Programación Estocástica

Profesora: Patricia Jaramillo A.

Optimización bajo Incertidumbre

Cuando se tiene un problema de optimización en el que se desconocen los valores exactos de algunos de los parámetros es necesario enfrentarlo desde otras ópticas diferentes a la optimización determinística.

En determinadas circunstancias, y en base a la información disponible, es posible "sustituir" estos valores por:

- Una estimación de los mismos (Valor esperado= Optimización clásica deterministica)
- tratar estos parámetros como variables aleatorias (Programación estocástica) .

Programación Estocástica

La Programación estocástica PE es la resolución de problemas de programación matemática en los que algunos o todos los parámetros se consideran variables aleatorias pues se conoce la distribución de probabilidad asociada a ellos, suponiendo que son independientes a la solución.

En PE:

Cada posible futuro tendrá un óptimo pero solo se debe escoger uno de ellos.

La solución óptima **x** es única y deterministica

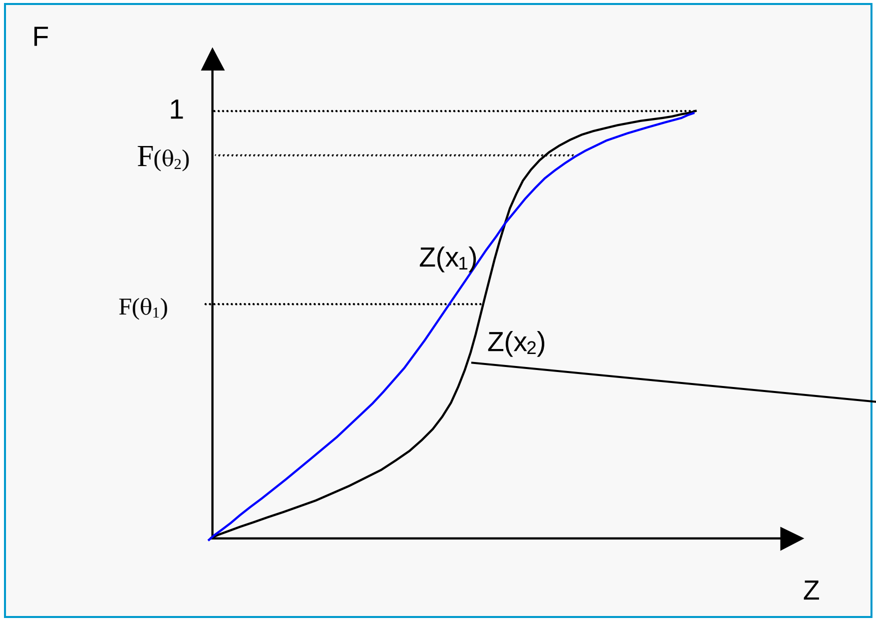
Pero será factible para la mayoría de los posibles escenarios futuros.

Aunque para otros escenarios, la decisión adoptada puede que no sea factible una vez, en el futuro, se resuelvaa la incertidumbre o que, aún siendo factible, no sea óptima.

Si los parámetros de la función objetivo son aleatorios, Z también es una variable aleatoria, entonces, se puede tener que, para diferentes escenarios futuros por ejemplo θ_1 y θ_2 :

$$Z(x_1, \theta_1) < Z(x_2, \theta_1) \quad \text{y} \quad Z(x_1, \theta_2) > Z(x_2, \theta_2).$$

Por tanto, en un problema de programación estocástica **no existe un vector x que sea óptimo para todas las posibles realizaciones de la variable aleatoria.**



Si se esta maximizando, la mejor solución es la que tiene curva mas inferior

PE Explícita vrs Implícita

Explícita	Implícita
• El modelo estocástico está embebido en el problema de optimización • Optimiza un problema en el que en la formulación se integran explícitamente las funciones de distribución de probabilidad de las variables aleatorias.	• Solución iterativa mediante Simulación Montecarlo • Puede usarse *Optquest* (Crystal Ball) o *Evolver* (@RISK) (usan metaheuristicos como AG)

Programación Estocástica Explícita

Resuelve el siguiente problema:

Maximizar $\tilde{Z}(x,\theta)$

Sujeto a: $\tilde{g}_i(x,\theta) \leq 0,\ i = 1,\ldots,m$

$x \in D$

Donde algunos parámetros de la función objetivo Z y de las restricciones g_i son aleatorios

D son restricciones deterministicas.

Programación Estocástica Explícita

Transforma el problema estocástico en uno determinista, a partir de las características estocásticas de la función objetivo y de las restricciones

Restricciones probabilísticas (equivalente determinista).

Se exige que la solución del problema sea factible al menos con una determinada probabilidad dada por el decisor.

El debe asignar probabilidades α_i (i = 1, 2, ..., m) que determinan la probabilidad con está dispuesto a asumir para que se verifique cada restricción. La formulación determinista del problema queda así:

$$P(g_i(X,\theta) \leq 0) = \geq \alpha_i, i = 1,\ldots,m$$

En este caso, al fijar una probabilidad α_i se considera que el riesgo admisible en el problema para la restricción i-ésima es: (1 - α_i)

SEGURIDAD vrs BENEFICIOS

Función objetivo estocástico- (Equivalente determinista)

Existen distintos criterios para llevar a cabo la transformación del objetivo estocástico del problema en uno determinista.

La elección de uno u otro criterio dependerá en general de la situación real que estemos modelizando y de las preferencias del decisor.

Criterios:

La solución x^* puede valorarse según algunos atributos de su desempeño respecto a Z, como con:

a. **Maximizar el Valor esperado**

b. **Minimizar la Varianza**

c. **MaxiMin** Entre mayor valor $Z(x^*)$,tal que $P(Z<Z(x^*))\approx 0$, mejor solución.

Criterios:

c. **MaxiMax.** Entre mayor valor $Z(x^*)$, tal que $P(Z< Z(x^*))$, ≈ 1, mejor solución.

d. **β-Robustez:** Dado un valor mínimo de beneficios que satisfacen al decisor β, entre mayor $P(Z(x^*) \geq \beta)$ mejor la solución

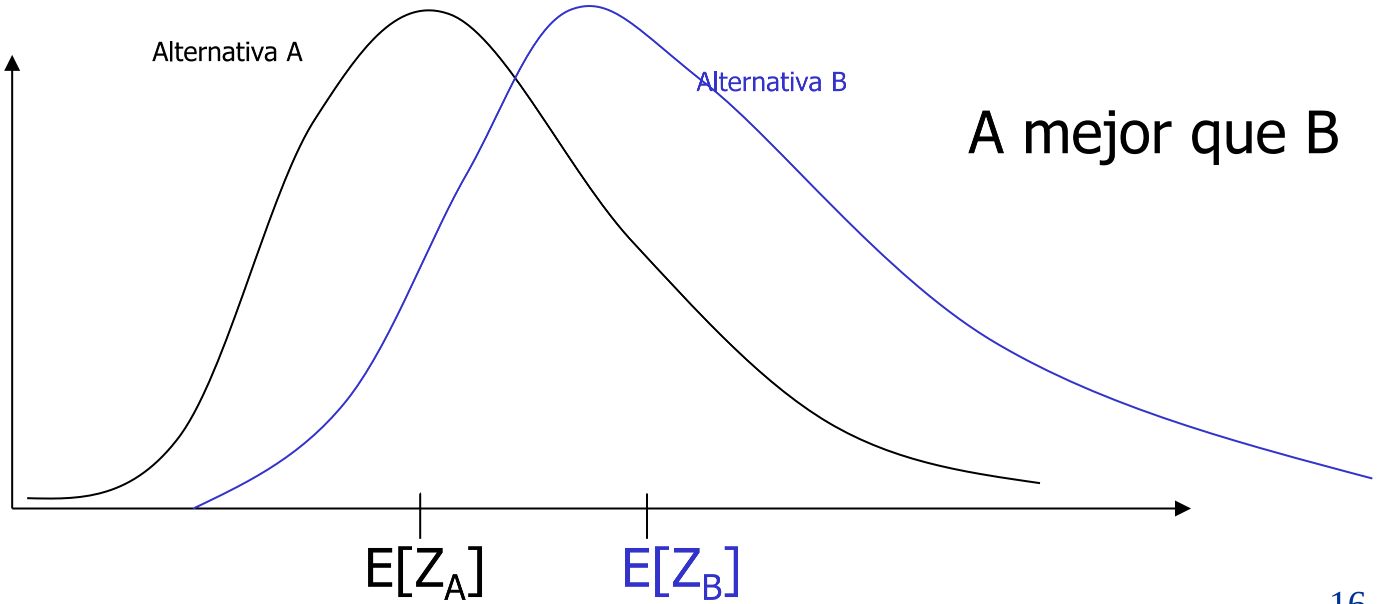
e. ***α-beneficios:*** *Dado una probabilidad α, entre mayor* valor $Z(x^*)$, tal que $P(Z \geq Z(x^*)) = (1-\alpha)$ mejor la solución.

ENTRE OTROS.......

Para reemplazar la función objetivo en una función determinística se destacan los siguientes criterios:

Criterio del máximo valor esperado (modelo *E)*:

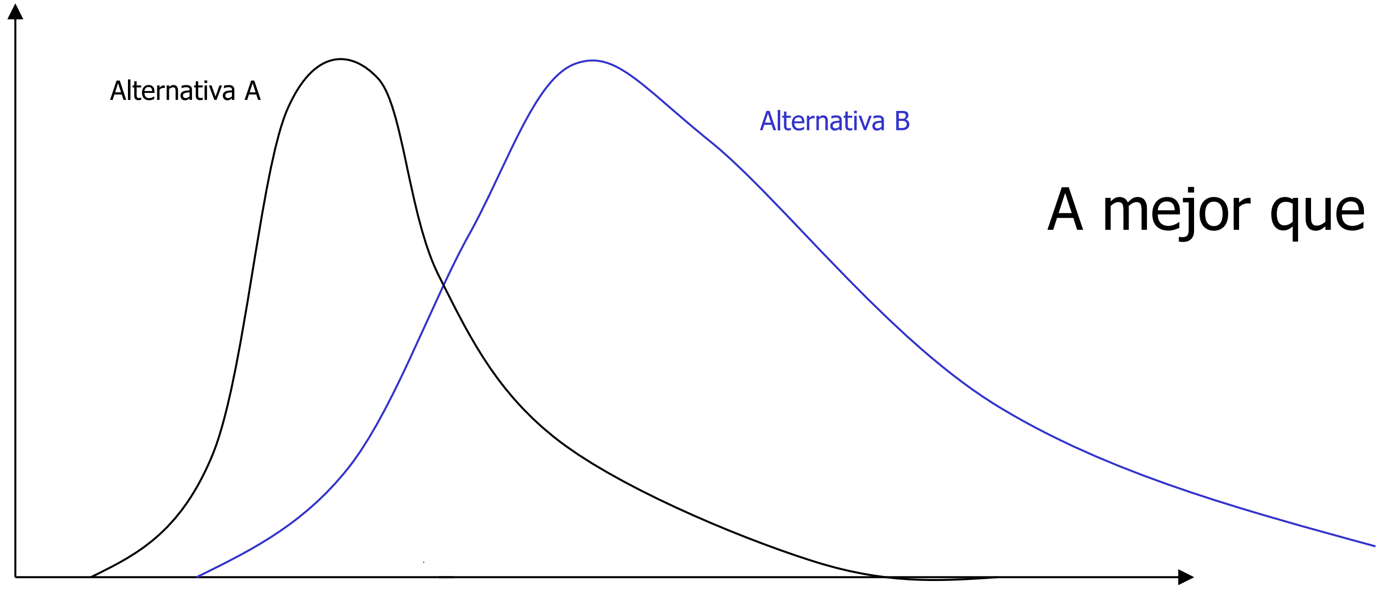
Maximizar $$E\{\tilde{Z}(x,\theta)\} = \int_{\varphi} Z(x,t)\,dF_{Z(x)}(t)$$



A mejor que B

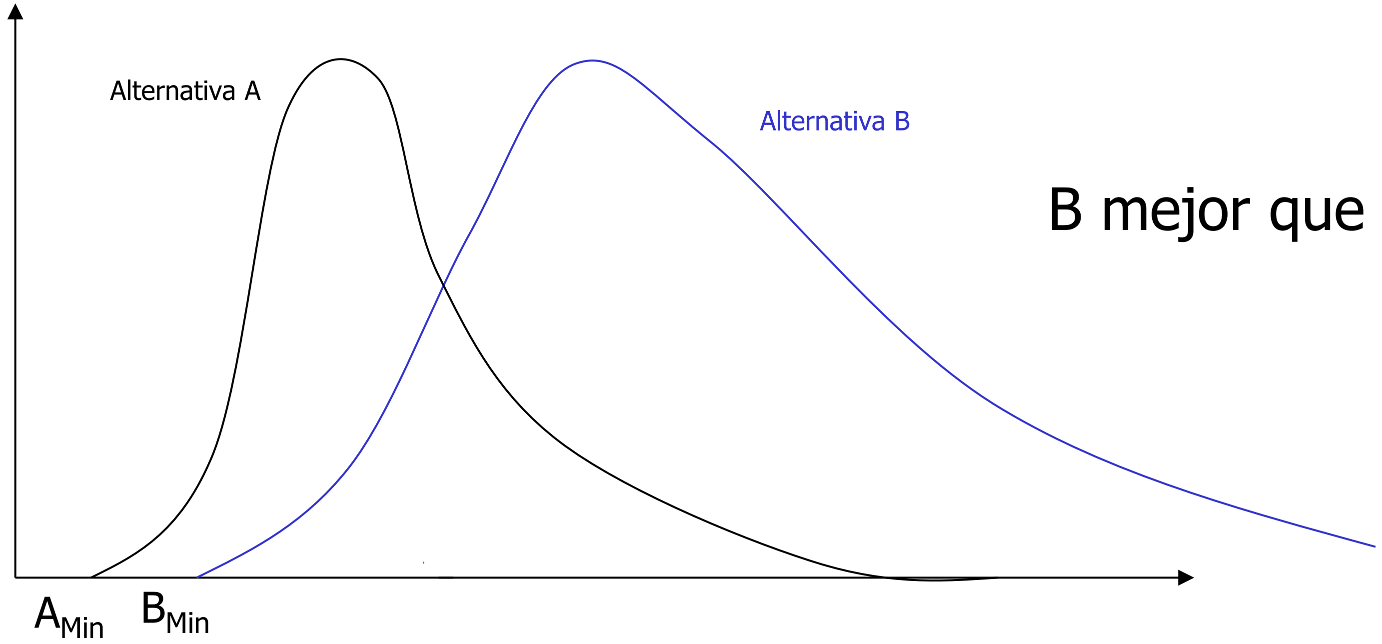
Criterio mínima varianza (modelo V)

Minimizar $$Var\{\tilde{Z}(x,\theta)\} = E\{(\tilde{Z}(x,\theta)^2\} - \left(E\{\tilde{Z}(x,\theta)\}\right)^2$$



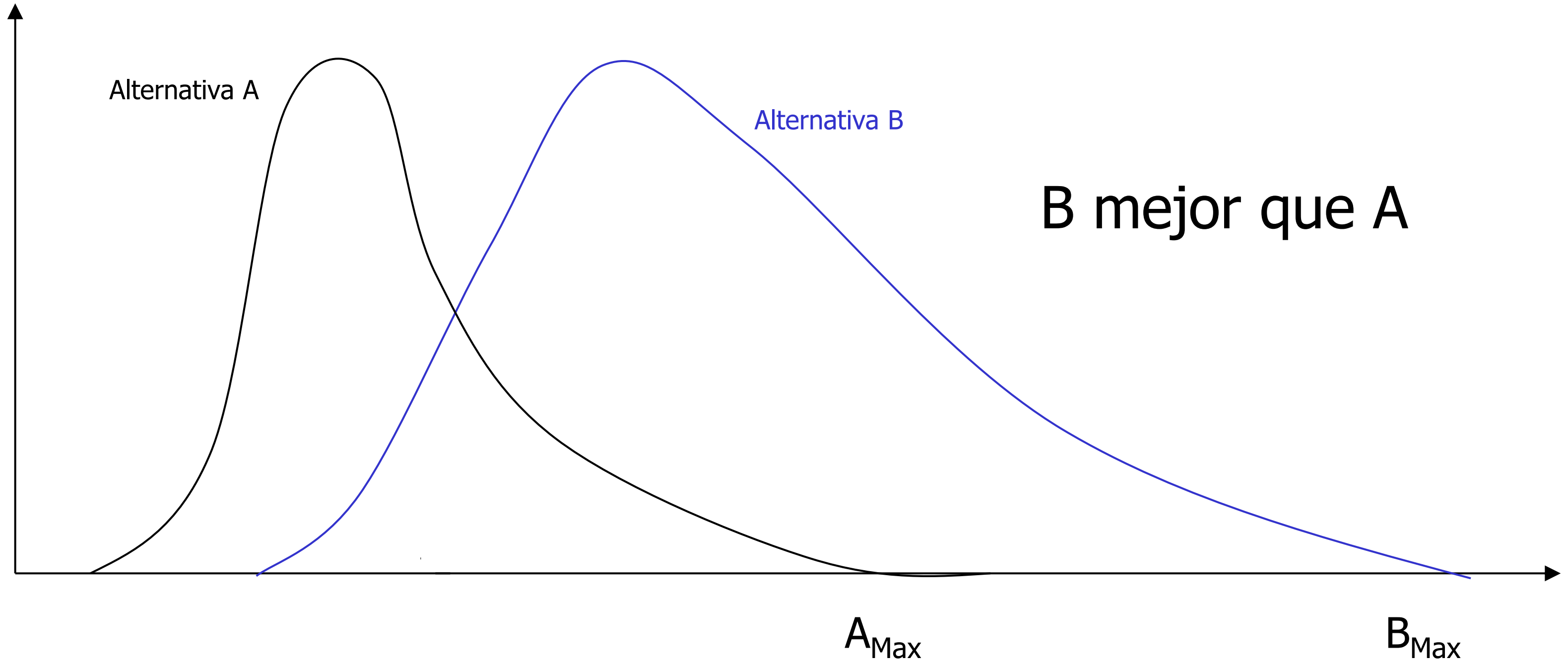
A mejor que B

Criterio Maximin



B mejor que A

Criterio Maximax



B mejor que A

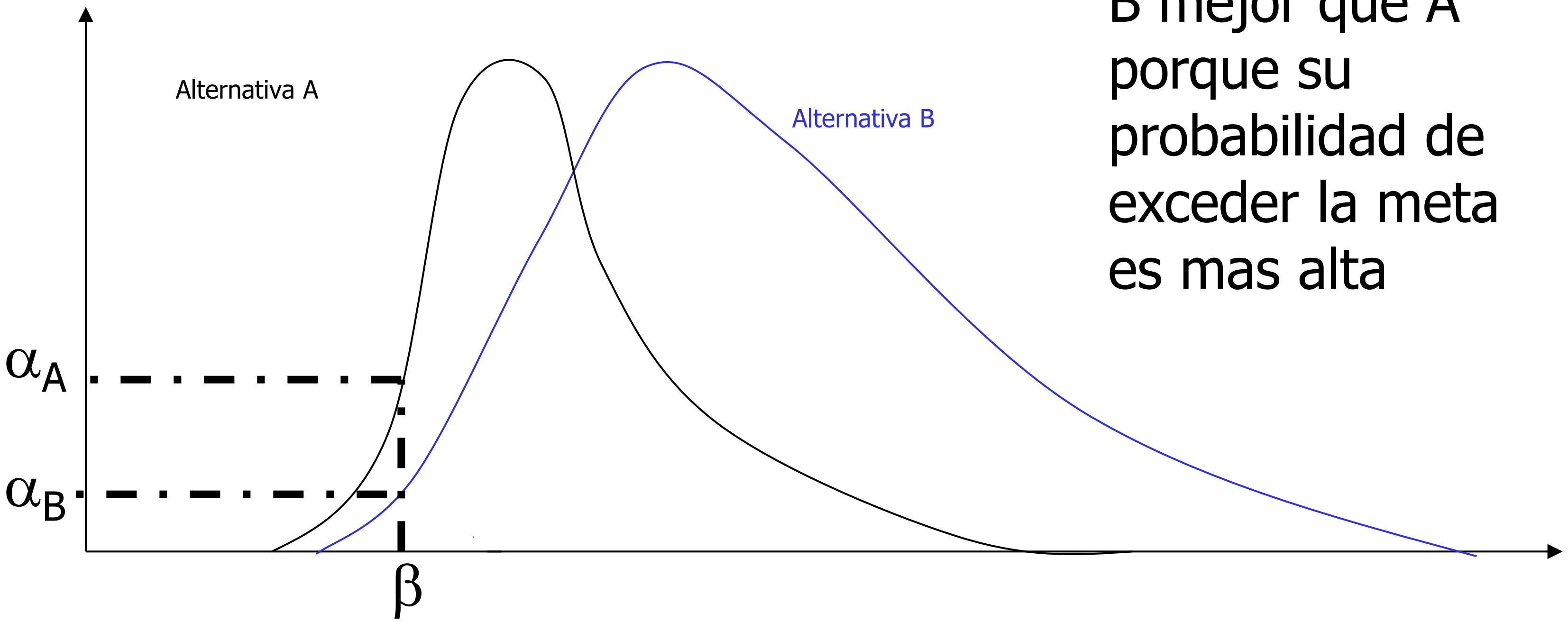
Mínimo riesgo o criterio del nivel de satisfacción o β-*Robustez*

El decisor fija un nivel mínimo a alcanzar para el objetivo, β, al que se denomina nivel de satisfacción, y se **maximiza la probabilidad** de que el objetivo sea mayor o igual que ese nivel:

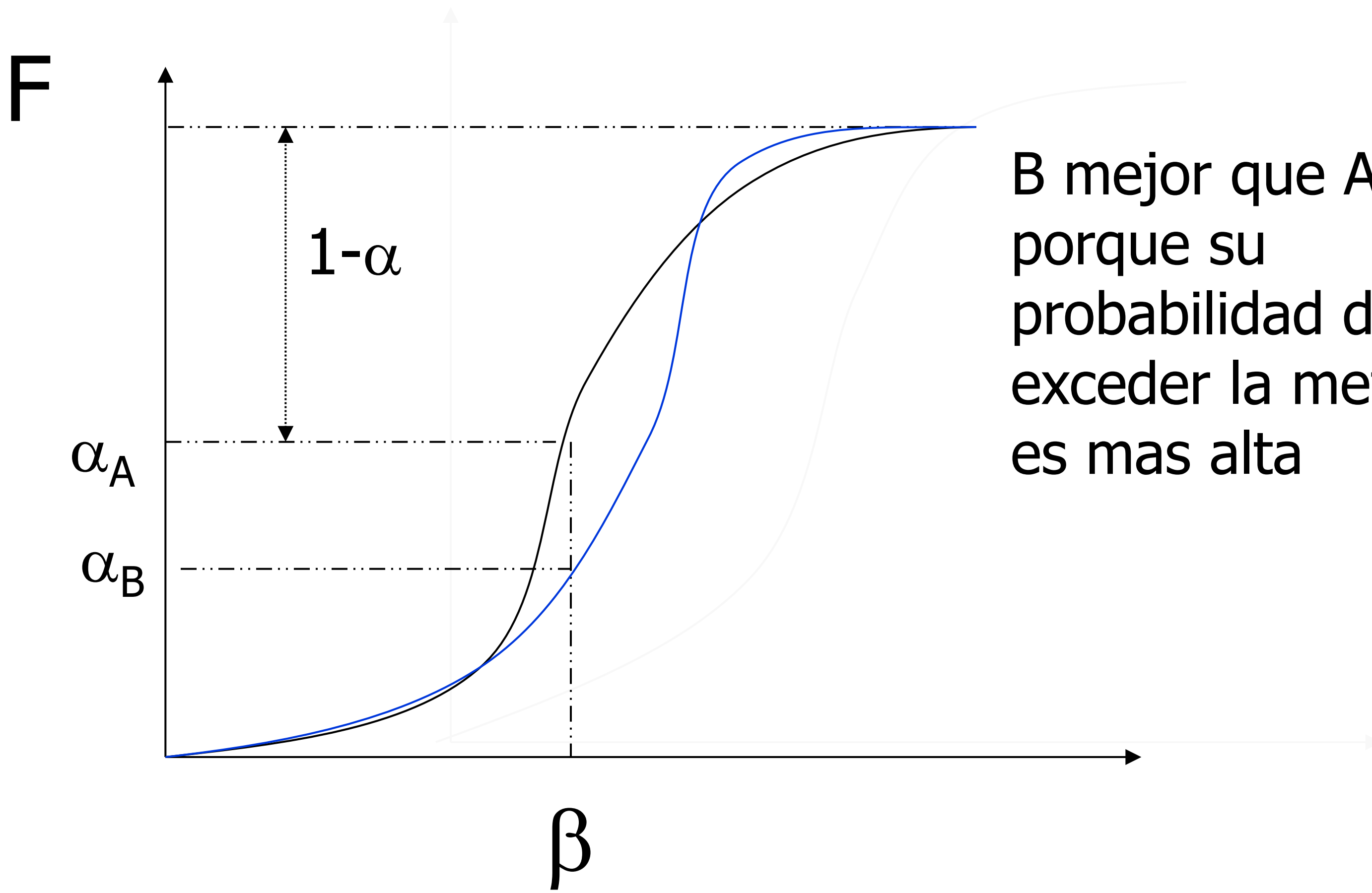
Maximizar $$P\{\tilde{Z}(x,\theta) \geq \beta\} = \int_{\Theta} dF_{Z(x)}(t)$$

Donde: $$\Theta = \{t : Z(x,t) \geq \beta\}$$

Criterio β-*Robustez*



B mejor que A porque su probabilidad de exceder la meta es mas alta



B mejor que A porque su probabilidad de exceder la meta es mas alta

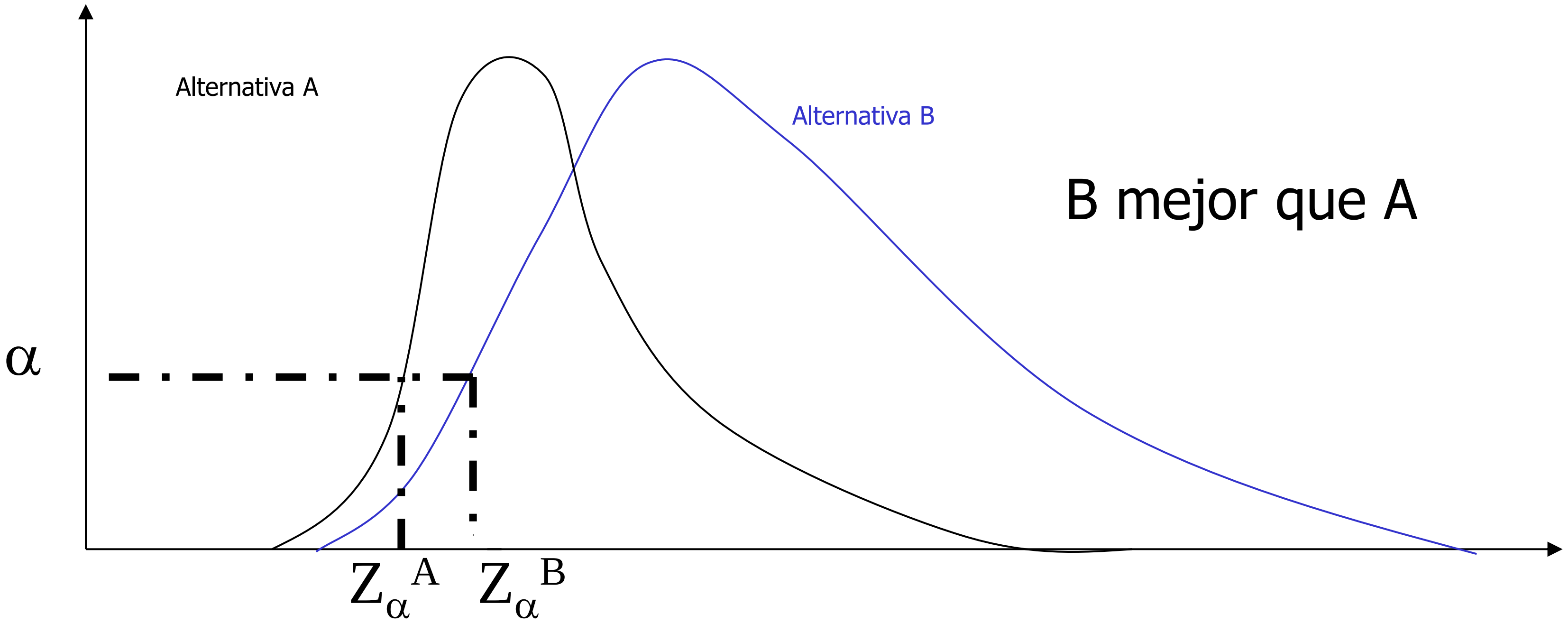
Criterio de criterio α-fractil o α-beneficios.

Maximizar β

s. a. $$P\{\tilde{Z}(x,\theta) \geq \beta\} \geq (1-\alpha)$$

donde $(1-\alpha)$ es probabilidad de excedencia y es fijada por el decisor.

Criterio α-beneficios



Equivalente determinístico para variables que siguen funciones normales

Si tengo una función $Z(\tilde{\mathbf{c}}, x)$ donde $\tilde{c}_i \sim N\left(E[\tilde{c}_i], \mathrm{var}[\tilde{c}_i]\right)$

Y deseo que se cumpla que:

$$P\{\tilde{Z}(\tilde{\mathbf{c}}, x) \geq \beta\} \geq (1-\alpha)$$

Esto es equivalente a

$$\boxed{E[Z(\tilde{\mathbf{c}}, x)] + K_\alpha \left(Var[Z(\tilde{\mathbf{c}}, x)]\right)^{1/2} \geq \beta}$$

Donde $\mathbf{K}_\alpha$ es un valor normal estándar tal que:

$\Phi(\mathbf{K}_\alpha) = \alpha$

y Φ representa la función de distribución acumulativa normal

Este equivalente determinístico se obtiene de:

$$P\{\tilde{Z} \geq \beta\} \geq (1-\alpha)$$

Normalizando: $$P\{\frac{\tilde{Z}-\mu}{\sigma} \geq \frac{\beta-\mu}{\sigma}\} \geq (1-\alpha)$$

$$K_\alpha \geq \frac{\beta-\mu}{\sigma}$$

Donde **K**α es un valor normal estándar tal que:
$\Phi($ **K**α $) = \alpha$
y Φ representa la función de distribución acumulativa normal

$$\mu + K_\alpha \sigma \geq \beta$$

Si Z es lineal, tal que: $Z(\tilde{\mathbf{c}}, x) = \sum \tilde{c}_j x_j$

El equivalente deterministico es:

$$\boxed{\sum E\left[c_j\right] x_j + K_\alpha \left(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}\right)^{1/2} \geq \beta}$$

Donde **A** es la matriz de varianza-covarianzas de los coeficientes $\tilde{c}_i$

Se podria entonces usar la siguientes funciones objetivo:

Criterio del máximo valor esperado (modelo *E*):

Maximizar $$\sum E\left[c_j\right]x_j$$

Criterio mínima varianza (modelo V)

Minimizar $$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$$

Mínimo riesgo:

Dado β

Minimizar K_α

Sujeto a: $$\sum E\left[c_j\right]x_j + K_\alpha \left(\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x}\right)^{1/2} \geq \beta$$

Criterio de criterio α-fractil:

Dado α

Maximizar β

Sujeto a: $$\sum E\left[c_j\right]x_j + K_\alpha \left(\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x}\right)^{1/2} \geq \beta$$

Ejemplo

- Una empresa se dedica a la fabricación de determinados productos que identificaremos por letras A y B. La elaboración de estos productos en el próximo periodo de programación está sometido a limitaciones en la disponibilidad de las 2 materias primas principalmente utilizadas que denominaremos X y Y.
- Se desea maximizar los beneficios económicos.
- Algunos de los consumos unitarios de materia prima y beneficios unitarios son variables aleatorias.

Los datos son los siguientes:

	Producto A	Producto B	Disponibilidad
Beneficios	N(4,2)	N(5,4)	
Consumo Materia prima X	1	2.5	2800
Consumo Materia prima Y	N(2,0.8)	N(1,0.7)	3200

Si consideramos el problema como deterministico:

Maximizar $Z = 4X_A + 5X_B$

Sujeto a $X_A + 2.5X_B \leq 2800$

$2X_A + X_B \leq 3200$

$X_A , X_B \geq 0$

Cuya solución es X_A= 1300, X_B= 600, Z=8200

Pero si lo vemos desde el punto de vista estocástico, suponga que el decisor desea:

- Maximizar la probabilidad de que la función objetivo exceda $8600
- Que la restricción estocástica se cumpla a cabalidad (es decir no quiere correr ningún riesgo)

$$\text{Minimizar} \quad K$$

$$\text{Sujeto a} \quad 4X_A + 5X_B + K(2X_A^2+4X_B^2)^{0.5} \geq 8600$$

$$X_A + 2.5X_B \leq 2800$$

$$P(R_2(X) \leq 0) \geq 0.99 \Leftrightarrow 2X_A+X_B+-3200+2.326(0.8X_A^2+0.7X_B^2)^{0.5} \leq 0$$

$$X_A , X_B \geq 0$$

Donde $R_2(x)$ es la restricción 2 pasando la disponibilidad de materia prima Y al lado izquierdo

Y Φ(**2.326**) =0.99

Cuya solución es X_A= 570, X_B= 874, K=1.011 $\Leftrightarrow$ α*=0.844*, 1- α*=0,156* *(muy baja)*