Лабораторная работа №5

Модель эпидемии (SIR)

Хватов Максим Григорьевич

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Построить модель SIR в xcos и OpenModelica.

2 Задание

1. Реализовать модель SIR в в *xcos*;
2. Реализовать модель SIR с помощью блока Modelica в в *xcos*;
3. Реализовать модель SIR в OpenModelica;
4. Реализовать модель SIR с учётом процесса рождения / гибели особей в xcos (в том числе и с использованием блока Modelica), а также в OpenModelica;
5. Построить графики эпидемического порога при различных значениях параметров модели (в частности изменяя параметр μ);
6. Сделать анализ полученных графиков в зависимости от выбранных значений параметров модели.

3 Выполнение лабораторной работы

Задача о распространении эпидемии описывается системой дифференциальных уравнений:

$$
\begin{cases}
\dot{s} = -\beta s(t)i(t); \\
\dot{i} = \beta s(t)i(t) - \nu i(t); \\
\dot{r} = \nu i(t),
\end{cases}
$$

где β – скорость заражения, ν – скорость выздоровления.

3.1 Реализация модели в xcos

Зафиксируем начальные данные: $\beta = 1$, $\nu = 0,3, s(0) = 0,999$, $i(0) = 0,001$, $r(0) = 0$.

В меню Моделирование, Установить контекст зададим значения переменных β и ν (рис. 3.1).

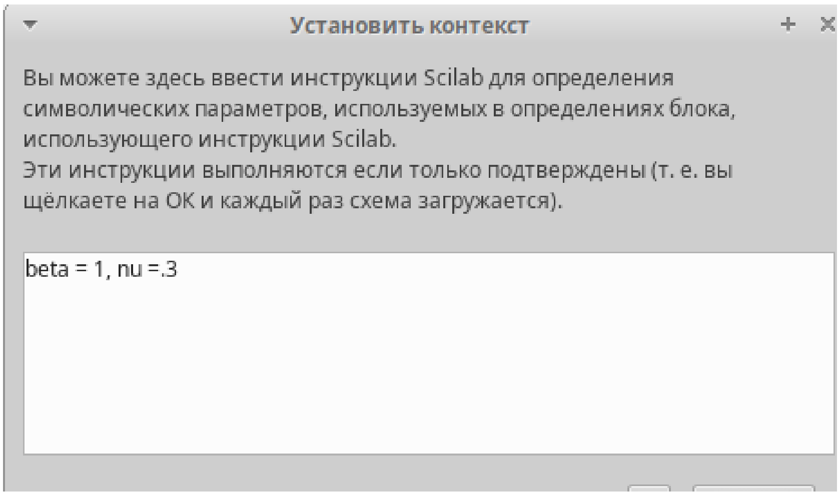

Рис. 3.1: Задание переменных окружения в xcos

Для реализации модели (рис. 3.2) потребуются следующие блоки xcos:

- `CLOCK_c` – запуск часов модельного времени;
- `CSCOPE` – регистрирующее устройство для построения графика;
- `TEXT_f` – задаёт текст примечаний;
- `MUX` – мультиплексер, позволяющий в данном случае вывести на графике сразу несколько кривых;
- `INTEGRAL_m` – блок интегрирования;
- `GAINBLK_f` – в данном случае позволяет задать значения коэффициентов β и ν ;
- `SUMMATION` – блок суммирования;
- `PROD_f` – поэлементное произведение двух векторов на входе блока.

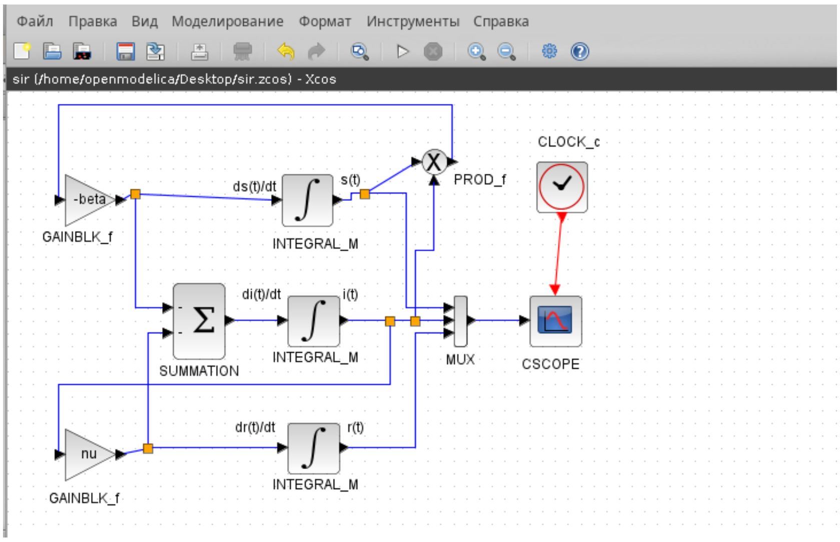

Рис. 3.2: Модель SIR в xcos

В параметрах верхнего и среднего блока интегрирования необходимо задать начальные значения $s(0) = 0,999$ и $i(0) = 0,001$ (рис. 3.3,3.4).

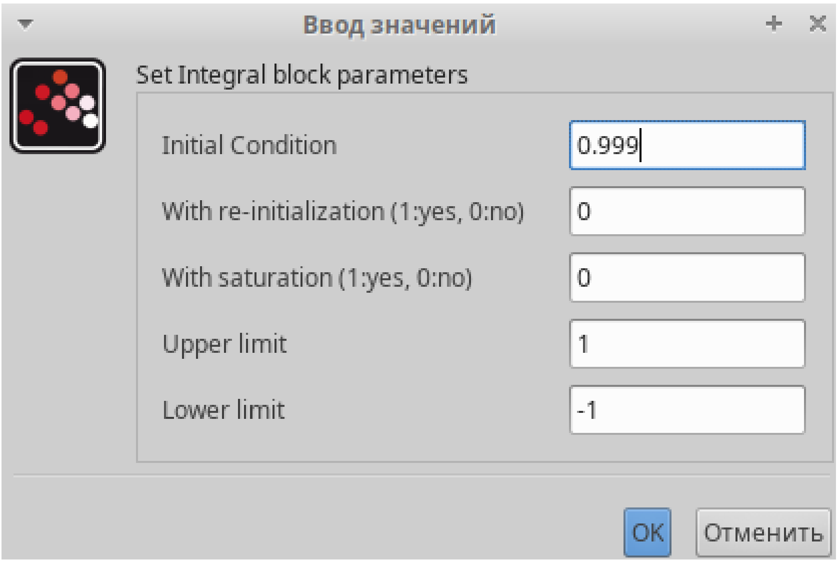

Рис. 3.3: Задание начальных значений в блоках интегрирования

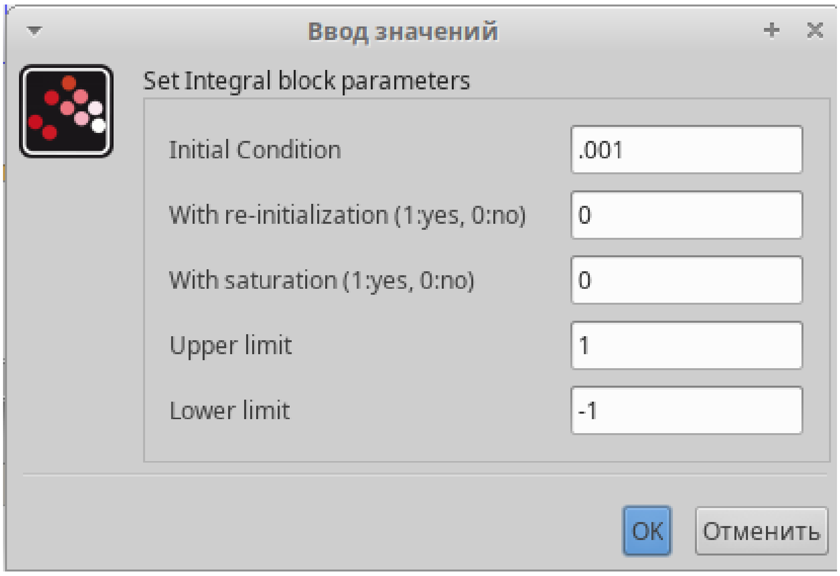

Рис. 3.4: Задание начальных значений в блоках интегрирования

В меню Моделирование, Установка зададим конечное время интегрирования, равным времени моделирования, в данном случае 30 (рис. 3.5).

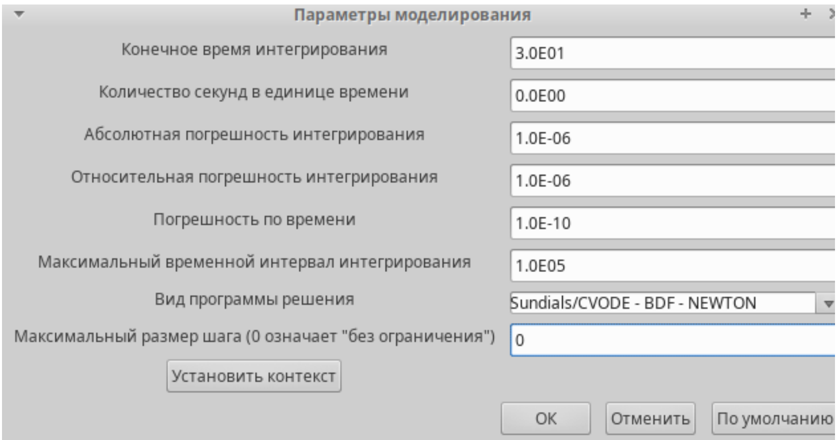

Рис. 3.5: Задание конечного времени интегрирования в xcos

Результат моделирования представлен на рис. 3.6, где черной линией обозначен график $s(t)$ (динамика численности уязвимых к болезни особей), красная линия определяет $r(t)$ — динамику численности выздоровевших особей, наконец, зеленая линия определяет $i(t)$ — динамику численности заражённых особей. Пересечение трёх линий определяет порог эпидемии.

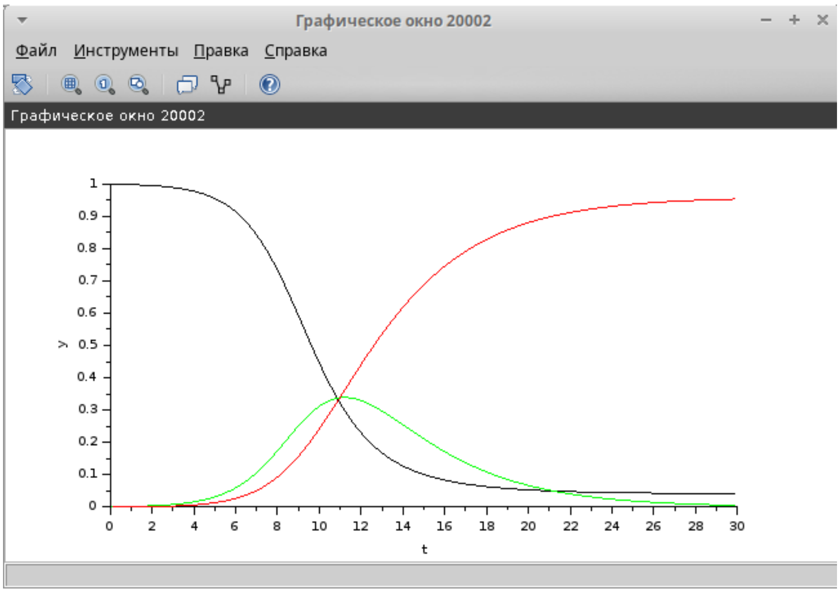

Рис. 3.6: Эпидемический порог модели SIR при $\beta = 1, \nu = 0.3$

3.2 Реализация модели с помощью блока Modelica в xcos

Готовая модель SIR представлена на рис. 3.7.

Для реализации модели SIR с помощью языка Modelica помимо блоков `CLOCK_c`, `CSCOPE`, `TEXT_f` и `MUX` требуются блоки `CONST_m` — задаёт константу; `MBLOCK` (Modelica generic) — блок реализации кода на языке Modelica. Задаём значения переменных β и ν (рис. 3.1).

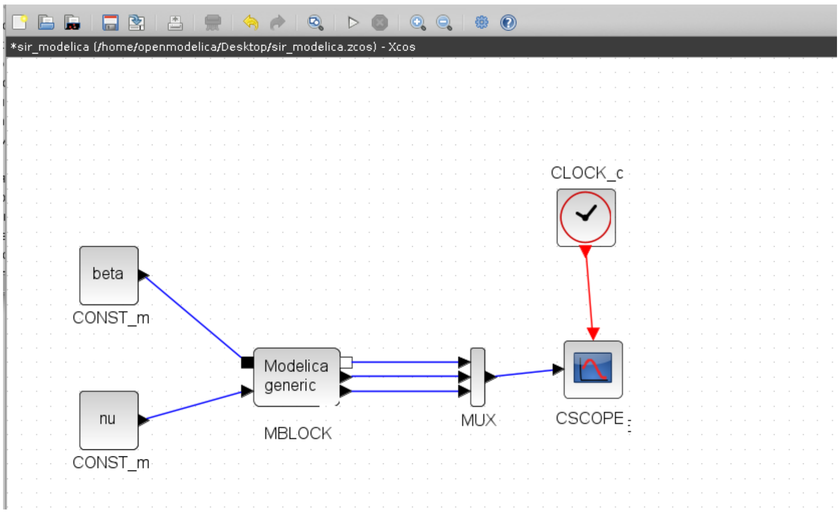

Рис. 3.7: Модель SIR в xcos с применением блока Modelica

Параметры блока Modelica представлены на рис. 3.8,3.9. Переменные на входе (“beta”, “nu”) и выходе (“s”, “i”, “r”) блока заданы как внешние (“E”).

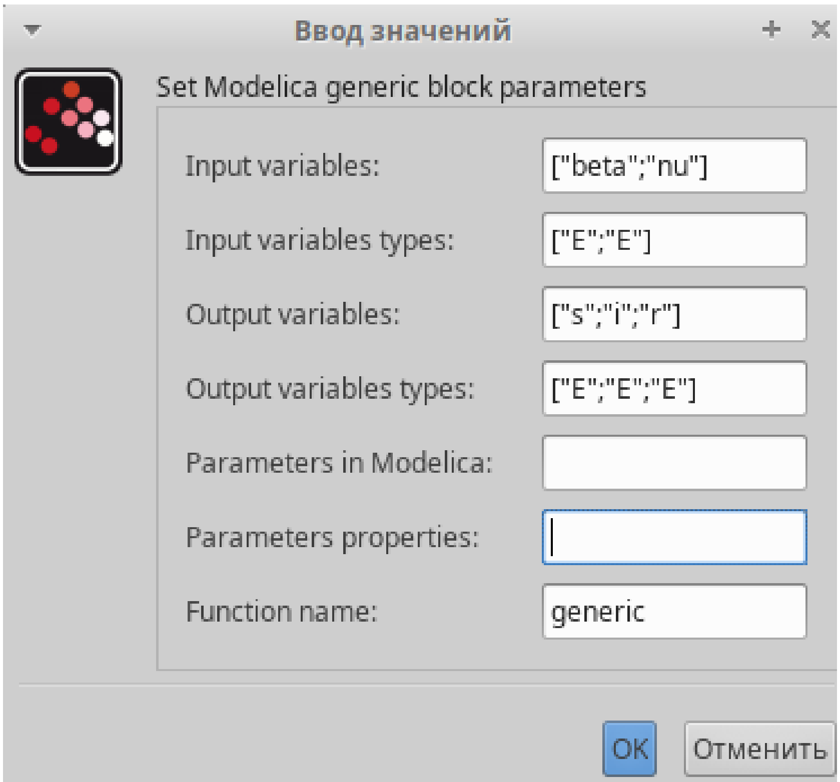

Рис. 3.8: Параметры блока Modelica для модели SIR

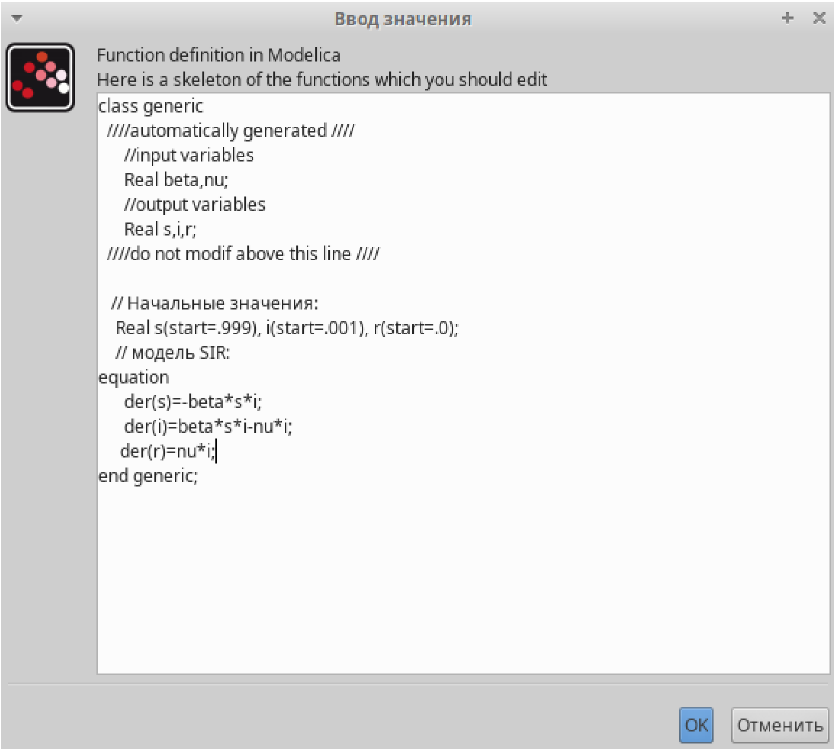

Рис. 3.9: Параметры блока Modelica для модели SIR

В результате получаем график (рис. 3.10), построенный с помощью блока Modelica идентичный графику (рис. 3.6), построенному без них.

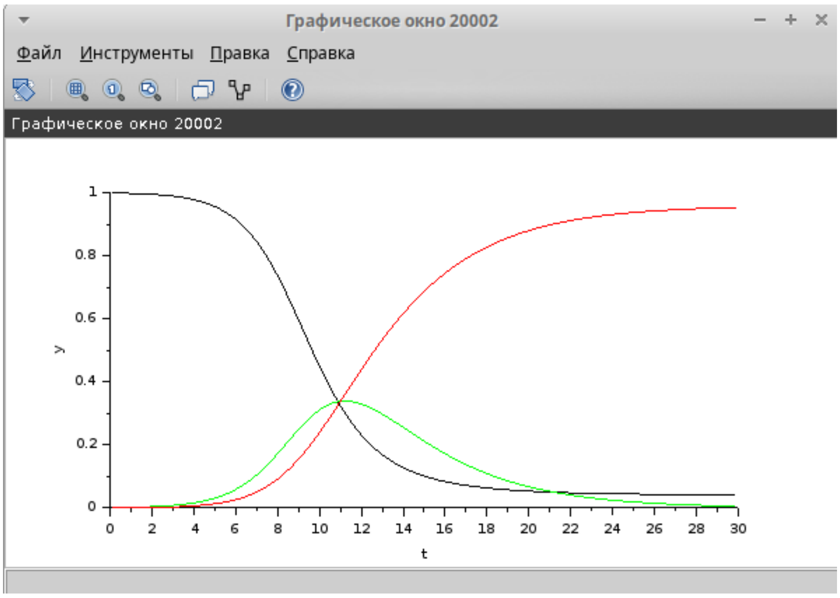

Рис. 3.10: Эпидемический порог модели SIR при $\beta = 1, \nu = 0.3$

4 Задание для самостоятельного выполнения

Предположим, что моедль SIR учитывает демографический процесс, в частности, что смертность уравновешивает рождаемость, а все рждённые индивидуумы появляются на свет абсолютно здоровыми. Получим следующую ситему уравнений:

$$
\begin{cases}
\dot{s} = -\beta s(t)i(t) + \mu(N - s(t)); \\
\dot{i} = \beta s(t)i(t) - \nu i(t) - \mu i(t); \\
\dot{r} = \nu i(t) - \mu r(t),
\end{cases}
$$

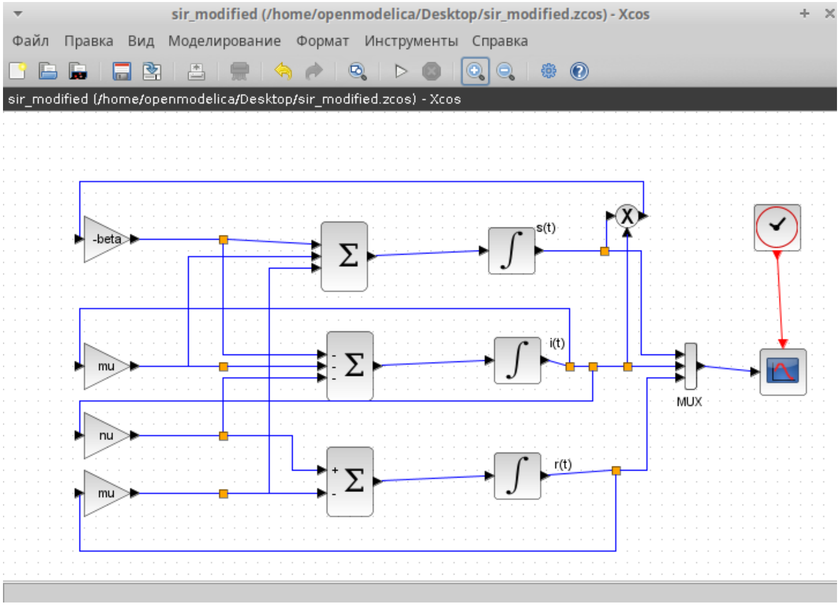

Рис. 4.1: Модель SIR с учетом демографических процессов

В результате получаем следующий график (рис. 4.2).

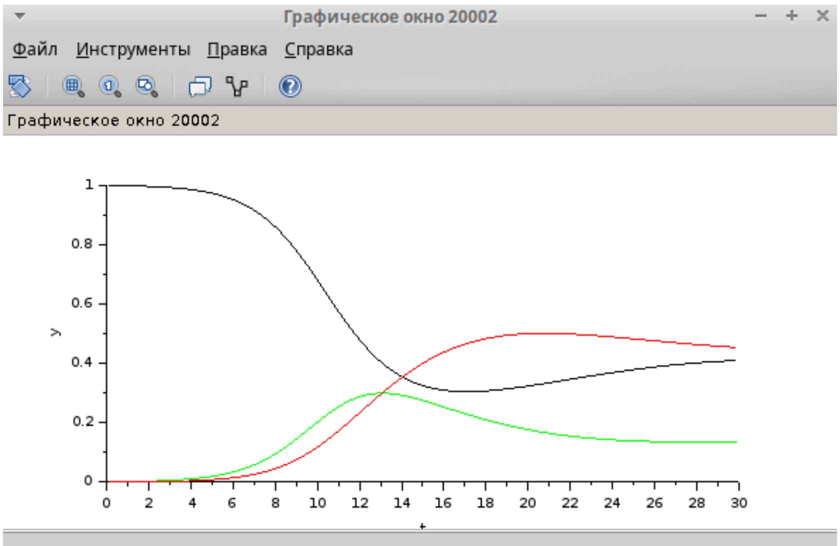

Рис. 4.2: График модели SIR с учетом демографических процессов

Теперь реализуем модель SIR с учетом демографических процессов в *xcos* с помощью блоков Modelica (рис. 4.3).

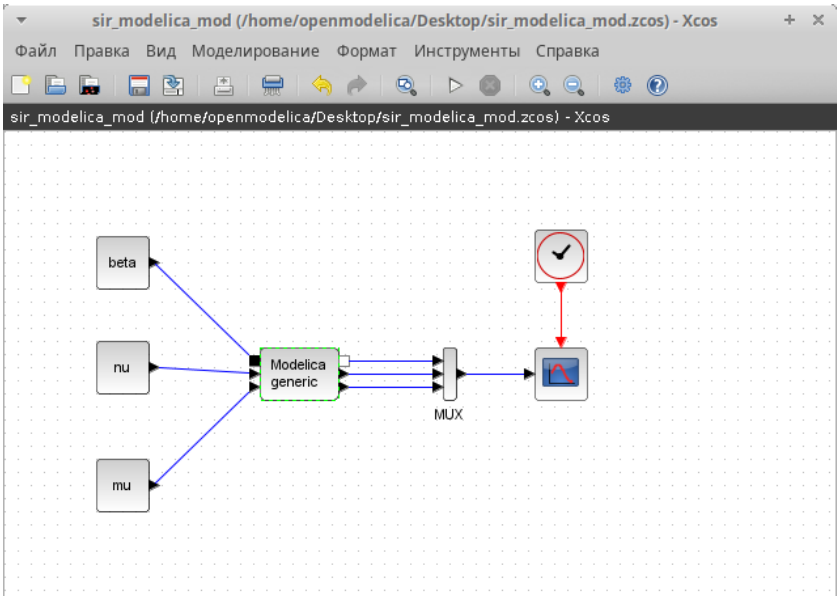

Рис. 4.3: Модель SIR с учетом демографических процессов в xcos с применением блока Modelica

Параметры блока Modelica представлены на рис. 4.4,4.5. Переменные на входе (“beta”, “nu”, “mu”) и выходе (“s”, “i”, “r”) блока заданы как внешние (“E”).

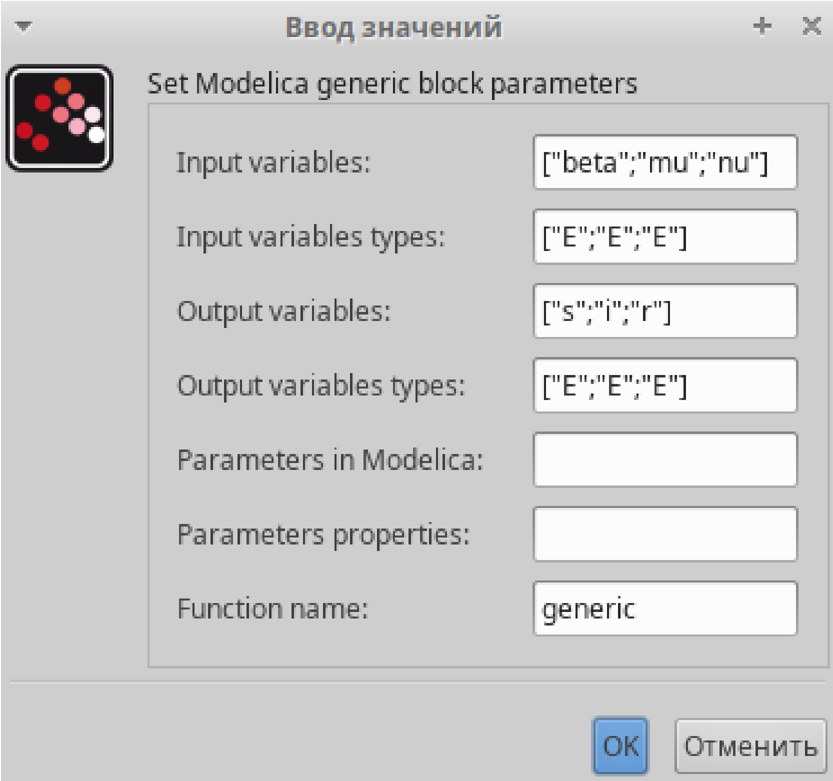

Рис. 4.4: Параметры блока Modelica для модели SIR с учетом демографических процессов

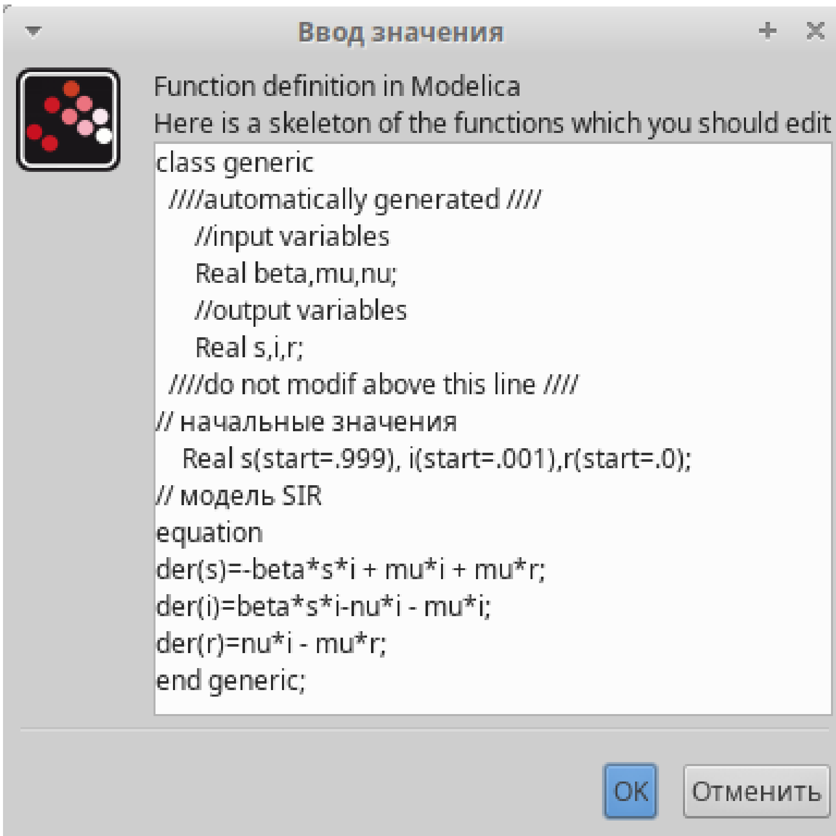

Рис. 4.5: Параметры блока Modelica для модели SIR с учетом демографических процессов

В результате получаем следующий график (рис. 4.6).

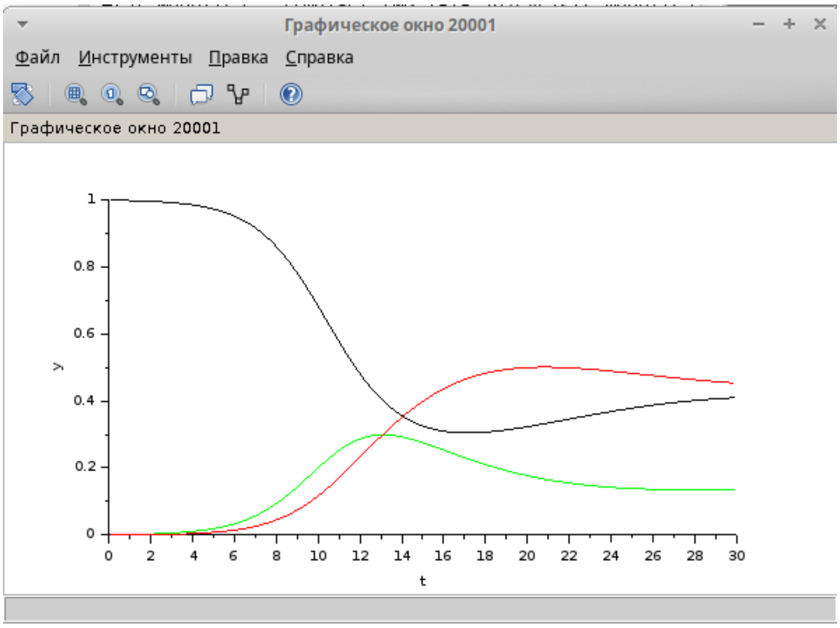

Рис. 4.6: График модели SIR с учетом демографических процессов

Реализуем модель SIR с учетом демографических процессов на OpenModelica.

```
  parameter Real I_0 = 0.001;
  parameter Real R_0 = 0;
  parameter Real S_0 = 0.999;
  parameter Real N = 1;
  parameter Real beta = 1;
  parameter Real nu = 0.3;
  parameter Real mu = 0.5;

  Real s(start=S_0);
  Real i(start=I_0);
  Real r(start=R_0);

equation
  der(s)=-beta*s*i + mu*i + mu*r;
  der(i)=beta*s*i-nu*i - mu*i;
```

```
der(r)=nu*i - mu*r;
```

Выполнив симуляцию, у меня почему-то не получается график, а остается только пустая сетка, хотя уравнение должно быть верным, а также не происходит 30 секундная симуляция - всё завершается за секунду, хотя я ввёл время симуляции равный 30, оно сбрасывется до 1.

Исходя из анализа графиков можно сказать, что чем выше значение любого из параметров, тем быстрее ситема достигает стационарного состояния. При высоком коэффициенте заражения система быстро проходит через пик развития эпидемии и достигает стационарного состояния

5 Вывод

В процессе выполнения лабораторной работы была построена модель SIR в xcos