Parte II

Lezione 7

Meccanica Quantistica Generale

7.1 Formule

Postulato # 1

Sitema fisico $\rightarrow$ Spazio di Hilbert
Stati $\rightarrow$ vettori
Quantità fisiche $\rightarrow$ operatori lineari.

Postulato # 2

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = \frac{\langle\psi| \hat{A} |\psi\rangle}{\langle\psi |\psi\rangle} \tag{7.1}$$

Ne consegue che $\hat{A}$ deve essere hermitiano.

Postulato # 3

L'operazione di misura contrae lo stato.

7.2 Esercizio # 1: Notazione di Dirac parte prima

Riscrivere alla Dirac le seguenti espressioni.

$$f(x) = g(x) \tag{7.2}$$

$$c = \int_{-\infty}^{+\infty} g^{\star}(x)h(x)dx \tag{7.3}$$

$$\sum_{n}^{\textbf{tutti i valori possibili}} \varphi_n(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^{\star}(x')f(x')dx' \tag{7.4}$$

$$\psi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\varphi^{\star}(x') \tag{7.5}$$

$$h(x) \int_{-\infty}^{+\infty} h^{\star}(x')g(x')dx' \tag{7.6}$$

SOLUZIONE:

7.3 Esercizio # 2: Notazione di Dirac parte seconda

Scrivere in rappresentazione delle coordinate le seguenti relazioni. Dato

$$\hat{O} \equiv |\varphi\rangle \langle\psi| \tag{7.7}$$

$$\langle f| \hat{O} \tag{7.8}$$

$$\hat{O} |f\rangle \tag{7.9}$$

$$\langle f| \hat{O} |f\rangle \tag{7.10}$$

$$\langle f| \hat{O} |\psi\rangle \tag{7.11}$$

SOLUZIONE:

7.4 Esercizio # 3: Hermitiana coniugazione $\hat{O}^\dagger$

Calcolare l'hermitiano coniugato di ciascuna espressione:

$$a\hat{A} + b\hat{B} \tag{7.12}$$

$$\hat{A}\hat{B} \tag{7.13}$$

dove a e b sono coefficienti complessi.

SOLUZIONE: $a^\star \hat{A}^\dagger + b^\star \hat{B}^\dagger$, $\hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$.

7.5 Esercizio # 4: Rappresentazione matriciale di un operatore

Considerare uno spazio di Hilbert definito da tre vettori ortonormali.

$$|1\rangle \qquad |2\rangle \qquad |3\rangle \tag{7.14}$$

Sia dato

$$|\alpha\rangle \equiv i\,|1\rangle - 2\,|2\rangle - i\,|3\rangle \qquad |\beta >\equiv i\,|1\rangle + 2\,|3\rangle \tag{7.15}$$

i) Costruire $\langle\alpha|$ e $\langle\beta|$ in termini della base duale.
ii) Trovare $\langle\alpha\,|\beta\rangle$ e $\langle\beta\,|\alpha\rangle$ e verificare la relazione

$$\langle\alpha\,|\beta\rangle = (\langle\beta\,|\alpha\rangle)^\star \tag{7.16}$$

iii) Trovare i nove elementi di matrice dell'operatore:

$$\hat{A} \equiv |\alpha\rangle\,\langle\beta| \tag{7.17}$$

e costruire la matrice $\mathcal{A}$ che rappresenta l'operatore $\hat{A}$ sulla base $\{|1\rangle\,,|2\rangle\,,|3\rangle\}$. L'operatore $\hat{A}$ è hermitiano?

SOLUZIONE:
i) $\langle\alpha| = -i\,\langle 1| - 2\,\langle 2| + i\,\langle 3|$, $\langle\beta| = -i\,\langle 1| + 2\,\langle 3|$,
ii) $\langle\alpha\,|\beta\rangle = 1 + 2i$, $\langle\beta\,|\alpha\rangle = 1 - 2i$,
iii) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 2i & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -2i \end{pmatrix}$, l'operatore lineare $\hat{A}$ non è hermitiano in quanto non è rappresentato da una matrice hermitiana.

7.6 Esercizio # 5: Cambio di base

L'operatore $\hat{A}$ è rappresentato dalla seguente matrice nella base ortonormale $\{|f_1\rangle, |f_2\rangle, |f_3\rangle\}$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{7.18}$$

Trovare una forma matriciale per $\hat{A}$ usando la base $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle, |g_3\rangle\}$ **dove**

$$|g_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|f_1\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}|f_2\rangle \tag{7.19}$$

$$|g_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|f_1\rangle - i\frac{1}{\sqrt{2}}|f_2\rangle \tag{7.20}$$

$$|g_3\rangle = |f_3\rangle \tag{7.21}$$

SOLUZIONE:

7.7 Esercizio # 6: Misure successive

Un operatore $\hat{A}$ rappresenta una osservabile A ed ha due autostati normalizzati $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ con autovalori a_1 e a_2 rispettivamente. Analogamente un operatore $\hat{B}$ rappresenta una osservabile B ed ha due autostati normalizzati $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$ con autovalori b_1 e b_2 rispettivamente. Gli autostati dei due operatori sono legati dalle relazioni:

$$|\psi_1\rangle = \frac{3\,|\phi_1\rangle + 4\,|\phi_2\rangle}{5} \qquad |\psi_2\rangle = \frac{4\,|\phi_1\rangle - 3\,|\phi_2\rangle}{5} \tag{7.22}$$

i) Se l'osservabile A è misurata ed a_1 è stato ottenuto. Trovare lo stato del sistema <u>subito</u> dopo la misura.
ii) Se <u>subito</u> dopo aver misurato A, B è misurato: quali sono i possibili esiti della misura? Con quali probabilità?
iii) <u>Immediatamente</u> dopo aver misurato B, A è misurato di nuovo. Trovare la probabilità di ottenere come esito della misura a_1 se non si conosce il risultato della misura di B.

SOLUZIONE:
i) $|\psi_1\rangle$,
ii) esiti misura: b_1 con prob. $\frac{9}{25}$, b_2 con prob. $\frac{16}{25}$,
iii) prob. di avere $a_1 = \frac{9}{25}\frac{9}{25} + \frac{16}{25}\frac{16}{25} = 0.5392$.

7.8 Esercizio # 7: Momento magnetico del Deutone

Il Deutone é uno stato legato di Protone e Neutrone. Sperimentalmente si osserva che il momento magnetico del deutone é $0.857012\mu_N$ (μ_N é il momento magnetico nucleare). Evidenze sperimentali fanno supporre che il Deutone si trovi in una sovrapposizione di due stati $\left|{}^3S_1\right\rangle$ e $\left|{}^3D_1\right\rangle$. Sapendo che

$$\left\langle {}^3S_1\right| \hat{\mu} \left|{}^3S_1\right\rangle = 0.8798\mu_N \qquad \left\langle {}^3D_1\right| \hat{\mu} \left|{}^3D_1\right\rangle = 0.3101\mu_N \tag{7.23}$$

e

$$\left\langle {}^3S_1\right| \hat{\mu} \left|{}^3D_1\right\rangle = 0 \tag{7.24}$$

dove $\hat{\mu}$ é l'operatore momento magnetico, trovare con che probabilitá il Deutone é nello stato $\left|{}^3S_1\right\rangle$.

SOLUZIONE: 96%

7.9 Esercizio # 8: Sistema a due livelli

L'Hamiltoniana per un sistema a due livelli è

$$\hat{H} \equiv \epsilon \left(|1\rangle \langle 1| - |2\rangle \langle 2| + |1\rangle \langle 2| + |2\rangle \langle 1| \right) \tag{7.25}$$

dove $\{|1\rangle , |2\rangle\}$ formano una base ortonormale ed ϵ è un numero reale (dimensionalmente una energia).
i) Trovare la matrice $\mathcal{H}$ che rappresenta $\hat{H}$ rispetto alla base $\{|1\rangle , |2\rangle\}$.
ii) Trovare autovalori e autovettori di $\mathcal{H}$ ed esprimerli come combinazione lineare di $|1\rangle$ e $|2\rangle$.

SOLUZIONE:
i) $\mathcal{H} = \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,
ii) autovalori: $\pm\sqrt{2}\epsilon$, autovettori: $|\psi_\pm >= C \left[|1\rangle + \left(\pm\sqrt{2} - 1 \right) |2\rangle \right]$.