Laboratorium identyfikacji systemów

Instytut Automatyki i Robotyki
Politechnika Poznańska
IAR-PP
oprac. Maciej M. Michałek

C3 Wsadowa parametryczna identyfikacja systemów

Ćwiczenie poświęcone jest wybranym metodom wsadowej identyfikacji parametrycznej, a mianowicie metodzie najmniejszych kwadratów (w skrócie: LS, zwanej też metodą błędu równaniowego) oraz metodzie zmiennych instrumentalnych (w skrócie: IV). Podczas ćwiczenia przyjęte zostanie założenie o znajomości struktury modelu przy nieznajomości wartości parametrów modelu – model i identyfikacja typu GRAY-BOX. Wsadowe metody identyfikacji wykorzystują jednocześnie wszystkie dostępne dane pomiarowe (tj. cały *wsad* danych) do oszacowania wartości parametrów modelu.

1 Identyfikacja systemu statycznego metodą LS

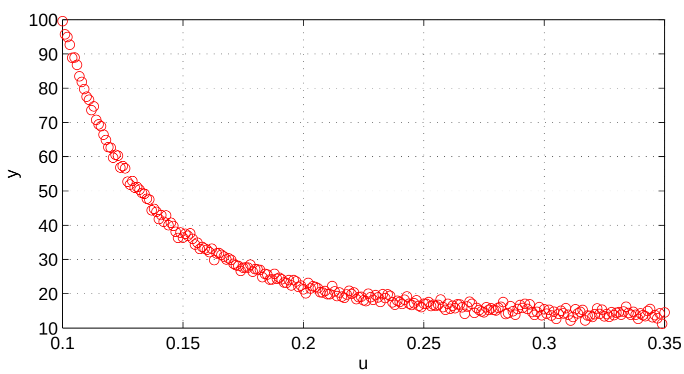
Systemem *statycznym* nazywamy:

- system *pozbawiony dynamiki* – wartość *ustalona* odpowiedzi y takiego systemu pojawia się na wyjściu natychmiast po podaniu pobudzenia u (brak stanów przejściowych) lub
- zależność pomiędzy wartościami wejścia sterującego u a wartościami odpowiedzi/wyjścia y rozważanego systemu dynamicznego **w stanie ustalonym**, tj. po zaniknięciu składowych przejściowych (stany przejściowe istnieją lecz nas nie interesują w procesie modelowania).

Przykładowy zbiór danych pomiarowych w postaci par *wartość wejścia u wraz z odpowiadającą jej ustaloną wartością wyjścia y* prezentuje wykres z rysunku 1. System statyczny będziemy traktować jako odwzorowanie (liniowe bądź nieliniowe) między wejściem u i wyjściem y, które można opisać równaniem:

$$y = f_0(u, \boldsymbol{p}_0) + v, \qquad \boldsymbol{p}_\mathrm{o} = [p_{1\mathrm{o}}\ p_{2\mathrm{o}} \dots p_{d\mathrm{o}}]^\top, \tag{1}$$

gdzie $\boldsymbol{p}_\mathrm{o}$ jest wektorem *prawdziwych* (nieznanych) parametrów systemu, $f_\mathrm{o}(u, \boldsymbol{p}_\mathrm{o})$ reprezentuje prawdziwe odwzorowanie wejścia w wyjście systemu, natomiast v jest zakłóceniem stochastycznym obecnym w pomiarach wyjścia y. W ramach identyfikacji parametrycznej poszukujemy parametrów $\boldsymbol{p} = [p_1\ p_2 \dots p_d]^\top$ dla modelu $f(u, \boldsymbol{p})$, którego struktura jest zgodna (z założenia) ze strukturą odwzorowania $f_\mathrm{o}(u, \boldsymbol{p}_\mathrm{o})$. Parametryzację modelu $f(\cdot)$ można przeprowadzić



Rysunek 1: Przykładowy zbiór par (u_n, y_n), $n = 1, \dots, N$, wynikający ze statycznej zależności między wejściem u a wyjściem y pewnego systemu

na różne sposoby. W ćwiczeniu rozważać będziemy tylko parametryzacje liniowe, czyli takie które prowadzą do modelu w postaci regresji liniowej (model zapisany jako liniowa kombinacja parametrów $p_i,\ i = 1, 2, \ldots, d$ oraz wybranych funkcji bazowych):

$$f(u, \boldsymbol{p}) \triangleq \sum_{i=1}^{d} p_i \cdot F_i(u) \qquad \Rightarrow \qquad \hat{y} = \sum_{i=1}^{d} p_i \cdot F_i(u). \tag{2}$$

Model (2) można zapisać w postaci regresji liniowej $\hat{y} = \boldsymbol{\varphi}^\top(u)\boldsymbol{p}$, dla $\boldsymbol{p} = [p_1\ p_2 \ldots p_d]^\top$, i w konsekwencji model mający wyjaśniać dane pomiarowe generowane przez równanie (1) przyjmie postać:

$$y = f(u, \boldsymbol{p}) + v \qquad \Rightarrow \qquad y = \boldsymbol{\varphi}^\top(u)\boldsymbol{p} + v, \tag{3}$$

gdzie $\boldsymbol{\varphi}(u) = [F_1(u)\ F_2(u)\ \ldots\ F_d(u)]^\top$ jest wektorem regresji (regresorem) zależnym poprzez funkcje bazowe $F_i(u)$ od deterministycznego wejścia u. Zastosowanie metody najmniejszej sumy kwadratów tzw. błędów równaniowych $\varepsilon_n(\boldsymbol{p}) \triangleq y_n - \boldsymbol{\varphi}_n^\top(u)\boldsymbol{p}$, zapisanych dla numerów pomiaru $n \in [1, N]$ na podstawie wzoru (3), prowadzi do estymatora metody LS:

$$\hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{LS}} = (\boldsymbol{\Phi}^\top\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Phi}^\top\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1^\top(u) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_N^\top(u) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times d}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \tag{4}$$

gdzie $\boldsymbol{\Phi}$ jest (z założenia) deterministyczną macierzą regresji zależną jedynie od deterministycznego wejścia u. Stopień ufności jakim możemy obdarzyć uzyskany wynik estymacji[1] wynika z macierzy kowariancji estymat $\mathrm{Cov}[\hat{\boldsymbol{p}}_N^{LS}]$, którą przy zakłóceniu v w postaci szumu białego możemy oszacować na podstawie N par pomiarów $\{u_n, y_n\}_{n=1}^N$ jak następuje:

$$\mathrm{Cov}[\hat{\boldsymbol{p}}_N^{LS}] \approx \hat{\sigma}^2(\boldsymbol{\Phi}^\top\boldsymbol{\Phi})^{-1}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-d}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2(\hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{LS}}), \quad \varepsilon_i(\hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{LS}}) \triangleq y_i - \boldsymbol{\varphi}_i^\top(u)\hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{LS}}, \tag{5}$$

przy czym $\hat{\sigma}^2$ jest estymatą wariancji zakłócenia v, d jest liczbą estymowanych parametrów, natomiast $\varepsilon_i(\hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{LS}})$ jest tzw. błędem resztowym. Gdy v jest szumem kolorowym o zerowej wartości oczekiwanej, wówczas macierz kowariancji estymat

$$\mathrm{Cov}[\hat{\boldsymbol{p}}_N^{LS}] = (\boldsymbol{\Phi}^\top\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Phi}^\top\boldsymbol{P}_v\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\Phi}^\top\boldsymbol{\Phi})^{-1} \approx (\boldsymbol{\Phi}^\top\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Phi}^\top\hat{\boldsymbol{P}}_v\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\Phi}^\top\boldsymbol{\Phi})^{-1} \tag{6}$$

wymaga oszacowania macierzy $\hat{\boldsymbol{P}}_v$ dla wektora zakłóceń $\boldsymbol{v} = [v_1\ \ldots\ v_N]^\top$.

1.1 Identyfikacja systemu statycznego metodą LS.

- Plik `IdentWsadowaStat.mat` zawiera dwa zbiory danych pomiarowych $\mathrm{Z}^N = \{u_n, y_n\}_{n=1}^N$ zebrane z wejścia i wyjścia obiektu statycznego i zapisane w macierzach `DaneStatW, DaneStatC`, przy czym pierwsza z nich zawiera pomiary zakłócone szumem białym, a druga szumem kolorowym. Wprowadzić dane pomiarowe do przestrzeni roboczej Matlab'a istrukcją `load IdentWsadowaStat.mat`; wyświetlić dane pomiarowe i dokonać ich oglądu.

- Przyjmując następującą strukturę modelu odwzorowania statycznego

$$f(u, \boldsymbol{p}) = p_1 + \sum_{i=2}^{4} \frac{p_i}{u^{i-1}} \tag{7}$$

  zapisać powyższy model w postaci regresji liniowej i przeprowadzić identyfikację parametryczną stosując wzór (4). Obliczenia wykonać niezależnie dla przypadku zakłócenia szumem białym i kolorowym.

[1] Należy pamiętać, że estymator (4) jest zmienną losową.

- Wykreślić na wspólnym wykresie dane pomiarowe oraz zidentyfikowane odwzorowanie $\hat{y} = f(u, \boldsymbol{p})$ dla $\boldsymbol{p} = \hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{LS}}$. Ocenić jakość identyfikacji.
- Sprawdzić wpływ liczby N danych pomiarowych na jakość identyfikacji – wybrać do obliczeń podzbiór dostępnych danych pomiarowych z całego zakresu zmienności u, np. co dziesiątą parę $\{u_j, y_j\}$ ze zbioru $\mathrm{Z}^N = \{u_n, y_n\}_{n=1}^N$.
- Oszacować macierz kowariancji (5) (tylko dla danych z zakłóceniem białym) i określić na jej podstawie przedziały ufności dla poszczególnych estymat parametrów (patrz Uwaga 1, str. 7). O czym mówi macierz $\mathrm{Cov}[\hat{\boldsymbol{p}}_N^{LS}]$ i przedziały ufności?

2 Identyfikacja pośrednia systemu dynamicznego czasu ciągłego metodami LS oraz IV

Identyfikacja pośrednia systemu dynamicznego czasu ciągłego polega na estymacji parametrów systemu czasu dyskretnego, będącego aproksymacją oryginalnego systemu czasu ciągłego, a następnie na przekształceniu uzyskanego modelu czasu dyskretnego do modelu czasu ciągłego. Dlatego rozważania w tym miejscu skupione będą na estymacji parametrów systemów czasu dyskretnego.

Rozważmy rzeczywisty system dynamiczny czasu dyskretnego

$$y(n) = G_{\mathrm{o}}(q^{-1}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{o}})u(n) + v(n), \tag{8}$$

gdzie $G_{\mathrm{o}}(q^{-1}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{o}})$ reprezentuje nieznaną dynamikę rzeczywistego systemu o nieznanych rzeczywistych parametrach $\boldsymbol{p}_{\mathrm{o}}$, oraz jego model czasu dyskretnego klasy ARX:

$$A(q^{-1}, \boldsymbol{p})y(n) = B(q^{-1}, \boldsymbol{p})u(n) + e(n) \qquad \Rightarrow \qquad y(n) = G(q^{-1}, \boldsymbol{p})u(n) + v(n), \tag{9}$$

w którym $v(n) = H(q^{-1}, \boldsymbol{p})e(n)$ jest zakłóceniem kolorowym (filtrowanym szumem białym), $e(n)$ jest (z założenia) szumem białym, $G(q^{-1}, \boldsymbol{p}) = \frac{B(q^{-1}, \boldsymbol{p})}{A(q^{-1}, \boldsymbol{p})}$ oraz $H(q^{-1}, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{A(q^{-1}, \boldsymbol{p})}$ są operatorami transmitancyjnymi, odpowiednio, toru sterowania i toru zakłócenia modelu, natomiast $A(q^{-1}, \boldsymbol{p})$ oraz $B(q^{-1}, \boldsymbol{p})$ są wielomianami operatora q^{-1}, odpowiednio, stopnia n_a i n_b. Zakładając, że struktura operatora $G(q^{-1}, \boldsymbol{p})$ jest taka sama jak struktura $G_{\mathrm{o}}(q^{-1}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{o}})$, zasadniczym celem identyfikacji parametrycznej będzie estymacja parametrów $\boldsymbol{p}$ modelu (9) na podstawie zbioru pomiarowego $\mathrm{Z}^N = \{y(nT_p), u(nT_p)\}_0^{N-1}$ z wykorzystaniem wsadowych metod LS oraz IV.

Struktura (9) pozwala na przepisanie równania modelu, a w konsekwencji także na wyrażenie błędu równaniowego ε, jako liniowej funkcji szukanych parametrów:

$$y(n) = \boldsymbol{\varphi}^\top(n)\boldsymbol{p} + e(n), \qquad \varepsilon(n, \boldsymbol{p}) \triangleq y(n) - \boldsymbol{\varphi}^\top(n)\boldsymbol{p}, \tag{10}$$

przy czym wektor regresji

$$\boldsymbol{\varphi}^\top(n) = [-y(n-1) \ \dots \ -y(n-n_a) \quad u(n-1) \ \dots \ u(n-n_b)] \tag{11}$$

nie jest tutaj funkcją deterministyczną ale stochastyczną (w wyniku auto-regresji modelu klasy ARX). Zastosowanie metody LS do błędów równaniowych (10) dla $n \in [1, N]$ prowadzi do klasycznej postaci estymatora LS parametrów modelu:

$$\hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{LS}} = (\boldsymbol{\Phi}^\top\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Phi}^\top\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^\top(1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}^\top(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times d}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \tag{12}$$

przy czym $\mathbf{\Phi}$ jest tym razem stochastyczną macierzą regresji zależną od poprzednich próbek wyjścia y oraz wejścia u systemu. Jeżeli dane pomiarowe Z^N spełniają założenie poczynione w modelu (9), że zakłócenie v w rzeczywistym systemie (8) wynika z filtracji

$$v(n) = \frac{1}{A(q^{-1}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{o}})} e(n), \tag{13}$$

wówczas macierz kowariancji estymat parametrów dla skończonej liczby danych ($N < \infty$) szacujemy następująco:

$$\mathrm{Cov}[\hat{\boldsymbol{p}}_N^{LS}] \approx \hat{\sigma}^2(\mathbf{\Phi}^\top \mathbf{\Phi})^{-1}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-d}\sum_{n=1}^{N} \varepsilon^2(n, \hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{LS}}), \quad \varepsilon(n, \hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{LS}}) \triangleq y(n) - \boldsymbol{\varphi}^\top(n)\hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{LS}}, \tag{14}$$

gdzie $\varepsilon(n, \hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{LS}})$ jest tzw. błędem resztowym w chwili n, natomiast d jest liczbą estymowanych parametrów. Jeżeli założenie (13) jest spełnione i jednocześnie macierz $\mathbf{\Phi}^\top\mathbf{\Phi}$ jest nieosobliwa (jest pełnego rzędu równego d), wówczas estymator (12) jest zgodny, tzn. zachodzi $\mathrm{plim}_{N\to\infty}(\hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{LS}} - \boldsymbol{p}_{\mathrm{o}}) = \mathbf{0}$ (zbieżność z prawdopodobieństwem równym 1).

Jeśli założenie (13) nie jest spełnione przez dane pomiarowe Z^N, tj. hipoteza o białości błędu równaniowego i tym samym zakłócenia w równaniu (10) nie jest prawdziwa, to równanie modelu należy zapisać w bardziej ogólnej postaci

$$y(n) = \boldsymbol{\varphi}^\top(n)\boldsymbol{p} + v(n), \tag{15}$$

gdzie $v(n)$ ma teraz charakter szumu kolorowego skorelowanego ze zmiennymi regresyjnymi zależnymi od wyjścia y, tj. zachodzi $\mathrm{E}[\boldsymbol{\varphi}(n)v(n)] \not\equiv \mathbf{0}$. W takim przypadku estymator (12) jest generalnie obciążony, a wyznaczane na jego podstawie estymaty parametrów mogą istotnie różnić się od $\boldsymbol{p}_{\mathrm{o}}$. Aby poprawić jakość estymacji parametrycznej w takim przypadku można zastosować alternatywną metodę identyfikacji parametrycznej, bardziej odporną na właściwości zakłóceń obecnych w danych pomiarowych Z^N, a mianowicie metodę zmiennych instrumentalnych (IV). Istota tej metody sprowadza się do znalezienia i wykorzystania do obliczeń takiego wektora zmiennych pomocniczych $\boldsymbol{z}(n)$, który spełnia dwa warunki:

(w1) jest nieskorelowany z zakłóceniem $v(n)$, tj. $\mathrm{E}[\boldsymbol{z}(n)v(n)] \equiv \mathbf{0}$,
(w2) jest (silnie) skorelowany ze zmiennymi regresji w wektorze $\boldsymbol{\varphi}(n)$, co oznacza, że macierz $\mathrm{E}[\boldsymbol{z}(n)\boldsymbol{\varphi}^\top(n)]$ jest nieosobliwa.

Załóżmy chwilowo, że taki wektor zmiennych instrumentalnych $\boldsymbol{z}(n)$ istnieje i możemy go utworzyć. Wówczas estymator wsadowy metody IV przyjmuje następującą postać:

$$\hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{IV}} = (\boldsymbol{Z}^\top\mathbf{\Phi})^{-1}\boldsymbol{Z}^\top\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}^\top(1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}^\top(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times d}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \tag{16}$$

gdzie $\boldsymbol{Z}$ jest macierzą zmiennych instrumentalnych, $\dim(\boldsymbol{z}) = \dim(\boldsymbol{\varphi}) = d$, natomiast $\mathbf{\Phi}$ jest macierzą regresji skonstruowaną analogicznie jak w metodzie LS. Jeżeli sygnał wejściowy $u(n)$ oraz zakłócenie $v(n)$ z równania (15) są wzajemnie nieskorelowane (co wymusza brak obecności sprzężenia zwrotnego między sygnałami u i y), wówczas estymator (16) jest zgodny, tj. zachodzi $\mathrm{plim}_{N\to\infty}(\hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{IV}} - \boldsymbol{p}_{\mathrm{o}}) = \mathbf{0}$ (zbieżność z prawdopodobieństwem równym 1) pomimo niespełnienia założenia (13).

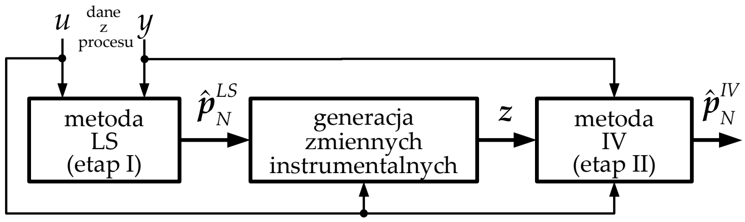
Istnieje szereg sposobów wyznaczania zmiennych instrumentalnych $\boldsymbol{z}(n)$. Poniżej przytoczymy jeden z nich, który dalej będzie wykorzystany w ćwiczeniu. Załóżmy, że przeprowadziliśmy identyfikację parametryczną metodą LS dla modelu (9) w przypadku, w którym założenie (13) nie jest spełnione przez dane Z^N. Otrzymaliśmy zatem wektor obciążonych estymat $\hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{LS}}$. Do wyznaczenia zmiennych instrumentalnych można wykorzystać wektor $\hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{LS}}$ prowadząc następujące obliczenia

$$x(n) \triangleq G(q^{-1}, \hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{LS}})u(n), \tag{17}$$

gdzie $G(q^{-1}, \hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{LS}}) = B(q^{-1}, \hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{LS}})/A(q^{-1}, \hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{LS}})$ jest operatorem transmitancyjnym z modelu (9). Wektor zmiennych instrumentalnych ma teraz postać:

$$\boldsymbol{z}^\top(n) \triangleq [-x(n-1) \;\; -x(n-2) \ldots -x(n-n_a) \quad u(n-1)\; u(n-2) \ldots u(n-n_b)], \tag{18}$$

którego struktura jest analogiczna do struktury wektora regresji $\boldsymbol{\varphi}^\top(n)$, z tą różnicą, że próbki wyjścia y zostały podmienione próbkami x liczonymi wg wzoru (17). Z równania (17) wynika,



Rysunek 2: Schemat dwuetapowej procedury identyfikacji metodą IV, gdy zmienne instrumentalne $\boldsymbol{z}(n)$ wyznaczane są na podstawie definicji (18) i wzoru (17)

że $x(n)$ jest po prostu bieżącą próbką odpowiedzi modelu symulowanego obliczaną na podstawie przyjętej struktury modelu (9) z wejściem $u(n)$ branym z wejścia systemu i z wektorem estymat obliczanym wstępnie na podstawie metody LS. Zatem identyfikacja ma tutaj charakter dwuetapowy LS→IV|LS zilustrowany na rys. 2). Definicja (18) pozwala na skuteczne zastosowanie metody IV i uzyskanie estymat $\hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{IV}}$ bliższych wartościom prawdziwym $\boldsymbol{p}_\mathrm{o}$ (w porównaniu z $\hat{\boldsymbol{p}}_N^{\mathrm{LS}}$) pomimo, że zakłócenie $v(n)$ w (15) nie jest szumem białym.

Informacje na temat danych pomiarowych zawartych w pliku `IdentWsadowaDyn.mat`:

- postaci macierzy z danymi: `DaneDynW=[u yw]`, `DaneDynC=[u yc]`
- horyzont czasowy symulacji: `t=0:Tp:(N-1)*Tp`, `N=4001`, okres próbkowania `Tp=0.01` s
- struktura transmitancji toru sterowania systemu: $G_\mathrm{o}(s, \boldsymbol{p}_\mathrm{o}^c) = k_\mathrm{o}/(1+sT_\mathrm{o}) = k_\mathrm{o}/A(s, T_\mathrm{o})$
- parametry identyfikowanego systemu czasu ciągłego: $k_\mathrm{o} = 2.0$, $T_\mathrm{o} = 0.5$
- zastosowany sygnał pobudzający: $u(t) = 0.2\sin(5t) + 0.1\sin(2t) + 0.5\cos(2t)$
- sposób generowania zakłócenia białego dla struktury CARX: $[v(t)] = H(s)[e_E(t)]$, gdzie $H(s) := 1/A(s, T_\mathrm{o}) \;\Rightarrow$ `v = lsim(H,e,t,'zoh')`, `e = randn(N,1)`
- sposób generowania zakłócenia kolorowego dla struktury CARX: $[v(t)] = H(s)[e_E(t)]$ dla $H(s) := 0.5/(1+0.05s) \;\Rightarrow$ `v = lsim(H,e,t,'zoh')`, `e = randn(N,1)`
- sposób generowania zakłóconej odpowiedzi systemu: `y = lsim(Go,u,t,'zoh') + v`

2.1 Identyfikacja parametrów modelu czasu dyskretnego metodą LS.

- Struktura transmitancji $G_\mathrm{o}(s)$ toru sterowania pewnego rzeczywistego systemu czasu ciągłego i jego model czasu dyskretnego są opisane w następujący sposób:

$$G_\mathrm{o}(s, \boldsymbol{p}_\mathrm{o}^c) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_\mathrm{o}}{T_\mathrm{o}s+1} \quad \overset{\text{dyskret.}}{\Longrightarrow} \quad G(z, \boldsymbol{p}) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{k(1-e^{-T_p/T})}{z - e^{-T_p/T}}, \tag{19}$$

gdzie $\boldsymbol{p}_\mathrm{o}^c = [k_\mathrm{o}\; T_\mathrm{o}]^\top$ jest wektorem nieznanych prawdziwych parametrów systemu, natomiast strukturę modelu czasu dyskretnego reprezentowanego transmitancją $G(z, \boldsymbol{p})$ wyznaczono metodą 'zoh' (transformacja skokowo-inwariantna). Na podstawie transmitancji $G(z, \boldsymbol{p})$ możemy zapisać model czasu dyskretnego systemu z użyciem operatora q^{-1} w postaci

$$y(n) = G(q^{-1}, \boldsymbol{p})u(n) + v(n), \tag{20}$$

gdzie $v(n)$ reprezentuje zakłócenie stochastyczne (o nieznanych właściwościach).

- Na podstawie transmitancji (19) zapisać model (20) i przepisać go w postaci regresji liniowej wyróżniając regresor oraz wektor parametrów zastępczych modelu.

- Plik `IdentWsadowaDyn.mat` zawiera dane pomiarowe $Z^N = \{u(nT_p), y(nT_p)\}_0^{N-1}$ zapisane w dwóch macierzach `DaneDynW` i `DaneDynC`, przy czym pierwsza z nich zawiera pomiary z zakłóceniem białym, a druga z zakłóceniem kolorowym. Wprowadzić dane do przestrzeni roboczej Matlab'a instrukcją `load IdentWsadowaDyn.mat`; wyświetlić dane pomiarowe i dokonać ich oglądu. Dane z obu macierzy podzielić na dwa podzbiory (np. w proporcji 50% do 50%): Z_{est} używane do estymacji parametrów (dane estymujące) oraz Z_{wer} używane do weryfikacji modelu (dane weryfikacyjne).

- Zapisując strukturę modelu (20) w klasie modeli ARX przeprowadzić identyfikację parametryczną modelu stosując estymator (12) oraz zbiór danych Z_{est}. Obliczenia wykonać niezależnie dla przypadku zakłócenia białego i kolorowego.

- Na podstawie wyznaczonego wektora $\hat{\boldsymbol{p}}_N^{\text{LS}}$ zrekonstruować estymaty $\hat{k}$ oraz $\hat{T}$ parametrów systemu czasu ciągłego. Porównać $\hat{k}$ i $\hat{T}$ z parametrami k_{o} oraz T_{o}.

- Zilustrować na wspólnym wykresie (w dziedzinie czasu):

  - zmierzoną odpowiedź $y(n)$ systemu ze zbioru Z_{wer},
  - odpowiedź niezakłóconą $y_{\text{o}}(n)$ systemu (w praktyce niedostępną!) na wymuszenie $u(n)$ z danych Z_{wer},
  - odpowiedź predyktora jednokrokowego $\hat{y}(n|n-1)$ dla $y(n)$ oraz wymuszenia $u(n)$ wziętych z danych Z_{wer},
  - odpowiedź modelu symulowanego $y_m(n)$ na wymuszenie $u(n)$ z danych Z_{wer}.

  Ocenić jakościowo oraz ilościowo wynik identyfikacji; do oceny ilościowej obliczyć wartości wskaźników:

  $$V_p \triangleq \frac{1}{N_v}\sum_{n=1}^{N_v}[y(n)-\hat{y}(n|n-1)]^2, \qquad V_m \triangleq \frac{1}{N_v}\sum_{n=1}^{N_v}[y_{\text{o}}(n)-y_m(n)]^2, \tag{21}$$

  gdzie N_v oznacza liczbę danych ze zbioru Z_{wer}. Porównać obliczone wartości wskaźników dla identyfikacji na podstawie danych z macierzy `DaneDynW` i `DaneDynC`.

- Dla przypadku danych z zakłóceniem białym wyznaczyć i zinterpretować macierz kowariancji (14) oraz przedziały ufności dla estymat $\hat{\boldsymbol{p}}_N^{\text{LS}}$ (patrz: Uwaga 1, str. 7).

2.2 Identyfikacja parametrów modelu czasu dyskretnego metodą IV.

- Wykorzystując dane pomiarowe zapisane w macierzy `DaneDynC` przeprowadzić identyfikację parametryczną systemu stosując model (20) i estymator IV ze wzoru (16) dla danych ze zbioru Z_{est}. W tym celu utworzyć wektor zmiennych instrumentalnych $\boldsymbol{z}(n)$ a następnie macierz $\boldsymbol{Z}$; do uzyskania zmiennych instrumentalnych wykorzystać metodę opisaną wzorami (17)-(18).

- Na podstawie wyznaczonego wektora $\hat{\boldsymbol{p}}_N^{\text{IV}}$ zrekonstruować estymaty $\hat{k}$ oraz $\hat{T}$ parametrów systemu czasu ciągłego. Porównać $\hat{k}$ i $\hat{T}$ z parametrami k_{o} oraz T_{o}.

- Dla wyników identyfikacji metodą IV (analogicznie jak w przypadku identyfikacji metodą LS) zilustrować na wspólnym wykresie (w dziedzinie czasu) przebiegi sygnałów: $y(n)$, $y_{\text{o}}(n)$, $\hat{y}(n|n-1)$ oraz $y_m(n)$ dla $y(n)$ oraz wymuszenia $u(n)$ wziętych z danych Z_{wer}. Ocenić jakościowo oraz ilościowo wynik identyfikacji; do oceny ilościowej obliczyć wskaźniki (21) i porównać ich wartości z tymi uzyskanymi po identyfikacji metodą LS (dla danych z macierzy `DaneDynC`).

Uwaga 1 *Dla nieobciążonego estymatora metody LS* **w przypadku regresora deterministycznego** *oraz dla danych zakłóconych szumem białym i przy założeniu bardzo dużej liczby pomiarów N (a w praktyce $N \geqslant 300$) możemy zapisać:*

$$(\hat{\boldsymbol{p}}_N^{LS} - \boldsymbol{p}_\mathrm{o}) \in \mathcal{N}(\mathbf{0}, \hat{\boldsymbol{P}}_N) \qquad \Rightarrow \qquad (\hat{p}_{Ni}^{LS} - p_{i\mathrm{o}}) \in \mathcal{N}(0, \hat{P}_{Nii}) \tag{22}$$

gdzie N jest liczbą danych użytych do estymacji, natomiast $\hat{P}_{Nii}$ jest i-tym elementem diagonali macierzy $\hat{\boldsymbol{P}}_N = \hat{\sigma}^2(\boldsymbol{\Phi}^\top\boldsymbol{\Phi})^{-1}$ (jest to oszacowana macierz $\mathrm{Cov}[\hat{\boldsymbol{p}}_N^{LS}]$ na podstawie N pomiarów, por. wzór (5)). Wiedząc, że dla zmiennej losowej $X \in \mathcal{N}(\mathrm{m}, \mathrm{var})$ zachodzą następujące związki:

$$P(|X - \mathrm{m}| < 1.96\sqrt{\mathrm{var}}) = 0.95, \qquad P(|X - \mathrm{m}| < 2.58\sqrt{\mathrm{var}}) = 0.99$$

wzór na 95% przedział ufności parametru $p_{i\mathrm{o}}$ przyjmuje (zgodnie z (22)) następującą postać:

$$PU_{95\%}: \quad \left(\hat{p}_{Ni}^{LS} - 1.96\sqrt{\hat{P}_{Nii}} \quad ; \quad \hat{p}_{Ni}^{LS} + 1.96\sqrt{\hat{P}_{Nii}}\right). \tag{23}$$

Dla zgodnego estymatora metody LS **w przypadku regresora stochastycznego**, *zakładając bardzo dużą liczbę pomiarów N (a w praktyce $N \geqslant 300$), możemy zapisać:*

$$\sqrt{N}(\hat{\boldsymbol{p}}_N^{LS} - \boldsymbol{p}_\mathrm{o}) \in \mathcal{N}(\mathbf{0}, \hat{\boldsymbol{P}}_\infty) \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{N}(\hat{p}_{Ni}^{LS} - p_{i\mathrm{o}}) \in \mathcal{N}(0, \hat{P}_{\infty ii}) \tag{24}$$

gdzie N jest liczbą danych użytych do estymacji, natomiast $\hat{P}_{\infty ii}$ jest i-tym elementem diagonali macierzy $\hat{\boldsymbol{P}}_\infty = N\hat{\sigma}^2(\boldsymbol{\Phi}^\top\boldsymbol{\Phi})^{-1}$ (jest to oszacowana macierz $\mathrm{Cov}[\hat{\boldsymbol{p}}_N^{LS}]$ na podstawie skończonej liczby N pomiarów, por. wzór (14)). Poprzez analogię do postaci (23), 95% przedział ufności parametru p_{0i} przyjmuje teraz postać:

$$PU_{95\%}: \quad \left(\hat{p}_{Ni}^{LS} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{P}_{\infty ii}}{N}} \quad ; \quad \hat{p}_{Ni}^{LS} + 1.96\sqrt{\frac{\hat{P}_{\infty ii}}{N}}\right). \tag{25}$$

$PU_{95\%}$ pokrywa wartość prawdziwą $p_{i\mathrm{o}}$ z prawdopodobieństwem 0.95. Jeśli określony $PU_{95\%}$ dla parametru p_{0i} zawiera wartość zerową, wówczas należy rozważyć eliminację danego parametru ze struktury modelu. Gdy wariancje są duże dla każdej estymaty $\hat{p}_{Ni}^{LS}$, to prawdopodobnie rząd modelu powinien zostać zredukowany.

3 Identyfikacja bezpośrednia systemu dynamicznego czasu ciągłego metodą LS

Identyfikacja bezpośrednia systemu czasu ciągłego

$$[y(t)] = G_\mathrm{o}(s, \boldsymbol{p}_\mathrm{o}^c)[u(t)] + [v(t)] \tag{26}$$

nie wymaga użycia modelu czasu dyskretnego – parametry modelu czasu ciągłego są w tym podejściu estymowane bezpośrednio z danych spróbkowanych. W tym celu równanie różniczkowe modelu czasu ciągłego zapisuje się w postaci regresji liniowej

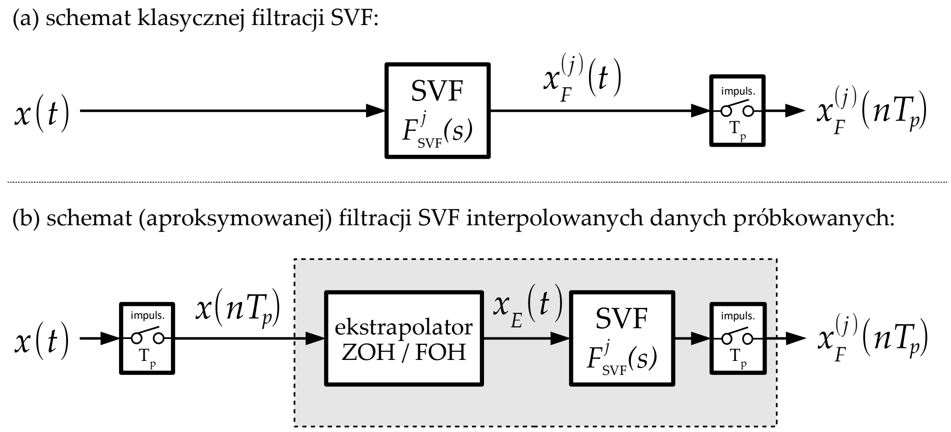
$$y^{(n_a)}(t) = [-y^{(n_a-1)}(t) \ \ldots \ -y(t) \quad u^{(n_b)}(t) \ \ldots \ u(t)]\boldsymbol{p} + v^*(t), \tag{27}$$

gdzie $\boldsymbol{p} = [a_1 \ \ldots \ a_{n_a} \ b_0 \ \ldots \ b_{n_b}]^\top$, $\dim(\boldsymbol{p}) = n_a + n_b + 1$, jest wektorem parametrów modelu czasu ciągłego, a $v^*(t)$ jest zakłóceniem stochastycznym. Aby umożliwić praktyczną realizację obliczeń estymacji parametrycznej wprowadza się filtry SVF (ang. *State Variable Filter*)

$$F_{\mathrm{SVF}}^j(s) \triangleq \frac{s^j}{(1 + sT_F)^n}, \qquad T_F > 0, \quad n \geqslant n_a, \tag{28}$$

które (zastosowane do obu stron równania (27)) pozwalają na przepisanie równania (27) w postaci dogodnej do identyfikacji (z danymi próbkowanymi z częstotliwością $f_p = 1/T_p$):

$$y_F^{(n_a)}(nT_p) = \underbrace{[-y_F^{(n_a-1)}(nT_p) \ \ldots \ -y_F(nT_p) \quad u_F^{(n_b)}(nT_p) \ \ldots \ u_F(nT_p)]}_{\boldsymbol{\varphi}^\top(nT_p)}\boldsymbol{p} + \xi(nT_p), \tag{29}$$



Rysunek 3: Porównanie klasycznej koncepcji analogowej filtracji SVF sygnału $x(t)$ (schemat (a)) z aproksymowaną filtracją SVF sekwencji próbek $\{x(nT_p)\}$ (schemat (b)); 'impuls.' oznacza impulsator, natomiast ZOH/FOH oznaczają ekstrapolację zerowego rzędu / pierwszego rzędu. Symbol $x_E(t)$ na schemacie (b) oznacza sygnał analogowy powstały z ekstrapolacji (interpolacji) sekwencji $\{x(nT_p)\}$

przy czym

$$\xi(nT_p) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F^0_{\mathrm{SVF}}(s)[v^*(t)]\right\}\Big|_{t=nT_p}$$

jest filtrowanym (dolnoprzepustowo) i spróbkowanym zakłóceniem stochastycznym (symbol $\mathcal{L}^{-1}$ oznacza odwrotne przekształcenie Laplace'a), natomiast

$$y_F^{(j)}(nT_p) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F^j_{\mathrm{SVF}}(s)[y(t)]\right\}\Big|_{t=nT_p}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n_a, \tag{30}$$

$$u_F^{(i)}(nT_p) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F^i_{\mathrm{SVF}}(s)[u(t)]\right\}\Big|_{t=nT_p}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n_b, \tag{31}$$

są analogowo filtrowanymi sygnałami $y(t)$ oraz $u(t)$ (pochodzącymi z wyjścia i wejścia systemu czasu ciągłego) a następnie spróbkowanymi z okresem próbkowania T_p.

Zależności (30)-(31) wyjaśniają sposób generowania składowych wektora regresji oraz składnika po lewej stronie równania (29), które wymagają analogowej filtracji sygnałów $y(t)$ oraz $u(t)$, co może być niemożliwe lub uciążliwe w praktycznych zastosowaniach. Dlatego, jeżeli w praktyce dysponujemy zbiorem danych spróbkowanych $\mathrm{Z}^N = \{y(nT_p), u(nT_p)\}_0^{N-1}$ i chcielibyśmy wykorzystać metodykę filtrów SVF, wówczas należy aproksymować filtrację analogową po stronie cyfrowej (w dziedzinie czasu dyskretnego). Do tego celu można użyć funkcji Matlab'a `lsim(F,x,tn)`, gdzie pierwszy argument oznacza transmitancję analogowego filtru $F(s)$, drugi argument to wektor (sekwencja $\{x(nT_p)\}$) próbek sygnału x podlegającego filtracji, a trzeci to odpowiadający mu wektor (sekwencja) dyskretnych chwil czasu, dla których filtracja ma zostać wykonana (zatem drugi i trzeci argument funkcji `lsim()` są określone w dyskretnej dziedzinie czasu, natomiast struktura filtru F odpowiada ciągłej dziedzinie czasu). Porównanie analogowej filtracji SVF z aproksymowaną filtracją wykonywana w przypadku danych spróbkowanych przedstawia rys. 3.

Zapis modelu w postaci regresji liniowej (29), łacznie z użyciem (aproksymowanej) filtracji SVF, umożliwia bezpośrednie zastosowanie estymatora LS z równania (12). Stałą czasową T_F filtrów SVF należy wybrać doświadczalnie, np. zaczynając od wartości $T_F = 2T_p$ i zwiększając ją o wartość okresu próbkowania T_p aż do uzyskania zadowalających efektów estymacji parametrycznej. Generalnie, pasmo przenoszenia filtru $F^0_{\mathrm{SVF}}(s)$ powinno być w przybliżeniu równe pasmu przenoszenia identyfikowanego systemu (26). Zatem jeżeli znamy (z wiedzy wstępnej) pulsację odcięcia ω_c systemu, wówczas możemy przyjąć $T_F \approx 1/\omega_c$.

3.1 Bezpośrednia identyfikacja parametrów modelu czasu ciągłego metodą LS.

- We wzorze (19) dany jest opis struktury toru sterowania systemu prawdziwego czasu ciągłego o transmitancji $G_o(s, \boldsymbol{p}_o^c)$; równanie systemu ma postać (26).
- Zdefiniować filtry SVF (minimalnego rzędu) i zapisać model systemu czasu ciągłego w postaci regresji liniowej (29).
- Dla filtrów SVF wybrać wartość stałej czasowej $T_F = 50T_p$ (wartość T_F nie może być zbyt duża, aby nie usuwać z filtrowanych danych użytecznej informacji o identyfikowanym systemie!). Wykonać aproksymowane filtracje SVF danych pomiarowych ze zbioru Z_{est} wziętych z macierzy `DaneDynW` (plik `IdentWsadowaDyn.mat`). W tym celu skorzystać z funkcji `lsim()` Matlab'a. Przy stosowaniu funkcji `lsim()` wymusić ekstrapolację `'foh'` dla sekwencji próbek $\{y(nT_p)\}$ oraz $\{u(nT_p)\}$. Wektor dyskretnych chwil czasu, wymagany jako jeden z parametrów funkcji `lsim()`, należy utworzyć wiedząc, że dane próbkowano w okresem $T_p = 0.01\,\text{s}$ oraz liczba danych $N = 4001$ par próbek.
- Przeprowadzić bezpośrednią identyfikację parametryczną systemu czasu ciągłego stosując model (29) i estymator LS ze wzoru (12) dla danych ze zbioru Z_{est}.
- Porównać otrzymaną estymatę $\hat{\boldsymbol{p}}_N^{LS}$ z parametrami prawdziwymi $\boldsymbol{p}_o^c$.
- Sprawdzić wpływ liczebności i zakresu danych w Z_{est} na jakość identyfikacji.
- Sprawdzić wpływ wartości stałej czasowej T_F filtrów SVF na jakość identyfikacji.
- Sprawdzić wpływ rzędu filtrów SVF na jakość identyfikacji dla $n \in \{1, 2, 3\}$.

Uwaga: Poniżej podano fragment kodu programu w języku Matlab ilustrujący sposób aproksymowanej filtracji SVF, tj. filtracji SVF <u>interpolowanych sekwencji próbek</u> ze zbioru Z_{est}.

```
%*************************************************************************************
%----- filtracja SVF interpolowanych danych spróbkowanych: -----
%*************************************************************************************
M = 3200;                    % wybór liczby danych do zbioru Ze
tE = Tp*(N-M:N)';            % wektor próbek chwil czasowych dla danych estymujących
uE = DaneDynW(N-M:N,1);      % wybór wektora próbek sygnału pobudzającego u do zbioru Ze
yE = DaneDynW(N-M:N,2);      % wybór wektora próbek sygnału wyjściowego y do zbioru Ze
%----------------------------
s = tf('s');                 % zmienna operatorowa Laplace'a
TF = 40*Tp;                  % wybór wartości stałej czasowej dla filtrów SVF
n = 1;                       % wybór rzędu dynamiki sla filtrów SVF
F0 = 1/(1+s*TF)^n;           % definicja filtru SFV typu F^0
F1 = s/(1+s*TF)^n;           % definicja filtru SFV typu F^1
yF = lsim(F0,yE,tE,'foh');   % filtracja SVF filtrem F^0 sekwencji yE z ekstrapolacją 'foh'
ypF = lsim(F1,yE,tE,'foh');  % filtracja SVF filtrem F^1 sekwencji yE z ekstrapolacją 'foh'
uF = lsim(F0,uE,tE,'foh');   % filtracja SVF filtrem F^0 sekwencji uE z ekstrapolacją 'foh'
%*************************************************************************************
```

□