# OPTIMIZACIÓN II
# Práctica 2

Francisco J. Aragón Artacho
Dpto. Matemáticas, Universidad de Alicante

10-11 de marzo de 2022

*La función de Rosenbrock*[1] *es una función que se utiliza habitualmente para testar algoritmos de optimización. La función viene definida por*

$$f(x,y) = 100\left(y - x^2\right)^2 + (1-x)^2.$$

*Se comprueba fácilmente que* $x^\star = (1,1)^T$ *es el único mínimo global de esta función (además, es su único punto crítico).*

Crear un programa en Python llamado `Pr2.py` que realice lo siguiente:

1. Dibuje las curvas de nivel[2] de la función de Rosenbrock en el intervalo $[-2.5, 2.5] \times [-3, 6]$ con valores de la función de 0 a 500 con incrementos de 20. Justifica si $f$ es convexa o no.

2. Cree una función llamada `backtracking` cuyos argumentos sean `f`, `g`, `xk`, `pk`, `alpha`, `rho` y `c`. Por defecto, `alpha=1`, `rho=0.5`, `c=1e-4`. El argumento `g` corresponde al gradiente de cualquier función `f`. Este algoritmo, visto en la clase de teoría, debe devolver un valor de alpha que verifique la condición de Armijo en `xk`.

3. Cree un bucle que ejecute 500 iteraciones del método de descenso más rápido con *backtracking* y punto semilla $x_0 = (-0.1, -0.4)^T$. Muestre en pantalla $f(x_0)$, $x_{500}$ y $f(x_{500})$. El bucle debe añadir al gráfico de las curvas de nivel del apartado 1 el resultado de representar cada iteración con un punto negro y de unir con un segmento verde cada par de iteraciones consecutivas. Haga zoom estableciendo el eje $x$ en [-0.5,1.1] y el eje $y$ en [-0.5,1.1] con el comando `plt.axis`.

4. Cree un bucle que ejecute 5 iteraciones del método de Newton puro con punto semilla $x_0 = (-0.1, -0.4)^T$. Muestre en pantalla $x_5$ y $f(x_5)$. El bucle debe añadir al gráfico de las curvas de nivel el resultado de representar cada iteración con un punto negro y de unir con un segmento rojo cada par de iteraciones consecutivas. El programa debe guardar la figura en el fichero `Pr2.png` (usar el comando `plt.savefig`).

5. Basándote en el valor de la matriz hessiana en el punto $(1,1)^T$, explica en un comentario a qué puede deberse la convergencia lenta del método de descenso más rápido.

[1] Fue introducida por Howard H. Rosenbrock en el artículo "An automatic method for finding the greatest or least value of a function", The Computer Journal 3 (1960), 175–184.

[2] La función de Rosenbrock se conoce también como la "función banana" por sus curvas de nivel.

6. (OPCIONAL) Los métodos quasi-Newton toman direcciones de búsqueda de la forma $p_k := -B_k^{-1}\nabla f(x_k)$, siendo $B_k$ una aproximación de $\nabla^2 f(x_k)$. Como sabemos que

$$\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1}) \approx \nabla^2 f(x_k)(x_k - x_{k-1}),$$

cobra sentido, pues, exigir que $B_k$ verifique aproximadamente la llamada *condición de curvatura*

$$\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1}) \approx B_k(x_k - x_{k-1}) \iff B_k^{-1}\left(\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1})\right) \approx x_k - x_{k-1}.$$

En este ejercicio tomaremos $B_k^{-1} := \alpha_k I$, siendo $\alpha_k$ el valor que minimize el error cometido en la aproximación anterior, es decir,

$$\alpha_k = \operatorname*{argmin}_{\alpha\in\mathbb{R}} \left\| \alpha\left(\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1})\right) - (x_k - x_{k-1}) \right\|, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Este proceso dará lugar al método iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Para $k = 0$, este proceso no sería válido (al no estar definido $x_{-1}$), por lo que tomaremos el valor de $\alpha_0$ mediante *backtracking* usando la dirección del método del gradiente. Se pide: calcular 45 iteraciones, dibujarlas (con segmentos de color azul) y comparar el resultado con el obtenido en los apartados 3 y 4.