Universität Koblenz
Institut für integrierte Naturwissenschaften
Abteilung Physik

„Faltung und Korrelation kontinuierlicher Signale“

Seminar „Digitale Signalverarbeitung“
Dr. Merten Joost

von
Kristina Weyerhäuser
Matrikelnr.: 201210893
Koblenz, den 10.06.2005

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Faltung und Korrelation gehören zu den grundlegenden Operationen der Signalverarbeitung. Es handelt sich um mathematische Methoden der Kombination zweier Signale, um ein drittes Signal zu erzeugen.
Die Faltung ermöglicht es, jedes Ausgangssignal eines Systems zu bestimmen, wenn ein bestimmtes Signal bekannt ist.
Eng mit der Faltung verbunden ist die Korrelation. In vielen Anwendungen zur Verarbeitung von Signalen ist es hilfreich und häufig auch notwendig, ein Maß für die Ähnlichkeit zweier Signale bestimmmen zu können. Man bezeichnet dieses Maß auch als den Grad der Korrelation, der zwischen diesen beiden Signalen vorhanden ist.

2 Impulsantwort

Für eine Systembeschreibung benutzt man gerne spezielle " Testfunktionen ", allen voran den Dirac-Impuls δ(t) oder auch Dirac-Puls.
Regt man ein LTI-System mit $\delta(t)$ an, so ergibt sich ein spezielles Ausgangssignal, nämlich die Stoßantwort oder Impulsantwort $h(t)$.

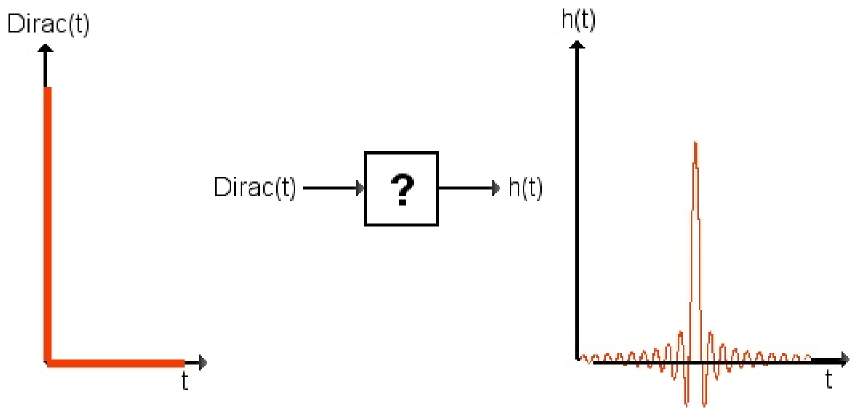

Abbildung 1: Dirac-Impuls und daraus resultierende Impulsantwort

Die Impulsantwort beschreibt das System vollständig, es muss daher mit $h(t)$ auch die Reaktion des LTI-Systems auf eine beliebige Anregung $x(t)$ berechnet werden können. Tatsächlich ist dies möglich, nämlich durch die Faltungsoperation.

3 Faltung kontinuierlicher Signale

3.1 Das Faltungsintegral

Die Faltung (engl. convolution) ist eine der Multiplikation verwandte Rechenvorschrift für zwei Funktionen.
Legt man an ein kontinuierliches LTI-System mit der Impulsantwort $h(t)$ ein Eingangssignal $x(t)$, dann ist sein Ausgangssignal $y(t)$ gegeben durch den Ausdruck:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{1}$$

Dieses Intergral heißt Faltungsintergral und man sagt, das Eingangssignal $x(t)$ wird mit der Impulsantwort $h(t)$ gefaltet (in Zeichen: $x(t) * h(t)$).

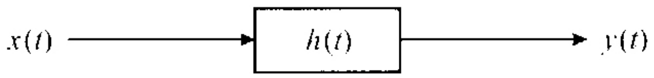

Abbildung 2: Eingangs- und Ausgangssignal eines Systems mit der Impulsantwort $h(t)$

Allgemeiner formuliert wird die Faltung zweier beliebiger Signale $x_1(t)$ und $x_2(t)$ definiert als:

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \tag{2}$$

Die Faltung ist eine grundlegende Beziehung in der Theorie der zeitkontinuierlichen Systeme. Mit ihr lässt sich das Ausgangssignal $y(t)$ für ein beliebiges Eingangssignal $x(t)$ berechnen, falls die Impulsantwort $h(t)$ des LTI-Systems bekannt ist.

3.2 Der Faltungsprozess

3.2.1 Graphisch

Gegeben: Eingangsignal $x(t)$ und Impulsantwort $h(t)$
Gesucht: Ausgangssignal $y(t)$
Das Ziel ist es, einen Ausdruck zu finden, um das Ausgangssignal zu einem beliebigen Zeitpunkt t zu berechnen.
Zuerst wird die unabhängige Variable, die genutzt wird, um durch das Eingangssignal und die Impulsantwort zu laufen, verändert. Das bedeutet, t wird durch τ ersetzt. $x(t)$ und $h(t)$ werden somit zu $x(\tau)$ bzw. $h(\tau)$. Der Variablenname muss deswegen geändert werden, weil t schon den Zeitpunkt darstellt, zu dem das Ausgangssignal berechnet wird. Der nächste Schritt ist das Spiegeln (Falten!) der Impulsantwort an der y-Achse, so dass sie zu $h(-\tau)$ wird. Verschiebt man die gespiegelten Impuls-Antwort an die Stelle t, wird der Ausdruck zu $h(t-\tau)$. Das Eingangssignal wird dann mit der gespiegelten und verschobenen Impulsantwort gewichtet, indem die beiden multipliziert werden, d.h. $x(\tau)\cdot h(t-\tau)$. Den Funktionswert des Ausgangssignals an der Stelle t erhält man, indem man dieses Produkt über alle τ, also von $-\infty$ bis $+\infty$, integriert.

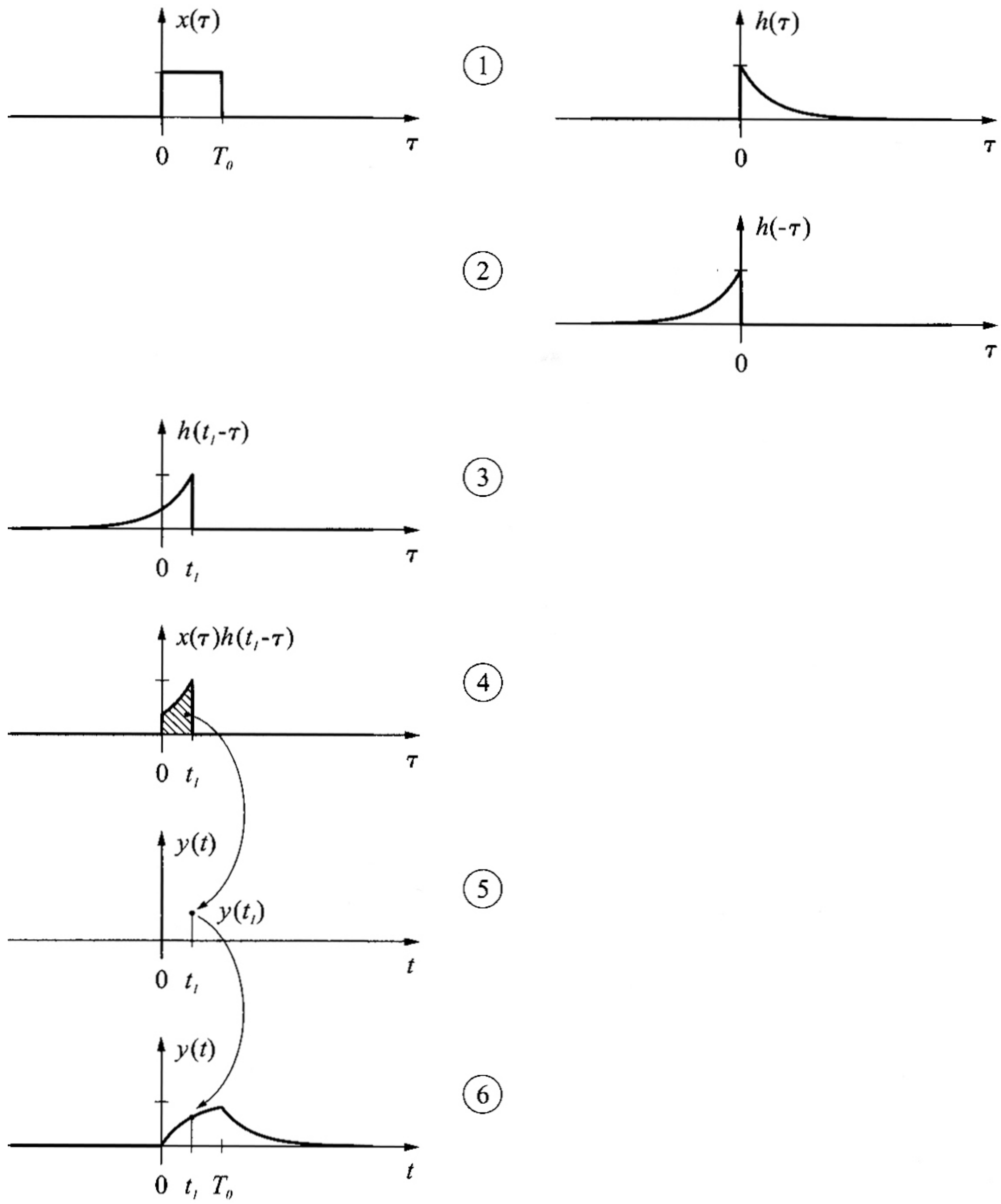

Abbildung 3: Illustration des Faltungsprozesses

Das Ausgangssignal wird ermittelt, indem t von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert wird, d.h. man lässt $h(t-\tau)$ zeichnerisch von links nach rechts wandern und erhält somit das Signal $y(t)$.

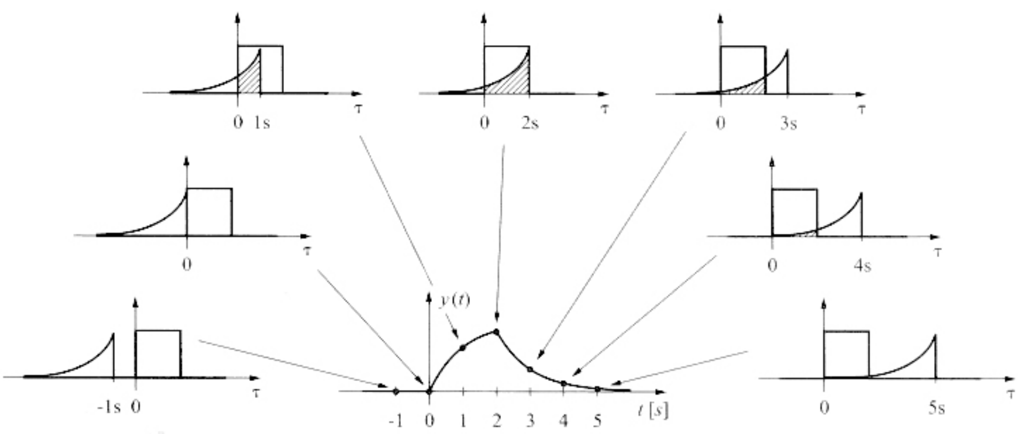

Abbildung 4: Zusammenfassung des Faltungsprozesses

3.2.2 Analytisch

Analytisch findet man das Ausgangssignal wie folgt:
Die Impulsantwort des Systems ist gegeben durch $h(t) = \frac{1}{RC}u(t)e^{\frac{-1}{RC}}$, wobei $u(t)$ die Schrittfunktion und RC die Zeitkonstante ist. Das Eingangssignal ist ein kausaler Rechteckimpuls, gegeben durch $x(t) = U \cdot rect\left(\frac{t-T_0/2}{T_0}\right)$, mit dem Scheitelwert U und der Impulsdauer $T_0 = 2RC$.
Daraus folgt:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U \cdot rect\left(\frac{\tau - T_0/2}{T_0}\right)\frac{1}{RC}u(t-\tau)e^{-\frac{t-\tau}{RC}}d\tau$$

Für $t < 0$ überlappen sich die beiden Funktionen $x(t)$ und $h(t-\tau)$ nicht, daher gilt:

$$y(t) = 0frt < 0.$$

Im Bereich $0 \leq t \leq T_0$ ist die Produktefunktion $x(\tau)h(t-\tau)$ nur im Intervall $0 < \tau < t$ ungleich Null. Die Integrationsgrenzen sind deshalb durch 0 und t gegeben. Außerdem sind in diesem Intervall die Rechteckfunktion $rect\left(\frac{\tau-t_0/2}{T_0}\right)$ und die Schrittfunktion $u(t-\tau)$ konstant gleich 1 und man kann deshalb schreiben:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t U\frac{1}{RC}e^{-\frac{t-\tau}{RC}}d\tau \\ &= \left[Ue^{-\frac{t-\tau}{RC}}\right]_0^t \\ &= U\left[1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right] \end{aligned}$$

Im Bereich $T_0 < t$ ist die Produktefunktion $x(\tau)h(t-\tau)$ oberhalb von $\tau = T_0$ Null. Die obere Integrationsgrenze ist infolgedessen durch T_0 gegeben. Die Rechteckfunktion und die Schrittfunktion bleiben im Intervall $0 < \tau < T_0$ konstant gleich 1 und man kann daher schreiben:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{T_0} U\frac{1}{RC}e^{-\frac{t-\tau}{RC}}d\tau \\ &= \left[Ue^{-\frac{t-\tau}{RC}}\right]_0^{T_0} \\ &= U\left[e^{-\frac{t-T_0}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}}\right] \\ &= U\left[e^{\frac{T_0}{RC}} - 1\right]e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

Kompliziertere Signale können auf die gleiche Art und Weise behandelt werden, jedoch kann die mathematische Komplexität schnell unhandlich werden. Eine Möglichkeit ist es daher, eines der beiden Signale in einfachere Komponenten aufzuspalten und diese einzeln mit dem anderen Signal zu falten. Die daraus resultierenden Signale können dann wieder addiert werden, um auf die Lösung des ursprünglichen Problems zu kommen.

3.3 Eigenschaften der Faltung

- Kommutativität
  Die Faktoren eines Faltungsproduktes dürfen vertauscht werden:
  $f * g = g * f$

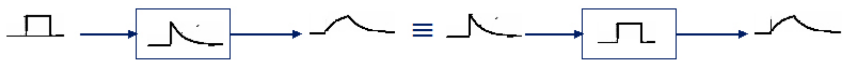

Abbildung 5: Kommutativität

Die Antwort eines LTI-Systems mit der Stoßantwort $h(t)$ auf ein Signal $x(t)$ ist identisch mit der Antwort eines Systems mit der Stoßantwort $x(t)$ auf das Signal $h(t)$.

- Assoziativität
  Sind 3 Funktionen miteinander zu falten, so faltet man zuerst 2 von ihnen miteinander und dann das dabei entstehende Faltungsprodukt mit der 3. Funktion:
  $(f * g) * h = f * (g * h) = f * g * h$

Abbildung 6: Assoziativität

- Distributivität
  Das Faltungsprodukt einer Funktion $f(t)$ mit der Summe der Funktionen $g(t)$ und $h(t)$ ist gleich der Summe der beiden Faltungsprodukte $f(t) * g(t) undf(t) * h(t)$:
  $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

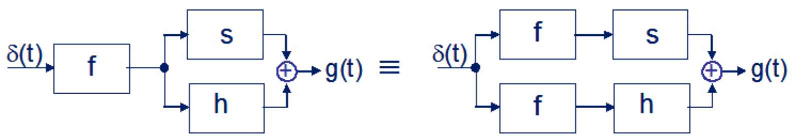

Abbildung 7: Distributivität

Das neutrale Element der Faltung ist der Dirac-Impuls:

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \tag{3}$$

Die Faltung von $x(t)$ mit dem verschobenen Dirac-Impuls bewirkt lediglich eine Zeitverschiebung von $x(t)$:

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \tag{4}$$

3.4 Faltung und Frequenzgang

Legt man nun an ein System die komplexe Exponentialfunktion $e^{j2\pi ft}$ als Eingangssignal an, dann erhält man als Ausgangssignal:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j2\pi f(t-\tau)} d\tau = e^{j2\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \tag{5}$$

D.h., das Ausgangssignal $y(t)$ ist gleich dem Eingangssignal $e^{j2\pi ft}$ multipliziert mit dem komplexen Faktor

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} \tag{6}$$

Den komplexen Faktor $H(f)$ nennt man Frequenzgang des zeitkontinuierlichen LTI-Systems und er ist, wie man in obiger Gleichung sieht, gleich der Fourier-Transformierten der Impulsantwort $h(t)$. Die inverse Fourier-Transformierte liefert daraus wiederum die Impulsantwort, d.h. $h(t)$ und $H(f)$ bilden ein Transformationspaar:

$$h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet H(f). \tag{7}$$

Der Zusammenhang zwischen der Übertagungsfunktion $H(s)$ und dem Frequenzgang $H(f)$ eines zeitkontinuierlichen LTI-Systems ist gemäß der Laplace-Transformation wie folgt gegeben:

$$H(f) = H(s)|_{s=j2\pi f}. \tag{8}$$

In Worten: Der Frequenzgang ist gleich der Übertragungsfunktion ausgewertet auf der imaginären Achse der s-Ebene.

3.5 Die Faltungstheoreme

Um die Faltung im Frequenzbereich zu betrachten, wird das Faltungsintegral Fourier-Transformiert:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right] e^{-j2\pi ft} dt && (9) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j2\pi ft} dt \right] d\tau && (10) \\ & && (11) \end{aligned}$$

Die eckige Klammer in der zweiten Zeile erkennen wir als Fourier-Transformierte des Signals $h(t-\tau)$. Gemäss dem Zeitverschiebungs-Theorem ist die Fourier-Transformierte eines um τ verzögerten Signals $h(t)$ gleich $H(f)$ multipliziert mit dem Phasenfaktor $e^{-j2\pi f\tau}$:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)H(f)e^{-j2\pi f\tau} d\tau && (12) \\ &= H(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau && (13) \\ & && (14) \end{aligned}$$

Das Integral indentifizieren wir als Fourier-Transformierte von $x(t)$, somit:

$$Y(f) = H(f)X(f) \tag{15}$$

Gleichung 15 sagt aus, dass das Spektrum des Ausgangssignals eines LTI-Systems gleich dem Spektrum des Eingangssignals multipliziert mit dem Frequenzgang des LTI-Systems ist.
Das Eingangsspektrum wird also durch den Frequenzgang verformt. Aus diesem Grund nennt man LTI-Systeme auch lineare Filter.
Wendet man die inverse Fourier-Transformation auf das Produkt $H(f)X(f)$ an, so erhält man wiederum die Faltung; die Faltung und die Multiplikation bilden also ein Transformationspaar:

$$h(t) * x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet H(f) \cdot X(f) \tag{16}$$

Aus der Dualität folgt:

$$h(t) \cdot x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet H(f) * X(f) \tag{17}$$

Die beiden Theoreme 16 und 17 werden Faltungstheoreme genannt. Sie stellen zwei grundlegende Beziehungen in der Systemtheorie dar.
Sie sagen aus, dass eine Faltung im Zeitbereich einer Multiplikation im Frequenzbereich und eine Multiplikation im Zeitbereich einer Faltung im Frequenzbereich entspricht.
Das Faltungstheorem zeigt einen auf den ersten Blick aufwendigen Weg zur Berechnung der Faltung: Fourier-Transformation der Signale - Produktbildung - Rücktransformation. Bei

digitalen Signalen ist dieser "schnelle Faltung" genannte Umweg oft vorteilhaft, da mit der schnellen Fourier-Transformation (FFT, Fast Fourier Transformation) die Hin- und Rücktransformation sehr effizient und damit schnell vollzogen werden können.

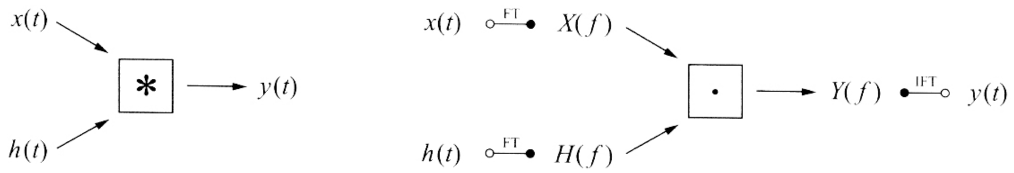

Abbildung 8: Verschiedene Wege zur Durchführung der Faltung

3.6 Die Faltungsoperation als Filter

Neben der Systembeschreibung gibt es noch andere Anwendungsgebiete der Faltung, zum Beispiel die Glättung eines Signals:

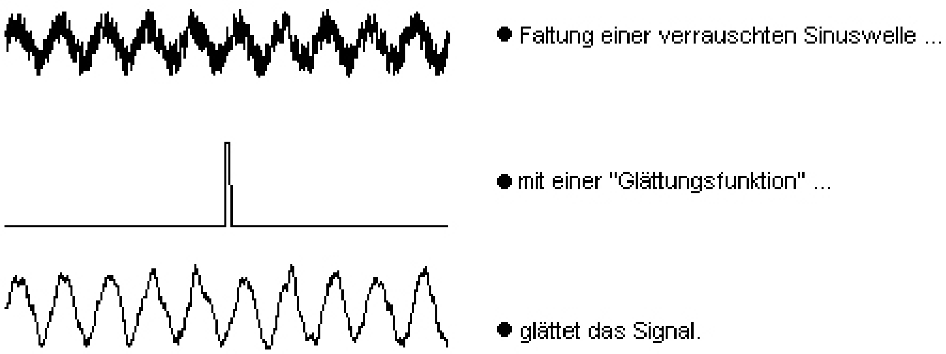

Abbildung 9: Glättung eines Signals durch Faltung

Abbildung 9 zeigt, wie eine verrauschte Sinuswelle geglättet werden kann, indem sie mit einer Rechtecks-Glättungs-Funktion gefaltet wird.
Die Glättungseigenschaft führt zur Nutzung der Faltung zum digitalen Filtern.

4 Korrelation

4.1 Die Korrelationsfunktion

Unter der Korrelation zweier Signale versteht man die Integraloperation:

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)dt \tag{18}$$

wobei $x(t)$ und $y(t)$ zwei deterministische, reelle Energiesignale sind. Die Korrelation führt zu einer Funktion $r_{xy}(\tau)$, welche die Übereinstimmung bzw. Ähnlichkeit eines Signals $x(t)$ zu einem zeitverschobenen Signal $y(t+\tau)$ in Abhängigkeit der zeitlichen Verschiebung τ beschreibt. τ ist die Zeit, mit der das zweite Signal gegenüber dem ersten nach links verschoben wird, bevor das Produkt der beiden Signale integriert wird.
Je höher der Wert dieses Integrals ausfällt, desto ähnlicher oder deckungsgleicher sind die beiden Signale. Die Amplitude jedes Samples im Korrelationssignal ist ein Maß dafür, wie sehr sich die beiden Signale an diesem Punkt ähneln. Das bedeutet, dass für jede Übereinstimmung der beiden Signale ein Maximum im Korrelationssignal auftaucht. Die Verschiebung dieses Maximums zum Ursprung zeigt, wie weit die Signale phasenverschoben sind.

4.2 Der Korrelationsprozess

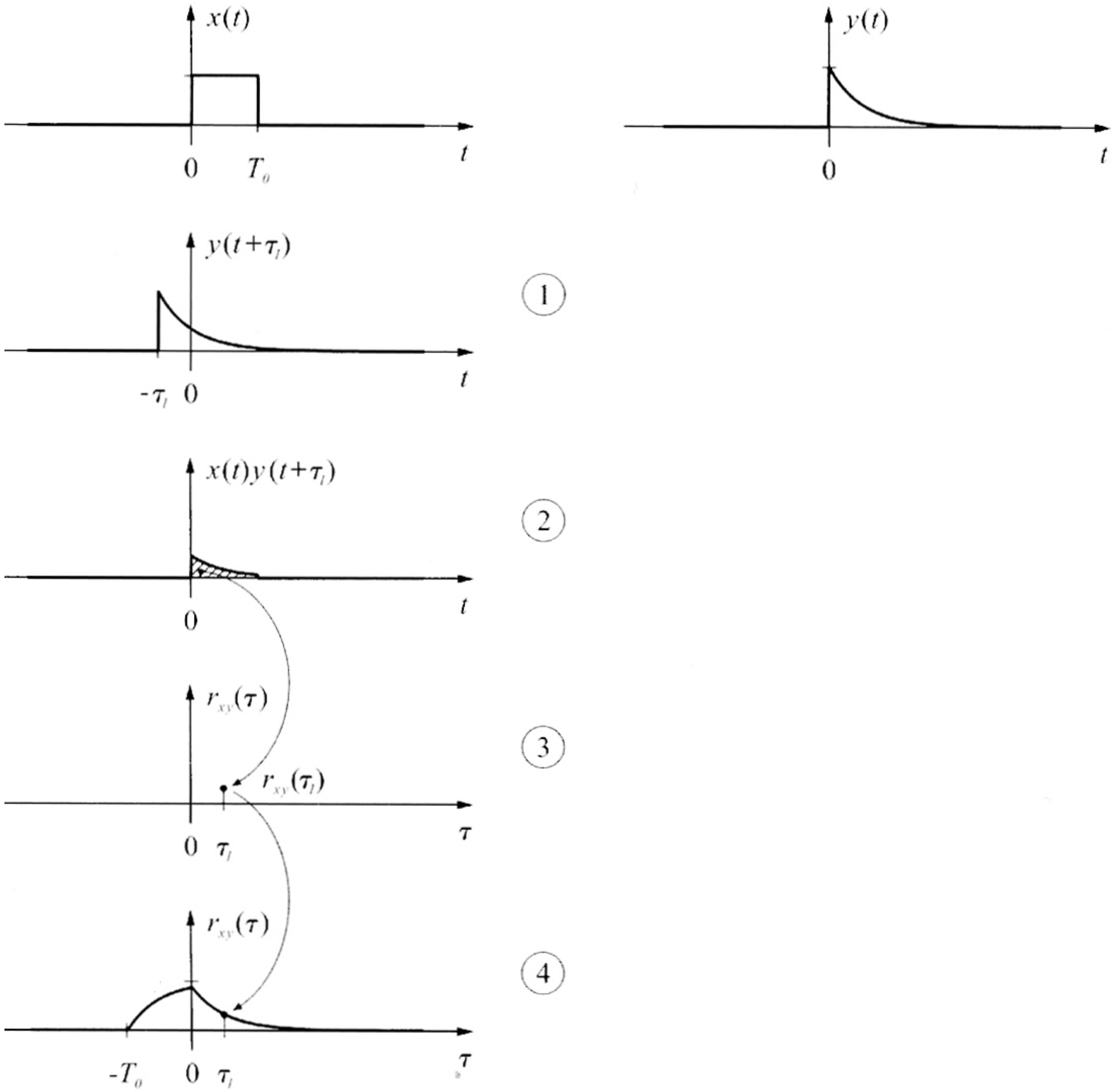

Abbildung 10: Der Korrelationsprozess

Der Korrelationsprozess lässt sich folgendermaßen beschreiben:

1. Verschiebe $y(t)$ um τ_1 nach links: Dies ergibt $y(t + \tau_1)$.

2. Multipliziere $x(t)$ mit $y(t + \tau_1)$: Dies ergibt $x(ty(t + \tau_1)$.

3. Integriere die Prokuktefunktion $x(t)y(t + \tau_1)$ über die ganze t-Achse: der Wert des Flächeninhaltes $r_{xy}(\tau_1)$ ist der Wert der Korrelationsfunktion an der Stelle τ_1.

4. Führe die Schritte 1. bis 3. für alle Punkte auf der τ-Achse aus: Daraus resultiert die Korrelationsfunktion $r_{xy}(\tau)$.

4.3 Korrelation und Faltung

Wie man auf den ersten Blick erkennt, ist die Korrelation eng mit der Faltung verwandt. Die beiden unterscheiden sich lediglich durch die Integrationsvariable und ein Vorzeichen. Durch das positive Vorzeichen entfällt bei der Korrelation die Spiegelung der zweiten Funktion an der y-Achse, die für die Faltung charakteristisch ist.

Ist ein Signal symmetrisch, wird es durch die Spiegelung nicht verändert. Somit unterscheiden sich Faltung und Korrelation in diesem Fall nicht.
Die Verwandschaft zwischen Korrelation und Faltung lässt sich durch folgende Beziehung ausdrücken:

$$r_{xy}(\tau) = x(-t) * y(t)|_{t=\tau}. \tag{19}$$

Die Korrelationsfunktion zweier Signale erhält man also, indem man das erste Signal spiegelt, danach mit dem zweiten Signal faltet und anschließend die Zeitvariable t durch die Zeitverschiebungsvariable τ substituiert.
Im Gegensatz zur Faltung ist die Korrelation nicht kommutativ.
Aus $r_{xy}(\tau) = x(-t) * y(t)|_{t=\tau} = y(t) * x(-t)|_{t=\tau}$ folgt:

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau). \tag{20}$$

4.4 Korrelation anschaulich

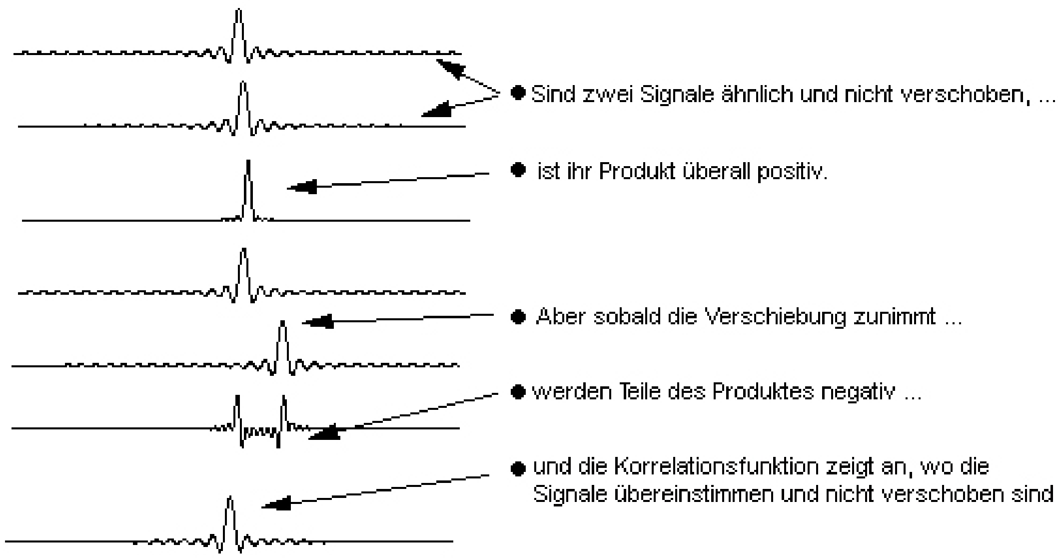

Abbildung 11: Korrelation zweier Signale

Ähneln sich zwei Signale in ihrer Form und sind nicht gegeneinander verschoben, ist ihr Produkt überall positiv. Die Fläche unterhalb der Kurve ergibt den Wert der Korrelationsfunktion zum Zeitpunkt Null.
Ist ein Signal gegenüber dem anderen verschoben, stimmt die Phase nicht mehr überein. Dadurch decken sich die Peaks nicht mehr, das Produkt kann negative Teile enthalten. Die Fläche unter der Kurve gibt den Wert der Korrelationsfuktion zum Wert der Verschiebung an. Da die eventuell vorhandenen negativen Anteile die positiven ausgleichen, ist das Ergebnis der Funktion kleiner.
Der größte Wert der Korrelationsfunktion zeigt, wann die zwei Signale sich in ihrer Form ähneln und nicht gegeneinander verschoben sind. Die Breite der Korrelationsfunktion zeigt, wie lange die beiden Signale sich ähneln.
Die Korrelationsfunktion zeigt also, wie ähnlich zwei Signale sind und wie lange sie ähnlich bleiben, wenn man sie gegeneinander verschiebt.

Man unterscheidet zwei Arten der Korrelation: die Autokorrelation (AKF) und die Kreuzkorrelation (KKF).

4.5 Autokorrelation

Wird ein Signal mit sich selbst korreliert, nennt man dies Autokorrelation. Sie ist eine Art Selbstanalyse des Signals und wird unter anderem zum Auffinden von Periodizitäten in einem Signal verwandt. Verschiedene Arten von Signalen haben deutlich unterschiedliche Autokorrelationsfunktionen.

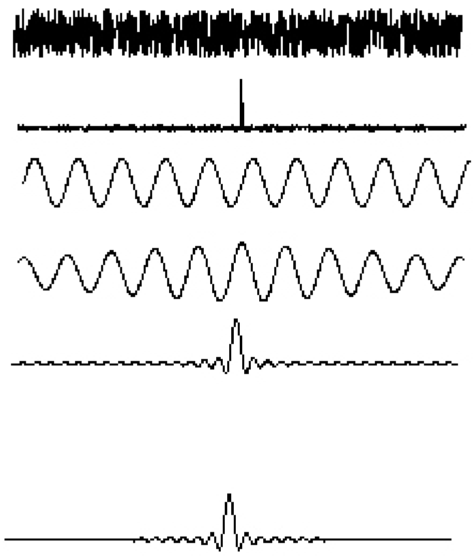

Abbildung 12: Autokorrelationsfunktionen verschiedener Signal-Arten

- Zufälliges Rauschen ähnelt sich selbst und ist nicht verschoben.
- Deswegen ist seine Korrelationsfunktion eine Spitze.
- Periodische Signale stimmen abwechselnd in der Phase überein oder nicht, wenn sie gegeneinander verschoben werden.
- Also sind ihre Korrelationsfunktionen periodisch.
- Signale, die nur eine kurze Zeit andauern, sind ähnlich, so lange sie andauern.
- Aus diesem Grunde sind auch ihre Korrelationsfunktionen kurz.

Abbildung 12 zeigt drei verschiedene Arten von Signalen:

- Zufälliges Rauschen ist per Definition unkorreliert - d.h. dass es nur zu sich selbst ähnlich ist ohne jede Verschiebung. Selbst die Verschiebung eines Samples in irgendeine Richtung bedeutet, dass es keine Korrelation gibt. Aus diesem Grund ist die Korrelationsfunktion von zufälligem Rauschen eine einzige Spitze bei der Verschiebung Null.
- Periodische Signale stimmen abwechselnd in der Phase überein oder nicht, wenn sie gegeneinander verschoben werden. Deswegen zeigen sie eine starke Korrelation bei jeder Verschiebung, bei der die Peaks übereinstimmen. Die Autokorrelationsfunktion eines periodischen Signals ist ebenfalls ein periodisches Signal mit der gleichen Periode wie das ursprüngliche Signal.
- Kurze Signale können sich selbst nur für kurze Verschiebungswerte ähneln. Aus diesem Grund sind ihre Autokorrelationsfunktionen kurz.

Autokorrelation kann benutzt werden, um ein Signal von Rauschen zu befreien.
Aus der obigen Abbildung wird deutlich, wie dies geschehen kann:
Zufälliges Rauschen besitzt eine besondere „Spitzen“-Autokorrelationsfunkion, wohingegen eine Sinus-Welle eine periodische Autokorrelationsfunktion besitzt. Also hat eine verrauschte Sinuswelle eine periodische Autokorrelationsfunktion mit einer einzigen Spitze, die die gesamten Rausch-Anteile enthält.

4.6 Kreuzkorrelation

Bei der Kreuzkorrelation werden zwei voneinander verschiedene Signale miteinander verglichen. Sie wird z.B. benutzt, um bekannte Referenz-Signale in Rauschen zu finden.

Beispiel: Radarsystem
Eine spezielle Antenne überträgt Radiowellen in eine ausgewählte Richtung. Wenn das sich ausbreitende Signal auf ein Objekt, z.B. ein Flugzeug, trifft, wird ein kurzer Bruchteil der

Energie zurück zu einem Radio-Empfänger reflektiert, der sich in der Nähe des Senders befindet. Das empfangene Signal besteht dann aus zwei Teilen: einer verschobenen Version des übertragenen Signals und zufälligem Rauschen, das z.B. aus interferrierenden Radiowellen resultiert. Da sich Radiowellen mit einer bekannten Geschwindigkeit ausbreiten, nämlich Lichtgeschwindigkeit, kann die Verschiebung zwischen dem übertragenen und empfangenen Signal als direktes Maß für den Abstand des entdeckten Objekts angesehen werden.

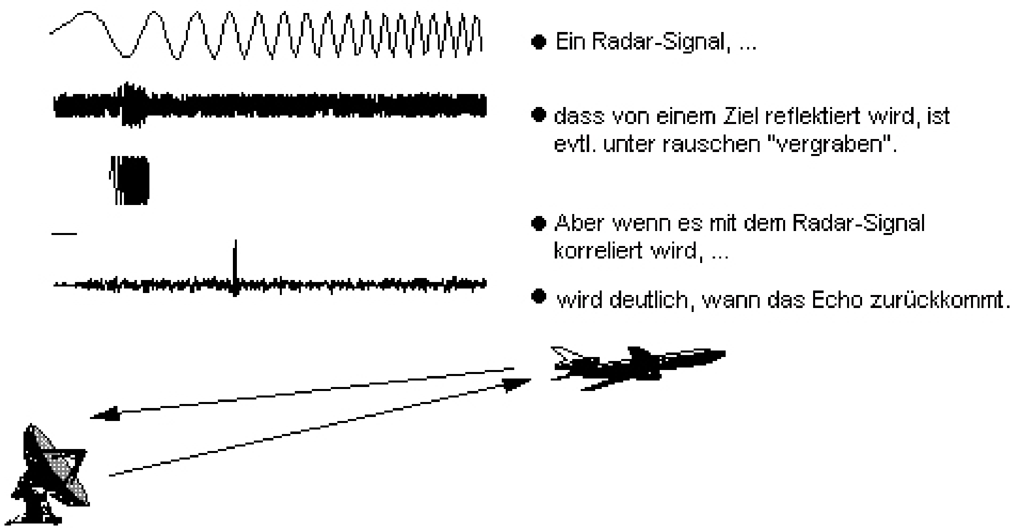

Abbildung 13: Prinzip eines Radarsystems

Abbildung 13 zeigt, wie ein Signal innerhalb von Rauschen entdeckt werden kann:
Eine Kopie des bekannten Referenz-Signals wird mit dem unbekannten Signal korreliert. Die Korrelation ist hoch, wenn die Referenz dem unbekannten Signal ähnelt. Ein großer Korrelationswert zeigt, wie sicher das Referenzsignal entdeckt wurde und wann das Signal auftritt.

Kreuzkorrelation wird ebenfalls verwandt, um ein Signal zu identifizieren, indem es mit einer Bibliothek bekannter Referenz-Signale verglichen wird.

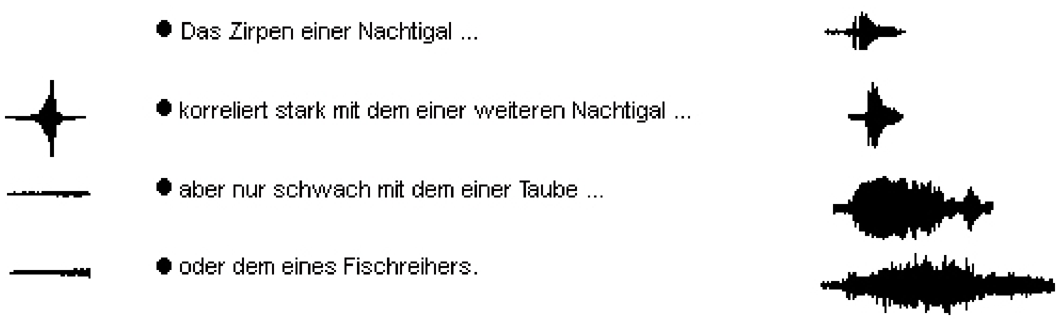

Abbildung 14: Identifikation eines Signals mit Hilfe bekannter Referenz-Signale

5 Zusammenfassung

In den vorangehenden Abschnitten wurden zwei Grundlegende Operationen der Signalverarbeitung vorgestellt. Zum einen die Faltung, mit deren Hilfe man jedes beliebige Eingangssignal eines LTI-Systems berechnen kann, wenn die Impulsantwort des Systems bekannt ist. Und zum anderen die Korrelation, die als ein Maß der Ähnlichkeit zwischen zwei Signalen gilt. Beide Operationen existieren ebenfalls für digitale Signale und spielen in der digitalen Signalverarbeitung eine große Rolle.

Literatur

[1] Daniel Ch. von Grüningen, Digitale Signalverarbeitung, 2. Auflage, Fachbuchverlag Leipzigit

[2] Martin Meyer: Grundlagen der Informationstechnik - Signale, Systeme und Filter, 1. Auflage, Vieweg-Verlag

[3] Prof. Dr. L. Reindl: Vorlesung Digitale Signalverarbeitung, Universität Freiburg *http://electures.informatik.uni-freiburg.de/catalog/course.do?courseID=signalverarbeitung2005*

[4] Steven W. Smith: The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing Second Edition, California Technical Publishing, San Diego, California *http://www.dspguide.com*

[5] Bores Signal Processing: Introduction to DSP *http://www.bores.com/courses/intro*