data dalla parametrizzazione.

Abbiamo che

$$\hat{\mathbf{n}} d\sigma = (\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\theta) dt d\theta$$

Calcoliamo

$$\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -t \sin(\theta) & t \cos(\theta) & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \\ t \end{bmatrix}$$

Da cui il flusso si calcola come

$$\Phi(\mathbf{F}, \Sigma) = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = \int_0^2 \int_0^{4\pi} \left\langle \begin{bmatrix} t \sin(\theta) \\ -t \cos(\theta) \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \\ t \end{bmatrix} \right\rangle d\theta \, dt = \int_0^2 t \, dt \int_0^{4\pi} (1 + \theta) \, d\theta$$

risultando, finalmente

$$\Phi(\mathbf{F}, \Sigma) = 2(4\pi + 8\pi^2).$$

Esercizio 8.2.3. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -z)$$

attraverso la superficie conica  $\Sigma$  descritta dal grafico della funzione

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq R^2$$

orientata con normale verso l'alto.

La superficie è parametrizzata da

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$$

Calcoliamo la normale indotta dalla parametrizzazione:

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

e notiamo che è sempre orientata verso l'alto, e non sarà quindi necessario cambiare segno.

Calcoliamo allora il flusso

$$\Phi(\mathbf{F}, \Sigma) = \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}(x, y)), \mathbf{r}_x(x, y) \times \mathbf{r}_y(x, y) \rangle \, dx \, dy = \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} -2\sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy.$$

Passando alle coordinate polari,

$$\Phi(\mathbf{F}, \Sigma) = \int_0^{2\pi} \int_0^R -2\rho^2 \, d\rho \, d\theta = -\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Esercizio 8.2.4. Calcolare il flusso del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (1, ze^{yz}, ye^{yz})$$

attraverso il quadrato  $\{(x, y, 0) : x \in [0, 2], y \in [0, 2]\}$  con normale orientata verso l'alto.

Calcoliamo

$$\Phi(\mathbf{F}, \Sigma) = \int_0^2 \int_0^2 \langle (1, 0, y), (0, 0, 1) \rangle \, dx \, dy = \int_0^2 \int_0^2 y \, dx \, dy = 4.$$

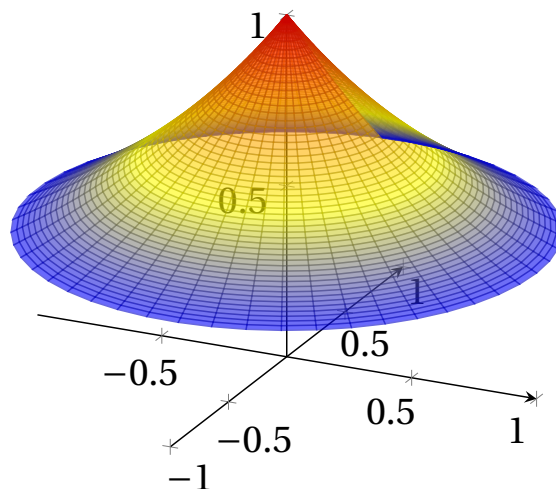


Figura 8.5: Superficie dell'Esercizio 8.2.5.

Esercizio 8.2.5. Sia  $\Sigma$  la superficie parametrizzata da

$$\mathbf{r}(t, \theta) = (t \cos(\theta), t \sin(\theta), e^{-t}), \quad t \in [0, 1], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Calcolare il flusso del campo

$$\mathbf{F}(x, y, 0)$$

attraverso  $\Sigma$  orientata con normale verso l'alto.

Calcoliamo

$$\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ -e^{-t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -t \sin(\theta) \\ t \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} t \cos(\theta) \\ e^{-t} t \sin(\theta) \\ t \end{bmatrix}$$

e notiamo che la normale indotta dalla parametrizzazione è quella richiesta dall'esercizio ( $t > 0$ ).

Calcoliamo il flusso

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{F}, \Sigma) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle (t \cos(\theta), t \sin(\theta), 0), (e^{-t} t \cos(\theta), e^{-t} t \sin(\theta), t) \rangle d\theta dt \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-t} t^2 d\theta dt \\ &= 2\pi \int_0^1 t^2 e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Integrando due volte per parti,

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{F}, \Sigma) &= 2\pi \left[ -e^{-t} (t^2 + 2t + 2) \right]_{t=0}^{t=1} \\ &= 2\pi \left( 2 - \frac{5}{e} \right) \end{aligned}$$

### 8.2.1 Teoremi della divergenza e del rotore

**Teorema 8.2.1** (della divergenza / di Gauss). Sia  $D \subset \mathbb{R}^3$  un dominio limitato, semplice rispetto a tutti e tre gli assi cartesiani, e la cui frontiera è una superficie regolare a pezzi e orientabile. Indichiamo con  $\hat{\mathbf{n}}_e$  il versore normale esterno a  $\partial D$  e sia  $\mathbf{F}$  un campo vettoriale di classe  $\mathcal{C}^1(D)$ . Allora vale l'identità

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_e \, d\sigma.$$

Il teorema afferma quindi che il flusso di un campo vettoriale uscente da una superficie chiusa è pari all'integrale della divergenza del campo nella regione racchiusa dalla superficie stessa.

**Teorema 8.2.2** (del rotore / di Stokes). Sia  $\Sigma$  una superficie regolare orientabile, orientata con versore normale  $\hat{\mathbf{n}}$  dotata di bordo  $\partial^+ \Sigma$  orientato positivamente. Supponiamo inoltre che  $\partial^+ \Sigma$  sia scrivibile come una curva regolare a tratti  $\gamma$ . Sia infine  $\mathbf{F}$  un campo vettoriale definito in un intorno di  $\Sigma$ . Allora vale l'identità

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = \oint_{\partial^+ \Sigma} \mathbf{F} d\ell.$$

Il teorema afferma che il flusso del rotore di un campo vettoriale attraverso  $\Sigma$  uguaglia la circuitazione del campo lungo il bordo orientato positivamente della superficie stessa.

*Esempio 8.2.1.* Si consideri lo stesso testo dell'Esercizio 8.2.1. Con il teorema della divergenza, il flusso richiesto diventa

$$I = \iiint_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz$$

dove  $\Omega$  è la sfera di raggio  $R$  e centro l'origine.  $I$  è quindi il volume della sfera,  $4/3 \pi R^3$ .

Esercizio 8.2.6. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$$

uscente dalla corona sferica

$$C = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

La superficie attraverso cui vogliamo calcolare il flusso è chiusa (i.e. è il bordo di una regione  $C$  tridimensionale), possiamo applicare il teorema della divergenza:

$$\iint_{\partial C} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_e \, d\sigma = \iiint_C \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz = \iiint_{1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4} 3(x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz.$$

Passando alle coordinate sferiche, questo diventa

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^2 3\rho^2 \rho^2 \sin(\varphi) \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin(\varphi) \, d\varphi \int_1^2 3\rho^4 \, d\rho = 2\pi \cdot 2 \left[ \frac{3\rho^5}{5} \right]_{\rho=1}^{\rho=2} = \frac{12\pi}{5} (32 - 1)$$

da cui il flusso richiesto è  $372\pi/5$ .

Esercizio 8.2.7. Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + y^2 z^3, z + 2xyz^3, x + 3xy^2 z^2)$$

e l'ellisse  $\gamma$  parametrizzata da

$$\mathbf{r}(\theta) = (2 \cos(\theta), 3 \sin(\theta), 1), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Si calcoli la circuitazione di  $\mathbf{F}$  lungo  $\gamma$ .

L'ellisse è il bordo della superficie  $\Sigma$  parametrizzata da

$$\mathbf{s}(t, \theta) = (2t \cos(\theta), 3t \sin(\theta), 1), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, 1]$$

con normale  $\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, 1)$ .

Per il teorema del rotore, l'integrale richiesto si calcola come

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\ell = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma.$$

Svolgendo i calcoli, questo è pari a

$$-\iint_{\Sigma} d\sigma = -|\Sigma| = -6\pi,$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato la formula per l'area di un'ellisse di semiassi  $a, b$ :  $\mathcal{A} = \pi ab$ .

Esercizio 8.2.8. Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z - y, x(1 + z^2), xy)$$

e la superficie  $\Sigma$  descritta da

$$z = 1 - \left( \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \right)$$

per  $x^2/4 + y^2/9 \leq 1$ , orientata con normale verso l'alto. Si calcoli il flusso del rotore di  $\mathbf{F}$  attraverso  $\Sigma$ .

Per il teorema del rotore

$$\Phi(\nabla \times \mathbf{F}, \Sigma) = \int_{\partial^+ \Sigma} \mathbf{F} d\ell.$$

Il bordo di  $\Sigma$  è una curva  $\gamma$  parametrizzata da

$$\mathbf{r}(\theta) = (2 \cos(\theta), 3 \sin(\theta), 0).$$

Il flusso richiesto diventa, quindi

$$\int_0^{2\pi} \langle (-3 \sin(\theta), 2 \cos(\theta), 6 \cos(\theta) \sin(\theta)), (-2 \sin(\theta) 3 \cos(\theta), 0) \rangle d\theta = \int_0^{2\pi} 6 d\theta = 12\pi.$$

Esercizio 8.2.9. Calcolare il flusso di

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, xy, yz)$$

attraverso la superficie  $\Sigma$  definita come la frontiera  $\partial C$  dell'insieme

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

Notiamo che  $C$  è il tetraedro di vertici  $(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 0)$ .

Per il teorema della divergenza, il flusso richiesto è pari a

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = \iiint_C \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz = \iiint_C (x + y + z) \, dx \, dy \, dz.$$

Calcoliamo l'integrale tramite la formula dell'integrale iterato. Il tetraedro  $C$  si può scrivere come

$$C = \{(x, y, z) : x \in [0, 1], y \in [0, 1 - x], z \in [0, 1 - x - y]\}$$

Ottenendo che l'integrale si può calcolare come segue:

$$\begin{aligned} \iiint_C (x + y + z) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x + y + z) \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[ xz + yz + \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2} (1 - x - y)(1 + x + y) \, dy \, dx \end{aligned}$$

Applicando il cambio di variabili  $w = x + y$  da cui  $dw = dy$  si ha che l'integrale diventa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 \int_x^1 1 - w^2 \, dw \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ w - \frac{w^3}{3} \right]_{w=x}^{w=1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{2}{3} - x + \frac{x^3}{3} \right) dx \\ &= \frac{1}{6} \left[ 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Esercizio 8.2.10. Data la superficie  $\Sigma$  parametrizzata come

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2), \quad x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x^2 + y^2 \leq R^2,$$

ed il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (1, 0, y)$$

si verifichi il teorema del rotore.

Iniziamo calcolando espressamente il flusso del rotore attraverso la superficie. Il rotore è  $\nabla \times \mathbf{F} = (1, 0, 0)$  mentre l'elemento d'area risulta essere  $\hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = (-2x, -2y, 1) \, dx \, dy$ . Possiamo ora calcolare il flusso (dove  $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$ )

$$\Phi(\nabla \times \mathbf{F}, \Sigma) = \iint_D \langle (1, 0, 0), (-2x, -2y, 1) \rangle \, dx \, dy = \iint_D -2x \, dx \, dy$$

Passando in coordinate polari, si ottiene

$$\Phi(\nabla \times \mathbf{F}, \Sigma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R -2\rho \cos(\theta) \rho \, d\rho \, d\theta = \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) \, d\theta \right) \left( \int_0^R -2\rho^2 \, d\rho \right) = -\frac{2}{3} R^3.$$

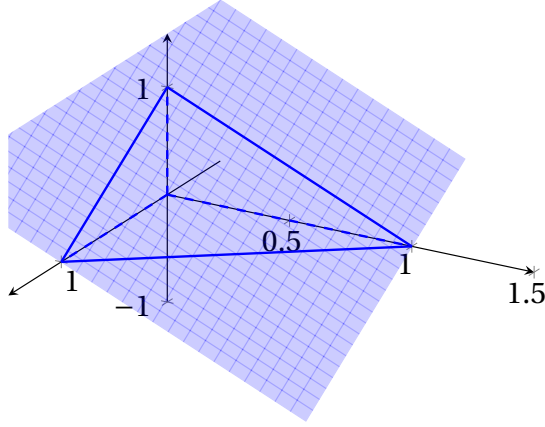


Figura 8.6: Dominio  $C$  dell'Esercizio 8.2.9.

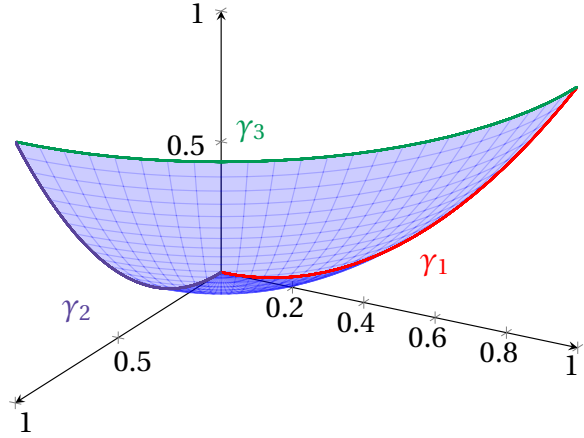


Figura 8.7: Dominio  $C$  dell'Esercizio 8.2.10.

Il bordo di  $\Sigma$  può essere scritto come la concatenazione di tre curve,  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  parametrizzate, rispettivamente, come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= (0, (R-t), (R-t)^2), & t &\in [0, R], \\ \mathbf{r}_2(t) &= (t, 0, t^2), & t &\in [0, R] \\ \mathbf{r}_3(t) &= (R \cos(t), R \sin(t), R^2), & t &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Calcoliamo la circuitazione come la somma lungo le tre curve. Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \int_0^R \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ R-t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2(R-t) \end{bmatrix} \right\rangle dt = \int_0^R -2(R-t)^2 dt = \left[ \frac{2}{3}(R-t)^3 \right]_{t=0}^{t=R} = -\frac{2}{3}R^3; \\ \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \int_0^R \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{bmatrix} \right\rangle dt = \int_0^R 1 dt = R; \\ \int_{\gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ R \sin(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -R \sin(t) \\ R \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -R \sin(t) dt = R [\cos(t)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = -R; \end{aligned}$$

che, sommati, restituiscono, come atteso,  $-2R^3/3$ .

Esercizio 8.2.11. Calcolare il flusso del rotore di

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 y, y z^2, y^2 + x^2)$$

attraverso la superficie laterale del cono di vertice  $(1, 0, 0)$  e base  $z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$  orientata verso l'alto.

Per il teorema del rotore, il flusso richiesto è pari alla circuitazione di  $\mathbf{F}$  lungo la circonferenza  $\gamma$  di centro l'origine, raggio unitario, e posta sul piano  $z = 0$ . Calcoliamo allora

$$I = \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) \sin(\theta) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle d\theta = \int_0^{2\pi} -\cos^2(\theta) \sin^2(\theta) d\theta$$

Poiché  $\sin(2\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta)$  si ha

$$I = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} -\sin^2(2\theta) d\theta$$

Inoltre, poiché  $\cos(2\vartheta) = \cos^2(\vartheta) - \sin^2(\vartheta) = 1 - 2\sin^2(\vartheta)$  si ha che

$$I = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(4\theta)}{2} - \frac{1}{2} d\theta = -\frac{\pi}{4}.$$

Esercizio 8.2.12. Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x^2 + e^{y^6} - 3z^{10}, xy + e^{z^6} - 3x^{10}, 3x^6y^{10} - xz)$$

dal bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3 - y^2 - z^2 \leq x \leq 6 - 4\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 < 9, z \leq 0 \right\}.$$

Il campo vettoriale è di classe  $\mathcal{C}^1$  e si può applicare il teorema della divergenza. Calcoliamo la divergenza

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x} (2x^2 + e^{y^6} - 3z^{10}) + \frac{\partial}{\partial y} (xy + e^{z^6} - 3x^{10}) + \frac{\partial}{\partial z} (3x^6y^{10} - xz) \\ &= 4x + x - x \\ &= 4x \end{aligned}$$

da cui, per il teorema della divergenza,

$$\Phi(\mathbf{F}, \partial\Omega) = \iiint_{\Omega} 4x dx dy dz$$

Passando in coordinate cilindriche

$$(x, y, z) = (\xi, \rho \cos(\theta), \rho \sin(\rho))$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} 4x dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_{3-\rho^2}^{6-4\rho} 4\xi \rho d\xi d\theta d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho [x^2]_{x=3-\rho^2}^{x=6-4\rho} d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho (22\rho^2 - 48\rho + 27 - \rho^4) d\rho \\ &= 2\pi \left[ \frac{11}{2} \rho^4 - 16\rho^3 + \frac{27}{2} \rho^2 - \frac{1}{6} \rho^6 \right]_{\rho=0}^{\rho=1} \\ &= \frac{17}{3} \pi \end{aligned}$$



### 8.3 Esercizi extra

Esercizio extra 8.1. Data la curva  $\gamma$  parametrizzata da

$$\mathbf{r}(t) = (t \cos(t), t \sin(t), t), \quad t \in [\pi, 2\pi]$$

e il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^2} = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

Calcolare il lavoro di  $\mathbf{F}$  lungo  $\gamma$ . Calcolare inoltre il flusso di  $\mathbf{F}$  uscente dalla superficie sferica di raggio  $R$  e centro l'origine.

Esercizio extra 8.2. Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left( \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, 0 \right)$$

se ne calcoli il flusso attraverso la superficie sferica di centro l'origine e raggio  $R$  compresa nel primo ottante (i.e.  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ), orientata verso l'alto.

Esercizio extra 8.3. Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (7y - e^{3\sin(x)}, 2\cos(e^{3y+1}) - x^2y + 7x)$$

lungo il bordo dell'insieme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq y \leq x + 3\}$$

percorso in senso orario.

Esercizio extra 8.4. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x|x|, y|x|, z)$$

attraverso la superficie conica  $\Sigma$  grafico della funzione

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq R^2$$

orientata verso l'alto

Esercizio extra 8.5. Si calcoli il rotore del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, 0 \right)$$

Quindi si calcoli il flusso del rotore attraverso la porzione di superficie sferica

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

orientata con normale uscente dalla sfera.

Esercizio extra 8.6. Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left( 3yz + \sin^8(x), xz + \log^6(1 + y^2), 2xy + e^{z^2} \right)$$

lungo il bordo della superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}$$

orientato positivamente rispetto ad un osservatore posto come il vettore uscente dal paraboloide  $z = 4 - x^2 - y^2$ .

Esercizio extra 8.7. Si consideri il tetraedro  $\Omega$  di vertici  $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$  ed il campo vettoriale  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ . Si verifichi il teorema della divergenza.

Esercizio extra 8.8. Si calcoli il flusso del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

uscente dalla superficie del cono di vertice l'origine, altezza  $h$ , raggio  $R$ , e con asse di simmetria coincidente con l'asse  $z$ . È possibile calcolare questo flusso col teorema della divergenza?

# Indice

<b>1</b>	<b>Curve</b>	<b>1</b>
1.1	Curve regolari e semplici, versori tangenti e lunghezza di una curva . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Regolarità di funzioni in <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>8</b>
2.1	Continuità, derivabilità, e differenzialità . . . . .	8
2.2	Piano tangente e versore normale . . . . .	18
2.3	Esercizi extra . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Ottimizzazione libera e vincolata</b>	<b>22</b>
3.1	Studio dei punti critici liberi: il test dell'Hessiana . . . . .	22
3.2	Studio dei punti critici vincolati: moltiplicatori di Lagrange . . . . .	28
3.3	Esercizi extra . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Teorema della funzione implicita</b>	<b>38</b>
4.1	Teorema del Dini in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	38
4.1.1	Involuppi . . . . .	41
4.1.2	Grafici qualitativi di luoghi di punti . . . . .	44
4.2	Teorema del Dini in generici spazi metrici . . . . .	51
4.3	Esercizi extra . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Serie di potenze, di funzioni, e di Fourier</b>	<b>54</b>
5.1	Successioni e serie numeriche . . . . .	54
5.2	Serie di potenze . . . . .	57
5.3	Serie di funzioni . . . . .	58
5.3.1	Serie di Fourier . . . . .	62
5.4	Esercizi extra . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Integrali per funzioni <math>\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}</math></b>	<b>68</b>
6.1	Formula dell'integrale iterato e cambio di variabili . . . . .	68
6.2	Integrali Curvilinei e Superficiali non orientati . . . . .	77
6.2.1	Integrali di linea . . . . .	77
6.2.2	Integrali di superficie . . . . .	80
6.3	Esercizi extra . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Equazioni Differenziali</b>	<b>84</b>
7.1	Equazioni differenziali ordinarie (ODE) . . . . .	84
7.1.1	Variazione delle costanti . . . . .	84
7.1.2	Metodo degli annihilatori . . . . .	87
7.2	Equazioni alle derivate parziali (PDE) . . . . .	90

7.3	Esercizi extra . . . . .	99
<b>8</b>	<b>Campi Vettoriali</b>	<b>101</b>
8.1	Campi vettoriali, potenziali, e lavoro . . . . .	101
8.1.1	Formula di Gauss-Green . . . . .	106
8.2	Flusso di un campo vettoriale . . . . .	109
8.2.1	Teoremi della divergenza e del rotore . . . . .	114
8.3	Esercizi extra . . . . .	119