Formulación de problemas de optimización

Modelación de un problema

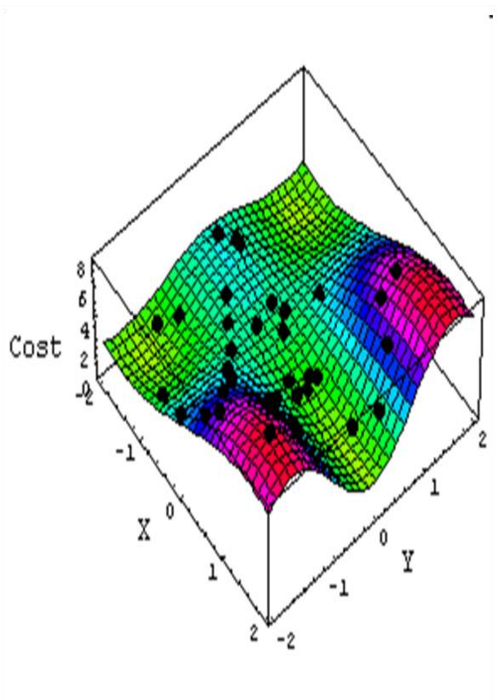
Un modelo matemático es una **representación idealizada** de un sistema, expresada en términos de símbolos y expresiones matemáticas.

Cuando se resuelve un problema, sólo se está encontrando la solución al *modelo* del problema.

Problema $\Rightarrow$ Modelo $\Rightarrow$ Solución

Se puede optar por un modelo que represente mejor las complejidades del problema pero sea difícil de resolver, o un modelo simple fácil de resolver

Definición general del problema de optimización:



Función objetivo: Optimizar (min o max) $f(x)$

Restricciones: $LB \leq x \leq UB$

$G(x) \leq b$

x es una variable de decisión

Para formular un problema

Primero se debe formular verbalmente respondiendo las siguientes preguntas:

- **Que datos necesito?**
  - Según las necesidades del problema. La meta y escala de interés
- Cuáles conjuntos pueden ser especificados para las variables y los parámetros
- **Cuáles son las variables de decisión?** Reflejan una opción. Son desconocidas inicialmente y necesitan ser determinadas en la solución del modelo.
- **Que entidad debe ser optimizada?** Ejemplos ganancias netas, minimizar costos, minimizar impacto ambiental, maximizar ventas, minimizar distancia
- **Que restricciones hay?** Son los limites que impone la realidad, presupuesto máximo, condiciones de calidad mínimas, políticas de la empresa que no deben violarse, etc
- **En que unidades debo formular el modelo?** No todas las variables deben tener las mismas unidades, ni las restricciones.
- Las unidades deben ser compatibles y coherentes con el objetivo del problema. Esto ayuda a definir los datos necesarios y a chequear posible errores en la formulación

Formalmente

Identificación de las variables de decisión: generalmente se describen como x con uno o varios subíndice como x_i

Las variables de decisión pueden ser continuas (ej cuánto aditivo adicionar a la mezcla?), binarias (extraer o no un bloque de la cantera), enteras (cuántos camiones enviar?)

Función objetivo: función de las variables de decisión y otros parámetros que representa lo que se desea alcanzar en la decisión, por ejemplo minimizar costos, maximizar beneficios, maximizar calidad, minimizar uso de energía eléctrica, etc.

Restricciones: ecuaciones que definen los limites, técnico, económicos, físico, geográficos, etc. que se tienen para alcanzar el ideal.

Se expresan por un lado izquierdo, un símbolo >= , >= o = y una constate al lado derecho.

<u>¡Formular requiere de habilidades que solo se consiguen **haciéndolo**!</u>

Ejemplos verbales

Producción

Maximizar: Beneficios netos: retorno - Costos de material – costos operativos

Sujeto a las restricciones:

- La cantidad de materia prima usada en la producción no puede exceder la cantidad disponible
- La cantidad de mano de obra usada no debe exceder la máxima disponible
- La capacidad de las maquinas necesaria no puede exceder la máxima disponible
- las ventas finales deben ser iguales a los productos fabricados mas lo que lo queda en inventario
- Se deben cumplir los atributos de calidad mínimos y máximos
- Se debe cumplir la demanda

Inputs:

Pronósticos de demanda por periodos por producto
Pronostico de costos unitarios de material
Pronostico de costos operativos

Portafolio financiero

Minimizar riesgo en la compra de acciones

Sujeto a:

- El retorno esperado supere un valor mínimo
- No se puede invertir más del presupuesto disponible
- Restricciones concernientes a las proporciones invertidas en acciones especificas por seguridad

Inputs:

Pronósticos de retornos de las acciones

Estimacion de riesgo asociado a esos retornos futuros

Planificación de servicios y mano de obra
por ejemplo buses y Conductores:

Minimizar Numero total de vehículos y de conductores

Sujeto a que

- Para cada periodo se debe satisfacer los requerimientos de conductores.
- Deben cumplirse jornadas dentro de los mínimos y máximos legales.
- Los buses deben suplir la demanda de viajeros
- Las frecuencias de los buses deben cumplir ciertos limites prácticos

Inputs:

Pronósticos climatológicos
Pronostico de demanda de viajeros

Plan agrícola

Maximizar ingresos regionales: ingresos agregados sobre todos los cultivos

Sujeto a que:

- Para cada cultivo y periodo, los recursos necesarios para los cultivos (tierra, agua, mano de obra) no superen su disponibilidad.

Inputs:

Pronósticos climatológicos
Pronostico de demanda

A formular…

Formulación de problemas- Ejemplo

Una empresa desea fabricar dos tipos de estructuras de acero tipo I y Tipo II. Su producción está limitada por las disponibilidades en acero (36 ton/semana), por las horas de mano de obra contratada (48 horas/semana) y por las horas de trabajo disponibles en la máquina (70 horas/semana). Cada estructura tipo I requiere 4 ton de acero , 3 horas de mano de obra y 10 horas de máquina. Cada estructura tipo II requiere 4 ton de acero, 6 horas hombre y 5 horas de máquina. La empresa obtiene \$300 y \$200 de utilidades por cada estructura tipo I y tipo II respectivamente.

Maximizar las ganancias por la producción por semana

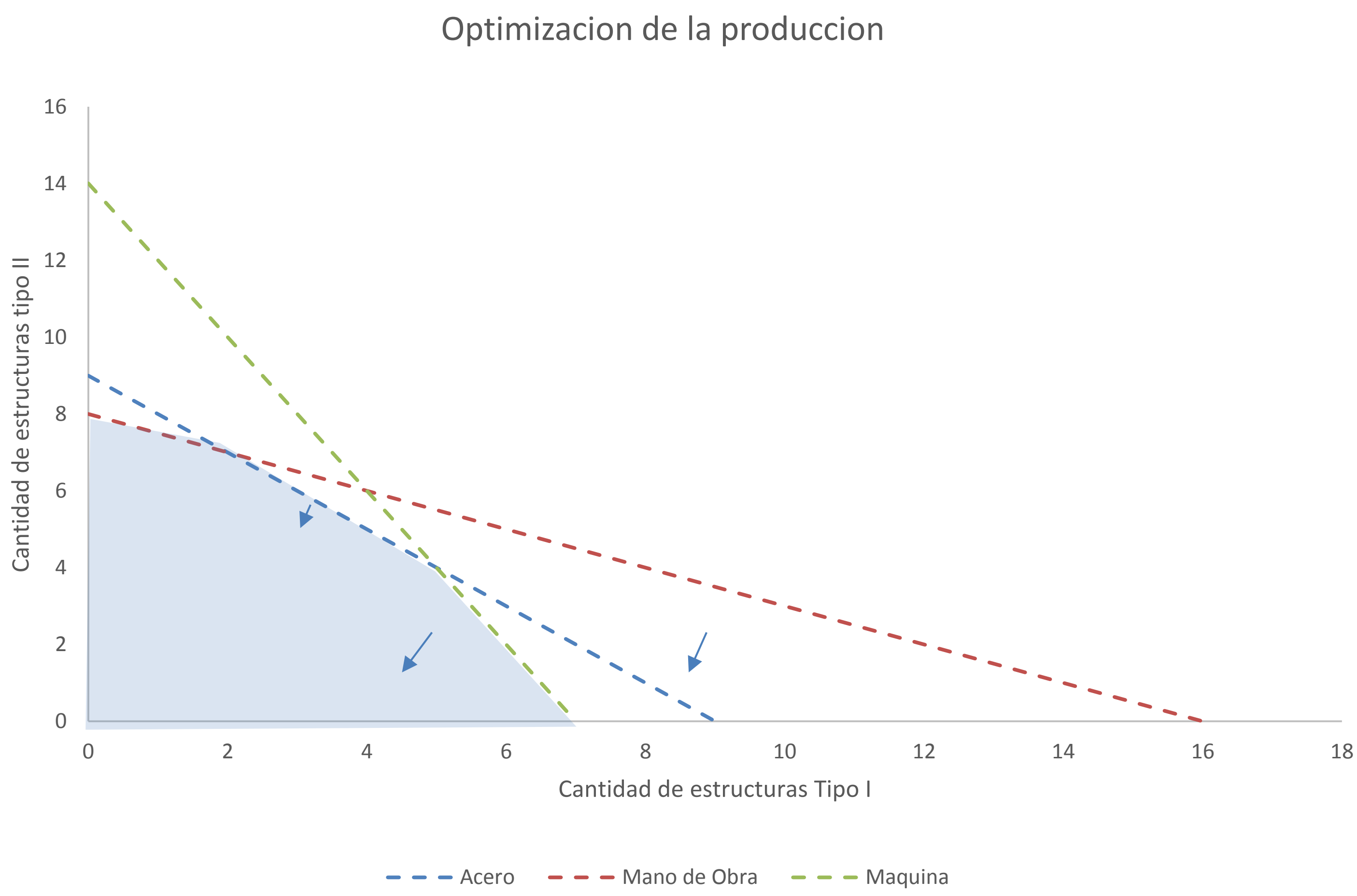
Sujeto a que para cada semana:
El acero usado no supere lo disponible
La mano de obra necesaria no supere la disponible
La maquina usada no supere la capacidad disponible
Las cantidades deben ser positivas

Maximizar $300\, X_I + 200\, X_{II}$ [\$/sem]

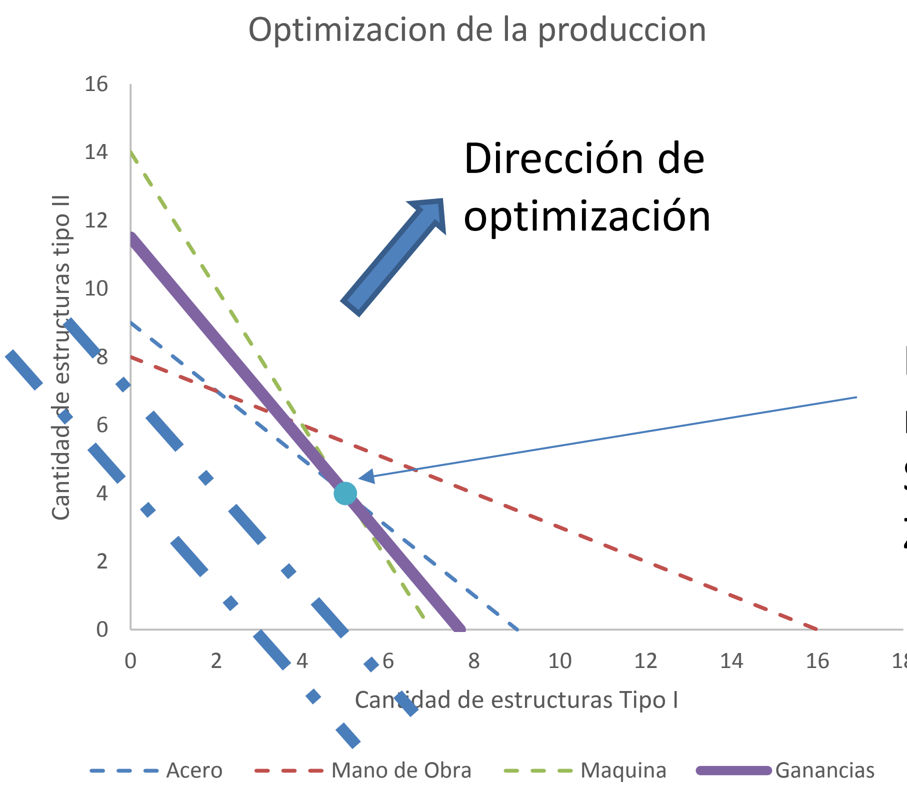
Sujeto a:

Acero $4X_I + 4\, X_{II} \leq 36$ [ton/sem]
Mano de obra $3X_I + 6\, X_{II} \leq 48$ [horas/sem]
Máquina $10X_I + 5X_{II} \leq 70$ [horas/sem]
No negatividad $X_I\ ,\ X_{II} \geq 0$

Región factible



Solución óptima (método gráfico)

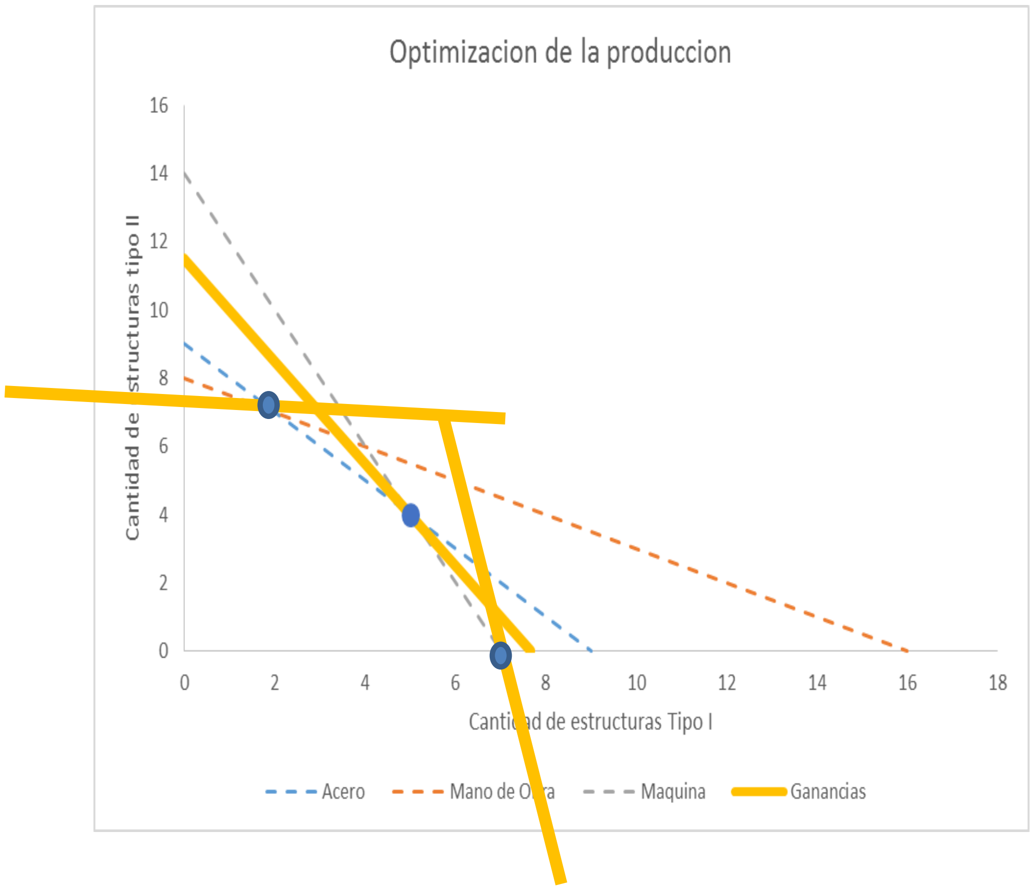


El punto en que ya sale de la región factible.

Solución optima X_I= 5 X_{II}= 4

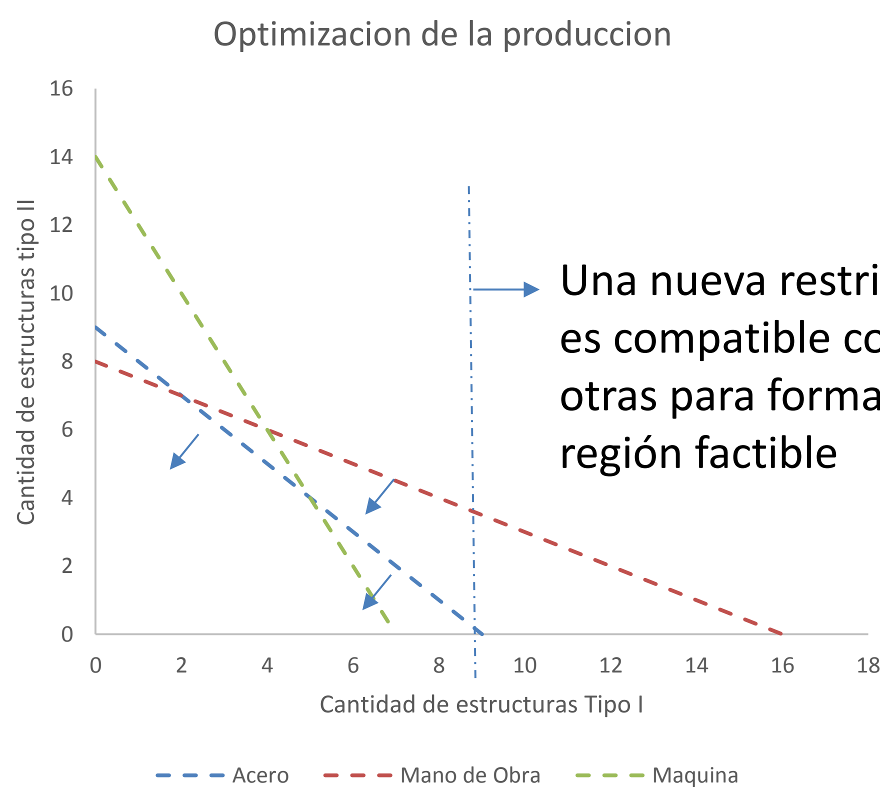
Z= 2300$/sem

Ojo: en PL la solución óptima siempre es un vértice de la región factible
(la cuál siempre es convexa)



Casos especiales

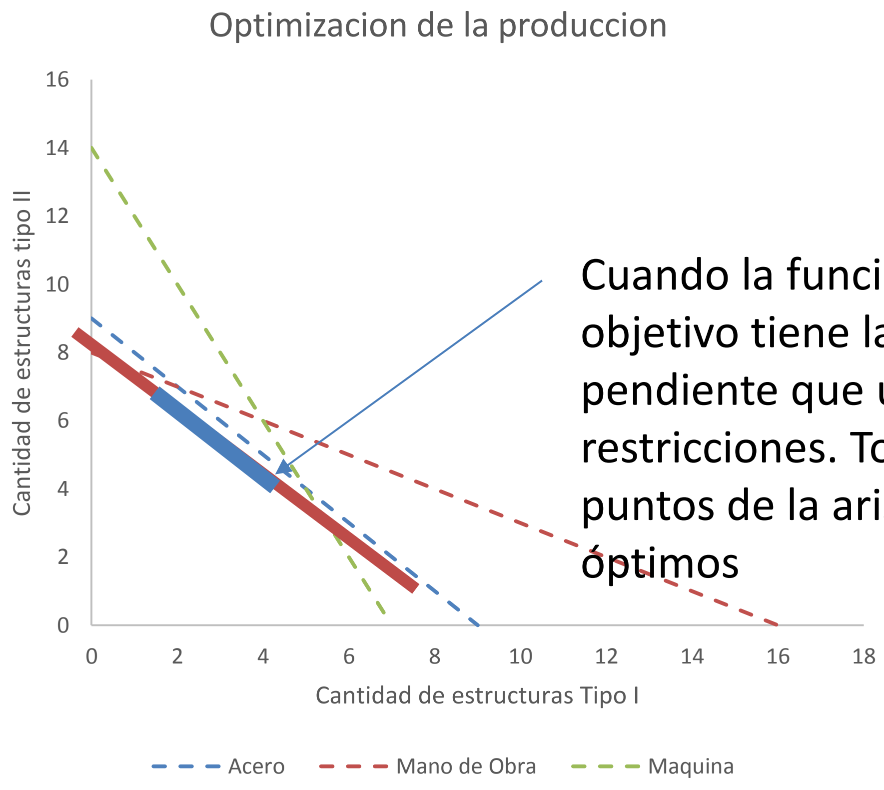
Soluciones no factibles



Una nueva restricción no es compatible con las otras para formar una región factible

Casos especiales

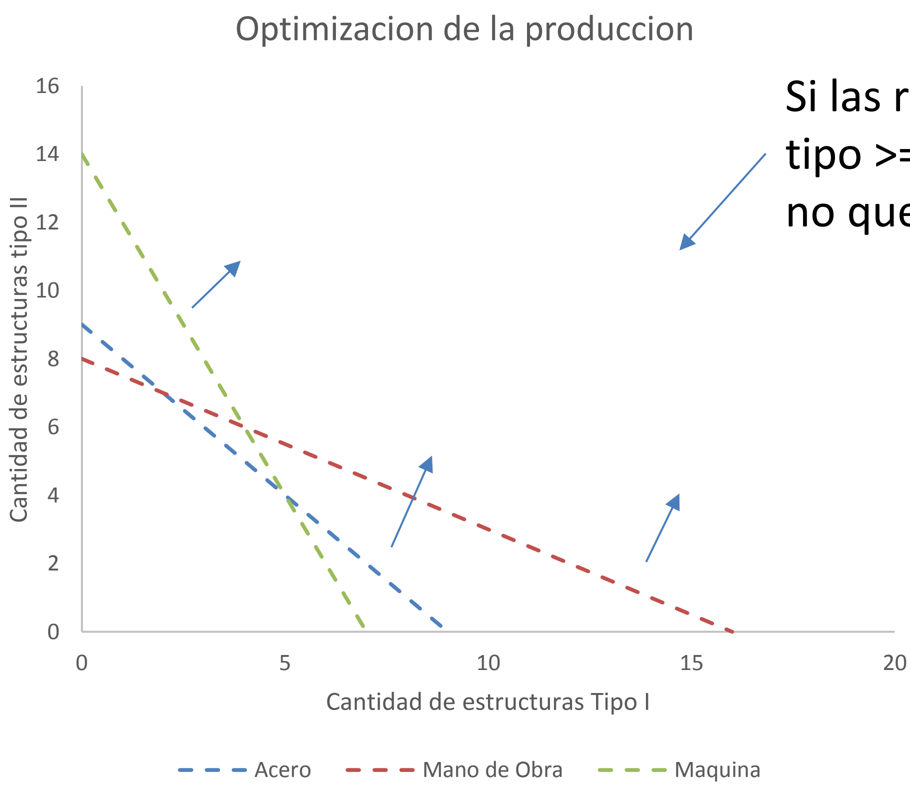
Soluciones múltiples (e infinitas)



Cuando la función objetivo tiene la misma pendiente que una de las restricciones. Todos los puntos de la arista son óptimos

Casos especiales

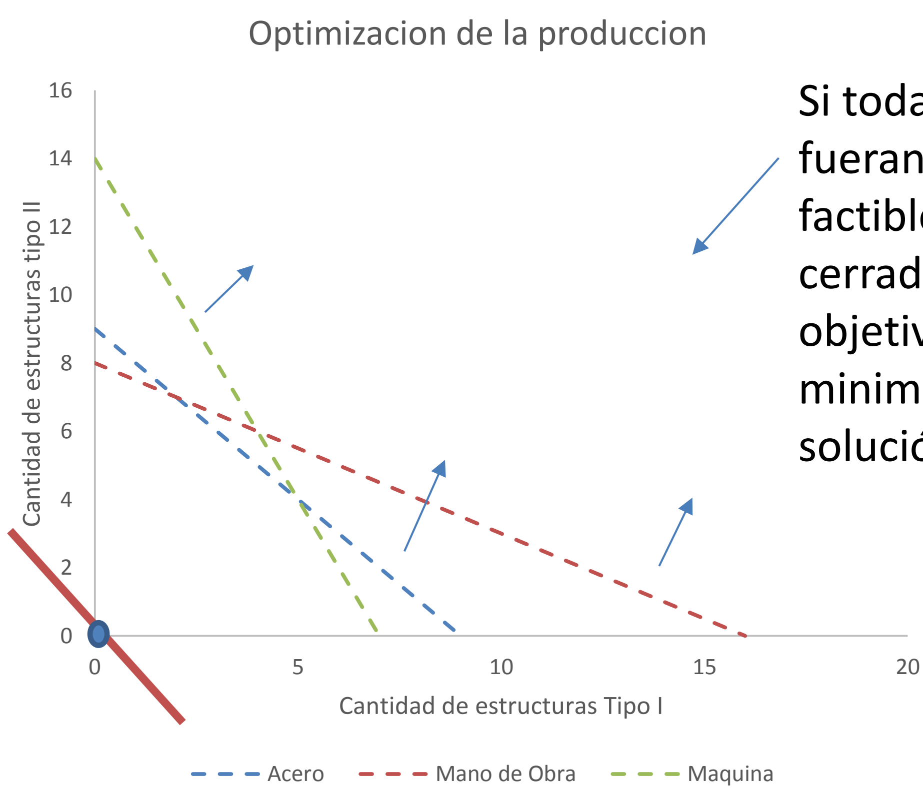
Región no acotada sin solución optima



Si las restricciones fueran tipo >= la región factible no quedaría cerrada

Casos especiales

Región no acotada con solución optima



Si todas las restricciones fueran tipo >= la región factible no quedaría cerrada pero si la función objetivo fuera para minimizar si tendría solución óptima en (0,0)

Restricciones tipo >=

Suponga ahora que estudios de mercado han considerado que la demanda de la viga tipo II debe exceder 5 ton que ya están contratados

Maximizar $300\, X_I + 200\, X_{II}$ [$/sem]

Sujeto a:

Acero	$4X_I + 4\, X_{II}$	$\leq$	36	[ton/sem]
Mano de obra	$3X_I + 6\, X_{II}$	$\leq$	48	[horas/sem]
Máquina	$10X_I + 5X_{II}$	$\leq$	70	[horas/sem]
De demanda viga tipo I	X_{II}	$\geq$	5	[ton/sem]

No negatividad X_I , X_{II} ≥ 0

La solución ya es X_I=4 ton, X_{II}=5 ton, se consume 36 ton de acero, 42 horas de mano de obra y 65 horas de máquina: las ganancias son de $2200, y cumple la expectativa de la demanda

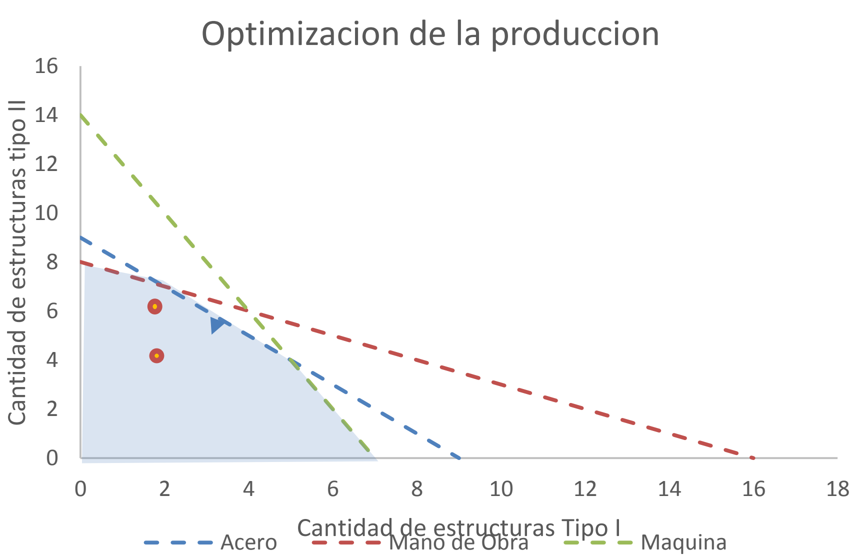
Programación entera

- Fíjese que en el problema del acero no exigimos que las variables fueran enteras, así que nos puso haber entregado un valor no entero.
- Si incluimos esa condición ya nuestro problema no clasifica como PL sino como Programación entera

Maximizar $300\,X_I + 200\,X_{II}$ [$/sem]

Sujeto a:

Acero [ton/sem]	$4X_I + 4\,X_{II}$	$\leq$	36
Mano de obra [horas/sem]	$3X_I + 6\,X_{II}$	$\leq$	48
Máquina [horas/sem]	$10X_I + 5X_{II}$	$\leq$	70
No negatividad	$X_I\ ,\ X_{II}$	$\geq$	0
Valores enteros	$X_I\ ,\ X_{II}$		enteros



La región factible no es continua y no necesariamente los valores enteros caen en vértices

Programación entera mixta

- Si nuestro problema contiene variables continuas y enteras ya clasifica como PEM.

Maximizar $300\ X_I \quad + 200\ X_{II}$ [$/sem]

Sujeto a:

Acero $4X_I \quad + 4\ X_{II} \quad \leq \quad 36$
[ton/sem]
Mano de obra $3X_I \quad + 6\ X_{II} \quad \leq \quad 48$
[horas/sem]
Máquina $10X_I \quad + 5X_{II} \quad \leq \quad 70$
[horas/sem]
No negatividad $X_I \quad , \quad X_{II} \quad \geq \ 0$
Solo una variable entera X_I entera

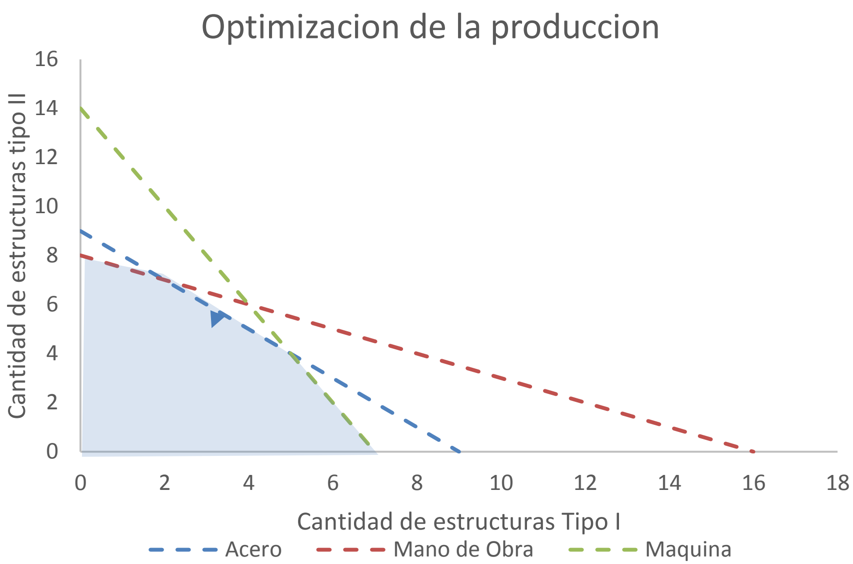
Programación no lineal

- Si en el problema del acero los beneficios se afectan si los dos tipos de estructura se construyen, la función objetivo **sería no lineal** y no necesariamente, la solución óptima está en un vértice de la región factible

Maximizar $300\,X_I + 200\,X_{II} - 30\,X_I\,X_{II}$ [$/sem]

Sujeto a:

Acero [ton/sem]	$4X_I$	$+ 4\,X_{II}$	$\leq$	36
Mano de obra [horas/sem]	$3X_I$	$+ 6\,X_{II}$	$\leq$	48
Máquina [horas/sem]	$10X_I$	$+ 5X_{II}$	$\leq$	70
No negatividad	X_I ,	X_{II}	$\geq$	0



En este caso la solución óptima es $X_I=7$ y $X_{II}= 0$ Z= 2100

EN PNL la solución óptima no necesariamente esta en un vértice

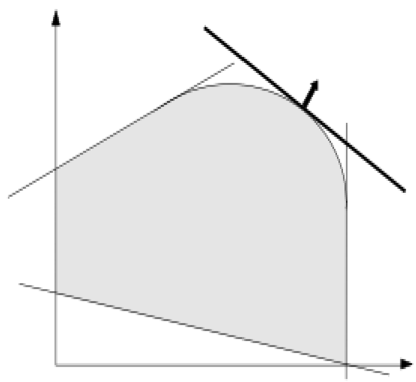


Figure 2.12: A non-corner solution of a nonlinear program

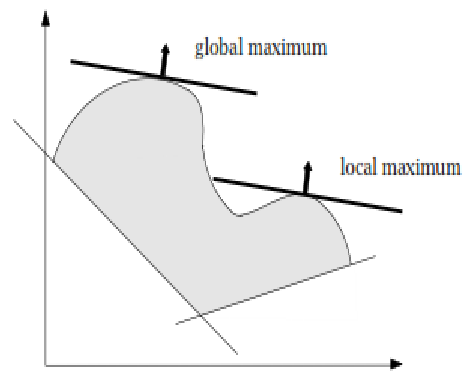


Figure 2.13: Local and global optima illustrated

La solución óptima no es única porque puede tener óptimos locales y óptimos globales

Representación explícita

Variables de decisión

X_I =cantidad de estructuras Tipo I a producir semanal

X_{II} =cantidad de estructuras Tipo II a producir semanal

Objetivo

Maximizar $300 X_I + 200 X_{II}$ [$/sem]

Sujeto a:

Acero

$4X_I + 4 X_{II} \leq 36$ [ton/sem]

Mano de obra

$3X_I + 6 X_{II} \leq 48$ [horas/sem]

Máquina

$10X_I + 5X_{II} \leq 70$ [horas/sem]

No negatividad $X_I , X_{II} \geq 0$

Representación explicita indexada

Variables de decisión

X_i =cantidad de estructuras Tipo i a producir semanal

Objetivo

Z= beneficios netos totales semanal

Índices (conjuntos)

i tipo de estructura, i=I,II

J recurso, j=acero, mano de obra, máquina

Parámetros (Datos)

Bi= ganancias netas unitarias del producto i

Cj = cantidad de recurso j

Rij = cantidad consumida por el producto i del recurso j

Maximizar $Z = \sum_{i=I}^{II} B_i x_i$ [$/sem]

Sujeto a: $\sum_{i=I}^{II} r_{ij} x_i \leq C_j$

Para cada recurso j

No negatividad $X_i \geq 0$

Trucos para formular PL

Cuando las condiciones del problema original de optimización no corresponden a la forma canónica de PL o cuando se desea incorporar elementos difíciles de expresar en funciones lineales, se puede usar varios trucos.

Todo esto debido a que es mucho más fácil resolver un PL que cualquier otro tipo de problema de optimización.

Un problema PL debe tener las siguientes condiciones: proporcionalidad, divisibilidad, Aditividad, certidumbre.

Tip 1: cuando las variables no son positivas o acotadas

Los métodos clásicos de solución de PL como el SIMPLEX, se basan en la positividad de las variables de decisión, así que si no se cumple esta condición debe tratarse de lograrlo mediante alguna estrategia.

Tip 2: Variables con cota inferior negativa

Restricción de la forma:

$$X_i \geq L_i$$

donde L_i es una constante negativa.

Truco: Se define $X_i' = X_i - L_i$ donde $X_i' \geq 0$ y reemplaza a X_i en el problema original

Ejemplo: Suponga que X_1 representa el aumento en la tasa de producción del producto 1. Actualmente la tasa de producción es de 10 unidades. Entonces la condición de la variable es:

$$\boxed{X_{\mathbf{1}} \geq \mathbf{-10}}$$

Se define $X_1' = X_1 - (-10)$ donde $X_1' \geq 0$

Es decir: $X_1' = X_1 + 10$

Problema Original	Problema equivalente
Max $Z = 3X_1 + 5X_2$	Max $Z = 3(X1' - 10) + 5X_2$
Sujeto a	Sujeto a
$X_1 \leq 4$	$X_1' - 10 \leq 4$
$2X_2 \leq 12$	$2X_2 \leq 12$
$3X_1 + 2X_2 \leq 18$	$3(X_1' - 10) + 2X_2 \leq 18$
$X_1 \geq -10, X_2 \geq 0$	$X_1' \geq 0, X_2 \geq 0$

Tip 3: Variables no restringidas en signo (n.r.s) (variables libres)

Truco: Se puede cambiar la variable n.r.s por la diferencia de 2 variables no negativas.

X_i n.r.s se reemplaza por dos variables positivas X_i^+ y X_i^- tal que:

$$X_i = X_i^+ - X_i^-$$

Ejemplo

Problema original	Problema equivalente
Max $Z = 3X_1 + 5X_2$	Max $Z = 3(X_1^+ - X_1^-) + 5(X_2^+ - X_2^-)$
Sujeto a	Sujeto a
$X_1 \leq 4$	$X_1^+ - X_1^- \leq 4$
$2X_2 \leq 12$	$2(X_2^+ - X_2^-) \leq 12$
$3X_1 + 2X_2 \leq 18$	$3(X_1^+ - X_1^-) + 2(X_2^+ - X_2^-) \leq 18$
X_1 n.r.s , X_2 n.r.s	$X_1^+ , X_1^-, X_2^+ , X_2^- \geq 0$

Lo anterior implica incorporar muchas variables nuevas, dos por cada variable n.r.s.

Otra opción: definir una nueva variable positiva Y y pata cada X_i n.r.s, definir nuevas variables $\mathbf{X_i^+}$, tal que $\mathbf{X_i = X_i^+ - Y}$

Siendo, por definición **$Y = -\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$**

$$\mathbf{X_i = X_i^+ - Y}$$

$$\mathbf{X_i^+ , Y >= 0}$$

Ejemplo: si las condiciones de $X_1 >= -10$ y $X_2 >= -5$,

si las soluciones actuales son: $X_1=-3$ y $X_2=-2$, entonces se garantiza que

$X_1=-3+3=0$ y $X_2= -2+3 = 1$ que son mayores de cero

Ejemplo

Problema original	Problema equivalente
Max $Z = 3X_1 + 5X_2$	Max $Z = 3(X_1^+ - Y) + 5X_2(X_2^+ - Y)$
Sujeto a	Sujeto a
$X_1 \leq 4$	$(X_1^+ - Y) \leq 4$
$2X_2 \leq 12$	$2(X_2^+ - Y) \leq 12$
$3X_1 + 2X_2 \leq 18$	$3(X_1^+ - Y) + 2(X_2^+ - Y) \leq 18$
X_1 n.r.s , X_2 n.r.s	$X_1^+ , X_2^+ , Y \geq 0$

En la formulación de las ecuaciones

Tip 1: Valores absoluto: por ejemplo minimizar distancia entre dos valores:

Minimizar $$Z=\sum_{i=1}^{n} c_i \left| x_i \right|$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij} x_i \geq \quad D_j \qquad \forall j=1,\ldots,m$$

$$x_i \geq 0 \qquad \forall i=1,\ldots,n$$

$$x_i = x_i^{+} - x_i^{-}$$

$$\left| x_i \right| = x_i^{+} + x_i^{-}$$

$$x_i^{+}, x_i^{-} \geq 0$$

Como la función objetivo no es lineal, se linealiza de la siguiente manera:
Se reemplaza x_i por dos nuevas variables positivas.

Y la formulación queda PL, así

Minimizar $$Z=\sum_{i=I}^{n} c_i (x_i^{+} + x_i^{-})$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij} \left(x_i^{+} - x_i^{-} \right) \geq \quad D_j \qquad \forall j=1,\ldots,m$$

$$x_i^{+}, x_i^{-} \geq 0 \qquad \forall i=1,\ldots,n$$

Tip 2. Función objetivo mini-max (minimizar un máximo):

Minimizar $\underset{k \in K}{Max} \sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i$

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij} x_i \geq \quad D_j \qquad \forall j = 1,\ldots,m$$

$$x_i \geq 0 \qquad \forall i = 1,\ldots,n$$

Como la función objetivo no es lineal, se linealiza de la siguiente manera:

Se incluye una nueva variable positiva y tal que $y = \max_k \left\{ \sum_i c_{ki} x_i \right\}$

y la formulación queda PL, así

Minimizar $Z = y$

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij} x_i \geq \quad D_j \qquad \forall j = 1,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i \leq y \qquad \forall k \in K$$

$$x_i, y \geq 0 \qquad \forall i = 1,\ldots,n$$

Tip 3. Un objetivo fraccional

Minimizar

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \alpha}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i + \beta}$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij} x_i \geq \quad D_j \qquad \forall j = 1,\dots,m$$

$$x_i \geq 0 \qquad \forall i = 1,\dots,n$$

Truco: la funcion objetivo se linealiza así: Se reescribe Z en función de t, donde: $t = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i + \beta}$

Y asi el problema corresponde al problema aun no lineal:

Minimizar $Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i t + \alpha t$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij} x_i \geq \quad D_j \qquad \forall j = 1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i x_i t + \beta t = 1$$

$$x_i \geq 0 \qquad \forall i = 1,\dots,n$$

$$t > 0$$

Si

$y_i = x_i t$

Minimizar $Z = \sum_{i=1}^{n} y_i t + \alpha t$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij} y_i \geq \quad D_j t \qquad \forall j = 1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i y_i + \beta t = 1$$

$$y_i \geq 0 \qquad \forall i = 1,\dots,n$$

$$t > 0$$

Esta versión ya si es PL

Formulación lineal por partes que dependan de un sola variable

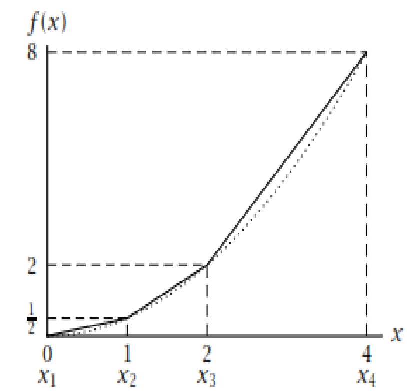
Si la función objetivo separada es no lineal, puede que sea posible dividirla en funciones univariables que luego pueden aproximarse a lineales sin demasiado error por ejemplo:

$$x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_3 = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)$$

Cada una de esas partes, que solo dependen de una variable, puede linealizarse de la siguiente manera, por ejemplo

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Los puntos x_1, x_2, x_3 y x_4 denotan 4 puntos de quiebre a lo largo de la variable x y $f(x_1)$,$f(x_2)$,$f(x_3)$ y $f(x_4)$ denotan las funciones correspondientes. En los valores x= 0, 1, 2 y 4, f=0, 12, 2 y 8. Cualquier punto entre los de quiebre es una suma ponderada de esos puntos de quiebre. Por ejemplo para $x = 3 = 0.5 \times 2 + 0.5 \times 4$, el valor aproximado $f(3) = 0.5 \times 2 + 0.5 \times 8 = 5$



Si definimos a: λ_1, λ_2, λ_3,λ_4 pesos positivos tal que:

$$f(x) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3) + \lambda_4 f(x_4)$$

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$$