Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Korschenbroich

Die interaktive Funktionenlupe - Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung von Grundvorstellungen der Analysis

Das *Funktionenmikroskop* war ein Vorschlag von Arnold Kirsch „zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff“, der damals mit OHP-Folien realisiert wurde (Kirsch, 1980). Das war eine Vorwegnahme der Idee des Hineinzoomens: „Wir sehen uns den Graphen einer (geeigneten) Funktion f in der Nähe eines festen Punktes P mit einem ‚Mikroskop‘ an. Dabei bemerken wir, daß das beobachtete kleine Graphenstück bei hinreichend starker Vergrößerung praktisch geradlinig verläuft und somit eine gewisse Steigung besitzt. Dies ist die Steigung von f an der betreffenden Stelle“ (Kirsch, 1979).

Diese Idee gab es im Prinzip auch schon vor Kirsch, wurde aber von ihm im deutschsprachigen Raum verbreitet und mit dem einprägsamen Bild des Mikroskops verbunden. Einige Jahre später ließ sich diese Idee dann digital mit der Zoom-Funktion von Funktionenplottern umsetzen. Damit wurde man bei den Funktionen und bei der zu untersuchenden Stelle flexibler, aber man agierte nach wie vor rein lokal.

1. Lokale Steigung mit der Funktionenlupe: Funktionenmikroskop 2.0

Die hier vorgestellte *Funktionenlupe* greift die Idee des Funktionenmikroskops auf und erweitert sie. Sie bietet zwei Fenster: im ersten Fenster ist der Funktionsgraph ‚normal‘ zu sehen, im zweiten wird ein Ausschnitt um einen Punkt A vergrößert. Die Größe dieses Ausschnitts kann über einen Schieberegler verändert werden und sukzessive verkleinert werden. Somit erhalten wir jetzt nebeneinander einen globalen und einen lokalen Blick (Elschenbroich & Seebach & Schmidt, 2014). Gehen wir um h nach links oder nach rechts, bekommen wir zwei weitere Punkte A_l und A_r auf dem Graphen von f. Durch A_l und A bzw. durch A und A_r kann man Geraden definieren, die Sekanten des Graphen von f sind.

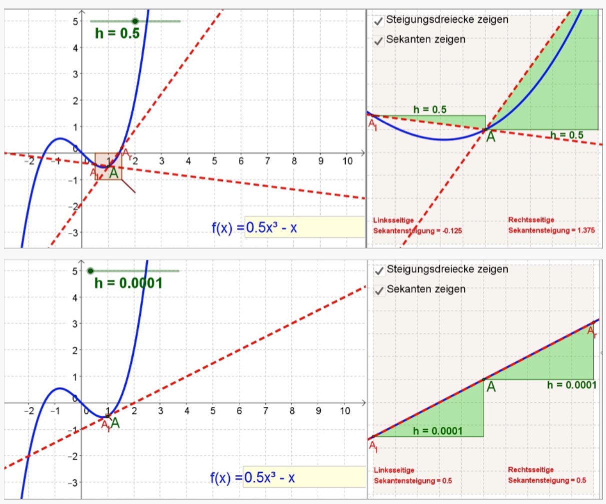

Abb. 1a, b Visueller Zugang zur lokalen Steigung mit der Funktionenlupe

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Deren Steigungen sind einfach zu bestimmen. In der Regel werden sie zunächst unterschiedlich sein. Bei ‚gutartigen' (= differenzierbaren) Funktionen nähern sich dann diese Sekantensteigungen immer mehr an, wenn h immer kleiner wird, und werden schließlich im Rahmen der Rechengenauigkeit identisch bzw. die Sekanten auf dem Bildschirm ununterscheidbar.

So kann man Funktionsgraphen anschaulich auf ihre Steigung an einem Punkt A untersuchen bzw. bei typischen nicht-differenzierbaren Funktionen erkennen, dass dort eine ‚Knickstelle' auch im Hineinzoomen bleibt.

Im Folgenden werden wir sehen, dass man mit der Funktionenlupe auch global einen Zugang zur Steigungsfunktion bekommt (Elschenbroich & Seebach, 2014), weswegen ich die Funktionenlupe auch als digitale Erweiterung des Funktionenmikroskops, als *Funktionenmikroskop 2.0* sehen möchte.

2. Anschaulich zur Steigungsfunktion mit der Funktionenlupe

Wir haben ja lokal die Information über die (von h abhängige) linksseitige und rechtsseitige Sekantensteigung an *einer* Stelle A. Diese kann man mit dynamischer Mathematik-Software als y-Koordinate in einem Punkt P_l bzw. P_r übertragen, der die gleiche x-Koordinate wie A hat. Da A auf dem Graphen von f variabel ist, erhält man als Ortslinie die Graphen der linksseitigen bzw. rechtsseitigen Sekantensteigungsfunktion, ohne den Funktionsterm zu kennen (was ich im Unterschied zum üblichen Funktionenplotter *Graphenplotter* nenne).

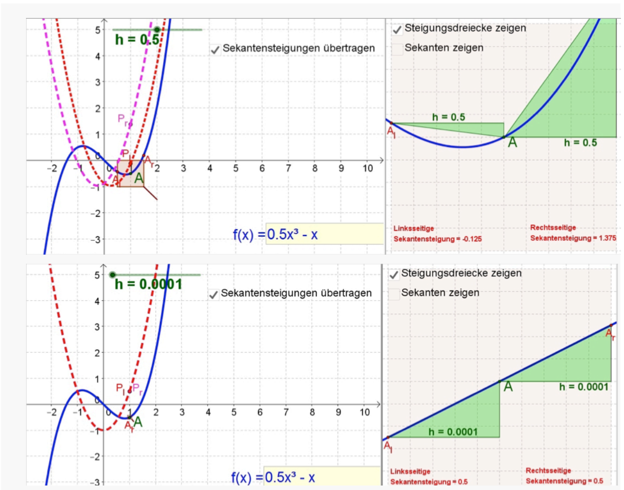

Abb. 2a, b Visueller Zugang zur Steigungsfunktion mittels Ortslinien

Wird h immer weiter verkleinert (z.B. bis h = 0.0001, aber nicht Null!), so verschwindet bei gutartigen Funktionen der Unterschied zwischen den Graphen der beiden Sekantensteigungsfunktionen und sie verschmelzen anschaulich, d.h. im Rahmen der Bildschirmauflösung [1], zum Graphen der Tangentensteigungsfunktion (Elschenbroich, 2014).

[1] Natürlich bleiben wir hier im Endlichen, sogar rational. Hier und auf dieser Grundlage sollten dann Theorie und Kalkül ansetzen, um eine *Infinitesimal*rechnung aufzubauen!

3. Anschaulich zur Krümmung mit der Funktionenlupe

Beim Zugang zur Steigung wurde (bei gutartigen Funktionen) der Funktionsgraph lokal bei starker Vergrößerung als geradlinig verstanden. Nun sind Funktionsgraphen aber meist gekrümmt. Es liegt also nahe, auch einen visuellen Zugang zur Krümmung zu suchen. Untersucht man die Krümmung mit den Methoden der Analysis, wird es konzeptionell schwierig und rechnerisch schnell unangenehm, weswegen die Krümmung (bis auf Rechts- oder Linksgekrümmtheit) im Schulunterricht keine Rolle spielt. Dies ist bedauerlich, weil Krümmung ein wichtiger und alltagsnaher Begriff und eigentlich auch eine Grundvorstellung der Analysis ist.

Die Funktionenlupe ermöglicht auch einen einfachen visuellen Zugang zur Krümmung, indem wir den Graphen jetzt lokal dadurch approximieren, dass wir durch die drei Punkte A_l, A und A_r einen Kreis konstruieren. Wird h wieder immer kleiner, so stabilisiert sich (bei gutartigen Funktionen) dieser Kreis (hier liegt der Fokus auf dem ersten Fenster!) und wird anschaulich zum Krümmungskreis (Büchter & Henn, 2010; Elschenbroich, 2014). Der Kehrwert des Kreisradius ist betraglich die Krümmung an dieser Stelle.

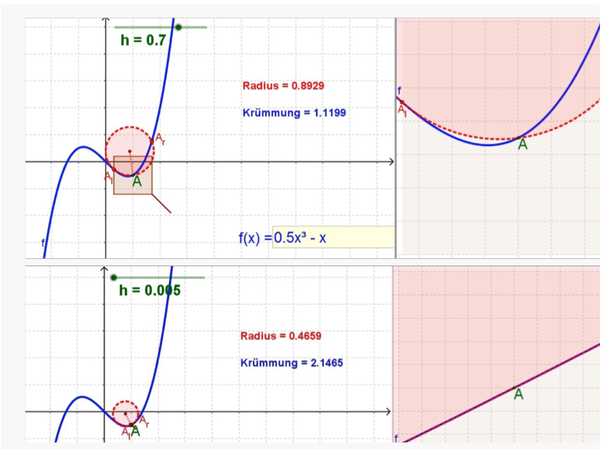

Abb. 3a, b Visueller Zugang zur Krümmung über den Schmiegekreis

4. Zur quadratischen Approximation mit der Funktionenlupe

So wie man geometrisch von der Tangente als einfachstem geradlinigem Objekt zum Kreis als einfachstem gekrümmten Objekt übergehen kann, so liegt es funktional nahe, von der linearen Approximation zu einer quadratischen Approximation überzugehen. Auch hier greifen wir auf die drei Punkte A_l, A und A_r zurück, ebenfalls mit Blick auf das erste Fenster. Durch diese drei Punkte ist eine quadratische Funktion festgelegt, die man in GeoGebra einfach mit dem Befehl `Polynom[A_l, A, A_r]` bestimmen und plotten kann.

Für $f(x) = e^x$ approximiert diese Parabel den Graphen an der Stelle $a = 0$ schon für großes h recht gut ($h = 1$, siehe Abb. 4). Für kleines h ($h = 0.0001$) erhält man als quadratische Approximation $y = \frac{1}{2}x^2+x+1$.

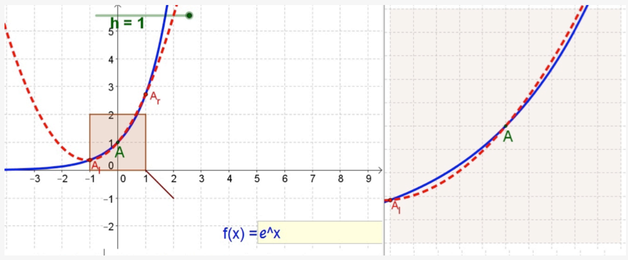

Abb. 4 Visueller Zugang zur quadratischen Approximation: Parabel durch 3 Punkte

Die lineare Approximation ist an dieser Stelle $y = x + 1$. So kommen wir anschaulich zum ersten und zweiten Taylorpolynom (es kommt zum linearen Term $x + 1$ nur noch der quadratische Term $\frac{1}{2}x^2$ hinzu)!

5. Fazit

Die Funktionenlupe ermöglicht einen anschaulichen und schüleraktiven Zugang zur lokalen Steigung einer Funktion, zur Steigungsfunktion, zur Krümmung und zur quadratischen Approximation. Dieser Zugang ist *auf der Benutzerebene* der Schüler oder Studenten anschaulich und kalkülfrei (wobei natürlich unterhalb der Benutzeroberfläche viel gerechnet wird).

Sicherheitshalber sei noch betont, dass ich damit nicht der Abschaffung des Kalküls und der Theorie das Wort reden möchte, sondern beiden eine anschauliche Grundlage geben möchte! Der Analysis-Kalkül wird in der Schule meist zu früh eingeführt und zu oft unverstanden exerziert. Dem kann man mit der Funktionenlupe abhelfen und tragfähige Grundvorstellungen aufbauen. Die hier vorgestellten anschaulichen Zugänge sind so angelegt, dass sie keine Fehlvorstellungen erzeugen und einen späteren Kalkül- und Theorieaufbau nicht behindern.

Literatur

Büchter, Andreas & Henn, Hans-Wolfgang (2010): Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie. Spektrum Akademischer Verlag.

Elschenbroich, Hans-Jürgen & Seebach, Günter & Schmidt, Reinhard (2014): Die digitale Funktionenlupe. Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. In: *mathematik lehren 187* (S. 34–37). www.geogebratube.org/student/b411373

Elschenbroich, Hans-Jürgen & Seebach, Günter (2014): Funktionen unter der Lupe. MatheWelt 187. Beilage zu mathematik lehren 187. www.geogebratube.org/student/b409833

Elschenbroich, Hans-Jürgen (2014): Ein kalkülfreier Zugang zu Grundvorstellungen der Analysis. In: Roth & Ames (Hsrg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2014 (S. 337–340).

Kirsch, Arnold (1980). Folien zur Analysis: Das Funktionenmikroskop. Serie A: Die Steigung einer Funktion. Schroedel, Hannover.

Kirsch, Arnold (1979): Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. In: Der Mathematikunterricht, Heft 3 (S. 25–41).

Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Korschenbroich

Variationen zum 'Rätsel der Woche' aus Spiegel online

Anfang Dezember 2014 erschien im Spiegel online eine Mathematik-Aufgabe als ‚Rätsel der Woche', die schnell die Runde machte. Dies möchte ich zum Anlass nehmen, zu untersuchen, wie man diese Aufgabe variieren und für den Mathematikunterricht nutzen kann.

1. Die originale Aufgabe

In einen Halbkreis sind zwei Strecken eingezeichnet.
Die eine liegt auf dem Durchmesser und hat die Länge 5 Zentimeter (rot). Die andere steht senkrecht darauf und ist 15 Zentimeter lang (blau).
Wie groß ist der Radius des Halbkreises?

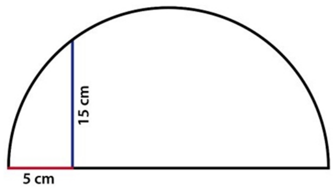

Abb. 1 Aufgabenstellung in Spiegel online

Eigentlich haben wir eine normale Mathematikaufgabe vorliegen. Für etwas mathematikfernere Menschen erscheint es vielleicht deshalb als ‚Rätsel', weil aus der Figur zunächst nicht erkennbar ist, was die beiden Strecken mit dem gesuchten Radius zu tun haben könnten.

Schaut man sich die in Spiegel online vorgestellte und weitere Lösungen im Internet an, so stellt man fest, dass diese üblicherweise einen statischen Ansatz mit einer Planfigur und Variablen verfolgen, bei dem dann noch auf einen geeigneten geometrischen Satz zurückgegriffen wird.

2. Statische Lösungen

Zunächst möchte ich kurz die gängigen algebraisch ausgerichteten Lösungen vorstellen.

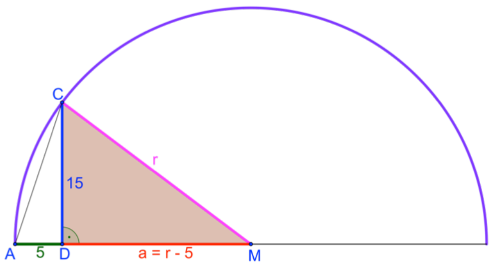

Abb. 2 Satz des Pythagoras im Dreieck CDM. r = 25.

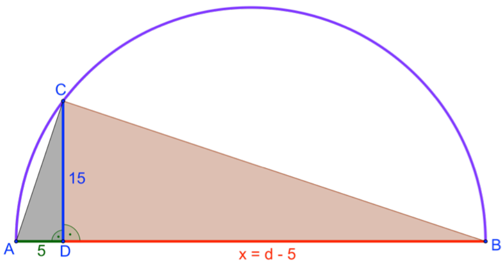

Abb. 3 Satz des Thales, Ähnlichkeit der Dreiecke ADC und CDM. d = 50.

Die Lösungen in Abb. 2 – 4 arbeiten mit einer Planfigur, der Variablen r bzw. dem Satz des Pythagoras, Höhensatz oder Ähnlichkeitsätzen und der

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Lösung einer Gleichung, die dann als Ergebnis den Radius r bzw. den Durchmesser d liefert.

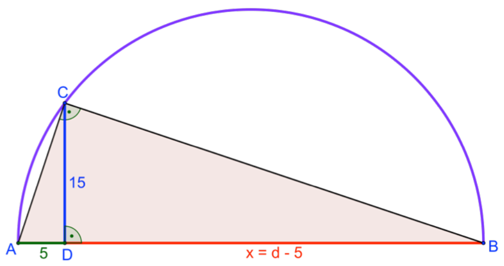

Abb. 4 Satz des Thales, Höhensatz im Dreieck ABC. d = 50.

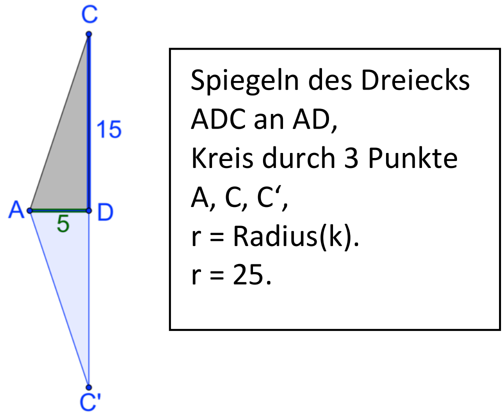

Abb. 5 GeoGebra-Tools

3. Lösung mit GeoGebra-Werkzeugen

Eine völlig andere Herangehensweise ist in Abb. 5 zu sehen, die aber auch weitgehend statisch bleibt. Durch den Einsatz von mächtigen GeoGebra-Werkzeugen als Black Box (Achsenspiegelung, Kreis durch 3 Punkte, Radius eines Kreises) wird der gesuchte Radius ermittelt.

4. Eine typische Problemlösestrategie

Allen vier Ansätzen ist gemeinsam, dass man die Lösung straight forward ermitteln kann - wenn man es halt kann. Die ersten drei algebraischen Lösungen dürften insbesondere mathematisch geschulten Menschen (Mathematiklehrern) geläufig sein. Es bleibt aber das Problem, dass man entweder weiß, wie man die Aufgabe angehen muss, oder aber keinen Zugang hat. Für mich stellten sich daher zwei Fragen:
- Wie kommt man zu *geometrischen, konstruktiven* Lösungen?
- Wie kann man eine *Lösungsidee finden*, wenn man zunächst keine hat?

Als erstes ist es sicher sinnvoll, in der Planfigur Punkte und Strecken zu benennen (A, B, C, Lotfußpunkt D, Radius r bzw. Durchmesser d). Dann stellt man fest, dass man nicht nur den Radius sucht, sondern damit auch den Kreis k. Man stellt dabei fest, dass man den Eckpunkt B nicht kennt und erst einmal die Strecke AD zu einem Strahl AD verlängern muss.

„Wenn du die vorliegende Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, zuerst eine verwandte Aufgabe zu lösen. [...] Behalte nur einen Teil der Bedingung bei und lasse den anderen fort; wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kann ich sie verändern? Kannst du etwas Förderliches aus den Daten ableiten?“ (Polya 1949, erste Innenseite)

Wir haben so drei Bedingungen: der Kreis muss durch A und C verlaufen und der Kreismittelpunkt muss irgendwo auf dem Strahl AD liegen.

Eine typische heuristische Strategie besteht darin, *eine* der Bedingungen wegzulassen, auch (n-1)-Strategie genannt. Hier haben wir die drei Bedingungen: Kreis durch A, Kreis durch C und Kreismittelpunkt M auf AD.

Daraus ergibt sich durch Weglassen einer der Bedingungen:
- Kreis durch A und C
- Kreis durch A um M auf AD
- Kreis durch C um M auf AD.

Kreise mit diesen Bedingungen sind leicht zu finden.

5. Dynamisierung I

Alle Kreise durch A und C müssen ihren Mittelpunkt M auf der Mittelsenkrechten der Strecke AC haben. Konstruiert man diese Mittelsenkrechte, einen Punkt M auf ihr und einen Kreis um M durch A (der zwangsläufig auch durch C geht), so entdeckt man im Zugmodus schnell, dass die dritte Bedingung (M auf AD) auch erfüllt werden kann und das gesuchte M im Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit AD liegen muss. Damit ist die Lösungsidee gefunden und es kann der gesuchte Kreis konstruiert und sein Radius gemessen werden.

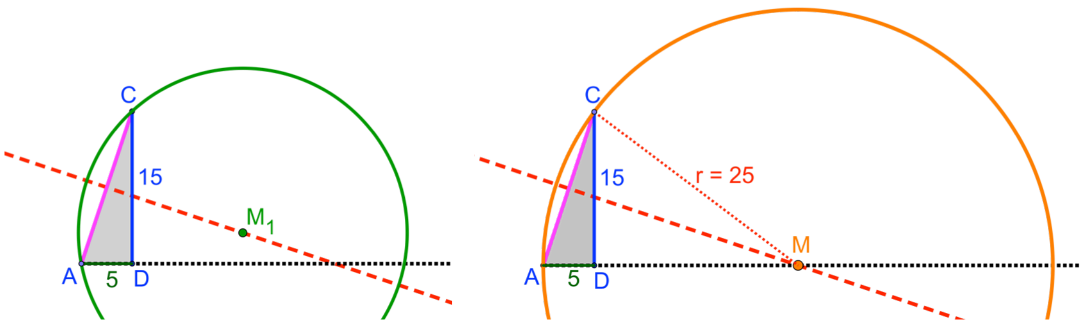

Abb. 6a, b Dynamisierung I: Kreis durch zwei Punkte

Dieser Weg ist für Schüler sicher leicht gangbar, ggf. brauchen sie beim Ansatz eine Anleitung oder ein geeignetes Arbeitsblatt.

6. Dynamisierung II

Konstruiert man Kreise um einen Punkt M auf AD durch A, so erkennt man im Zugmodus schnell, dass auch die dritte Bedingung (durch C) erfüllt werden kann. Nicht so einsichtig ist aber, wie man zu einer *Idee für die*

Konstruktion der Lösungsfigur kommt. Hier ist wieder ein Blick in die Schule des Denkens von Polya hilfreich.

> „Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein! [...]
> Kennst du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte? [...]
> ... würdest du irgendein Hilfselement einführen?"
> (Polya 1949, erste Innenseite)

Damit könnte man z.B. auf die Idee kommen, den Schnittpunkt des Kreises mit AD zu konstruieren und als Ecke B eines Dreiecks ABC zu sehen. Bei Kreis und Dreieck denkt man vielleicht an den Satz des Thales bzw. den Umfangswinkelsatz und betrachtet deswegen noch den Winkel bei C.

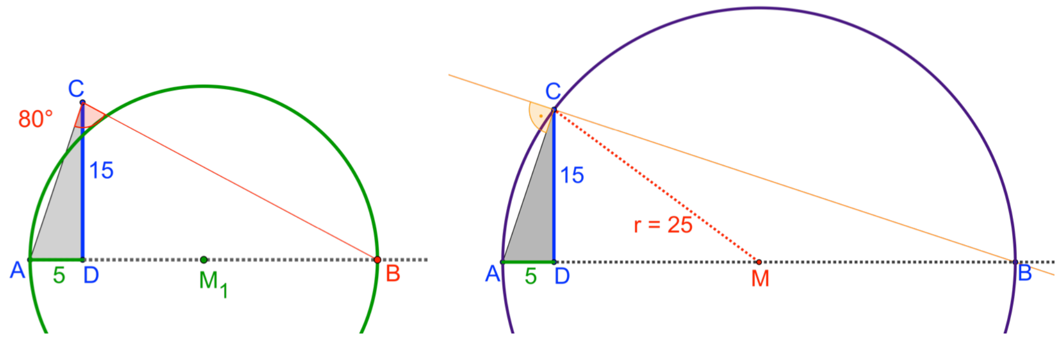

Abb. 7a, b Dynamisierung II: Kreis um M auf AD durch A

Variiert man nun diese Konstruktion im Zugmodus, so entdeckt man, dass der gesuchte Kreis dann vorliegt, wenn bei C ein rechter Winkel ist. Dann ist der Kreis Thaleskreis über AB. So erhalten wir eine Idee zur Konstruktion der Lösungsfigur: Die Senkrechte zu AC durch C schneidet den Strahl AD in einem Punkt B und der Mittelpunkt von AB ist der gesuchte Kreismittelpunkt. Damit kann nun der gesuchte Kreis konstruiert werden und sein Radius gemessen werden. Die dritte Dynamisierungsvariante (Kreis um M durch C) verläuft analog und wird daher hier nicht weiter ausgeführt.

7. Fazit

Die (n-1)-Strategie hat es ermöglicht, von der starren Planfigur abzugehen, die Figur im Zugmodus zu dynamisieren und dabei Ideen für eine geometrische, konstruktive Lösung des Problems zu entdecken.

Literatur

Polya, G. (1949): Schule des Denkens. Francke Verlag, Bern

Spiegel online: Rätsel der Woche: Das Kreuz mit dem Kreis. www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/raetsel-der-woche-kreis-unbekannter-groesse-a-1005539.html. Zugriff am 4.12.2014