Lezione 2

Effetto Compton, effetto fotoelettrico e natura ondulatoria della materia

2.1 Formule

Scattering Compton

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2} \tag{2.1}$$

dove $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$ è la lunghezza d'onda Compton.

Effetto fotoelettrico

$$K = h\nu - W \tag{2.2}$$

K energia cinetica massima, W funzione lavoro del materiale, ν frequenza della radiazione.

Natura ondulatoria della materia: relazione di de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{2.3}$$

2.2 Note sulle formule relativistiche

2.2.1 Il quadrivettore spazio

Definiamo il quadrivettore spazio (controvariante $\Rightarrow$ indici alti)

$$X^\mu = (ct; \mathbf{r}) \tag{2.4}$$

dove notiamo che le componenti $X^0 = ct$, $X^1 = x$, $X^2 = y$, $X^3 = z$ hanno tutte la dimensione di uno spazio. Grazie alla metrica di Minkowski (valida in relatività ristretta) rappresentata dalla seguente matrice

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

possiamo trovare il quadrivettore spazio (covariante $\Rightarrow$ indici bassi)[1]

$$X_\mu = \eta_{\mu\nu} X^\nu = \eta_{\mu 0} X^0 + \eta_{\mu 1} X^1 + \eta_{\mu 2} X^2 + \eta_{\mu 3} X^3 = (ct; -\mathbf{r}) \tag{2.6}$$

La norma del quadrivettore spazio, detta anche quadrintervallo, viene espressa come il seguente prodotto

$$X^\mu X_\mu = X_\mu X^\mu = c^2 t^2 - r^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{2.7}$$

dove notiamo che, avendo sommato su tutti gli indici covarianti e controvarianti, abbiamo ottenuto un invariante relativistico.

2.2.2 Il quadrivettore impulso

Data una particella di energia E e impulso $\mathbf{p}$, trasformazioni di Lorentz possono variare E (energia) e $\mathbf{p}$ (quantità di moto) purchè conservino la norma del quadrivettore impulso (detto anche quadrimpulso), definito come:

$$P^\mu = \left(\frac{E}{c}; \mathbf{p} \right) \tag{2.8}$$

Esprimiamo il quadrivettore impulso come il prodotto tra massa a riposo m della particella e la sua quadrivelocità u^μ

$$P^\mu = m u^\mu = m \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma v_x \\ \gamma v_y \\ \gamma v_z \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

[1] Convenzione di Einstein: vengono omesse somme su indici ripetuti. Ad esempio $X^\mu X_\mu = X^0 X_0 + X^1 X_1 + X^2 X_2 + X^3 X_3$.

dove per definizione abbiamo posto

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\gamma^2}}} \tag{2.10}$$

Ne consegue che

$$\frac{E}{c} = \gamma mc \qquad \mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v} \qquad \Rightarrow \quad \frac{|\mathbf{p}|}{E/c} = \frac{|\mathbf{v}|}{c} = \beta \tag{2.11}$$

E definisce l'energia totale (somma di energia cinetica e di energia a riposo), mentre K rappresenta l'energia cinetica, pertanto (essendo l'energia a riposo pari a mc^2)

$$K = E - mc^2 = (\gamma - 1)\, mc^2 \tag{2.12}$$

Per calcolare la norma del quadrimpulso, ovvero $P^\mu P_\mu$, si deve far uso del quadrivettore P_μ con le componenti basse:

$$P_\mu = \eta_{\mu\nu} P^\nu = \left(\frac{E}{c}; -\mathbf{p}\right) \tag{2.13}$$

dove l'alzamento o l'abbassamento delle componenti é fatto mediante la matrice che rappresenta la metrica di Minkowski, eq. (2.5). In questo modo abbiamo che

$$P^\mu P_\mu = P_\mu P^\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \tag{2.14}$$

ed avendo contratto indici alti e bassi abbiamo ottenuto un invariante relativistico. Nel sistema di riferimento in cui la particella è a riposo ($\mathbf{v}$=0). Da eq. (2.11) si avrà:

$$E_{riposo} = mc^2 \qquad p_{riposo} = 0 \tag{2.15}$$

quindi

$$\text{a riposo:} \quad P^\mu P_\mu = \frac{E^2_{riposo}}{c^2} - p^2_{riposo} = \frac{\left(mc^2\right)^2}{c^2} = m^2c^2 \tag{2.16}$$

dove m é la massa a riposo della particella. Questo risultato rimane vero in tutti i sistemi di riferimento essendo $P^\mu P_\mu$ un invariante relativistico. Possiamo quindi sostituire la (2.16) nella (2.14) e ricavare la relazione relativistica che lega l'energia e la quantità di moto di una particella di massa m

$$m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \;\Rightarrow\; E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \tag{2.17}$$

2.3 Esercizio # 1: Effetto Compton

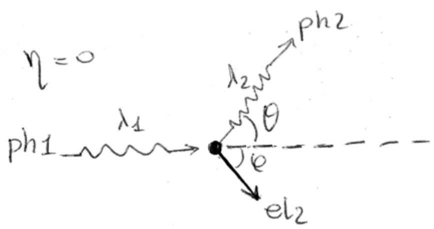
Si consideri lo scattering Compton tra un fotone avente lunghezza d'onda λ_1 ed un elettrone dotato di quantità di moto iniziale: i) nulla, ii) p_1 lungo la direzione del fotone incidente, iii) p_1 in direzione opposta alla direzione del fotone incidente.

SOLUZIONE:

Chiamo $\hat{\mathbf{z}}$ la direzione di propagazione iniziale del fotone (prima di subire l'urto con l'elettrone). I tre casi proposti nell'esercizio possono essere svolti utilizzando lo stesso fomalismo, una volta definita la quantità di moto iniziale dell'elettrone come:

$$\mathbf{p}_1^{el} = \eta\, p_1\, \hat{\mathbf{z}} \tag{2.18}$$

il caso i) corrisponde a $\eta = 0$, il caso ii) a $\eta = 1$ ed il caso iii) a $\eta = -1$.



Andiamo ora a definire energia ed impulso del fotone e dell'elettrone prima del processo Compton:

$$\frac{E_1^{ph}}{c} = \frac{h\nu_1}{c} = \frac{h}{\lambda_1} \qquad \mathbf{p}_1^{ph} = \mathbf{p_o} = \frac{h}{\lambda_1}\hat{\mathbf{z}} \tag{2.19}$$

$$\frac{E_1^{el}}{c} = \sqrt{m^2c^2 + \mathbf{p}_1^{el}\cdot\mathbf{p}_1^{el}} \qquad \mathbf{p}_1^{el} \tag{2.20}$$

Analogamente dopo l'urto abbiamo:

$$\frac{E_2^{ph}}{c} = \frac{h\nu_2}{c} = \frac{h}{\lambda_2} \qquad \mathbf{p}_2^{ph} = \frac{h}{\lambda_2}\hat{\mathbf{n}} \tag{2.21}$$

$$\frac{E_2^{el}}{c} = \sqrt{m^2c^2 + \mathbf{p}_2^{el}\cdot\mathbf{p}_2^{el}} \qquad \mathbf{p}_2^{el} \tag{2.22}$$

dove ho definito $\hat{\mathbf{n}}$ il versore della direzione di moto del fotone uscente.
Applichiamo l'ipotesi di urto elastico[2], ovvero:

$$\begin{array}{l}(\text{conservaz. } \frac{E}{c}) \\ (\text{conservaz. } \mathbf{p})\end{array} \begin{cases} \frac{h}{\lambda_1} + \sqrt{m^2c^2 + \mathbf{p}_1^{el} \cdot \mathbf{p}_1^{el}} = \frac{h}{\lambda_2} + \sqrt{m^2c^2 + \mathbf{p}_2^{el} \cdot \mathbf{p}_2^{el}} \\ \frac{h}{\lambda_1}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{p}_1^{el} = \frac{h}{\lambda_2}\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{p}_2^{el} \end{cases} \tag{2.23}$$

Risolviamo il sistema per sostituzione esplicitando dalla seconda equazione:

$$\mathbf{p}_2^{el} = \frac{h}{\lambda_1}\hat{\mathbf{z}} - \frac{h}{\lambda_2}\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{p}_1^{el} \tag{2.24}$$

Possiamo quindi calcolare i prodotti scalari $\mathbf{p}_1^{el} \cdot \mathbf{p}_1^{el}$ e $\mathbf{p}_2^{el} \cdot \mathbf{p}_2^{el}$ utilizzando la parametrizzazione in eq. (2.18):

$$\mathbf{p}_1^{el} \cdot \mathbf{p}_1^{el} = \eta^2\, p_1^2\, \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \eta^2\, p_1^2 \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_2^{el} \cdot \mathbf{p}_2^{el} &= \frac{h^2}{\lambda_1^2}\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} + \frac{h^2}{\lambda_2^2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \eta^2\, p_1^2 - 2\frac{h^2}{\lambda_1\lambda_2}\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{n}} - 2\frac{h\eta p_1}{\lambda_2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} + 2\frac{h\eta p_1}{\lambda_1}\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{h^2}{\lambda_1^2} + \frac{h^2}{\lambda_2^2} + \eta^2\, p_1^2 - 2\frac{h^2}{\lambda_1\lambda_2}\cos\theta - 2\frac{h\eta p_1}{\lambda_2}\cos\theta + 2\frac{h\eta p_1}{\lambda_1} \end{aligned} \tag{2.26}$$

dove ho chiamato $\cos\theta = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$.
Siamo ora pronti ad affrontare la prima equazione del sistema:

$$h\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) + \underbrace{\sqrt{m^2c^2 + \mathbf{p}_1^{el} \cdot \mathbf{p}_1^{el}}}_{\frac{E}{c}} = \sqrt{m^2c^2 + \mathbf{p}_2^{el} \cdot \mathbf{p}_2^{el}} \tag{2.27}$$

elevo al quadrato

$$h^2\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)^2 + \frac{2hE}{c}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) + m^2c^2 + \eta^2\, p_1^2 = m^2c^2 + \mathbf{p}_2^{el} \cdot \mathbf{p}_2^{el} \tag{2.28}$$

Cancello i termini uguali

$$-\frac{2h^2}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{2hE}{c}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = 2\frac{h\eta p_1}{\lambda_1} - 2\frac{h^2}{\lambda_1\lambda_2}\cos\theta - 2\frac{h\eta p_1}{\lambda_2}\cos\theta \tag{2.29}$$

[2]Supponiamo quindi che la radiazione investa l'elettrone sottoforma di corpuscolo detto "fotone". Classicamente invece avrei dovuto considerare assorbimento e riemissione da un'onda elettromagnetica. La descrizione classica tuttavia non basta per descrivere correttamente il fenomeno (si veda libro consigliato Messiah).

divido tutto per due e utilizzo la formula trigonometrica di bisezione $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$.

$$\left(\frac{hE}{c} - h\eta p_1\right)\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = 2\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{h^2}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{h\eta p_1}{\lambda_2}\right) \tag{2.30}$$

moltiplico tutto per $\lambda_1\lambda_2$

$$\left(\frac{hE}{c} - h\eta p_1\right)(\lambda_2 - \lambda_1) = 2\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{h^2}{\lambda_1} + h\eta p_1\right)\lambda_1 \tag{2.31}$$

In questo modo otteniamo che:

$$\Delta\lambda = 2\lambda_1\frac{\frac{h}{\lambda_1} + \eta p_1}{\frac{E}{c} - \eta p_1}\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{2.32}$$

$$= 2\lambda_1\frac{p_o + \eta p_1}{\frac{E}{c} - \eta p_1}\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{2.33}$$

dove $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ é lo shift della lunghezza d'onda dovuto all'effetto Compton, p_o é il modulo della quantità di moto iniziale del fotone, E é l'energia (intesa in senso relativistico) iniziale dell'elettrone.

Nel caso particolare di $\eta = 0$, ovvero di quantità di moto iniziale dell'elettrone nulla si ottiene

$$\Delta\lambda = 2\lambda_1\frac{p_o}{\frac{E}{c}}\sin^2\frac{\theta}{2} = 2\lambda_1\frac{h}{\lambda_1}\frac{1}{\frac{mc^2}{c}}\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{2.34}$$

da cui la ben nota formula:

$$\Delta\lambda = 2\lambda_c\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{2.35}$$

dove $\lambda_c = \frac{h}{mc}$ é la lunghezza d'onda Compton[3].

Altri risultati:

$$\frac{E_2^{el}}{c} = \frac{h}{\lambda_1} + \underbrace{\sqrt{m^2c^2 + \mathbf{p}_1^{el}\cdot\mathbf{p}_1^{el}}}_{\frac{E_1^{el}}{c}} - \frac{h}{\lambda_2} \tag{2.36}$$

$$\mathbf{p}_2^{el} = \frac{h}{\lambda_1}\hat{\mathbf{z}} - \frac{h}{\lambda_2}\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{p}_1^{el} \tag{2.37}$$

[3] Per m si intende la massa a riposo dell'elettrone.

2.4 Esercizio # 2: Rinculo

Un fotone di energia $E = 0.3\,\mathrm{MeV}$ urta frontalmente un elettrone che inizialmente si trova a riposo. Trovare la velocità di rinculo dell'elettrone.

SOLUZIONE: 0.65 c

2.5 Esercizio # 3: Direzione di rinculo

Un fotone di energia $E = 100\,\mathbf{keV}$ urta un elettrone che inizialmente si trova a riposo. Supponendo che l'angolo di deflessione sia $\theta = 90°$ calcolare la direzione di moto di rinculo dell'elettrone (utilizzare l'angolo φ compreso tra la direzione di moto dell'elettrone dopo l'urto e la direzione del fotone incidente).

SOLUZIONE: 39.9°

2.6 Esercizio # 4: Raggi X

Calcola la variazione percentuale della lunghezza d'onda di un raggio X, $\lambda = 0.4\,\text{Å}$, che urta frontalmente un elettrone a riposo.

SOLUZIONE: 12.13%

2.7 Esercizio # 5: Funzione lavoro del Sodio

Trovare la funzione lavoro del Sodio sapendo che non si osservano fotoelettroni sotto 5.6×10^{14} **Hz.**

SOLUZIONE:

La frequenza data rappresenta la soglia del processo fotoelettrico, ovvero quella frequenza per cui $K = 0$.
Quindi:

$$W_{Na} = h\,5.6 \times 10^{14} = 2.3\,\mathrm{eV} \tag{2.38}$$

2.8 Esercizio # 6: Effetto fotoelettrico

La lunghezza d'onda massima per una data superficie metallica é $\lambda_{max} = 400\,\mathrm{nm}$. Determinare la funzione lavoro del metallo. Se viene utilizzata una radiazione con $\lambda = \frac{\lambda_{max}}{2}$, qual é il potenziale di arresto?

SOLUZIONE: $3.1\,\mathrm{eV}$, $3.1\,\mathrm{V}$

2.9 Esercizio # 7: Fotocorrente

Un fascio luminoso con $\nu = 500\,\mathrm{THz}$ ha intensità $I = 10^{-6}\,\mathrm{W/cm^2}$, esso incide su una superficie di Litio avente un'area $\Sigma = 20\,\mathrm{cm^2}$. Calcolare la massima fotocorrente ottenibile supponendo che l'efficienza quantica del processo sia $\eta = 0.15$.

SOLUZIONE:

La corrente é pari al numero di cariche nell'unità di tempo.

$$i = e \times \eta \times \frac{N_{\text{fotoni}}}{t} = e \times \eta \times \frac{I\Sigma}{h\nu} = 1.45 \times 10^{-6}\,\mathrm{A} \tag{2.39}$$

2.10 Esercizio # 8: Energia cinetica dei fotoelettroni

Inviando un fascio luminoso di lunghezza d'onda $\lambda = 400\,\mathrm{nm}$ su un catodo di Potassio (funzione lavoro Potassio $2.2\,\mathrm{eV}$) determinare dopo quanto tempo l'anodo inizia a raccogliere elettroni (supponendo istantaneo il processo di emissione). Distanza tra anodo e catodo é $d = 10\,\mathrm{cm}$.

SOLUZIONE:

Energia cinetica massima del processo:

$$K = \frac{hc}{\lambda} - 2.2\,\mathrm{eV} = 0.9\,\mathrm{eV} \tag{2.40}$$

Velocità elettroni[4]

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = 562 \times 10^3 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{2.46}$$

Tempo

$$\Delta t = \frac{d}{v} = 178\,\mathrm{ns} \tag{2.47}$$

[4]Perché non ho usato le formule relativistiche?

$$K = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)\,mc^2 \tag{2.41}$$

$$\gamma = 1 + \frac{K}{mc^2} = 1 + \frac{0.9\,\mathrm{eV}}{511\,\mathrm{keV}} = 1 + 1.76 \times 10^{-6} \tag{2.42}$$

Chiamato $\Delta\gamma = \gamma - 1$ e essendo $\beta = \frac{v}{c}$ si ha che:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + \Delta\gamma)^2}} = 1.8 \times 10^{-3} \tag{2.43}$$

Quindi siamo in pieno limite NON relativistico ed é consentito scrivere $K = \frac{1}{2}mv^2$.

$$K = \gamma mc^2 - mc^2 = \left(\gamma|_{v=0} + \gamma'|_{v=0}\, v + \frac{1}{2}\,\gamma''|_{v=0}\, v^2 + \cdots \right) mc^2 - mc^2 \tag{2.44}$$

$$= \left(1 + 0 + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}v^2 + \cdots \right) mc^2 - mc^2 = \frac{1}{2}mv^2 \tag{2.45}$$

2.11 Esercizio # 9: Visione classica dei fotoelettroni

Dal punto di vista classico quanto tempo impiegherebbe un elettrone per uscire da una lamina di potassio se essa viene illuminata con una potenza di $Pot = 1\,\mathbf{W}$ da una distanza di $d = 1\,\mathbf{m}$? Funzione lavoro del potassio $W_K = 2.1\,\mathbf{eV}$. Assumere che il fotoelettrone raccolga la sua energia da un'area circolare di raggio pari a quello atomico $r = 1\,\mathbf{Å}$.

SOLUZIONE:

Attenzione, stiamo ottenendo un valore falso dal punto di vista quantistico.

$$t = \frac{2.1\,\mathrm{eV}}{Pot\frac{\pi r^2}{4\pi d^2}} = 135\,\mathrm{s} = 2.2\,\mathrm{minuti} \tag{2.48}$$

2.12 Esercizio # 10: Lunghezze d'onda di de Broglie

Calcola la lunghezza d'onda di: i) un proiettile di massa $m = 2g$ e velocità $v = 500\,\mathbf{m/s}$, ii) di un fotone di energia $1\,\mathbf{MeV}$, iii) di un elettrone di energia cinetica $1\,\mathbf{MeV}$.

SOLUZIONE: $6.63 \times 10^{-22}\,\mathrm{pm}$, $1.24\,\mathrm{pm}$, $0.8719\,\mathrm{pm}$

2.13 Esercizio # 11: Microscopia ad elettroni

Trovare l'ordine di grandezza del potenziale accelerante di un microscopio ad elettroni dotato di una risoluzione di $1\,\text{Å}$.

SOLUZIONE: $150\,\mathrm{V}$