Lezione 3

Modellini atomici - Quantizzazioni

3.1 Formule

Formula di Rydberg per le righe spettrali dell'Idrogeno

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \tag{3.1}$$

con $R_H = 1.0967758 \times 10^{-2}\,\mathrm{nm}^{-1}$ ed $n_1 > n_2$.

Quantizzazione di Bohr

Il momento angolare puó assumere solo valori interi di $\hbar$.

$$L = n\hbar \tag{3.2}$$

Quantizzazione di Bohr-Sommerfeld

Nello spazio delle fasi

$$\oint p_i dx_i = n_i h \tag{3.3}$$

3.2 Esercizio # 1: Modello planetario dell'atomo - Collasso per irraggiamento

Nel modello planetario dell'atomo l'elettrone dell'atomo di Idrogeno compie un'orbita circolare di raggio $r = 0.53\,\text{Å}$. Calcolare la perdita di energia per irraggiamento e il tempo che impiegherebbe l'elettrone per decadere sul nucleo.

SOLUZIONE:

Il potenziale elettrico del protone[1] é:

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{3.4}$$

nel caso in cui $r = 0.53\,\text{Å}$, abbiamo che $V = 27.2\,\text{V}$. Ne consegue che l'elettrone ha una energia elettrostatica di $U = -eV = -27.2\,\text{eV}$.
La forza Coulombiana compie il ruolo di forza centripeta, ovvero mantiene l'elettrone sull'orbita circolare.

$$ma_{centripeta} = m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{3.5}$$

Da questa si ricava che l'energia cinetica dell'elettrone[2]:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = 13.6\,\text{eV} \tag{3.6}$$

Otteniamo quindi che il modulo della velocità vale[3]

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = 2.19\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{3.7}$$

Impieghiamo quindi la formula di Larmor per esprimere la potenza emessa dalla carica accelerata e usiamo l'espressione della accelerazione centripeta:

$$P_{Larmor} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}a^2_{centripeta} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\left(\frac{v^2}{r}\right)^2 \tag{3.8}$$

[1] Supporre puntiforme il nucleo in quanto molto piccolo rispetto alle dimensioni atomiche.
[2] Da notare come l'energia totale dell'elettrone data da $K + U = -13.6\,\text{eV}$ sia negativa, infatti l'elettrone si trova in uno stato legato.
[3] Per calcolare la velocità utilizzo il formalismo non relativistico perché $E \ll mc^2$.

La conservazione dell'energia allora deve portare a:

$$P_{Larmor} + \frac{dE}{dt} = 0 \tag{3.9}$$

Dove E é l'energia del sistema legato[4], pari a

$$E = K + U = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \tag{3.12}$$

Abbiamo che

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r^2}\frac{dr}{dt} \tag{3.13}$$

Sostituendo l'ultima equazione nella (3.9), ed usando per P_{Larmor} la (3.8), otteniamo l'equazione integrale:

$$\int_0^\tau dt = -\int_{r_{iniziale}}^{0} \frac{m^2 12\pi^2\epsilon_0^2 c^3 r^2}{e^4} dr \tag{3.14}$$

Da qui, con una semplice integrazione, otteniamo una stima del tempo di vita di un atomo.

$$\tau = \frac{m^2 4\pi^2\epsilon_0^2 c^3}{e^4} r^3_{iniziale} = 1.56 \times 10^{-11}\,\mathrm{s} \tag{3.15}$$

[4]Che $E = \frac{U}{2}$ lo potevamo anche affermare usando il teorema del Viriale, che dice:

$$K = \frac{n}{2}V \tag{3.10}$$

dove n é l'esponente di $U = \alpha r^n$.
Pertanto

$$E = K + U = \left(\frac{n}{2} + 1\right)V \tag{3.11}$$

Nel caso di potenziale Coulombiano $n = -1$.

3.3 Esercizio # 2: Serie spettrali per l'atomo di Idrogeno

Sapendo che le prime due righe nel visibile dello spettro di emissione dell'Idrogeno sono a $656.46\,\mathrm{nm}$ e a $486.27\,\mathrm{nm}$, calcolare la costante di Rydberg e verificare il suo valore con quello noto. Dire in che stato si trova l'atomo subito dopo ciascun processo di emissione e calcolare l'energia di ionizzazione dell'atomo (quando si trova in questo stato).

SOLUZIONE:

Le righe spettrali dell'Idrogeno seguono la formula sperimentale di Rydberg:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \tag{3.16}$$

A seconda del valore di n_2 abbiamo nomi divesi per ciascuna serie:

1. $n_2 = 1$ Lymann
2. $n_2 = 2$ Balmer
3. $n_2 = 3$ Pashen
4. $n_2 = 4$ Brackett
5. $n_2 = 5$ Pfund

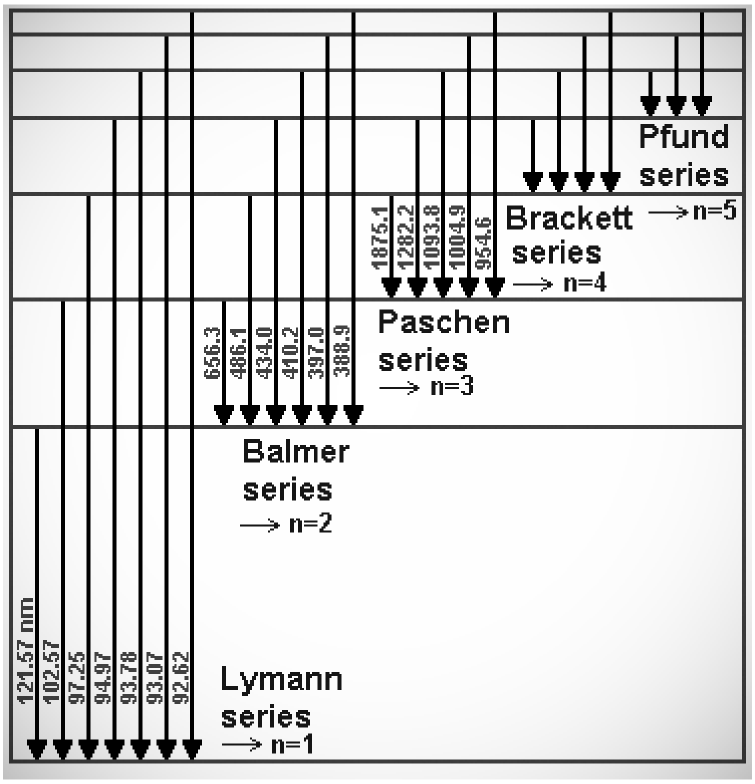
Solo la serie di Balmer emette nel visibile, pertanto $n_2 = 2$.

$$\frac{1}{656.46\,\mathrm{nm}} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \quad ; \quad \frac{1}{486.27\,\mathrm{nm}} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) \tag{3.17}$$

Trovo quindi R_H e verifico il suo valore in entrambi i casi.
Essendo $n_2 = 2$, a seguito di ciascuna emissione, l'Idrogeno si trova nel primo stato eccitato.
L'energia di ionizzazione di questo stato é

$$\lambda^{-1}_{ionizzazione} = \lim_{n\to+\infty} R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{R_H}{4} \tag{3.18}$$

Pertanto l'energia di ionizzazione é $E^{primostatoecc.}_{ionizzazione} = \frac{hc}{\lambda_{ionizzazione}} = \frac{13.6\,\mathrm{eV}}{4} = 3.4\,\mathrm{eV}$.



Pfund series
→ n=5
Brackett series
→ n=4
1875.1
1282.2
1093.8
1004.9
954.6
Paschen series
→ n=3
656.3
486.1
434.0
410.2
397.0
388.9
Balmer series
→ n=2
121.57 nm
102.57
97.25
94.97
93.78
93.07
92.62
Lymann series
→ n=1

3.4 Esercizio # 3: Atomo di Idrogeno secondo Bohr

Si consideri un atomo idrogenoide (un solo elettrone e nucleo con carica Ze), quantizzando il momento angolare dell'elettrone che ruota intorno al nucleo (alla maniera di Bohr), esprimere la costante di Rydberg in funzione delle altre costanti fondamentali. $R_H = 1.0967758 \times 10^{-2}$ **nm**$^{-1}$**.**

SOLUZIONE:

Dalla legge sulla accelerazione centripeta

$$ma = m\frac{v^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{3.19}$$

otteniamo una espressione per la velocità

$$v = \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 rm}} \tag{3.20}$$

Quantizziamo il momento angolare

$$mvr = n\hbar \tag{3.21}$$

da cui

$$r_n = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{mZe^2}n^2 = \frac{a_0}{Z}n^2 \tag{3.22}$$

dove il raggio di Bohr $a_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2} = 0.529\,\text{Å}$. Vediamo che il raggio delle orbite dipende dal quadrato del numero quantico n, ed inversamente da Z.
Troviamo la quantizzazione delle energie[5]:

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{2}\frac{Z^2e^2}{4\pi\epsilon_0 n^2 a_0} = -\frac{1}{2}\frac{Z^2e^4m}{(4\pi\epsilon_0)^2 n^2\hbar^2} = \frac{-13.6\,\text{eV}}{n^2}Z^2 \tag{3.23}$$

Se ci limitiamo all'Idrogeno, ovvero $Z = 1$, il fotone emesso a seguito di un decadimento dallo stato n_1 a n_2 sarà

$$h\nu = E_{n_1} - E_{n_2} = \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) \times 13.6\,\text{eV} \tag{3.24}$$

[5]Come già visto in altri esercizi l'energia totale é metà energia potenziale per un potenziale Coulombiano.

da cui si ricava

$$\frac{1}{\lambda} = \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) \times \frac{13.6\,\mathrm{eV}}{hc} \tag{3.25}$$

quindi

$$R_H = \frac{13.6\,\mathrm{eV}}{hc} = \frac{e^4 m}{4\pi\,(4\pi\epsilon_0)^2\,\hbar^3 c} = 1.09 \times 10^{-2}\,\mathrm{nm}^{-1} \tag{3.26}$$

Un ultima cosa, anche se non richiesta dall'esercizio: anche il periodo di rotazione é quantizzato. Sostituendo la (3.22) in (3.20) otteniamo v_n le velocità qantizzate. Da qui possiamo ottenere i periodi delle orbite come

$$T_n = \frac{2\pi r_n}{v_n} \tag{3.27}$$

3.5 Esercizio # 4: Pallina tra due muri - Quantizzazione di Bohr-Sommerfeld

Calcolare i livelli energetici di una pallina che rimbalza tra due muri senza mai perdere energia utilizzando la quantizzazione di Bohr-Sommerfeld.

SOLUZIONE:

Nello spazio delle fasi si deve verificare

$$\oint p_i dx_i = n_i h \tag{3.28}$$

Pertanto

$$\oint p_x dx = 2a p_x = nh \tag{3.29}$$

L'energia é quindi

$$E = \frac{p_x^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{nh}{2a}\right)^2 \tag{3.30}$$

se lo spazio tra le due pareti si riduce, l'energia dei livelli aumenta.
Da notare é anche come dalla legge di de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p_x} = \frac{2a}{n} \tag{3.31}$$

3.6 Esercizio # 5: Potenziale armonico - Quantizzazione di Bohr-Sommerfeld

Un punto materiale di massa m é costretto a muoversi lungo $\hat{x}$ ed é soggetto ad una forza di richiamo pari $-Kx$. Applica le regole di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld per calcolare: i) l'energia, ii) l'ampiezza delle traiettorie quantizzate.

SOLUZIONE:

Vediamo lo spazio delle fasi:

$$E = K + U = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{Kx^2}{2} \tag{3.32}$$

ovvero

$$\frac{p_x^2}{2mE} + \frac{Kx^2}{2E} = 1 \tag{3.33}$$

se chiamo $b = \sqrt{2mE}$, $a = \sqrt{\frac{2E}{K}}$, nello spazio delle fasi abbiamo delle ellissi di area πab. Otteniamo quindi che:

$$\pi\sqrt{\frac{2E}{K}}\sqrt{2mE} = nh \tag{3.34}$$

da cui

$$2\pi E\sqrt{\frac{m}{K}} = nh \quad \Rightarrow \quad E = nh\nu \tag{3.35}$$

dove abbiamo sostituito nell'ultimo passaggio $\sqrt{\frac{K}{m}} = \omega = 2\pi\nu$.
i) Gli stati sono equispaziati in energia e se $h \to 0$ gli stati possibili formano un continuo e si torna al caso classico in cui tutte le energie sono permesse.
ii) L'ampiezza delle traiettorie quantizzate é data da $a_n = \sqrt{\frac{2nh\nu}{K}}$, quindi va come la radice di n.

3.7 Esercizio # 6: Atomo di Idrogeno

Un elettrone in un atomo isolato di Idrogeno occupa il livello corrispondente a $n = 30$. Calcolare il raggio dell'atomo di Idrogeno e l'energia di legame in questa configurazione; calcolare inoltre la lunghezza d'onda massima di un fotone per ionizzare l'atomo.

SOLUZIONE: $4.76 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}$, $-15.1\,\mathrm{meV}$, $82\,\mu\mathrm{m}$

3.8 Esercizio # 7: Positronio

Il positronio é uno stato legato di elettrone e positrone. Usando il modello di Bohr trovare le espressioni per il raggio e l'energia di legame. Calcolare inoltre l'energia necessaria per far passare il positronio dallo stato fondamentale al primo livello eccitato.

SOLUZIONE: $n^2 \times 1.058\,\text{Å},\ -\frac{6.8}{n^2}\,\text{eV},\ 5.1\,\text{eV}$

3.9 Esercizio # 8: Idrogeno mesico

L'idrogeno mesico é uno stato legato di un muone ed un protone ($m_\mu = 206.8 m_e$). Usando il modello di Bohr trovare le espressioni per il raggio e l'energia di legame. Calcolare inoltre l'energia necessaria per far passare il sistema dallo stato fondamentale al primo livello eccitato.

SOLUZIONE: $n^2 \times 2.85 \times 10^{-13}\,\mathrm{m}$, $-\frac{2.53}{n^2}\,\mathrm{keV}$, $1.9\,\mathrm{keV}$

3.10 Esercizio # 9: Elettrone in campo magnetico - quantizzazione di Bohr

Un elettrone compie una traiettoria circolare in presenza di un campo magnetico costante B. Applicando la quantizzazione di Bohr, mostrare che l'energia cinetica dell'elettrone risulta quantizzata e che i livelli sono equispaziati in energia.