Numerik

Mitschrieb aus dem SS2012

22. April 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Normen

1.1 Vektornormen

Die Algorithmen der numerischen Mathematik liefern Näherungswerte $\tilde{x}$ für die exakten Größen x. Um die Güte von $\tilde{x}$ zu bestimmen brauchen wir ein Maß für die Differenz $x - \tilde{x}$. Das Konzept einer Norm liefert solch ein Maß.

Eine Norm auf dem $\mathbb{K}$ -Vektorraum V ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) ist eine Funktion $\|\cdot\| : V \to [0, \infty[$, für die gilt:

1. $\|\cdot\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $\forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K} : \|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$
3. $\forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Beispiel 1.1 (*Verschiedene Normen*)

1. *$V = \mathbb{K}^n$ über $\mathbb{K}$ p-Normen:* $\|v\|_p := (\sum_{k=1}^{n} |v_k|^p)^{\frac{1}{p}O}, 1 \leq p < \infty$
2. *Euklidische Norm: s. LA II*
3. *Maximumsnorm:* $\|v\|_\infty := max\{|v_k| : k = 1 : n\}$
4. *Maximums oder Supremumsnorm:* $\lim_{p \to \infty} \|v\|_p = \|v\|_\infty$

Wegen $\{v^k\} \subset V : \lim_{n \to ???} v^k = w$ gilt $\lim_{k \to \infty} \|v^k - w\| = 0$.

Satz 1.1 (*Äquivalenz von Normen*)

Alle Normen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V sind ***äquivalent****, das heißt zu jedem Paar von Normen* $\|\cdot\|, \|\cdot\|_*$ *auf V existieren Konstanten* $0 < m \leq M$*, so dass gilt:*
$\forall v \in V : m \cdot \|v\| \leq \|v\|_* \leq M \cdot \|v\|$

Beispiel 1.2 (*Äquivalenz von Normen*)

$\forall v \in \mathbb{K}^n : \|v\|_q \leq \|v\|_p \leq n^{(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|v\|_q$ *mit* $1 \leq p \leq q \leq \infty$

1.2 Matrixnormen

Satz 1.2 (*Matrixnorm*)

Seien $\|\cdot\|_*$ *und* $\|\cdot\|_\bullet$ *Normen auf* $\mathbb{K}^n$ *bzw.* $\mathbb{K}^m$*.*
Dann ist

$$\|\cdot\| := \mathbb{K}^{m \times n} \to [0, \infty[$$

mit

$$\|A\| := \max_{v \in \mathbb{K}^n \ 0} \frac{\|Av\|_\bullet}{\|v\|_*} = \max_{v \in \mathbb{K}^n, \|v\|_* = 1} \|Av\|_\bullet$$

eine Norm auf dem Vektornormen der $m \times n$-Matrizen.
*Sie wird **Matrix- oder Operatornorm** genannt.*

Definition 1.1

obiger Satz ist zugleich eine Definition.

Beweis 1 (*des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung*)

$\frac{\|Av\|_\bullet}{\|v\|_*} = \|A\| \frac{v}{\|v\|_*}$
Betrachten wir $\left\| \frac{v}{\|v\|_*} \right\|_* = \frac{1}{\|v\|_*} * \|v\|_* = 1$

Anmerkung:
Eine Matrixnorm auf $\mathbb{K}^{m \times n}$ wird durch die gewählten Normen auf $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ induziert; sie hängen also von diesen ab.

Was beschreibt die Matrixnorm?
Die Matrixnorm beschreibt die Maximale Streckung, die ein Matrix, die auf einen Vektor angewandt wird, verursachen kann.

Lemma 1.1

Seien $\|\cdot\|_*$ und $\|\cdot\|_\bullet$ Normen auf $\mathbb{K}^n$ bzw. $\mathbb{K}^m$, die für alle n und m definiert sind (z.B. die p-Normen).
Dann ist die induzierte Matrixnorm submultiplikativ, d.h.

$$\forall A \in \mathbb{K}^{mxn} \forall B \in \mathbb{K}^{nxr} : \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

(Anmerkung: s. Ähnlichkeit zur Dreiecksungleichung).

Außerdem gilt:
Wegen $\forall v \in \mathbb{K}^n : \|Av\|_\bullet \leq \|A\| \|v\|_*$ gilt o.B.d.A nun auch $v \neq 0$.
Damit ist $\frac{\|Av\|_\bullet}{\|v\|_*} \leq \|A\|) = max \frac{\|Aw\|_\bullet}{\|w\|_*}$.

1.3 Matrix-p-Norm

Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$.
Dann ist $\|A\|_p := \max\limits_{\|v\|_p=1} \|Av\|_p$ für $1 \leq p \leq \infty$ und $\|I_n\|_p = 1$ wobei $I_n \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix ist.

1.3.1 Spaltensummennorm

Sei $p = 1$, dann ist

$A = (a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}, a^{(i)}) \in \mathbb{K}^m$

$$\begin{aligned} \|Av\|_1 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} v_i a^{(i)}{}_1 \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \left\| v_i a^{(i)} \right\|_1 \\ &= \sum_{i=1} |v_i| \cdot \left\| a^{(i)} \right\|_1 \leq \max 1 \leq i \leq n \left\| a^{(i)} \right\|_1 \|v\|_1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} \leq \max 1 \leq i \leq n \left\| a^{(i)} \right\|_1$
$\Rightarrow \|A\| \leq \max 1 \leq i \leq n \left\| a^{(i)} \right\|_1$

Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\quad \left\| a^{(j)} \right\|_1 = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left\| a^{(i)} \right\|_1$ $e^{(j)} \in \mathbb{K}^n$;

$$e_k^{(j)} = \begin{cases} 1 : j = k, \\ 0 : sonst \end{cases}$$

$\left\| e^{(j)} \right\|_1 = 1$
$\left\| Ae^{(j)} \right\|_1 = \left\| a^{(j)} \right\|_1 = (\max 1 \leq i \leq n \left\| a^{(i)} \right\|_1) \cdot \left\| e^{(j)} \right\|_1$
$\Rightarrow \|A\|_1 = \max 1 \leq i \leq n \left\| a^{(i)} \right\|_1 = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{j,i}|$

Daher heißt die Matrix-1-Norm auch **Spaltensummennorm**.

Beispiel 1.3

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 3 \\ -5 & -1 & 0 \\ 3i & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$
Dann ist $\|A\|_1 = \max\{9, 11 + \sqrt{2}, 3\} = 11 + \sqrt{2}$

1.3.2 Zeilensummennorm

Sei nun $p = \infty$, dann heißt $\quad \|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \quad$ **Zeilensummennorm**.

Beispiel 1.4

(Fortsetzung von obigem Beispiel)

$\|A\|_\infty = \max\{14, 6, 3+\sqrt{2}\} = 14$

1.3.3 Spektralnorm

Sei $p = 2$, dann heißt die Matrix-2-Norm **Spektralnorm**, denn

$$\|A\|_2 = \lambda_{max}(A^H A)^{\frac{1}{2}}$$

(größter Eigenwert von $A^H A$)
Eigenschaften:

- $\|A\|_2 = \left\|A^H\right\|_2$
- $\left\|A^H A\right\|_2 = \|A\|_2^2$
- $\forall Q$ unitär : $\|QA\|_2 = \|A\|_2$ unitär $Q^T Q = I_n, Q^H Q = I_n$

1.4 Kondition einer Matrix

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär. Dann heißt

$$\kappa(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$$

die Kondition (Konditionszahl) von A bzw. $\|\cdot\|$.
Die Konditionszahl ist ein Maß für die Sensitivität der Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ gegenüber Störungen in b (und auch in A).

Satz 1.3

A sei regulär, dann gilt:

$$\frac{\left\|A^{-1}b - A^{-1}\tilde{b}\right\|}{\|A^{-1}b\|} \leq \kappa(A) \cdot \frac{\left\|b - \tilde{b}\right\|}{\|b\|}$$

ist scharf. Der Kondition $\kappa(A)$ liegt hier die von $\|\cdot\|$ induzierte Matrixnorm zugrunde.

Beweis 2

$\frac{\|A^{-1}b - A^{-1}\tilde{b}\|}{\|A^{-1}b\|} = \left\|A^{-1}(b-\tilde{b})\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \left\|b - \tilde{b}\right\|$
$\|b\| = \left\|AA^{-1}b\right\| \leq \|A\| \left\|A^{-1}b\right\| \Rightarrow \frac{1}{\|A^{-1}b\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$
Wegen $a < b, c < d \Rightarrow ac < bd$ folgt:

$$\frac{\left\|A^{-1}b - A^{-1}\tilde{b}\right\|}{\|A^{-1}b\|} \leq \underbrace{\kappa(A)}_{\|A\|\|A^{-1}\|} \frac{\left\|b - \tilde{b}\right\|}{\|b\|} .$$

□

Behauptung 1

$\kappa(A) \geq 1$
$1 = \|I_n\| = \left\|A \cdot A^{-1}\right\| \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| = \kappa(A)$

Die Konditionszahl einer Matrix misst, wie weit diese von einer singulären (d.h. nichtregulären) Matrix entfernt ist.

Satz 1.4

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär. Dann ist

$$\min\left\{\frac{\|A-S\|_p}{\|A\|_p} : S \in \mathbb{K} \textit{ singulär}\right\} = \frac{1}{\kappa(A)}$$

wobei $\kappa = \|A\|_p \left\|A^{-1}\right\|_p$.

Satz 1.5

Sei $\lambda_{\max(A)}$ der betragsgrößte Eigenwert von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt

$$|\lambda_{\max(A)}| = \inf\left\{\|A\| : \|\cdot\| \textit{ ist induzierte Matrixnorm}\right\}$$

Das heißt, zu jedem $\delta > 0$ gibt es eine induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_\delta$, so dass

$$\|A\|_\delta\, y |\lambda_{\max(A)}| + \delta$$

ist.

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}, \lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von A.
Es gilt: $|\lambda| \leq \|A\|$, wobei $\|\cdot\|$ induzierte Matrixnorm ist.

2 Lineare Gleichungssysteme: Direkte Löser

Gegeben $A = \{a_{i,j}\} \in \mathbb{R}^n$.
Gesucht: $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$.

$$Ax = b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_j, 1 \leq i \leq n \tag{1}$$

2.1 Auflösung gestaffelter Systeme

Sei $Rx = z$ mit $r_{i,j} = 0, i > j$, dann ist R eine obere Dreiecksmatrix.

$$\begin{aligned} r_{2,2}x_2 + \dots r_{2,n}x_n &= z_2 \\ &\vdots \\ r_{1,n}x_n &= z_n \end{aligned}$$

Wegen $0 \neq \det R = \prod_{i=1}^{n} r_{i,i}$ folgt $r_{i,i} \neq 0$ für $1 \leq i \leq n$.

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{z_n}{r_{n,n}} \\ x_{n-1} &= \frac{z_{n-1} - r_{n-1,n}x_n}{r_{n-1,n-1}} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \frac{z_i - r_{i,i+1}x_{i+1} - \dots - r_{i,n}x_n}{r_{i,i}} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \frac{z_1 - r_{1,2}x_2 - \dots - r_{1,n}x_n}{r_{1,1}} \end{aligned}$$

`(Rückwärtssubstitution)`

Aufwand: Berechnung von x_i benötigt (n-i) Additionen und (n-i) Multiplikationen, so wie 1 Division. $\Rightarrow \sum_{i=1} [2(n-i)+1] = n^2$ Operationen.

Das Auflösen eines unteren Dreieckssystems: $Lx = z$ mit $l_{i,j} = 0, i < j$ verläuft analog und heißt `Vorwärtssubstitution`.