

Populationsdynamik

Henning Körner, Oldenburg

... das bloße Anblicken einer Sache kann uns nicht fördern. Jedes Ansehen geht über in ein Betrachten, jedes Betrachten in ein Sinnen, jedes Sinnen in ein Verknüpfen, und so kann man sagen, daß wir schon bei jedem aufmerksamen Blick in die Welt theoretisieren. (Goethe)

Die Gestalt der Wirklichkeit ist immer reicher als die Linienführung der Grundsätze. (Musil)

Warum erscheint AIDS als großes Problem, obwohl wesentlich mehr Menschen im Straßenverkehr sterben? Nicht 5 Milliarden Menschen sind das entscheidende Problem, sondern der Zuwachs, das Wachstum der Anzahl der Menschen.

Will man Entwicklungen von Populationen modellieren, so besteht eine Möglichkeit darin, zuerst Daten zu sammeln und diese dann durch mathematische Funktionen zu beschreiben (Interpolation, Approximation). Man erhält dann deskriptive Modelle, also Antworten auf die Frage nach dem „Wie“. Versucht man dagegen die Wirkzusammenhänge zu erfassen, so erstellt man kausale Modelle, die eine Antwort auf das „Warum“ versuchen, der Abgleich mit Daten muss dann erst in einem zweiten Schritt erfolgen. Der Vorteil solcher Modellierungen liegt in der besseren Möglichkeit zu Prognosen, weil das „Warum“ Schlüsse auf das „Wie“ ermöglicht, während der umgekehrte Schluss meist sehr schwierig, wenn nicht unmöglich ist. So lassen sich z.B. die CO₂-Daten annähernd gleich gut linear, quadratisch und exponentiell approximieren, führen aber zu gänzlich verschiedenen Prognosen, z.B. über die Verdopplungszeit des Kohlendioxidgehalts; der reine Messwert („Bestand“) einer Größe ist wenig aussagekräftig. Nicht der „Bestand“, sondern das „Änderungsverhalten“ und das Zusammenspiel verschiedener Größen sollten modelliert werden, statt „beschreibende“ (quantitative) sollte „erklärende“ (qualitative), auf Wirkzusammenhänge gerichtete, Modellierung das Ziel sein (vgl. Bossel 1992, S. 29ff.). Es ist klar, dass natürlich auch hier – schon allein wegen des reduktiven Charakters jeglicher Modellierung – unterschiedliche Modelle mit entsprechend divergierenden Prognosen zu ein und demselben Sachverhalt (Messreihe, etc.) passen können.

Will man nun Änderungsverhalten beschreiben, so benötigt man im kontinuierlichen Fall die Ableitung, weitergehende Beschreibungen (Differentialgleichungen) bleiben meist – wenn überhaupt – Leistungskursen vorbehalten. Diskrete Beschreibungen (Differenzengleichungen) sind dagegen früher zugänglich, auch komplexere Zusammenhänge können in Grundkursen behandelt werden. An die Stelle analytischer Lösungsverfahren treten hier dann grafisch-numerische Auswertungen (Simulationen), die an Rechner delegiert werden. Zentrale Elemente sind dann das Herleiten von Termen und Gleichungen sowie die Interpretation der Simulationen; die durch Analytik mögliche Gesamtschau muss durch vielfältige Parametervariationen approximativ ersetzt werden. Durch solche Parametervariationen wird man dann auch den Abgleich mit realen Daten herstellen, hier fallen die Parameterwerte zuerst einmal mehr oder weniger vom Himmel, was aber durchaus sinnvoll ist, weil es um Wirkzusammenhänge und die durch sie induzierten Prozesse geht.

Ausgangspunkt aller Modellierungen bildet folgender Ansatz:

$$\text{Bestand}_{\text{neu}} - \text{Bestand}_{\text{alt}} = \text{Zuwachs}$$

In mathematischer Schreibweise:

$$x_{n+1} - x_n = Z; \quad \text{Startwert } x_0$$

Nur in den einfachsten Fällen ist Z konstant, meist wird der Zuwachs wieder von x_n und anderen Größen abhängen. Für $Z > 0$ ($Z < 0$) erhält man Wachstum (Abnahme) der Population.

1. Wachstumsmodelle

1.1 Exponentielles, begrenztes und logistisches Wachstum

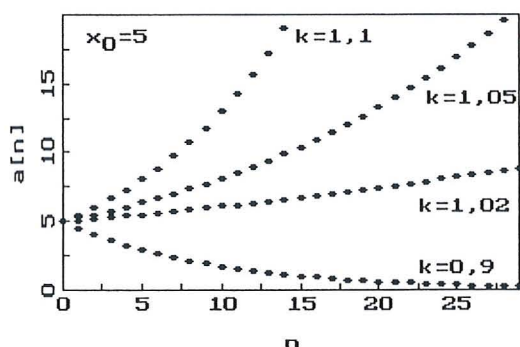
„Je größer der Bestand, desto größer der Zuwachs“ motiviert zu einem ersten Modell:

$$(1) \quad x_{n+1} - x_n = w \cdot x_n$$

bzw. $x_{n+1} = (1 + w) \cdot x_n = k \cdot x_n$

(Exponentielles Wachstum)

Der Zuwachs ist also proportional zum Bestand; w heißt dann Wachstumsrate, k (mit $k := w+1$) Wachstumsfaktor.



Der für $k > 1$ ins Unendliche wachsende Bestand gibt Anlass für Kritik: Die Ressourcen (Futter, Raum, etc.) sind immer endlich, es gibt eine Kapazitätsgrenze G . Ein naheliegender Ansatz ist dann folgender:

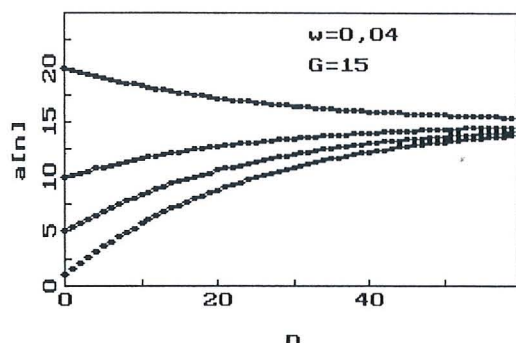
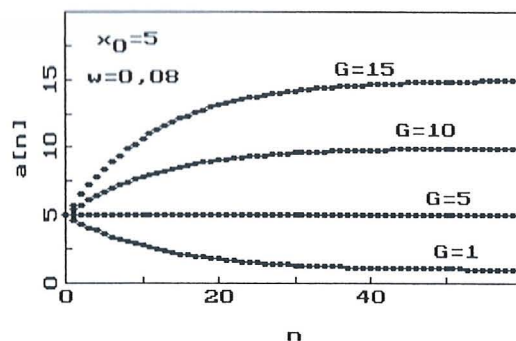
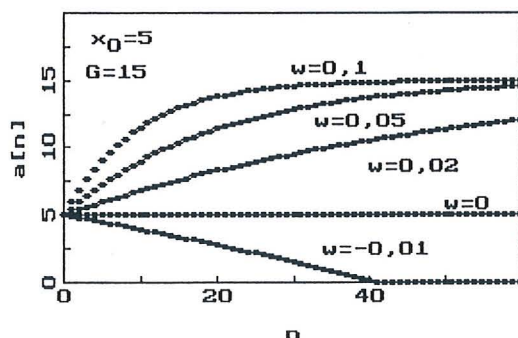
$$(2) \quad x_{n+1} - x_n = w \cdot (G - x_n)$$

bzw. $x_{n+1} = x_n + w \cdot (G - x_n)$

(Begrenztes Wachstum)

$G - x_n$ ist dann die noch verbleibende freie Kapazität (Restkapazität); der Zuwachs ist proportional zur möglichen Restkapazität.

Den Einfluss der verschiedenen Parameter (w, G, x_0) wird man dann durch Festhalten von zwei Parametern bei gleichzeitiger Variation des Dritten untersuchen:



Für die hier untersuchten Werte von w konvergiert der Bestand für $w > 0$, unabhängig vom Startwert, gegen die Kapazitätsgrenze. Dass es für negative Werte von w zum Aussterben kommt, lässt sich leicht antizipieren, gilt die Konvergenz aber für beliebig große w ? Vollständigen Aufschluss liefert hier die analytische Untersuchung:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + w \cdot (G - x_n) \\ &= (1 - w) \cdot x_n + w \cdot G \\ &= (1 - w) \cdot ((1 - w) \cdot x_{n-1} + w \cdot G) + w \cdot G \\ &= (1 - w)^2 \cdot x_{n-1} + w \cdot G \cdot (1 + (1 - w)) \\ &= (1 - w)^2 \cdot ((1 - w) \cdot x_{n-2} + w \cdot G) + w \cdot G \cdot (1 + (1 - w)) \\ &= (1 - w)^3 \cdot x_{n-2} + w \cdot G \cdot (1 + (1 - w) + (1 - w)^2) \\ &= \dots \\ &= (1 - w)^{n+1} \cdot x_0 + w \cdot G \cdot \frac{(1 - w)^{n+1} - 1}{(1 - w) - 1} \\ &= (1 - w)^{n+1} \cdot x_0 - G \cdot ((1 - w)^{n+1} - 1) \\ &= (1 - w)^{n+1} \cdot (x_0 - G) + G \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 - w)^{n+1} \cdot (x_0 - G) + G \\ \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_n \rightarrow G \text{ für } 0 < w < 2 \\ \text{Divergenz; sonst} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Für $1 < w < 2$ erhält man alternierende Konvergenz.

Mit dem Modell des begrenzten Wachstums ist zwar die Endlichkeit der Ressourcen berücks-

sichtigt, Anlass für Kritik liefert aber der anfängliche Verlauf der Bestandsentwicklung. Nimmt man $n = 0$ als Gegenwart, so fällt auf, dass die Wachstumsgeschwindigkeit zu Beginn am höchsten ist und dann kontinuierlich abnimmt, bei Startwerten unterhalb der Kapazitätsgrenze die 'Kurven' also rechtsgekrümmt sind. Dies widerspricht aber den häufig beobachtbaren Verläufen und auch der Erwartung, dass die Wachstumsgeschwindigkeit mit zunehmendem Bestand auch zunimmt, wenn noch genügend Ressourcen vorhanden sind. Ist der Bestand also noch wesentlich kleiner als die Kapazitätsgrenze, ist ein annähernd exponentielles Wachstum plausibel.

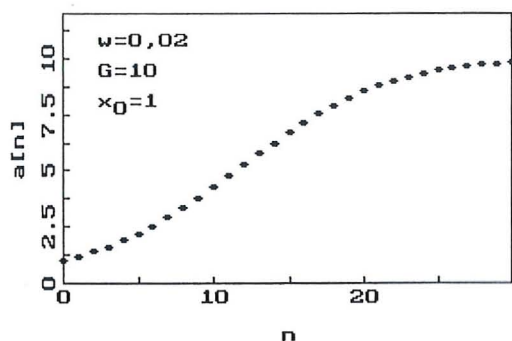
Ausgangspunkt für eine Modifikation kann dann die Überlegung sein, exponentielles und begrenztes Wachstum zu verkoppeln, derart, dass zu Beginn annähernd exponentielles Wachstum stattfindet (Bestand noch weit von Grenze entfernt), mit wachsendem Bestand aber die Begrenztheit den Verlauf bestimmt:

Die Änderung wird proportional zum Bestand und proportional zum möglichen Restbestand angenommen:

$$(3) \quad x_{n+1} - x_n = w \cdot x_n \cdot (G - x_n)$$

(Logistisches Wachstum)

Es ergibt sich der typische s-förmige Verlauf:

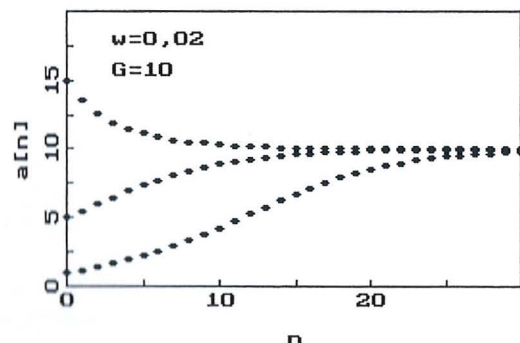
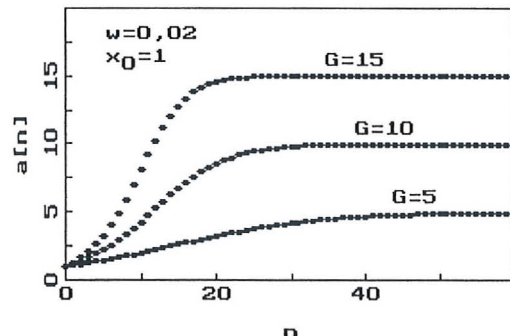
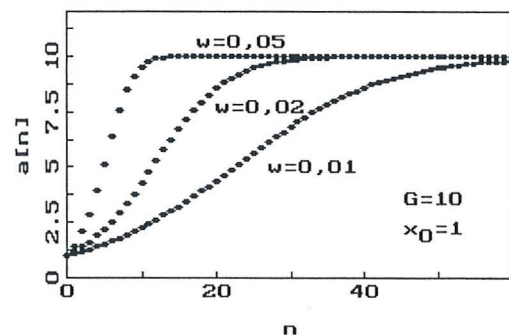


Möglichen Handlungen entsprechen wieder Parametervariationen. Man wird dann wieder fragen, welche Handlungskonsequenzen sich aus den Simulationen ergeben?

- Wachstumsfördernde bzw. -hemmende Maßnahmen: Variation von w ;
- Vergrößerung (Verkleinerung) des Lebensraumes bzw. Futtermittels etc.: Variation von G ;
- Populationen in verschiedenen Entwicklungsstadien: Variation von x_0 .

Die starke Vereinfachung bei den Modellannahmen – isolierte Population, keine Zu- und Abwanderung – macht hier eine gedankliche Antizipation der Auswirkungen von Parametervariationen möglich:

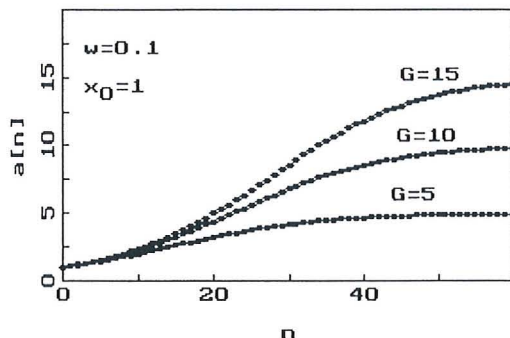
- Variation von w : Wachstumsfördernde Maßnahmen führen nur zu schnellerem Annähern an Grenze, sie sind langfristig ohne Bedeutung.
- Variation von G : Je größer die Grenze, je größer also die noch verbleibende Kapazität, desto später wird die Grenze erreicht, desto geringer ist der anfängliche Einfluss auf das Wachstum.
- Variation von x_0 : Gleichmäßiges – zeitverschobenes – Wachstum gegen Grenze.



Während die Simulationen zu den Variationen von w und x_0 die gedankliche Antizipation bestätigen, scheint die Simulation zu der Variation von G ein widersprüchliches Ergebnis zu liefern: Je größer die Kapazität (Grenze), desto schneller wird diese erreicht. Aufklärung liefert hier aber die Betrachtung von w . w ist in der

Simulation zwar als konstant angesetzt, beschreibt aber – bzgl. des hier vorgenommenen Modellansatzes – nicht die absolute Wachstumsrate wie beim exponentiellen Wachstum, sondern eine relative, die ist von G abhängig (vgl. auch Bemerkung (4)). Modifiziert man den Modellansatz auf folgende Weise, wobei aber die grundsätzlichen Modellannahmen erhalten bleiben, dann zeigen die Simulationen das erwartete Ergebnis (vgl. auch Aufgabe (3)):

$$x_{n+1} = x_n + w \cdot x_n \cdot \left(1 - \frac{x_n}{G}\right)$$



Analoges gilt für das begrenzte Wachstum. Der entsprechend modifizierte Modellansatz lautet:

$$x_{n+1} = x_n + w \cdot \left(1 - \frac{x_n}{G}\right)$$

An der Variation von x_0 lässt sich schön der Unterschied zwischen deskriptiver und kausaler Modellierung deutlich machen. Zum Zeitpunkt $n = 5$ zeigen die Kurven qualitativ unterschiedliches Verhalten, was zu entsprechend verschiedenartigen Kurvenanpassungen und daraus resultierenden Langzeitprognosen führt, von Pessimismus ($x_0 = 15$) bis Euphorie ($x_0 = 1$) ist dann alles dabei! Erst der ange-setzte zugrundeliegende Wirkzusammenhang des logistischen Wachstums zeigt, dass die Systemverläufe langfristig gleich sein werden, aber natürlich kann dieser auch falsch sein!

Bemerkungen:

- (1) Das **exponentielle Wachstum** ist immer dann angemessen, wenn keine äußeren oder inneren Störungen vorhanden sind, also meist zu Beginn einer Entwicklung (Aussetzen von Tieren, Ausbreitung von Viren, etc. (AIDS!)).
- (2) Der typische s-förmige (*sigmoide*) Kurvenverlauf beim **logistischen Wachstum** lässt sich bei vielen Pflanzen- und Tierpopulationen in begrenztem Lebensraum, in dem weder Zu- noch Abwanderung stattfindet, beobachten. Von einem beobachteten s-förmigen Verlauf allerdings auf den Wirkzusammenhang des logistischen Wachstums zu schließen, ist problematisch; es gibt viele

Funktionen, die einen solchen Kurvenverlauf haben! Das Modell des logistischen Wachstums hat häufig nur den Vorteil, ein möglichst einfaches zu sein! (vgl. Racke/Stein 1995)

- (3) Zu der Gleichung des logistischen Wachstums kommt man auch bei etwas anderer Modellierung des Zusammenhanges von Änderung und Bestand:

Ansatz (isoliert lebende Population ohne Zu- und Abwanderung – starke Vereinfachung!):

Änderung = Geburten – Todesfälle

$$x_{n+1} - x_n = g \cdot x_n - s \cdot x_n = (g - s) \cdot x_n$$

g : Geburtenrate; s : Sterberate

Sind g und s konstant, ergibt sich **exponentielles Wachstum**.

Ist der Lebensraum begrenzt, wird es bei steigender Population zu wechselseitigen Behinderungen kommen (Konkurrenzkämpfe, Kannibalismus, Stress), die Sterberate steigt dann mit der Anzahl der Individuen. Die einfachste Art, dies zu modellieren, ist wieder der Ansatz der Proportionalität, also: $s = b \cdot x_n$ mit dem *Behinderungsfaktor* b . Es gilt dann:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + (g - b \cdot x_n) \cdot x_n \\ &= (1 + g - b \cdot x_n) \cdot x_n \\ &= (k - b \cdot x_n) \cdot x_n. \end{aligned}$$

Der Wachstumsfaktor setzt sich also aus „Wachstumsrate minus zum Bestand proportionale Sterberate“ zusammen. Mit

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + w \cdot x_n \cdot (G - x_n) \\ &= x_n + (w \cdot G - w \cdot x_n) \cdot x_n, \end{aligned}$$

ist dann die Äquivalenz zu obigem Ansatz gezeigt ($w \cdot G = g$, $w = b$).

Formt man zu

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + g \cdot x_n - b \cdot x_n^2 \\ &= (1 + g) \cdot x_n - b \cdot x_n^2 \\ &= k \cdot x_n - b \cdot x_n^2 \end{aligned}$$

um, ergibt sich folgende Interpretation:

Innerspezifische Kämpfe um nur begrenzt vorhandene Nahrung bzw. vorhandenen Lebensraum führen zur Beeinträchtigung des exponentiellen Wachstums; diese ist umso größer, je größer die Anzahl der Begegnungen ($x_n \cdot x_n$) ist. Setzt man wieder Proportionalität an, so erhält man für die Todesfälle $b \cdot x_n^2$.

Dies zeigt aber auch umgekehrt: Führt man die zuerst einmal inhaltlich verschiedenen Modellierungen durch, so zeigt der Nach-

weis der Äquivalenz der Terme, dass es sich jeweils um dasselbe Wachstumsmodell handelt!

- (4) Will man die Modelle überprüfen, muss man sich natürlich reale Daten verschaffen und dann geeignete Parameter finden.

Beispiele: Gegeben ist folgende Messreihe:

Zeitschritte n	0	1	2	3	4	5
Messwert	2,0	3,2	5,0	8,2	13,0	20,1

Setzt man logistisches Wachstum an und benutzt man die ersten beiden Messwerte, so erhält man folgende Bedingung:

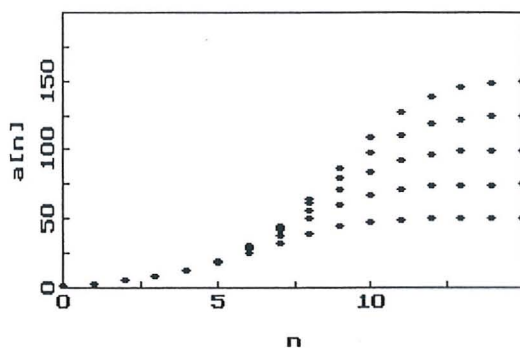
$$3,2 = 2 + 2 \cdot w \cdot (G - 2) \text{ und damit } w = \frac{0,6}{G-2}$$

Man erhält dann eine Schar von Modellgleichungen:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{0,6}{G-2} \cdot x_n \cdot (G - x_n)$$

Im nächsten Schritt gibt man mögliche Grenzen vor und vergleicht die Modellergebnisse mit den Messdaten:

n	0	1	2	3	4	5
G=50	2	3,2	5,07	7,92	12,09	17,82
G=75	2	3,2	5,09	8,01	12,42	18,81
G=100	2	3,2	5,10	8,06	12,59	19,33
G=125	2	3,2	5,10	8,08	12,70	19,65
G=150	2	3,2	5,10	8,10	12,76	19,87



Es fällt auf, dass bei guter Übereinstimmung der Modelldaten mit den Messdaten der Grenzbestand trotzdem stark variieren kann; erst weitere Messdaten beschränken einen sinnvollen Bereich für den Grenzbestand. Statt der ersten beiden Messwerte können natürlich auch zwei andere, aufeinanderfolgende Messwerte benutzt werden; es ist dann zu untersuchen, inwieweit sich dann signifikant andere Modelle und daraus abgeleitete Prognosen ergeben.

Als Exkurs bietet sich hier die Einführung von Gütemaßstäben der Übereinstimmung von Mess- und Modelldaten an (Korrelationskoeffizient).

- (5) Da die Modelle einen Zusammenhang zwischen altem Bestand (x_n) und neuem Bestand (x_{n+1}) herstellen, der neue Bestand also als Funktion des alten beschrieben wird, bietet sich hier eine Betrachtung von x_n - x_{n+1} -Diagrammen (Phasendiagramm) an. Für exponentielles- und begrenztes Wachstum erhält man dann Geraden, für logistisches eine Parabel. Diese Parabel sollte interpretiert werden: Zu Anfang zunehmende Wachstumsgeschwindigkeit, dann abnehmende, der Scheitelpunkt entspricht dem Wendepunkt im n - x_n -Diagramm.

- (6) Ob die Konvergenz für beliebige w und G gilt, lässt sich wieder nur analytisch klären. Dazu bestimmt man die Fixwerte x_f der Iterationsfunktion f und wendet das Kriterium für anziehende Fixpunkte an ($|f'(x_f)| < 1$):

$$\begin{aligned} f(x) &= x + w \cdot x \cdot (G - x) \\ &= (1 + w \cdot G) \cdot x - w \cdot x^2 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 1 + w \cdot G - 2 \cdot w \cdot x$$

$$f(x_f) = x_f \Rightarrow x_{f1} = 0 \text{ und } x_{f2} = G$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= 1 + w \cdot G \Rightarrow |1 + w \cdot G| < 1 \\ &\Rightarrow -2 < w \cdot G < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(G) &= 1 - w \cdot G \Rightarrow |1 - w \cdot G| < 1 \\ &\Rightarrow 0 < w \cdot G < 2 \end{aligned}$$

Als Motiv für die Untersuchung des Langzeitverhaltens für $|w \cdot G| > 2$ bietet sich Aufgabe (3) an.

Aufgaben:

- (1) Eine Fischpopulation in einem See vermehrt sich nach Modellannahme logistisch auf folgende Weise: $x_{n+1} = (1,08 - 0,02 \cdot x_n) \cdot x_n$ (n in Jahren).

Es sollen zwei „Erntemodelle“ verglichen werden:

- (A) Es werden pro Teilschritt (1 Jahr) konstant viele Fische E geerntet.
(B) Die Ernte E ist bestandsabhängig mit $E = k \cdot x_n$.

- (2) Es sollen folgende Wachstumsmodelle untersucht werden:

- (A) Der Zuwachs ist proportional zum Quadrat des Bestandes.
(B) $x_{n+1} = k \cdot x_n - g \cdot x_n^3$

Vergleichen Sie die Modelle mit Ihnen bekannten Modellen.

- (3) (Vgl. Häfner 1988) Eine Hasenpopulation wachse logistisch; dabei wird ein Geschlechtergleichgewicht angenommen, die Wurfzahl schwankt zwischen 1 und 6 und die Kapazitätsgrenze liegt bei 100 Hasen:

- Leiten Sie die Wachstumsgleichung

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(1 - \frac{x_n}{100}\right)$$

her, wobei k die Anzahl der Jungen pro Wurf darstellt

- Führen Sie Simulationen durch und variieren Sie k . Was fällt auf und ist überraschend?
- Bei dem Modellansatz wird davon ausgegangen, dass die Berechnungszeiträume mit der Anzahl der Würfe pro Jahr übereinstimmen, d.h. bei 4 Würfeln pro Jahr wird viermal berechnet. Warum ist dies sinnvoll und was würde passieren, wenn häufiger berechnet wird? Geben Sie eine entsprechende Modellgleichung an und führen Sie Simulationen durch. Worauf muss also generell beim (diskreten) Modellieren geachtet werden?

1.2. Wachstum mit Gift

Ein zentraler Kritikpunkt am logistischen Wachstum liegt darin, dass nur Bestände, die streng monoton zunehmen bzw. abnehmen, erfasst werden können. So können z.B. Bakterien mit wachsender Zahl ein Gift produzieren, das kontraproduktiv wirkt, oder umgekehrt: Modelliert man z.B. die Entwicklung eines von einem Grippevirus befallenen Bestandes durch logistisches Wachstum, so würde dies bedeuten, dass mit zunehmender Zeit mehr oder weniger alle vom Virus befallen sind, es besteht keine Heilungsmöglichkeit. Will man hier angemessen modellieren, muss also ein Gift bzw. Heilmittel berücksichtigt werden; dies führt dann zur Einführung einer zweiten Zustandsgröße. Im folgenden sei x_n der Bestand (die Populationsgröße) und y_n das Gift.

Ausgangspunkt der Modellierung ist exponentielles Wachstum, also $x_{n+1} = k^* \cdot x_n$. Die Wachstumsrate k^* kann aber nicht konstant sein, sondern hängt vom Gift P ab, derart, dass sie mit wachsender Giftmenge abnimmt. Mögliche Ansätze sind dann:

(a) $k^* = \frac{k}{P}$

(k^* umgekehrt proportional zum Gift)

(b) $k^* = -k \cdot P$

(lineare Abnahme von k^*)

(c) $k^* = k - g \cdot P$

(lineare Abnahme in Analogie zum logistischen Wachstum)

(a) ist aber nicht sinnvoll, weil die Wachstumsrate immer positiv ist, was monotonen Wachs-

tum des Bestandes zur Folge hätte; bei (b) ist die Wachstumsrate immer negativ, so dass die Population auch schon zu Beginn abnehmen würde. Die Annahme (c) liefert dagegen einen sinnvollen Ansatz; betrachtet man nämlich k^* als Funktion von P , erhält man eine fallende Gerade, die Nullstelle markiert dann gerade den Zeitpunkt des Nullwachstums, also das Maximum der Population. P kann nun natürlich auch nicht konstant sein (warum?), sondern hängt wiederum vom Bestand ab. Hier muss dann zuerst festgelegt werden, wie viele Anteile („Individuen“) Gift auf ein Individuum der Population fallen, wieviel Gift also ein Individuum produziert. Es soll hier so normiert werden, dass auf ein Individuum des Bestandes ein Anteil Gift fällt. Das Gift soll sich dann additiv aus dem vorhandenen Gift und dem vom aktuellen Bestand produzierten Gift zusammensetzen. Man erhält somit folgendes Modell:

$$(4) \quad x_{n+1} = (k - g \cdot y_n) \cdot x_n$$

$$y_{n+1} = y_n + x_n$$

k : Wachstumsfaktor; g : Giftigkeit ($0 < g < 1$)

Bevor man nun simuliert, sollte man wieder eine qualitative Analyse bzgl. des Langzeitverhaltens durchführen:

Bestand:

Die Überlegung „konstanter Wachstumsfaktor minus größer werdendes Gift“ führt zu der Vermutung des Aussterbens.

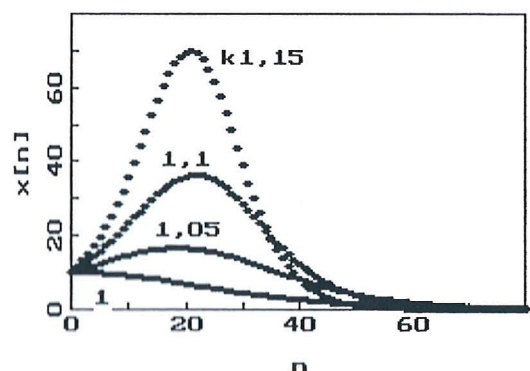
Gift:

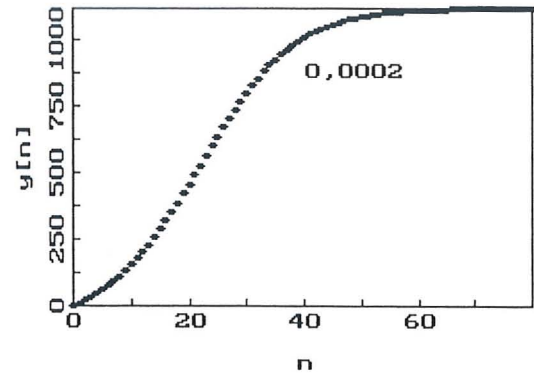
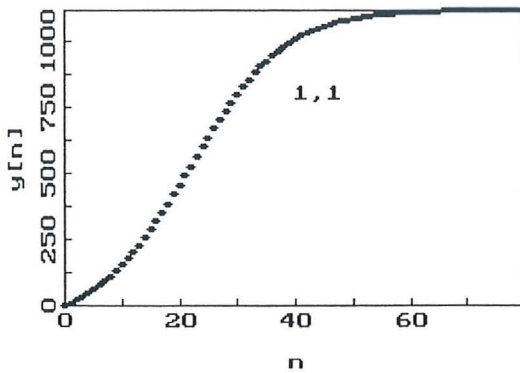
Wenn $x_n \rightarrow 0$, dann $y_{n+1} \rightarrow y_n$; dies bedeutet, dass sich das Gift bei einem gewissen Wert stabilisieren wird.

Simulation:

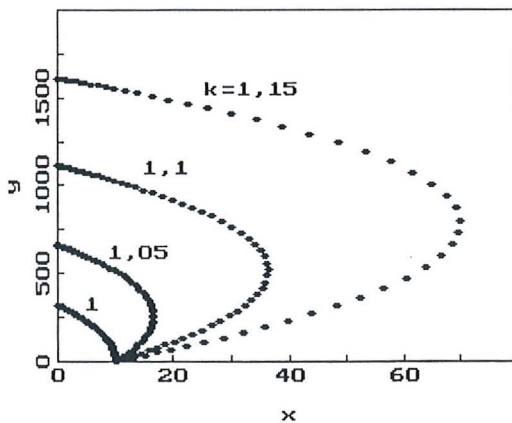
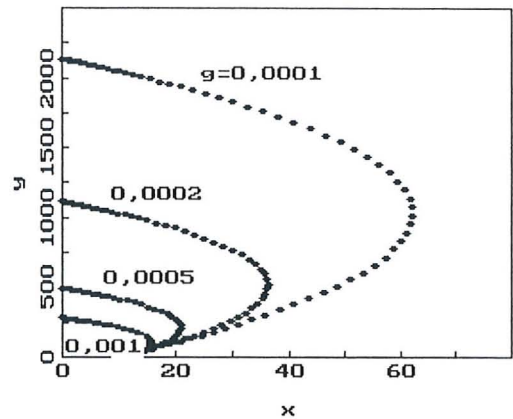
Es wird grundsätzlich davon ausgegangen, dass zu Beginn kein Gift vorhanden ist, also $y_0 = 0$.

(a) Variation von k ($x_0 = 10$; $g = 0,0002$):



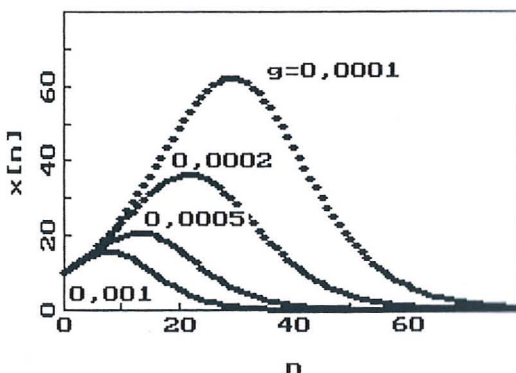


Da in den Modellgleichungen explizit Bestand und Gift in Beziehung gesetzt werden, ist hier ein x_n - y_n -Diagramm (*Phasendiagramm*) angemessener und visualisiert das Beziehungsgefüge beider Zustandsgrößen besser. Es dient dabei sehr dem Verständnis, wenn man diese Diagramme zunächst qualitativ aus den n - x_n - bzw. n - y_n -Diagrammen 'per Hand' erschließen lässt.



Die Simulationen bestätigen die Vermutung aus den qualitativen Überlegungen, es kommt immer zum Aussterben; interessant ist aber hier noch ein Vergleich der beiden Parametervariationen, die ja die beiden prinzipiellen Handlungsmöglichkeiten beschreiben: Wachstumsfördernde Maßnahmen bzgl. des Bestandes (Variation von k) und Verringerung der Giftigkeit bzw. Erhöhung der Heilkraft (Variation von g). Das Aussterben ist nicht zu verhindern, aber: Während eine Erhöhung der Wachstumsrate den Zeitpunkt des Aussterbens nur unwesentlich verschiebt (a), zögert die Verringerung der Giftigkeit diesen wesentlich hinaus (b); kurzfristig sind beide Maßnahmen erfolgreich, der Bestand wächst, aber: Unabhängig vom Wachstumsfaktor scheint bei (a) auch das Maximum des Bestandes immer ungefähr zum selben Zeitpunkt erreicht zu werden (Hochpunkte annähernd parallel zur x_n -Achse), eine Erhöhung des Wachstumsfaktors führt zwar zu einem kurzfristig schnelleren Anstieg des Bestandes, dem aber dann auch eine umso schnellere Abnahme folgt. Der gleiche Effekt tritt auch bei (b), also bei der Variation von g , auf, aber auch hier wird – analog zum Aussterben – der Zeitpunkt des Maximums später erreicht. Als Handlungskonsequenz ergibt sich damit: Giftrückführende Maßnahmen sind wachstumsfördernden Maßnahmen vorzuziehen!

(b) Variation von g ($k = 1,1$; $x_0 = 10$):



Bei der Interpretation der Simulationen drängen sich noch weitere Fragen auf: Verträgt das System überhaupt eine annähernde Vervierfachung des Bestandes ($k = 1,1$ (a) bzw. $g = 0,0002$ (b))? Gibt es hier weitere externe oder interne Begrenzungen (Motiv für Modifikationen des Modells)? Oder: Was kann man tun, damit der Bestand nach einer gewissen Zeit einen bestimmten Wert hat? Welche Möglichkeiten hat man, um den Bestand zumindest für einen gewissen Zeitraum konstant zu halten?

All diese Fragen weisen sehr deutlich auf den Unterschied zwischen mathematikimmanenten Klassifikationen und außermathematischen, Konsequenzen bedenkenden, Argumentationen hin: Unter „kurventheoretischem“ Blickwinkel sind alle „Kurven“ von gleichem Typ („Hochpunkt“, „Wendepunkte“, asymptotisches Verhalten), unter „anwendendem“ Blickwinkel offenbaren sie große Unterschiede.

Modell (4) ist das Modell der Pessimisten, langfristig gibt es nur Aussterben, ein optimistischer Mensch hofft auf so etwas wie Selbstreinigungskraft, also Giftabbau. Dies gibt dann Anlass zu folgender Modifikation:

$$(5) \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= (k - g \cdot y_n) \cdot x_n \\ y_{n+1} &= m \cdot y_n + x_n \end{aligned}$$

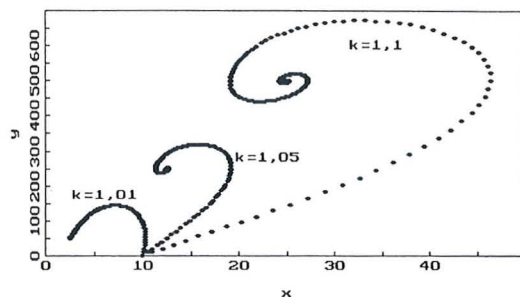
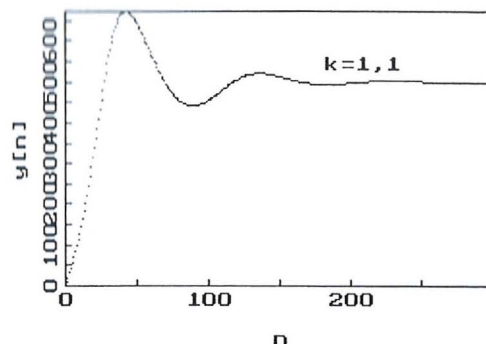
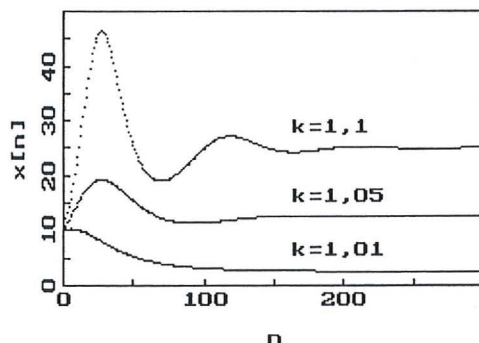
k : Wachstumsfaktor, g : Giftigkeit, m : Giftabbaurate ($0 < m < 1$)

Eine gedankliche Antizipation des Langzeitverhaltens ist hier kaum möglich: Einerseits wird das Gift weniger ($m < 1$), andererseits kommt das produzierte Gift hinzu (x_n), je größer der Bestand, desto größer die Giftmenge, je größer aber die Giftmenge, desto kleiner der Bestand.

Simulationen:

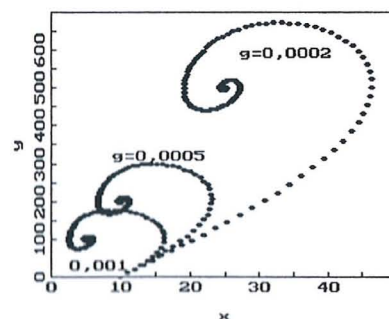
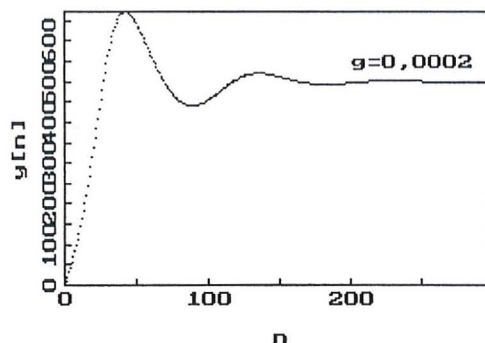
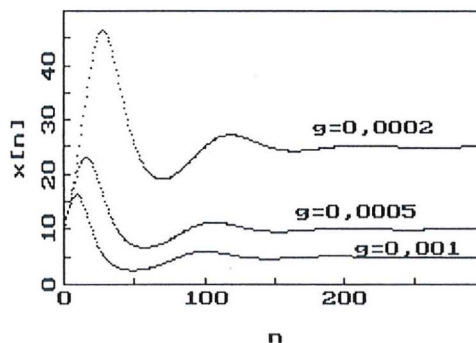
(a) Variation von k :

$$g = 0,0002; m = 0,95; x_0 = 10; y_0 = 0$$



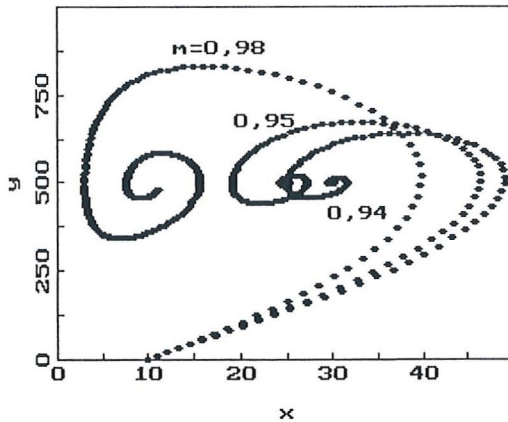
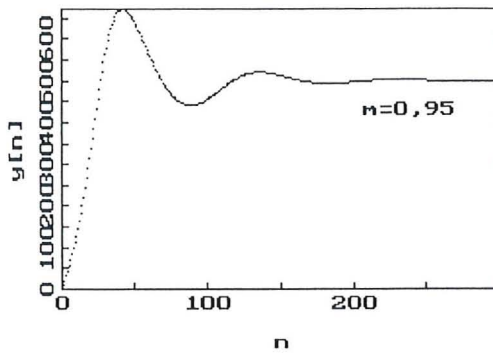
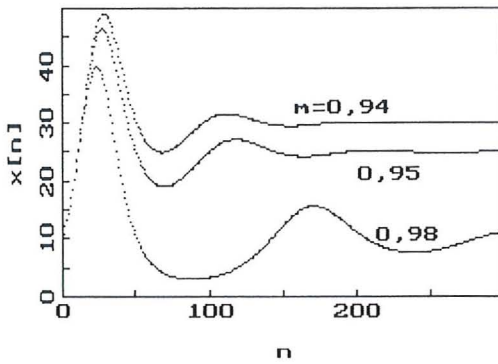
(b) Variation von g :

$$k = 1,1; m = 0,95; x_0 = 10; y_0 = 0$$

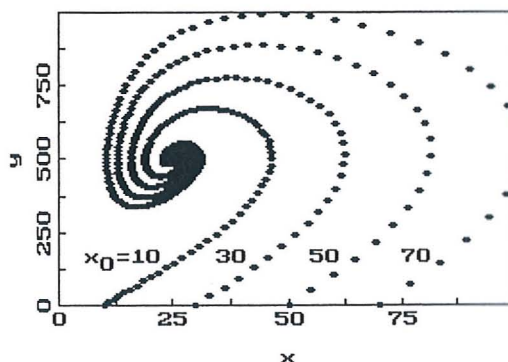


(c) Variation von m :

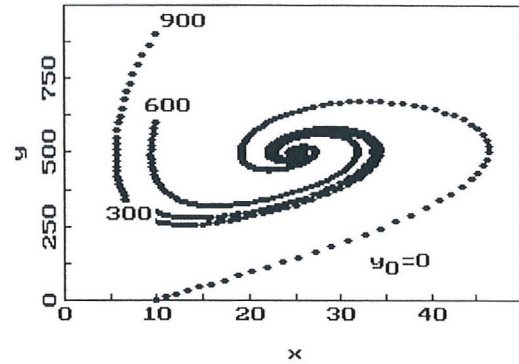
$$k = 1,1; g = 0,0002; x_0 = 10; y_0 = 0$$

(d) Variation von x_0 :

$$k = 1,1; g = 0,0002; m = 0,95; y_0 = 0$$

(e) Variation von y_0 :

$$k = 1,1; g = 0,0002; m = 0,95; x_0 = 10$$



Bei allen Simulationen ergibt sich ein Einpendeln beider Zustandsgrößen mit den dafür charakteristischen spiralförmigen Phasendiagrammen. Dabei fällt auf, dass sich jetzt der Bestand sowohl durch wachstumsfördernde Maßnahmen, als auch durch Verringerung der Giftigkeit, als auch durch Erhöhung der Giftabbaurate langfristig erhöhen lässt, dass dies aber mit kurzfristig starken Schwankungen erkaufte wird, so dass sich wieder die Frage stellt, ob das System solche Schwankungen überhaupt verträgt, oder ob wieder andere – nicht berücksichtigte – Faktoren hier begrenzend wirken. Weiß man, z.B., dass $x_n = 20$ maximal möglicher Bestand ist, so lässt sich langfristig nur ein Maximum von ungefähr 12 erreichen, unabhängig davon, an welchem Parameter man 'dreht'.

Fast zwangsläufig motivieren die Simulationen zur rechnerischen Untersuchung des Langzeitverhaltens. Analog zu den eindimensionalen Systemen wird man wieder die Fixwerte bestimmen, wohl wissend, dass diese nur ein notwendiges Kriterium liefern:

Zu lösen ist dann folgendes – nicht lineares – Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & x = (k - gy) \cdot x \\ \text{II} \quad & y = m y + x \end{aligned}$$

Aus II folgt unmittelbar $x = 0$ und damit aus I, dass y beliebig ist.

$$\begin{aligned} \text{(5)} \quad \text{I} \quad & x = (k - gy) \cdot x \\ \text{II} \quad & y = m y + x \end{aligned}$$

Aus II folgt: $x = (1 - m) \cdot y$ und damit aus I:

$$y = \frac{k-1}{g}; \quad x = \frac{(1-m)(k-1)}{g}$$

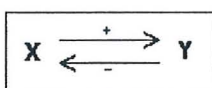
Aufgaben

- (1) Warum führt $y_{n+1} = y_n + m \cdot x_n$ in (5) zu keinem qualitativ neuen Modell? Welche Bedeutung hat m ?
- (2) Untersuchen und interpretieren Sie folgende Modelle:
- (A) $x_{n+1} = (k - g y_n) \cdot x_n$
 $y_{n+1} = m y_n$
- (B) $x_{n+1} = (k - g y_n) \cdot x_n$
 $y_{n+1} = y_n + m \cdot (G - y_n)$
- Was unterscheidet diese Modelle grundsätzlich von (4) und (5)?
 - Inwiefern beleuchten diese beiden Modelle die Schwierigkeiten, von den Erscheinungen auf dahinter liegende Wirkzusammenhänge zu schließen?
- (3) In (4) und (5) wird die Giftigkeit g jeweils konstant angenommen; welche Gründe können hier z.B. für eine Abnahme der Giftigkeit sprechen. Stellen Sie ein Modell auf, das dies berücksichtigt und führen Sie eine qualitative Analyse und Simulationen durch, die die drei Zustandsgrößen zulässt, wenn Software zur Verfügung steht.
- (4) Wie sehen n - x_n - bzw. n - y_n -Diagramme aus, wenn das Phasendiagramm ein Kreis ist? Geben sie eine inhaltliche Interpretation und – naheliegende – Modellgleichungen dazu an. Worin unterscheiden diese sich qualitativ von den obigen?

2. Zwei Populationen in Wechselwirkung

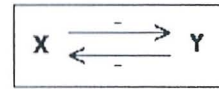
Wenn man lineares, exponentielles, begrenztes und logistisches Wachstum behandelt, dann wird meist schon hier die isolierte Behandlung einer Population als stark vereinfachendes Moment empfunden. Es liegt dann der Übergang zu zwei Populationen und ihrer Wechselwirkung aufeinander nahe. Sieht man wiederum von exogenen Einflüssen ab (reduktives Element), so sind drei mögliche Beziehungen zu unterscheiden (vgl. Stein, 1994, S. 190):

- (A) *Räuber-Beute-Systeme*
 (X: Beute, Y: Räuber)



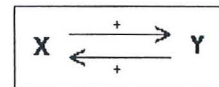
Je mehr Beutetiere vorhanden sind, desto mehr Räuber, je mehr Räuber, desto weniger Beutetiere.

- (B) *Konkurrenz um dieselbe Ressource*



Beide Populationen schädigen sich gegenseitig.

- (C) *Symbiose beider Populationen*



Beide Populationen fördern sich gegenseitig.

Zuerst einmal müssen die Wachstumsmodelle der einzelnen Populationen festgelegt werden. Wie modelliert man dann aber die gegenseitige Schädigung / Förderung beider Populationen?

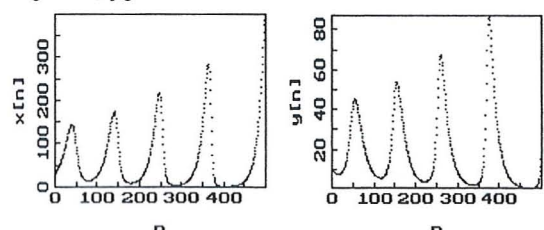
Die Anzahl der, kombinatorisch betrachteten, möglichen Begegnungen ist $X \cdot Y$. Sinnvoll als Maß der jeweiligen Schädigung ist dann Proportionalität zu den Begegnungen, also $k \cdot X \cdot Y$ mit $-1 < k < 1$, und Schädigung für $k < 0$ und Förderung für $k > 0$.

(A) Räuber-Beute-Systeme

- (6) $x_{n+1} = a \cdot x_n - b \cdot x_n \cdot y_n$ $a > 1; 0 < b < 1$
 $y_{n+1} = c \cdot y_n + d \cdot x_n \cdot y_n$ $0 < c < 1; 0 < d < 1$

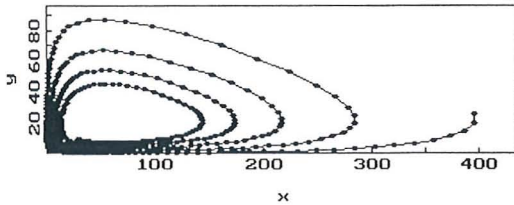
Das exponentielle Wachstum beider Populationen, ohne die jeweilig andere, kann hier durchaus sinnvoll sein, da diese Situation ja immer nur kurzfristig auftreten wird und zu Beginn auch das logistische Wachstum annähernd exponentiell ist (vgl. aber (8)). Da die Räuber meist weniger stark als die Beutetiere geschädigt werden, gilt entsprechend $d < b$.

Beispiel: $a = 1,08$; $b = 0,004$; $c = 0,94$; $d = 0,001$;
 $x_0 = 30$; $y_0 = 10$



Es ergeben sich phasenverschobene, sich aufschaukelnde Schwankungen; dass es Schwankungen gibt, lässt sich qualitativ antizipieren;

wenige Räuber führen zu starkem Anwachsen der Beutetiere, was aber wiederum für die Räuber wachstumsfördernd ist, was aber dann wieder zur Abnahme der Beutetiere führt, was wiederum... Dass die Schwankungen sich aufschaukeln, ist allerdings schwer zu antizipieren.



Das Phasendiagramm zeigt eine größer werdende Spirale.

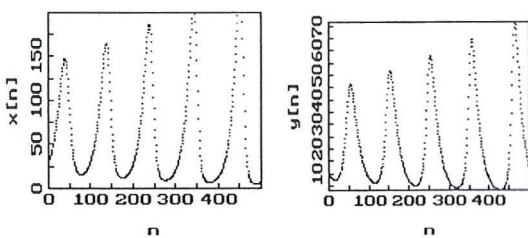
Das Modell setzt voraus, dass prinzipiell jedes Beutetier jedem Räuber begegnen kann. Ist dies immer der Fall? Oder anders: Was ändert sich, wenn man den Beutetieren einen Schutzraum gewährt. Ist k die Anzahl der Beutetiere, die für die Räuber unzugänglich sind, dann erhält man folgende Modifikation:

$$(7) \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= a \cdot x_n - b \cdot (x_n - k) \cdot y_n \\ y_{n+1} &= c \cdot y_n + d \cdot (x_n - k) \cdot y_n \end{aligned}$$

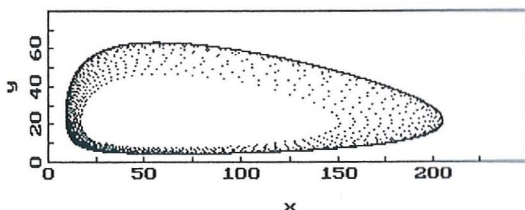
k : Anzahl der Beutetiere, die für Räuber unzugänglich sind

Beispiel: $a = 1,08$; $b = 0,004$; $c = 0,94$; $d = 0,001$; $x_0 = 30$; $y_0 = 10$

(a) $k = 2$:

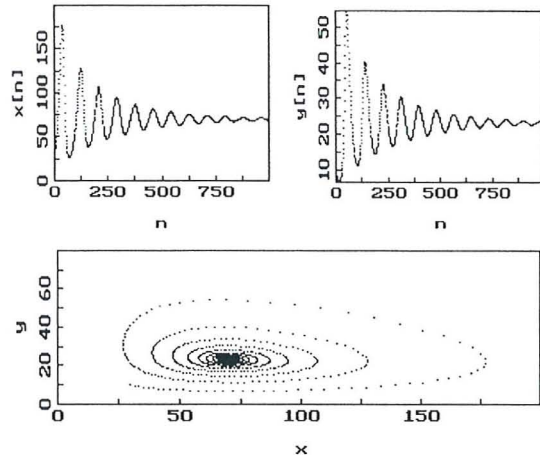


Wieder erhält man phasenverschobene Schwankungen, aber schaukeln diese sich auch wieder beliebig auf? Aufschluss (hohe Plausibilität) erhält man erst bei wesentlich mehr Folgengliedern, einen besseren Einblick in das Langzeitverhalten gibt hier das Phasendiagramm:



Das Phasendiagramm zeigt die – erwartete – Auswärtsspirale, die sich aber – im Gegensatz zu (5) – einem Grenzyklus nähert, d.h., die Schwankungen werden annähernd konstant. Was passiert, wenn man die Anzahl der für die Räuber unzugänglichen Beutetiere erhöht?

(b) $k = 10$:



Beide Populationen unterliegen anfangs abnehmenden Schwankungen, die sich langfristig auf einen Gleichgewichtszustand stabilisieren; das Phasendiagramm zeigt wieder den typisch spiralförmigen, sich auf den Gleichgewichtspunkt zusammenziehenden Verlauf (vgl. (5)).

Aufgabe:

Bei welchem k findet der Übergang von einem Grenzyklus zu einem Gleichgewichtspunkt statt?

Aus den Simulationen ergeben sich damit folgende Handlungskonsequenzen: Ein zu kleiner Schutzraum verhindert nicht die starken Schwankungen, auch wenn sie langfristig beschränkt bleiben; erst wenn genügend Beutetiere von Räubern verschont bleiben, ist eine langfristige Stabilisierung der Bestände möglich, und damit eine Stabilisierung des Systems. Schutzräume sollten also groß genug gewählt werden, wenn stabile Bestände das Ziel sind! Das Beseitigen solcher Bereiche (z.B. Flurbereinigung im Fall von Hasen und Fuchspopulationen) kann zu starken Schwankungen führen, mit der Gefahr des Aussterbens.

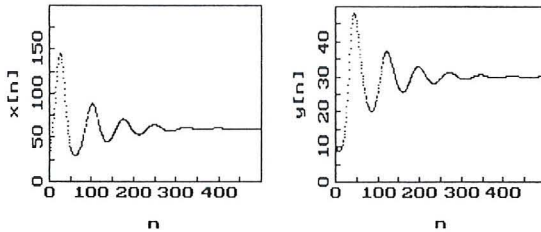
Da die Räuber ohne Beute aussterben, ist exponentielle Abnahme immer plausibel. Was ändert sich aber, wenn man für die Beutetiere logistisches Wachstum ansetzt?

Beispiel:

$$\begin{aligned}(8) \quad x_{n+1} &= (1,15 - 0,0005 \cdot x_n) \cdot x_n - 0,004 \cdot x_n y_n \\ y_{n+1} &= 0,94 \cdot y_n + 0,001 \cdot x_n y_n \\ x_0 &= 30 \\ y_0 &= 10\end{aligned}$$

Die Kapazitätsgrenze der Beutetiere liegt also bei 300 (vgl. Kap. 1 Bemerkung (6)).

Zeitdiagramme:



Es überrascht und ist zumindest kaum antizipierbar, dass man eine ähnliche Bestandsentwicklung wie bei (7)(b) erhält, die Bestände stabilisieren sich nach anfänglichen Schwankungen. Wenn man also dieses Modell benutzt, braucht man keine Schutzräume, die Natur sorgt selbst für ein stabiles Gleichgewicht! Wenn man berücksichtigt, dass Modelle immer Repräsentationen für bestimmte Subjekte, innerhalb bestimmter Zeitspannen bzgl. gewisser Intentionen sind (vgl. Stachowiak 1989, S. 219), dann ist klar, dass jemand, der von der Notwendigkeit menschlicher Eingriffe überzeugt ist, die Modelle (6) und (7) bevorzugen wird, wogegen jemand, der grundsätzlich an eine Art inneres Gleichgewicht der Natur glaubt, Modell (8) favorisieren wird, oder umgekehrt: Wie lässt sich allein anhand von Messreihen klären, ob Schutzräume oder innere Stabilität ausschlaggebend für die Bestandsentwicklungen sind?

Die Phasendiagramme zu Modell (8) liefern wieder Einwärtsspiralen analog zu Modell (7).

(B) Konkurrenz

$$\begin{aligned}(9) \quad x_{n+1} &= (a - b \cdot x_n) \cdot x_n - k \cdot x_n \cdot y_n \quad 0 < k < 1 \\ y_{n+1} &= (c - d \cdot y_n) \cdot y_n - m \cdot x_n \cdot y_n \quad 0 < m < 1\end{aligned}$$

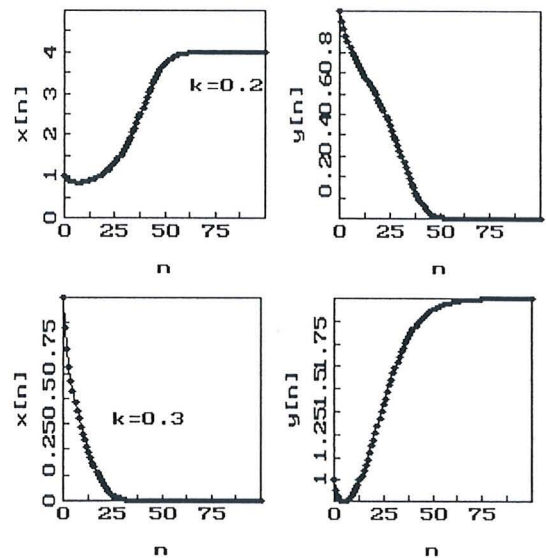
In diesem Modell wird also logistisches Wachstum der beiden Populationen angesetzt, wenn es zu keinen Begegnungen kommt ($k = 0$, $m = 0$).

Eine gedankliche Antizipation der Bestandsentwicklungen ist hier im allgemeinen Fall

schwierig: Was überwiegt, das Wachstum oder die Schädigung? Nur bei gleichem Konkurrenzkoeffizienten k bzw. m lässt sich das Überleben der Population mit der größeren Kapazität gedanklich erschließen. Meist ist aber wohl die gegenseitige Schädigung unterschiedlich stark; Aufschluss geben dann zuerst einmal wieder Simulationen.

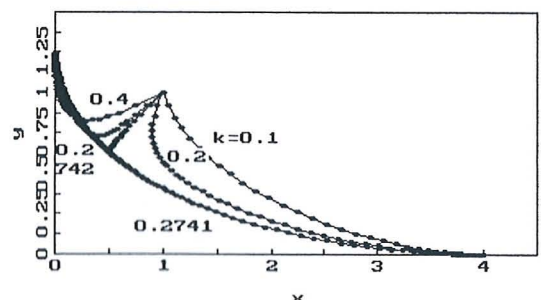
Auf Grund der Symmetrie der Modellgleichungen, gewinnt man einen hinreichenden Überblick, wenn man z.B. k variiert und m konstant lässt.

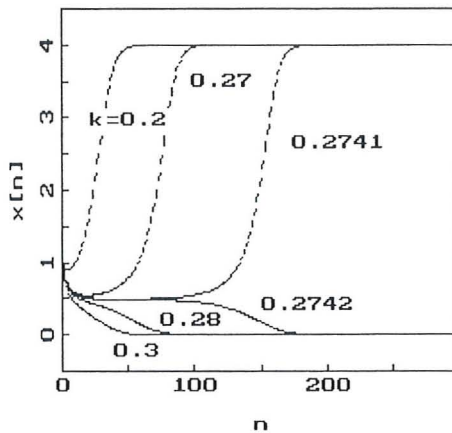
Beispiel: $a = 1,2$; $b = 0,05$; $c = 1,1$; $d = 0,08$, $m = 0,1$; $x_0 = y_0 = 1$



Die Simulationen zeigen, dass sich jeweils eine Population mit langfristig stabilem Bestand 'durchsetzt', während die andere ausstirbt; ist die Schädigung also klein genug, wirkt sie sich nur anfangs aus (der Bestand nimmt ab), während sich langfristig das logistische Wachstum durchsetzt.

Bei welchem k findet der Übergang statt? Ist Koexistenz, also das langfristige Überleben beider Populationen möglich?

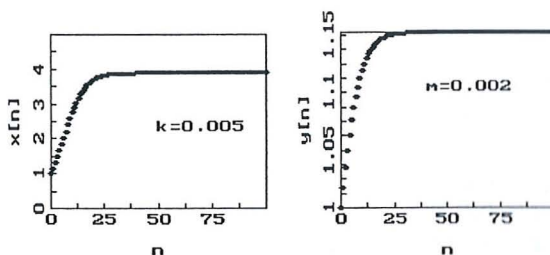




Der Wert, bei dem der Übergang vom Aussterben der einen Population zum Aussterben der anderen führt, liegt bei ungefähr 0,2741; die Simulationen lassen vermuten, dass hier Koexistenz nicht möglich ist, allerdings könnte der exakte Wert ja irrational sein, so dass er nicht durch Simulation erzeugbar ist; aber selbst wenn ein solcher irrationaler Wert existiert, was würde das bzgl. der Realisierung heißen?

Das Phasendiagramm zeigt sehr schön die Dynamik der Systemverläufe: Das anfängliche Abnehmen der Bestände, die mittelfristige Stabilisierung bei Annäherung an den Übergangswert und schließlich das 'Aufbrechen' in Richtung einer Koordinatenachse (Aussterben des einen Bestandes).

Für $m = 0,1$ scheint also keine Koexistenz möglich zu sein, die Schädigung ist in jedem Fall zu groß. Es ist dann fast zu erwarten, dass Koexistenz höchstens bei sehr geringer Schädigung möglich ist.



Diese Simulation unterstützt die Vermutung.

Nach diesem Modell für Konkurrenz ist damit keine stabile Koexistenz zwischen zwei Arten möglich, wenn die gegenseitige Schädigung hinreichend groß ist; dies entspricht dem *Voltterraschen Ausschlussprinzip* der Biologie, also dem Prinzip der Auslese durch Wettbewerb: Arten mit gleicher ökologischer Nische können nicht koexistieren! Beobachten lässt sich dies häufig, wenn in einem Ökosystem im Gleich-

gewicht durch den Menschen eine neue, dominante Population, die in Konkurrenz zu bestehender steht, eingeführt wird.

Aufgabe:

Diskutieren Sie das Modell für Konkurrenz unter der Annahme, dass die einzelnen Populationen exponentiell wachsen.

(C) Symbiose

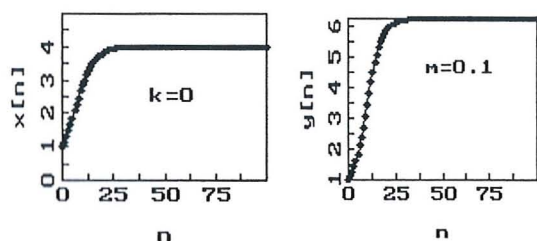
Hier macht ein exponentieller Ansatz für das Wachstum von X und Y wenig Sinn – durch das gegenseitige Profitieren würde das Wachstum nur weiter beschleunigt werden. Bei logistischem Wachstum ist aber die Frage interessant, ob immer eine Kapazitätsgrenze vorhanden ist oder ob es bei hinreichender Unterstützung zu grenzenlosem Wachstum kommen kann.

$$(9) \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= (a - b \cdot x_n) \cdot x_n - k \cdot x_n \cdot y_n \quad 0 \leq k < 1 \\ y_{n+1} &= (c - d \cdot y_n) \cdot y_n - m \cdot x_n \cdot y_n \quad 0 \leq m < 1 \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie der Modellgleichungen reicht wieder die Variation von k aus.

Beispiel: $a = 1,2$; $b = 0,05$; $c = 1,1$; $d = 0,08$;
 $x_0 = y_0 = 1$

- (a) Es profitiert nur eine der Population (z.B. $k = 0$), d.h. es handelt sich um Wirt und Parasit, wobei der Wirt nicht geschädigt wird (Was liegt vor, wenn der Wirt geschädigt wird?).



Das logistische Wachstum des Wirts bleibt natürlich unberührt. Dass auch der Parasit immer logistisch wächst, also eine Kapazitätsgrenze erhalten bleibt, lässt sich durch folgende Überlegung zeigen:

Sei $m = 0$: Dann gilt:

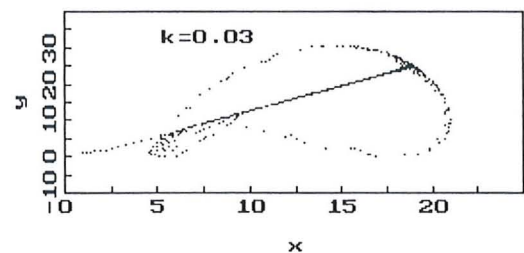
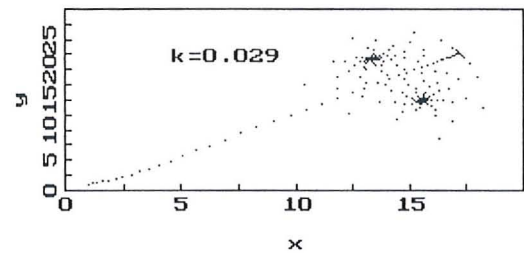
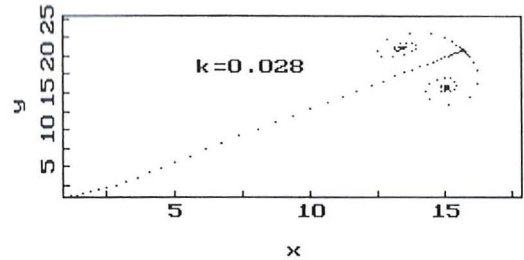
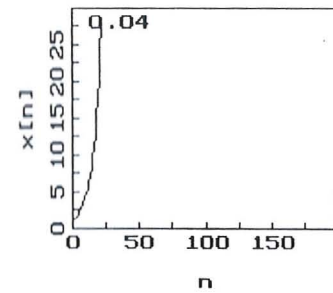
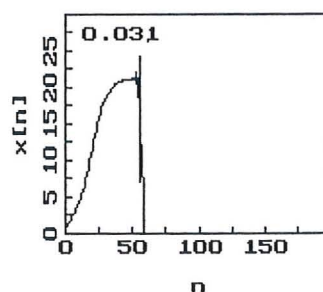
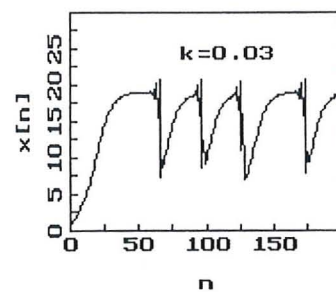
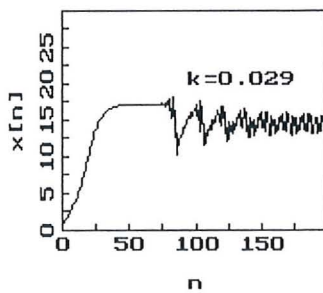
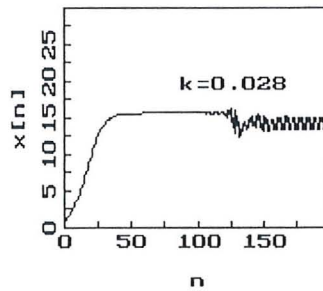
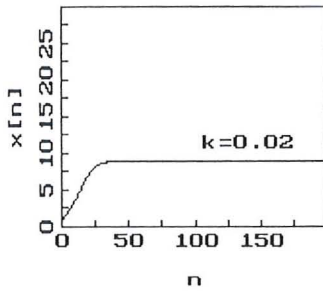
$$y_n \rightarrow G = \frac{c-1}{d}$$

und damit

$$x_{n+1} \rightarrow (a - b x_n) x_n + k G x_n = (a + k G - b x_n) x_n$$

Dies ist aber wieder logistisches Wachstum.

(b) Beide Populationen profitieren (k variabel, $m = 0,1$):



Für hinreichend großes k wachsen die Populationen grenzenlos!

Interessant sind hier aber die stärker (periodisch?) werdenden Schwankungen im Übergangsbereich bei zunehmenden Nutzen der einen Population. Wie ist dies zu interpretieren? Lässt sich so etwas real beobachten? Liegt der Grund vielleicht in einer (kurzfristig) zu starken Übersteigerung der Kapazität? Sind die sich aufschaukelnden Schwankungen eine Vorstufe für Wachstum ins Unendliche? Oder ist alles nur eine Folge von Rechenungenauigkeiten, also ein computererzeugtes Phänomen?

Unabhängig davon ergibt sich aber als Handlungskonsequenz, dass eine zu starke Symbiose 'grenzenloses' Wachstum implizieren kann, was dann sicher wieder u. U. nicht gewünschte Auswirkungen auf andere – hier im Modell nicht erfasste – Populationen innerhalb des betrachteten Systems hätte.

Bemerkung:

Die oben ((A), (B), (C)) genannten Typen treten oft nicht isoliert auf, sondern vielfältig miteinander vernetzt: Eine Population (Ameisen) kann für eine Art Räuber sein (Raupen), für eine andere (Spechte, Ameisenbären) Beute (A), sie kann als Konkurrent anderer Ameisenarten (B) oder als Symbiont zu Blattläusen (C) auftreten. Auch der Nahrungsmittelfluss verläuft nicht immer so einfach wie in obigen Pfeildiagrammen; so kann ein Fisch Würmer fressen, die sich wiederum von den toten Fischen ernähren.

Es gilt also:

Ein System mit nur zwei Populationen ist ein sehr einfaches Denkmodell; es muss mit Vorsicht bei Folgerungen auf reale Systeme gehandhabt werden!

Didaktisch-methodische Bemerkungen

- (1) Zentrales Element der hier dargestellten Unterrichtssequenzen ist der Prozess des Modellierens möglichen Änderungsverhaltens einer Population (vgl. Kap. 1) und des Wirkzusammenhanges zweier, isolierter, Populationen (vgl. Kap. 2). Zentrale Elemente sind dabei einerseits Mathematisierungen außermathematischer Situationen, also nicht das Arbeiten in einem schon vorhandenen Modell, und andererseits Simulationen und deren Interpretation, die hier Vorrang vor der analytischen Durchdringung, also der analytischen Behandlung der Terme und dem Lösen von Gleichungen haben:
Sinn und Verwendungszusammenhänge (Pragmatik) sowie Bedeutung (Semantik) vor Manipulationen (Syntax)!
- (2) Die auf Schulniveau kaum mögliche analytische Behandlung wird durch numerische Simulationen an Rechnern ersetzt, diese sind somit konstitutiv für die hier behandelten Inhalte und Verfahren. Um auch dann einen möglichst umfassenden Überblick zu

erhalten, sind vielfältige Parametervariationen (Wachstumsfaktoren, Anfangswerte, etc.) notwendig, um dann auch Zusammenhänge zwischen den einzelnen Größen zu erschließen. Hier bestehen somit viele Experimentiermöglichkeiten und -notwendigkeiten. Um aber gedankenloses 'Versuch und Irrtum' zu vermeiden, sollten vorweg sinnvolle Bereiche und Größenordnungen der Parameter diskutiert werden.

- (3) Es sollten – zumindest in einer abschließenden Reflexion – die Prinzipien des Modellbildungsprozesses angesprochen werden. Hier ist es dann vor allem das dialektische Verhältnis von reduktivem Vorgehen jeglicher Modellierung (Realitätsausschnitt, ausgewählte Parameter) einerseits und Beherrschbarkeit von Realitätsbereichen gerade durch Reduktion von Komplexität andererseits (vgl. Ebenhöf 1990). Es ist deutlich zu machen, dass Modelle eben nicht der Realität immanent sind, sondern Konstruktionen des Menschen sind, deren Adäquatheit natürlich an der Realität getestet werden muss. Sind keine entsprechenden Populationsentwicklungen beobachtbar, wird man das Modell fallenlassen oder modifizieren. Aber selbst bei entsprechenden Beobachtungen ist der Schluss auf die zu Grunde liegenden Wirkzusammenhänge immer unsicher (vgl. Racke/Stein, 1995). Selbst wenn jedoch ein Modell in vielen Fällen nicht adäquat erscheint, ist es deswegen nicht unbedingt sinnlos. So kann es einerseits Grundbaustein für komplexere, und dann bessere, Modelle sein (s.u. (5)), andererseits kann es Einsicht in mögliche Beziehungsgefüge liefern. Die 'Falschheit' des Bohrschen Atommodells ist wohl auch kein Grund, es nicht zu thematisieren.
- (4) Die auf Wirkzusammenhänge beruhenden, mathematischen Wachstumsmodelle beschreiben die Struktur der Beziehung von Zustandsgrößen, wofür diese real stehen, ist nicht konstruktiv. So kann das logistische Wachstum sowohl Entwicklungen von Bakterienkulturen als auch die Ausbreitung eines Gerüchts beschreiben; „Wachstum mit Gift“ sowohl die Ausbreitung einer Infektionskrankheit („Gift“ ist dann Heilmittel) als auch 'natürliches' Lernen („Gift“ als Vergessen). Im höheren Abstraktionsniveau mathematischer Modelle liegt gerade der Vorteil, dass sie die gemeinsame Struktur unterschiedlicher Probleme beschreiben können (vgl. Ebenhöf, 1990, S. 8).

- (5) Einen weiterführenden Ausblick auf professionell erstellte Modelle weit höherer Komplexität bieten die Szenarien („Weltmodelle“) von Meadows/Meadows; hier stellen die Modelle (1), (3), (4) und (5) *die* grundlegenden Verhaltensformen dar (vgl. Meadows/Meadows/Randers 1993, S. 156).

Auch 'Ökospiele' u.ä. bieten einen weiterführenden Bezug; ihnen liegen meist mathematisch formulierte Gleichungssysteme der oben beschriebenen Art zugrunde. Die grafische Aufbereitung der Computersimulation verschleiert allerdings oft ihren mathematischen Hintergrund. Hier besteht häufig Aufklärungsbedarf!

- (6) Der gesamte Themenbereich eignet sich sowohl hervorragend für projektorientiertes Arbeiten in Gruppen als auch für Facharbeiten.

Literatur

- [1] Bossel, H. (1992): Modellbildung und Simulation. – Braunschweig / Wiesbaden
- [2] Ebenhöf, W. (1990): Mathematische Modellierung – Grundgedanken und Beispiele. – MU 4, S. 5ff
- [3] Häfner, P. (1988): Räuber-Beute-Simulation aus didaktischer Sicht. – MNU 41/8, S. 491ff.
- [4] Meadows, D. / Meadows, D. / Randers, J. (1993): Die neuen Grenzen des Wachstums. – Reinbek
- [5] Racke, U. / Stein, G. (1995): Das logistische Wachstum als problematisches Beispiel mathematischer Modellbildung. – ZDM 1995/1, S. 1ff
- [6] Stachowiak, H. (1989): Modell. – In: Seiffert, H. / Radnitzky, G.: Handlexikon zur Wissenschaftstheorie. – München, S. 219ff.
- [7] Stein, G. (1994): Populationsmodelle im Mathematikunterricht. – ZDM 1994/6, S. 188ff.

Adresse des Autors:

Henning Körner

Studienseminar Oldenburg für das Lehramt an Gymnasien, Unter den Eichen 22, 26122 Oldenburg

e-mail: hkoer@hotmail.com