Lezione 10

Momento angolare

Definizione

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla \tag{10.1}$$

Regole di commutazione

$$\left[\hat{L_i}, \hat{L^2}\right] = 0 \quad i = x, y, z \qquad \left[\hat{L_x}, \hat{L_y}\right] = i\hbar \hat{L_z} \quad \text{e cicliche} \tag{10.2}$$

Relazione con armoniche sferiche

$$L^2 = -\frac{\hbar^2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{\hbar^2}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{10.3}$$

$$\hat{L^2}\left|lm\right\rangle = \hbar^2 l(l+1)\left|lm\right\rangle \tag{10.4}$$

$$\hat{L_z}\left|lm\right\rangle = \hbar m\left|lm\right\rangle \tag{10.5}$$

$$\left\langle\theta\phi\right|lm\rangle = Y_l^m(\theta,\phi) \tag{10.6}$$

$$\left\langle lm\right|l'm'\rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{10.7}$$

Operatori di scala

$$\hat{L_+}\left|lm\right\rangle = \begin{cases} \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\left|lm+1\right\rangle & \text{se } m+1 \leq l \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{10.8}$$

$$\hat{L_-}\left|lm\right\rangle = \begin{cases} \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\left|lm-1\right\rangle & \text{se } m-1 \leq l \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{10.9}$$

$$\hat{L_x} = \frac{1}{2}\left(\hat{L_+} + \hat{L_-}\right) \qquad \hat{L_y} = \frac{1}{2i}\left(\hat{L_+} - \hat{L_-}\right) \tag{10.10}$$

Momento angolare totale

Il momento angolare totale è somma del contributo orbitale ($\hat{\mathbf{L}}$) e di quello di spin ($\hat{\mathbf{S}}$)

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}} \tag{10.11}$$

$\hat{\mathbf{J}}$ ed $\hat{\mathbf{S}}$ hanno stesse regole di commutazione di $\hat{\mathbf{L}}$.

Matrici di Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{10.12}$$

Matrici di spin

$$S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i \qquad i = x, y, z \tag{10.13}$$

Armoniche sferiche Y_l^m

$$Y_0^0(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}} \tag{10.14}$$

$$Y_1^1(\theta,\phi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}e^{i\varphi}\sin\theta \tag{10.15}$$

$$Y_1^0(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta \tag{10.16}$$

$$Y_1^{-1}(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}e^{-i\varphi}\sin\theta \tag{10.17}$$

$$\dots$$

Composizione di momenti angolari

Dati due momenti angolari $\mathbf{J_1}$ e $\mathbf{J_2}$, detta $\mathbf{J}$ la somma, posso usare due basi per descrivere il sistema:

- La base degli autostati di J_1^2, $J_{1,z}$, J_2^2, $J_{2,z}$, avente come vettori di base $|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle$
- La base degli autostati di J_1^2, J_2^2, J^2, J_z, avente come vettori di base $|j_1 j_2 J M\rangle$

Per passare da una base all'altra si usano i coefficienti di Clebsch-Gordan $C(JMm_1m_2)$

$$|j_1 j_2 J M\rangle = \sum_{m_1 m_2} C(JMm_1m_2)\,|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle \tag{10.18}$$

CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

J	J	...
M	M	...
m_1 m_2	Coefficients	
m_1 m_2		
⋮ ⋮		

1/2×1/2

m_1 m_2	1
	+1
+1/2 +1/2	1

m_1 m_2	1	0
	0	0
+1/2 −1/2	1/2	1/2
−1/2 +1/2	1/2	−1/2

m_1 m_2	1
	−1
−1/2 −1/2	1

1×1/2

esempio

m_1 m_2	3/2
	+3/2
+1 +1/2	1

m_1 m_2	3/2	1/2
	+1/2	+1/2
+1 −1/2	1/3	2/3
0 +1/2	2/3	−1/3

m_1 m_2	3/2	1/2
	−1/2	−1/2
0 −1/2	2/3	1/3
−1 +1/2	1/3	−2/3

m_1 m_2	3/2
	−3/2
−1 −1/2	1

2×1/2

m_1 m_2	5/2
	+5/2
+2 +1/2	1

m_1 m_2	5/2	3/2
	+3/2	+3/2
+2 −1/2	1/5	4/5
+1 +1/2	4/5	−1/5

m_1 m_2	5/2	3/2
	+1/2	+1/2
+1 −1/2	2/5	3/5
0 +1/2	3/5	−2/5

m_1 m_2	5/2	3/2
	−1/2	−1/2
0 −1/2	3/5	2/5
−1 +1/2	2/5	−3/5

m_1 m_2	5/2	3/2
	−3/2	−3/2
−1 −1/2	4/5	1/5
−2 +1/2	1/5	−4/5

m_1 m_2	5/2
	−5/2
−2 −1/2	1

3/2×1/2

m_1 m_2	2
	+2
+3/2 +1/2	1

m_1 m_2	2	1
	+1	+1
+3/2 −1/2	1/4	3/4
+1/2 +1/2	3/4	−1/4

m_1 m_2	2	1
	0	0
+1/2 −1/2	1/2	1/2
−1/2 +1/2	1/2	−1/2

m_1 m_2	2	1
	−1	−1
−1/2 −1/2	3/4	1/4
−3/2 +1/2	1/4	−3/4

m_1 m_2	2
	−2
−3/2 −1/2	1

2×1

m_1 m_2	3
	+3
+2 +1	1

m_1 m_2	3	2
	+2	+2
+2 0	1/3	2/3
+1 +1	2/3	−1/3

m_1 m_2	3	2	1
	+1	+1	+1
+2 −1	1/15	1/3	3/5
+1 0	8/15	1/6	−3/10
0 +1	2/5	−1/2	1/10

m_1 m_2	3	2	1
	0	0	0
+1 −1	1/5	1/2	3/10
0 0	3/5	0	−2/5
−1 +1	1/5	−1/2	3/10

m_1 m_2	3	2	1
	−1	−1	−1
0 −1	2/5	1/2	1/10
−1 0	8/15	−1/6	−3/10
−2 +1	1/15	−1/3	3/5

m_1 m_2	3	2
	−2	−2
−1 −1	2/3	1/3
−2 0	1/3	−2/3

m_1 m_2	3
	−3
−2 −1	1

3/2×1

m_1 m_2	5/2
	+5/2
+3/2 +1	1

m_1 m_2	5/2	3/2
	+3/2	+3/2
+3/2 0	2/5	3/5
+1/2 +1	3/5	−2/5

m_1 m_2	5/2	3/2	1/2
	+1/2	+1/2	+1/2
+3/2 −1	1/10	2/5	1/2
+1/2 0	3/5	1/15	−1/3
−1/2 +1	3/10	−8/15	1/6

m_1 m_2	5/2	3/2	1/2
	−1/2	−1/2	−1/2
+1/2 −1	3/10	8/15	1/6
−1/2 0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2 +1	1/10	−2/5	1/2

m_1 m_2	5/2	3/2
	−3/2	−3/2
−1/2 −1	3/5	2/5
−3/2 0	2/5	−3/5

m_1 m_2	5/2
	−5/2
−3/2 −1	1

1×1

m_1 m_2	2
	+2
+1 +1	1

m_1 m_2	2	1
	+1	+1
+1 0	1/2	1/2
0 +1	1/2	−1/2

m_1 m_2	2	1	0
	0	0	0
+1 −1	1/6	1/2	1/3
0 0	2/3	0	−1/3
−1 +1	1/6	−1/2	1/3

m_1 m_2	2	1
	−1	−1
0 −1	1/2	1/2
−1 0	1/2	−1/2

m_1 m_2	2
	−2
−1 −1	1

3/2×3/2

m_1 m_2	3
	+3
+3/2 +3/2	1

m_1 m_2	3	2
	+2	+2
+3/2 +1/2	1/2	1/2
+1/2 +3/2	1/2	−1/2

m_1 m_2	3	2	1
	+1	+1	+1
+3/2 −1/2	1/5	1/2	3/10
+1/2 +1/2	3/5	0	−2/5
−1/2 +3/2	1/5	−1/2	3/10

m_1 m_2	3	2	1	0
	0	0	0	0
+3/2 −3/2	1/20	1/4	9/20	1/4
+1/2 −1/2	9/20	1/4	−1/20	−1/4
−1/2 +1/2	9/20	−1/4	−1/20	1/4
−3/2 +3/2	1/20	−1/4	9/20	−1/4

m_1 m_2	3	2	1
	−1	−1	−1
+1/2 −3/2	1/5	1/2	3/10
−1/2 −1/2	3/5	0	−2/5
−3/2 +1/2	1/5	−1/2	3/10

m_1 m_2	3	2
	−2	−2
−1/2 −3/2	1/2	1/2
−3/2 −1/2	1/2	−1/2

m_1 m_2	3
	−3
−3/2 −3/2	1

2×3/2

m_1 m_2	7/2
	+7/2
+2 +3/2	1

m_1 m_2	7/2	5/2
	+5/2	+5/2
+2 +1/2	3/7	4/7
+1 +3/2	4/7	−3/7

m_1 m_2	7/2	5/2	3/2
	+3/2	+3/2	+3/2
+2 −1/2	1/7	16/35	2/5
+1 +1/2	4/7	1/35	−2/5
0 +3/2	2/7	−18/35	1/5

m_1 m_2	7/2	5/2	3/2	1/2
	+1/2	+1/2	+1/2	+1/2
+2 −3/2	1/35	6/35	2/5	2/5
+1 −1/2	12/35	5/14	0	−3/10
0 +1/2	18/35	−3/35	−1/5	1/5
−1 +3/2	4/35	−27/70	2/5	−1/10

m_1 m_2	7/2	5/2	3/2	1/2
	−1/2	−1/2	−1/2	−1/2
+1 −3/2	4/35	27/70	2/5	1/10
0 −1/2	18/35	3/35	−1/5	−1/5
−1 +1/2	12/35	−5/14	0	3/10
−2 +3/2	1/35	−6/35	2/5	−2/5

m_1 m_2	7/2	5/2	3/2
	−3/2	−3/2	−3/2
0 −3/2	2/7	18/35	1/5
−1 −1/2	4/7	−1/35	−2/5
−2 +1/2	1/7	−16/35	2/5

m_1 m_2	7/2	5/2
	−5/2	−5/2
−1 −3/2	4/7	3/7
−2 −1/2	3/7	−4/7

m_1 m_2	7/2
	−7/2
−2 −3/2	1

2×2

m_1 m_2	4
	+4
+2 +2	1

m_1 m_2	4	3
	+3	+3
+2 +1	1/2	1/2
+1 +2	1/2	−1/2

m_1 m_2	4	3	2
	+2	+2	+2
+2 0	3/14	1/2	2/7
+1 +1	4/7	0	−3/7
0 +2	3/14	−1/2	2/7

m_1 m_2	4	3	2	1
	+1	+1	+1	+1
+2 −1	1/14	3/10	3/7	1/5
+1 0	3/7	1/5	−1/14	−3/10
0 +1	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−1 +2	1/14	−3/10	3/7	−1/5

m_1 m_2	4	3	2	1	0
	0	0	0	0	0
+2 −2	1/70	1/10	2/7	2/5	1/5
+1 −1	8/35	2/5	1/14	−1/10	−1/5
0 0	18/35	0	−2/7	0	1/5
−1 +1	8/35	−2/5	1/14	1/10	−1/5
−2 +2	1/70	−1/10	2/7	−2/5	1/5

m_1 m_2	4	3	2	1
	−1	−1	−1	−1
+1 −2	1/14	3/10	3/7	1/5
0 −1	3/7	1/5	−1/14	−3/10
−1 0	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−2 +1	1/14	−3/10	3/7	−1/5

m_1 m_2	4	3	2
	−2	−2	−2
0 −2	3/14	1/2	2/7
−1 −1	4/7	0	−3/7
−2 0	3/14	−1/2	2/7

m_1 m_2	4	3
	−3	−3
−1 −2	1/2	1/2
−2 −1	1/2	−1/2

m_1 m_2	4
	−4
−2 −2	1

ES: $1 \times \frac{1}{2}$ (J_1, J_2)

$|1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{2}\,\tfrac{3}{2}\rangle = 1\,|1\,1;\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle$

$|1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\,1;\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\,0;\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle$

$|1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\,0;\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\,-1;\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle$

$|1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{2}\,-\tfrac{3}{2}\rangle = 1\,|1\,-1;\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle$

$|1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\,1;\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\,0;\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle$

$|1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\,0;\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\,-1;\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle$

10.1 Esercizio # 1: Elementi di matrice

Dato lo stato

$$|lm\rangle \tag{10.19}$$

autostato del momento angolare $\hat{J}$, trovare i seguenti elementi di matrice:

$$\langle 00|\,\hat{J}_z\,|00\rangle \tag{10.20}$$
$$\langle 21|\,\hat{J}_+\,|20\rangle \tag{10.21}$$
$$\langle 22|\,\hat{J}_+^2\,|20\rangle \tag{10.22}$$
$$\langle 20|\,\hat{J}_+\hat{J}_-\,|20\rangle \tag{10.23}$$
$$\langle 20|\,\hat{J}_+\hat{J}_-\,|20\rangle \tag{10.24}$$
$$\langle 20|\,\hat{J}_-^2\hat{J}_z\hat{J}_+^2\,|20\rangle \tag{10.25}$$
$$\langle 10|\,\hat{J}_-^2\hat{J}_z\hat{J}_+^2\,|20\rangle \tag{10.26}$$

SOLUZIONE: 0, $\hbar\sqrt{6}$, $2\hbar^2\sqrt{6}$, $6\hbar^2$, $6\hbar^2$, $48\hbar^5$, 0.

10.2 Esercizio # 2: Check

Provare che per una particella in un potenziale $V(\mathbf{r})$ la variazione temporale del valore di aspettazione del momento angolare $\mathbf{L}$ è uguale al valore di aspettazione del momento torcente. Verificare quindi che per un potenziale a simmetria sferica, si conserva il valor medio di $\hat{\mathbf{L}}$.

SOLUZIONE:

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{L}\rangle = \langle \mathbf{r} \times (-\nabla V)\rangle \tag{10.27}$$

Quando $V(r)$ anzichè $V(\mathbf{r})$ allora

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{L}\rangle = \left\langle \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}} \left(-\frac{\partial V}{\partial r}\right)\right\rangle = \mathbf{0} \tag{10.28}$$

10.3 Esercizio # 3: Calcolo classico!

Se un elettrone fosse una sfera rotante classica di raggio

$$r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \tag{10.29}$$

dove r_c è il raggio classico dell'elettrone, che si ottiene andando ad eguagliare l'energia relativistica dell'elettrone a riposo (mc^2) con l'energia immagazzinata nel campo elettromagnetico da esso prodotto; sapendo che l'elettrone ha un momento angolare di spin pari a $\frac{\hbar}{2}$, quanto veloce andrebbe un punto all'equatore?

SOLUZIONE:

$$v = \frac{5\hbar}{4mr_c} = 5.15 \times 10^{10}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{10.30}$$

circa 100 volte più veloce della luce !

10.4 Esercizio # 4: Molecola di HI

La molecola di HI è formata da un atomo di Idrogeno ed uno di Iodio. La differenza fra le masse dei due nuclei è tale per cui è possibile pensare che sia il solo Idrogeno a muoversi. L'atomo di Idrogeno compie intorno alla posizione di equilibrio un moto rotatorio la cui distanza dal nucleo di Iodio è fissa e vale 160 pm. Trovare le energie e le degenerazioni dei tre livelli energetici di più bassa energia.

SOLUZIONE:

$$E = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m_pR^2} \tag{10.31}$$

$l = 0,\ E = 0,\ 1$
$l = 1,\ E = 2.60 \times 10^{-22}\,\mathrm{J} = 1.62\,\mathrm{meV},\ 3$
$l = 2,\ E = 7.80 \times 10^{-22}\,\mathrm{J} = 4.86\,\mathrm{meV},\ 5.$

10.5 Esercizio # 5: Matrici di spin

Costruire la rappresentazione degli operatori $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ utilizzando come base per la rappresentazione gli autostati di $\hat{S}^2$ e di $\hat{S}_z$ quando lo spin della particella è: i) $\frac{1}{2}$, ii) 1, iii) $\frac{3}{2}$.

SOLUZIONE:
Per spin 1/2:

$$\mathcal{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Per spin 1:

$$\mathcal{S}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{S}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{S}_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Per spin 3/2:

$$\mathcal{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ i\sqrt{3} & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

10.6 Esercizio # 6: Stati di spin

Un elettrone si trova nello stato di spin

$$\chi = A \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix} \tag{10.32}$$

i) Trovare A. ii) Trovare i valori medi di $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ su questo stato. iii) Trovare ΔS_x, ΔS_y, ΔS_z e confermare il principio di indeterminazione.

SOLUZIONE:
i) $A = \frac{1}{5}$,

ii) 0, $\frac{-12}{25}\hbar$, $\frac{-7}{50}\hbar$

iii) $\frac{\hbar}{2}$, $\frac{7\hbar}{50}$, $\frac{12\hbar}{25}$, ok, ok, ok

10.7 Esercizio # 7: Stati di spin

Un elettrone si trova nello stato di spin

$$\chi = A \begin{pmatrix} 1-2i \\ 2 \end{pmatrix} \tag{10.33}$$

i) Trovare A. ii) Trovare i possibili valori di una misura di $\hat{S}_z$, $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ su questo stato e le rispettive probabilità. iii) Trovare, su questo stato, i valori medi degli operatori del punto precedente.

SOLUZIONE:
i) $A = \frac{1}{3}$,

ii) $\frac{\hbar}{2}$ con prob. $\frac{5}{9}$, $-\frac{\hbar}{2}$ con prob. $\frac{4}{9}$, val medio $\frac{\hbar}{18}$

$\frac{\hbar}{2}$ con prob. $\frac{13}{18}$, $-\frac{\hbar}{2}$ con prob. $\frac{5}{18}$, val medio $\frac{2\hbar}{9}$

$\frac{\hbar}{2}$ con prob. $\frac{17}{18}$, $-\frac{\hbar}{2}$ con prob. $\frac{1}{18}$, val medio $\frac{4\hbar}{9}$

10.8 Esercizio # 8: Composizione dei momenti angolari

Seguendo le regole della composizione dei momenti angolari:
i) Calcolare i possibili valori del momento angolare somma se $l_1 = 3$ e $l_2 = 4$. ii) Calcolare i possibili valori del momento angolare di due elettroni se si trovano: entrambi in stati p, oppure entrambi in stati d, oppure uno in uno stato p e l'altro in uno stato d. iii) Calcolare i possibili valori del momento angolare di spin totale di quattro elettroni.

SOLUZIONE:
$7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$
$2, 1, 0$
$4, 3, 2, 1, 0$
$3, 2, 1$
$2, 1, 1, 1, 0, 0$

10.9 Esercizio # 9: Composizione dei momenti angolari di spin: mesoni e barioni

Un protone e un neutrone sono due casi frequenti di ciò che in fisica delle particelle si chiama barione, ovvero uno stato legato di tre quarks. Kaoni e pioni sono esempi di particelle mesoniche, ovvero stati legati di due quarks. Sapendo che lo spin di un quark è $\frac{\hbar}{2}$, usare le regole di composizione dei momenti angolari di spin per trovare i possibili spin totali di queste particelle.

SOLUZIONE:
per barioni: $\frac{3}{2}\hbar$, $\frac{1}{2}\hbar$
per mesoni: 0, $\hbar$

10.10 Esercizio # 10: Composizione dei momenti angolari di spin

Una particella di spin 1 e una particella di spin 2 sono in una configurazione tale che lo spin totale è 3 e che la componente z dello spin totale è $\hbar$. Se si misura la componente z del momento angolare di spin della particella avente spin 2, che valori si ottengono? Con che probabilità?

SOLUZIONE:

$$|1\,2\,3\,1\rangle = \sqrt{\frac{1}{15}}\,|22;1-1\rangle + \sqrt{\frac{8}{15}}\,|21;10\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}}\,|20;11\rangle \tag{10.34}$$

$2\hbar$ con prob. $\frac{1}{15}$, $\hbar$ con prob. $\frac{8}{15}$, 0 con prob. $\frac{2}{5}$