Lezione 4

Meccanica Ondulatoria

4.1 Formule

Densità di probabilità

$$\rho\left(x\right)=\psi^{\star}\left(x\right)\psi\left(x\right) \tag{4.1}$$

Densità di corrente di probabilità

$$j_x\left(x\right)=\frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^{\star}\left(x\right)\frac{d}{dx}\psi\left(x\right)-\psi\left(x\right)\frac{d}{dx}\psi^{\star}\left(x\right)\right] \tag{4.2}$$

Interpretazione statistica della funzione d'onda

Se la funzione d'onda ha norma unitaria, il modulo quadro della funzione d'onda $\psi(x)$ indica una densità di probabilità. Pertanto:

$$\int_a^b |\psi(x)|^2 dx = \text{Prob. di trovare la particella nell'intervallo } x \in [a,b] \tag{4.3}$$

oppure usando la $\phi(p)$

$$\int_a^b |\phi(p)|^2 dp = \text{Prob. di trovare la particella con impulso } p \in [a,b] \tag{4.4}$$

Operatori

Un operatore é una operazione simbolica che indica una istruzione da applicare su una funzione. Gli operatori vengono rappresentati con un cappello.

Se usiamo la funzione d'onda $\psi(x)$, gli operatori verranno rappresentati andando a sostituire

$$\hat{x} \to x \qquad\qquad \hat{p} \to -i\hbar\frac{d}{dx} \tag{4.5}$$

Se usiamo la funzione d'onda in termini di impulso $\phi(p)$, gli operatori verranno rappresentati andando a sostituire

$$\hat{x} \to i\hbar\frac{d}{dp} \qquad\qquad \hat{p} \to p \tag{4.6}$$

Per trovare i valori medi:

$$\langle G(\hat{x}, \hat{p}_x)\rangle = \int \psi^\star(x) G\left(x, -i\hbar\frac{d}{dx}\right)\psi(x)dx \tag{4.7}$$

$$= \int \phi^\star(p) G\left(i\hbar\frac{d}{dp}, p\right)\phi(p)dp \tag{4.8}$$

Commutatore

In generale l'ordine con cui applichiamo gli operatori é fondamentale.

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \tag{4.9}$$

solo quando $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{0}$ l'ordine non conta. In questo caso gli operatori commutano.

Principio di indeterminazione

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{4.10}$$

dove

$$\Delta A = \sqrt{\left\langle \hat{A}^2 \right\rangle - \left\langle \hat{A} \right\rangle^2} \tag{4.11}$$

inoltre

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right\rangle\right| \tag{4.12}$$

Delta di Dirac

$$\delta\left(k' - k\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i(k'-k)x} \tag{4.13}$$

Trasformate di Fourier

$$f(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{ipx}{\hbar}} f(x) \tag{4.14}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp e^{\frac{ipx}{\hbar}} f(p) \tag{4.15}$$

4.2 Esercizio # 1: Cambio da x a p

Una funzione d'onda non normalizzata vale $f(x) = e^{-ax^2}$. La si normalizzi. Trovare la funzione d'onda in termini di impulso. La nuova funzione ha mantenuto norma unitaria? Da ricordare che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2+bx+c} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}+c} \tag{4.16}$$

SOLUZIONE:

Trovo il fattore di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-2ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \tag{4.17}$$

Pertanto la funzione d'onda normalizzata é:

$$\psi(x) = \sqrt[4]{\frac{2a}{\pi}} e^{-ax^2} \tag{4.18}$$

Troviamo la $\phi(p)$ facendo una trasformata di Fourier

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\frac{px}{\hbar}} \sqrt[4]{\frac{2a}{\pi}} e^{-ax^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sqrt[4]{\frac{2a}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{p^2}{4a\hbar^2}} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Lo stato é ancora normalizzato perché

$$\int dp\, |\phi(p)|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \frac{\pi}{a} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\frac{p^2}{4a\hbar^2}} = \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \frac{\pi}{a} \sqrt{\pi 2a\hbar^2} = 1 \tag{4.20}$$

4.3 Esercizio # 2: Commutatore tra $\hat{x}$ e $\hat{p_x}$

Calcolare il commutatore tra $\hat{x}$ e $\hat{p_x}$.

SOLUZIONE:

Calcolo

$$\hat{x}\hat{p}_x f(x) \tag{4.21}$$

$$\hat{p}_x\hat{x}f(x) = -i\hbar f(x) - i\hbar x\frac{d}{dx}f(x) = -i\hbar f(x) + \hat{x}\hat{p}_x f(x) \tag{4.22}$$

perché la derivata ha agito su un prodotto.
Ne consegue che

$$[\hat{x}, \hat{p}_x]\, f(x) = i\hbar f(x) \tag{4.23}$$

Pertanto

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar\hat{1} \tag{4.24}$$

4.4 Esercizio # 3: Fattore di normalizzazione

Una funzione vale $\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ **nell'intervallo** $[0, L]$**, zero altrimenti. La si normalizzi.**

SOLUZIONE:

Chiamo $\psi(x) = kost \times \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

$$\int_0^L |\psi(x)|^2 \, dx = kost^2 \times \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \tag{4.25}$$

$$= kost^2 \times \int_0^L \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{2} dx \tag{4.26}$$

$$= kost^2 \times \frac{L}{2} \tag{4.27}$$

Quindi $kost = \sqrt{\frac{2}{L}}$ e la funzione normalizzata diventa

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{4.28}$$

4.5 Esercizio # 4: Principio di indeterminazione

Calcolare il valore della indeterminazione $\Delta x \Delta p_x$ per una particella preparata nello stato $\psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2a}}$. Verifica il principio di indeterminazione. Integrali notevoli:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^2 e^{-ax^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{4.29}$$

SOLUZIONE: $\frac{\hbar}{2}$

4.6 Esercizio # 5: Principio di indeterminazione

Calcolare il valore della indeterminazione $\Delta x \Delta p_x$ per una particella preparata nello stato $\psi\left(x\right) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ e confinata nell'intervallo $[0, L]$. Verifica il principio di indeterminazione.

SOLUZIONE: $\frac{\hbar}{2\sqrt{3}}\sqrt{\pi^2 - 6}$

4.7 Esercizio # 6: Costruire operatori

Costruire operatori in funzione di x per le seguenti osservabili: i) energia cinetica (1D), ii) momento di dipolo elettrico (1D), iii) componente z del momento angolare (3D). Ripetere il problema scrivendo gli stessi operatori in funzione di p.

SOLUZIONE:

Caso i)

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} \qquad\qquad \frac{p_x^2}{2m} \tag{4.30}$$

Caso ii)

$$qx \qquad\qquad i\hbar q\frac{d}{dp} \tag{4.31}$$

Caso iii)

$$-i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad\qquad i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial p_x}p_y-\frac{\partial}{\partial p_y}p_x\right) \tag{4.32}$$

4.8 Esercizio # 7: Valori medi

Calcolare il valore di aspettazione degli operatori $\hat{p}_x$ e $\hat{p}_x^2$ per una particella con funzione d'onda $\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ confinata nell'intervallo $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$.

SOLUZIONE: 0, $\frac{\pi^2\hbar^2}{L^2}$

4.9 Esercizio # 8: Commutatori

Calcolare i seguenti commutatori. i) $[\hat{x}, \hat{y}]$**, ii)** $[\hat{p}_x, \hat{p}_y]$**, iii)** $\left[\hat{x}^2, \hat{p}_x\right]$**, iv)** $\left[\hat{\frac{1}{x}}, \hat{p}_x\right]$**, v)** $[\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x, \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y]$**.**

SOLUZIONE: $\hat{0}$, $\hat{0}$, $2i\hbar\hat{x}$, $\frac{\hbar}{i\hat{x}^2}$, $i\hbar\left(\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z\right)$

4.10 Esercizio # 9: Commutatori

Verificare che: i) $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = -\left[\hat{B},\hat{A}\right]$**, ii)** $\left[\hat{A^m},\hat{A^n}\right] = \hat{0}$**, iii)** $\left[\hat{A}^2,\hat{B}\right] = \hat{A}\left[\hat{A},\hat{B}\right] + \left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{A}$**, iv)** $\left[\hat{A},\left[\hat{B},\hat{C}\right]\right] + \left[\hat{B},\left[\hat{C},\hat{A}\right]\right] + \left[\hat{C},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] = \hat{0}$**.**

4.11 Esercizio # 10: Formula di Campbell-Baker-Hausdorff

Mostrare che solo se $\left[\hat{A},\hat{B}\right]=\hat{0}$ **allora** $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}=e^{\hat{A}+\hat{B}}$**.**

4.12 Esercizio # 11: Commutatori

Calcolare i commutatori a) $\left[\hat{H},\hat{p}_x\right]$, b) $\left[\hat{H},\hat{x}\right]$, dove l'hamiltoniana H del sistema e' data dalla somma di energia cinetica ed energia potenziale (1D). Scegliere per l'energia potenziale: i) una costante, ii) un potenziale armonico $\frac{1}{2}Kx^2$, iii) il potenziale Coulombiano $-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 x}$. Verificare in tutti i casi il teorema di Ehrenfest.

SOLUZIONE:

Caso i) potenziale costante

$$\left[\hat{H},\hat{p}_x\right] = \left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m}+\hat{U},\hat{p}_x\right] = \hat{0} \tag{4.33}$$

$$\left[\hat{H},\hat{x}\right] = \left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m}+\hat{U},\hat{x}\right] = \left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m},\hat{x}\right]+\left[\hat{U},\hat{x}\right] = \left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m},\hat{x}\right] = \hat{p}_x\left[\frac{\hat{p}_x}{2m},\hat{x}\right]+\left[\frac{\hat{p}_x}{2m},\hat{x}\right]\hat{p}_x = -\frac{i\hbar}{m}\hat{p}_x \tag{4.34}$$

Applichiamo il teorema di Ehrenfest[1]

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{x}\rangle = \left\langle\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{x}\right]\right\rangle = \frac{\langle\hat{p}_x\rangle}{m} \tag{4.38}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{p}_x\rangle = \left\langle\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{p}_x\right]\right\rangle = 0 \tag{4.39}$$

[1] Teorema di Ehrenfest

$$\frac{d}{dt}\left\langle\hat{A}\right\rangle = \left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}+\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A},\hat{H}\right]\right\rangle \tag{4.35}$$

Da ricordarsi é come in Meccanica Classica vale la seguente relazione per la funzione dinamica A ("{}" parentesi di Poisson)

$$\frac{d}{dt}A = \frac{\partial A}{\partial t}+\{A,H\} \qquad \text{con} \qquad \{A,B\} = \sum_{l=1}^{N}\left(\frac{\partial A}{\partial q_l}\frac{\partial B}{\partial p_l}-\frac{\partial B}{\partial q_l}\frac{\partial A}{\partial p_l}\right) \tag{4.36}$$

Ricordo inoltre che

$$\frac{\partial H}{\partial q_l} = -\dot{p}_l \qquad \frac{\partial H}{\partial p_l} = \dot{q}_l \qquad \{q_i,p_k\} = \delta_{ik} \tag{4.37}$$

Caso ii) potenziale armonico

$$\begin{aligned}\left[\hat{H},\hat{p}_x\right] &= \left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m}+\frac{K}{2}\hat{x}^2,\hat{p}_x\right]=\left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m},\hat{p}_x\right]+\left[\frac{K}{2}\hat{x}^2,\hat{p}_x\right]=\left[\frac{K}{2}\hat{x}^2,\hat{p}_x\right]=\\ &= \hat{x}\left[\frac{K}{2}\hat{x},\hat{p}_x\right]+\left[\frac{K}{2}\hat{x},\hat{p}_x\right]\hat{x}=i\hbar K\hat{x} \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}\left[\hat{H},\hat{x}\right] &= \left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m}+\frac{K}{2}\hat{x}^2,\hat{x}\right]=\left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m},\hat{x}\right]+\left[\frac{K}{2}\hat{x}^2,\hat{x}\right]=\left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m},\hat{x}\right]=\\ &= \hat{p}_x\left[\frac{\hat{p}_x}{2m},\hat{x}\right]+\left[\frac{\hat{p}_x}{2m},\hat{x}\right]\hat{p}_x=-\frac{i\hbar}{m}\hat{p}_x \end{aligned} \tag{4.41}$$

Applichiamo il teorema di Ehrenfest

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{x}\rangle=\left\langle\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{x}\right]\right\rangle=\frac{\langle\hat{p}_x\rangle}{m} \tag{4.42}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{p}_x\rangle=\left\langle\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{p}_x\right]\right\rangle=-K\langle\hat{x}\rangle \tag{4.43}$$

Caso iii) potenziale Coulombiano

$$\begin{aligned}\left[\hat{H},\hat{p}_x\right] &= \left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m}-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{1}}{x},\hat{p}_x\right]=\left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m},\hat{p}_x\right]+\left[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{1}}{x},\hat{p}_x\right]=\left[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{1}}{x},\hat{p}_x\right]=\\ &= \frac{e^2 i\hbar}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{1}}{x^2} \end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}\left[\hat{H},\hat{x}\right] &= \left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m}-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{1}}{x},\hat{x}\right]=\left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m},\hat{x}\right]+\left[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{1}}{x},\hat{x}\right]=\left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m},\hat{x}\right]=\\ &= \hat{p}_x\left[\frac{\hat{p}_x}{2m},\hat{x}\right]+\left[\frac{\hat{p}_x}{2m},\hat{x}\right]\hat{p}_x=-\frac{i\hbar}{m}\hat{p}_x \end{aligned} \tag{4.45}$$

Applichiamo il teorema di Ehrenfest

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{x}\rangle=\left\langle\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{x}\right]\right\rangle=\frac{\langle\hat{p}_x\rangle}{m} \tag{4.46}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{p}_x\rangle=\left\langle\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{p}_x\right]\right\rangle=-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left\langle\frac{\hat{1}}{x^2}\right\rangle \tag{4.47}$$

4.13 Esercizio # 12: Confinamento di un elettrone

Un elettrone é confinato in una scatola unidimensionale di lunghezza $L = 0.10\,\mathrm{nm}$. Trovare l'incertezza minima sulla sua velocità.

SOLUZIONE: $5.8 \times 10^{5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

4.14 Esercizio # 13: Probabilità

Una particella di un sistema unidimensionale infinito é descritta dalla funzione d'onda $\psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$. Calcolare la probabilità di trovare la particella nell'intervallo $[-a, a]$, sapendo che l'integrale gaussiano $F(y) = \int\limits_{-\infty}^{y>0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ é riportato in tabella, es. $F(0.53) = 0.7019$.

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9884	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

SOLUZIONE: 84.14%

4.15 Esercizio # 14: Probabilità massima

Una particella di un sistema unidimensionale infinito é descritta dalla funzione d'onda $\psi(x) = xe^{\frac{-x^2}{2a^2}}$. Dove si ha probabilità massima di trovare la particella? Quale sarà il valore di aspettazione per l'operatore $\hat{x}$?

SOLUZIONE: $\pm a$, 0

4.16 Esercizio # 15: Probabilità 3D

La funzione di stato fondamentale dell'atomo di Idrogeno é

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{-br} \tag{4.48}$$

dove $b = 53^{-1}$ pm^{-1}. Calcolare: i) la densità di probabilità di trovare l'elettrone sul nucleo, ii) la densità di probabilità di trovare l'elettrone a una distanza di 53 pm dal nucleo, iii) la probabilità di trovare l'elettrone dentro sfera di raggio 53 pm dal nucleo, iv) Se definiamo il raggio atomico come quel raggio che racchiude il 90% della probabilità di trovare l'elettrone, quanto vale il raggio atomico dell'Idrogeno nel suddetto stato?

SOLUZIONE: $2.1 \times 10^{-6}\,\mathrm{pm}^{-3}$, $2.9 \times 10^{-7}\,\mathrm{pm}^{-3}$, 32.3%, 141 pm

4.17 Esercizio # 16: Probabilità

Una particella é confinata nella regione $[0, +\infty)$ e il suo stato é descritto dalla funzione d'onda $\psi(x) = e^{-2x}$. Determinare la probabilità che la particella non si trovi nell'intervallo $[0, 1]$.

SOLUZIONE:

Normalizziamo la funzione d'onda

$$\int_0^{+\infty} e^{-4x} dx = \frac{1}{4} \tag{4.49}$$

Quindi la funzione d'onda normalizzata é:

$$\psi(x) = 2e^{-2x} \tag{4.50}$$

La probabilità di non trovarsi nell'intervallo $[0, 1]$ é:

$$\int_1^{+\infty} 4e^{-4x} dx = \left[\frac{4e^{-4x}}{-4}\right]_1^{+\infty} = \left[e^{-4x}\right]_{+\infty}^{1} = e^{-4} = 1.83\% \tag{4.51}$$

4.18 Esercizio # 17: Probabilità

Una particella di massa m ha funzione d'onda:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \tag{4.52}$$

Trovare la densità di probabilità $\rho(x)$ e la densità di corrente di probabilità $j(x)$. L'equazione di continuità é soddisfatta?

SOLUZIONE: $\frac{1}{2\pi\hbar}$, $\frac{p}{2\pi\hbar m}$

4.19 Esercizio # 18: Probabilità e principio di indeterminazione

Una particella libera di muoversi lungo l'asse x ha funzione d'onda:

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2a}} & \textbf{se } |x| \leq a \\ 0 & \textbf{se } |x| > a \end{cases} \tag{4.53}$$

Calcolare la densità di probabilità di trovare la particella con impulso p e disegnare tale distribuzione di probabilità, discutendola in relazione alla corrispondente distribuzione spaziale ed al principio di indeterminazione.

SOLUZIONE

La funzione d'onda é già normalizzata.
Troviamo la funzione d'onda nello spazio degli impulsi.

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{p}{\hbar}x} \psi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-a}^{a} e^{-i\frac{p}{\hbar}x} \sqrt{\frac{1}{2a}} dx = \tag{4.54}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sqrt{\frac{1}{2a}} \left[\frac{e^{-i\frac{p}{\hbar}x}}{-ip/\hbar} \right]_{-a}^{a} = \sqrt{\frac{\hbar}{\pi a}} \frac{1}{p} \sin\left(\frac{pa}{\hbar}\right) \tag{4.55}$$

La densità di trovare la particella con impulso p é data da

$$P(p) = |\phi(p)|^2 = \frac{\hbar}{\pi a} \frac{1}{p^2} \sin^2\left(\frac{pa}{\hbar}\right) \tag{4.56}$$

Il massimo centrale é contenuto fra i primi due valori in cui l'argomento del seno si annulla, dati da

$$\frac{pa}{\hbar} = \pm\pi \tag{4.57}$$

La larghezza é dunque dell'ordine di $\Delta p = \frac{2\pi\hbar}{a}$. Questa puó essere intesa come una stima dell'indeterminazione sull'impulso della particella, mentre l'indeterminazione Δx sulla posizione é dell'ordine della larghezza della ψ, data da $2a$. Cosí

$$\Delta x \Delta p \approx 4\pi\hbar \tag{4.58}$$

in accordo col principio di indeterminazione.