

# Laboratorium identyfikacji systemów

Instytut Automatyki i Robotyki  
Politechnika Poznańska  
IAR-PP  
oprac. Maciej M. Michałek

---

## C2 POZYSKIWANIE WIEDZY WSTĘPNEJ O SYSTEMIE

Ćwiczenie poświęcone jest wybranym metodom pozyskiwania wiedzy wstępnej o systemie dynamicznym. W tym celu rozważane będą wybrane deterministyczne oraz nieparametryczne metody identyfikacji. Omawiane metody deterministyczne polegają na bezpośredniej analizie odpowiedzi czasowych identyfikowanych systemów. Przez metody *nieparametryczne* należy rozumieć takie sposoby identyfikacji, które na żadnym etapie obliczeń nie wymagają stosowania sparametryzowanego modelu analizowanego procesu. Wynikiem zastosowania klasycznych metod nieparametrycznych, takich jak analiza korelacyjna i analiza widmowa są, odpowiednio, model w postaci ciągu próbek odpowiedzi impulsowej oraz model w postaci zbioru punktów charakterystyki Bodego (lub równoważnej). Na podstawie modeli niesparametryzowanych można próbować oceniać charakter oraz rząd dynamiki systemu, a także cechy charakterystyczne dynamiki systemu (np. znak wzmocnienia statycznego, (nie-)minimalnofazowość, obecność lub brak modów oscylacyjnych, obecność lub brak opóźnienia itp.).

### 1 Identyfikacja poprzez analizę odpowiedzi czasowych

Klasyczne deterministyczne metody identyfikacji polegają na aproksymacji opisu dynamiki systemu pewną transmitancją operatorową  $G(s)$  wyznaczaną na podstawie dostępnej odpowiedzi skokowej systemu – zwykle w postaci sekwencji próbek  $\{h(nT_p)\}_0^{N-1}$  lub w postaci graficznej jako wykres odpowiedzi w dziedzinie czasu. Powszechnie spotykane systemy w automatyce procesowej mają dynamikę wysokiego rzędu (z ewentualnym opóźnieniem) o monotonicznej odpowiedzi skokowej. Przykładowy przebieg odpowiedzi skokowej takiego systemu przedstawiono na rysunku 1. Dysponując modelem w postaci odpowiedzi skokowej można dokonać aproksymacji dynamiki systemu na różne sposoby w zależności od celu późniejszego wykorzystania modelu. Rozważymy dwa wybrane sposoby prowadzące do transmitancji wieloinercyjnej  $G_{m1}(s)$  oraz inercyjnej z opóźnieniem  $G_{m2}(s)$ , gdzie:

$$G_{m1}(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^p} \quad G_{m2}(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-sT_0}, \quad (1)$$

przy czym  $p$  określa rząd dynamiki,  $K$  jest wzmocnieniem statycznym,  $T$  jest zastępczą stałą czasową, natomiast  $T_0$  jest zastępczym opóźnieniem.

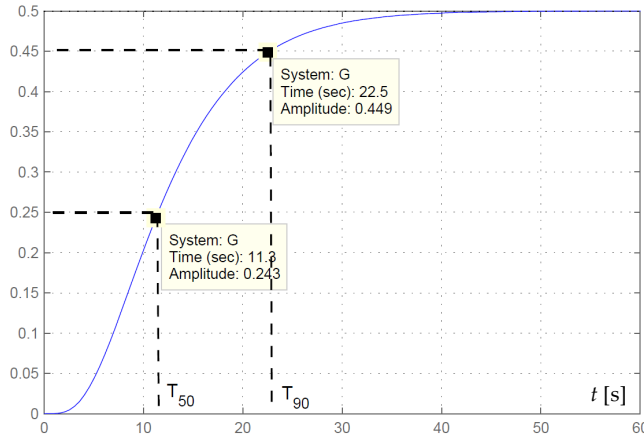
Aby dokonać aproksymacji systemu transmitancją  $G_{m1}(s)$  musimy oszacować rząd systemu  $p$ , wzmocnienie statyczne  $K$  oraz zastępczą stałą czasową  $T$ . Współczynnik wzmocnienia statycznego określamy na podstawie wartości odpowiedzi w stanie *ustalonym* (w praktyce dla wystarczająco długiego czasu, dla którego odpowiedź systemu nie ulega już znaczącej zmianie):

$$K = \frac{y_{ust.}}{A_u}, \quad (2)$$

gdzie  $A_u$  jest wartością amplitudy wymuszenia skokowego. Rząd dynamiki zastępczej można oszacować na podstawie wartości zebranych w tablicy z rys. 1<sup>1</sup>. Z wykresu odczytujemy wartości chwil czasu  $T_{50}$  oraz  $T_{90}$ , w których odpowiedź systemu osiąga odpowiednio 50% oraz 90% wartości ustalonej. Z czwartej kolumny tablicy odczytujemy wartość najbliższą uzyskanemu

---

<sup>1</sup>Tablica została zaczerpnięta z pracy: J. Kasprzyk et al. *Identyfikacja procesów*, WPS, Gliwice 2002.



rzęd $p$	$T_{50}/T$	$T_{90}/T$	$T_{90}/T_{50}$
1	0.69	2.30	3.32
2	1.68	3.89	2.32
3	2.67	5.32	1.99
4	3.67	6.68	1.89
5	4.67	7.99	1.71
6	5.67	9.27	1.64
7	6.67	10.53	1.58
8	7.67	11.78	1.54
9	8.67	12.99	1.50
10	9.67	14.21	1.47

Rysunek 1: Przykładowa odpowiedź skokowa systemu z zaznaczonymi chwilami  $T_{50}$  i  $T_{90}$  (strona lewa) oraz tabela wartości do wyznaczania modelu wieloinercyjnego (strona prawa)

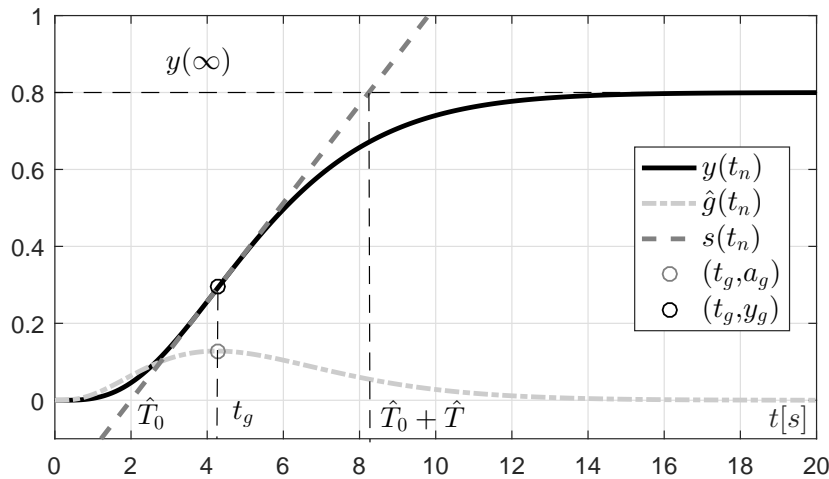
ilorazowi  $T_{90}/T_{50}$  i odpowiadający mu rząd dynamiki  $p$ . Na podstawie kolumn drugiej lub trzeciej obliczamy wartość stałej czasowej inercji  $T$  wykorzystując  $T_{50}$  lub  $T_{90}$  (można także wziąć średnią arytmetyczną wyników z obu kolumn).

Aproksymacja transmitancją  $G_{m2}(s)$ , dla której należy określić wzmocnienie statyczne  $K$ , zastępczą stałą czasową inercji  $T$  oraz zastępczy czas opóźnienia  $T_0$ , wymaga następującej sekwencji operacji.

Współczynnik wzmocnienia statycznego określamy na podstawie wartości odpowiedzi w stanie *ustalonym* wg wzoru (2). Określenie stałych  $T$  i  $T_0$  wymaga znalezienia równania stycznej przechodzącej przez punkt przegięcia odpowiedzi skokowej  $h(t)$ . Punkt przegięcia odpowiada lokalnemu ekstremum odpowiedzi impulsowej  $g(t)$ , dla którego odczytujemy współrzędne  $t_g$  oraz  $a_g$  (patrz rysunek 2). Pamiętając, że  $dh(t)/dt = g(t)$  równanie stycznej w punkcie przegięcia przyjmie postać:

$$s(t) = a_g t + b, \quad \text{gdzie} \quad b = s_g - a_g \cdot t_g, \quad (3)$$

przy czym składnik  $b$  określono podstawiając do powyższego wzoru współrzędne  $(t_g, s_g)$  punktu przegięcia, gdzie  $s_g = s(t_g)$  (wartość  $s_g$  odczytujemy z przebiegu  $h(t)$ ). Teraz możemy już analitycznie wyznaczyć punkty przecięcia stycznej  $s(t)$  z osią  $t$  oraz z asymptotą  $A_u K$  i wyliczyć



Rysunek 2: Sposób deterministycznej identyfikacji systemu modelem  $G_{m2}(s)$  na podstawie jego odpowiedzi skokowej oraz impulsowej

poszczególne stałe czasowe na podstawie (3) w następujący sposób:

$$s(T_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{a_g t_g - s_g}{a_g}, \quad (4)$$

$$s(T_0 + T) = A_u K \quad \Rightarrow \quad T = \frac{A_u K - s_g + a_g t_g}{a_g} - T_0 = \frac{A_u K}{a_g}. \quad (5)$$

### 1.1 Aproksymacja systemu dynamicznego modelem wieloinercyjnym.

- W pliku `ProcessStepResponse.mat` zapisano sekwencję próbek czasu  $\{t_n\} = \{t_0, t_1, \dots, t_{N-1}\}$  oraz odpowiadającą jej sekwencję  $\{h(t_n)\}_{0}^{N-1}$  próbek odpowiedzi skokowej pewnego systemu dynamicznego (system pobudzano skokiem jednostkowym:  $u(t_n) = \mathbf{1}(t_n)$ ). Dane zapisano w postaci dwukolumnowej macierzy  $\mathbf{S}$ , w której pierwsza kolumna zawiera wektor próbek czasu wyrażonych w sekundach, a druga wektor próbek zarejestrowanej odpowiedzi skokowej.
- Załadować zarejestrowane dane do przestrzeni roboczej Matlaba. Wykreślić sekwencję próbek odpowiedzi skokowej i oszacować wzmocnienie statyczne systemu. Stosując wartości zawarte w tablicy z rys. 1 oszacować rząd dynamiki oraz parametry zastępcze modelu  $G_{m1}(s)$ . Porównać odpowiedzi skokowe oraz impulsowe systemu oraz modelu  $G_{m1}(s)$ . Odpowiedź impulsową  $g(t_n)$  systemu oszacować stosując różnice skończone:

$$\hat{g}(t_n) = \frac{h(t_n) - h(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} \approx g(t_n). \quad (6)$$

Co można powiedzieć na temat efektywności powyższej metody identyfikacji?

- Powtórzyć powyższą procedurę identyfikacji dla przypadku danych zakłóconych zebranych w macierzy `nS` z pliku `NoisyProcessStepResponse.mat`. Co można powiedzieć na temat efektywności metody w przypadku danych zakłóconych?

### 1.2 Aproksymacja systemu dynamicznego modelem inercyjnym z opóźnieniem.

- Stosując wzory (2)-(5) dokonać identyfikacji systemu z użyciem modelu  $G_{m2}(s)$ . Porównać odpowiedzi skokowe oraz impulsowe systemu oraz modelu  $G_{m2}(s)$ . Odpowiedź impulsową  $g(t_n)$  systemu oszacować stosując różnice skończone jak we wzorze (6). Co można powiedzieć na temat efektywności tej metody identyfikacji?
- Powtórzyć powyższą procedurę identyfikacji dla przypadku danych zakłóconych zebranych w macierzy `nS` z pliku `NoisyProcessStepResponse.mat`. Co można powiedzieć na temat efektywności metody w przypadku danych zakłóconych?

## 2 Nieparametryczna identyfikacja metodą analizy korelacyjnej

Identyfikacja metodą analizy korelacyjnej pozwala na oszacowanie próbek odpowiedzi impulsowej  $g_o(n)$  asymptotycznie stabilnego liniowego systemu dynamicznego opisanego równaniem różnicowym:

$$y(n) = \sum_{j=0}^{\infty} g_o(j)u(n-j) + v(n) = G_o(q^{-1})u(n) + v(n), \quad (7)$$

gdzie  $u(n)$  jest wejściowym sygnałem pobudzającym, a  $v(n)$  jest składnikiem zakłócającym nieskorelowanym z wejściem  $u(n)$ . Korzystając z równania Wienera-Hopfa można (przy sto-

sownych założeniach) zapisać zależność będącą podstawą metody korelacyjnej, mianowicie:

$$\hat{r}_{yu}(i) = \sum_{j=0}^{M-1} \hat{g}_M(j) \hat{r}_{uu}(i-j) \quad \stackrel{\text{zał.}}{\Longleftarrow} \quad g_o(j) = 0 \quad \text{dla } j \geq M, \quad (8)$$

przy czym  $\hat{r}_{yu}$  i  $\hat{r}_{uu}$  są estymatorami funkcji korelacji wzajemnej i własnej odpowiednich sygnałów, a nieskończoną granicę sumy zastąpiono skończoną wartością  $M-1$  uzyskując równanie dla tzw. obciętego ciągu wagowego  $\hat{g}_M(n)$ . Obcięcie takie jest zasadne przy spełnieniu założenia podanego po prawej stronie wzoru (8). Dobór horyzontu  $M$  należy do projektanta modelu i powinien zapewniać wystarczającą widoczność stanu przejściowego identyfikowanego systemu (dobór  $M$  może być wykonywany iteracyjnie, metodą prób i błędów).

Zapisując równanie (8) dla  $i = 0, 1, \dots, M-1$  i korzystając z własności parzystości funkcji autokorelacji ( $r_{uu}(-i) = r_{uu}(i)$ ) otrzymujemy następujący skończenie-wymiarowy układ równań:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{r}_{yu}(0) \\ \hat{r}_{yu}(1) \\ \vdots \\ \hat{r}_{yu}(M-1) \end{bmatrix}}_{\hat{r}_{yu}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{r}_{uu}(0) & \hat{r}_{uu}(1) & \hat{r}_{uu}(2) & \dots & \hat{r}_{uu}(M-1) \\ \hat{r}_{uu}(1) & \hat{r}_{uu}(0) & \hat{r}_{uu}(1) & \dots & \hat{r}_{uu}(M-2) \\ \hat{r}_{uu}(2) & \hat{r}_{uu}(1) & \hat{r}_{uu}(0) & \dots & \hat{r}_{uu}(M-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_{uu}(M-1) & \hat{r}_{uu}(M-2) & \hat{r}_{uu}(M-3) & \dots & \hat{r}_{uu}(0) \end{bmatrix}}_{\hat{R}_{uu}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{g}_M(0) \\ \hat{g}_M(1) \\ \vdots \\ \hat{g}_M(M-1) \end{bmatrix}}_{\hat{g}_M}. \quad (9)$$

Jeżeli macierz  $\hat{R}_{uu}$  jest nieosobliwa, a estymaty funkcji korelacyjnych wyznaczone zostaną na podstawie dostępnego zbioru pomiarów  $\{y(n), u(n)\}_0^{N-1}$ , wówczas rozwiązanie powyższego układu względem elementów wektora  $\hat{g}_M$  przyjmie postać:

$$\hat{g}_M = \hat{R}_{uu}^{-1} \hat{r}_{yu} \quad \text{lub} \quad \hat{g}_M = (\hat{R}_{uu}^\top \hat{R}_{uu})^{-1} \hat{R}_{uu}^\top \hat{r}_{yu}, \quad (10)$$

przy czym zastosowanie lewostronnej pseudoodwrotności macierzy  $\hat{R}_{uu}$  dotyczy przypadku, gdy równanie (9) rozszerzymy o kolejne wiersze dla  $j \geq M$ , dla których (na podstawie założenia z (8)) przyjmimy  $\hat{g}_M(j) = 0$  (otrzymamy w ten sposób nadokreślony układ równań).

Jeżeli sygnał wejściowy  $u(n)$  będzie szumem białym o wariancji  $\sigma_o^2$ , wówczas rozwiązanie równania (9) względem poszczególnych próbek  $\hat{g}_M(j)$  można uzyskać w uproszczony sposób zgodnie z równaniem:

$$\hat{g}_M(j) = \frac{\hat{r}_{yu}(j)}{\hat{r}_{uu}(0)} = \frac{\hat{r}_{yu}(j)}{\sigma_o^2} \quad \text{lub} \quad \hat{g}_M(j) = \frac{\hat{r}_{yu}(j)}{\hat{r}_{uu}(0)} = \frac{\hat{r}_{yu}(j)}{\hat{\sigma}_o^2}, \quad j \in [0; M-1], \quad (11)$$

gdzie wykorzystano własność funkcji autokorelacji szumu białego, dla którego  $r_{uu}(0) = \sigma_o^2$  oraz  $r_{uu}(i) = 0$  dla  $i \neq 0$ . Prawy wzór w (11) prezentuje pragmatyczny sposób postępowania wynikający z faktu, że w praktyce na wejście systemu można podać sygnał  $u(n)$  będący jedynie aproksymacją szumu białego.

**Uwaga.** Zależności (10) oraz (11) są słuszne dla systemów czasu dyskretnego przy przyjęciu znormalizowanego okresu próbkowania  $T_p = 1$ . Jeżeli dane pomiarowe  $\{y(nT_p), u(nT_p)\}_0^{N-1}$  pochodzą z systemu czasu ciągłego, opisanego równaniem  $y(t) = \int_0^\infty g(\theta)u(t-\theta)d\theta + v(t)$ , wówczas model czasu dyskretnego można traktować jako dyskretną aproksymację rzeczywistego systemu czasu ciągłego. W takim przypadku należy uwzględnić okres próbkowania  $T_p$  z jakim próbkowano sygnały analogowe i w efekcie właściwie przeskalować estymowany ciąg wagowy  $\hat{g}_M(j)$ , aby można było umożliwić porównanie wyniku analizy korelacyjnej z odpowiedzią systemu czasu ciągłego. Przeskalowanie wzorów z (10) i (11) ma postać:

$$\hat{g}_M = \frac{1}{T_p} \hat{R}_{uu}^{-1} \hat{r}_{yu}, \quad \hat{g}_M(jT_p) = \frac{1}{T_p} \frac{\hat{r}_{yu}(j)}{\hat{r}_{uu}(0)}, \quad j \in [0; M-1]. \quad (12)$$

Pierwsze  $M$  próbek odpowiedzi skokowej  $h_o(t)$  systemu czasu ciągłego o ciągłej odpowiedzi impulsowej  $g_o(t)$  można aproksymować na podstawie oszacowanych wcześniej przeskalowanych próbek ciągu wagowego z równania (12) w następujący sposób:

$$\hat{h}_M(nT_p) = T_p \sum_{j=0}^n \hat{g}_M(jT_p) \quad \text{dla } n \in [0; M-1], \quad (13)$$

przy założeniu zerowego warunku początkowego:  $h_o(0) = 0$ .

## 2.1 Analiza korelacyjna.

- Dany jest plik `AKident.mdl` zawierający schemat blokowy eksperymentu pomiarowego z dwoma systemami dynamicznymi reprezentowanymi transmitancjami operatorowymi  $G_o(z)$  oraz  $G_o(s)$ , z których pierwsza definiuje system czasu dyskretnego, a druga system czasu ciągłego. Na wejściu systemu  $G_o(s)$  umieszczono blok ekstrapolatora zerowego rzędu `Zero-Order Hold`. Oba systemy będą pobudzane sygnałem aproksymującym szum biały  $e(nT_p)$  o rozkładzie normalnym i wariancji  $\sigma_u^2 = 0.5$ . Po uruchomieniu schematu blokowego próbki stosownych sygnałów zostaną zapisane (z okresem próbkowania  $T_p$ ) do macierzy `Zdata`. Przed uruchomieniem schematu należy zainicjować wartości dwóch zmiennych: `Tp` (okres próbkowania) oraz `sigma2v` (wariancja zakłócenia  $v$ ).
- Wybrać system  $G_o(z)$ , uruchomić schemat blokowy `AKident.mdl` i zebrać dane pomiarowe  $\{y(n), u(n)\}_0^{N-1}$  dla  $N = 1001$  przyjmując  $T_p = 1$  s oraz wariancję zakłócenia `sigma2v` równą zero. Wyświetlić dane pomiarowe w dziedzinie czasu.
- Stosując niezależnie wzory (10) oraz (11) przeprowadzić nieparametryczną identyfikację systemu  $G_o(z)$  metodą analizy korelacyjnej. Do obliczeń można wykorzystać funkcję `Covar(D, tau)`; funkcja pseudoinwersji w Matlabie to `pinv()`. Przyjąć wstępnie  $M = 20$ .
  - Porównać wyniki analizy korelacyjnej uzyskane z wykorzystaniem wzorów (10) oraz (11) z (nieznaną w praktyce) odpowiedzią  $g_o(n)$  systemu  $G_o(z)$ .
  - Sprawdzić wpływ wariancji zakłócenia na jakość identyfikacji dla wartości parametru `sigma2v` ze zbioru  $\{0.0, 0.001, 0.01, 0.1\}$ .
- Wybrać system  $G_o(s)$ , uruchomić schemat blokowy `AKident.mdl` i zebrać dane pomiarowe  $\{y(nT_p), u(nT_p)\}_0^{N-1}$  dla  $N = 1001$  przyjmując  $T_p = 1$  s oraz wariancję zakłócenia `sigma2v` równą 0.001. Wyświetlić dane pomiarowe w dziedzinie czasu.
- Stosując wzory (12) przeprowadzić nieparametryczną identyfikację systemu czasu ciągłego  $G_o(s)$  metodą analizy korelacyjnej. Przyjąć wstępnie  $M = 30$ .
  - Porównać wyniki analizy korelacyjnej uzyskane z wykorzystaniem wzorów (12) z (nieznaną w praktyce) odpowiedzią  $g_o(t)$  systemu  $G_o(s)$ .
  - Sprawdzić wpływ wartości okresu próbkowania na jakość identyfikacji dla  $T_p \in \{2.0, 1.0, 0.5, 0.25\}$  s (przy zmianie  $T_p$  należy dobrać horyzont  $M$ ).
  - Sprawdzić wpływ wariancji zakłócenia na jakość identyfikacji dla parametru `sigma2v` ze zbioru  $\{0.0, 0.001, 0.01, 0.1\}$  (przyjmując  $T_p = 1$  s).
- Wyznaczyć estymaty próbek odpowiedzi skokowej obiektu  $G_o(s)$  stosując zależność (13). Na podstawie wyznaczonych próbek  $\hat{h}_M(nT_p)$  ocenić cechy dynamiki i strukturę modelu identyfikowanego systemu czasu ciągłego. Jaką wiedzę wstępną o systemie można w ten sposób pozyskać?

### 3 Nieparametryczna identyfikacja metodą analizy widmowej

Analiza widmowa jest nieparametryczna metoda identyfikacji systemu w dziedzinie częstotliwości. Pozwala ona na oszacowanie charakterystyk częstotliwościowych identyfikowanego systemu dynamicznego, w szczególności na oszacowanie zbioru punktów charakterystyk Bodego. Analiza widmowa zakłada opis systemu w dyskretniej dziedzinie czasu w postaci równania

$$y(n) = G_o(q^{-1})u(n) + v(n), \quad G_o(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{\infty} g_o(j)q^{-j}, \quad (14)$$

gdzie  $u(n)$  jest sygnałem pobudzającym, a  $v(n)$  jest składnikiem zakłócającym nieskorelowanym z wejściem  $u(n)$ . Właściwości częstotliwościowe można określić na podstawie tzw. estymatora transmitancji, który może przyjąć jedną z dwóch klasycznych postaci – jako

$$\hat{G}_N^*(j\Omega_k) = \frac{Y_N(j\Omega_k)}{U_N(j\Omega_k)}, \quad \Omega_k = \frac{2\pi}{N}k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (15)$$

zwanego w literaturze *doświadczalnym estymatorem transmitancji* (w języku ang. znanym jako *Empirical Transfer-Function Estimate*), lub jako iloraz estymatorów gęstości widmowych mocy:

$$\hat{G}_N(j\Omega_k) = \frac{\hat{\Phi}_{yu}^s(j\Omega_k)}{\hat{\Phi}_{uu}^s(\Omega_k)}, \quad \Omega_k = \frac{2\pi}{N}k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (16)$$

Estymaty widmowych gęstości mocy zastosowanych w (16) można wyznaczyć na podstawie  $N$ -elementowej sekwencji próbek  $\{y(n)\}_0^{N-1}$  oraz  $\{u(n)\}_0^{N-1}$  stosując następujące wzory:

$$\hat{\Phi}_{yu}^s(j\Omega_k) = \sum_{i=-M_w}^{M_w} \hat{r}_{yu}(i)w(i)e^{-j\Omega_k \cdot i}, \quad \hat{\Phi}_{uu}^s(\Omega_k) = \sum_{i=-M_w}^{M_w} \hat{r}_{uu}(i)w(i)e^{-j\Omega_k \cdot i}, \quad (17)$$

gdzie  $M_w \leq N-1$  (zalecane:  $M_w < N/5$ ) określa szerokość tzw. okna przesunięciowego  $w(i)$ , natomiast  $\hat{r}_{yu}$  oraz  $\hat{r}_{uu}$  są estymatorami funkcji korelacji (wzajemnej i własnej) sygnałów. Przywołajmy definicje dwóch popularnych rodzajów okien przesunięciowych – prostokątnego  $w_P(i)$  i Hanninga  $w_H(i)$ :

$$w_P(i) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |i| < M_w \\ 0 & \text{dla } |i| \geq M_w \end{cases}, \quad w_H(i) = \begin{cases} 0.5 \left(1 + \cos \frac{i\pi}{M_w}\right) & \text{dla } |i| < M_w \\ 0 & \text{dla } |i| \geq M_w \end{cases}. \quad (18)$$

Wprowadzenie okien przesunięciowych dla  $M_w < N-1$  służy zmniejszaniu wariancji estymatorów gęstości widmowych mocy<sup>2</sup> i tym samym wariancji estymatora (16), jednak wiąże się również z negatywnym zjawiskiem zniekształcania przebiegu estymaty. Zatem dobór wartości  $M_w$  (tj. szerokości okna przesunięciowego) musi wynikać z kompromisu.

Należy pamiętać, że wykorzystanie wzoru (15) lub (16) prowadzi do obliczenia  $N$  liczb zespolonych  $\hat{G}_N^*(j\Omega_k)$  lub  $\hat{G}_N(j\Omega_k)$  dla  $\Omega_k = \{\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{N-1}\}$ , których moduły i argumenty stanowią zbiory punktów charakterystyk Bodego. Zbiory te są bezpośrednim rezultatem analizy widmowej. Na podstawie wykresu zbiorów takich punktów można dokonać oceny właściwości identyfikowanego systemu.

Analiza widmowa została przedstawiona dla modelu procesu czasu dyskretnego opisanego wzorem (14). Można ją jednak także stosować do nieparametrycznej identyfikacji procesów czasu ciągłego opisanych transmitancją  $G_o(s)$  na podstawie danych  $\{y(nT_p), u(nT_p)\}_0^{N-1}$  stanowiących spróbkowane z okresem próbkowania  $T_p$  sygnały  $y(t)$  i  $u(t)$  pochodzące z wejścia i wejścia systemu czasu ciągłego. W celu uniknięcia niepożądanego efektu aliasingu, w torach pomiarowych sygnałów  $y(t)$  i  $u(t)$  stosuje się zwykle (takie same) filtry antyaliasingowe.

<sup>2</sup>Pamiętajmy, że wartości estymatorów (17) są obliczane na podstawie sygnałów zakłócanych stochastycznie.

### 3.1 Analiza widmowa.

- Dany jest plik `AWident.mdl` zawierający schemat blokowy eksperymentu pomiarowego z systemem dynamicznym czasu ciągłego reprezentowanym transmitancją operatorową  $G_o(s)$ . Na wejściu systemu  $G_o(s)$  umieszczono szeregowe połączenie bloków `Sign-Gain`, które odpowiadają za transformację sygnału wejściowego na przebieg binarny o narzuconej amplitudzie. Sygnałem wejściowym do połączenia bloków `Sign-Gain` jest sygnał pobudzający aproksymującym szum biały  $e(nT_p)$  o rozkładzie normalnym i wariancji  $\sigma_u^2 = 0.5$ . W torach pomiarowych sygnałów  $y(t)$  i  $u(t)$  umieszczono jednakowe filtry antyaliasingowe pierwszego rzędu o stałej czasowej  $T_F = 2.5T_p$ . Po uruchomieniu schematu blokowego próbki stosownych sygnałów zostaną zapisane (z okresem próbkowania  $T_p$ ) do macierzy `Zdata`. Przed uruchomieniem schematu należy zainicjować wartości parametrów: `Tp` (okres próbkowania), `tend` (czas symulacji) oraz `sigma2v` (wariancja zakłócenia  $v$ ).
- Uruchomić schemat blokowy `AWident.mdl` i zebrać dane pomiarowe  $\{y(nT_p), u(nT_p)\}_0^{N-1}$  dla  $N = 1001$  przyjmując  $T_p = 0.5$  s oraz wariancję zakłócenia `sigma2v` równą 0.001. Wyświetlić dane pomiarowe w dziedzinie czasu.
- Stosując estymatory transmitancji ze wzorów (15) oraz (16) przeprowadzić nieparametryczną identyfikację systemu czasu ciągłego  $G_o(s)$  metodą analizy widmowej. Przy wykorzystaniu estymatora (16) przyjąć  $M_w = 200$  dla okna Hanninga.
- Wykreślić w skali logarytmicznej punkty  $(\omega_k, \text{Lm}(\omega_k))$  charakterystyki modułu Bodego uzyskane z wykorzystaniem obu estymatorów transmitancji, przy czym

$$\text{Lm}(\omega_k) \triangleq 20 \log |\hat{G}(\omega_k)|, \quad \omega_k = \frac{\Omega_k}{T_p}, \quad k = 0, 1, \dots, (N-1)/2,$$

gdzie  $\hat{G}(\omega_k) \stackrel{(15)}{=} \hat{G}_N^*(\omega_k)$  lub  $\hat{G}(\omega_k) \stackrel{(16)}{=} \hat{G}_N(\omega_k)$ . Na wykresie wymusić logarytmiczną skalę pulsacji.

- Na podstawie estymaty charakterystyki modułu ocenić właściwości identyfikowanego systemu. Jaką wiedzę wstępną o systemie można w ten sposób pozyskać?
- Porównać wyniki z przebiegiem prawdziwego (nieznanego w praktyce) logarytmicznego modułu  $\text{Lm}(\omega)$  transmitancji systemu  $G_o(s)$ .
- Sprawdzić wpływ zastosowanego rodzaju okna czasowego (18) oraz wartości parametru  $M_w$  na jakość identyfikacji dla  $M_w \in \{200, 100, 50\}$ .
- Sprawdzić wpływ wartości okresu  $T_p \in \{2.0, 1.0, 0.5, 0.1\}$  s na jakość identyfikacji.
- Sprawdzić wpływ wariancji zakłócenia pomiarowego  $v$  na jakość identyfikacji dla `sigma2v` ze zbioru  $\{0.001; 0.01, 0.1\}$ .
- Sprawdzić wpływ liczby danych na jakość identyfikacji dla  $N \in \{1001, 101\}$ .

**Uwaga:** Przygotowanie wektora wartości funkcji autokorelacji dla funkcji `fft()` Matlab'a jest następujące: `Ruu = [ruuP(1:Mw+1) zeros(1,2*N-2*Mw-2) ruuP(Mw+1:-1:2)]`, przy czym wektor `ruuP` zawiera wartości funkcji korelacji (wymnożone przez wartości funkcji okna) dla  $i = 0, 1, \dots, M_w$ . Takie przygotowanie nie zmienia oryginalnej rozdzielczości częstotliwościowej (długość wektora `Ruu` wynosi  $2N - 1$ ). Podobnie należy przygotować wektor wartości funkcji korelacji wzajemnej (jednak z uwzględnieniem jej własności!).

□