

Fourier-Zerlegung und Fourier-Reihe

Wir haben uns bei der Berechnung der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten auf Wellen beschränkt, die harmonische Funktionen des Orts und der Zeit sind. Ähnlich sind wir bei der Wellengleichung vorgegangen und ganz am Anfang dieses Kapitel bei den Ortsbildern und Zeitbildern war dies auch der Fall. Dies geschah nicht nur aus dem Bedürfnis heraus, die mathematischen Zusammenhänge möglichst einfach zu halten, sondern auch, weil uns der Satz von *Jean-Baptiste Fourier* (1768 - 1830) lehrt, dass jede periodische Funktion als Summe von harmonischen Funktionen aufgefasst werden kann. Ist $u(t)$ eine solche periodische Funktion mit einer Periode T , d. h. $u(t + T) = u(t)$, dann gilt

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \quad \text{mit } \omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

Sind die Fourier-Koeffizienten A_n und B_n bekannt, so ist $u(t)$ eindeutig bestimmt. Ist umgekehrt $u(t)$ vorgegeben, so lassen sich A_n und B_n berechnen:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt, & B_0 &= 0 \\ A_n &= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(\omega_n t) dt, & B_n &= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(\omega_n t) dt \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

Die Fourier-Koeffizienten oder ihre graphische Darstellung, das sogenannte Frequenzspektrum eignen sich sehr gut dazu, komplizierte periodische Funktionen eindeutig zu charakterisieren. Dies gilt nicht nur für Zeitfunktionen, wie sie z. B. beim Hörvorgang oder auch medizinischen Diagnosemethoden wie Elektrokardiogrammen und Elektroencephalogrammen aufgenommen werden, sondern auch für Orts-Funktionen. Wenn man eine Ortsfunktion nach Fourier-Komponenten zerlegt, muss die Frequenz ω und die Periode T durch die Wellenzahl k und die Wellenlänge λ ersetzt werden:

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x + \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos k_n x + B_n \sin k_n x) \quad \text{mit } k_n = \frac{2\pi n}{\lambda} \\ A_0 &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} u(x) dx, & B_0 &= 0 \\ A_n &= \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} u(x) \cos(k_n x) dx, & B_n &= \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} u(x) \sin(k_n x) dx \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

Auch nicht-periodische Funktionen ($T \rightarrow \infty$) lassen sich nach Fourier zerlegen. Statt der Fourier-Koeffizienten A_n und B_n , die zu festen Werten von $\omega = \omega_n$ gehören, statt eines diskreten Frequenzspektrums, erhalten wir dann eine kontinuierliche Frequenz-Verteilung $A(\omega)$, bzw. $B(\omega)$, die Fourier-Summe wird zum Fourier-Integral.

Abbildung 1 zeigt als Beispiel die Fourier-Zerlegung der periodischen *Sägezahn*-Funktion:

$$u(x) = 1 - 2\frac{x}{\lambda}, \quad 0 \leq x \leq \lambda; \quad u(x + \lambda) = u(x)$$

Aus den obigen Formeln können wir die Koeffizienten berechnen

$$A_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda \left(1 - 2\frac{x}{\lambda}\right) \cos(k_n x) dx = 0, \quad B_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda \left(1 - 2\frac{x}{\lambda}\right) \sin(k_n x) dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n}$$

und es ergibt sich

$$u(x) = 1 - 2\frac{x}{\lambda} = \frac{2}{\pi} \left(\sin kx + \frac{1}{2} \sin(2kx) + \frac{1}{3} \sin(3kx) + \dots \right) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{2\pi n x}{\lambda}\right)$$

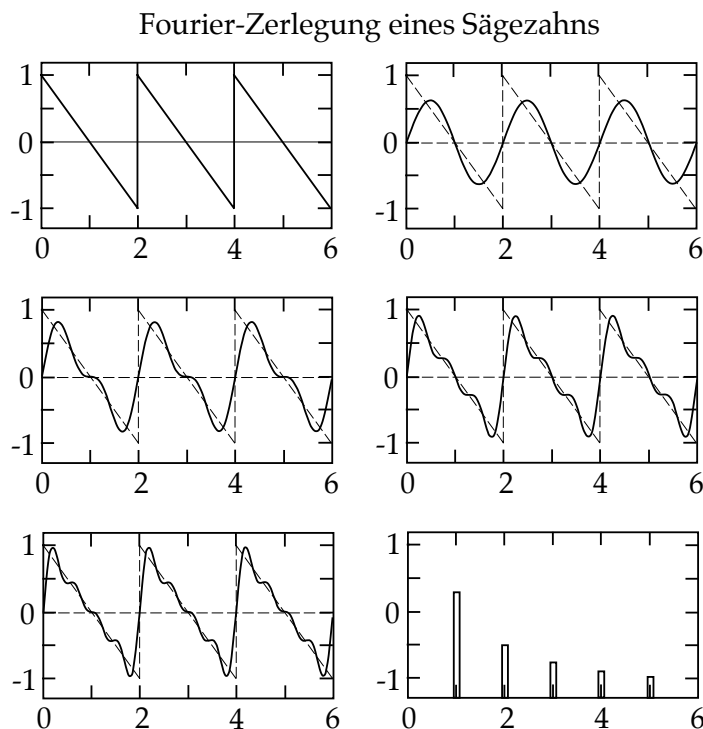


Abbildung 1: Die im ersten Bild (oben links) dargestellte Sägezahn-Kurve wird in ihre Fourier-Komponenten zerlegt. Das zweite bis fünfte Bild zeigen die Kurve im Vergleich zur Fourier-Reihe, die nach dem ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Term abgebrochen wird. Das letzte Bild (unten rechts) zeigt das dazugehörige Fourier-Spektrum, d.h. die Amplitude des entsprechenden Summanden in der Fourier-Reihe.

In jedem schwingungsfähigen System, das in der Musikerzeugung eingesetzt wird, ob es nun die Saite einer Geige ist oder die Luft in einer Orgelpfeife, werden die Oberschwingungen gleichzeitig mit den Grundschrwingungen angeregt. Die relativen Anteile der Obertöne entsprechen dann gerade den Fourierkoeffizienten. Sie bestimmen die Klangfarbe eines Instruments. (Für den spezifischen Klangfarbe eines Musikinstrumentes spielt allerdings auch die Art der Anregung eine wichtige Rolle). In der Tat differieren die Wellenformen verschiedener Blasinstrumente sehr stark, auch wenn die gleiche Note gespielt wird (Abbildung 2).

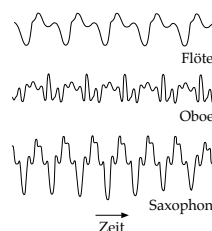


Abbildung 2: Wellenformen verschiedener Blasinstrumente.