МНК

1	3	4	5	6	7	8	9
+	+		+	+	+		

(1) $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{y} - y_i)^2 \longrightarrow \min_{\tilde{y}}$

$\tilde{y} = c \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial c} = 2\sum(c - y_i) = 0 \Rightarrow c = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

(3)

1) $\hat{y}_i = kx_i + b$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \sum (kx_i + b - y_i)^2$

$\frac{\partial L}{\partial k} = 2\sum x_i (kx_i + b - y_i) = 0 \Rightarrow k\overline{x^2} + b\bar{x} - \overline{xy} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial b} = 2\sum (kx_i + b - y_i) = 0 \Rightarrow b = \bar{y} - k\bar{x}$

$\Rightarrow k\overline{x^2} + \bar{x}\bar{y} - \overline{xy} - k\bar{x}^2 = 0$

$\Rightarrow \hat{k} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$; $\hat{b} = \bar{y} - k\bar{x}$

$\Rightarrow \hat{y}(x) = \hat{k}x + \hat{b}$; $\hat{y}(\bar{x}) = k\bar{x} + \bar{y} - k\bar{x} = \bar{y}$

$\Rightarrow$ работает

Для многомерной: $\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta_0 \end{pmatrix}$, $\vec{X} = \left(X \;\vdots\; \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right)$

$\tilde{X}^T \tilde{X} \theta = \tilde{X}^T y \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} X^T X & n\bar{x} \\ \hline n\bar{x}^T & n \end{array} \right) \begin{pmatrix} \theta \\ \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^T \\ \hline 1 \dots 1 \end{pmatrix} y$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X^T X\,\theta + n\theta_0 \bar{x} \\ n\bar{x}^T\theta + \theta_0 n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^T y \\ n\bar{y} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \bar{x}^T\theta + \theta_0 = \bar{y} \Rightarrow$ проходит через $(\bar{x}, \bar{y})$

в силу совместности системы $\tilde{X}^T\tilde{X}\vec{\theta} = \tilde{X}^T y$

(нормальная система совместна по т. Фредгольма)

6

Метод мн-телей Лагранжа: $\mathcal{L} = w^T w - \lambda^T (Xw - y)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = 0 \Leftrightarrow 2w^T - \lambda^T X = 0 \Rightarrow w = \frac{1}{2} X^T \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow Xw - y = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} X X^T \lambda = y$$

$$\Rightarrow \lambda = 2(XX^T)^{-1} y \Rightarrow w = \underbrace{X^T (XX^T)^{-1}}_{A^{-1}_{right}} y$$