OPTIMIZACIÓN II
Práctica 6

Francisco J. Aragón Artacho
Dpto. Matemáticas, Universidad de Alicante

7-8 de abril de 2022

En esta práctica trabajaremos con la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida para $x \in \mathbb{R}^n$ por

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x_j^2.$$

Crea un programa en Python llamado `Pr6.m` donde se realice lo siguiente:

1. Calcula (con lápiz y papel) el gradiente de f, su matriz hessiana y el único punto crítico de f. Define dentro del *script* la función f, una función g con su gradiente y una función H que devuelva su matriz hessiana, para cualquier x. Evita si puedes cualquier tipo de bucle de tipo `for/while` para definirlas. ¿Es f convexa?

2. Crea una función llamada `BFGS` cuyos argumentos de entrada sean `f`, `g`, `x0`, `D0` e `iter`. La función debe calcular `iter` iteraciones del método quasi-Newton BFGS con búsqueda lineal, eligiendo el tamaño de paso mediante la función `Wolfe` de la Práctica 3. La función debe devolver $\mathtt{x}_{\mathtt{iter}}$ y un vector `v` donde se almacene el valor de la función en todas iteraciones calculadas, es decir, $\mathtt{v} = [f(\mathtt{x}_0), f(\mathtt{x}_1), \ldots, f(\mathtt{x}_{\mathtt{iter}})]^T \in \mathbb{R}^{\mathtt{iter}}$.

3. Aplica la función `BFGS` para calcular 125 iteraciones del método tomando como punto inicial $\mathtt{x0=(10,20,30,...,990,1000)}^T \in \mathbb{R}^{100}$ y `D0` igual a la matriz identidad. Crea una figura con tres gráficas. En todas las gráficas se mostrará el valor de las iteraciones k en el eje horizontal. En la gráfica superior se representará el valor de $f(\mathtt{x}_\mathtt{k})$, en la del centro $\frac{f(\mathtt{x}_{\mathtt{k+1}})}{f(\mathtt{x}_\mathtt{k})}$, mientras que en la inferior se dibujará $\frac{f(\mathtt{x}_{\mathtt{k+1}})}{f(\mathtt{x}_\mathtt{k})^2}$. En la primera gráfica utiliza una escala logarítmica en el eje vertical para visualizar mejor los valores de la función (usa el comando `plt.semilogy()` o bien `plt.yscale("log")`). En base a la figura mostrada, ¿converge $f(\mathtt{x}_\mathtt{k})$ al mínimo global de f? ¿Con qué tasa?

4. Repite el experimento del apartado anterior tomando como matriz `D0` una matriz formada por unos. Responde a las mismas preguntas y compara el resultado, explicando a qué se deben las diferencias.

5. (OPCIONAL) Demuestra que si f es fuertemente convexa y elegimos el tamaño de paso usando `backtracking`, todas las matrices generadas serán definidas positivas siempre que la matriz inicial lo sea. ¿Podríamos haber elegido el tamaño de paso para la función de esta práctica usando `backtracking`? NOTA: Puedes entregar este apartado escrito a mano y escaneado, siempre que esté bien presentado y sea legible.