Análisis de sensibilidad y teoría Dual

Análisis de sensibilidad

El algoritmo simplex proporciona información extra al encontrar a solución óptima, dando cuenta de la variabilidad de la solución optima ante cambios en los datos y está dividido en 2 grupos:

- **precios sombra:** asociados con el cambio en Z ante el aumento en una unidad del valor del lado derecho de las restricciones (recursos disponibles, demanda mínima, etc)

- **Costos reducidos:** asociados con los coeficientes de las variables de decisión en la función objetivo. Cuánto debo mejorar en el valor del coeficiente si la variable de decisión =0 en la solución óptima (no justifica darle valor, por ejemplo producir un producto especifico)

Precios sombra, uno por cada restricción

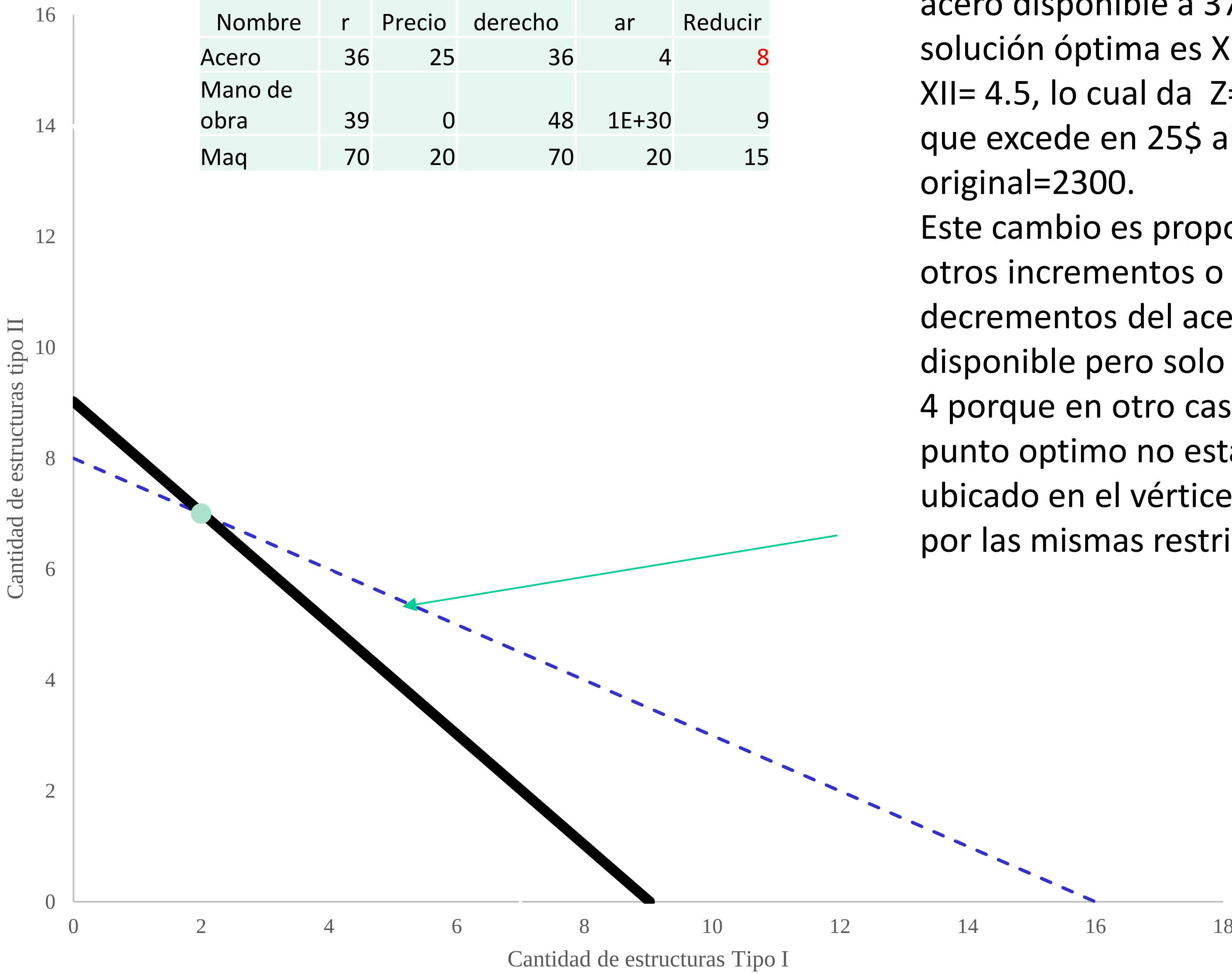
Un precio sombra puede ser positivo o negativo

- Si es positivo, Z **incrementa** cuando se incrementa en una unidad el valor del lado derecho de la restricción.

- Si es negativo, Z **decrementa** cuando se incrementa en una unidad el valor del lado derecho de la restricción.
- Si una restricción no es activa (en la solución optima el lado derecho no iguala el lado izquierdo, por ejemplo, no se consumen todos los recursos disponibles, o se excede la demanda mínima) el precio sombra es 0.
- Esto significa que así se consiga mas de ese recurso no se mejoran los beneficios Z, por ejemplo, o que si se aumenta la demanda los costos totales no se exceden

Precios sombra

Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
Acero	36	25	36	4	8
Mano de obra	39	0	48	1E+30	9
Maq	70	20	70	20	15



Si aumento la cantidad de acero disponible a 37, la nueva solución óptima es XI= 4.75 y XII= 4.5, lo cual da Z=2325$ que excede en 25$ al Z original=2300.

Este cambio es proporcional a otros incrementos o decrementos del acero disponible pero solo entre .8 y 4 porque en otro caso, ya el punto optimo no estaría ubicado en el vértice formado por las mismas restricciones

Respecto a los **precios sombra** de las restricciones. Se pueden interpretar así:

Maximizar beneficios

- **Restricción tipo <=, p.s positivos**

  lo que se puede interpretar como que si los recursos disponibles para producir aumentan, las ganancias aumentan.

- **Restricción es tipo >=** p.s. **negativos**,

  lo que se puede interpretar como que si la b aumenta (por ejemplo restricciones técnicas de mayor exigencia o mayor demanda), toca incurrir en mas costos y los beneficios disminuyen.

Minimizar costos

- **Restricción tipo <=, p.s negativos**

  lo que se puede interpretar como que si los recursos disponibles aumentan, los costos disminuyen porque puede haber mejor uso y eficiencia en la producción.

- **Restricción tipo >= p.s. positivos**

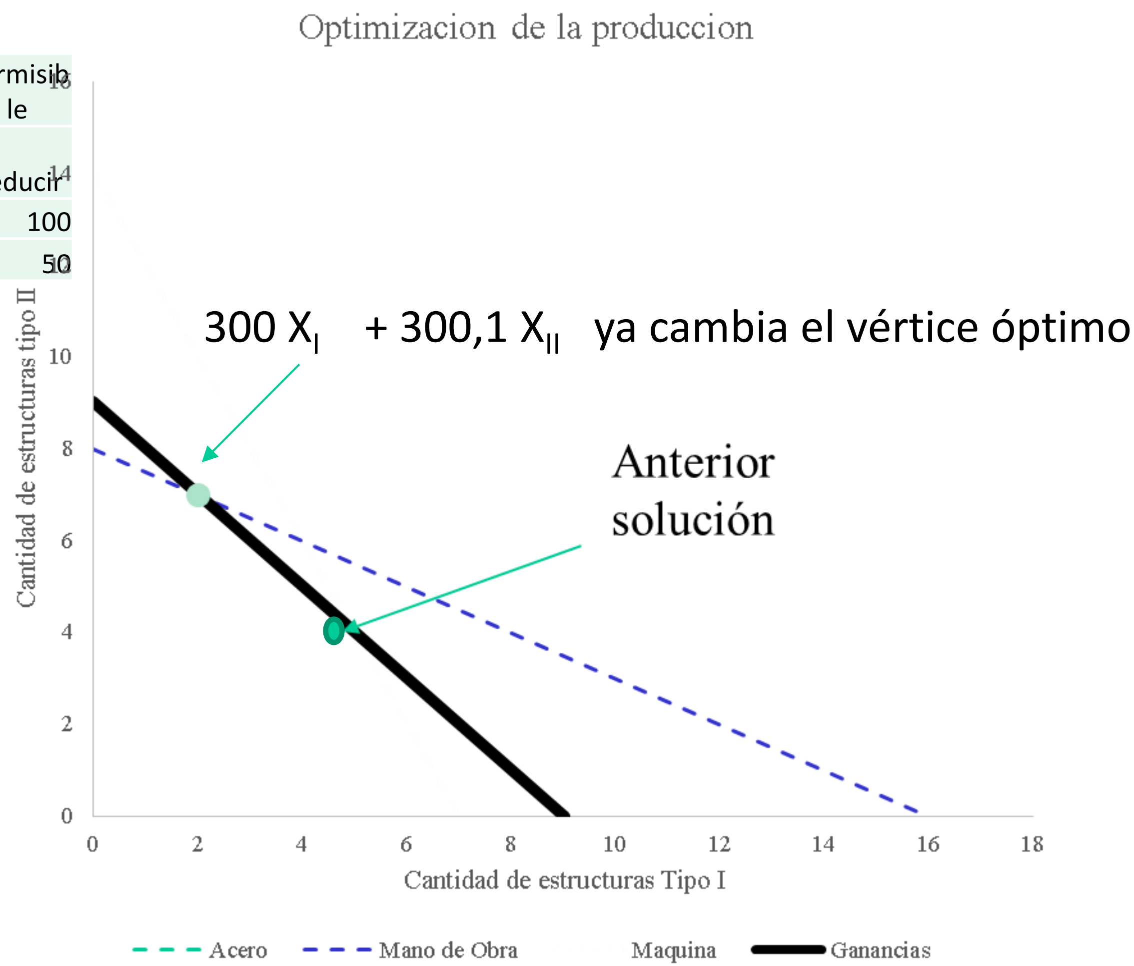
  lo que se puede interpretar como que si la b aumenta, toca incurrir en mas costos por lo que Z aumenta.

Costos reducidos o marginales

- Tasa de cambio de la función objetivo por una unidad de incremento en los limites mínimos de esa variable
-
- El coto reducido es 0 si la variable es básica, es decir, en la solución optima su valor es diferente de 0)

En el problema del acero, todas las variables son básicas ($\neq 0$ en la solución optima) así que sus costos reducidos son 0, es decir, siguen siendo básicas así cambie sus beneficios unitarios, pero esto es válido solo dentro de unos limites permitidos. Por ejemplo, c2 solo puede cambiar hasta 200+100=300$ para que este costos reducido sea válido.

Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
X vigasI	5	0	300	100	100
X vigasII	4	0	200	100	50



- Respecto a los cos**tos marginales** de las variables de decisión:

Maximizar, **cm positivos**

Si los costos marginales son cero es porque la variable salió básica (>0) en la solución óptima. Si los costos marginales son diferentes de cero es porque la variable salió No básica (=0) en la solución óptima (es decir, no justifica hacer de ella porque seguramente sus beneficios unitarios son bajos), así cm es la cantidad que tendría que aumentar el Ci (coeficiente de la Función objetivo) para que la variable Xi se vuelva diferente de 0 en la solución óptima.

Minimizar, cm negativos

Si los costos marginales son cero es porque la variable salió básica (>0) en la solución óptima. Si los costos marginales son diferentes de cero es porque la variable salió No básica (=0) en la solución óptima (es decir, no justifica hacer de ella porque seguramente sus costos unitarios son muy altos), así, cm es la cantidad que tendría que **disminuir** el Ci (coeficiente de la Función objetivo) para que la variable X**i** se vuelva diferente de 0 en la solución óptima

Ejemplo:

Acerías Paz del Río requiere carbón, hierro y mano de obra para producir tres tipos de acero. Los insumos (y los precios de venta) para una tonelada de cada tipo de acero se indican en la Tabla:

Acero	Carbón necesario (ton)	Hierro necesario (ton)	Mano de obra necesaria (h)	Precio de venta ($)
1	3	1	1	51
2	2	0	1	30
3	1	1	1	25

Se pueden comprar hasta 200 toneladas de carbón a un precio de US $10 por tonelada. Se pueden comprar hasta 60 toneladas de hierro a US $8 la tonelada y hasta 100 horas de mano de obra a US$5 por hora.

Sea X_i = las toneladas de acero tipo i fabricadas, i=1,2,3

Max $Z = (51 - 3*10 -1*8-1*5)X_1 + (30 - 2*10 -1*5)X_2 + (25 - 1*10 -1*8- 1*5)X_3$

$$= 8X_1 + 5X_2 + 2X_3$$

$$\begin{aligned} s.a. \quad & 3X_1 + 2X_2 + X_3 \le 200 \\ & X_1 + X_3 \le 60 \\ & X_1 + X_2 + X_3 \le 100 \\ & X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

El tablero óptimo es el siguiente:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	L.D.
	0	0	1	2.5	0.5	0	530
X2	0	1	-1	0,5	-1,5	0	10
X1	1	0	1	0	1	0	60
X6	0	0	1	-0,5	0,5	1	30

Una investigación de mercados ha encontrado que en el mediano plazo el acero tipo 3 tendrá una demanda significativa. Cuál es el precio mínimo por tonelada, qué haría más atractivo producirlo?

Costo reducido de X3

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	L.D.
	0	0	1	2.5	0.5	0	530
X2	0	1	-1	0,5	-1,5	0	10
X1	1	0	1	0	1	0	60
X6	0	0	1	-0,5	0,5	1	30

El costo reducido (o marginal) de X3 es 1

es decir el coeficiente

C_3=*(25 - 1*10 -1*8- 1*5) = 2* debe aumentar como mínimo en 1 para que sea rentable fabricar acero tipo 3.

Por lo que el precio de venta debe aumentar como mínimo a $26/tonelada o algunos de los costos rebajar en $1/tonelada

Precio sombra de la restricción
del recurso carbón

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	L.D.
	0	0	1	2.5	0.5	0	530
X2	0	1	-1	0,5	-1,5	0	10
X1	1	0	1	0	1	0	60
X6	0	0	1	-0,5	0,5	1	30

Si aumento en una tonelada mas del recurso disponible del carbón, las ganancias netas aumentaran en 2,5$. Como cada tonelada de carbón vale $10 no justifica comprar más.

RESUMEN	RESTRICCIÓN	VARIABLE
	Precio sombra	**Costo reducido**
MINIMIZAR	Tipo ≤, son negativos Si los recursos disponibles (b) aumentan, los costos disminuyen debido a un mejor uso y eficiencia de la producción, la Z disminuye.	Salen positivos SI = 0, → Var. Básica SI ≠ 0, → Var. No Básica (no justifica producir) |valor| → cantidad que tendría que disminuir el coeficiente de la variable en la F.O. para que la variable se vuelva básica.
	Tipo ≥, son positivos, si los recursos disponibles (b) aumentan, los costos aumentan debido a un mal uso y deficiencia de la producción, la Z aumenta.	
MAXIMIZAR	Tipo ≤, son positivos Si los recursos disponibles (b) aumentan, la Z aumenta.	Salen negativos SI = 0, → Var. Básica SI ≠ 0, → Var. No Básica (no justifica producir) |valor| → cantidad que tendría que aumentar el coeficiente de la variable en la F.O. para que la variable se vuelva básica.
	Tipo ≥, son negativos, si los recursos disponibles (b) aumentan, la Z disminuye.	