# Universidad Alfonso X El Sabio

## Grado en Ingeniería Matemática

Técnicas de Optimización y Control

---

CASO PRÁCTICO

---

González García, María

5 de enero de 2025

# Índice

# 1. Introducción.

Los economistas del Banco Central Europeo han ajustado los datos de variación de la tasa de ahorro de las familias ( %ΔTasa de ahorro) en función de la variación del PIB ( %ΔPIB) y la variación del consumo de los hogares ( %ΔCH) en función del tiempo $t$ en trimestres. Todas las tasas de variación son inter-trimestrales. Si consideramos, para simplificar el problema, que $x = \%\Delta PIB$ e $y = \%\Delta CH$, la ecuación a optimizar es:

$$\%\Delta\text{Tasa de ahorro} = J = \int \left[ (1+t^2)\cdot(\Delta PIB_t) + (\Delta CH_t) + \left(\frac{\partial \Delta PIB_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta CH_t}{\partial t}\right)^3 \right] dt$$

$$\%\Delta\text{Tasa de ahorro} = J = \int \left[ (1+t^2)\cdot x(t) + y(t) + \left(\frac{\partial x(t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(t)}{\partial t}\right)^3 \right] dt$$

**Problema:**

a) Mediante el cálculo de variaciones, calcular las curvas óptimas de PIB y de consumo de los hogares ($CH$) en función de $t$ (en función de las constantes de integración), que optimizan el problema.

b) Se ha establecido para la simulación que para $t = 0{,}5$ la tasa de variación del PIB y del consumo de los hogares es del 0.5 %. De igual modo, para $t = 1$ las tasas de variación del PIB y del consumo de los hogares son del 1 %. Calcular las curvas óptimas bajo estas condiciones de contorno. Dibujar las curvas. *Nota: se aconseja usar métodos numéricos, especialmente el método de Newton-Raphson.*

c) Los economistas necesitan saber si existe un punto $t^*$ que iguale las curvas de optimización. Demostrar si existe este punto desde un punto de vista gráfico dentro de los intervalos de $t$ de 0 a 2. ¿Qué significado económico podemos concluir tras este análisis?

d) Aplicando la distancia por diferencias (diferencia entre los valores de $x^*$ e $y^*$), calcular el punto $t^*$ que minimice dicha distancia entre las curvas. Razonar la respuesta e indicar cómo usar este parámetro desde un punto de vista económico. *Nota: se aconseja usar métodos numéricos, especialmente el método de Newton-Raphson.*

Las nuevas políticas fiscales establecidas por la UE y la incertidumbre de cómo impactarán los conflictos en Oriente Medio y la guerra de Ucrania en la economía de la UE, hace necesario establecer una función de control de cada una de las variables en función del incremento de la inflación ($u(t)$ y $v(t)$). En este sentido, se establecen dos funciones de control:

$$\frac{\partial \Delta PIB_t}{\partial t} = u(t) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \Delta CH_t}{\partial t} = v(t)$$

Aplicando técnicas de control óptimo, el equipo económico necesita conocer las curvas optimizadas de la función $J$, así como las funciones $u$ y $v$ optimizadas en función de $t$. En este caso, dejar la solución en función de las constantes de integración.

Dado el caso de uso, enumeras tres conclusiones desde el punto de vista economico y matematico.

**Anotación. Ejercicio resuelto en Github.**

Todo lo resuelto a continuación de forma manual ha sido programado en Python y está disponible en el repositorio de GitHub, donde se pueden encontrar todos los detalles. Se incluye una referencia a este repositorio en la sección de **Anexos**.

## 2. Apartado 1. Cálculo de las curvas óptimas.

Para el cálculo de las curvas óptimas de PIB ($x$) y CH ($y$) en función de $t$, utilizaremos el cálculo de variaciones:

$$J = \int \left[ (1+t^2)\cdot x(t) + y(t) + \left(\frac{\partial x(t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(t)}{\partial t}\right)^3 \right] dt$$

Debemos resolverlo mediante la ecuación de Euler-Lagrange. Esta permite encontrar las funcines que maximicen o minimicen un funcional dado. En nuestro caso habría que aplicarlo a cada variable que haya, únicamente a $x$ e $y$.

Para cada variable, aplicamos la ecuación de Euler, que es fundamental en el cálculo de variaciones:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

donde $F$ es la integrando de la función $J$, e $y' = \frac{dy}{dt}$.

### 2.1. Ecuación de Euler-Lagrange para $x$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) = 0 \Rightarrow (1+t^2) - \frac{d}{dt}[2x'] = 0 \Rightarrow (1+t^2) - 2x'' = 0$$

Despejando $x$ obtenemos lo siguiente.

$$x'' = \frac{1}{2}[1+t^2] \Rightarrow x' = \int \frac{1}{2}(1+t^2)\,dt \Rightarrow x' = \frac{1}{2}[t+\frac{1}{3}t^3]+C \Rightarrow x = \int \frac{1}{2}[t+\frac{1}{3}t^3]+C\,dt \Rightarrow x = \frac{1}{4}t^2+\frac{1}{24}t^4+C\cdot t+C_1$$

**Solución.** La solución para $x$ optimizada, que representa el PIB, es:

$$x^* = \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{4}t^2 + C\cdot t + C_1$$

### 2.2. Ecuación de Euler-Lagrange para $y$.

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{d}{dt}[3(y')^2] = 0 \Rightarrow 1 - 6y'y'' = 0 \Rightarrow 1 = 6y'y''$$

Debemos de hacer el siguiente cambio de variable: $y' = u$, por tanto $y'' = u \cdot u'$, dónde: $y' = u(y)$.

$$1 = 6u^2u' \Rightarrow 6u^2\frac{du}{dy} = 1 \Rightarrow \int 6u^2\,du = \int\,dy \Rightarrow 2u^3 = y + C_2 \Rightarrow u = \sqrt[3]{\frac{y+C_2}{2}}$$

A continuación realizamos la sustitución inversa: $u = y'$.

$$y' = \sqrt[3]{\frac{y+C_2}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \sqrt[3]{\frac{y+C_2}{2}} \Rightarrow \frac{dt}{dy} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{y+C_2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\,dt = \int \frac{1}{\sqrt[3]{y+C_2}}\,dy \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}}t+C_3 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(y+C_2)^2}$$

**Solución.** La solución para $y$ optimizada, que representa el CH, es:

$$(y+C_2)^2 = (\frac{\sqrt[3]{4}}{3}t + C_3)^3$$

# 3. Apartado 2. Cálculo de las curvas óptimas dadas condiciones de contorno.

Se procede al cálculo de las curvas óptimas bajo las condiciones de contorno establecidas en el enunciado. Primero, se determinará la curva óptima correspondiente a $X$, que representa la tasa de variación del PIB, y posteriormente se calculará la curva para $Y$, que describe la tasa de variación del consumo de los hogares.

Se ha establecido que en $t = 0{,}5$, la tasa de variación del PIB y del consumo es del 0.5 %. Asimismo, en $t = 1$, dichas tasas alcanzan el 1 %. A partir de estas condiciones de contorno, se obtendrán las expresiones para las curvas óptimas que describen estos comportamientos, y se procederá a graficarlas para ilustrar su evolución.

## 3.1. Cálculo de constantes para $x$.

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} X(0{,}5) = 0{,}5 \\ X(1) = 1 \\ x^* = \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{4}t^2 + C \cdot t + C_1 \end{cases}$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$\text{Para } t = 0{,}5 : \frac{1}{24}(0{,}5)^4 + \frac{1}{4}(0{,}5)^2 + 0{,}5C + C_1 = 0{,}5 \Rightarrow 0{,}0651042 + 0{,}5C + C_1 = 0{,}5 \quad \text{(Ecuación 1)}$$

$$\text{Para } t = 1 : \frac{1}{24}(1)^4 + \frac{1}{4}(1)^2 + C + C_1 = 1 \Rightarrow 0{,}29167 + C + C_1 = 1 \quad \text{(Ecuación 2)}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 0{,}5C + C_1 = 0{,}4348958 \\ C + C_1 = 0{,}70833 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} C & = \frac{35}{64} \approx 0{,}5469 \\ C_1 & = \frac{31}{192} \approx 0{,}1615 \end{cases}$$

**Solución**. La solución para $x$ óptima cumpliendo las anteriores condiciones de contorno, es:

$$x^*(t) = \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{4}t^2 + 0{,}5469 \cdot t + 0{,}1615$$

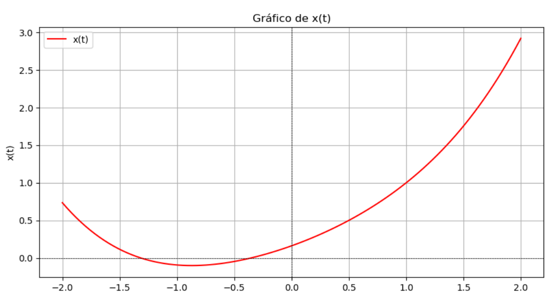


Figura 1: Representación gráfica de la función óptima $x^*$ en función del tiempo.

## 3.2. Cálculo de constantes para $y$.

Para facilitar la aplicación de las condiciones de contorno, despejamos $y$ de la siguiente manera:

$$(y+C_2)^2 = \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}t + C_3\right)^3 \Rightarrow y + C_2 = \pm\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}t + C_3\right)^{\frac{3}{2}}.$$

$$y+C_2 = \pm\left(\frac{\sqrt[3]{4}t + C_3}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y+C_2 = \pm\left(\frac{\sqrt[3]{4}(t + C_3)}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y+C_2 = \pm\frac{2\cdot(t+C_3)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow y = -C_2 \pm \frac{2(3t+C_3)^{\frac{3}{2}}}{27}.$$

$$\begin{cases} y(t) & = C_2 - \frac{2(3t+C_3)^{\frac{3}{2}}}{27} \\ y(t) & = C_2 + \frac{2(3t+C_3)^{\frac{3}{2}}}{27} \end{cases}$$

Hemos optado por seleccionar la segunda ecuación, dado que la primera conduce a constantes complejas. Esta elección nos permitirá aplicar las condiciones de contorno establecidas por el problema, $y(1) = 1$ y $y(0{,}5) = 0{,}5$.

$$\text{Para } t = 1: \quad y(1) = C_2 + \frac{2(3+C_3)^{\frac{3}{2}}}{27} = 1 \Rightarrow C_2 + \frac{2(3+C_3)^{\frac{3}{2}}}{27} = 1. \quad \text{(Ecuación 1)}$$

$$\text{Para } t = 0,5: \quad y(0,5) = C_2 + \frac{2(1,5+C_3)^{\frac{3}{2}}}{27} = 0,5 \Rightarrow C_2 + \frac{2(1,5+C_3)^{\frac{3}{2}}}{27} = 0,5. \quad \text{(Ecuación 2)}$$

Debemos resolver el siguiente sistema.

$$\begin{cases} C_2 + \frac{2(3+C_3)^{\frac{3}{2}}}{27} = 1 \\ C_2 + \frac{2(1{,}5+C_3)^{\frac{3}{2}}}{27} = 0{,}5 \end{cases}$$

Dado que se trata de un sistema no lineal, es necesario utilizar métodos numéricos para encontrar su solución. En este caso, aplicaremos el método de Newton-Raphson.

A continuación, se explicará el funcionamiento del método, aunque la resolución se llevará a cabo mediante un **script en Python** para mayor comodidad. **Repositorio de Newton-Raphson en GitHub**.

Ejecutando este método obtenemos la siguiente solución: $\begin{cases} C_2 & = -1,256946 \\ C_3 & = 6,755211 \end{cases}$

**Solución**. La solución para $y$ óptima cumpliendo las anteriores condiciones de contorno, es:

$$y^*(t) = 1,300542\,(0,444101t+1)^{\frac{3}{2}} - 1,256946$$

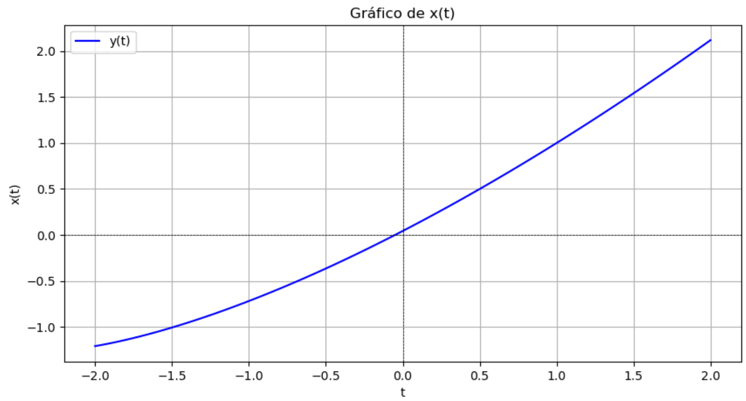


Figura 2: Representación gráfica de la función óptima $y^*$ en función del tiempo.

#### 3.2.1. Método de Newton-Raphson.

El **Método de Newton-Raphson** es una técnica numérica ampliamente utilizada para encontrar soluciones de ecuaciones no lineales.

Para una función $f(x)$, el método de Newton-Raphson se basa en la siguiente aproximación:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- $x_n$ es la aproximación actual. También llamado semilla.
- $f(x_n)$ es el valor de la función en la aproximación actual.
- $f'(x_n)$ es la derivada de la función en la aproximación actual.

Este proceso se repite iterativamente hasta que la solución converge a un valor deseado con un nivel de precisión específico.

**Extensión a Sistemas de Ecuaciones.**
Esta metodología se amplia al caso de sistemas de ecuaciones, donde se buscan las raíces de múltiples funciones simultáneamente. Para sistemas de $m$ ecuaciones no lineales en $n$ incógnitas, el método se puede generalizar. Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Siendo:

- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ es el vector de incógnitas.
- $F(x) = \big(f_1, f_2, \ldots, f_m\big)$ es el vector de funciones no lineales: $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

El método de Newton-Raphson para resolver este sistema utiliza la siguiente aproximación **iterativa**:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$$

Siendo:

- $x_n$ es la aproximación actual para el vector solución.
- $F(x_n)$ es el valor del vector de funciones evaluado en $\mathbf{x}_n$.
- $J(x_n)$ es la matriz jacobiana del sistema de ecuaciones evaluada en $x_n$:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

El proceso se repite de forma iterativa hasta que $\mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$ sea suficientemente pequeño, indicando que se ha alcanzado la solución con el nivel de precisión deseado.

# 4. Apartado 3. Existencia de un punto $t^*$ que iguale las curvas de optimización.

Se muestran dos curvas optimizadas bajo condiciones iniciales para el Producto Interno Bruto (PIB) y el Consumo de los Hogares (CH), como $\%\Delta PIB$ y $\%\Delta CH$. Las conclusiones que se derivan de esta relación son esenciales para comprender cómo la interacción entre el crecimiento económico y el consumo afecta tanto la economía general como el bienestar de los hogares.

Las condiciones implantadas buscan mantener un equilibrio entre el crecimiento de la producción económica total y el nivel de consumo de las familias.

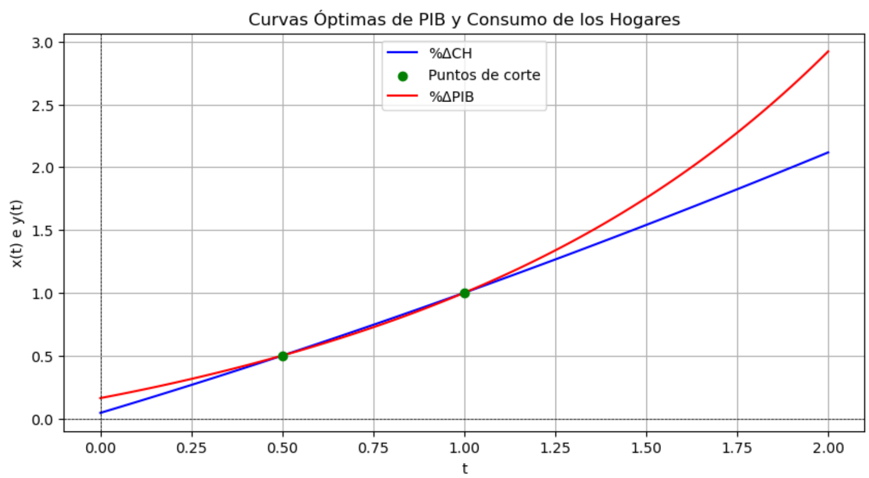


Figura 3: Gráfica: Intersección de las curvas óptimas de PIB y CH

Debido a las restricciones iniciales establecidas, ambas curvas se intersectarán en los puntos $t = 0{,}5$ y $t = 1$. Es necesario analizar lo que ocurre antes, entre, y después de estos puntos.

- **CH por encima del PIB**: Esto ocurre durante el intervalo $[0{,}5, 1]$. Esta situación, aunque sea momentánea, puede resultar preocupante desde una perspectiva económica. Un aumento del consumo superior al crecimiento de la producción puede ser señal de que los hogares están financiando su nivel de vida mediante **endeudamiento** o la **utilización de ahorros**. Esto si se extendiera a largo plazo, podría ser insostenible. Este fenómeno se conoce como **empobrecimiento**, ya que los hogares gastan más de lo que se produce.

- **CH por debajo del PIB**: Ocurre durante el intervalo $(-\infty, 0{,}5) \cup (1, \infty)$. El crecimiento del PIB supera al consumo de los hogares, lo que representa una situación más favorable. Cuando la producción de bienes y servicios crece más rápido que el consumo, se genera un **excedente económico**. Este excedente sobrante tiene la posibilidad de inversión o ahorro para situaciones críticas. En este contexto, las familias tienen la capacidad de consumir sin necesidad de endeudarse o agotar sus recursos, contribuyendo así al aumento de la riqueza y la sostenibilidad a largo plazo.

- **CH igual que el PIB**: Ocurre en los puntos $t = 1$ y $t = 0{,}5$. Esto significa que la totalidad de la producción económica se destina exclusivamente al consumo privado, lo que sugiere una **falta de ahorro**. Es decir, no se destinan recursos a la inversión ni al ahorro, ya que todo lo producido por la economía es consumido inmediatamente.

# 5. Apartado 4. Función distancia entre $x^*$ e $y^*$.

Para abordar la minimización de la distancia entre las curvas $x^*(t)$ e $y^*(t)$, utilizaremos la diferencia entre sus valores en un intervalo determinado. Las condiciones del problema establecen que el intervalo de interés se limita entre $t = 0{,}5$ y $t = 1$.

La distancia entre las curvas se puede expresar como:

$$D(t) = x^*(t) - y^*(t)$$

Para el problema, se ha determinado que la distancia viene dada por la siguiente función en forma de curva:

$$D(t) = \frac{t^4}{24} + \frac{t^2}{4} + 0,546875t - 1,30054278393664(0,444101574826121t + 1)^{\frac{3}{2}} + 1,41840479027391.$$

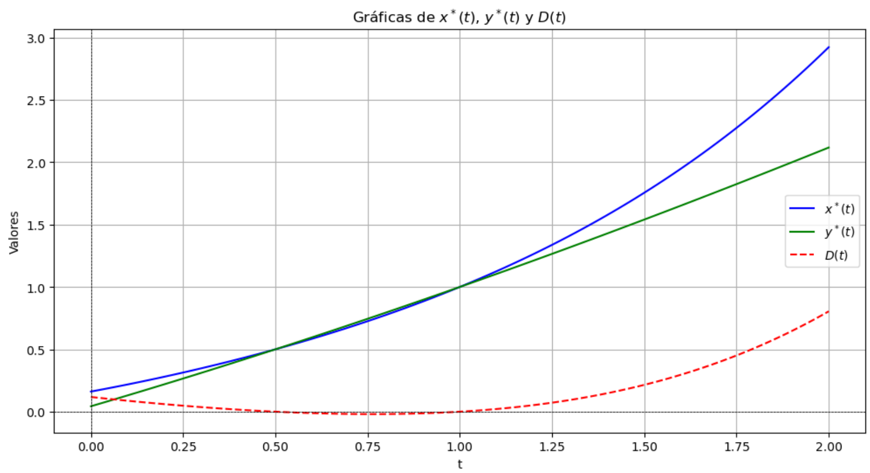


Figura 4: Gráfica: Intersección de las curvas óptimas de PIB y CH junto a la curva $D(t)$.

Esta recta de distancia representa el **ahorro**. En el intervalo $[0{,}5, 1]$, la función se vuelve negativa, lo que implica que los hogares están incurriendo en desahorro. Esto puede interpretarse como un decrecimiento en el ahorro, lo que sugiere que los hogares están financiando su nivel de vida mediante endeudamiento o utilización de ahorros.

En contraste, en el resto del dominio $t$ la función es positiva, provocando una acumulación de recursos. Cuando la producción de bienes y servicios crece más rápido que el consumo, se genera un excedente económico. Este excedente se puede utilizar para inversión o ahorro en situaciones críticas, permitiendo a las familias consumir sin necesidad de endeudarse o agotar recursos.

## 5.1. Cambio de condiciones de contorno.

Si en el problema de las curvas optimizadas del $PIB$ y $CH$ se cambian las condiciones iniciales para el cálculo de las curvas, los puntos de intersección también cambiarían. A continuación se explica de qué manera podrían cambiar y cómo afectaría el comportamiento de las curvas:

- **Nuevos puntos de corte**: Cambiar las condiciones iniciales alteraría los puntos de intersección entre las curvas del PIB y el consumo, desplazándolos hacia la izquierda o derecha en el tiempo, según el valor inicial del consumo o PIB.

  1. Si las curvas se cortan en tiempos más tempranos sugiere que el equilibrio entre el crecimiento del PIB y el consumo de los hogares se alcanza de forma más rápida.
  2. Si los puntos de corte se retrasan sugiere que la economía tarda más en alcanzar el equilibrio entre consumo y producción, lo que puede implicar un desajuste.

  En caso de que la curva se cruce más veces, podría significar que la relación entre el PIB y CH oscila, alternando entre fases.

- **Si las curvas no se intersectan**: Un cambio significativo en las condiciones iniciales podría incluso hacer que las curvas no se crucen en absoluto. Esto podría ser visto tanto como algo positivo, si implica una economía en crecimiento y ahorro, como negativo, si implica un desajuste que no se está corrigiendo.

- **Si las curvas son la misma**: Si las curvas del PIB y el consumo son idénticas, ambas se comportan a la par. Esto sugiere un equilibrio perfecto, donde el consumo es proporcional al PIB, indicando confianza del consumidor y crecimiento estable. Sin embargo, también implica un riesgo: si el PIB se desacelera, el consumo disminuirá en igual medida, lo que puede llevar a una contracción económica más severa, es decir, una reducción de la actividad económica intensa y prolongada.

# 6. Apartado 5. Cálculo de las curvas optimizadas mediante funciones de control.

Se empleará el **Principio del Máximo de Pontryagin** para calcular las curvas optimizadas de las funciones de control $u(t)$ y $v(t)$, que representan las tasas de cambio del PIB y del consumo, respectivamente, en el contexto de las nuevas políticas fiscales de la UE y su impacto en la inflación.

El objetivo es maximizar la función objetivo $J$ mediante condiciones de optimalidad que nos permitan determinar las trayectorias óptimas de las variables.

## 6.1. Sistemas dinámicos.

Los sistemas dinámicos describen la dinámica del sistema. Se describe como un conjunto de EDOs. En este caso se nos definen las siguientes:

$$\begin{cases} x' &= u \\ y' &= v \end{cases}$$

siendo:

- $x(t)$ e $y(t)$ los vectores de estado en un tiempo $t$.
- $u(t)$ y $v(t)$ los vectores de control.

## 6.2. Funcional de costo.

El funcional de costo es una integral que incluye términos que representan tanto el estado del sistema como las acciones de control. La solución del mismo proporciona, además de la trayectoria óptima, también las acciones de control necesarias para seguir dicha trayectoria. Se define el siguiente:

$$\%\Delta\text{Tasa de ahorro} = J = \int (1+t^2)\cdot x(t) + y(t) + u^2 + v^3, dt$$

## 6.3. Principio del Máximo de Pontryagin.

Para el Principio del Máximo de Pontryagin debemos introducir el hamiltoneano:

$$H = J + \lambda_1 x' + \lambda_2 y' = (1+t^2)x + y + u^2 + v^3 + \lambda_1 u + \lambda_2 v$$

siendo $\lambda$ los multiplicadores de Lagrange. Las condiciones de optimalidad según Pontryagin son las siguientes:

1. **Ecuaciones de estado.**

$$\begin{cases} x' = u \\ y' = v \end{cases}$$

2. **Ecuaciones de co-estado.**

$$\begin{cases} \lambda_1' = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \lambda_1' = -(1+t^2) \\ \lambda_2' = -\frac{\partial H}{\partial y} \Rightarrow \lambda_2' = -1 \end{cases}$$

3. **Condición de optimalidad o control.**

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow 2u + \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial v} = 0 \Rightarrow 3v^2 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

### 6.3.1. Resolución del sistema de ecuaciones.

Mediante las ecuaciones de co-estado podemos hallar $\lambda_i$:

$$\lambda_1' = -(1+t^2) \Rightarrow \lambda_1(t) = -\int (1+t^2)\,dt = -\left(t + \frac{t^3}{3}\right) + C_1$$

$$\lambda_2' = -1 \Rightarrow \lambda_2(t) = -\int 1\,dt = -t + C_2$$

Sustituyendo las expresiones de los multiplicadores de co-estado en las condiciones de optimalidad podemos obtener $u$ y $v$:

$$2u + \lambda_1 = 0 \Rightarrow u = -\frac{\lambda_1}{2} \Rightarrow u = \frac{1}{2}\left(t + \frac{t^3}{3} - C_1\right)$$

$$3v^2 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow v^2 = \frac{-\lambda_2}{3} \Rightarrow v^2 = \frac{t - C_2}{3} \Rightarrow v = \pm\sqrt{\frac{t - C_2}{3}}$$

A partir de las expresiones obtenidas para los controles óptimos $u$ y $v$, usando las ecuaciones de estado $x' = u$ y $y' = v$, podemos calcular $x$ e $y$.

$$x' = u \Rightarrow x' = \frac{1}{2}\left(t + \frac{t^3}{3} - C_1\right) \Rightarrow x = \int \frac{1}{2}\left(t + \frac{t^3}{3} - C_1\right) dt \Rightarrow x = \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{24} - \frac{C_1 t}{2} + C_3$$

$$y' = v \Rightarrow y' = \pm\sqrt{\frac{t - C_2}{3}} \Rightarrow y = \int \pm\sqrt{\frac{t - C_2}{3}}\,dt \Rightarrow y = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}(t - C_2)^{3/2} + C_4$$

**Solución**. Hemos hallado las siguientes funciones óptimas para el sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1^*(t) = -\left(t + \frac{t^3}{3}\right) + C_1 \\ \lambda_2^*(t) = -t + C_2 \\ u^*(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{t^3}{3} - C_1\right) \\ v^*(t) = \pm\sqrt{\frac{t - C_2}{3}} \\ x^*(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{24} - \frac{C_1 t}{2} + C_3 \\ y^*(t) = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}(t - C_2)^{3/2} + C_4 \end{cases} \tag{1}$$

## 6.4. Conclusiones.

1. **Optimización de recursos**: La optimización del consumo y el PIB mediante funciones de control ayuda a maximizar el bienestar social en un contexto de incertidumbre geopolítica. El Principio del Máximo de Pontryagin identifica trayectorias óptimas, segurando que las decisiones coincidan con los objetivos económicos a largo plazo y optimicen la eficiencia en el uso de recursos.

2. **Interacción dinámica entre CH y PIB**: La relación entre el consumo y PIB es crucial para comprender el impacto de las políticas fiscales en el crecimiento sostenible. Las EDOs que modelan esta interrelación aportan una representación precisa permitiendo así anticipar los efectos de diversas estrategias sobre el equilibrio económico, facilitando la toma de decisiones.

3. **Flexibilidad y adaptabilidad**: A través de las funciones de control optimizadas, el modelo puede ser adaptado a diversas condiciones del mercado, garantizando así la efectividad y flexibilidad de las políticas fiscales.

# 7. Anexos.

Se proporciona el código utilizado para la resolución del ejercicio. Se encuentra alojado en el siguiente repositorio de Github: **Repositorio de Entrega 1 en GitHub**.

In [2]:

```
def euler_lagrange(F, y, t):
    y_prime = sp.diff(y, t)  # Derivada de y respecto a t

    # SIMPLIFICACIONES:
    if not F.has(y):
        euler_eq = sp.Eq(sp.diff(F, y_prime), sp.Symbol('C'))
        return sp.dsolve(euler_eq, y)
    if not F.has(t):
        eq = F - y_prime * sp.diff(F, y_prime)
        euler_eq = sp.Eq(eq, sp.Symbol('C'))
        return sp.dsolve(euler_eq, y)

    dF_dy = sp.diff(F, y)
    dF_dy_prime = sp.diff(F, y_prime)
    euler_eq = sp.simplify(dF_dy - sp.diff(dF_dy_prime, t))
    return sp.dsolve(euler_eq, y)
```

Figura 5: Función: Euler-Lagrange.

In [17]:

```
t_values = np.linspace(0, 2, 100)

# Calcular los valores correspondientes de x y y
x_values = x_func(t_values)
y_values = y_func(t_values)

# Crear el gráfico
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t_values, y_values, label='%ΔCH', color='blue')
plt.plot(t_values, x_values, label='%ΔPIB', color='red')
plt.title('Curvas Óptimas de PIB y Consumo de los Hogares')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('x(t) e y(t)')
plt.axhline(0, color='black', lw=0.5, ls='--')
plt.axvline(0, color='black', lw=0.5, ls='--')
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```

Figura 6: Visualización de las curvas de PIB y CH.

```python
class Funcion():
    def __init__(self, f1_sym, f2_sym, C2, C3):
        # Definir las ecuaciones del sistema en formato numérico.
        self.f1 = sp.lambdify([C2, C3], f1_sym, 'numpy')
        self.f2 = sp.lambdify([C2, C3], f2_sym, 'numpy')
        self.df1_dC2 = sp.lambdify([C2, C3], sp.diff(f1_sym, C2), 'numpy')
        self.df1_dC3 = sp.lambdify([C2, C3], sp.diff(f1_sym, C3), 'numpy')
        self.df2_dC2 = sp.lambdify([C2, C3], sp.diff(f2_sym, C2), 'numpy')
        self.df2_dC3 = sp.lambdify([C2, C3], sp.diff(f2_sym, C3), 'numpy')
```

Figura 7: Clase Función: Definición de las funciones numéricas y sus derivadas.

```python
def newton_raphson(solver, C2_0, C3_0, tol=1e-8, max_iter=400):
    C2 = C2_0
    C3 = C3_0

    for i in range(max_iter):
        # VECTOR F.
        F1_val = solver.f1(C2, C3)
        F2_val = solver.f2(C2, C3)
        F = np.array([F1_val, F2_val])

        # JACOBIANO.
        J = np.array([
            [solver.df1_dC2(C2, C3), solver.df1_dC3(C2, C3)],
            [solver.df2_dC2(C2, C3), solver.df2_dC3(C2, C3)]
        ])
        J_inv = np.linalg.inv(J)

        # X_N+1 = X_N - J^-1 * F
        delta = np.dot(J_inv, F)
        C2 -= delta[0]
        C3 -= delta[1]

        # CRITERIO DE CONVERGENCIA
        if np.linalg.norm(F) < tol:
            break

    return C2, C3
```

Figura 8: Función: Newton-Raphson para sistemas de ecuaciones no lineales.

# 8. Referencias.


1. **Universidad de Barcelona**. *Memoria de investigación.* Disponible en: `https://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/62444/2/memoria.pdf`.

2. **La Web de Física**. *Diccionario de Lagrange.* Disponible en: `https://www.lawebdefisica.com/dicc/lagrange/`.