Lezione 8

Dinamica

8.1 Formule

Schema di Schrödinger

Gli stati evolvono

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi_0\rangle \tag{8.1}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t) = \hat{H}\hat{U}(t) \quad \Rightarrow \quad \hat{U}(t) = e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} \tag{8.2}$$

Quindi

$$\left\langle \hat{A}(t) \right\rangle = \langle \psi(t)| \hat{A} |\psi(t)\rangle \tag{8.3}$$

Schema di Heisenberg

Gli operatori evolvono

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}(t) = \left[\hat{A}(t), \hat{H}\right] + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} A_0 \quad \Rightarrow \quad \hat{A}(t) = e^{i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} A_0 e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} \tag{8.4}$$

Quindi

$$\left\langle \hat{A}(t) \right\rangle = \langle \psi_0| \hat{A}(t) |\psi_0\rangle \tag{8.5}$$

8.2 Esercizio # 1: In una certa base...

In una certa base l'hamiltoniana $\hat{H}$ è rappresentata dalla matrice:

$$\mathcal{H} = \hbar \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} \tag{8.6}$$

nella stessa base sono date anche le seguenti osservabili:

$$\mathcal{A} = a \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = b \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \tag{8.7}$$

dove a e b sono reali. Se al tempo $t = 0$ misuro $\hat{A}$ e ottengo come risultato della misura $2a$, trovare al tempo t gli esiti di una possibile misura di $\hat{B}$ e le loro rispettive probabilità.

SOLUZIONE:

8.3 Esercizio # 2: Hamiltoniana in uno spazio di Hilbert di dimensione 3.

In una certa base l'hamiltoniana $\hat{H}$ è rappresentata dalla matrice:

$$\mathcal{H} = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & i & 2 \\ -i & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.8}$$

Se al tempo $t = 0$ il sistema è nello stato:

$$|\phi\rangle = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \tag{8.9}$$

i) Trovare a. In che misura è arbitraria?
ii) Trovare il valor medio dell'energia sullo stato considerato.
iii) Trovare i possibili risultati di una misura di energia e le relative probabilità. Utilizzare questi risultati per verificare quanto ottenuto nel punto precedente.
iv) Scrivere lo stato del sistema al tempo t.

SOLUZIONE:

8.4 Esercizio # 3: Hamiltoniana in uno spazio di Hilbert di dimensione 3.

L'hamiltoniana per una certo sistema a tre livelli è rappresentata dalla matrice:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \tag{8.10}$$

Con a, b, c reali e con $a - c \neq \pm b$. Se al tempo $t = 0$ il sistema è nello stato:

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.11}$$

i) Scrivere lo stato del sistema al tempo t.
ii) Se invece lo stato iniziale fosse

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.12}$$

?

SOLUZIONE:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{ct}{\hbar}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.13}$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{at}{\hbar}} \begin{pmatrix} -i\sin\left(\frac{bt}{\hbar}\right) \\ 0 \\ \cos\left(\frac{bt}{\hbar}\right) \end{pmatrix} \tag{8.14}$$

8.5 Esercizio # 4: Hamiltoniana in uno spazio di Hilbert di dimensione 3.

Al punto ii) del problema precedente aggiungere: trovare il valor medio al tempo t dell'osservabile A che, nella stessa base in cui é stata rappresentata H

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{8.15}$$

Usare sia lo schema di Schrödinger che quello di Heisenberg e verificare che portano allo stesso risultato.

SOLUZIONE:

$$\left\langle \hat{A}(t) \right\rangle = \sin^2\left(\frac{bt}{\hbar}\right) + 3\cos^2\left(\frac{bt}{\hbar}\right) \tag{8.16}$$

8.6 Esercizio # 5: Hamiltoniana in uno spazio di Hilbert di dimensione 3.

L'hamiltoniana per una certo sistema a tre livelli è rappresentata dalla matrice:

$$\mathcal{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{8.17}$$

Nella stessa base sono rappresentate

$$\mathcal{A} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.18}$$

Con ω, λ, μ reali e positivi.
i) Trovare autovalori ed autovettori normalizzati di $\hat{H}$, $\hat{A}$, $\hat{B}$.
ii) Se al tempo $t = 0$ il sistema è nello stato:

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{8.19}$$

con $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$, trovare i valori medi di $\hat{H}$, $\hat{A}$, $\hat{B}$ a $t = 0$.
iii) Scrivere lo stato del sistema al tempo t, i possibili valori per una misura di energia e le rispettive probabilità al tempo $t > 0$. iv) Determinare i possibili valori per una misura delle osservabili A e B e le rispettive probabilità al tempo $t > 0$.

SOLUZIONE:
i) Per $\mathcal{H}$: $\{\hbar\omega, 2\hbar\omega, 2\hbar\omega\}$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Per $\mathcal{A}$: $\{2\lambda, \lambda, -\lambda\}$ $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Per $\mathcal{B}$: $\{2\mu, \mu, -\mu\}$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$

ii) $\hbar\omega \left(|c_1|^2 + 2\,|c_2|^2 + 2\,|c_3|^2 \right)$, $\lambda \left(c_1^\star c_2 + c_2^\star c_1 + 2\,|c_3|^2 \right)$, $\mu \left(c_2^\star c_3 + c_3^\star c_2 + 2\,|c_1|^2 \right)$