Д/З 2.3

(2)

$$\|X-\tilde{X}\|_F^2 = \|V(\sqrt{\Lambda}-\sqrt{\tilde{\Lambda}})U^T\|_F^2 = \|\sqrt{\Lambda}-\sqrt{\tilde{\Lambda}}\|_F^2 =$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sqrt{\lambda_{\tilde{F}+1}} & \\ 0 & & & \ddots \sqrt{\lambda_F} \end{pmatrix} \right\|_F^2 = \sum_{i=\tilde{F}+1}^{F} \lambda_i$$

(3)

$$X = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \bar{u}_i \bar{v}_i^T, \quad \sigma_i \geq \sigma_{i-1}$$

$$X\vec{v} = X\sum_{j=1}^{r} c_j \vec{v}_j = \sum_{i=1}^{r} c_i \sigma_i u_i, \text{ т.к. } (\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \delta_{ij}$$

$$(X\vec{v})^2 = \left(\sum_{j=1}^{r} c_j \sigma_j \vec{u}_j\right)^T \left(\sum_{i=1}^{r} c_i \sigma_i \vec{u}_i\right) = \sum_{i,j}^{r} c_j c_i \sigma_i \sigma_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{r} c_i^2 \sigma_i^2 \to$$

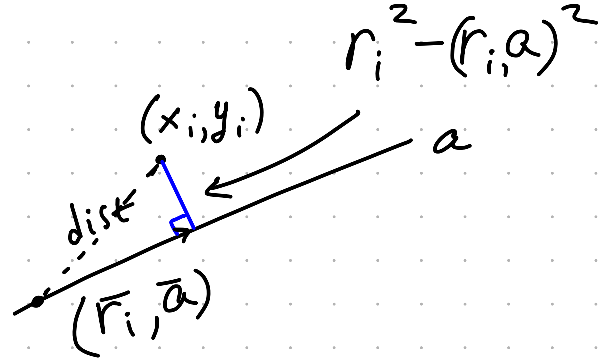
$$\to \max \Rightarrow \text{т.к. } \sum_{i=1}^{r} c_i^2 \sigma_i^2 \leq \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{r} c_i^2 = \sigma_1^2, \text{ достигается}$$

при $\bar{v} = \bar{v}_1$

$$\Rightarrow \bar{v} = \underset{\|\bar{v}\|=1}{\operatorname{argmax}} (X\bar{v})$$

(4)

$$L' = \sum_{i=1}^{N} dist^2((x_i, y_i), a) \to \min_a$$



$$L' = \sum_{i=1}^{N} \left(r_i^2 - (\bar{r}_i, \bar{a})^2\right) =$$

$$= const - \sum_{i=1}^{N} (\bar{r}_i, \bar{a})^2$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & y_N \end{pmatrix}; \quad X\bar{a} = \begin{pmatrix} (\bar{r}_1, \bar{a}) \\ \vdots \\ (\bar{r}_N, \bar{a}) \end{pmatrix}; \quad \bar{a}^T X^T X \bar{a} = \sum_{i=1}^{N} (\bar{r}_i, \bar{a})^2 =$$

$$= (X\bar{a})^2$$

$$\Rightarrow \operatorname{argmax} (X\bar{a})^2 = \underline{\bar{V}_1}$$

(5)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z_N \end{pmatrix} \qquad J_{xy} = x_i y^i \quad J_{yz} = y_i z^i$$

$$J_{xz} = x_i z^i$$

$$J_{xx} = \sum (y_i^2 + z_i^2); \quad J_{yy} = \sum (x_i^2 + z_i^2); \quad J_{zz} = \sum (x_i^2 + y_i^2)$$

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{zy} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i^2 + z_i^2 & -\sum x_i y_i & -\sum x_i z_i \\ -\sum x_i y_i & \sum x_i^2 + z_i^2 & -\sum y_i z_i \\ -\sum x_i z_i & -\sum y_i z_i & \sum x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ нужно найти ортог. матрицы, кот. диагонализируют $\hat{J}$, $J_0 = Q^T \hat{J} Q$

$$X^T X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_N \\ y_1 & \dots & y_N \\ z_1 & \dots & z_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & \sum y_i^2 & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & \sum z_i^2 \end{pmatrix}$$

$X^T X$, $\hat{J}$ положит. опред. $\Rightarrow$ можно привести к диагональному виду одновременно $\Rightarrow$ будут найдены одни и те же ортог. преобр.