Esercizi di Meccanica Quantistica

M. Govoni

2012

marco.govoni@unimore.it

COSTANTI

- $c = 2.997925 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$
- $h = 6.6260755 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} \ = 4.135669 \times 10^{-15}\,\mathrm{eV\,s}$
- $\hbar = 1.05459 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} \ = 6.582122 \times 10^{-16}\,\mathrm{eV\,s}$
- $K_B = 1.3807 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$
- $\sigma = 5.6704 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
- $\lambda_c = 2.4263 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}$

Warning!!

Questa dispensa rappresenta una guida agli esercizi svolti in classe.
È richiesta la segnalazione di ogni tipo di errore.

M.G.

I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics.
Richard Feynman

Parte I

Lezione 1

Corpo nero

1.1 Introduzione: Densità spettrale di energia elettromagnetica

Una scatola cubica di lato $L = \sqrt[3]{V}$ a pareti perfettamente riflettenti contiene radiazione elettromagnetica a temperatura T. Trovare la densità di energia elettromagnetica totale contenuta nel corpo.

L'energia totale E_{tot} può essere calcolata come media statistica delle energie di singolo stato E_α

$$E_{tot}(T) = \sum_\alpha E_\alpha f(E_\alpha, T) \tag{1.1}$$

nella sommatoria compaiono le energie di ciascuno stato α, moltiplicate per il peso statistico[1]

$$f(E_\alpha, T) = \frac{1}{e^{\frac{E_\alpha}{K_B T}} - 1}. \tag{1.2}$$

Troviamo le energie E_α. Dalla ipotesi di scatola perfettamente riflettente, ottengo la seguente quantizzazione dei modi:

$$\mathbf{k} = \frac{\pi}{L}(n_x, n_y, n_z) \tag{1.3}$$

[1] Pesi statistici:

- Statistica quantistica di Bose-Einstein per bosoni $f(E,T) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{K_B T}}-1}$ (μ potenziale chimico)
- Statistica quantistica di Fermi-Dirac per fermioni $f(E,T) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{K_B T}}+1}$ (μ potenziale chimico)

trovo il modulo di $\mathbf{k}$

$$k = \frac{\pi}{L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{\pi}{L}n \tag{1.4}$$

dove per n si intende $\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$.
Dalla relazione $E = h\nu$:

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = h\frac{c}{\lambda}\frac{2\pi}{2\pi} = \frac{hc}{2\pi}k = \frac{hc}{2\pi}\frac{\pi}{L}n = \frac{hc}{2L}n \tag{1.5}$$

Essa non dipende dalla polarizzazione. Ciascuno stato α è caratterizzato da tre indici interi positivi (n_x, n_y, n_z) e un indice di polarizzazione η. La (1.1) si può quindi riscrivere come

$$\begin{aligned} E_{tot}(T) &= \sum_{n_x\, n_y\, n_z} \sum_{\eta} E_{n_x,n_y,n_z,\eta} f(E_{n_x,n_y,n_z,\eta}, T) && (1.6) \\ &= 2 \sum_{n_x\, n_y\, n_z} E_{n_x,n_y,n_z} f(E_{n_x,n_y,n_z}, T) && (1.7) \end{aligned}$$

Quando gli stati del sistema sono densi in energia, è possibile "passare al continuo" trasformando la sommatoria (1.1) nel seguente integrale

$$E_{tot}(T) = \int_0^{+\infty} E\, f(E,T)\, g(E)\, dE \tag{1.8}$$

dove devo conoscere la densità degli stati $g(E)$. Quando si passa al continuo, occorre utilizzare una densità degli stati per contare il numero di stati che cadono nell'intervallo infinitesimo $[E, E + dE]$.
Da notare è come n_x, n_y, n_z formino una griglia uniforme nel primo ottante del piano 3D, pertanto il numero di stati tra n ed $n + dn$ sarà

$$\begin{aligned} g(n)dn &= \text{num. polarizz.} \times \frac{\text{volume dell'intervallo } [n, n+dn]}{\text{volume di un elemento della griglia}} && (1.9) \\ &= 2 \times \frac{\frac{4\pi n^2 dn}{8}}{1} && (1.10) \\ &= \pi n^2 dn && (1.11) \end{aligned}$$

Possiamo quindi ottenere la densità degli stati in energia dalla relazione $g(E)dE = g(n)dn$ usando la (1.5)

$$\begin{aligned} g(E) &= g(n)\frac{dn}{dE} && (1.12) \\ &= \pi\left(\frac{2LE}{hc}\right)^2 \frac{2L}{hc} && (1.13) \\ &= \frac{8\pi V E^2}{h^3 c^3} && (1.14) \end{aligned}$$

Sostituiamo quindi la (1.14) nella (1.8):

$$E_{tot}(T) = \int_0^{+\infty} E \, \frac{1}{e^{\frac{E}{K_B T}} - 1} \, \frac{8\pi V E^2}{h^3 c^3} \, dE \tag{1.15}$$

e passiamo l'integrale alle frequenze facendo uso della relazione $E = h\nu$

$$\begin{aligned} E_{tot}(T) &= \int_0^{+\infty} h\nu \, \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{K_B T}} - 1} \, \frac{8\pi V (h\nu)^2}{h^3 c^3} \, \frac{dE}{d\nu} \, d\nu && (1.16) \\ &= \int_0^{+\infty} h\nu \, \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{K_B T}} - 1} \, \frac{8\pi V \nu^2}{h c^3} \, h \, d\nu && (1.17) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{8\pi V h \nu^3}{c^3} \, \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{K_B T}} - 1} \, d\nu && (1.18) \end{aligned}$$

Se dividiamo l'energia totale per il volume otteniamo la densità di energia

$$U_{tot}(T) \equiv \frac{E_{tot}(T)}{V} = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \, \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{K_B T}} - 1}}_{u(\nu,T)} \, d\nu \tag{1.19}$$

da cui si definisce quindi la densità spettrale di energia $u(\nu, T)$.

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \, \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{K_B T}} - 1} \tag{1.20}$$

NB. L'aggettivo spettrale si riferisce al fatto che per ottenere la densità di energia contenuta nella porzione $[\nu, \nu + d\nu]$ dello spettro delle frequenze, occorre moltiplicare $u(\nu, T) \times d\nu$.

1.2 Formule

Densità spettrale di energia elettromagnetica

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{K_B T}} - 1} \tag{1.21}$$

Pressione di Radiazione

Pressione

$$P_{\text{rad}} = \frac{u(\nu, T)}{3} \tag{1.22}$$

Potere emissivo spaziale del corpo nero (risolto in frequenza)

Potenza per unità di area del corpo emessa nell'intervallo di frequenze $[\nu, \nu + d\nu]$

$$\Xi(\nu, T) = \frac{c}{4} u(\nu, T) \tag{1.23}$$

Potere emissivo spaziale del corpo nero (integrato in frequenza) - Legge di Stefan-Boltzmann

Potenza emessa per unità di area del corpo nero

$$J = \int_0^{+\infty} \Xi(\nu, T) d\nu = \sigma T^4 \tag{1.24}$$

Massimi di Wien

$$\nu_{max} = 58.8 \frac{\text{GHz}}{\text{K}} \times T(\text{in K}) \tag{1.25}$$

$$\lambda_{max} = 2.898 \times 10^6 \,\text{nm}\,\text{K} \times \frac{1}{T(\text{in K})} \tag{1.26}$$

1.3 Esercizio # 1: Legge dei massimi di Wien

Ricavare la legge dei massimi di Wien utilizzando la formula di Planck per la densità spettrale di energia elettromagnetica.

SOLUZIONE:

Il problema chiede per quale valore di ν la densità spettrale di energia ha un massimo.
Cerco lo zero della derivata prima

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{8\pi h 3\nu^2}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{K_B T}}-1} - \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 K_B T}\frac{he^{\frac{h\nu}{K_B T}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{K_B T}}-1\right)^2} = 0 \tag{1.27}$$

ovvero ponendo $x = \frac{h\nu}{K_B T}$

$$3 - \frac{xe^x}{e^x - 1} = 0 \tag{1.28}$$

che ha come soluzione numerica $x = 2.821439\ldots$.

$$\nu_{max} = 2.821439\frac{K_B T}{h} = 58.8\frac{\text{GHz}}{\text{K}} \times T(\text{in K}) \tag{1.29}$$

1.4 Esercizio # 2: Il Sole

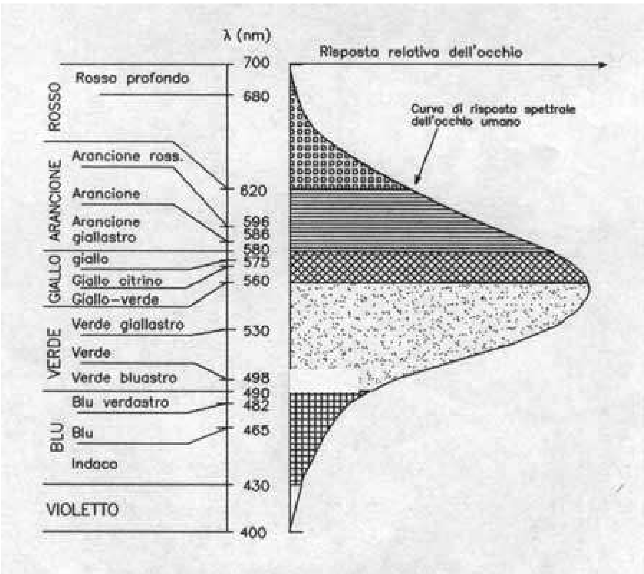
Trattando il Sole come corpo nero, calcolare la lunghezza d'onda di massima radiazione sapendo che la temperatura media superficiale del Sole è $T_S = 5778\,\mathrm{K}$.

SOLUZIONE:

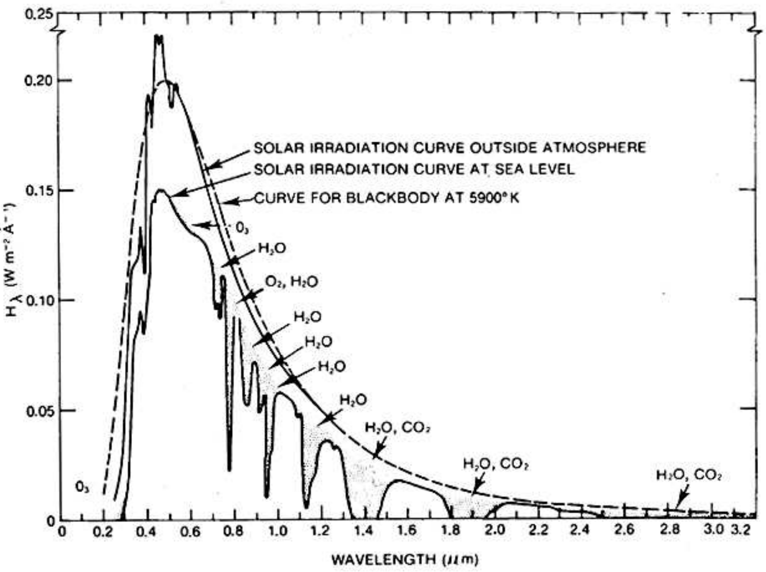
Dalla legge del massimo di Wien:

$$\lambda_{max} = 2.898 \times 10^6\,\mathrm{nm\,K} \times \frac{1}{5778\,\mathrm{K}} = 501.6\,\mathrm{nm} \tag{1.30}$$

Il colore di massimo irraggiamento è il verde!



Risposta spettrale dell'occhio umano e colori dell'iride associati alle lunghezze d'onda della luce.


SOLAR IRRADIATION CURVE OUTSIDE ATMOSPHERE
SOLAR IRRADIATION CURVE AT SEA LEVEL
CURVE FOR BLACKBODY AT 5900° K
H_λ (W m^{-2} Å^{-1})
WAVELENGTH (μm)
O_3
H_2O
O_2, H_2O
H_2O, CO_2

1.5 Esercizio # 3: Legge di Stefan-Boltzmann

Sulla base della legge della radiazione di Planck si dimostri che la radiazione totale emessa da un radiatore nero a temperatura T è proporzionale a T^4.

SOLUZIONE:

Il potere emissivo spaziale integrato in frequenza è dato da:

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^{+\infty} \Xi(\nu, T)\, d\nu && (1.31)\\
&= \frac{c}{4} \int_0^{+\infty} u(\nu, T)\, d\nu && (1.32)\\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{K_B T}} - 1} d\nu && (1.33)\\
&= \frac{2\pi (K_B T)^4}{c^2 h^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx && (1.34)\\
&= \underbrace{\frac{2K_B^4 \pi^5}{15 c^2 h^3}}_{\sigma} T^4 && (1.35)
\end{aligned}
$$

Dove abbiamo usato l'integrale notevole:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx = \frac{\pi^4}{15} \quad (1.36)$$

1.6 Esercizio # 4 : Irraggiamento dal Sole

Il Sole si trova ad una distanza dalla terra $d = 150$ milioni di Km, ed ha un raggio $R_S = 7 \times 10^5\,\mathrm{Km}$. La potenza di radiazione ricevuta dalla terra per unità di area su una superficie normale ai raggi del sole è $1.4 \times 10^3\,\mathrm{Wm^{-2}}$. i) Stimare la temperatura della superficie del Sole supponendo che questo irraggi come un corpo nero. ii) Verificare il punto i) usando il fatto sperimentale che l'intensità di radiazione ricevuta in funzione della frequenza ν ha un massimo per $\nu_{max} = 3.5 \times 10^{14}$ Hz.

SOLUZIONE:

i) Dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$J = \frac{P}{4\pi R_S^2} = \sigma T^4 \tag{1.37}$$

P è la potenza emessa, per conservazione pari a:

$$P = 1.4 \times 10^3 \ \times 4\pi d^2 \tag{1.38}$$

Si trova quindi che:

$$T = \sqrt[4]{\frac{1.4 \times 10^3}{5.6704 \times 10^{-8}} \left(\frac{150 \times 10^6}{7 \times 10^5}\right)^2} = 5803\,\mathrm{K} \tag{1.39}$$

ii) Dalla legge dello spostamento di Wien:

$$T = \frac{\nu_{max}}{58.8\,\mathrm{GHz}} = \frac{3.5 \times 10^{14}}{58.8 \times 10^9} = 5952\,\mathrm{K} \tag{1.40}$$

1.7 Esercizio # 5: Quanti fotoni ci sono in una scatola da scarpe?

Calcolare il numero di fotoni in una scatola da scarpe di ($V = 10\,\mathrm{dm}^3$) posta a temperatura ambiente.

SOLUZIONE:

Divido la densità spettrale di energia per l'energia di singolo fotone e ottengo la densità numero dei fotoni

$$n(\nu, T) \equiv \frac{u(\nu, T)}{h\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{K_B T}} - 1} \tag{1.41}$$

La densità totale di fotoni sarà data dall'integrale sulle frequenze:

$$n_{tot}(T) = \int_0^{+\infty} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{K_B T}} - 1} d\nu \tag{1.42}$$

$$= \frac{(K_B T)^3 8\pi}{h^3 c^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx \tag{1.43}$$

$$= \frac{(K_B T)^3 8\pi}{h^3 c^3} \Gamma(3)\zeta(3) \tag{1.44}$$

Dove ho usato l'integrale notevole:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(s)\zeta(s) \tag{1.45}$$

$\Gamma(s)$ è la funzione Gamma e per numeri interi positivi vale $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\zeta(s)$ è la funzione Zeta di Riemann. Nel nostro caso $\Gamma(3) = 2$, $\zeta(3) = 1.202\ldots$, quindi: la densità totale di fotoni risulta essere:

$$n_{tot}(T) = \frac{(K_B T)^3 8\pi}{h^3 c^3} \times 2.404 \tag{1.46}$$

Il numero di fotoni in una scatola da scarpe di volume $V = 10\,\mathrm{dm}^3$, sarà dato da:

$$N = n_{tot}(300\,\mathrm{K}) \times 0.01 = 5.47 \times 10^{12} \tag{1.47}$$

1.8 Esercizio # 6: Laser

Un laser emette un fascio collimato di luce. Se la lunghezza d'onda della luce è 10^{-5} cm e la potenza emessa è $1\,\mathrm{W}$, quanti fotoni sono contenuti in $1\,\mathrm{cm}$ del fascio?

Soluzione: 0.017×10^{9}

1.9 Esercizio # 7: Palla di fuoco

Misurando l'intensità di radiazione emessa da una sfera infuocata di raggio $2\,\mathrm{m}$, in funzione della lunghezza d'onda si trova che la curva ha l'andamento previsto per un corpo nero con un massimo a $\lambda_{max} = 290\,\text{Å}$. Trovare: i) la temperatura della sfera, ii) la potenza totale irradiata dalla sfera all'istante di osservazione.

Soluzione: $10^5\,\mathrm{K}$, $2.852 \times 10^{14}\,\mathrm{W}$

1.10 Esercizio # 8: Temperatura della Terra

La temperatura superficiale del Sole è $T_S = 5500\,\mathrm{K}$ e il suo raggio è $R_S = 7\times10^5\,\mathrm{Km}$. La distanza media tra la Terra e il Sole è $L = 1.5 \times 10^8\,\mathrm{Km}$ e il raggio della terra è $r = 6.37 \times 10^3\,\mathrm{Km}$. In prima approssimazione si puó supporre che sia il Sole che la Terra assorbano tutta la radiazione elettromagnetica che li colpisce. La Terra ha raggiunto uno stato stazionario in cui la sua temperatura non cambia, nonostante il fatto che continuamente essa assorbe ed emette radiazione. Stimare numericamente la temperatura della Terra in termini dei parametri astronomici sopracitati.

Soluzione: $266\,\mathrm{K}$

1.11 Esercizio # 9: Massimi di Wien

Verificare che il prodotto tra la lunghezza d'onda di Wien λ_{max} e la frequenza massima di Wien ν_{max} non è uguale a c.

Soluzione: $\lambda_{max}\nu_{max} = 0.568c$