Martin GUGGISBERG, Torsten LINNEMANN, Beat TRACHSLER

Forschendes Lernen mit Hilfe von Optimierungsaufgaben am Beispiel eines klassischen Lokalisierungsproblems

„Wo ist der beste Standort für einen Spielplatz?“ (Roth-Sonnen (2005): Was ist ein Mittelpunkt?). Diese Aufgabe hat keine geschlossene algebraische Lösung – und bietet damit einen Einstieg in realitätsbezogene Situationen des Forschenden Lernens.

Am Beispiel des historischen Fermat-Weber-Problems soll das für den Unterricht auf der Sekundarstufe 2 aufzeigt werden. Neben numerischen Verfahren werden Lösungen mit GeoGebra vorgestellt.

1. Gutachteraufgaben im Kontext des Forschenden Lernens

Roth hat sich mit Forschendem Lernen im Mathematikunterricht auf vielfältige Weise auseinander gesetzt, und unter anderem die Frage gestellt: „Kann man forschen lernen?“ (Roth 2014). Er beschreibt anhand konkreter Beispielen aus den Gebieten der „Kombinatorischen Optimierung“ oder den Naturwissenschaften, wie Schülerinnen und Schüler auf der gymnasialen Stufe subjektiv neue Bereiche erforschen. Oldenburg und Ludwig vermuten, dass Experimente Lernprozesse auslösen und Lernwege steuern können (Ludwig 2007), dabei werden nach ihrer Auffassung die Kompetenzen Argumentieren und Modellieren gefördert. Außerdem können Lernende in die Rolle von Forscherinnen und Forscher schlüpfen während des Arbeitens an den Fragestellungen. Sie können interaktive Werkzeuge nutzen (Gassner 2012, Guggisberg 2014), um ihre erstellten Thesen zu überprüfen.

Kaenders zeigt mit Hilfe des Mathematikwerkzeugs GeoGebra an zahlreichen Beispielen, wie forschend-entdeckender Unterricht auf konstruktivistische Art und Weise gelingen kann (Kaenders 2011). Roth-Sonnen beschreibt, wie anhand einer Fragestellung mit Alltagsbezug eine allgemeinere, abstraktere oder generalisierte Fragestellung entstehen kann. Die konkrete Frage, wo der beste Ort für einen Kinderspielplatz liegt, kann in eine allgemeinere Fragestellung nach der Definition eines Mittelpunkts (Roth-Sonnen 2005) überführt werden.

Diese Art von Fragestellungen eignen sich im Besonderen für den didaktischen Einsatz der Gutachtermethode (Barzel 2014). Schülerinnen und Schüler setzen dabei ihr mathematisches Handwerkszeug als Expertenwissen ein, um vorgegebene konkrete Fragestellungen zu bearbeiten und begründete Lösungsvorschläge zu unterbreiten. Im Folgenden werden wir, ausgehend von der Fragestellung nach einem optimalen Ort (Lokalisie-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

rungsproblem), eine mögliche Unterrichtssituation beschreiben, in welcher die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe von GeoGebra verschiedene Lösungsvorschläge erforschen können.

2. Was ist der beste Ort für einen Spielplatz

Die hier vorgeschlagene Variante nutzt die dynamische Geometriesoftware GeoGebra. In Zweier- oder Dreiergruppen sollen die SuS verschiedene mögliche Standpunkte für einen Spielplatz bei einer vorgegebenen Situation erproben und Argumente für Ihre gefundene Wahl des Standortes sammeln.

In einer Gruppendiskussion erkennen manche Schülerinnen und Schüler, dass ein idealer Standpunkt von verschiedenen weiteren Rahmenbedingungen abhängen kann, wie z.B.

- möglichst sicherer und direkter Zugang,
- möglichst in der Nähe vieler Kinder (Abhängigkeit der Bewohnerstruktur),
- möglichst wenig Lärmemission zu nächsten Nachbarn.

Beim Ausarbeiten verschiedener Gutachten kann auch die Frage auftreten mit welchem Maß, respektive welcher Norm, sollen Distanzen zwischen dem Spielplatz und den einzelnen Häuser gemessen werden. Das erste Beispiel verwendet einfach die Distanzmessung von Geogebra.

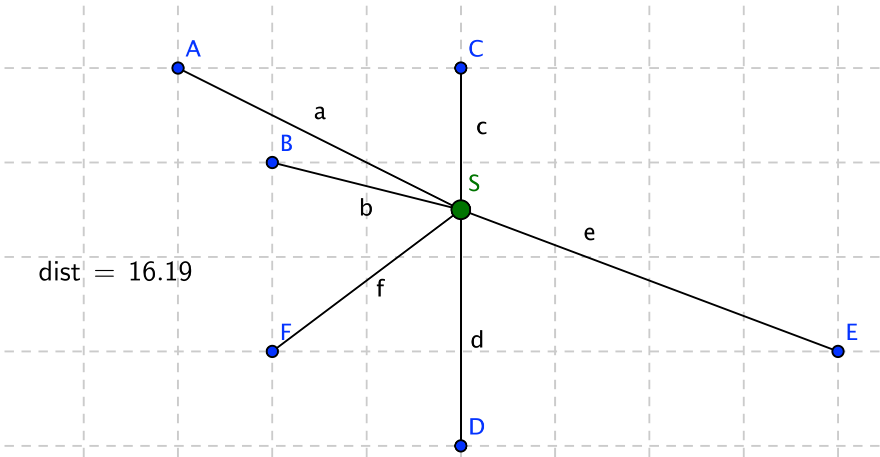

Abbildung 1 GeoGebraApplet zum interaktiven Suchen nach dem optimalen Ort für einen Spielplatz. Als Distanz von einem Haus zum Spielplatz wird die Luftinen (euklidische Norm) verwendet (http://tube.geogebra.org/material/show/id/320855)

Die Gutachten nutzen GeoGebra um einen möglichst optimalen Ort durch manuelles Experimentieren zu eruieren. Daraus eröffnet sich die Frage, ob es nicht auch eine geometrische oder algebraische Lösung für diese Art von Problemen gibt.

3. Von einem historischen Problem zu aktuellen Forschungsgebieten

„Wo befindet sich ein Punkt P in einem Dreieck, wenn die Summe aller Abstände von diesem Punkt P zu allen Ecken minimal sein soll?“ (Fermat, nach Dörrie 2013)

Im Band 8 des Schweizer Mathbuch, Lernumgebung 18, (Affolter 2003) wird neben den klassisch ausgezeichneten Punkten im Dreieck auch nach dem Fermat-Punkt gesucht. Für den Fall n=3 (Dreieck) existieren geometrisch und algebraische Lösungen zur Auffindung dieses Punktes. Zahlreiche modern gefasste und für Schülerinnen und Schüler lesbare Beweise finden sich in der Publikation von Hans Engelhaupt (Engelhaupt 2004).

Eine Generalisierung des Fermat-Problem lässt sich auf natürliche Weise realisieren, z. B. mit der Fragestellung: „Existiert ein optimaler Ort, von dem die Summe aller Abstände zu n > 3 Punkten minimal ist ?“

4. Numerische Methode zur Bestimmung eines optimalen Orts

Ein approximatives Lösungsverfahren hat Andrew Vázsonyi bereits 1932 im Alter von 16 Jahren gefunden und dieses 1937 in einer japanischen Zeitschrift in französicher Sprache unter seinem jüdischen Namen Endre Weiszfeld veröffentlicht. Der Artikel trug den Titel „Sur le point pour lequel les sommes des distances de n points donnés et minimum“ (Weiszfeld 1937). Der Kern des Weiszfeld-Algorithmus basiert auf einer iterativen Gewichtung von Verbesserungen.

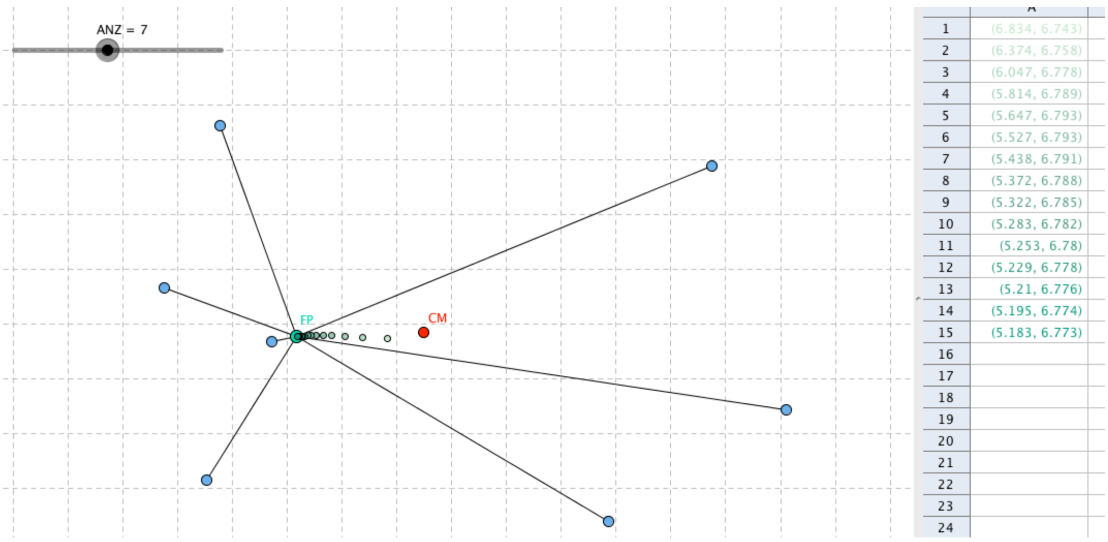

Abbildung 2 GeoGebraApplet, mit Hilfe des Weiszfeld-Algorithmus wird der Fermat-Punkt (türkis) approximiert (ε < 0.01), die einzelnen Iterationsschritte werden als Punkte visualisiert und als Koordinaten in der Tabellenansicht ausgegeben. (http://tube.geogebra.org/material/show/id/53072)

Die Programmierschnittstelle von GeoGebra ermöglicht eine Implementierung des Weiszfeld-Algorithmus. Bei jeder Änderung der Ausganslange lässt sich der Schwerpunkt (rot), der Fermat-Punkt (türkis), sowie die Iterationsschritte neu berechnen und visualisieren. Weiterführende Fragestellungen wie z.B. „ Welche Positionen kann der Fermat-Punkt annehmen, wenn nur eine Position eines Ausgangspunktes verändert wird?“ können mit Hilfe von interaktiven GepGebraApplets untersucht werden (GeoGebraBook http://tube.geogebra.org/book/title/id/740553).

5. Reflexion und Ausblick, Subjektives Entdecken mit Hilfe von GeoGebra

Dieser Beitrag soll zeigen, dass eine prägnant formulierte Fragestellung mit Alltagsbezug, wie z.B. das Fermat-Problem, das Potenzial für eine geschichtliche Entdeckungsreise wie auch tiefere mathematische Reflexion ermöglicht. Werkzeuge wie GeoGebra erlauben es uns Probleme zu generalisieren und komplexere Konfiguration, wie z.B. ein optimaler Ort innerhalb Europas mit Hilfe von Simulationen zu erkunden.

Literatur

Affolter, W. u.a. (2003). Hat ein Dreieck eine Mitte? mathbu.ch 8. Mathematik im 8. Schuljahr für die Sekundarstufe I. Bern: schulverlag blmv AG und Zug: Klett und Balmer

Barzel, B., Büchter, A., & Leuders, T. (2014). Mathematik Methodik, Handbuch für die Sekundarstufe I und II. 11. Auflage Berlin: Cornelsen Verlag.

Dörrie, H. (2013). 100 great problems of elementary mathematics. Courier Dover Publications.

Engelhaupt, H. (2004). Kürzeste Wege, Teil I. Mathematikinformation, 41, 24-61.

Gassner, C., & Hohenwarter, M. (2012). GeoGebraTube & GeoGebraWeb. Beiträge zum Mathematikunterricht 2012.

Guggisberg, M., & Gyalog, T. (2014). "Lernmaterial zum Informatik-Biber", SATW Broschüre, Informatische Bildung fördern, SATW INFO 2/14

Kaenders, R., & Schmidt, R. (2011). Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Vieweg+ Teubner, Wiesbaden.

Ludwig, M., Oldenburg, R. (2007). Lernen durch Experimentieren – Handlungsorientierte Zugänge zur Mathematik. *mathematik lehren*, 141, 4-11

Roth, J., & Weigand, H. G. (2014). Forschendes Lernen im Mathematikunterricht: Eine Annäherung. Beiträge zum Mathematikunterricht 2014 (S. 999–1002). Münster: WTM-Verlag

Roth-Sonnen N., Leuders, T., Barzel, B., & Hußmann, (2005). Computer, Internet und co im Mathematikunterricht. (S. 190) Berlin: Cornelsen.

Weiszfeld, E. (1937). Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnés est minimum. Tôhoku Mathematical Journal, 43, 355–386.