Problemas no lineales

Un formulador siempre trata de que la función objetivo y las restricciones sean lineales porque es mucho más fácil solucionar el problema: sin embargo, con frecuencia es imposible hacerlo sin caer en excesivas simplificaciones.

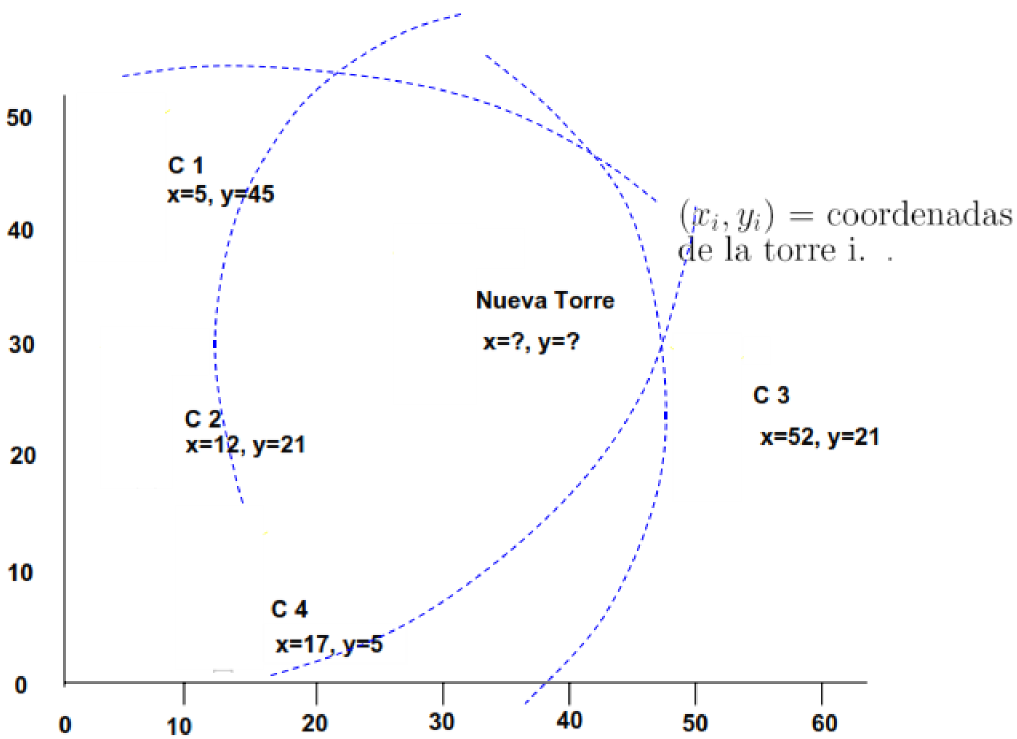
Algunos casos típicos:

- la demanda cambia según el precio
- hay elementos geométricos en juego (área, volumen)
- Presencia de estocásticidad
- Presencia de relaciones físicas, químicas, termodinámicas, etc
- Representación de fenómenos sociales (difusión, etc)

Ejemplo: Localización de torre de telefonía móvil

Una empresa de telefonía móvil suministra servicio a varias ciudades. – Quiere mejorar su servicio instalando una nueva torre. – La nueva torre tendrá un radio de transmisión de 40 km y aprovechará las torres existentes en las cuatro ciudades.

Variables de decisión; coordenadas x,y de la torre.



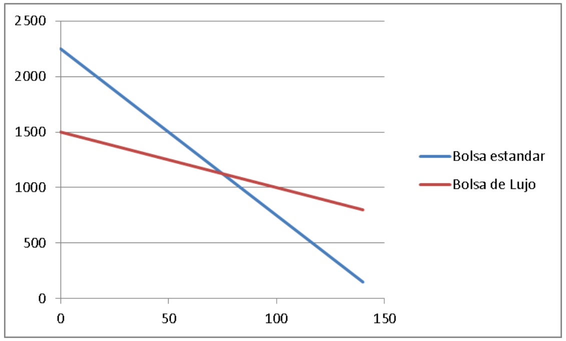
Minimizar $\sum_i (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2$

Sujeto a:
$$(5-x)^2 + (45-y)^2 \le 40^2$$
$$(12-x)^2 + (21-y)^2 \le 40^2$$
$$(17-x)^2 + (5-y)^2 \le 40^2$$
$$(52-x)^2 + (21-y)^2 \le 40^2$$
$$x, y \ge 0$$

Ejemplo: demanda sensible

- Una empresa hace bolsas de golf: dependiendo del precio del producto existe una relación inversa entre precio y demanda. Con base en datos del pasado, se determinó que si P_s es el precio de la bolsa estándar y P_d de la de lujo, las demandas S y D respectivamente son:

$$S=2250 - 15P_S$$
$$D=1500-5P_D$$



El costo de producir una bolsa estándar es de \$70 y la de lujo es de \$150

Fuente: Camm, J. D., Cochran, J. J., Fry, M. J., Ohlmann, J. W., Anderson, D. R., Sweeney, D., & Williams, T. (2015). *Essentials of Business Analytics*.

Los beneficios por producir y vender S bolsas estándar son:

$$P_S S - 70S = S(P_s - 70)$$

Como:

$$P_S = 2250/15 - (1/15)S = 150 - (1/15)S$$

Entonces:

$$S(150 - (1/15)S - 70) = 80S - (1/15)S^2$$

Similarmente los beneficios por la de lujo son:

$$D(1500/5 - (1/5)D - 150) = 150D - (1/5)D^2$$

Las ganancias totales que se desean maximizar son:

$$\boxed{150D - (1/5)D^2 + 80S - (1/15)S^2}$$

En el ejemplo se tienen limites en tiempos disponibles en los departamentos de corte y teñido, costura, terminado e inspección y empaquetamiento

	Tiempo de producción (horas/bolsa)	
Departamento	**Estándar**	**De lujo**
Corte y teñido	7/10	1
Costura	1/2	15/6
Terminado	1	2/3
Inspección y empaquetamiento	1/10	1/4

Las restricciones son:

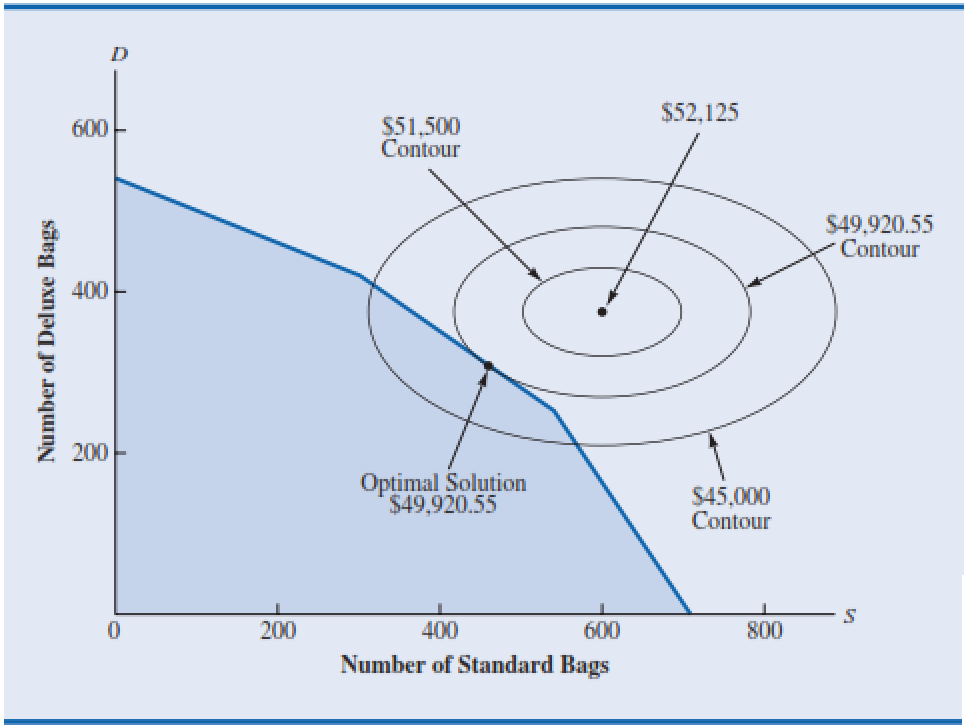
$$(7/10)S + D \leq 630$$

$$(1/2)S + (5/6)D \leq 600$$

$$S + (2/3)D \leq 708$$

$$(1/10)S + (1/4)D \leq 135$$

$$S, D \geq 0$$



Fuente: Camm, J. D., Cochran, J. J., Fry, M. J., Ohlmann, J. W., Anderson, D. R., Sweeney, D., & Williams, T. (2015). *Essentials of Business Analytics*.

Solución óptima:

459.70 Bolsas estándar
308.20 Bolsas de lujo
Ganancias máximas de $49920

Ejemplo: Precio de última hora en un hotel

IHG (intercontinental hotel Group) tiene alrededor de 4500 hoteles en 100 países con 650000 habitaciones.

Ellos ofrecen precios dinámicos de sus habitaciones dependiendo del día de llegada y del número de días que se quede hospedado (LOS length of stay)

Se requiere un modelo para definir el precio de oferta tal que se maximice los beneficios netos sabiendo que ambas, demanda y beneficios son un función de precio dinámico.

Basado en Kosuhik D, J.A. Higie and C. Eister. Reatil Optimization at InterContinental Hotels group. Interface, 42 (1). 2012 pp 45-47

Revenue management (RM) es termino usado para describir analítica para este problema.

IHG uso RM para determinar sus precios incluyendo en el modelo los precios de los competidores que busca en internet. RM comenzó con la industria de aeronáutica y ahora se aplica a hoteles, renta de carros, restaurantes, teatros, etc.

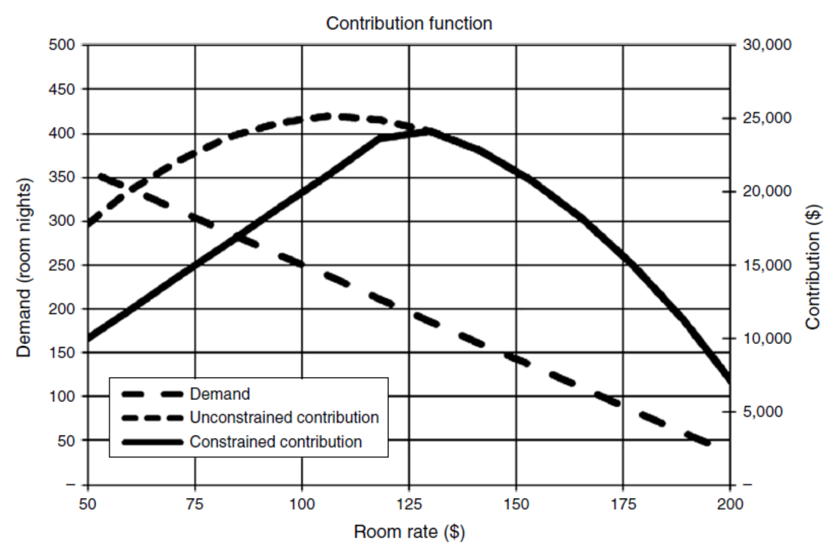
RM significa no vender una habitación hoy a un precio menor si mañana lo puedo vender a un precio mayor; o vender uno a mas bajo precio hoy si mañana no habrá suficiente demanda.

RM debe predecir la demanda con base en el pasado.

Ellos cuentan con varios modelos:

- Pronóstico de demanda elástica y sensible al precio; Variables de control: zona, empresa hotelera, tamaño y grupo de negocios, tipo de hotel.
- Gestión de inventarios: capacidad disponible
- Algoritmo de precio competitivo de compra: analizan los precios de los competidores
- **Modelo de optimización del precio**

la demanda en función del precio en el dia a, se basa en datos históricos: precios, demandas y precios de competidores (de solo los hoteles mas parecidos)



Koushik, Higbie, and Eister: *Retail Price Optimization at IHG*
Interfaces 42(1), pp. 45–57, © 2012 INFORMS

El Modelo de optimización del precio es así:

Variable de decisión (precios)

- R_{ad}: precio a ofrecer por una habitacion para la fecha de llegada a y estadia (LOS) d.

Datos

- $D_{ad} = f(R_{ad}, CR_{ad})$: funcion de demanda estimada para la fecha de llegada a y LOS d: depende del precio que se oferte Rad y del precio de los competidores (CRad).

- L: Conjunto de todos los dias l con capacidad disponible.

- $cost_{ad}$: Costo de de la habitación para la fecha de llegada a y LOS d.

- C(l): Conjunto de todas los paquetes de fechas de llegada y LOS que incluyen al dia l

- C_l: capacidad disponible de estadia en la fecha l.

Formulación

Maximizar beneficios $$\sum_{ad} D_{ad}\left(R_{ad} - \cos t_{ad}\right)$$

Donde $$D_{ad} = f\left(R_{ad}, CR_{ad}\right)$$

Sujeto a:

$$\sum_{ad \in C(l)} D_{ad} \leq C_l \quad \forall l \in L$$

$$R_{ad} \geq 0, \quad \forall a, d$$

Ejemplo: Pronóstico de adopción de un nuevo producto

El modelo más usado de adopción de un nuevo producto fue desarrollado por Frank Bass que a partir de datos históricos de productos similares, ajusta una función que puede usar en el nuevo producto:

Una persona adopta un nuevo producto debido a interés propio o influencia de otras personas que ya han adoptado el producto.

La función tiene 3 parámetros a estimar:

m= número potencial de personas (o ganancias de) que adoptan el nuevo producto

q= coeficiente de imitación que se refiere a la adopción debido a un potencial adoptador influenciado por alguien que ya ha adoptado realmente el producto. Mide el voz a voz o el efecto de los medios sociales .

p= coeficiente de innovación que se refiere a la adopción, asumiendo no influencia por alguien que ha comprado (adoptador) el producto. Propio interés en la innovación.

Los datos históricos cuentan con:

C_t número de personas que han adoptado el producto en el tiempo t.

Es importante tener los datos de un ciclo de adopción completo.

Ademas:

$m-c_{t-1}$ es el número de adoptadores potenciales que aun pueden adoptar el producto en el tiempo t

En t, el número de personas que adoptan por imitación el producto (voz a voz) es:

$$q\left(C_{t-1}/m\right)$$

Donde C_{t-1}/m es fracción de personas que adopta el producto en t-1

La probabilidad de que se de una nueva adopción es la suma de la probabilidad de adopción debido a imitación + debido a innovación:

$$\left(p+q\left(C_{t-1}/m\right)\right)$$

F_t = pronostico de nuevos adoptadores en t:

$$F_t=\left(p+q\left(C_{t-1}/m\right)\right)\left(m-C_{t-1}\right)$$

Los parámetros m, p y q se ajustan con un modelo PNL que minimice el error entre los pronósticos y los datos históricos.

Se desea ajustar un modelo (calibrar los parámetros m, p y q) tal que se minimice el error entre los datos históricos y los pronósticos del modelo.

$$Min \quad \sum_t E^2{}_t$$

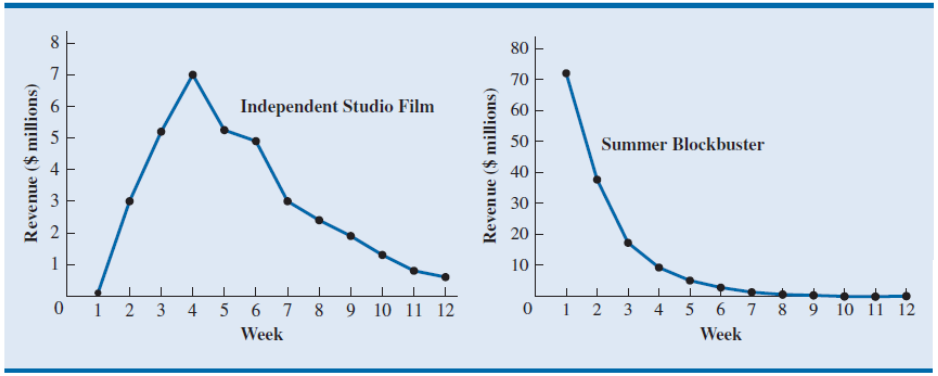
$$s.a. \quad F_t = \left(p + q\left({}^{C_{t-1}}\!/\!_{m} \right) \right)\left(m - C_{t-1} \right) \qquad \forall t$$

$$E_t = F_t - C_t$$

$$m, p, q \quad n.r.s$$

Ejemplo:

- Se cuenta con los datos de las ganancias que obtuvieron, en las primeras 12 semanas, 2 películas diferentes: una de cine independiente y otra de acción.
- En la película de cine independiente suele suceder que el voz a voz es mas importante, así la imitación domina a la innovación ($q>p$)
- En la película de acción el factor de innovación suele dominar al de imitación $q<p$



Fuente: Camm, J. D., Cochran, J. J., Fry, M. J., Ohlmann, J. W., Anderson, D. R., Sweeney, D., & Williams, T. (2015). *Essentials of Business Analytics*.

Ganancias por la película independiente en millones de dólares

Semana	Ganancias St	Acumulado Ct
1	0.10	0.10
2	3.00	3.10
3	5.20	8.30
4	7.00	15.30
5	5.25	20.55
6	4.90	25.45
7	3.00	28.45
8	2.40	30.85
9	1.90	32.75
10	1.30	34.05
11	0.80	34.85
12	0.60	35.45

$$Min \quad {E^2}_1 + {E^2}_2 + \ldots + {E^2}_{12}$$

$$s.a. \quad F_1 = p(m)$$

$$F_2 = \left(p + q\left(0.10\Big/_m\right)\right)(m - 0.10)$$

$$\ldots$$

$$F_{12} = \left(p + q(34.85/m)\right)(m - 34.85)$$

$$E_1 = F_1 - 0.10$$

$$E_2 = F_2 - 3.00$$

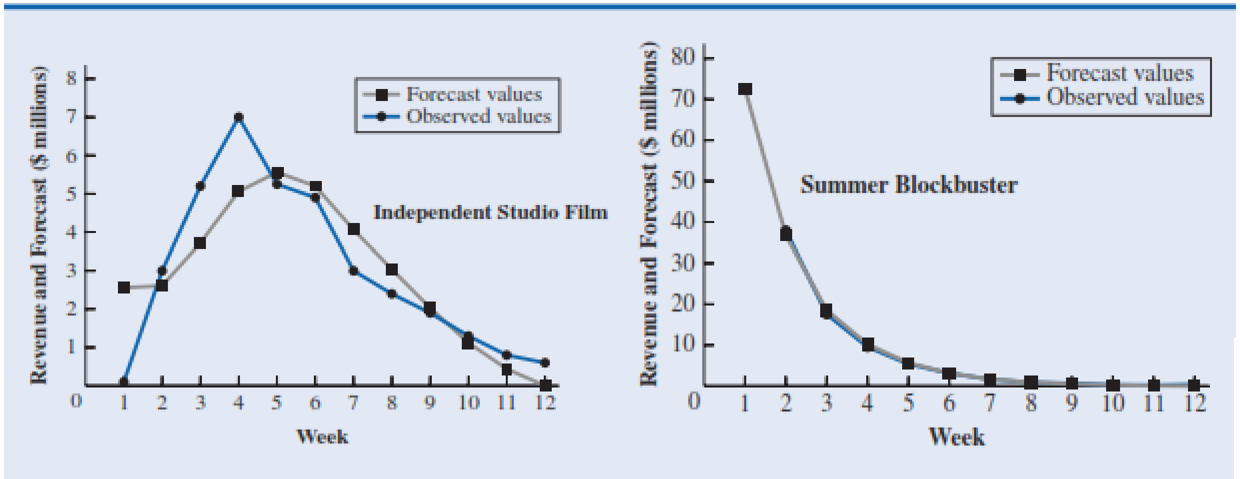
$$\ldots$$

$$E_{12} = F_{11} - 0.60$$

$$m, p, q \quad n.r.s$$

Cuya solución es:

Valores óptimos	Película independiente	Película de acción
p	0.074	0.46
q	0.490	-0.018
m	34.850	149.540



Datos reales vs pronósticos

- Una aplicación es pronosticar las ganancias de un nuevo producto similar al anterior.
- Otra aplicación es esperar hasta algunos periodos de datos para el nuevo producto este disponible. Si 5 periodos de datos están disponibles puede usarse para predecir el del 6 y luego que se observe el del 6 se puede pronosticar la del mes 7

Políticas gubernamentales

El gobierno quiere influir en el comportamiento ambiental de algunas compañías que arrojan contaminantes al agua, y quiere implementar nuevas políticas de impuestos y subsidios: Además, cada compañía hace su propia optimización dado lo anunciado por el gobierno y usando valores marginales.

Se presenta un modelo en 2 niveles:

Gobierno
El gobierno quiere encontrar un tasa de impuestos y subsidios
Sujeto a:
retorno total por impuestos = subsidios mas una cantidad que cubra los gastos por la operación de monitoreo
La cantidad total de residuos vertidos por todas las compañías sea menor o igual a un nivel meta fijo.

Compañías
Para cada compañía la cantidad de residuos vertidos por ella misma es el resultado de minimizaciones individuales de costo reflejando el costo de la eliminación de residuos, los impuestos y los subsidios.

- Se asume que el gobierno tiene conocimiento complete del problema, y las compañías solo una información limitada:

- El gobierno tiene censado todos los datos de producción de contaminantes y remoción y su costos asociados para las plantas de tratamiento. Las compañías operan individualmente y no saben sobre sus competidores

Ejemplo: Existen 4 empresas que representan el total de contaminantes arrojados al rio de la ciudad.

	Agua contaminada (10^3 m^3)	Concentración de cont. (Kg/m^3)	Coef. De eficiencia de planta de tto ($\$.Kg/m^6$)
Compañía 1	2000	1.50	1.0
Compañía 2	2500	1.00	0.8
Compañía 3	1500	2.50	1.3
Compañía 4	3000	2.00	1.0

Si ninguna compañía remueve los contaminantes la cantidad total de contaminante seria 15250(10^3 kg). El gobierno tiene la meta de que sean 11000 (10^3 kg) y el costo de monitoreo estimado es de 1,000.000 de dólares.

Conjuntos
j compañías

Parámetros
- L= nivel meta de contaminantes a ser removidos anualmente (10^3 Kg)
- K= costo total de monitoreo del gobierno (10^3 \$)
- d_j = concentración de contaminantes observado en j (Kg/m^3)
- q_j = agua contaminada producida anualmente por j (10^3 m^3)
- c_j coeficiente de eficiencia de la compañía j (\$ kg/m^6)

Variables

T tasa de impuesto por contaminante producido (\$/kg)
S tasa de subsidio por contaminante removido (\$/Kg)
X_j remoción de contaminantes en el agua por la compañía j (kg/m^3)

Restricciones

Gobierno: Retorno total por impuestos = subsidios mas una cantidad que cubra los gastos por la operación de monitoreo

$$T\sum_j q_j(d_j - x_j) = K + S\sum_j q_j x_j$$

Gobierno: La cantidad total de residuos vertidos por todas las compañías sea menor o igual a un nivel meta fijo

$$\sum_j q_j(d_j - x_j) \leq L$$

Objetivo para cada compañía:

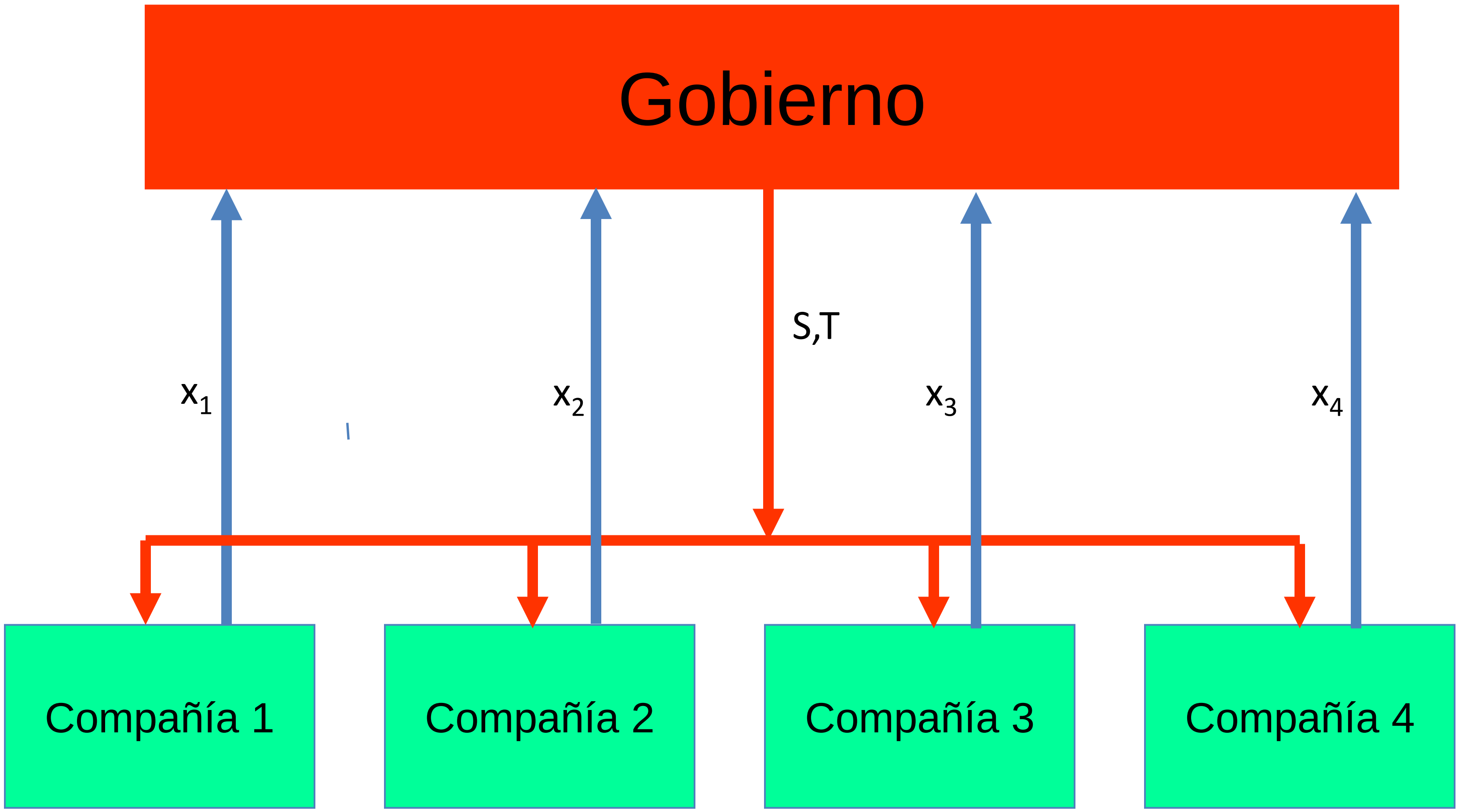
El costo a minimizar para cada compañía concierne a la elección de x_j dado T y S:

$$\underset{x_j \leq d_j, dado\ T, S}{Minimizar} \quad q_j\left[\left(\frac{c_j}{d_j - x_j} - \frac{c_j}{d_j}\right) + T(d_j - x_j) - Sx_j\right] \qquad \forall j$$

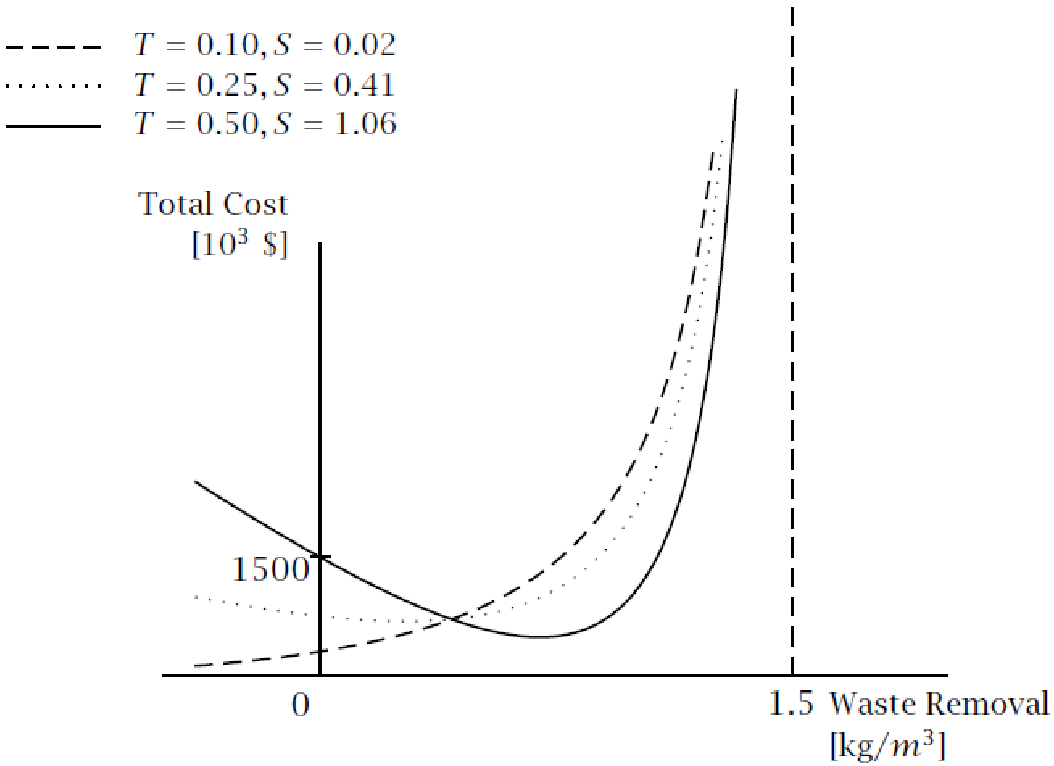
Donde el primer termino entre paréntesis denota el costo asociado a la remoción de contaminantes por cada unidad de agua por la compañía j.

c_j se basa en datos históricos.

Esquema en dos niveles:



Para resolverlo se implementa un esquema iterativo en el que T y S se ajusta en cada iteracion: el proceso termina cuando la suma de las remociones de todas las compañias cumpla la meta del gobierno



e 14.1: Cost function for company 1 for several T and S combinations

Fuente: AIMMS *Optimization Modeling,* AIMMS, Johannes Bisschop, 2016

Solución óptima

- T=0,239$/Kg
- S=03384/$/Kg

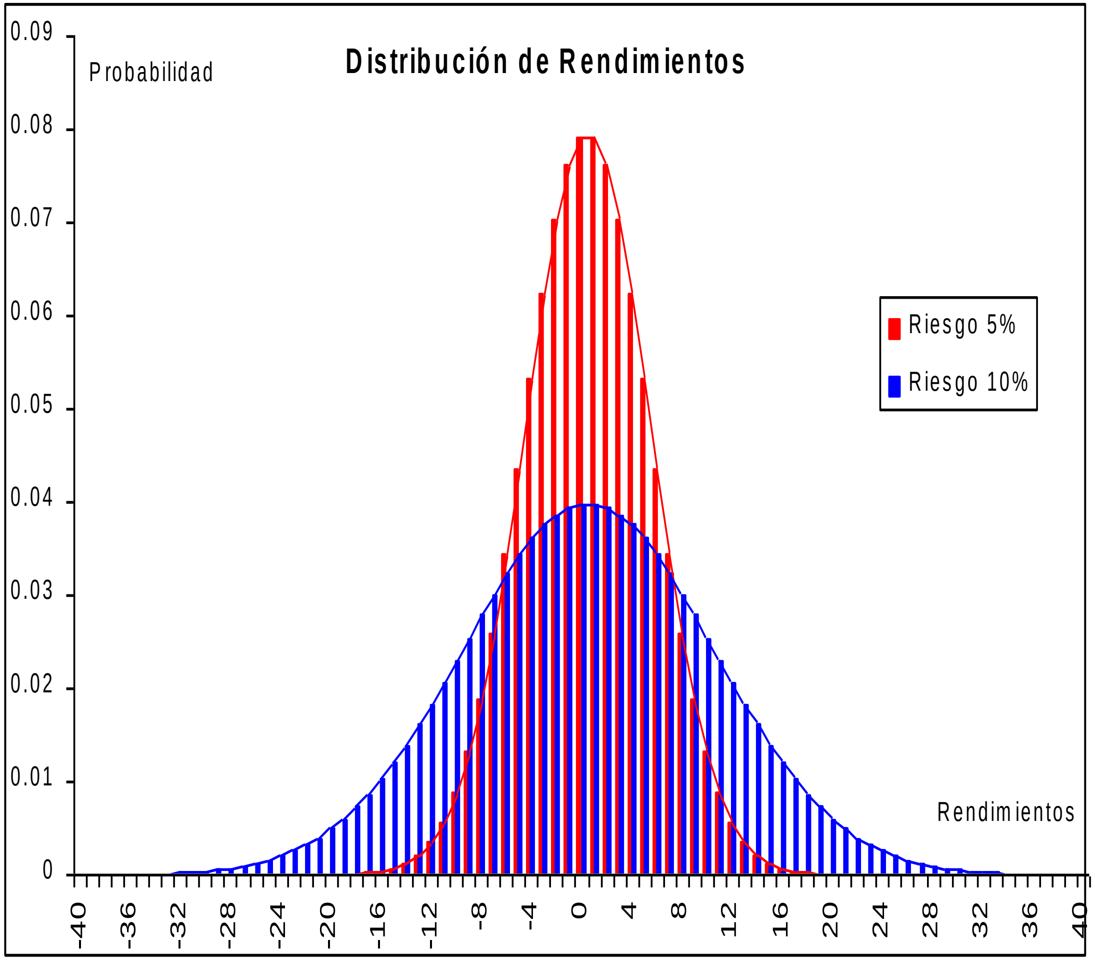
	X_j (kg/m^3)	Costo total (10^3 $)
Compañía 1	0.233	672.55
Compañía 2	0	598.15
Compañía 3	1.056	480.45
Compañía 4	0.733	932.88

Ejemplo: Análisis de Portafolio

- Un inversionista trata de maximizar su rentabilidad y minimizar el riesgo asociado.

- Análisis de Portafolio: Como repartir una suma de dinero entre diferentes opciones de inversión

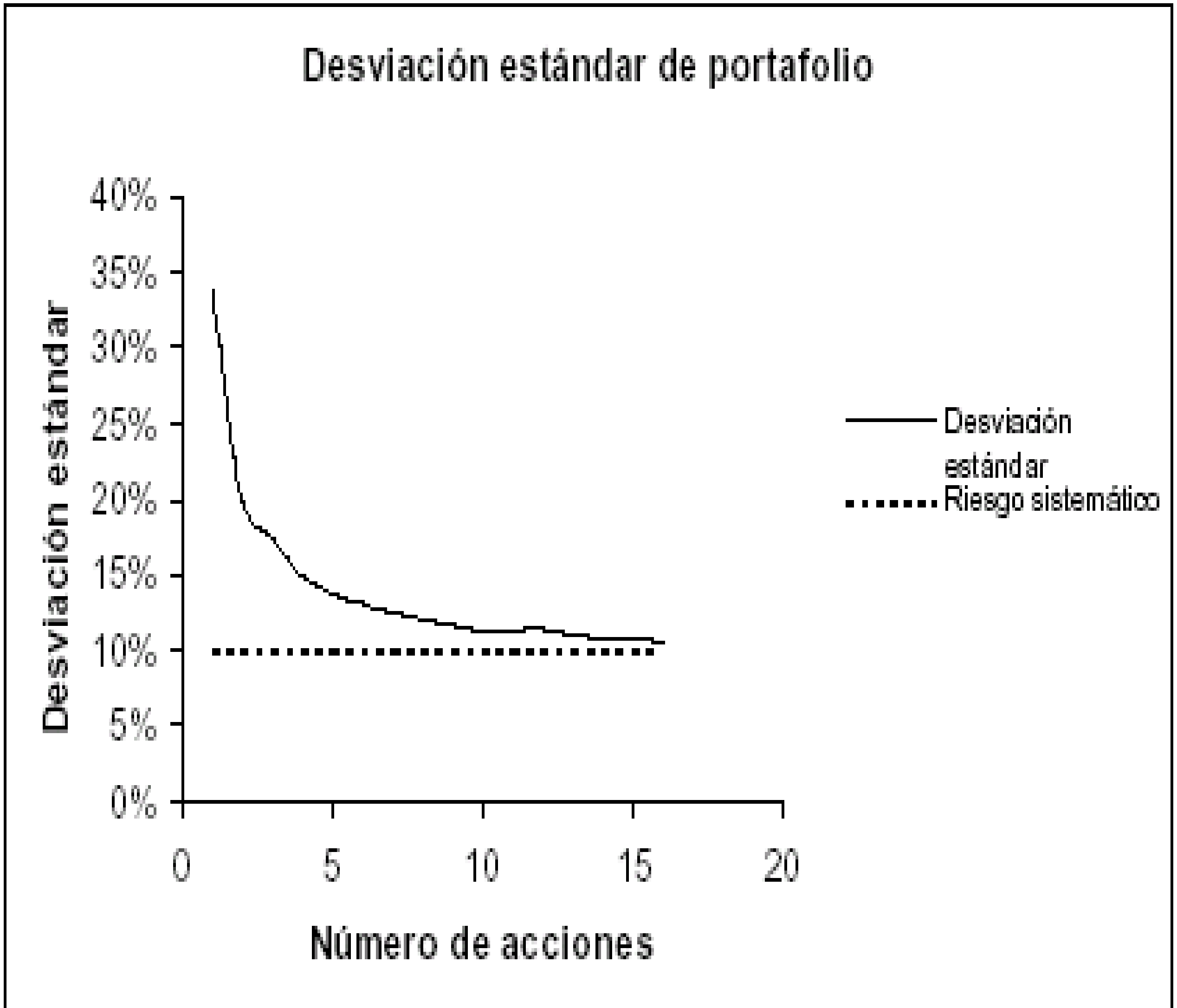
Cada activo financiero se puede caracterizar por una rentabilidad esperada y una volatilidad o riesgo sobre esa rentabilidad



La teoría sobre el análisis de portafolios:

Se concentra en la selección de portafolios óptimos.

- El concepto de **diversificación** se fundamenta en el hecho de que, a medida que aumenta el número de activos dentro del portafolio, éste se puede configurar de manera que tenga menor riesgo, dependiendo de la correlación entre los mismos.


Desviación estándar de portafolio
40%
35%
30%
25%
20%
15%
10%
5%
0%
Desviación estándar
0
5
10
15
20
Número de acciones
Desviación estándar
Riesgo sistemático

- La <u>rentabilidad esperada</u> del portafolio es simplemente un promedio ponderado de la rentabilidad esperada de los activos individuales R_j

- Para calcular el <u>riesgo</u> del portafolio se debe tener en cuenta, además del riesgo de cada activo individual σ_j, la correlación entre los activos que conforman el portafolio σ_{jk}.

Modelo de la Teoría de Portafolio

Variable de decisión x_j= fracción de la inversión total invertida en la opción j
L es el limite máximo de riesgo (desviación estándar) aceptado por la empresa.

$$Maximizar \quad \sum_{j=1}^{m} x_j R_j$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} x_j x_k \sigma_{jk} \leq L$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = 1$$

$$x_j \geq 0$$

Para el caso de dos activos

$$Maximizar \quad x_1\mu_1 + x_2\mu_2$$

Sujeto a $\quad x_1{}^2\sigma_1{}^2 + x_2{}^2\sigma_2{}^2 + 2x_1x_2\sigma_{12} \leq L$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Ejemplo: 2 Activos

Mes	**Activo 1**	**Activo 2**
1	18.87	7.59
2	13.42	-7.83
3	2.32	-25.11
4	-10.81	-10.08
5	-21.58	11.54
6	12.57	-13.72
7	15.42	-18.73
8	-6.32	11.50
9	5.71	18.72
10	4	9.25
11	2.12	20.02
12	-24.44	15.72
Media μ	0.94	1.57
Varianza σ^2	199.96	246.34
Desviación estándar σ	14.14	15.69
Covarianza	-82.70	

$$Var(\ x_1X +\ x_2Y\ ) =\ x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 +\ 2\,x_1\,x_2\,\sigma_{12}$$

$$Media\ (\ x_1R_1 +\ x_2R_2\ ) =\ x_1\mu_1 + x_2\mu_2$$

Formulación (L=100):

$$Maximizar \quad 0.94x_1 + 1.57x_2$$

Sujeto a

$$199.96x_1^{\ 2} + 246.34x_2^{\ 2} - 2 \times 82.70x_1x_2 \leq 100$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solución óptima

X1= 0,314 X2= 0,686 R=1.37