# SFT interaction contrast with 100% accuracy

*Double-factorial experiment*

Let and denote weak and strong stimuli in Modality , respectively, and and in Modality . We assume that selectively influences processing times , and selectively influences processing times (Notation see Dzhafarov, 2003, Psychometrika; Dzhafarov et al., 2004, JMP):

with denoting channel-specific sources of randomness, a common source of randomness that allows the marginal processing times to be dependent, and and the factors of the experiment.

For a fixed , and are conditionally independent,

So we can state conditional independence by, e.g.,

.

*Stochastic dominance assumption*

The probability for fast processing is higher in strong than in weak stimuli, conditionally independent of the other modality.

,

, for all , with strict inequality for some .

I use the shorter form to avoid clutter in the equations

and , for all .

For the derivation of the race model, we need it the other way round, referring to slow processing:

and , for all .

*Race model*

Responses to double stimuli ab, aB, Ab, AB.

*Slow responses*

*Probability for slow responses*

Here we make use of conditional independence.

*Interaction contrast for survivor function*

, for all *.*

Since this holds for all , it also holds for the integral , for all . The interaction contrast for the distribution functions is then negative, for all (Townsend & Nozawa, 1994).

# Race model inequality

The finding by Townsend and Nozawa (1994) is a generalization of Miller’s (1982) race model inequality (RMI) with kill-the-twin correction (Eriksen, 1988). To see this, just set the intensity of the weak stimuli to zero, and the inequality can be restated as , for all , with denoting a catch trial (for details, see Gondan & Blurton, 2012).

Für die Miller-Ungleichung wird häufig Boole’s inequality herangezogen, , mit \* markiert, hier die typische Herleitung:

.

Das mit \*\* markierte Gleichheitszeichen ist die vielzitierte Kontext-Invarianz-Annahme, dass die Verarbeitungszeiten invariant sind über die Reizkontexte A und AB (und das gleiche mit über B und AB). Letztlich ist Kontext-Invarianz das gleiche wie die selective influence von oben, denn in schreibe ich ja auch, dass nur von abhängt, egal was gerade mit los ist.

Im MathPsych-Vortrag habe ich die RMI ein wenig anders hergeleitet, ohne Boole’s Inequality. Das race model ist dann so definiert:

Die RMI ist dann schnell hergeleitet, dank , mit \* markiert:

.

\*\* ist wieder Kontext-Invarianz. Wie Du ja in der Präsentation gesehen hast, lässt sich diese einfache Herleitung leicht auf eine bestimmte Antwort spezialisieren (und die Ungleichung damit auf Experimente mit nonperfect accuracy generalisieren):

Die RMI ist dann schnell hergeleitet, dank , mit \* markiert:

.

Jetzt zunächst ein paar Simulationen.

# Simulation

Die Idee hinter der Simulation ist, dass sich die processing times und jeweils auf einem Punkt konzentrieren [Funktion sim], dieser Punkt ist aus Gründen der Einfachheit eine zufällige ganze Zahl zwischen 1 und 10 (für ) und zwischen 1.1 und 10.1 für (damit es keine Ties gibt). Akzeptiert werden nur Kombinationen von , für die stochastische Dominanz eingehalten wird, wenn also die Punktverteilung höher liegt (= langsamer) als [Funktion sdom]. Dann werden die Reaktionszeiten per Minimum [Funktion race] aus den passenden bestimmt [Funktion resp] und der Interaktionskontrast berechnet [Funktion ic] als Doppeldifferenz der Verteilungsfunktionen (das sind dann alles Stufenfunktionen). Dieser Interaktionskontrast muss immer negativ sein oder Null (wird 10,000 mal ausprobiert, siehe unten).

*# Two responses that satisfy stochastic dominance*  
sdom = **function**(a, A)  
{  
 **return**(a **>** A)  
}  
  
*# Four processing times that satisfy stochastic dominance*  
sim = **function**()  
{  
 a = **sample**(1**:**10, size=1)  
 A = **sample**(1**:**10, size=1)  
   
 b = **sample**(1**:**10, size=1) **+** 0.1  
 B = **sample**(1**:**10, size=1) **+** 0.1  
   
 **if**(**sdom**(a, A) **&** **sdom**(b, B))  
 **return**(**list**(a=a, A=A, b=b, B=B))  
   
 *# Otherwise, retry*  
 **sim**()  
}  
  
**sim**()

## $a  
## [1] 8  
##   
## $A  
## [1] 7  
##   
## $b  
## [1] 7.1  
##   
## $B  
## [1] 5.1

*# Winner of the race*  
race = **function**(A, B)  
{  
 **if**(A **<=** B)  
 **return**(A)  
   
 **return**(B)  
}  
  
*# Responses to ab, aB, Ab, AB*  
resp = **function**(t = **sim**())  
{  
 ab = **race**(t**$**a, t**$**b)  
 aB = **race**(t**$**a, t**$**B)  
 Ab = **race**(t**$**A, t**$**b)  
 AB = **race**(t**$**A, t**$**b)  
   
 **list**(ab=ab, aB=aB, Ab=Ab, AB=AB)  
}  
  
**resp**()

## $ab  
## [1] 8.1  
##   
## $aB  
## [1] 5.1  
##   
## $Ab  
## [1] 8  
##   
## $AB  
## [1] 8

*# Interaction contrast*  
ic = **function**(ab, aB, Ab, AB, t=1**:**10)  
{  
 Fab = **ecdf**(ab)(t)  
 FaB = **ecdf**(aB)(t)  
 FAb = **ecdf**(Ab)(t)  
 FAB = **ecdf**(AB)(t)  
   
 **all**(Fab **+** FAB **<=** FaB **+** FAb)  
}  
  
**for**(i **in** 1**:**10000)  
{  
 t = **sim**()  
 r = **resp**(t)  
 **if**(**!ic**(r**$**ab, r**$**aB, r**$**Ab, r**$**AB))  
 {  
 **print**(t)  
 **print**(r)  
 }  
}

[keine Ausgabe, funktioniert also]

# Interaction contrast with nonperfect accuracy

Wie in der MathPsych-Präsentation wird die kanalspezifische Verarbeitung als Paar repräsentiert, , wobei die Verarbeitungszeit angibt und den Knopf, auf den die Testperson drückt. Zunächst werden 2AFC-Experimente betrachtet und der Fall untersucht.

*Zunächst einmal simulieren*

Wieder konzentrieren sich die Verarbeitungsprozesse und auf einen Punkt [Funktion sim] mit einer zufälligen ganze Zahl zwischen 1 und 10 für (für eine Zahl zwischen 1.1 bis 10.1) und 1 oder 2 für und . Akzeptiert werden nur Kombinationen von , für die stochastische Dominanz eingehalten wird, wenn also die Leistung in „schlechter“ ist als in . Gehen wir davon aus, dass die richtige Reaktion 1 ist. Mit schlechter meine ich dann die unten angegebene Dominanz, dass nämlich z.B. ist und , dass also der schwache Reiz falsch klassifiziert wurde und der starke Reiz richtig. Wenn beide richtig klassifiziert werden, soll der schwache Reiz zumindest langsamer klassifiziert werden, [Funktion sdom]. Dann werden die Reaktionen wieder per Minimum [Funktion race] aus den passenden bestimmt [Funktion resp], wobei nur die Verarbeitungszeit in die Minimumberechnung eingeht (!). Der Interaktionskontrast berechnet sich dann [Funktion ic] als Doppeldifferenz der Verteilungsfunktionen (das sind dann alles Stufenfunktionen), wobei die Verarbeitungszeit für auf gesetzt wird. Dieser Interaktionskontrast muss immer negativ sein oder Null (wieder 10,000 mal ausprobiert).

In den Simulationen gab es immer Gegenbeispiele, z.B. entsprechen die vier Realisierungen der Forderung nach stochastic dominance:

Race model liefert dann

Testet man den IC nun bei , findet man allerdings

* (weil Reaktion = 2)

Damit ist der Interaktionskontrast positiv (!), er müsste aber negativ oder Null sein. Ich habe dann mehr oder weniger ins Blaue hinein die stochastic dominance verschärft, indem ich zusätzlich gefordert habe, dass wenn , der schwache Reiz schneller (!) verarbeitet wird als der starke Reiz.

*Stochastic dominance*

Damit wird das Gegenbeispiel von oben ja zurückgewiesen, denn liegt ja über . So ganz ins Blaue hinein ist diese Zusatzforderung natürlich nicht, ich rede ja schon seit längerem darüber, dass die Verarbeitungszeiten für „Fehlreaktionen“ irgendwann wieder schneller werden, je weiter die Intensität des Stimulus in die Gegenrichtung ausschlägt. Mit dieser zusätzlichen Forderung – oh Wunder – hat die Simulation funktioniert, siehe unten.

*# Stronger notion of stochastic dominance*  
sdom = **function**(a, A)  
{  
 **if**(a**$**C **==** 1 **&** A**$**C **==** 1)  
 **return**(a**$**D **>** A**$**D)  
   
 **if**(a**$**C **==** 1 **&** A**$**C **!=** 1)  
 **return**(FALSE)  
   
 **if**(a**$**C **!=** 1 **&** A**$**C **==** 1)  
 **return**(TRUE)  
   
 *# default: a$C != 1 & A$C != 1* **return**(a**$**D **<** A**$**D)  
}  
  
*# Four processing times that satisfy stochastic dominance*  
sim = **function**()  
{  
 a = **list**(D=**sample**(1**:**10, size=1), C=**sample**(1**:**2, size=1))  
 A = **list**(D=**sample**(1**:**10, size=1), C=**sample**(1**:**2, size=1))  
   
 b = **list**(D=**sample**(1**:**10, size=1) **+** 0.1, C=**sample**(1**:**2, size=1))  
 B = **list**(D=**sample**(1**:**10, size=1) **+** 0.1, C=**sample**(1**:**2, size=1))  
   
 **if**(**sdom**(a, A) **&** **sdom**(b, B))  
 **return**(**list**(a=a, A=A, b=b, B=B))  
   
 *# Otherwise, retry*  
 **sim**()  
}  
  
**sim**()

## $a  
## $a$D  
## [1] 4  
##   
## $a$C  
## [1] 2  
##   
##   
## $A  
## $A$D  
## [1] 9  
##   
## $A$C  
## [1] 2  
##   
##   
## $b  
## $b$D  
## [1] 10.1  
##   
## $b$C  
## [1] 2  
##   
##   
## $B  
## $B$D  
## [1] 5.1  
##   
## $B$C  
## [1] 1

*# Winner of the race*  
race = **function**(A, B)  
{  
 **if**(A**$**D **<=** B**$**D)  
 **return**(A)  
   
 **return**(B)  
}  
  
*# Responses to ab, aB, Ab, AB*  
resp = **function**(t = **sim**())  
{  
 ab = **race**(t**$**a, t**$**b)  
 aB = **race**(t**$**a, t**$**B)  
 Ab = **race**(t**$**A, t**$**b)  
 AB = **race**(t**$**A, t**$**b)  
   
 **list**(ab=ab, aB=aB, Ab=Ab, AB=AB)  
}  
  
**resp**()

## $ab  
## $ab$D  
## [1] 5  
##   
## $ab$C  
## [1] 2  
##   
##   
## $aB  
## $aB$D  
## [1] 2.1  
##   
## $aB$C  
## [1] 1  
##   
##   
## $Ab  
## $Ab$D  
## [1] 3  
##   
## $Ab$C  
## [1] 1  
##   
##   
## $AB  
## $AB$D  
## [1] 3  
##   
## $AB$C  
## [1] 1

*# Interaction contrast*  
ic = **function**(ab, aB, Ab, AB, t=5.05)  
{  
 Fab = (ab**$**D **<=** t) **&** (ab**$**C **==** 1)  
 FaB = (aB**$**D **<=** t) **&** (aB**$**C **==** 1)  
 FAb = (Ab**$**D **<=** t) **&** (Ab**$**C **==** 1)  
 FAB = (AB**$**D **<=** t) **&** (AB**$**C **==** 1)  
  
 Fab **+** FAB **<=** FaB **+** FAb  
}  
  
*# Interaction contrast*  
ic = **function**(ab, aB, Ab, AB, t=1**:**10)  
{  
 **if**(ab**$**C **!=** 1)  
 ab**$**D = Inf  
   
 **if**(aB**$**C **!=** 1)  
 aB**$**D = Inf  
   
 **if**(Ab**$**C **!=** 1)  
 Ab**$**D = Inf  
   
 **if**(AB**$**C **!=** 1)  
 AB**$**D = Inf  
   
 Fab = **ecdf**(ab**$**D)(t)  
 FaB = **ecdf**(aB**$**D)(t)  
 FAb = **ecdf**(Ab**$**D)(t)  
 FAB = **ecdf**(AB**$**D)(t)  
   
 **all**(Fab **+** FAB **<=** FaB **+** FAb)  
}  
  
**for**(i **in** 1**:**10000)  
{  
 t = **sim**()  
 r = **resp**(t)  
 **if**(**!ic**(r**$**ab, r**$**aB, r**$**Ab, r**$**AB))  
 {  
 **print**(t)  
 **print**(r)  
 }  
}

Keine Ausgabe am Ende, d.h., es funktioniert.

*Was ich mit der Umkehr der stochastic dominance bei den Fehlreaktionen meine und warum es eigentlich gar keine Fehlreaktionen gibt*

Nehmen wir an, wir sind an Reaktion 1 interessiert (z.B. linke Taste). Nun bieten wir sukkzesive random dot motion (RDM) dar und die Testperson soll 1 drücken, wenn sie links wahrnimmt und 2, wenn rechts. Wir betrachten 4 Reize:

1. Deutliche RDM nach rechts
2. Leichte RDM nach rechts
3. Leichte RDM nach links
4. Deutliche RDM nach links

Naiv erwarten wir , und tatsächlich kann man das auch in einem Diffusionsmodell sehen (wohlgemerkt: gilt mal wieder nur für , nicht für , also fast given 1, da muss ich immer wieder dumme Fragen beantworten). Ebenfalls erwarten wir . Die verschärfte stochastische Dominanz von oben drückt genau das aus, entspricht der Steigerung der Reizintensität nach links, und entspricht der Steigerung der Reizintensität nach rechts.

Man sieht auch, das alles funktioniert nur mit , nicht etwa mit . Denn die korrekte Reaktion auf a) und b) des Beispiels ist ja nicht 1, sondern 2. Ich kann aber keine stochastic dominance für formulieren (bzw. formulieren schon, aber ich finde sie nicht im Experiment). Aber wie gestern bereits besprochen, ist die Frage nach der korrekten Reaktion ohnehin sinnlos, wenn man die RDM in b und c so schwach werden lässt, dass die Testperson gar nichts mehr erkennen kann.

# Zu erledigen 😊

Meine Hoffnung ist jetzt natürlich, dass wir wie die Miller-Ungleichung auch Townsend und Nozawas Interaktionskontrast verallgemeinern können, also   
, for all .

Ich bin sicher, dass man das auch formal beweisen kann, ähnlich wie oben für das Szenario 100% accuracy. Evtl. ganz einfach, evtl. schwieriger, ich vermute, dass es nicht einfach ist.

* Es kann hilfreich sein, die Herleitung der Miller-Ungleichung „ohne Boole“ auch für den Interaktionskontrast von Townsend und Nozawa zu versuchen.
* Klar ist, dass die erweiterte Definition von stochastic dominance an irgendeiner Stelle benötigt wird, das haben wir ja in den Simulationen gesehen. Aber ich weiß nicht wo.

Wenn Du irgendwo stecken bleibst, melde Dich. Das Ding hier hat oberste Priorität. Wenn wir das hinbekommen (und was Gleichwertiges für die anderen Modelle, die er sich angeschaut hat, dann haben wir die Experimentalpsychologie wirklich auf einen neuen Sockel gehoben, das sage ich jetzt in aller Unbescheidenheit.

# References

Dzhafarov, E. N. (2003). Psychometrika.

Dzhafarov, E. N., Schweickert, R. & Sung, K. (2004). JMP.

Eriksen, C. E. (1988). A source of error … Perception & Psychophysics.

Gondan, M. & Blurton, S. P. (2012). Generalizations of the race model inequality.

Miller, J. (1982). Cognition.

Townsend, J. & Nozawa, G. (1995). JMP.

# Steinbruch/Müllhalde

*Stochastic dominance*

,

, for all , with strict inequality for some .

Bzw.

,

, with , for all , and for some .

*Race model*

Responses to double stimuli ab, aB, Ab, AB.

*Fast responses*

The events are mutually exclusive.

*Probability for fast responses*

*Interaction contrast for distribution function*

(das <= ist mir jetzt egal)

, for all *.* (?)

Linke Spalte (rechte Spalte verhält sich wahrscheinlich symmetrisch)

* Wenn , dann ist der IC Null.
* Wenn , dann auch.
* Wenn bekommen wir Null.  
  + Case
    - Also Null
  + Case
    - Das wäre dann kleiner Null.
* Wenn dann irgendwas Ähnliches