Lezione 11

Miscellanea di esercizi sulla seconda parte

11.1 Esercizio # 1: Oscillatore armonico

Considerare un oscillatore armonico di massa m che si trova all'istante t=0 in uno stato determinato dalle seguenti condizioni:

1. **Ogni misura di energia dà con certezza valori che soddisfano la relazione**

$$\hbar\omega < E < 3\hbar\omega \tag{11.1}$$

2. **Il valor medio dell'energia è**

$$\langle E \rangle = \frac{11}{6}\hbar\omega \tag{11.2}$$

3. **Il valor medio della posizione è**

$$\langle x \rangle = -\sqrt{\frac{8\hbar}{9m\omega}} \tag{11.3}$$

i) Identificare tale stato.
Determinare poi in quali istanti il valor medio della coordinata è: ii) positivo, iii) massimo.

SOLUZIONE:

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i\frac{3}{2}\omega t}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}|2\rangle \tag{11.4}$$

Positivo quando $t \in \left(\frac{(4n+1)\pi}{2\omega}, \frac{3(4n+1)\pi}{2\omega}\right)$, $n = 0, 1, 2, ...$
Massimo quando $t = \frac{(2n+1)\pi}{\omega}$, $n = 0, 1, 2, ...$

11.2 Esercizio # 2: Oscillatore armonico

Si sa con certezza che lo stato di un oscillatore armonico di pulsazione ω non contiene stati piú eccitati del secondo livello:

$$|\psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle + c\,|2\rangle \tag{11.5}$$

Si sa inoltre che il valore di aspettazione della posizione x all'istante considerato è zero e che il valore di aspettazione dell'energia è $\frac{3}{4}\hbar\omega$. Cosa si può dire dei valori a, b, c nell'ipotesi che siano reali? È completamente determinato lo stato in queste condizioni?

SOLUZIONE:
Si hanno quatto possibili casi:

$$a = \pm\sqrt{\frac{7}{8}}, b = 0, c = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \tag{11.6}$$

11.3 Esercizio # 3: Elettrone

Di un elettrone si sà che:

1. **è in uno stato p,**
2. **lo stato contiene autostati di L_z relativi agli autovalori ± 1,**
3. **il valore di aspettazione di L_z è zero,**
4. **la probabilità di trovare l'elettrone nel primo quadrante $(0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$ è del 25%.**

Scrivere le possibili funzioni d'onda.

SOLUZIONE:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|1-1\rangle \tag{11.7}$$

11.4 Esercizio # 4: Massima accuratezza

Mostrare che in un autostato di L^2 e L_z corrispondente agli autovalori l ed m, la massima accuratezza nella misura contemporanea di L_x e L_y si ottiene quando $|m| = l$.

11.5 Esercizio # 5: Direzione e spin

La funzione di spin di una particella di spin $\frac{1}{2}$ ha la seguente forma nella rappresentazione in cui S_z è diagonale:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \cos\delta \\ e^{i\beta} \sin\delta \end{pmatrix} \tag{11.8}$$

Esiste una direzione $\hat{n}$ dello spazio che il risultato della misura della componente dello spin lungo $\hat{n}$ possa essere previsto con certezza?

SOLUZIONE:
Due possibilità

$$\varphi = \beta - \alpha, \delta = \frac{\theta}{2} \varphi = \beta - \alpha, \delta = \frac{\theta + \pi}{2} \tag{11.9}$$

11.6 Esercizio # 6: Fascio di atomi con spin $\frac{1}{2}$

Un fascio di atomi di spin $\frac{1}{2}$ che si muove nella direzione dell'asse y viene sottoposto ad una serie di misure da parte di apparati del tipo Stern-Gerlach nel modo seguente:

1. **La prima misura accetta gli atomi con $s_z = \frac{\hbar}{2}$ e rigetta gli atomi con $s_z = -\frac{\hbar}{2}$**
2. **La seconda misura accetta gli atomi con $s_n = \frac{\hbar}{2}$ e rigetta gli atomi con $s_n = -\frac{\hbar}{2}$, dove s_n è l'autovalore dell'operatore $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ ed $\hat{\mathbf{n}}$ versore disposto nel piano xz ad un angolo β rispetto all'asse z.**
3. **La terza misura accetta gli atomi con $s_z = -\frac{\hbar}{2}$ e rigetta gli atomi con $s_z = \frac{\hbar}{2}$.**

Qual è l'intensità del fascio finale rispetto a quella del fascio che sopravvive alla prima misura? Come bisogna orientare la direzione $\hat{\mathbf{n}}$ del secondo apparato se si vuole ottenere la massima intensità finale possibile?

SOLUZIONE:
$\sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{4} \sin^2 \theta$, massimo per $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

11.7 Esercizio # 7: Hamiltoniana di due particelle

Un sistema di due particelle diverse di spin $\frac{1}{2}$ ha come hamiltoniano:

$$H = V\left(\mathbf{S_1} \cdot \mathbf{S_2}\right) \tag{11.10}$$

dove V è una costante e l'operatore vettoriale $\mathbf{S_i}$ si riferisce allo spin della i-esima particella. Si determino gli autovalori dell'energia e la loro degenerazione, motivando la risposta.

SOLUZIONE:
$\frac{-3V\hbar^2}{4}$ con degenerazione 1, $\frac{V\hbar^2}{4}$ con degenerazione 3.

Argomenti seconda parte

1. Formalismo generale
2. Dinamica secondo Schrödinger e Heisenberg
3. Oscillatore armonico
   (a) Utilizzo del formalismo
   (b) Polinomi di Hermite
4. Momento angolare
   (a) Utilizzo del formalismo
   (b) Armoniche sferiche
   (c) Stati di spin
   (d) Composizione dei momenti angolari
5. Teoria perturbativa indipendente dal tempo (No 2012)
   (a) Non degenere (No 2012)
   (b) Degenere (No 2012)
6. Teoria perturbativa dipendente dal tempo (No 2012)