

# Kapitel 1

## Signalabtastung

Mit Hilfe der analytischen Darstellung gewinnt man wichtige Einblicke in Signale und Systeme. Für numerische Untersuchungen in einem Rechner ist diese Darstellung aber nicht geeignet, dazu müssen wir die Signale "diskretisieren", d.h. wir müssen den kontinuierlichen Signalen Proben entnehmen und diese Proben digitalisieren. Durch dieses Vorgehen erhalten wir aus einem kontinuierlichen Signal eine Folge von Zahlen und es ist einleuchtend, dass der Vergleich der beiden Darstellungen nicht einfach ist.

In diesem Kapitel befassen wir uns mit diskreten Signalen. Diskrete Signale entstehen durch "Entnahme" von Signalproben aus kontinuierlichen Signalen. Bei der Entnahme von Signalproben - Abtastung genannt - müssen wir entscheiden, (1) in welchen zeitlichen Abständen die Signalproben entnommen werden und (2) mit welcher Genauigkeit die Signalproben entnommen werden, wir müssen eine Quantisierung in Zeit und Amplitude vornehmen.

In praktischen Anwendungen wird das kontinuierliche Signal zu den gewünschten Zeitpunkten durch eine Abtast- und Halteschaltung (sample & hold) abgetastet und konstant gehalten, um der Analog-/Digitalwandler-Schaltung genügend Zeit für die Umwandlung zu geben. Man kann leicht sehen, dass sich das vom A/D-Wandler erzeugte digitale Signal, wegen der Quantisierung im Zeit- (Abtastung) und im Amplitudenbereich (A/D-Wandlung), deutlich vom analogen Signal unterscheidet. Dennoch können wir bei geeigneten Quantisierungen eine höhere Qualität der digitalen Signalverarbeitung erreichen, als das mit analogen Methoden möglich ist.

Die Quantisierung führen wir zur Gewinnung eines digitalen Signales durch, um dann Methoden der digitalen Signalverarbeitung einsetzen zu können. Am Ende der (digitalen) Signalverarbeitungskette ist in der Regel eine Rückumwandlung des digitalen Signals in ein kontinuierliches Signal notwendig, z. B. um ein Sprachsignal über den Lautsprecher eines CD-Spielers wiederzugeben.

In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, ob es möglich ist, ein kontinuierliches Signal in ein diskretes und wieder zurück in ein kontinuierliches zu wandeln, ohne dass hörbare Qualitätsverluste bei den Signalen auftreten. Die tägliche Erfahrung am Beispiel von Audio-CDs, MP3-Musik, Mobiltelefonen lehrt uns, dass die Umwandlung möglich ist und wir wollen in den nächsten Abschnitten untersuchen, welche Bedingungen dabei einzuhalten sind.

### 1.1 Vorteile digitaler Signale

Bandbegrenzte analoge Signale (alle praktischen Signale sind bandbegrenzt) können in digitale Signale umgewandelt werden. Die Voraussetzung dafür ist die Einhaltung des Abtasttheorems und eine

den Qualitätsforderungen angemessene Auflösung. Bei der Umwandlung analoger Signale in digitale Signale entstehen erhebliche Datenmengen, weshalb häufig Datenkompression eingesetzt wird. Bei einer Stereo-Audio-CD wird eine Abtastfrequenz von 44.1 kHz verwendet, die Auflösung beträgt 16 bit, womit sich eine Datenrate von  $44.1 \text{ [kHz]} \times 16 \text{ [bit]} \times 2 \text{ [Kanäle]} = 1.4 \text{ Mb/s}$  ergibt, bei der Super-Audio-CD (Direct Stream Digital) beträgt die Datenrate 2.8224 MHz, bei der Audio-DVD bis zu  $192 \times 24 \times 2 = 9.216 \text{ MHz}$ .

Mit den heute zur Verfügung stehenden elektronischen Schaltkreisen kann digitale Signalverarbeitung in Echtzeit im Audiobereich, aber nur teilweise im Videobereich bewerkstelligt werden.

Die digitale Signalverarbeitung bietet eine Reihe von Vorteilen, deshalb wird sie, wenn technisch möglich, der analogen Verarbeitung vorgezogen.

1. Digitale Signale sind weniger störanfällig als analoge, da nur die Signalzustände Null und Eins existieren und sich die Signale eindeutig rekonstruieren lassen, solange die Störungen unterhalb der Erkennungspegel für Null und Eins liegen.
2. Digitale Signale können bei Störungen auf Übertragungsstrecken ohne Qualitätsverlust regeneriert werden und über lange Distanzen übertragen werden.
3. Digitale Signale lassen sich einfacher kodieren (Kompression oder Sicherheit) und verarbeiten als analoge Signale.
4. Die Vervielfältigung digitaler Daten ist sehr einfach. Analoge Daten (Filme, Tonbänder) verlieren bei der Vervielfältigung Qualität durch unvermeidbare Störsignale.
5. Das Speichern von digitalen Signalen ist einfacher und kostengünstiger als von analogen Signalen.
6. Digitale Hardware lässt sich einfacher und kostengünstiger bauen als analoge Komponenten. Die Kosten digitaler Hardware nehmen laufend durch die Weiterentwicklung der Chiptechnologie ab.

## 1.2 Abtastung im Zeitbereich

Wir gehen von einem kontinuierlichen Signal aus und wählen der Einfachheit halber die Funktion

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.1)$$

Das diskrete<sup>1</sup> Signal erhalten wird durch Entnahme von Proben in äquidistanten Punkten, deren Zeitabstand  $T_s$  sei.

$$s[n] = s(nT_s) \quad -\infty < n < \infty \quad (1.2)$$

Als Ergebnis erhalten wir eine Folge von Werten des kontinuierlichen Signals. Die Zahlenwerte der Folge können beliebige Werte annehmen, sind also noch nicht digitalisiert (quantisiert). Aus unserem Ausgangssignal wird dann

$$s[n] = s(nT_s) = A \cos(\omega nT_s + \varphi) = A \cos(\hat{\omega} n + \varphi) \quad (1.3)$$

Die Größe  $\hat{\omega}$  bezeichnet man als normalisierte Kreisfrequenz  $\hat{\omega} = \omega T_s$ .

---

<sup>1</sup>Zur Unterscheidung verwenden wir für kontinuierliche Signale runde Klammern, für diskrete Signale eckige Klammern.

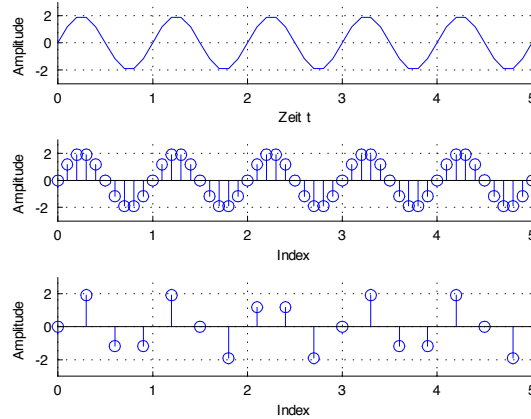


Abbildung 1.1: Signalabtastung

**Anmerkung 1** Durch die Abtastung geht die Zeitinformation des kontinuierlichen Signals verloren. Schreibt man die Abtastwerte auf eine Liste, kann man nicht erkennen, welche Zeit zwischen den Abtastwerten vergeht. Erst bei Kenntnis des Abtastschrittes  $T_s$  kann eine zeitrichtige Rekonstruktion vorgenommen werden. Diese Tatsache verwendet man z.B. bei Synthesizern: Man speichert die Werte der Sinusfunktion von  $0 - 90^\circ$  (die restlichen Werte auf  $360^\circ$  lassen sich daraus leicht errechnen) und "schickt" diese Werte mit unterschiedlicher Geschwindigkeit an einen Digital/Analogwandler, um Töne unterschiedlicher Frequenzen zu erzeugen. Die Dimensionslosigkeit der Folge zeigt sich natürlich auch im mathematischen Ausdruck: Die Kreisfrequenz  $\omega$  hat die Dimension  $[\text{Zeit}^{-1}]$ , die Zeit  $T_s$  hat die Dimension  $[\text{Zeit}]$ ,  $\omega T_s$  ist daher dimensionslos.

Abbildung 1.1 zeigt den Zusammenhang zwischen kontinuierlichen und diskreten Signalen. Offensichtlich stellt das Signal mit dichter Abtastfolge das kontinuierliche Signal optisch besser dar als das Signal mit weniger dichter Abtastung. Aber je mehr Abtastwerte entnommen werden, desto mehr Daten müssen verarbeitet und gespeichert werden. Man ist daher daran interessiert möglichst wenige Abtastungen vornehmen zu müssen, will aber das kontinuierliche Signal wieder eindeutig rekonstruieren können.

### 1.3 Mathematische Darstellung des Abtastvorgangs

Die Abtastung eines Signals  $f(t)$  kann dargestellt werden, indem man  $f(t)$  mit einer Folge von Einheitsimpulsen  $\delta_{0T}(t)$  im Abstand von  $T_s$  Sekunden (dem Abtastabstand) multipliziert. (Die Abtastung mit  $\delta_0$ -Impulsen ist ein theoretisches Konzept, das in elektronischen Schaltungen nur näherungsweise realisiert werden kann.)

$$f_S(t) = f(t)\delta_{0T}(t) = \sum_k f(kT)\delta_0(t - kT_s) \quad (1.4)$$

Die Impulsfolge  $\delta_{0T}(t)$  ist eine periodische Funktion und kann daher in eine Fourierreihe zerlegt werden

$$\delta_{0T}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_s t} \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \quad (1.5)$$

$$D_k = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta_{0T}(t) e^{-jk\omega_s t} dt \quad (1.6)$$

Die Berechnung dieses Integrals liefert  $D_k = \frac{1}{T}$  und wir erhalten daher

$$\delta_{0T}(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t} \quad (1.7)$$

Die Gleichung (1.7) stellt aber nichts anderes dar, als Spektrallinien im Abstand von  $\omega_0$  mit den Amplituden  $1/T$ .

In reeller Schreibweise der Gleichung (1.7) erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta_{0T}(t) = \frac{1}{T_s} [1 + 2 \cos \omega_s t + 2 \cos 2\omega_s t + 2 \cos 3\omega_s t + \dots \\ + 2 \cos k\omega_s t] \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Aus Gleichung (1.4) wird

$$f_S(t) = f(t) \delta_{0T}(t) = \frac{1}{T_s} [f(t) + 2f(t) \cos \omega_s t + 2f(t) \cos 2\omega_s t + 2f(t) \cos 3\omega_s t + \dots] \quad (1.9)$$

Das Spektrum des abgetasteten Signals  $F_s(\omega)$  ermitteln wir durch die Berechnung der Fouriertransformierten von  $f_S(t)$ .

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega) \quad (1.10)$$

$$f(t) \cos \omega_s t \Leftrightarrow \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_s) + F(\omega + \omega_s)] \quad (1.11)$$

Transformieren wir nun die Terme von Gleichung (1.9) vom Zeitbereich in den Frequenzbereich, so erhalten wir:  $F(\omega); F(\omega - 2\omega_s), F(\omega + 2\omega_s); F(\omega - 3\omega_s), F(\omega + 3\omega_s); \dots$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \quad (1.12)$$

Das Spektrum des abgetasteten Signals setzt sich periodisch im Abstand  $\omega_s$  fort. Abbildung 1.2 stellt diesen Zusammenhang grafisch dar. (Die Bandbreite erstreckt sich von  $-B$  bis  $+B$  beträgt also  $2B$ . Da wir  $F(\omega)$  darstellen und  $\omega = 2\pi f$  wird daraus  $2\pi \cdot 2B$ .)

Das Spektrum des Originalsignals  $f(t)$  ist im Spektrum des abgetasteten Signals  $f_s(t)$  enthalten und kann aus  $F_s(\omega)$  durch "Herausschneiden" mit einem idealen Tiefpassfilter *fehlerfrei* wieder hergestellt werden.

Aus Abbildung 1.2 kann man erkennen, dass die periodische Wiederholung des Spektrums im Abstand von  $\omega_s$  erfolgt. Je größer  $\omega_s$  ist, desto weiter rücken die Spektren auseinander. Wird  $\omega_s$  aber kleiner, dann rücken die Spektren näher aneinander, wenn  $\omega_s = 2\pi \cdot 2B$ , dann stoßen die Spektren aneinander. Ist  $\omega_s < 2\pi \cdot 2B$ , dann überlappen sich die Spektren. Abbildung 1.3 stellt diesen Zusammenhang grafisch dar.

Wie man aus Abbildung 1.3 erkennen kann, lassen sich die Spektren für  $\omega_s > 2B$  leicht separieren, für  $\omega_s = 2B$  kann eine Trennung nur mit einem rechteckigen (idealen) Filter erfolgen, derartige Filter lassen sich nicht realisieren. Für den Fall dass  $\omega_s < 2B$  lassen sich die Spektren nicht mehr trennen.

Daraus folgt das Shannon'sche Abtasttheorem

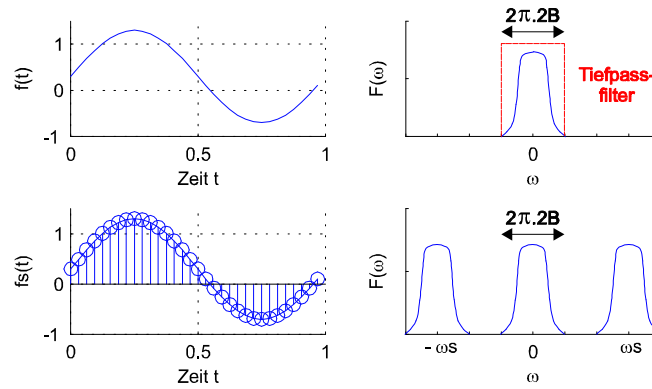


Abbildung 1.2: Periodisches Spektrum

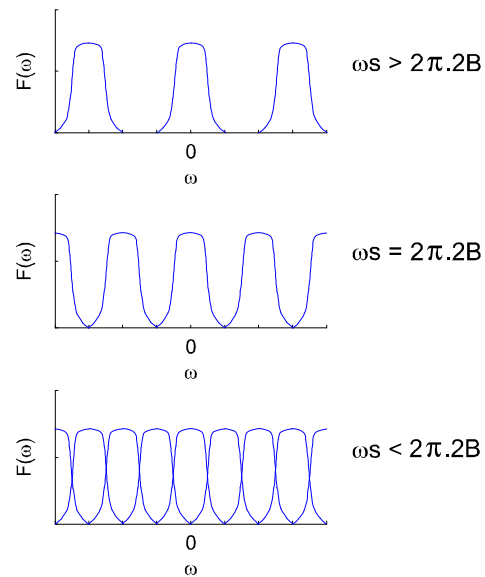


Abbildung 1.3: Überlappen von Spektren

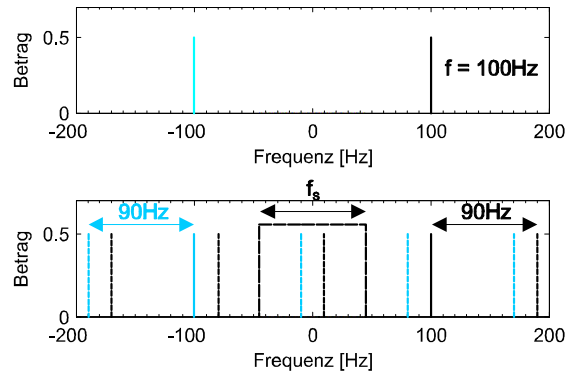


Abbildung 1.4: Aliasing

**Satz 2** Ein kontinuierliches Signal  $s(t)$ , das keine Frequenzkomponenten größer als  $f_{\max}$  enthält, kann exakt aus einer Folge von Proben  $s[n] = x(nT_s)$  rekonstruiert werden, wenn die Abtastfrequenz  $f_s = 1/T_s$  größer als  $2f_{\max}$  ist.

Das Abtasttheorem gilt nur für *bandbegrenzte* Signale, d.h. für Signale die sinusförmige Komponenten mit einer obersten Frequenz enthalten. Sprachsignale enthalten Frequenzkomponenten bis 4 kHz, Musiksignale Frequenzkomponenten bis 20 kHz. Die Abtastfrequenz von Audio-CDs beträgt 44.1 kHz, liegt also knapp über den erforderlichen  $2 \times 20$  kHz.

Die niedrigste Abtastfrequenz, um ein Signal fehlerfrei abtasten zu können, wird Nyquist-Frequenz genannt.

## 1.4 Aliasing und Folding

Bei Verletzung des Abtasttheorems überlagern sich die abgetasteten Spektren und Spektralkomponenten des Nachbarspektrums werden in das "Nutzspektrum" verschoben. Wir zeigen die Verletzung des Abtasttheorems an zwei Beispielen:

**Beispiel 3** Ein sinusförmiges Signal der Frequenz  $f = 100$  Hz werde mit  $f_s = 90$  Hz abgetastet. Das 100 Hz-Signal hat im Frequenzbereich Spektrallinien bei  $\pm 100$  Hz. Durch die Abtastung entstehen Spektrallinien der periodischen Fortsetzung ( $\omega \pm n\omega_s$ ): 100, 190, 280, 370, ..., 10, -80, -170, ...

Es wird aber auch die negative Frequenz periodisch fortgesetzt: -100, -10, 80, 170, ..., -190, -280, -370.

Wir sehen an diesem Beispiel, dass negative Frequenzkomponenten eine wichtige Rolle spielen. Das abgetastete Signal wird nun durch Filterung rekonstruiert, die Filterbandbreite beträgt  $\pm f_s/2 = \pm 45$  Hz. Innerhalb dieses Bandes "findet" das Filter das **Aliassignal** mit den Frequenzen  $\pm 10$  Hz, das abgetastete 100 Hz-Signal wird also **falsch** als 10 Hz-Signal rekonstruiert, da das Abtasttheorem verletzt wurde! Abbildung 1.4 stellt die Zusammenhänge grafisch dar.

**Beispiel 4** Als zweites Beispiel betrachten wir unser sinusförmiges 100 Hz-Signal, tasten es aber diesmal mit 110 Hz ab. Wir erhalten die Spektralkomponenten: 100, 210, 320, ..., -10, -120, -230, ...

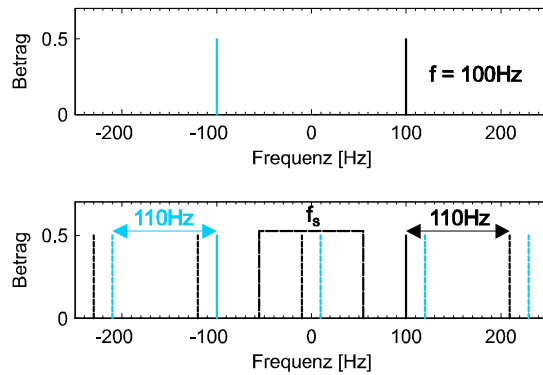


Abbildung 1.5: Folding

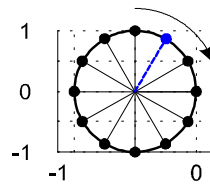


Abbildung 1.6: Drehung eines Speichenrads

sowie die Spektralkomponenten  $-100, 10, 120, 230, 340, \dots, -210, -320, \dots$

Die Rekonstruktion des Originalsignals aus dem abgetasteten Signal durch Filterung mit  $\pm f_s/2 = \pm 55 \text{ Hz}$  liefert wie im vorigen Beispiel wieder die Signalkomponenten  $\mp 10 \text{ Hz}$ . Wir sehen aber, dass die Signalkomponenten im Vergleich zum vorherigen Beispiel **gespiegelt** sind! Diese Verletzung des Abtasttheorems nennt man **Folding**.

**Beispiel 5** Ein besonders einprägsames Beispiel für die Verletzung des Abtasttheorems tritt bei Filmen auf. Filme sind Folgen von Einzelbildern, die mit einer Rate von 25 Bildern/Sekunde aufgezeichnet werden. Das Auge kann die Einzelbilder nicht mehr auflösen und es entsteht der Eindruck von kontinuierlichen Bewegungen. In der Regel sind diese Bewegungen langsam gegen die Bildfrequenz, das Abtasttheorem wird eingehalten. Am Beispiel von Kutschenrädern kann man aber die Verletzung des Abtasttheorems deutlich beobachten: Eine Kutsche bewegt sich, man sieht aber, dass sich die Speichen der Kutsche nur ganz langsam in die Bewegungsrichtung der Kutsche drehen, während sich die Kutsche offensichtlich schneller bewegt. Es kann sogar der Fall eintreten, dass sich die Kutsche vorwärts bewegt, während sich die Räder stehen oder sich nach rückwärts drehen.

Abbildung 1.6 liefert die Erklärung für dieses Phänomen. Wir betrachten die strichliert gezeichnete "Speiche". Das Rad dreht sich und die Kamera nimmt 25 Bilder/Sekunde auf. Wenn sich die betrachtete Speiche zwischen zwei Bildern um einen geringen Winkel dreht, dann kann man im Film die korrekte Drehung des Rades

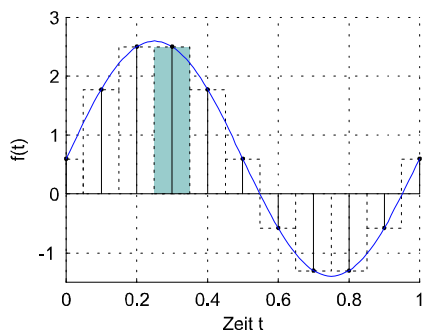


Abbildung 1.7: Rekonstruktion mit Rechteckimpulsen

beobachten (Abtasttheorem eingehalten). Das Rad kann sich aber viel schneller drehen und zwar, zwischen den Abtastungen mehrmals um die eigene Achse (Abtasttheorem verletzt).

Wenn sich die Speiche mehrmals um die eigene Achse dreht und die Bilder aber immer dann genommen werden, wenn sich die Speiche genau  $n$ -mal gedreht hat, dann steht das Rad scheinbar.

Wenn sich die Speiche zwar mehrmals um die eigene Achse dreht, die Bilder aber immer dann genommen werden, wenn der Winkel der Speiche  $n2\pi + \alpha$  ist, dann dreht sich das Rad scheinbar langsamer. Wir beobachten den Aliasingeffekt wie in unserem vorigem Beispiel, wo aus einem 100 Hz-Signal ein 10 Hz-Signal wurde. Aus einer Raddrehung von vielen Umdrehungen/Sekunde wird eine Raddrehung aus wenigen Umdrehungen/Sekunde.

Schließlich tritt noch der Fall auf, dass sich die Speiche mehrmals um die eigene Achse dreht, das Bild aber zu einem Zeitpunkt aufgenommen wird, wo die Speiche etwas vor der vollen Umdrehung steht  $n2\pi - \alpha$ . In diesem Fall dreht sich das Rad scheinbar rückwärts – also mit negativer Frequenz – und wir beobachten den Effekt des Foldings.

## 1.5 Signalrekonstruktion

Abgetastete Signale nehmen an den Abtastpunkten Proben aus kontinuierlichen Signalen. Für die Wiederherstellung eines kontinuierlichen Signals müssen daher die "Lücken" zwischen den Abtastwerten interpoliert werden.

Die einfachste Form der Interpolation erhält man, indem man den Abtastwert zwischen den Lücken konstant hält. Diese Form der Interpolation kann man auch darstellen, indem man sich das rekonstruierte Signal als eine Folge von gewichteten Rechteckimpulsen vorstellt. Abbildung 1.7 stellt den Zusammenhang grafisch dar.

Die Interpolation mit Rechteckimpulsen führt nur zu einer groben Annäherung an das ursprüngliche Signal. Durch dichteres Abtasten kann man eine bessere Anpassung erreichen, allerdings zum Preis einer höheren Datenmenge.

Eine bessere Form der Interpolation ist die lineare Interpolation zwischen den Abtastpunkten. Die lineare Interpolation kann durch Überlagerung von gewichteten Dreieckimpulsen dargestellt werden, wie in Abbildung 1.8 gezeigt.

Mit Hilfe von Rechteck- und Dreieckimpulsen stellen wir die Interpolation im *Zeitbereich* dar. Bei der mathematischen Darstellung des Abtastvorgangs in (1.12) und Abbildung 1.2 sehen wir, dass das Spektrum



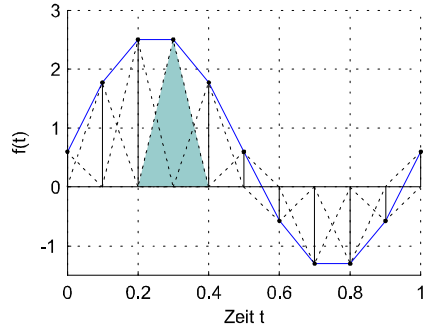


Abbildung 1.8: Rekonstruktion mit Dreieckspulsen

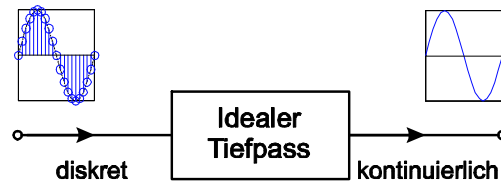


Abbildung 1.9: Interpolation durch ideales Filter

des abgetasteten Signals die periodische Fortsetzung des kontinuierlichen Signals ist. Die Rekonstruktion des kontinuierlichen Signals muss also *fehlerfrei* durch Filterung mit einem idealen Tiefpass-Filter möglich ist. Wir rekonstruieren das Signal also nicht durch *Interpolation im Zeitbereich*, sondern durch *Filterung im Frequenzbereich*, wie in Abbildung 1.9 dargestellt.

Wir fragen uns nun, welcher Interpolation im Zeitbereich die ideale Filterung im Frequenzbereich entspricht und schicken dazu das abgetastete Signal durch ein ideales Filter. Ein ideales Tiefpass-Filter läßt im Durchlassbereich alle Frequenzen ungehindert durch, während es im Sperrbereich alle Frequenzen vollständig unterdrückt. Wir berechnen zunächst die Antwort des Filters auf einen Einheitsimpuls. Die Antwort des Filters auf die Impulsfolge  $f_s(t)$  berechnen wir dann durch Überlagerung der gewichteten, zeitlich versetzten Einheitsimpulse.

Die Impulsantwort eines Filters erhält man durch inverse Fouriertransformation des Frequenzgangs  $H(\omega) \Rightarrow h(t)$ . Die Bandbreite des idealen Filters ergibt sich aus der Nyquist-Frequenz  $F_s \geq 2B$ , das Abtastintervall ist dann  $T = 1/2B$ . Der Frequenzgang des idealen Tiefpassfilters ist

$$H(\omega) = \begin{cases} T & |\omega| < 2\pi B \\ 0 & |\omega| \geq 2\pi B \end{cases} \quad (1.13)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} e^{j\omega t} d\omega = 2BT \operatorname{sinc}(2\pi Bt) \quad (1.14)$$

$$h(t) = \operatorname{sinc}(2\pi Bt) \quad \text{da bei der Nyquistfrequenz } 2BT = 1 \quad (1.15)$$

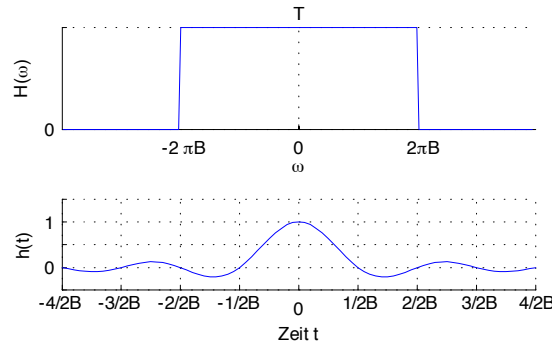


Abbildung 1.10: Impulsantwort des idealen Filters

Wir treffen wieder auf die Si-Funktion. Während bei der Fouriertransformierten des Rechteckimpulses die Si-Funktion im Frequenzbereich auftritt, tritt bei der Fouriertransformierten des idealen Filters die Si-Funktion im Zeitbereich auf. Abbildung 1.10 zeigt Frequenzgang und Impulsantwort eines idealen Filters<sup>2</sup>.

Aus Abbildung 1.10 können wir sehen, dass  $h(t) = 0$  bei allen Vielfachen der Nyquist-Abtastpunkte  $t = \pm \frac{n}{2B}$  Null ist, mit Ausnahme von  $t = 0$ .

Da das ideale Filter das ursprüngliche, kontinuierliche Signal fehlerfrei herstellt, muss auch die Überlagerung der Impulsantworten des idealen Filters das Ausgangssignal fehlerfrei herstellen

$$f(t) = \sum_k f(kT)h(t - kT) = \sum_k f(kT)\text{sinc}(2\pi Bt - k\pi) \quad (1.16)$$

Während die Rekonstruktion des Signal durch Rechteck- und Dreiecksimpulse nur eine ungenaue Wiedergewinnung des Signal ermöglichte, stellt die Rekonstruktion durch überlagerte und gewichtete sinc-Pulse das Signal fehlerfrei her. Abbildung 1.11 zeigt die Signalrekonstruktion (Wegen der besseren Übersichtlichkeit sind die Interpolationspulse nur für jeden zweiten Abtastpunkt gezeichnet.).

## 1.6 Filterung

### 1.6.1 Interpolationsfilter

Ideale (analoge) Tiefpass-Filter sind nicht-kausal und daher nicht realisierbar. Man kann zwar steilflankige analoge Filter mit hoher Dämpfung im Sperrbereich bauen, es ist aber nicht möglich Filter zu realisieren, die die Signale im gesamten Sperrbereich vollständig unterdrücken. Eine praktische Lösung dieses Problems wird dadurch gefunden, dass das Signal mit Abtastfrequenzen größer als der Nyquist-Frequenz abgetastet wird. Damit entstehen Lücken im periodisch fortgesetzten Spektrum und die Anforderungen an die Flankensteilheit des Filters werden geringer. Man erreicht eine praktisch ausreichende Unterdrückung, aber nie die theoretische geforderte vollständige Ausblendung des Sperrbereichs.

<sup>2</sup>Wie wir sehen, ist die Impulsantwort eines idealen Filters nicht-kausal, d.h. das Filter antwortet bereits **vor** dem Anlegen des Impulses. Nichtkausale Filter sind nicht realisierbar!

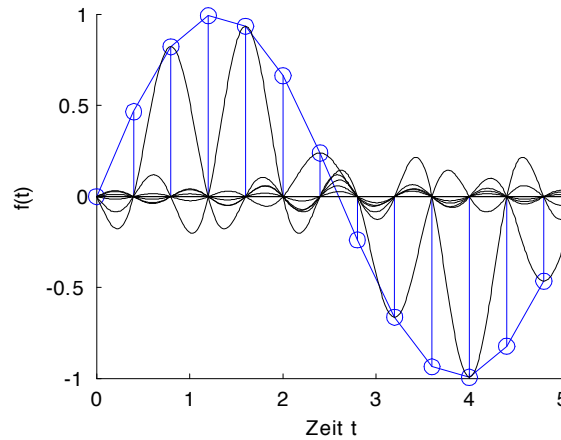


Abbildung 1.11: Rekonstruktion durch sinc-Pulse

### 1.6.2 Antialiasing Filter

Eine weiteres Problem besteht darin, dass jedes praktische Signal von endlicher Länge ist. Wie wir von der Fouriertransformation wissen, hat ein Signal endlicher Länge ein unendlich breites Spektrum.

**Anmerkung 6** *Ein Signal kann nicht gleichzeitig zeitbegrenzt und bandbegrenzt sein!*

*Ist das Signal zeitbegrenzt, hat es also eine endliche Dauer, dann erstreckt sich das Spektrum von  $-\infty$  bis  $\infty$  und ist daher nicht bandbegrenzt. Ist das Signal bandbegrenzt, dann muss sich das Signal über eine unendliche Dauer im Zeitbereich erstrecken, ist also nicht zeitbegrenzt.*

Aus diesem Grund überlappen sich benachbarte Spektren, wie Abbildung 1.12 zeigt.

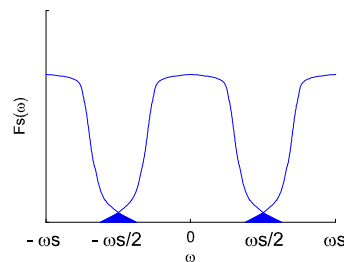


Abbildung 1.12: Überlappung benachbarter Spektren

Um das Problem der überlappenden Spektren praktisch in den Griff zu bekommen setzt man (analoge) Antialiasing-Filter ein, die die Bandbreite begrenzen und damit die Überlappung verhindern. Die Antialiasing Filterung muss *vor* der Abtastung erfolgen, da ja erst die Abtastung das Spektrum periodisch fortsetzt. Abbildung 1.13 zeigt das Blockdiagramm eines digitalen Signalverarbeitungssystems.

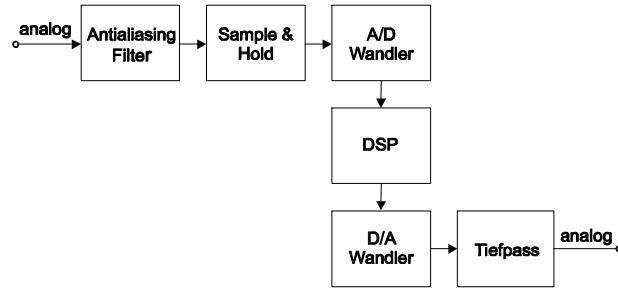


Abbildung 1.13: Blockdiagramm digitale Signalverarbeitung

Das Interpolationsfilter ist das (analoge) Tiefpassfilter nach dem DA/Wandler, das die Werte zwischen den Abtastpunkten im Zeitbereich interpoliert. Im Frequenzbereich entspricht diese Interpolation dem Herausschneiden des gewünschten Spektrums aus dem periodisch fortgesetzten Spektrum.

## 1.7 Digitalisierung

Nach der Abtastung haben die Abtastwerte noch immer kontinuierliche Werte. Erst durch die Umwandlung der kontinuierlichen Werte in diskrete Werte entstehen digitale (quantisierte) Signale. In praktischen Fällen geschieht das durch Analog-/Digital-Wandlung.

Die Auflösung des Analog-/Digital-Wandlers wird nach Qualitätskriterien ausgewählt. Für Sprachsignale reicht eine Auflösung von 8 bit aus, bei Musiksignalen auf einer Audio-CD beträgt die Auflösung 16 bit. Je geringer die Auflösung des A/D-Wandlers ist, desto stärker weicht das digitale Signal vom analogen Signal ab.

Abbildung 1.14 zeigt das Fehlersignal für niedrigere und höhere Auflösung. Beim Abhören hört man einen "reinen" Ton, der von einem rauschartigen Störsignal überlagert ist, man spricht daher vom Quantisierungsrauschen. Je höher die Auflösung des A/D-Wandlers desto geringer ist der zu hörende Rauschanteil.

Das digitale Signal weicht vom kontinuierlichen, analogen Wert ab, wobei der dabei entstehende Fehler von der Auflösung des Wandlers abhängt. Die Amplitude des Quantisierungsfehler ist maximal  $\Delta$ , wobei  $\Delta = \pm \frac{1}{2} LSB$  der Auflösung des A/D-Wandlers entspricht. Wir können zwar nichts über die Kurvenform des Fehlersignals sagen, sehr wohl aber über die Leistung, die im Fehlersignal steckt und die sich als Rauschen<sup>3</sup> bemerkbar macht. Zur Abschätzung des durch die Quantisierung entstehenden Rauschens betrachten wir ein Signal  $s(t)$ , in dem alle Signalamplituden gleich wahrscheinlich auftreten. Die mittlere Leistung des Fehlersignals ist dann

$$e_{eff}^2 = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} s^2 ds = \frac{\Delta}{12} \quad (1.17)$$

Das Quantisierungsrauschen hat den Effektivwert von

$$e_{eff} = \frac{\Delta}{\sqrt{12}} = \frac{LSB}{\sqrt{12}} \approx 0.29 LSB \quad (1.18)$$

<sup>3</sup>Rauschsignale sind unregelmäßige Signale die z.B. beim Geräusch eines Wasserfalls, beim Klatschen oder beim elektrischen Strom durch unregelmäßige Teilchenbewegung auftreten.

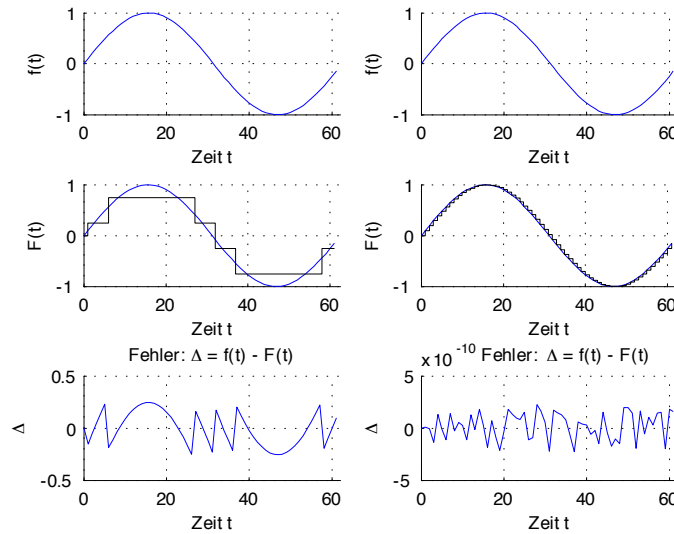


Abbildung 1.14: Amplitudenquantisierung

Bei einem 8-bit Wandler beträgt das effektive Rauschen  $0.29/256$  oder  $1/900$  des Wertebereichs, bei 12 bit  $0.29/4096$  oder  $1/14000$  des Wertebereichs, bei 16 bit  $0.29/65536$  oder  $1/226000$  des Wertebereichs. Jedes analoge Signal enthält aus physikalischen Gründen bereits einen Rauschanteil, die Quantisierung erhöht diesen Rauschanteil in Abhängigkeit von der Auflösung des Wandlers!

## 1.8 Die zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT)

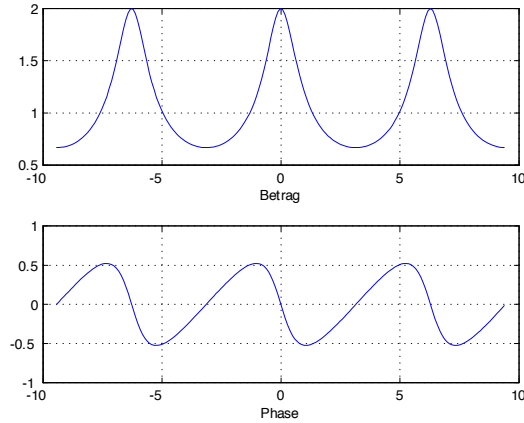
Die zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT) einer Folge  $x[n]$  ist definiert

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (1.19)$$

In der Polardarstellung  $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$  können wir  $\varphi(\omega)$  durch  $\varphi(\omega) + 2\pi k$ ,  $k \dots \text{ganzzahlig}$  ersetzen, ohne das sich  $X(e^{j\omega})$  ändert. Das Spektrum der DTFT ist also kontinuierlich und periodisch fortgesetzt.

**Beispiel 7** Wir berechnen die DTFT von

$$x[n] = 0.5^n \delta_{-1}[n]$$

Abbildung 1.15: DTFT von  $x[n] = 0.5^n \delta_{-1}[n]$ 

und erhalten

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\infty} 0.5^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5e^{-j\omega})^n \\ &= \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

Abbildung zeigt, dass das Betrags- und Phasenspektrum der abklingenden Sprungfunktion  $x[n] = 0.5^n \delta_{-1}[n]$ . Wir sehen, dass das Spektrum  $X(e^{j\omega})$  einer Folge von Abtastwerten  $x[n]$  eine kontinuierliche Funktion ist, die mit Hilfe eines Digitalrechners nicht darstellbar ist, da man ja  $\infty$  viele Punkte für die Darstellung bräuchte. Wir können aber nur eine endliche Zahl von Punkten speichern, müssen daher das Spektrum im Frequenzbereich abtasten.

## 1.9 Abtastung im Frequenzbereich

Bei der Abtastung im Zeitbereich haben wir gezeigt, dass ein bandbegrenztes Signal der Bandbreite  $B$  Hz aus den Abtastwerten wiederhergestellt werden kann, wenn die Abtastwerte mit einer Abtastfrequenz von  $F_s > 2B$  entnommen werden.

Wir untersuchen nun den Abtastvorgang im Frequenzbereich. Während wir es beim Abtasttheorem im Zeitbereich mit *bandbegrenzten* Signalen zu tun hatten, haben wir es beim Abtasttheorem im Frequenzbereich mit *zeitbegrenzten* Signalen zu tun. Wir zeigen, dass das Spektrum  $F(\omega)$  eines zeitbegrenzten Signals der Länge  $\tau$  aus den Abtastwerten von  $F(\omega)$ , die mit einer Rate von  $R > \tau$  Proben pro Hertz entnommen werden, rekonstruiert werden kann. Abbildung (1.16) gibt eine Übersicht über die Zusammenhänge<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> $F(\omega)$  ist in der Regel eine komplexwertige Funktion, die hier der Einfachheit halber reell dargestellt wird.

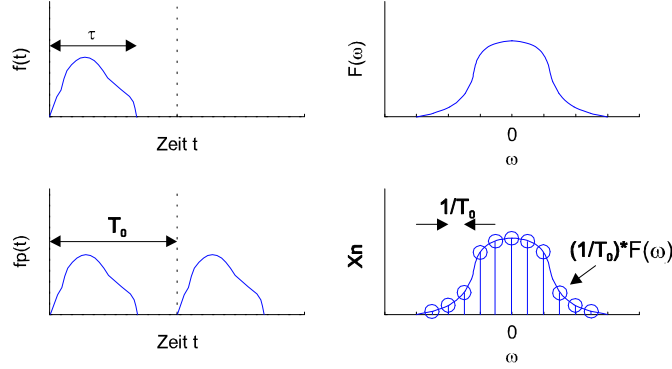


Abbildung 1.16: Abtastung im Frequenzbereich

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1.20)$$

Wir rekonstruieren nun  $f_P(t)$ , ein periodisches Signal, das aus  $f(t)$  durch periodische Fortsetzung im Abstand  $T_0$  gebildet wird. Periodische Signale werden durch eine Fourier-Reihe dargestellt:

$$f_P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad \tau < T_0 \quad (1.21)$$

$$D_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t)e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{\tau} f(t)e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (1.22)$$

Setzen wir (1.20) in (1.22) ein, erhalten wir

$$X_n = \frac{1}{T_0} F(k\omega_0) \quad (1.23)$$

Dieses Ergebnis bedeutet, dass die Koeffizienten der Fourier-Reihe für  $f_P(t)$  gleich den mit  $1/T_0$  multiplizierten Abtastwerten des Spektrums  $F(\omega)$  im Abstand von  $\omega_0$  sind. Solange  $\tau < T_0$  gibt es keine Überlappung und  $f(t)$  kann eindeutig aus  $f_P(t)$  rekonstruiert werden. Das impliziert, dass auch  $F(\omega)$  aus seinen Abtastwerten rekonstruiert werden kann, wenn für die Abtastung die Bedingung  $F_0 = (1/T_0), T_0 \geq \tau$  eingehalten wird. Wir können das kontinuierliche Spektrum  $F(\omega)$  aus den Abtastwerten von  $F(\omega)$  rekonstruieren, wenn die Proben in Abständen nicht größer als  $F_0 = 1/\tau$  Hz entnommen werden. Die Abtastrate im Frequenzbereich ist also

$$R = \frac{1}{F_0} \geq \tau \text{ Abtastwerte/Hz.}$$

Ähnlich der Interpolation im Zeitbereich ergibt sich im Frequenzbereich der Zusammenhang

$$F(\omega) = \sum_n F(k\omega_0) \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2} - k\pi\right) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\tau} \quad (1.24)$$

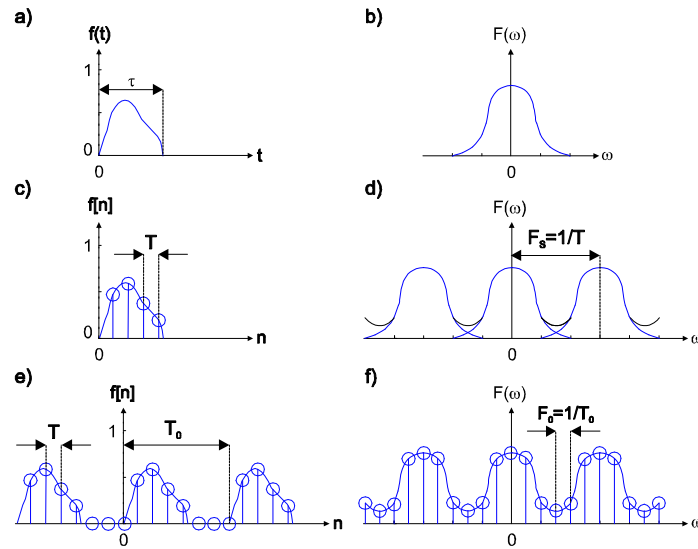


Abbildung 1.17: Abtastung im Zeit- und Frequenzbereich

## 1.10 Die diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Die DFT ist ursprünglich aus der Berechnung der Fourier-Koeffizienten und der Fourier-Transformation auf digitalen Rechnern entstanden und ist eines der wichtigsten Werkzeuge der Signalverarbeitung.

Signale liegen in der Regel nicht in Form von mathematischen Funktionen vor, die Fouriertransformation kann daher nur bei einfachen, idealisierten Signalen analytisch berechnet werden. Für praktische Signale muss die Berechnung des Spektrums numerisch erfolgen, es können daher sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich nur endlich viele diskrete Werte berechnet werden.

- Für die Berechnung der DFT gehen wir von zeitbegrenzten Signalen  $f(t)$  der Länge  $\tau$  aus Abbildung 1.17(a). Zeitbegrenzte Signale haben ein Spektrum  $F(\omega)$  das nicht bandbegrenzt ist Abbildung 1.17(b).
- Aus dem zeitbegrenzten Signal gewinnen wir das diskrete Signal  $f_s(t) = f[n]$  durch Abtastung von  $f(t)$  im Abstand  $T = 1/F_s$ , wie in Abbildung 1.17(c) gezeigt. Durch die Abtastung wird das Spektrum periodisch mit der Periodendauer  $F_s = 1/T$  und wir erhalten das Spektrum  $F_s(\omega)$ , wie man in Abbildung 1.17(d) sieht.
- Die Abtastung des Spektrums im Abstand  $F_0 = (1/T_0)$  nach Abbildung 1.17(f) führt zur periodischen Fortsetzung des abgetasteten Zeitsignals, mit der Periode  $T_0$ , wie Abbildung 1.17(e) dargestellt.

Aus Abbildung 1.17 sehen wir, dass ein abgetastetes und periodisch wiederholtes Zeitsignal zu einem abgetasteten periodischen Spektrum führt. Bei der Berechnung der DFT haben wir es also immer mit periodischen Folgen zu tun, wobei wir die Werte immer nur für eine Periode berechnen müssen.

**Anmerkung 8** Beachten Sie, dass es keine mit dem Computer berechenbare Fouriertransformation für endliche digitale Signale gibt. Ist das diskrete Signal zeitbegrenzt, dann entsteht ein kontinuierliches



*periodisches Spektrum (DTFT), das (vielleicht) analytisch berechnet werden kann, aber nicht in einem Rechner gespeichert werden kann. Das Spektrum kann nur durch Entnahme von Proben (aus einer Periode) gespeichert werden, was bewirkt, dass die Zeitfunktion periodisch fortgesetzt wird.*

*Mit anderen Worten: Die DFT kennt nur periodische Zeitfunktionen und periodische Spektren!*

Aus Abbildung 1.17 finden wir noch den wichtigen Zusammenhang, dass die Zahl  $N_0$  der Proben pro Periode im Zeitbereich identisch mit  $N'_0$ , der Zahl der Proben im Frequenzbereich pro Periode ist, da

$$N_0 = \frac{T_0}{T} \quad N'_0 = \frac{F_s}{F_0} \quad (1.25)$$

Da aber

$$F_s = \frac{1}{T} \quad \text{und} \quad F_0 = \frac{1}{T_0} \quad (1.26)$$

erhalten wir

$$N_0 = \frac{T_0}{T} = \frac{F_s}{F_0} = N'_0 \quad (1.27)$$

Aus Abbildung 1.17(d,f) sehen wir, dass sich die Spektren durch die periodische Fortsetzung überlappen. Diese Überlappung kann durch Erhöhen der Abtastfrequenz  $F_s$  verringert, aber für zeitbegrenzte Signale  $f(t)$  nie vollständig eliminiert werden, da deren Spektrum  $F(\omega)$  nicht bandbegrenzt ist. Hätten wir ein Signal mit bandbegrenztem Spektrum, träte zwar keine Überlappung im Frequenzbereich auf, aber die periodische Fortsetzung im Zeitbereich durch die Abtastung im Frequenzbereich würde zu einer Überlappung im Zeitbereich führen.

Die bei der numerischen Berechnung der direkten oder inversen Fouriertransformation auftretenden Fehler können wir durch Erhöhen der Abtastfrequenz zwar klein machen, sie lassen sich aber nie vollständig eliminieren!

Für die diskrete Fouriertransformation erhalten wir die Transformationspaare

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{jk\Omega_0 n} \quad (1.28)$$

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N_0-1} f[n] e^{-jk\Omega_0 n} \quad (1.29)$$

$$\Omega_0 = \omega_o T = \frac{2\pi}{N_0} \quad (1.30)$$

In der Literatur ist häufig eine kompaktere Schreibweise in Gebrauch, bei der man die Ähnlichkeit zu den anderen Fourieroperationen nicht mehr erkennen kann, aber die Symmetrie zwischen DFT und IDFT deutlich wird.

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N_0-1} F[k] w^{-kn} \quad (1.31)$$

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N_0-1} f[n] w^{kn} \quad (1.32)$$

$$w = e^{-j \frac{2\pi}{N}} \quad (1.33)$$

Schreibt man die Transformationsbeziehungen in Matrixdarstellung an, so erhält man

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F[0] \\ F[1] \\ F[2] \\ \vdots \\ F[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & \dots & w^{(N-1)} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{(N-1)} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} f[1] \\ f[2] \\ f[3] \\ \vdots \\ f[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} \quad (1.34)$$

oder

$$\mathbf{F} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{f} \quad (1.35)$$

und

$$\begin{bmatrix} f[1] \\ f[2] \\ f[3] \\ \vdots \\ f[N-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^{-1} & w^{-2} & \dots & w^{-(N-1)} \\ 1 & w^{-2} & w^{-4} & \dots & w^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{-(N-1)} & w^{-2(N-1)} & \dots & w^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F[0] \\ F[1] \\ F[2] \\ \vdots \\ F[N-1] \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

oder

$$\mathbf{f} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{F} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^* \mathbf{F} \quad (1.37)$$

Aus der Matrixdarstellung kann man die Symmetrie der Operationen erkennen. Bei der Berechnung der (I)DFT durch Matrixmultiplikation werden viele Rechenschritte mehrfach ausgeführt und die Zahl der (komplexen) Rechenoperationen ist  $\sim N^2$ . Durch Ausnützen der Symmetrie lässt sich der Rechenaufwand mit Hilfe der schnellen Fouriertransformation (FFT) auf  $N \log N$  reduzieren.

Es ist überraschend, dass die Rechenvorschrift für DFT und IDFT, abgesehen vom Vorzeichen und vom Skalierungsfaktor  $N$ , vollständig symmetrisch ist, obwohl den Transformationen sehr unterschiedliche Überlegungen zu Grunde liegen.

Signale enthalten nach der Abtastung keine Zeitinformation, sondern sind lediglich Folgen von Zahlen. Auch im Frequenzbereich haben wir es daher lediglich mit Folgen von Zahlen zu tun und man stellt daher das Spektrum über der Zahlenfolge von 0 bis  $N/2$  dar<sup>5</sup>. In praktischen Anwendungen ist der Frequenzbereich

<sup>5</sup>Aus Symmetriegründen reicht die Darstellung von 0 bis  $N/2$ , obwohl  $N$  Punkte berechnet werden.

bekannt, man wählt daher für die Darstellung eine "Frequenzachse", die dem Problem angepasst ist, wobei folgende Darstellungen gebräuchlich sind

$$0 \leq k \leq N/2 \quad 0 \leq f \leq 0.5 \quad 0 \leq \omega \leq \pi \quad 0 \leq f \leq f_{\text{abstast}}/2 \quad (1.38)$$

Welche Darstellung gewählt wurde, kann in der Regel dem Zusammenhang entnommen werden.

## 1.11 Zusammenfassung Fouriertransformationen

Wir fassen die Transformationsbeziehungen zwischen Zeit- und Frequenzbereich zusammen. Abbildung 1.18 zeigt die zugehörigen Signalformen im Zeitbereich. Man nennt  $F(\omega)$  die (direkte) Fouriertransformation von  $f(t)$  und  $f(t)$  die inverse Fouriertransformation von  $F(\omega)$ .

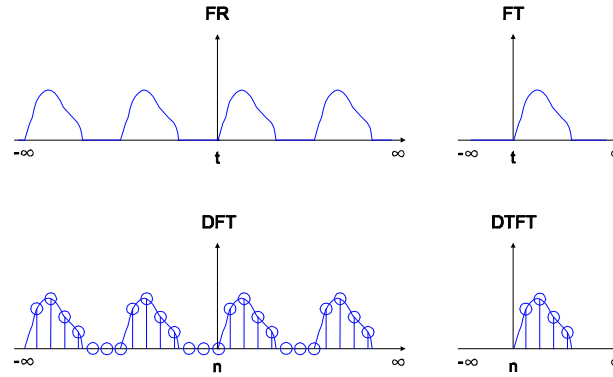


Abbildung 1.18: Fourierreihe (FR), Fouriertransformation (FT), Zeitdiskrete FT (DTFT), Diskrete FT (DFT)

### Fourierreihe (FR)

Kontinuierliche, periodische (unendliche) Zeitfunktion  $f(t) \Leftrightarrow$  (un)endlich breites Linienspektrum  $F(\omega)$ .

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F[k] e^{jk\omega_0 t} \quad (1.39)$$

$$F[k] = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (1.40)$$

### Fouriertransformation (FT)

Endliche, kontinuierliche Zeitfunktion  $f(t) \Leftrightarrow$  unendliches kontinuierliches Spektrum  $F(\omega)$ .

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.41)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1.42)$$

### Zeitdiskrete Fouriertransformation (DTFT)

Endliche, diskrete Zeitfunktion  $x[n] \Leftrightarrow$  periodisches kontinuierliches Spektrum  $X(\omega)$ .

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (1.43)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (1.44)$$

### Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Periodische, diskrete Zeitfunktion  $f[n] \Leftrightarrow$  diskretes, periodisches Spektrum  $F[k]$ .

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{jk\hat{\omega}_0 n} \quad \hat{\omega}_0 = \omega T = \frac{2\pi}{N} \quad (1.45)$$

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-jk\hat{\omega}_0 n} \quad (1.46)$$

Die Transformationsbeziehungen stellen den Zusammenhang zwischen Zeit- und Frequenzbereich her und unterscheiden sich lediglich dadurch, dass bei kontinuierlichen Funktionen Integrale, bei diskreten Funktionen Summen auftreten.

Bei der Zerlegung einer periodischen, kontinuierlichen Funktion ist die Annäherung nichtstetiger Funktionen zwar so genau, dass die Energiedifferenz zwischen Original- und Fouriersignal gegen Null geht, es tritt aber das Gibbs'sche Phänomen auf. Bei diskreten Signalen ist die Fourierzerlegung exakt, d.h. es tritt keine Differenz zwischen Original- und Fourierfolge auf.

Signale können periodisch oder aperiodisch, kontinuierlich oder diskret sein. Je nach Signaltyp verwenden wir die Fourierreihe (periodisch/kontinuierlich), die Fouriertransformation (aperiodisch/kontinuierlich), die Zeitdiskrete Fouriertransformation (aperiodisch/diskret) oder die Diskrete Fouriertransformation (periodisch/diskret).

In allen Fällen sind die Aufbaufunktionen Sinusfunktionen bzw. -folgen, die sich von  $-\infty$  bis  $\infty$  erstrecken. Kontinuierliche, aperiodische Signale brauchen unendlich viele Frequenzkomponenten zur Darstellung der Zeitfunktion.

Es gibt keine Fourierdarstellung für diskrete Signale endlicher Länge. Man behilft sich dadurch, dass man das zeitbegrenzte Signal mit Nullen fortsetzt oder indem man die Zeitfunktion periodisch fortsetzt. Im Fall des Auffüllens mit Nullen gelangt man zur DTFT, die zur Darstellung der Zeitfunktion eine unendliche Zahl von Sinuskomponenten benötigt, was bedeutet, dass es unmöglich ist, die DTFT mit einem Rechneralgorithmus zu berechnen. Die einzige Möglichkeit die uns zur Verfügung steht, ist die DFT, d.h. Rechner können nur mit diskreten Signalen endlicher Länge, die periodisch fortgesetzt sind, rechnen.

## 1.12 Zusammenfassung

In unserer Umwelt treten in der Regel zeit- und amplituden-kontinuierliche Signale auf. Beispiele dafür sind Temperatur-, Druck-, akustische, ... Signale. Die Verarbeitung dieser Signale kann in "analoger" Form durch Meßwertaufnehmer, Verstärker, analoge Filter, ... erfolgen.

Analoge Systeme beruhen in ihrer Wirkungsweise auf Massen und elektrischen Ladungen und den zwischen ihnen wirksamen physikalischen Kräften. Die Beschreibung bzw. mathematische Modellierung derartiger Systeme erfolgt mit den bekannten Gesetzen der Physik.

**Beispiel 9** *Wir betrachten die Schallplatte als Vertreter eines analogen Systems. Die Schallschwingungen eines Mikrofons werden in spiralförmigen, zum Mittelpunkt der Schallplatte verlaufenden Rillen gespeichert. Bei der Wiedergabe wird die Nadel des Tonabnehmers analog zur Schallamplitude bewegt. Diese mechanische Bewegung wird in ein elektrisches Signal umgewandelt, verstärkt und über Lautsprecher wiedergegeben.*

Im Gegensatz zu analogen Systemen stehen digitale Systeme, die auf abstrakten Größen – Zahlen – und der Manipulation dieser Zahlen beruhen. (Die Manipulation der Zahlen wird letztlich durch physikalische (analoge) Prozesse bewerkstelligt, die digital abtrahiert werden.)

Analoge Systeme können groß im Vergleich zu digitalen Systemen sein (Vinylschallplatte  $\Leftrightarrow$  MP3-Spieler) und mehr Energie verbrauchen. Analoge Systeme können schwer modifiziert werden, um sie für eine andere Aufgaben einsetzbar zu machen. Analoge Systeme sind auf Grund ihrer physikalischen Arbeitsweise anfällig für Fehler und Störungen. Dennoch ist der weit überwiegende Teil unserer Systeme analog. Wo es technologisch und wirtschaftlich möglich ist, werden digitale Systeme eingesetzt.

Digitale Systeme sind aus dem Bedürfnis entstanden analoge Systeme mit Digitalrechnern zu untersuchen und erst etwa 50 Jahre alt. Bei der numerischen Berechnung von analogen Systemen müssen auf Grund der Begrenzungen der Digitalrechner (Speichermöglichkeit und Zahlendarstellung) die Signale im Zeit- und im Amplitudenbereich quantisiert werden. Die Quantisierung im Amplitudenbereich wird nach Qualitätsgesichtspunkten durchgeführt, je feiner die Auflösung desto geringer ist die Abweichung vom Originalsignal bzw. das Quantisierungsrauschen. Die Quantisierung im Zeitbereich muss so gewählt werden, dass das abgetastete Signal am Ende einer Verarbeitungskette wieder in ein analoges Signal umgewandelt werden kann. Die Abtastfrequenz wird durch das Abtasttheorem festgelegt und muss größer als die doppelte im Signal enthaltene Frequenzkomponente sein. Es lassen sich also nur bandbegrenzte Signale nach Abtastung rekonstruieren, das trifft aber für alle technischen Signale zu.

Die mathematische Darstellung von Signalen führt in eine abstrakte Welt mit Eigenschaften, die nicht immer leicht verständlich sind.

- Nur Signale unendlicher Dauer haben eine eindeutige Frequenz (Spektrallinie)
- Zeitbegrenzte Signale haben ein unendlich breites (kontinuierliches) Spektrum.
- Die Frequenz eines zeitbegrenzten Signals lässt sich nicht exakt bestimmen und ist "unscharf".
- Durch die Abtastung im Zeitbereich (Darstellung auf Digitalrechnern) wird das Spektrum des abgetasteten Signals periodisch.
- Durch die Abtastung im Frequenzbereich (Darstellung auf Digitalrechnern) wird die Zeitfunktion periodisch.
- Mit anderen Worten: Auf Digitalrechnern lassen sich weder zeitbegrenzte noch bandbegrenzte Signale darstellen, sondern nur periodische Signale. Begrenzung in Zeit und Frequenz entsteht dadurch, dass man nur eine Periode betrachtet.

- Die digitale (numerische) Darstellung von analogen Signalen ist nur mit begrenzter Genauigkeit möglich. Die Genauigkeit kann aber so hoch gewählt werden, dass keine merkbare Abweichung des digitalen vom analogen Signals feststellbar ist.