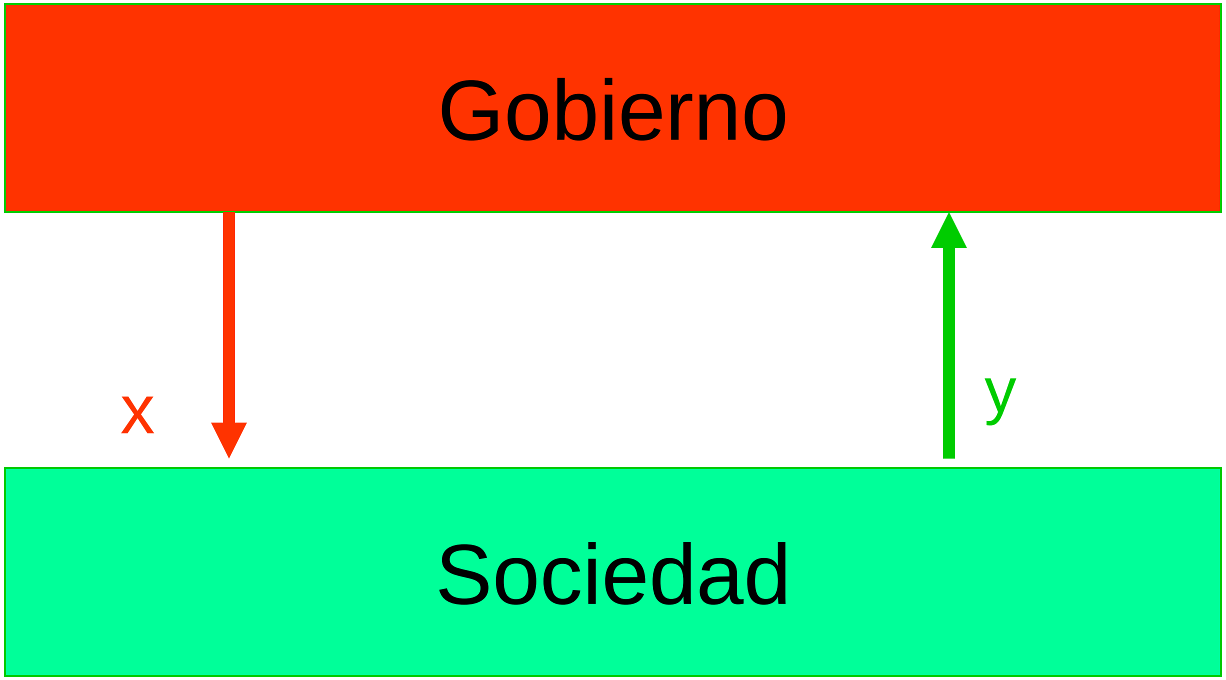
Resolución de problemas de gran escala

Teoría de la Descomposición

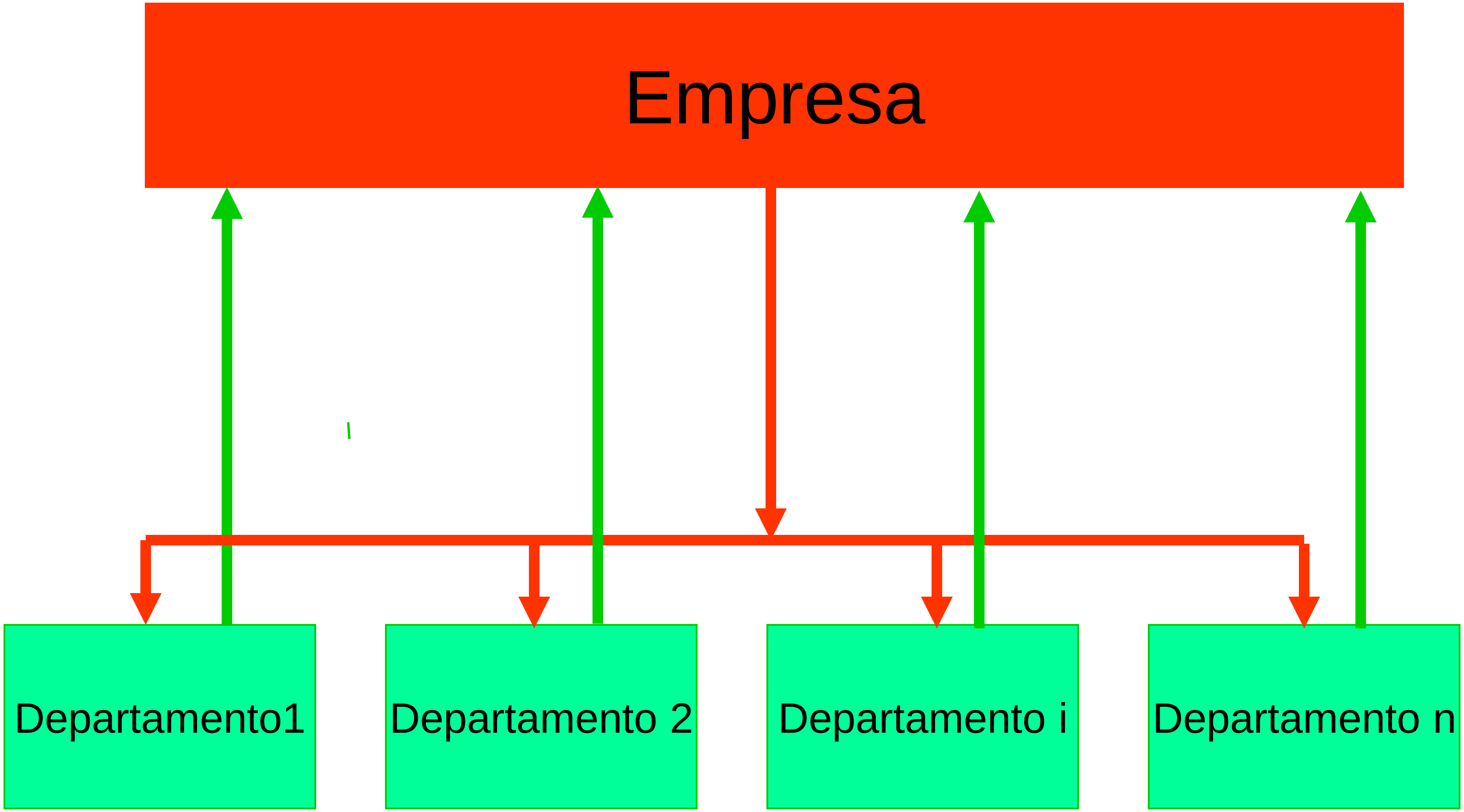
En la práctica existen problemas de Optimización muy grandes (gran escala) y de difícil resolución.

Muchos de ellos tienen estructuras especiales que pueden ser aprovechadas para un proceso de solución más eficiente

Problemas de Dos niveles:



Esquema jerárquico:



Aplicaciones

Planificación Multisectorial:

Cuando se realizan optimizaciones que integran varios sectores, la estructura matricial asociada permite seleccionar:

Problema maestro: con restricciones que representan las transferencias de productos entre sectores

Subproblemas: asociados a cada uno de los sectores. Los sectores pueden estar asociados a sectores industriales de la economía y/o a zonas espaciales que interactúan a través de múltiples mercados.

Planificación de Mercados

Cuando se realizan optimizaciones que tratan de determinar los puntos de equilibrio de un mercado bajo competencia perfecta, la estructura matricial asociada permite seleccionar como:

Problema maestro: agente que represente a los compradores, por ejemplo un mercado "spot" o un operador del mercado,

Subproblemas: asociados a cada uno de los agentes que actúan en el mercado.

Planificación Multiperíodo

Cuando se realizan optimizaciones que integran múltiples períodos de tiempo, la estructura matricial asociada permite seleccionar como:

Problema maestro: las transferencias de productos entre períodos, o sea las variaciones de inventario en un período.

Subproblemas: asociados a cada uno de los períodos.

Problemas de expansión

Es común que se tengan esquemas lineales en donde las variables y son continuas y las x son discretas.

En un esquema productivo:

• las y están asociadas a la producción

• las x a la expansión del sistema productivo (tipo binario normalmente)

Ejemplo: Estructura Angular

Minimizar $Z = -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6$

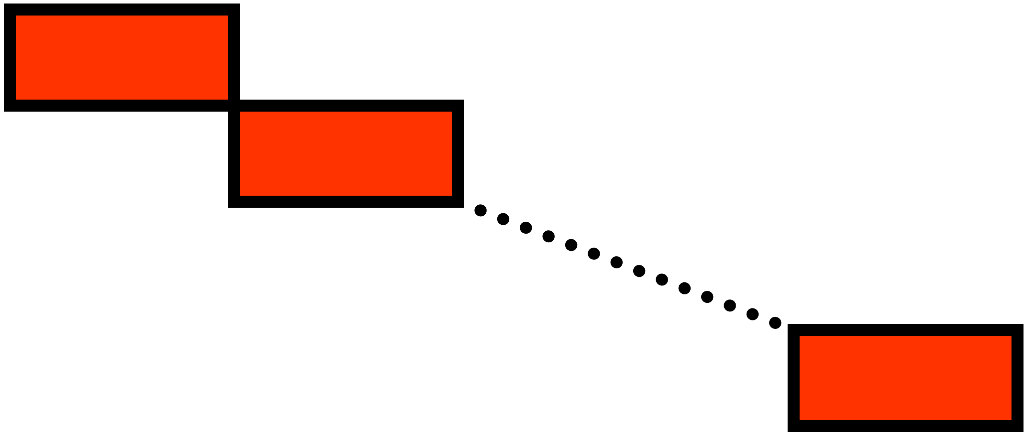
Sujeto a

$$
\begin{array}{llllllll}
\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} & \leq 25 \\
x_1 & \leq 2 \\
x_1 + 2x_2 & \leq 5 \\
-x_3 + x_4 & \leq 2 \\
2x_3 + x_4 & \leq 6 \\
X_5 + x_6 & \leq 12 \\
x_5 + 2x_6 & \leq 8
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Estructura Angular

Restricciones de Acople



Existen muchos técnicas de descomposición. Las más usadas son:

- Descomposición de Benders

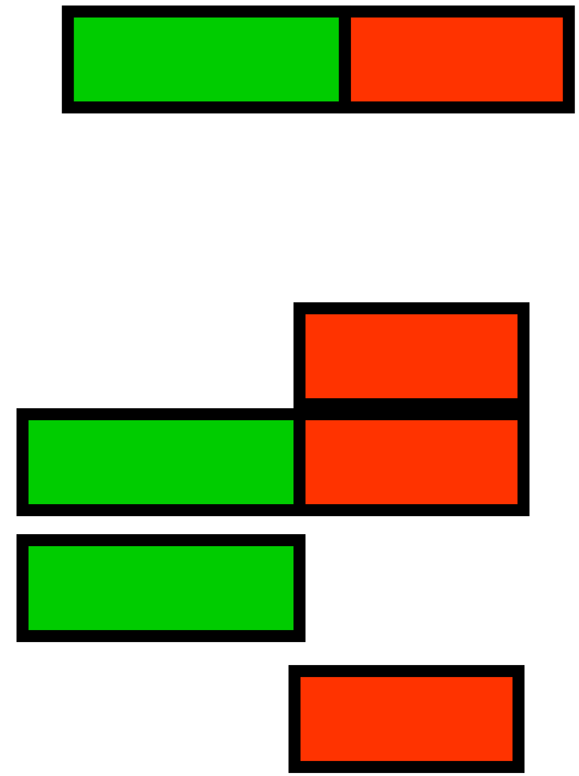
  Descomposición de Dantzig-Wolfe

  Relajación Lagrangeana
- Etc.

Descomposición de Benders

Problema prototipo

$$
\begin{aligned}
& Min\ dy + f(x) \\
& s.a \\
& F_0(x) \geq b \\
& Fy + E(x) \geq h \\
& y \geq 0 \\
& x \in S
\end{aligned}
$$



y y x son las variables de decisión

E, F_0 y *f* son funciones lineales o no lineales

Teoría de la descomposición de Benders

La solución de un problema de optimización utilizando la teoría de Descomposición de Benders se fundamenta en la partición del problema en dos problemas que se deben resolver coordinadamente.

La partición se realiza de acuerdo al tipo de variables:

- **Variables de acople o de control: son aquellas que permiten la integración de diferentes subproblemas de nivel inferior.**
- **Variables dependientes o coordinadas**

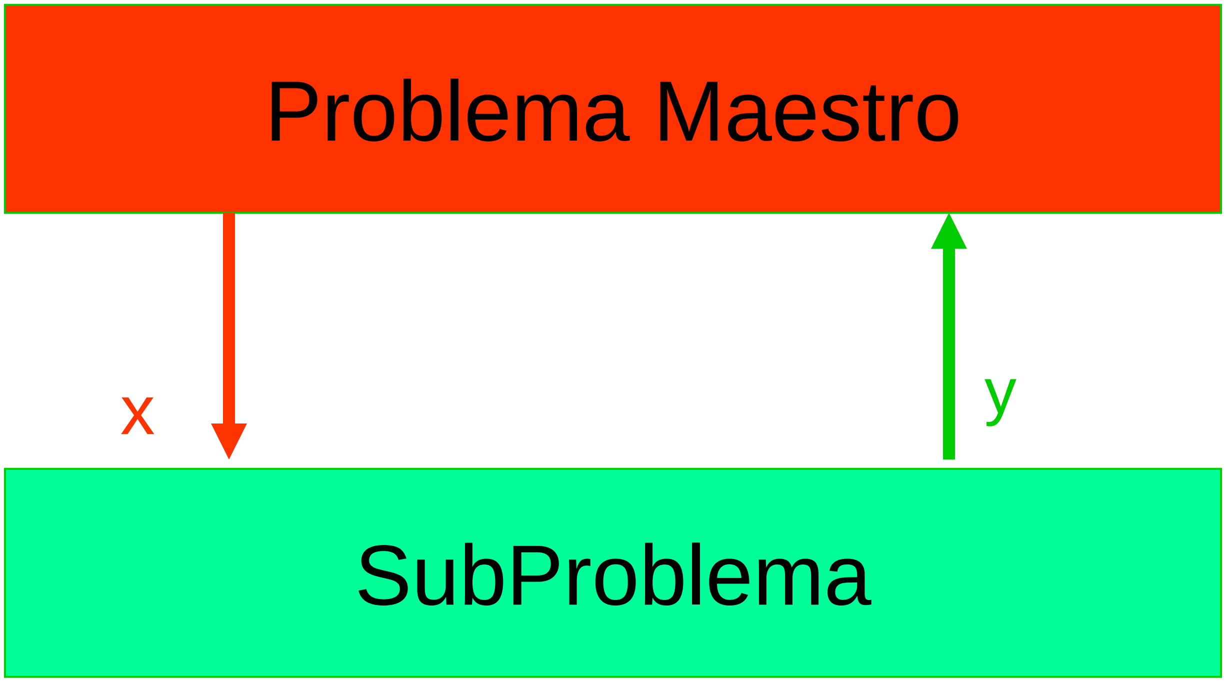
Partición del problema

1. Problema coordinador o maestro

En función de las variables de acople o control y de restricciones generales (o complincantes)

2. Subproblema: en función de las variables dependientes. Este problema esta parametrizado como función de las variables de acople o control y tiene restricciones de estructuras especiales.

Estrategia:



- Fijar x. Si x es fijo, el subproblema es lineal en y
- Resolver el subproblema: encontrar y
- Con base en y, mejorar x
- Repetir iterativamente hasta que se encuentre la solución

Estrategia:

Problema Maestro

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ f(x) + dy^{(1)} \\
&s.a\quad F_0(x) \geq b \\
&\qquad\quad E(x) \geq h - Fy^{(1)} \\
&\qquad\quad x \in S
\end{aligned}
$$

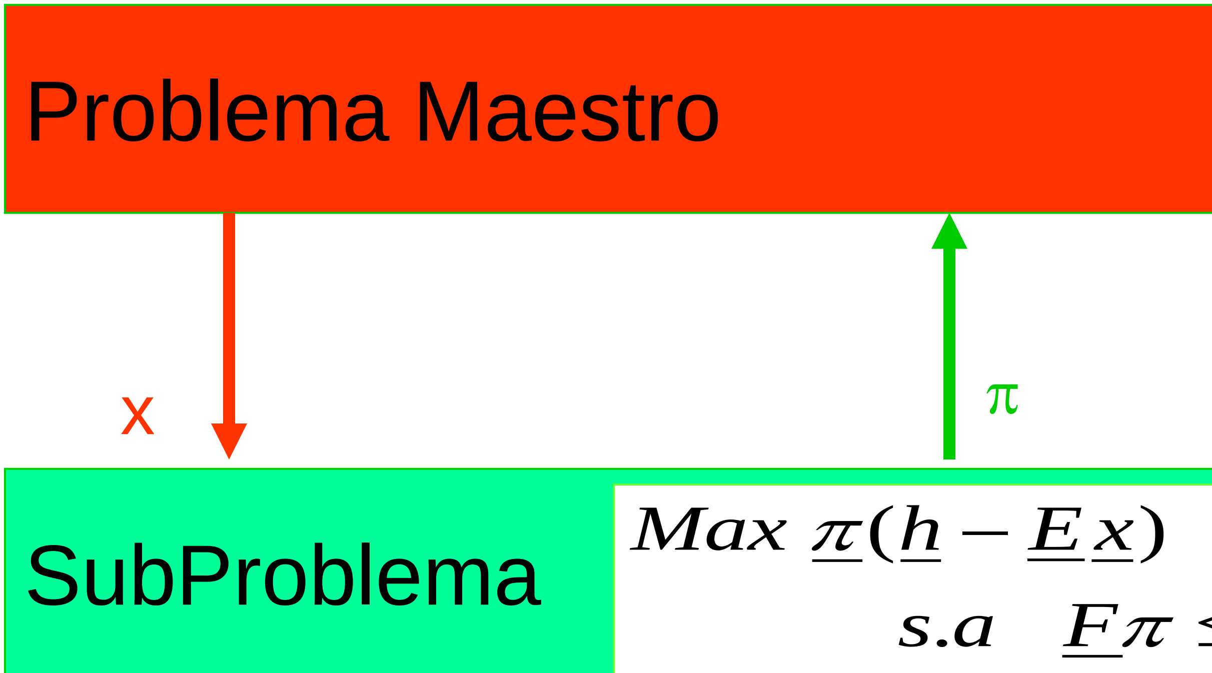
x

y

SubProblema

$$
\begin{aligned}
&Min\ dy + f(x') \\
&s.a\quad Fy \geq h - E(x') \\
&\qquad\qquad y \geq 0
\end{aligned}
$$

Resolviendo el dual de subproblema



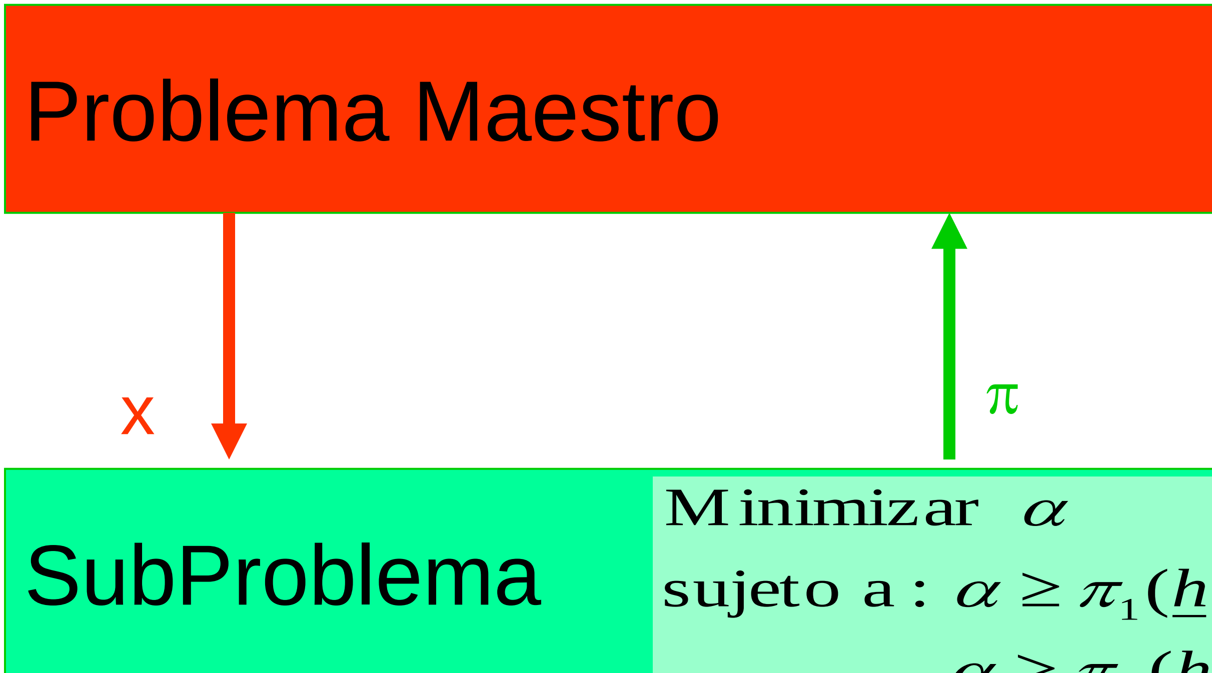
$$\begin{aligned} &Max\ \underline{\pi}(\underline{h} - \underline{E}\,\underline{x}) \\ &\qquad s.a \quad \underline{F}\pi \leq \underline{d} \\ &\qquad\qquad \underline{\pi} \geq 0 \end{aligned}$$

primal

$$\begin{aligned} &Min\ dy + f(x') \\ &s.a \quad Fy \geq h - E(x') \\ &\qquad y \geq 0 \end{aligned}$$

Donde π variables duales del subproblema

Equivalente a:



$$
\begin{aligned}
&\text{Minimizar } \alpha \\
&\text{sujeto a: } \alpha \geq \pi_1(\underline{h} - \underline{E}\,\underline{x}) \\
&\qquad\qquad\ \alpha \geq \pi_2(\underline{h} - \underline{E}\,\underline{x}) \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\qquad\ \alpha \geq \pi_r(\underline{h} - \underline{E}\,\underline{x})
\end{aligned}
$$

Donde se tiene r puntos extremos (r soluciones básicas factibles): $\underline{\pi}_1, \underline{\pi}_2, \ldots, \underline{\pi}_r$,

El problema global puede entonces representarse:

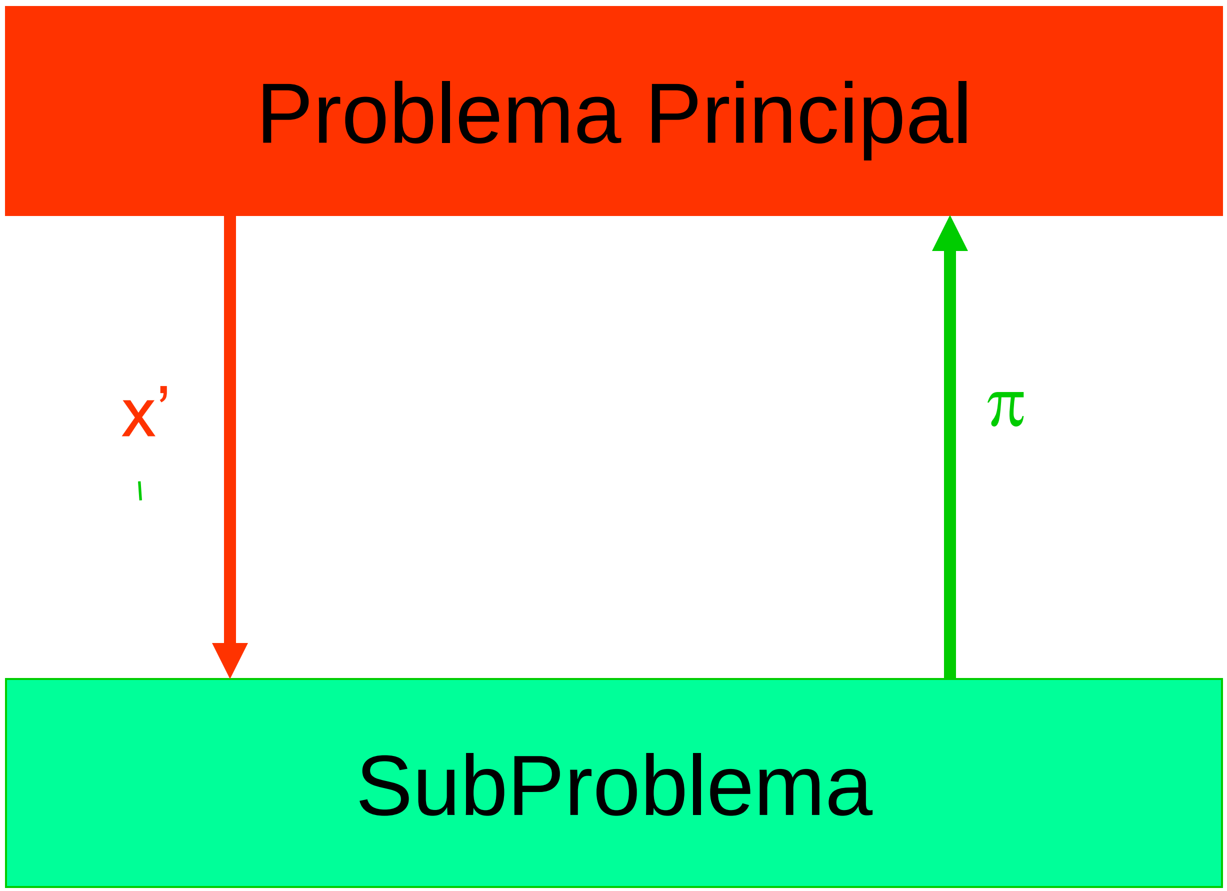
$$\begin{array}{lcl} Min\ \underline{c}\,\underline{x} + w(\underline{x}) & & Min\ \underline{c}\,\underline{x} + \alpha \\ s.a & & s.a \\ \quad \underline{A}\underline{x} \geq b & \Leftrightarrow & \quad \underline{A}\underline{x} \geq b \\ & & \quad \alpha \geq \pi_l(\underline{h} - \underline{E}\,\underline{x}) \\ & & \quad l = 1,\ldots,r \end{array}$$

Cada hiperplano $\pi_l(\underline{h} - \underline{E}\ \underline{x})$ se llama Corte de Benders y se generan de manera progresiva.

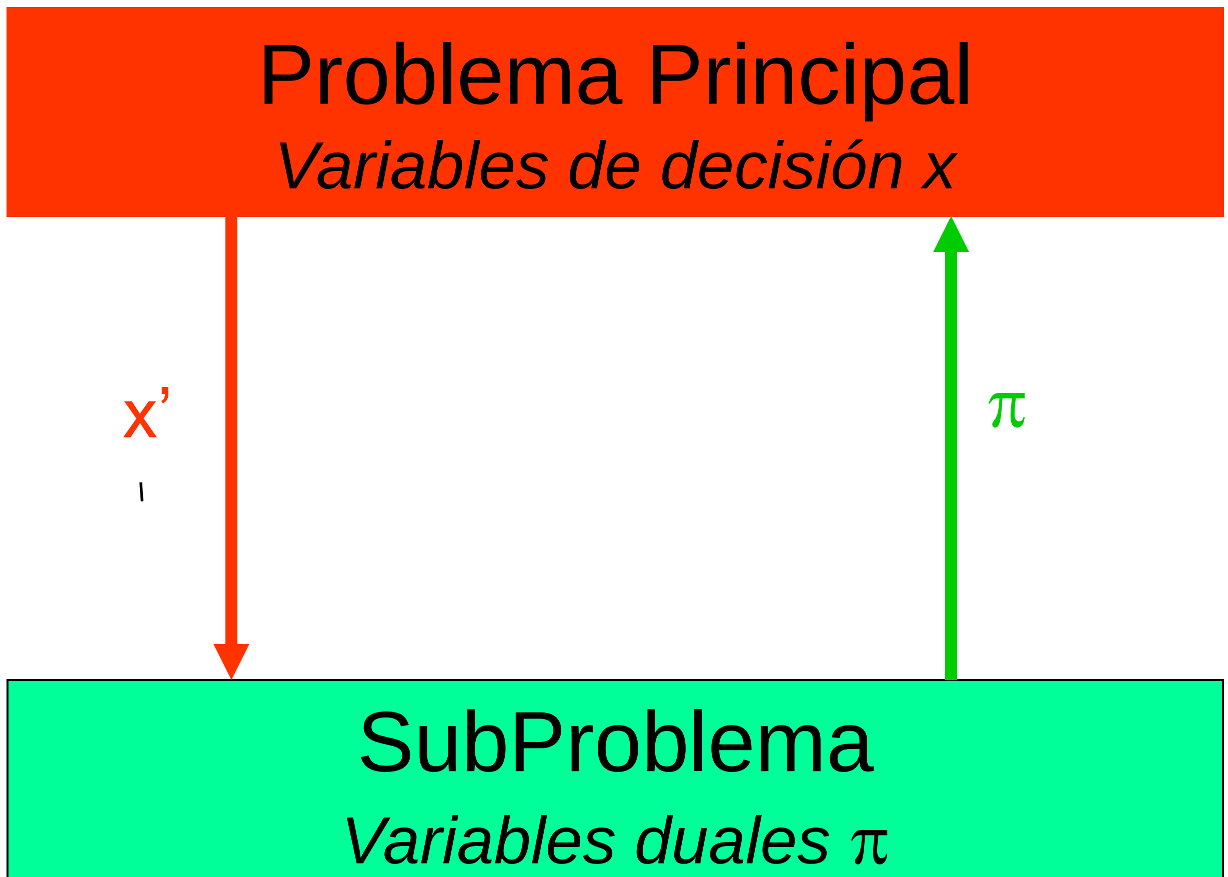
En cada iteración solo pasará un corte de Benders al problema maestro.

Generalmente muy pocas restricciones serán activas $\Rightarrow$ se generarán muy pocos cortes para encontrar la solución global al problema.

Esquema:



Esquema:


Problema Principal
Variables de decisión x
x'
π
SubProblema
Variables duales π

Esquema:

$$
\begin{aligned}
&Min\ \underline{c}\,\underline{x} + \alpha \\
&s.a \quad \underline{A}\,\underline{x} \geq b \\
&\qquad\quad \alpha \geq \pi_1 (\underline{h} - \underline{E}\,\underline{x})
\end{aligned}
$$

x

π

$$
\begin{aligned}
&Max\ \pi(\underline{h} - \underline{E}\,\underline{x}) \\
&\quad s.a \quad \underline{F}\pi \leq \underline{d} \\
&\qquad\qquad \underline{\pi} \geq 0
\end{aligned}
$$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
Min \quad & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 6x_5 \\
S.a. \quad & x_1 + x_2 \geq 19 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 14 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 \geq 28 \\
& 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 5 \\
& \underbrace{x_1, x_2}_{\text{Variables de control}}, \underbrace{x_3, x_4, x_5}_{\text{Variables dependientes}} \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema Maestro

$$\begin{aligned} &Min \quad 4x_1 + 2x_2 \\ &S.a. \quad x_1 + x_2 \geq 19 \\ &\qquad\; 2x_1 + 3x_2 \geq 14 \\ &\qquad\; x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución:

x_1=9.6, x_2=12.8, Z= 64

Subproblema

$$
\begin{aligned}
&Min \quad x_3 + 3x_4 + 6x_5 \\
&S.a. \;\; 2x_3 + 3x_4 + x_5 \;\; \geq 28 - x_1 - x_2 = 28 - 9.6 - 12.8 = 5.6 \\
&\qquad\quad 4x_3 + x_4 \qquad\quad \geq 5 - 2x_1 - x_2 = 5 - 2 \times 9.6 - 12.8 = -27 \\
&\qquad x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Cuya solución es: $x_3 = 2.8$, $x_4 = x_5 = 0$

Su dual es:

$$
\begin{aligned}
&Max \;\; 5.6\pi_1 - 27\pi_2 \\
&S.a. \; 2\pi_1 + 4\pi_2 \;\; \leq 1 \\
&\qquad 3\pi_1 + \pi_2 \;\; \leq 3 \\
&\qquad \pi_1 + \qquad\;\; \leq 6 \\
&\qquad \pi_1, \pi_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Cuya solución es:

$\pi_1 = 0.5$, $\pi_2 = 0$,
$w(x) = 2.8$

Subproblema

Variables duales:

π_1= 0.5 , π_2=0,
w(x)= 2.8

Primer corte de Benders

$$\alpha \geq \pi(\underline{h} - \underline{E}\,\underline{x})$$

$$\alpha \geq \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28 - x_1 - x_2 \\ 5 - 2x_1 - x_2 \end{bmatrix} = 14 - 0.5x_1 - 0.5x_2$$

Problema Maestro

$$\begin{aligned}
&Min \quad 4x_1 + 2x_2 + \alpha \\
&S.a. \quad x_1 + x_2 && \geq 19 \\
&\qquad 2x_1 + 3x_2 && \geq 14 \\
&\qquad \alpha \geq 14 - 0.5x_1 - 0.5x_2 \\
&\qquad \alpha, x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Solución:

α= 4.5, x_1=0, x_2=19, Z= 42.5

Subproblema

$$
\begin{aligned}
&Min \quad x_3 + 3x_4 + 6x_5 \\
&S.a. \quad 2x_3 + 3x_4 + x_5 \quad \geq 28 - x_1 - x_2 = 28 - 0 - 19 = 9 \\
&\qquad 4x_3 + x_4 \qquad\qquad \geq 5 - 2x_1 - x_2 = 5 - 2 \times 0 - 19 = -14 \\
&\qquad x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Cuya solución es: $x_3 = 4.5$ **,** $x_4 = x_5 = 0$

Su dual es:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad 59\pi_1 - 14\pi_2 \\
&S.a. \quad 2\pi_1 + 4\pi_2 \quad \leq 1 \\
&\qquad 3\pi_1 + \pi_2 \quad \leq 3 \\
&\qquad \pi_1 + \qquad \leq 6 \\
&\qquad \pi_1, \pi_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Cuya solución es:

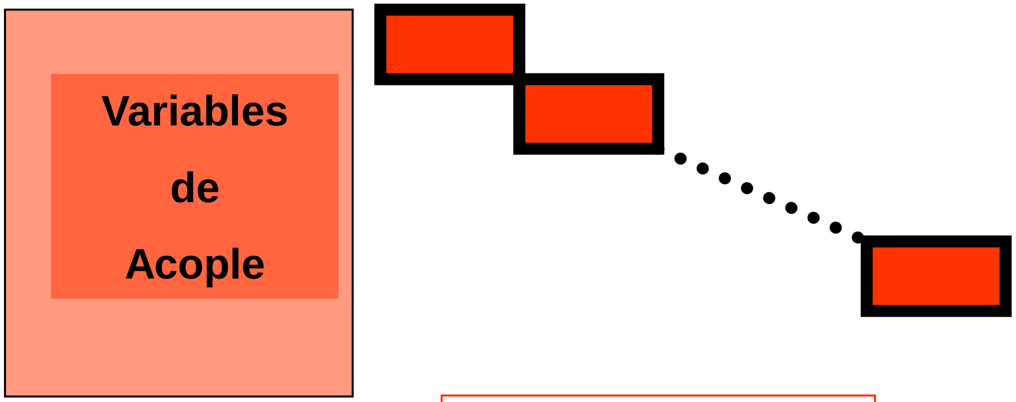
$\pi_1 = 0.5$ **,** $\pi_2 = 0$**,**
$w(x) = 4.5$

¡¡¡Igual que la anterior!!!

STOP

Descomposición en varios subproblemas

Cuando un problema tiene una estructura matricial dual angular, de la siguiente manera:



$$
\begin{aligned}
& Min \sum_i d_i y_i + f(x) \\
& s.a \\
& F_0(x) \geq b \\
& F_i y_i + E_i(x) \geq h_i \\
& y_i \geq 0 \\
& x \in S
\end{aligned}
$$

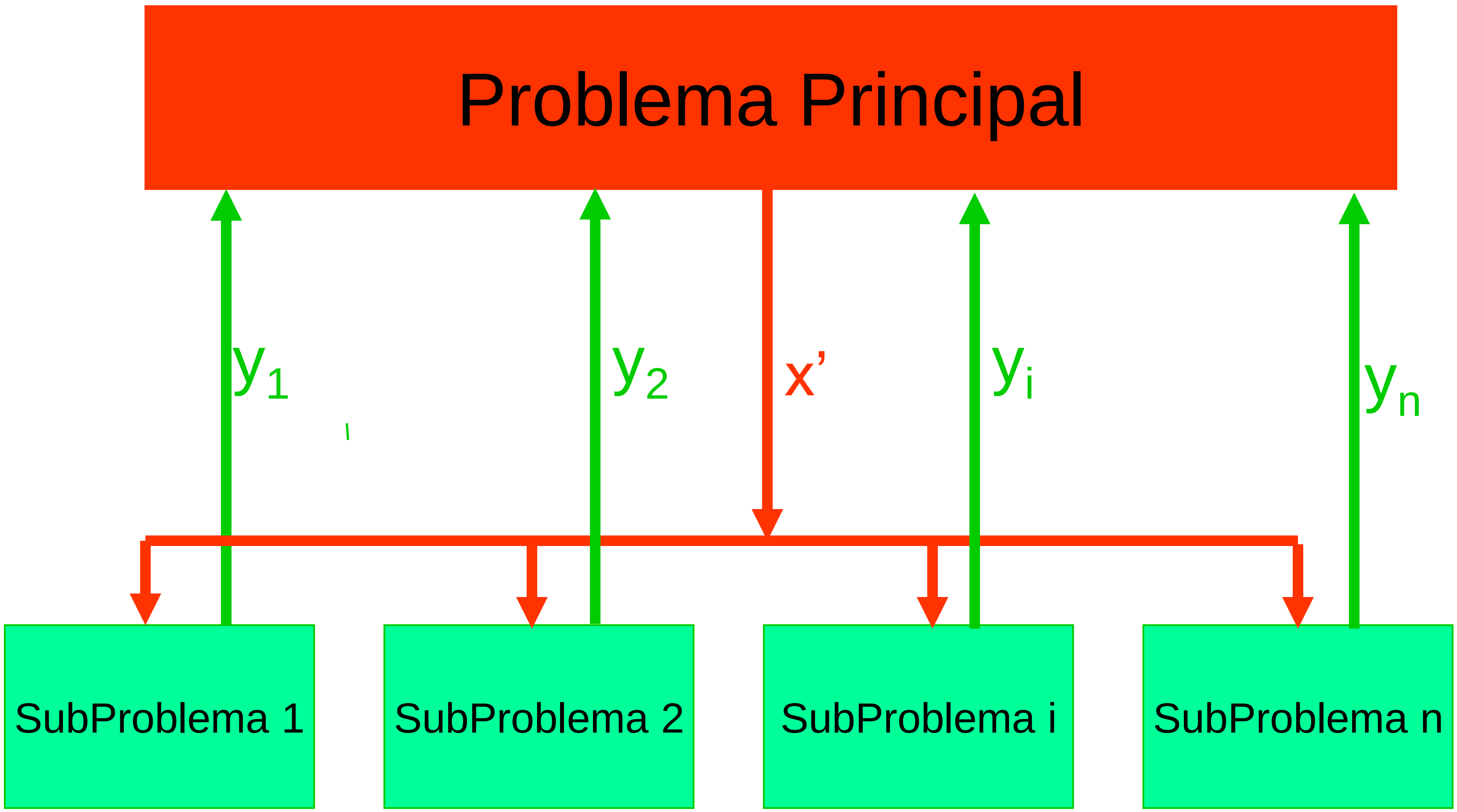
$$
\boxed{\begin{aligned}
&Min \sum_i d_i y_i + f(x) \\
&s.a \\
&F_0(x) \geq b \\
&F_i y_i + E_i(x) \geq h_i \\
&y_i \geq 0 \\
&x \in S
\end{aligned}}
$$

i esta asociado a sectores industriales, zonas geográficas, períodos,etc.

x está asociada al consumo/producción de recursos comunes, y/o a la transferencia de recursos entre áreas de acción,

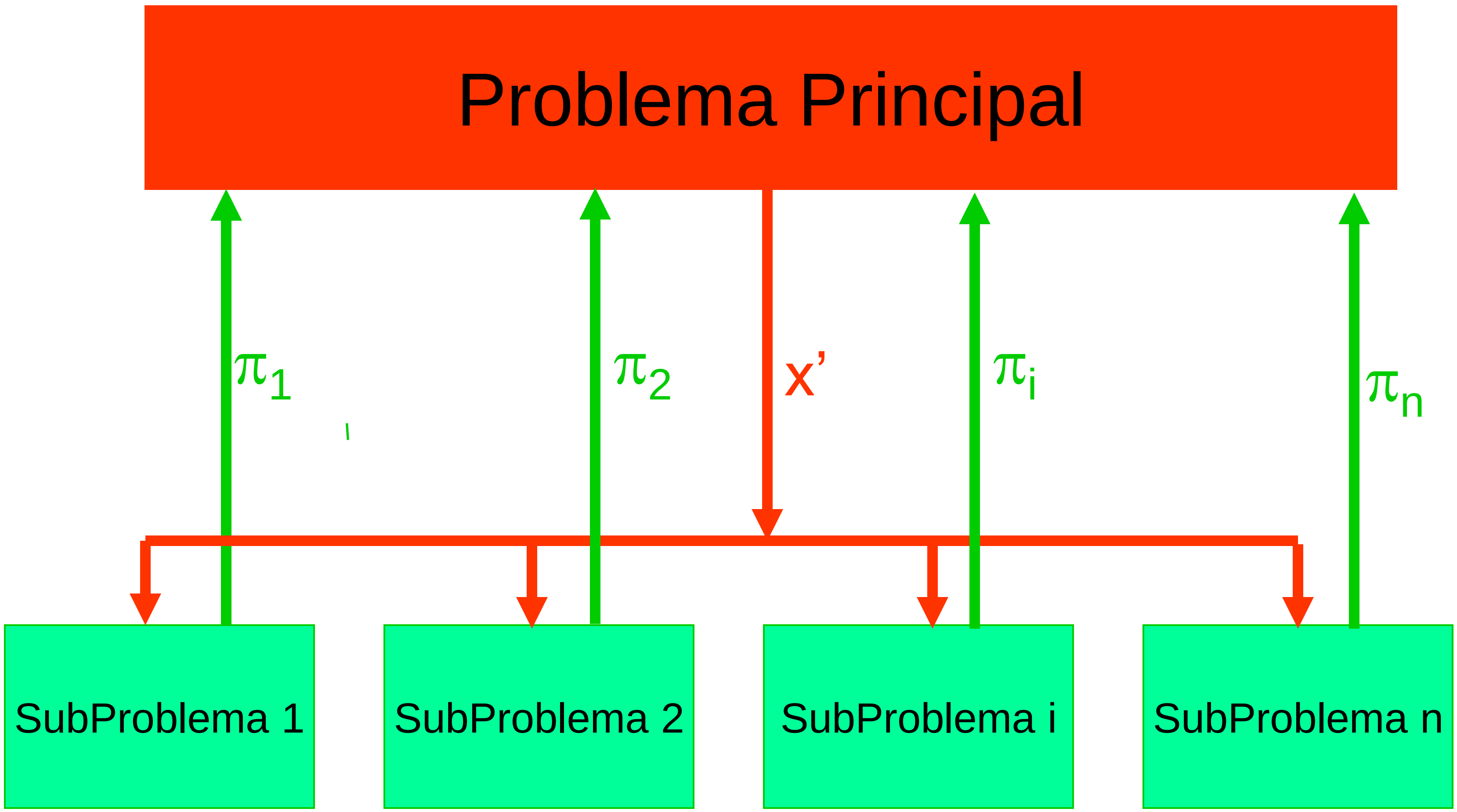
y_i a la operación dentro del área de acción del subíndice i.

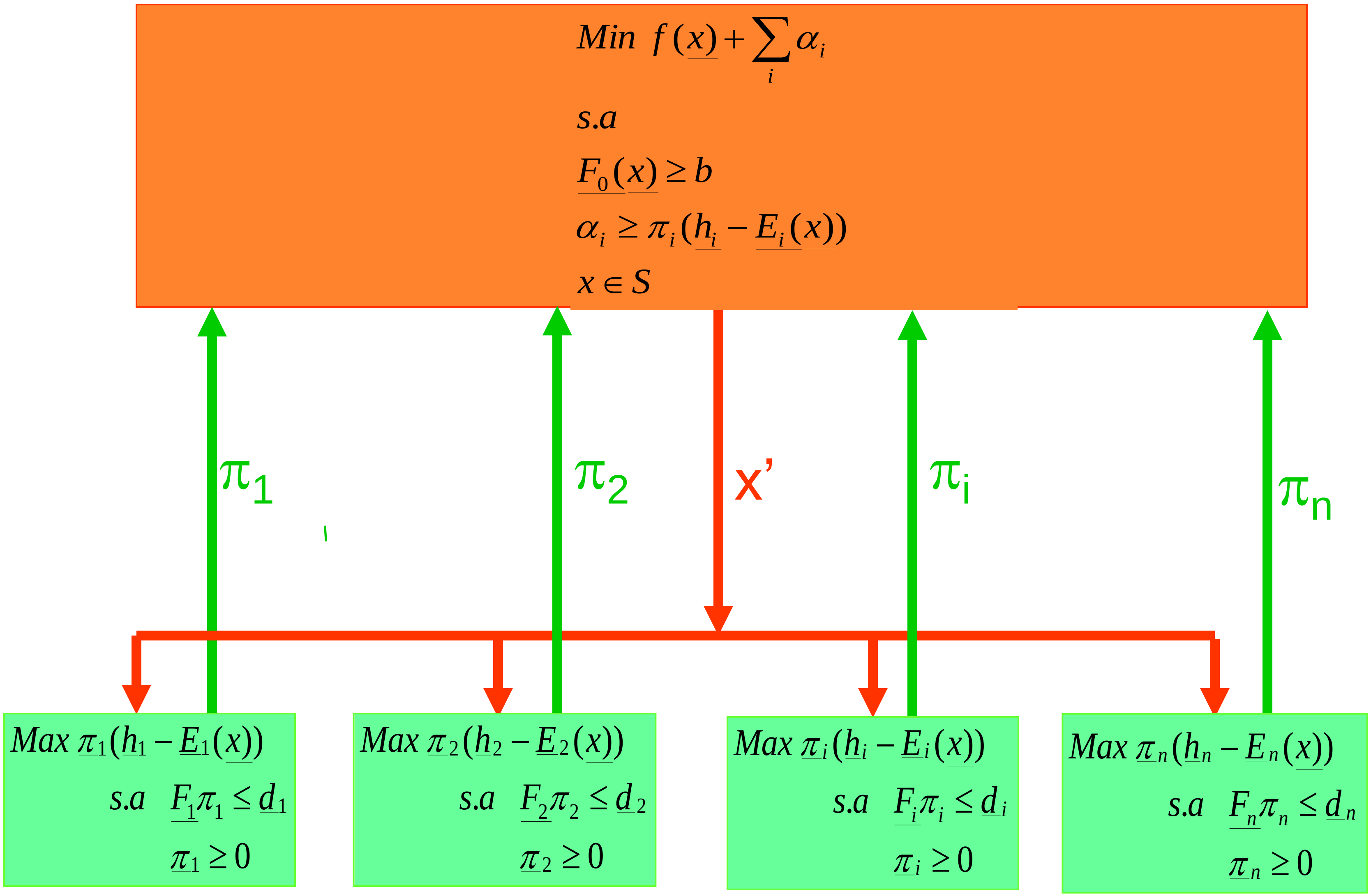
Esquema:



Problema Principal
y1
y2
x'
yi
yn
SubProblema 1
SubProblema 2
SubProblema i
SubProblema n

Esquema:


Problema Principal
π1
π2
x'
πi
πn
SubProblema 1
SubProblema 2
SubProblema i
SubProblema n


$Min \; f(\underline{x}) + \sum_i \alpha_i$
$s.a$
$\underline{F}_0(\underline{x}) \geq b$
$\alpha_i \geq \pi_i(\underline{h}_i - \underline{E}_i(\underline{x}))$
$x \in S$
π_1
π_2
x'
π_i
π_n
$Max \; \pi_1(\underline{h}_1 - \underline{E}_1(\underline{x}))$
$s.a \quad \underline{F}_1\pi_1 \leq \underline{d}_1$
$\pi_1 \geq 0$
$Max \; \pi_2(\underline{h}_2 - \underline{E}_2(\underline{x}))$
$s.a \quad \underline{F}_2\pi_2 \leq \underline{d}_2$
$\pi_2 \geq 0$
$Max \; \pi_i(\underline{h}_i - \underline{E}_i(\underline{x}))$
$s.a \quad \underline{F}_i\pi_i \leq \underline{d}_i$
$\pi_i \geq 0$
$Max \; \pi_n(\underline{h}_n - \underline{E}_n(\underline{x}))$
$s.a \quad \underline{F}_n\pi_n \leq \underline{d}_n$
$\pi_n \geq 0$