Einführung Internet Computing Teil 2 Medien und Information

Kapitel 1: Digitalisierung und Kodierung

Michael Granitzer

Harald Kosch

Universität Passau

Kapitel EIC Teil 2- Medien und Information:I

- I. EIC Teil 2- Medien und Information
 - Digitalisierung
 - Kodierung
 - □ Informationstheorie
 - Kompression

Lernziele

- Digitalisierung und Abtasttheorem wie entstehen digitale Medien?
- Kodierung von Medien wie werden digitale Medien repräsentiert?
- Informationstheorie wie kann man den Gehalt von Information messen und was sind gute Repräsentationsformen von Medien?
- Kompression wie kann ich Repräsentationsformen automatisiert optimieren, d.h. kürzere Kodierungen für die gleiche Information finden?

Einleitung

Digitale Medien

Definition 1 (Digitale Medien)

Digitale Medien sind Medien, welche in digitaler Form gespeichert, verarbeitet oder manipuliert werden.

Typische Beispiele digitaler Medien und Computer-gestützter Funktionen:

- Datenträger/Darstellungstechniken: eBooks, digitales Fernsehen, digitale
 Bilder
- Neue Medien und Interaktionsparadigmen: World Wide Web, Hypertext,
 Ubiquitous Computing
- Erstellung/Manipulation von Inhalten: Rechner-basierte Authoring Tools und Programme zur Medienbearbeitung

Wie können Medien digitalisiert und kodiert werden?

Kapitel EIC Teil 2- Medien und Information:I

- I. EIC Teil 2- Medien und Information
 - Digitalisierung
 - □ Kodierung
 - □ Informationstheorie
 - Kompression

Analoge Signale

Definition 2 (Analoges Signal)

Ein analoges Signal ist die deterministische Änderung einer physikalischen Größe (entlang Raum und/oder Zeit) entsprechend einem Messwert der zu übertragenen Information. Das analoge Signal kann als wertkontinuierliche Funktion $f(x_1, x_2, \ldots)$ von ein bis mehrerer unabhängigen kontinuierlichen Variablen (z.B. Raum, Zeit) aufgefasst werden.

Eigenschaften von Signalen

- Kontinuierlich bedeutet, dass für jeden beliebigen Wert der unabhängigen Variablen, das Signal einen Wert aus einem beliebig genauen Wertebereich annehmen kann
- In analogen Signalen sind prinzipiell "beliebig" genaue Beobachtung möglich (bei idealen Messgeräten)
- Analoge Signale sind störanfällig bei Übertragung oder Vervielfältigung

Beispiele für analoge Signale

- Helligkeit einer Lichtquelle in Candela
- Farbton einer Lichtquelle (Wellenlänge)
- Luftdruck Schwankungen als Schall
- Drehzahl eines rotierenden Objekts
- Mechanische Kraft
- Elektrische Spannung
- □ Elektrischer Widerstand, elektrische Kapazität

Digitales Signal

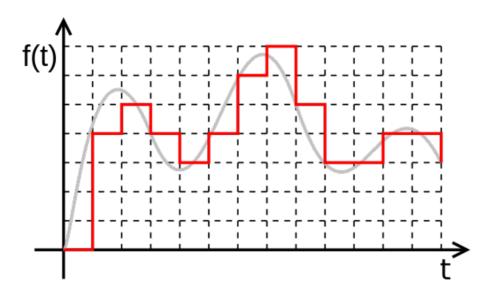
Definition 3 (Digitales Signal)

Ein digitales Signal ist die Repräsentation eines analogen Signals durch eine abzählbare, diskrete Anzahl von Werten zu einer diskreten, abzählbaren Anzahl von Zuständen. Das digitale Signal kann als Funktion $f(x_1, x_2, \ldots)$ mit abzählbaren, diskreten Wertebereiche von ein bis mehrerer unabhängigen, diskreten Variablen (z.B. Raum, Zeit) aufgefasst werden

Eigenschaften Digitales Signal

- □ Raum- und Zeitwerte eines Signals werden durch einen endlichen (meist numerischen) Zeichenvorrat repräsentiert
- □ Digitale Signale sind Annäherungen an das Originalsignal
- Digitale Signale sind eine Reihe von binär repräsentierten Zahlen, welche verlustfrei vervielfältigt werden können
- Entstehung digitaler Signale:
 - Synthese: Digitales Signal wird aus anderen digitalen Signale errechnet
 - Abtastung: Ein gegebenes analoges Signal wird diskretisiert.
 - Bemerkung: Ein "analoges Signal" kann auch als ideale mathematische Funktion (z.B. 3D Modell für Film) vorliegen

Digitales Signal - Beispiel



Bildquelle Wikipedia

Unterscheidung: Diskretisierung vs. Quantisierung

Digitales Signal - Diskretisierung/Quantisierung

Die Umwandlung eines analogen in ein digitales Signal, die **Digitalisierung**, entsteht durch Abtastung entlang des **Signalverlaufs (Diskretisierung)** und der **Signalstärke (Quantisierung)**

Definition 4 (Diskretisierung (Sampling))

Bei der (Abtastachsen-)Diskretisierung wird ein festes Raster von Messpunkten gleichen Abstands Δt auf der Achse festgelegt, über die sich das analoge Signal verändert. Der aktuelle Wert des Signals zu den Messpunkten dieses Rasters bezeichnet man als Sample (Messwert).

- Die Dichte der Messwerte wird als Abtastrate (Sampling Rate) bezeichnet.
- Das feste Raster können Zeitpunkte sein (Beispiel Audiosignal) oder aber auch Raumdimensionen (Beispiel Pixel)
- □ Die Höhe der Abtastrate spezifiziert wie genau das Originalsignal wieder rekonstruiert werden kann

Digitales Signal - Diskretisierung/Quantisierung

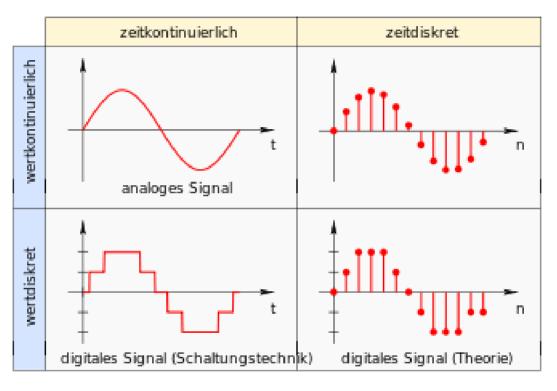
Definition 5 (Quantisierung)

Die Quantisierung entspricht der Überführung der bei der Diskretisierung erhaltenen Messwerte auf einen diskreten, abzählbaren Wertebereich (meist im Binärsystem).

Eigenschaften:

- Jedem Messwert wird einer Zahl in einem abzählbaren Wertebereich zugeschrieben
- Die Kodierung erfolgt im Allgemeinen im binären Zahlensystem
- Auflösung: Bits pro Sample (bit resolution)
- Die Genauigkeit abhängig von der Anzahl der Bits pro Messwert

Kategorisierung von Signalen



Bildquelle Wikipedia

Kategorisierung von Digitalisierungsverfahren

Das Verfahren wird auch als **Pulse Code Modulation (PCM)** oder**waveform encoding** bezeichnet. In der technischen Realisierung der PCM können folgende Verfahren unterschieden werden:

Eigenschaften:

- Lineare PCM: Die Quantisierung findet in fixen Intervallen gleicher Größe statt.
- Dynamische PCM: Die Quantisierung findet in fixen Intervallen unterschiedlicher Größe statt (z.B. logarithmische Skala bei Audio Signalen zur Optimierung f. d. menschliche Wahrnehmung).
- Differenz PCM: Es werden nur die Differenzen zweier Abtastwerte kodiert.
 Bei sich langsam verändernden Signalen kann so die benötigte
 Kodierungsgröße reduziert werden.

Digitalisierung unterschiedlicher Medienarten

Verschiedene (Repräsentations-)Medien haben verschiedene Arten von Bezugs- und Wertachsen für die Signale (abweichende Terminologie)

Audio

- □ x-Achse = Zeit, y-Achse = Amplitude
- Genauigkeit der Diskretisierung = Abtastrate (sampling rate) (Hz)
- □ Genauigkeit der Quantisierung = Auflösung (resolution) (Bit)

Bild

- □ Zwei räumliche Achsen (x,y), z-Achse = Helligkeit/Farbwert
- Genauigkeit der Diskretisierung = r\u00e4umliche Aufl\u00f6sung (Dichte der Bildelemente, z.B. dots per inch)
- Genauigkeit der Quantisierung = Farb- bzw. Grauwertauflösung (color resolution in bit, z.B. 16 Bit Farbtiefe)

Generalisierung der Darstellungsdimension

Ein Medium kann bis zu drei räumliche Dimensionen und eine zeitlich Dimension enthalten

- □ Text: Eine räumliche (oder zeitliche) Dimension
- Bild: Zwei räumliche Dimensionen
- □ Video: Zwei räumliche Dimensionen, eine zeitliche Dimension
- Raumklang und 3D-Video: Drei r\u00e4umliche Dimensionen, eine zeitliche Dimension

Man spricht von raumabhängigen und zeitabhängigen Medien

Informationserhaltende Transformationen möglich

- □ z.B. Scrollen (Raum ⇒ Zeit)
- □ z.B. Notenschrift (Zeit ⇒ Raum)

Vorteile digitaler Signale

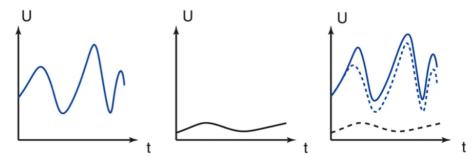


Abbildung 2.2: Analoges Signal und Störsignal: links Originalsignal, Mitte Störsignal, rechts resultierendes analoges Signal

Bildquelle [Malaka et.al. 2009]

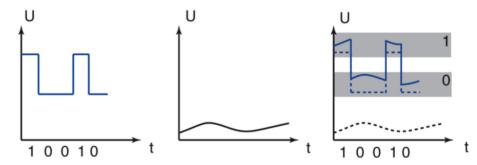


Abbildung 2.3: Digitales Signal und Störsignal: links Originalsignal, Mitte Störsignal, rechts resultierendes analoges Signal

Bildquelle [Malaka et.al. 2009]

Vor- und Nachteile

Vorteile

- Unempfindlichkeit gegen Störungen des Übertragungs- bzw.
 Speichermediums (e.g. magnetische Instabilität)
- Fehlererkennung/-korrektur durch entsprechende Codierung möglich ("error correcting codes")
- Verlustfrei kopierbar
- Viele Signale entstehen bereits in digitaler Form

Nachteile

- Informationsverlust
- Hoher Speicheraufwand/große Kanalkapazität
- Konvertierung mit Rechenaufwand verbunden

Abtasttheorem

Fragen:

- Wie gut kann das Originalsignal repräsentiert werden?
- Was sind gute Diskretiesierungsintervalle?

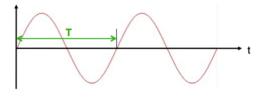
Lehrziel:

- Einführung einer präziseren Definition von Signalen
- \Box Erklärung Abtasttheorem: $f_{abtastung} > 2 * f_{max}$
- Effekte unzureichender Abtastung

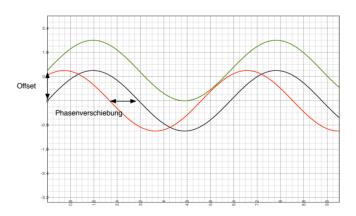
Eigenschaften Analoger Signale

Analoge Signale können als Summe von potentiell unendlich vielen periodische Sinusoiden-Signalen aufgefasst werden.

- Periodische bedeutet, dass sich der Signalverlauf regelmäßig wiederholt
- □ **Amplitude A**: Auslenkung des Signals
- Periodenlänge T: Dauer bis zum Beginn der nächsten Wiederholung
- ☐ Frequenz f: Anzahl der Wiederholungen pro Sekunde
- $oldsymbol{\square}$ Zusammenhang: $T=rac{1}{f}$
- □ Phasenverschiebung Φ: Verschiebung des Startzeitpunktes des Signals
- □ Offset/Gleichanteil *DC*: Verschiebung des Signals um einen konstanten Faktor



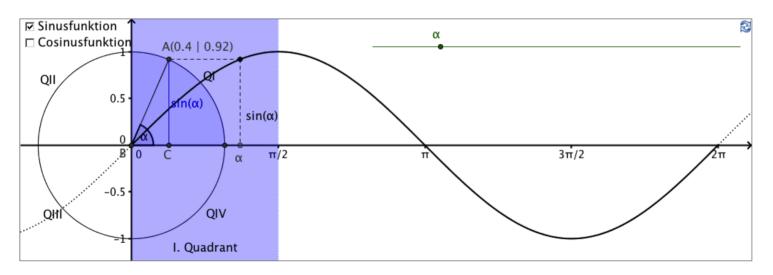
Quelle Prof. Butz, LMU



Modell zur Entstehung sinusoider Signale

Enstehung über einen sich am Einheitskreis mit der Zeit drehenden Zeiger.

- □ **Bogenmaß**: Angabe des Winkels als Teil des Umfangs eines Einheitskreises (2π) z.B. $(90^{\circ} = \pi/2, 360^{\circ} = 2\pi)$
- □ **Kreisfrequenz** ω: Pro Sekunde von einem drehenden Zeiger $ω = 2π \cdot f = 2π/T$ (Anmerkung: Winkelangabe in Radian, d.h. 2π = 360)



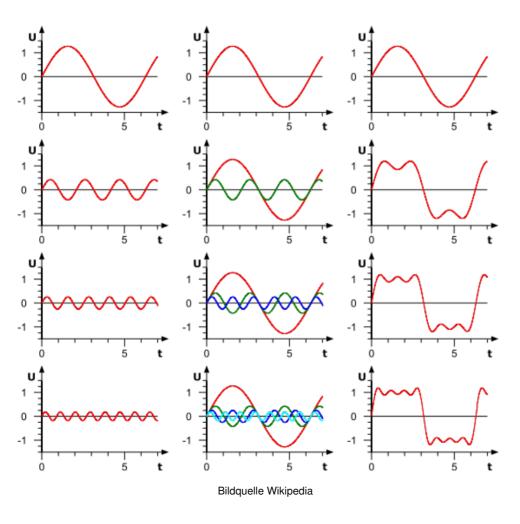
Sinusoide Signale: Sinus plus variable Phasenverschiebung.

(Demo unter

http://www.wi.uni-muenster.de/qm/organisation/terveer/analysis_brueckenkurs/DGS_5/Sources/abb_5_7_sinusfunktion_genese.html)

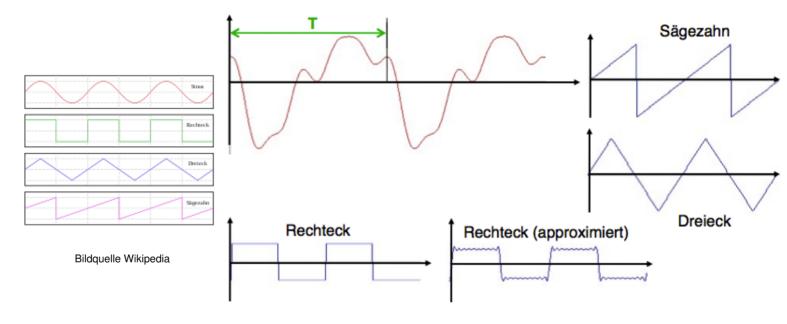
Überlagerung von sinusoider Signale

Wie sieht dies nun für komplexere Signale aus?



Fourier Theorem: Jedes periodische Signal kann durch eine potentiell unendliche Anzahl von Cosinus u. Sinus konstruiert werden. D.h. wir können uns bei der Analyse analoger Signale auf die Analyse sinusoider Funktionen beschränken.

Beispiele periodischer Signale



- Quelle Prof. Butz, LMU
- Können die Originalsignale nach Digitalisierung rekonstruiert werden?
- Welche Effekte erzeugt eine zu niedrige Abtastrate?

Was passiert bei zu geringer Abtastrate?

Beispiel eines komplexeren periodischen Beispielsignals

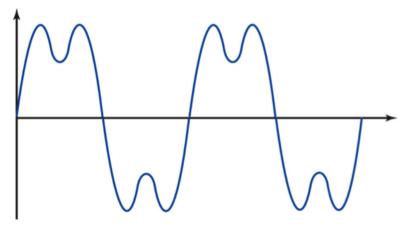


Abbildung 2.4: Ein periodisches Beispielsignal

Was passiert bei zu geringer Abtastrate?

Zu niedrige Abtastrate

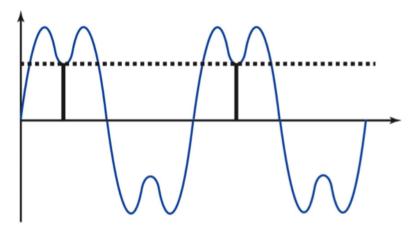


Abbildung 2.5: Abtastung mit zu niedriger Abtastrate I

Das Abastsignal ist als idealisierters periodisches Impulssignal (in schwarz) dargestellt und definiert die Diskretisierungseitpunkte.

Was passiert bei zu geringer Abtastrate?

Zu niedrige Abtastrate

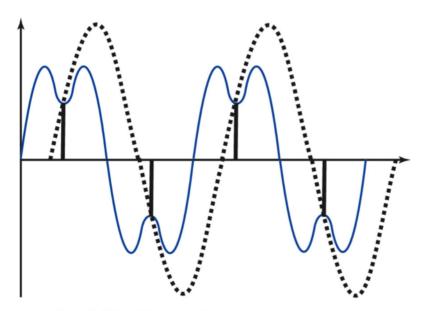
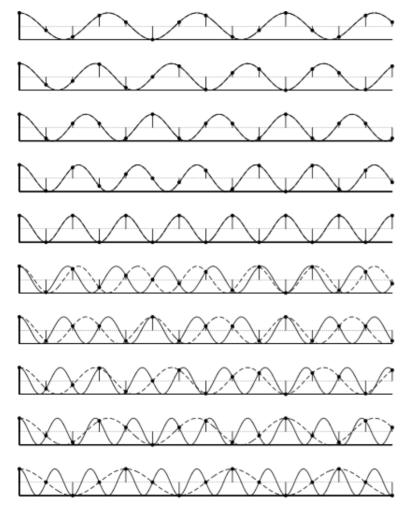


Abbildung 2.6: Abtastung mit zu niedriger Abtastrate II

Was passiert bei zu geringer Abtastrate?



Bildquelle Wikipedia

- □ Fixe Abtastrate (Punkte)
- □ Steigende Signalfrequenz (von oben nach unten)
- □ Liegt die höchste Signalfrequenz über der halben Abtastfrequenz kann das Signal nicht mehr korrekt rekonstruiert werden (siehe gestrichelte Linie)

Abtasttheorem (Nyquist-Shannon-Abtasttheorem)

Satz 1 (Abtasttheorem (Nyquist-Shannon-Abtasttheorem))

Wenn eine Funktion (Signal) mit höchster vorkommender Frequenz f_g (Bandbegrenzung) mit einer Abtastrate f_S abgetastet wird, so dass

$$f_S > 2 * f_g$$
,

dann kann diese Funktion eindeutig aus den Abtastwerten rekonstruiert werden.

Entwickelt von Harry Nyquist (1928) und bewiesen durch Claude Shannon

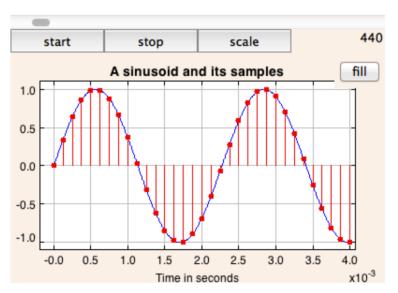
Beispiele:

- Abtastrate für Audio CDs ist 44,1 kHz bei maximaler Höhrfrequenz des Menschen mit 20 kHz
- Telefonsprachverbindung (ISDN): 8 kHz (ausreichend für menschliche Sprache)

Aliasing

Wird ein Signal mit zu geringer Frequenz abgetastet, spricht man vom "Aliasing" (Alias ist der Stellvertreter)

Beispiel Audio: liegt die Frequenz des Signals über der halben Abtastfrequenz, sinkt die Frequenz des Digitalen Signals



Applet unter http://www.aw-bc.com/lee_varaiya/protected/week13/aliasing.html

Aliasing

Klassische Aliasing Effekte bei Bilddarstellung



Morie Effect: Ziegelwand mit Morie-Effekt entstanden durch nicht ausreichende Abtastfrequenz bei wellenförmiger Helligkeitsverläufe



Ohne Morie-Effekt



mit Morie-Effekt

Vermeidung von Aliasing durch Filterung aller Frequenzen im analog Signal mit höheren Anteilen als die Abtastrate ($\geq 0.5f_s$)

Speicherbedarf für Digitale Medien

Aus den Abtastraten lässt sich der Speicherbedarf von Digitalen Medien einfach ermitteln.

- Audio: 44 kHz pro Sekunde, 16 Bit pro Sample (= 2^{16} unterschiedliche Töne) \Rightarrow 1,4 MBit/s bzw. 635 MByte pro Stunde
- □ Bilder: 8 Millionen Pixel, 3 Farbkanäle, 8 bit pro Kanal ⇒ 24 MByte pro Bild

Relativ hoher Speicherbedarf im Rohformat. Notwendigkeit für effiziente Kodierung und Kompression (siehe nächste Abschnitte)

Digitalisierung - Zusammenfassung

Zusammenfassung

Digitalisierung und Abtasttheorem

Gegeben Analoges Signal als veränderliche physikalische Größe:

- Diskretisierung der Ausbreitungsrichtung (räumlich und/oder zeitlich) eines Signals
- Quantisierung der Signalstärke
- ⇒ Digitales Signal

Zu berücksichtigen:

- Signale können als Überlagerung von potentiell unendlich vielen Sinus/Cosnius Signalen aufgefast werden (Fourier Theorem)
- Abtasttheorem/Nyquist-Frequenz: Mehr als doppelte Abtastfrequenz der höchsten im Signal vorkommenden Frequenz garantiert vollständige Rekonstruktion des Signals (unter der Annahme periodischer Signale und genügender Quantisierung)
- Aliasing entsteht, wenn das Abtasttheorem verletzt wird.

Kapitel EIC Teil 2- Medien und Information:I

- I. EIC Teil 2- Medien und Information
 - Digitalisierung
 - □ Kodierung
 - □ Informationstheorie
 - □ Kompression



Kodierung - Repräsentation von Information

Was ist Information?

Information ist ein nichtstoffliches Phänomen, welches durch die Interpretation Zeichen entsteht, die man die Repräsentation der Information nennt. In der physikalischen Welt erfolgt diese Repräsentation durch analoge Signale.

In der Informatik repräsentiert man Information im Allgemeinen durch folgende Komponenten:

- □ **Zeichenvorrat:** Mengen von endlichen Zeichen zur Repräsentation von Information (z.B. Buchstaben bei Sprache, Zahlen bei Bild)
- Nachricht: Eine Sequenz von Zeichen aus einem Zeichenvorrat A bezeichnet man als Nachri cht.
- \Box Die Menge aller Nachrichten wird mit A^* bezeichnet

Beispiele für Nachrichten

- \square Nachricht=<01010101>; Zeichenvorrat= $\{0,1\}$
- □ Nachricht 1 =< Medien >, Nachricht 2 =< nedi >; Zeichenvorrat = $\{M, e, d, i, e, n\}$

Kodierung - Repräsentation von Information

Kodierung von Information

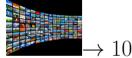
Definition 6 (Kodierung)

Seien A und B Zeichenvorräte. Eine Kodierung c ist eine Abbildung von Nachrichten in A auf Nachrichten in B

$$c:A\to B*$$

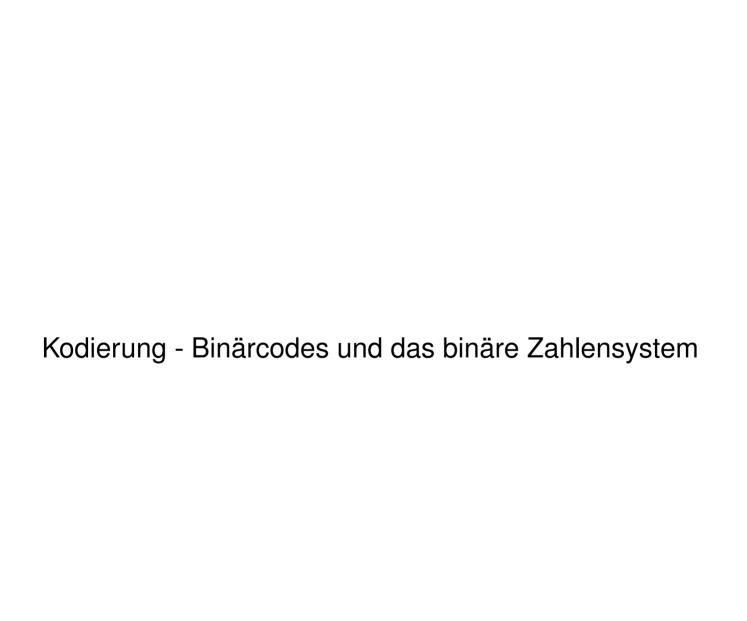
Beispiele:

- $\Box ababa \rightarrow 00010001010010101010101010101$
- $127, 168, 24 \rightarrow Michael$



Fragen:

- Welche Arten von Kodierungen kann man Unterscheiden?
- Was sind nun effiziente Kodierungen für verschiedene Informationen?
- Wieviel Information steckt in einer Nachricht?



Motivation

Digitale Geräte basieren auf digitalen Schaltungen welche zwei Zustände unterscheiden können:

- □ Strom Ein (oder 1)
- □ Strom Aus (oder 0)

Auf digitalen Geräten wird Information daher als Binärcode repräsentiert. Die Digitalisierung kann somit auch als Kodierung eines analogen Signales in einen Binärcode verstanden werden.

Formale Definition

Definition 7 (Binärcode)

Ein Binärcode c ist eine Kodierung, bei dem der Ziel-Zeichenvorrat B (die Bildmenge) aus genau zwei Symbolen besteht. Diese werden als Bit (binary digit) bezeichnet.

- fineq Das duales Zahlensystem bestehend aus dem Zeichenvorrat $A=\{0,1\}$ ermöglicht arithmethische Operationen im Binärcode
- \Box Die Boolesche Algebra (Aussagenlogik), bestehend aus dem Zeichenvorrag $A = \{Wahr, Falsch\}$, ermöglicht logische Operationen
- Alle weiterführenden Kodierungen, wie z.B. Zeichensätze, Audio, Bilder,
 Videos, Programme etc. werden auf binäre Codes zurückgeführt.

Duales Zahlensystem

Fragestellung: Wie sieht ein Binärcode zur Repräsentation eines analogen Signals (z.B. Schalldruck) aus, sodass die arithmetische Operationen wie Addition, Subtraktion, Multiplikation erhalten bleiben?

Ein solcher Code ermöglicht beispielsweise die Addition zweier Signale oder die mathematische Analyse mittels digitalen Geräten (Bild- oder Videobearbeitung, digitale Signalanalyse, Musikkomposition etc.).

Duales Zahlensystem - Definition

Beobachtung: Unser dezimales Zahlensystem ist ein Positionssystem mit der **Basis 10**, in dem eine Zahl in 10er Potenzen zerlegt wird.

Definition 8 (Positionszahlensystem)

Ein Positionszahlensystem mit der Basis B zerlegt ein Zahl $n = < b_0, b_2, \ldots, b_{N-1} >$ in Ziffern $< b_0, b_2, \ldots, b_{N-1} >$ mit N Stellen aufsteigend geordnet nach Potenzen von B. Der Wert der Zahl n kann als folgende Summe berechnet werden:

$$\sum_{i=0}^{N-1} b_i \cdot B^i$$

wobei gilt

- $\Box B \in \mathbb{N} \text{ uynd } B \geq 2$
- $b_i \in \mathbb{N}_0, 0 \ge b_i < B$

Duales Zahlensystem - Beispiele

Mit Änderung der Basis ändert sich auch das Zahlensystem und die notwendige Anzahl der Ziffernzeichen:

- \Box Dezimalsystem: B = 10, Ziffern 0 9
- \Box Binär- bzw. Dualsystem: B = 2, Ziffern $\{0, 1\}$
- \Box Octalsystem: B = 8, Ziffern 0 7
- \Box Hexadezimalsystem: B=16, Ziffern $\{0-9,A,B,C,D,E,F\}$

Beispiele:

 $n_2 = 1101$

Zahlenwert
$$n_{10} = 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 1 * 8 + 1 * 4 + 0 * 2 + 1 * 1 = 13$$

 $n_{16} = BAB$

Zahlenwert
$$n_{10} = 11 * 16^2 + 10 * 16^1 + 11 * 16^0 = 11 * 256 + 10 * 16 + 11 * 1 = 2987$$

 $n_8 = 3110$

Zahlenwert
$$n_{10} = 3 * 8^3 + 1 * 8^2 + 1 * 8^1 + 0 * 8^0 = 1608$$

Duales Zahlensystem - Hex, Octal und Binär

Das Hexadezimal- und Oktalsystem stellen eine kürzere, einfach ermittelbare Schreibweise zum Binärsystem dar, da ihre Basen Potenzen von 2 darstellen. Eine Umrechnung ist einfach möglich, da Hexadezimalzahlen durch 4 Bit und Oktalzahlen durch 3 Bit repräsentiert werden können:

n_{10}	n_2	n_8	n_{16}
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Duales Zahlensystem - Umwandlung aus dem Dezimalsystem

Für die Umwandlung einer Dezimalzahl x in ein Zahlensystem mit der Basis B kann folgender Algorithmus verwendet werden:

- 1. Division durch Basis: $\frac{x}{B} = y \ Rest \ z$
- 2. Mache *y* zum neuen *x*
- 3. Solange x ungleich 0 gehe zu Schritt 1
- 4. Die ermittelten Reste z von unten nach oben nebeneinander (von links nach rechts) geschrieben ergeben die entsprechende Zahl zur Basis B

Warum?

Laut Hornerschema kann ein Zahl zur Basis *B* wie folgt zerlegt werden:

$$\sum_{i=0}^{N-1} b_i \cdot B^i = (\dots(((b_N * B_N + b_{N-1}) * B + b_{N-2}) * B + \dots + b_1) * B + b_0$$

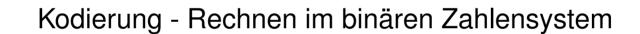
Eine Division der obigen Summe durch *B* ergibt:

$$y = (\dots(((b_N * B_N + b_{N-1}) * B + b_{N-2}) * B + \dots + b_1) \text{ und } z = b_0$$

Duales Zahlensystem - Umwandlung aus dem Dezimalsystem

Beispiel: $n_{10} = 68$ im Dualsystem?

$$n_{10} = 68 \rightarrow n_2 = 1000100$$



Arithmetische Operationen

Das binäre Zahlensystem erlaubt alle arithmetischen Operationen und ist somit äquivalent zum Dezimalsystem. Es gelten die gleichen Rechenregeln:

\boldsymbol{x}	y	x + y	x - y	x * y	x/y
0	0	0	0	0	not defined (n.d.)
0	1	1	-1 bzw. 11 ¹	0	0
1	0	1	1	0	not defined (n.d.)
1	1	10	0	1	1

Bei der Subtraktion entspricht 11 der B-Komplementdarstellung, die auf den nächsten Folien erklärt wird.

Arithmetische Operationen

Beispiel Addition mehrstelliger Zahlen:

X	10011011	(155)
у	00111110	(62)
Übertrag	01111100	
Ergebnis	11011001	(217)

Wichtig: der Übertrag erfolgt immer wenn die Summe größer 1 wird

Arithmetische Operationen

Zur Subtraktion müssen wir noch überlegen, wie negative Zahlen dargestellt werden können. Im Normalfall werden negative Zahlen durch ihren Betrag mit vorangestellten Minus dargestellt, worauf ein Bit verwendet werden könnte. Um jedoch die Subtraktion rechnerisch mittels Addition abzubilden (und somit die Rechnerarchitektur zu vereinfachen), wird auf die so genannten **Zweierkomplementdarstellung** zurückgegriffen.

In der Zweierkomplementdarstellung (oder auch B-Komplement darstellung wobei B die Basis, im dual System also 2, angibt) werden negative Zahlen durch ein auf 1 gesetztes führendes Bit dargestellt. Die positiven Zahlen inklusive 0 werden durch ein auf 0 gesetztes führendes Bit dargestellt.

Arithmetische Operationen

Zweierkomplement: Beispiel mit drei Bit:

Dezimal	B-Komplement	mit Vorzeichen Bit
-4	100	NA
-3	101	111
-2	110	110
-1	111	101
0	000	000 od. 100
1	001	001
2	010	010
3	011	011

Wie erkennbar "verschwendet" das Vorzeichenbit zwei Binäerzahlen zur Kodierung der 0.

Arithmetische Operationen

Das Zweierkomplement wird wie folgt erzeugt:

- 1. Konvertiere die Zahl ohne Vorzeichen in das Binärsystem
- 2. Invertiere die Bits der konvertierten Zahl
- 3. Addiere 1 zur invertierten Zahl.

Beispiel für -5:

Umwandeln	0101
Invertieren	1010
+1	1011

Arithmetische Operationen

Beispiel Subtraktion mehrstelliger Zahlen: 155-62.

- 1. Wir rechnen 155 + (-62).
- 2. Zweierkomplementdarstellung von 62:

Umwandeln 000111110 Invertieren 111000001 +1 111000010

3. Durchführen der Addition:

X	010011011	(155)
У	111000010	(-62)
Übertrag	100000100	Das führende Übertragsbit wird verworfen
Ergebnis	001011101	(93)

Kodierung - ASCII Code

Kodierung - ASCII Code

ASCII Code

Eine ander Art der Kodierung sind Zeichensatzkodierungen, wie der American Standard Code for Information Interchange (kurz ASCII Code).

Der Zeichensatz kodiert mit 7-Bit das lateinische Alphabet in Groß- und Kleinschreibung, die arabischen Ziffern sowie Satzzeichen und Sonderzeichen. Er beinhaltet alle wesentlichen Zeichen einer Tastatur.

Jedem Zeichen des Zeichensatzes wird dabei ein Binärcode per Definition zugewiesen. D.h. es gibt 128 verschiedene Bitmuster.

Kodierung - ASCII Code

ASCII Code

```
Dec Hx Oct Html Chr
                                                            Dec Hx Oct Html Chr Dec Hx Oct Html Chr
Dec Hx Oct Char
                                       32 20 040   Space
                                                             64 40 100 @ 0
                                                                                 96 60 140 @#96;
    0 000 NUL (null)
    1 001 SOH (start of heading)
                                       33 21 041 6#33; !
                                                             65 41 101 A A
                                                                                 97 61 141 @#97;
                                       34 22 042 6#34; "
                                                             66 42 102 B B
                                                                                 98 62 142 @#98;
    2 002 STX (start of text)
                                                             67 43 103 C C
                                                                                 99 63 143 @#99;
    3 003 ETX (end of text)
                                       35 23 043 4#35: #
                                                                               100 64 144 @#100; d
    4 004 EOT (end of transmission)
                                       36 24 044 @#36; $
                                                             68 44 104 D D
                                                                               101 65 145 @#101; 6
    5 005 ENQ (enquiry)
                                       37 25 045 % %
                                                             69 45 105 E E
                                                             70 46 106 @#70; F
                                                                               102 66 146 @#102; f
    6 006 ACK (acknowledge)
                                       38 26 046 4#38; 4
                                       39 27 047 4#39; '
                                                                               103 67 147 @#103; g
   7 007 BEL (bell)
                                                             71 47 107 &#71: G
                                                                               104 68 150 @#104; h
    8 010 BS
                                       40 28 050 4#40; (
                                                             72 48 110 H H
              (backspace)
                                                             73 49 111 6#73; I
                                                                               105 69 151 i i
    9 011 TAB (horizontal tab)
                                       41 29 051 4#41; )
                                                             74 4A 112 @#74; J
                                       42 2A 052 @#42; *
                                                                               106 6A 152 @#106; j
   A 012 LF
10
              (NL line feed, new line)
    B 013 VT
                                       43 2B 053 6#43; +
                                                             75 4B 113 6#75; K
                                                                               107 6B 153 k k
              (vertical tab)
11
   C 014 FF
              (NP form feed, new page)
                                       44 20 054 6#44;
                                                             76 4C 114 L L
                                                                               108 6C 154 l 1
                                       45 2D 055 6#45; -
             (carriage return)
                                                             77 4D 115 6#77; M
                                                                               109 6D 155 m m
   D 015 CR
                                                                               110 6E 156 @#110; n
14 E 016 SO
              (shift out)
                                       46 2E 056 .
                                                             78 4E 116 N N
15 F 017 SI
              (shift in)
                                       47 2F 057 @#47; /
                                                             79 4F 117 @#79; 0
                                                                               111 6F 157 @#111; 0
16 10 020 DLE (data link escape)
                                       48 30 060 4#48; 0
                                                             80 50 120 P P
                                                                               112 70 160 @#112; p
                                       49 31 061 4#49; 1
                                                             81 51 121 6#81; 0
                                                                               113 71 161 @#113; q
17 11 021 DC1 (device control 1)
                                       50 32 062 4#50; 2
                                                             82 52 122 6#82; R
                                                                               114 72 162 @#114; r
18 12 022 DC2 (device control 2)
19 13 023 DC3 (device control 3)
                                       51 33 063 4#51; 3
                                                             83 53 123 4#83; 5
                                                                               115 73 163 @#115; 3
20 14 024 DC4 (device control 4)
                                                                               116 74 164 @#116; t
                                       52 34 064 4#52; 4
                                                             84 54 124 @#84; T
                                       53 35 065 4#53; 5
                                                                               117 75 165 @#117; <mark>u</mark>
21 15 025 NAK (negative acknowledge)
                                                             85 55 125 U U
                                                                               118 76 166 @#118; V
22 16 026 SYN (synchronous idle)
                                       54 36 066 4#54; 6
                                                             86 56 126 V V
                                                             87 57 127 4#87; ₩
                                                                               119 77 167 w ₩
23 17 027 ETB (end of trans. block)
                                       55 37 067 4#55; 7
                                       56 38 070 4#56; 8
                                                             88 58 130 6#88; X
                                                                               120 78 170 @#120; X
24 18 030 CAN (cancel)
                                       57 39 071 4#57; 9
                                                                               121 79 171 @#121; Y
25 19 031 EM (end of medium)
                                                             89 59 131 Y Y
                                                                               122 7A 172 @#122; Z
                                       58 3A 072 4#58; :
26 1A 032 SUB (substitute)
                                                             90 5A 132 Z Z
                                       59 3B 073 4#59; ;
                                                             91 5B 133 [ [
                                                                               123 7B 173 @#123; {
27 1B 033 ESC (escape)
              (file separator)
                                       60 3C 074 < <
                                                             92 5C 134 @#92; \
                                                                               124 7C 174 @#124; |
28 1C 034 FS
                                                                               125 7D 175 @#125; }
29 1D 035 GS
              (group separator)
                                       61 3D 075 = =
                                                             93 5D 135 @#93; 1
              (record separator)
                                       62 3E 076 > >
                                                                               126 7E 176 @#126; ~
                                                             94 5E 136 ^ ^
30 1E 036 RS
                                                                               127 7F 177  DEL
                                       63 3F 077 4#63; ?
                                                             95 5F 137 6#95;
31 1F 037 US
              (unit separator)
```

Source: www.LookupTables.com

Kodierung - Zusammenfassung

Zusammenfassung

Kodierung

- Repräsentation von Information mittels Zeichen und Nachrichten
- Kodierung als Vorschrift zur Überführung Nachrichten aus einem Zeichensatz in den anderen.
- Binärcodes bestehen aus genau zwei Zeichen, welche unterschiedliche interpretiert werden können:
 - Als Zahl im dualen Zahlensystem
 - Positionszahlensystem zur Basis 2
 - Arithmetische Operationen
 - Subtraktion als Addition mittels Zweierkomplement
 - Als Zeichen einer Tastatur (ASCII Code)
 - Als Wahrheitswerte (Wahr/Falsch) im Bereich der Aussagenlogik

Bibliographie

- Malaka, Butz, Hussmann (2009) Medieninformatik: Eine Einführung (Pearson Studium - IT), Kapitel 2.4
- Herold, Lurz, Wohlrab Grundlagen der Informatik, Pearson Studium, Kapitel 3

Kapitel EIC Teil 2- Medien und Information:I

- I. EIC Teil 2- Medien und Information
 - Digitalisierung
 - □ Kodierung
 - □ Informationstheorie
 - Kompression



Problemstellung

Wir haben unterschiedliche Kodierungen mit verschiedenen Eigenschaften kennen gelernt.

Doch wann ist eine Kodierung optimial, d.h. existiert eine Kodierung die mit weniger Bit die gleiche Information übermitteln kann?

Wie kann man die Menge der in einer Nachricht erhaltenen Information quantifizieren?

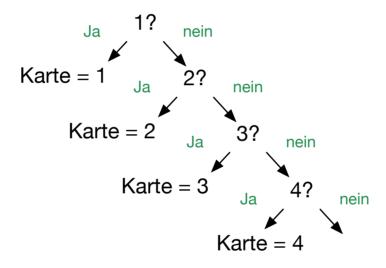
Wie kann man den Informationsgehalt einer Nachrichtenquellen quantifizieren?

Beispiel Kartenspiel

Nehmen wir an sie haben ein Kartenspiel bestehend aus 4 Karten, $K = \{1, 2, 3, 4\}$. Person A zieht eine Karte. Person B muss über möglichst wenige "Ja/Nein" Antworten herausfinden, um welche Karte es sich handelt.

Beispiel Kartenspiel

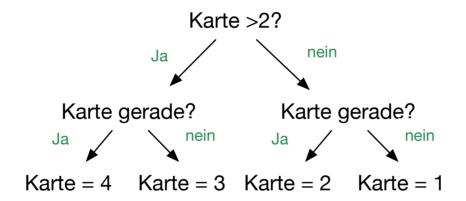
Nehmen wir an sie haben ein Kartenspiel bestehend aus 4 Karten, $K = \{1, 2, 3, 4\}$. Person A zieht eine Karte. Person B muss über möglichst wenige "Ja/Nein" Antworten herausfinden, um welche Karte es sich handelt.



Beispiel Fragebaum A

Beispiel Kartenspiel

Nehmen wir an sie haben ein Kartenspiel bestehend aus 4 Karten, $K = \{1, 2, 3, 4\}$. Person A zieht eine Karte. Person B muss über möglichst wenige "Ja/Nein" Antworten herausfinden, um welche Karte es sich handelt.



Beispiel Fragebaum B

Beispiel Kartenspiel

Jede "Ja/Nein" Antwort kann als Bit ("0/1") verstanden werden, wodurch sich folgender Binärcode ergibt:

Karte	Code A	Code B	Informationsgehalt
1	1	00	2
2	10	01	2
3	100	10	2
4	1000	11	2

Beobachtungen:

- □ Code B scheint effizienter, da er im Schnitt weniger Fragen (Bits) benötigt.
- \Box Code B scheint optimal zu sein, da wir für 4 Zustände 2 Bits benötigen $(N=2^{\#bits} \text{ bzw. } \#bits=\log_2(N) \text{ mit } N \text{ als Anzahl der Karten})$
- Alternativ: In Code B reduziert jede Frage die Unsicherheit um 50 % d.h. die Anzahl der verbleibenden Möglichkeiten wird um die Hälfte reduziert
- Der Informationsgehalt einer Karte kann als minimale Anzahl von Ja/Nein Fragen aufgefasst werden.

Beispiel Kartenspiel

Ein neues Spiel hat folgende 4 Karten: $K = \{1, 1, 2, 3\}$, d.h. Karte 1 kommt 2x vor. Wie ändert sich der Code?

Beispiel Kartenspiel

Ein neues Spiel hat folgende 4 Karten: $K = \{1, 1, 2, 3\}$, d.h. Karte 1 kommt 2x vor.

Karte	Code B	Code C	Informationsgehalt
1	00	0	1
1	01	0	1
3	10	10	2
4	11	11	2

Fragen:

□ Bit 0: Ist es nicht 1?

Bit 1: lst es 4?

Der Code ist optimal, da beide Fragen die Unsicherheit um 50% reduzieren, d.h. die Anzahl der verbleibenden Möglichkeiten auf die Hälfte reduzieren.

Beispiel Kartenspiel

Ein neues Spiel hat folgende 4 Karten: $K = \{1, 1, 2, 3\}$, d.h. Karte 1 kommt 2x vor.

Karte	Code B	Code C	Informationsgehalt
1	00	0	1
1	01	0	1
3	10	10	2
4	11	11	2

Beobachtungen:

- □ Code C scheint effizienter, da er im Schnitt weniger Fragen (Bits) benötigt.
- 2 Karten haben dieselbe Bedeutung.
 - Da es wahrscheinlicher ist, Karte 1 zu ziehen, ist der Informationsgehalt von Karte 1 jedoch geringer.
 - Alternativ: Da Karte 1 öfters gezogen wird, wollen wir der Karte einen kürzeren Code geben.

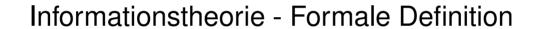
Beispiel Kartenspiel

Ein neues Spiel hat folgende 4 Karten: $K = \{1, 1, 2, 3\}$, d.h. Karte 1 kommt 2x vor.

Karte	Code B	Code C	Informationsgehalt
1	00	0	1
1	01	0	1
3	10	10	2
4	11	11	2

Wie hoch ist der Informationsgehalt von Karte 1?

- \Box Für 4 Karten benotigen wir 2 bit ($\log_2(4)$).
- \Box Karte 1 würde dabei 2 Codes erhalten, die jedoch die gleiche Bedeutung haben und somit redundant sind. D.h. 1 Frage/Bit ($\log_2(2)$) ist redundant.
- $\Box \ IG(Karte_1) = \log_2(4) \log_2(2) = \log_2(\tfrac{4}{2}) = \log_2(\tfrac{1}{p(Karte_1)})$ wobei $p(Karte_1)$ die Wahrscheinlichkeit darstellt, dass $Karte_1$ gezogen wird.
- □ Analog f. Karte 2: $IG(Karte_2) = \log_2(4) \log_2(1) = \log_2(\frac{4}{1}) = \log_2(\frac{1}{p(Karte_2)})$



Überblick

- Die Informationstheorie nach Shannon wurde 1948 von Claude Shannon entwickelt.
- Sie stellt ein mathematisches Modell für Kommunikationssysteme dar.
- Dabei werden Nachrichten als stochastische Ereignisse, die von einer Nachrichtenquelle, dem Sender, ausgesendet und von einem Empfänger empfangen werden.
 - Stochastische Prozesse sind zeitlich geordnete, zufällige Prozesse die mit Hilfe der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung beschrieben werden
 - Nachrichten bestehen somit aus einer endlichen Anzahl diskreter
 Zeichen, welche mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auftreten.

Überblick

Kernelemente der Informationstheorie:

- Definition einer Nachrichtenquellen und deren Eigenschaften
- fine Definition des Informationsgehaltes bzw. der Information eines Zeichens, I(x)
- $exttt{ in}$ Definition der **Entropy** H(X), d.h. der Informationsdichte bzw. des durchschnittlichen Informationsgehaltes einer Nachrichtenquelle
- Definition von optimalen Kodierungen und darauf aufbauender Redundanz

Nachrichtenquelle

Definition 9 (Diskrete, gedächtnislose Nachrichtenquelle)

Eine diskrete, gedächtnislose Nachrichtenquelle setzt in jedem Zeittakt ein Zeichen $a_i \in A$ aus einem Zeichenvorrat A mit der Wahrscheinlicheit $P(a_i) = p_i$ ab. Die Auswahl der Zeichen ist unabhängig von bereits emitierten Zeichen in der Vergangenheit.

Beispiel mit 3 Quellen, Zeichenvorrat $\{A, B, C, D\}$:

Zeichen a	Α	В	С	D
Wahrscheinlichkeit p_a in Quelle 1	1.0	0.0	0.0	0.0
Wahrscheinlichkeit p_a in Quelle 2	0.25	0.25	0.25	0.25
Wahrscheinlichkeit p_a in Quelle 3	0.5	0.25	0.125	0.125

- Welche Quelle überträgt die meiste Information in einer Nachricht?
- Wieviel Bit benötigen wir zur Kodierung eines Zeichens einer Quelle?
- Wie hoch ist die Information (bzw. der Informationsgehalt) eines Zeichens?

Informationsgehalt eines Zeichen

Axiomatische Definition² des Informationsgehalts über 3 Axiome (grundsätzliche Eigenschaften):

- (I) Der Informationsgehalt eines Zeichens $a \in A$ mit der Wahrscheinlicheit p_i ist ein nicht-negatives Maß, welches nur von der Wahrscheinlichkeit des Zeichens abhängt: $I(p_i) \ge 0$
- (II) Der Informationsgehalt zweier voneinander unabhängiger Zeichen a_i und a_j mit den Wahrscheinlichkeiten p_i und p_j addiert sich: $I(p_i, p_j) = I(p_i) + I(p_j)$
- (III) Der Informationsgehalt ist eine stetige Funktion der Wahrscheinlichkeiten der Zeichen.

²Axiome sind die Grundsätze bzw. fixen Annahmen einer Theorie. In einer Axiomatisch Definition werden dies apriori festgelegt. Aus den Axiomen werden anschließend deduktiv weitere Eigenschaften abgeleitet.

Informationsgehalt eines Zeichen

Satz 2 (Informationsgehalt/Entscheidungsgehalt eines Zeichens)

Sei p_i die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Zeichen $a_i \in A$. Der Entscheidungsgehalt x_i für das Zeichen $a_i \in A$ ist definiert als

$$2^{x_a} = 1/p_a \Rightarrow x_a = \log(1/p_a)$$

Die Einheit ist bit (basic indissoluble³ information unit) pro Zeichen. n bit entsprechen dabei mindestens n Bit (Binary Digits)

Zeichen a	Α	В	С	D
p_a in Quelle 1	1.0	0.0	0.0	0.0
x_a (in bit) in Quelle 1	0	undef.	undef.	undef.
p_a in Quelle 2	0.25	0.25	0.25	0.25
x_a (in bit)in Quelle 2	2	2	2	2
p_a in Quelle 3	0.5	0.25	0.125	0.125
x_a (in bit)in Quelle	1	2	3	3

Informationsgehalt eines Zeichen

Satz 3 (Informationsgehalt/Entscheidungsgehalt eines Zeichens)

Sei p_i die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Zeichen $a_i \in A$. Der Entscheidungsgehalt x_i für das Zeichen $a_i \in A$ ist definiert als

$$2^{x_a} = 1/p_a \Rightarrow x_a = \log(1/p_a)$$

Die Einheit ist bit (basic indissoluble⁴ information unit) pro Zeichen. n bit entsprechen dabei mindestens n Bit (Binary Digits)

Eigenschaften:

- \Box Ein sicheres Ereignis ($p_i = 1.0$) besitzt keine Information.
- Unwahrscheinliche Ereignissse besiten viel Information.
- □ Der Informationsgehalt spiegelt die Axiome wider, wobei der Logarithmus füer die Additivität (Axiom II) sorgt
- Die Basis des Logarithmuses definiert die Einheit. Bei einem log₁₀ wüerden Zeichen in einem Dezimalcode kodiert werden.
- □ Ein bit definiert die kleineste Einheit und kann als "Ja/Nein" Entscheidung verstanden werden.

Durchschnittliche Informationsgehalt einer Quelle

Definition 10 (Entropie (durchschnittlichen Entscheidungsgehalt))

Sei A ein Zeichenvorrat einer diskreten, gedächtnislosen Quelle aund sei p_i die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Zeichen $a_i \in A$. Dann definiert die Entropy H den durchschnittlichen Informations als:

$$H = \sum_{a \in A} p_a * \log_2(\frac{1}{p_a})$$

Bemerkungen

- $p_a * \log_2(\frac{1}{p_a}) = p_a * x_a$ bedeutet das der Entscheidungsgehalt eines Zeichens noch mit dessen Auftrittswahrscheinlichkeit gewichtet wird
 - Seltene Zeichen besitzen hohe Information, werden jedoch nicht oft gesendet.
 - Häufige Zeichen besiten niedrige Information, werden jedoch häufig gesendet.
- □ Die Entropy gibt die minimale Anzahl von bit's an die notwendig sind, um Nachrichten einer diskreten, gedächtnislosen Quelle zu kodieren. Es gibt keine Kodierung mit weniger bit's.
- Entropy kann im physikalischen Sinn der Thermodynamik auch als Unordnung eines Systems verstanden werden.
- \Box Alternative Darstellung: $-p_a * \log_2 \mathbf{p_a}$

Frage: Wann ist die Entropy maximal?

Informationsgehalt einer Quelle

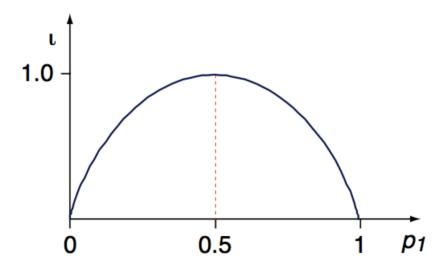
Satz 4 (Maximalität der Entropy)

Sei A ein Zeichenvorrat einer Quelle und p_a die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Zeichen $a \in A$. Die **Entropy-Funktion ist maximal** wenn gilt

$$\forall_{i,j\in A}|p_i=p_j$$

d.h. die Auftrittswahrscheinlichkeit für alle Zeichen gleich groß ist.

Darstellung für den Fall von zwei Zeichen A, B ($p_a = 1 - p_b$):



Beispiel Informationsgehalt einer Quelle

Zeichen a	Α	В	С	D
p_a in Quelle 1	1.0	0.0	0.0	0.0
x_a (in bit) in Quelle 1	0	undef.	undef.	undef.
p_a in Quelle 2	0.25	0.25	0.25	0.25
x_a (in bit)in Quelle 2	2	2	2	2
p_a in Quelle 3	0.5	0.25	0.125	0.125
x_a (in bit)in Quelle 3	1	2	3	3

Entropie:

$$\Box \ H_{Quelle1} = 0$$

$$\Box \ H_{Quelle2} = 2$$

$$\Box \ H_{Quelle3} = 1.75$$

Redundanz einer Kodierung

Was bedeutet Redundanz?

- Redundanz bedeutet, daß es überflüssige Nachrichtenteile gibt
- Redundante Kodierungen sind nicht optimal. Dies kann gewollt sein (z.B. zur Fehlerkorrektur) oder ungewollt, wodurch mehr Speicher als nötig verwendet wird.

Wie hoch ist die Redundanz einer gegebenen Kodierung c für eine Nachrichtenquelle?

Intuitive Vorgehensweiße:

- □ Ermittle die durchschnittliche (Wort)Länge einer Kodierung in Bits (L)
- \Box Vergleiche diese mit dem Informationsgehalt (Entropy) einer Quelle (H)

Wortlänge

Was ist die durchschnittliche Länge einer Kodierung in Bits?

Definition 11 (Wortlänge (Nachrichtenlänge))

Sie A^* die Menge aller endlichen Sequenzen (Nachrichten) aus einem Zeichenvorrat A.

Für ein Wort $w \in A^*$ ist die Länge die Anzahl in der Nachricht enthaltenen Zeichen, abgekürzt durch |w|.

Wenn eine Kodierung c einem Zeichen $a \in A$ ein Wort $c(a) \in B^*$ zuweist, dann ist |c(a)| die Wortlänge der Kodierung des Zeichens a

Beispiele

- $w_1 = < 010101 > \Rightarrow |w| = 6$
- $c_1(w_1) = c(010101) = \langle ab \rangle \Rightarrow |w| = 2$
- $c_2(w_1) = c(010101) = \langle Medien \rangle \Rightarrow |w| = 6$

Die Einheit der Wortlänge ist Bit.

Wortlänge

Definition 12 (Durchschnittliche Wortlänge)

Bei einer Kodierung c einer Nahrichtenqulle ist die **durchschnittliche Wortlänge** L die nach Auftrittswahrscheinlichkeit gewichtete Summe der Wortlängen aller Kodierungen der Einzelzeichen, als Formel:

$$L = \sum_{a \in A} p_a * |c(a)|$$

Zusammenhang zur Entropy/Informationsgehalt:

- $\Box |c(a)|$ ist in Bit angegeben (wenn wir von einem Binärcode ausgehen)
- $\ \square$ Der Informationsgehalt stellt die Bits eines idealen Code dar, während |c(a)| die Bitlänge eines echten Codes darstellt

Beispiel Redundanz

Beispiel für zwei Kodierungen c_1 und c_2

Zeichen a	A	В	C	D
Kodierung c_1	00	01	10	11
Kodierung c_2	0	10	110	111

Beispiel für eine redundante Kodierungen c_1

Zeichen a	A	В	C	D
Wahrscheinlichkeit p_a in Quelle 3	0.5	0.25	0.125	0.125
Kodierung c_1	00	01	10	11
Wortlänge	2	2	2	2

Durchschnittliche Wortlänge $L_{c_1} = 0.5 * 2 + 0.25 * 2 + 0.125 * 2 + 0.125 * 2 = 2$

Informationsgehalt: $H_3 = 0.5 * 1 + 0.25 * 2 + 0.125 * 3 + 0.125 * 3 = 1.75$

Definition Redundanz

Definition 13 (Redundanz R)

Die **Redundanz** R einer binären Kodierung c für eine Nachrichtenquelle ist die Differenz der mittleren Wortlänge und der Entropie:

$$R = L - H$$

Optimale Kodierung: Eine Kodierung heißt optimal, wenn die Redundanz gleich Null ist (R = 0)

Zeichen a	Α	В	С	D
Wahrscheinlichkeit p_a in Quelle 3	0.5	0.25	0.125	0.125
Kodierung c_2	0	10	110	111
Wortlänge	1	2	3	3

Durchschnittliche Wortlänge $L_{c_2} = 0.5 * 1 + 0.25 * 2 + 0.125 * 3 + 0.125 * 3 = 1.75$ Informationsgehalt: $H_3 = 0.5 * 1 + 0.25 * 2 + 0.125 * 3 + 0.125 * 3 = 1.75$

- ⇒ Eine gute Kodierung berücksichtigt immer die Verteilung der Zeichen in der Nachrichtenquelle
- ⇒ Mit Wissen über Medieneigenschaften und wie sie wahrgenommen werden, können gute Kodierungen erreicht werden (JPEG, GIF, MP3 etc.)

Zusammenfassung

Informationstheorie

- Wir wissen nun was Information ist (Zeichenvorrat, Nachricht, Kodierung)
- Wir können den Informationsgehalt einer Nachricht bestimmen
- Wir können feststelle ob Nachrichten redundante Information enthalten

Gibt es eine Möglichkeit, optimale Codes zu erzeugen und beliebige Kodierungen zu "Komprimieren"?

Bibliographie

- Malaka, Butz, Hussmann (2009) Medieninformatik: Eine Einführung (Pearson Studium - IT), Kapitel 2.4
- Daugmann, John (2012)- Lecture Notes on Information Theory and Coding, chapter 3

http://www.cl.cam.ac.uk/teaching/0809/InfoTheory/
InfoTheoryLectures.pdf

Kapitel EIC Teil 2- Medien und Information:I

- I. EIC Teil 2- Medien und Information
 - Digitalisierung
 - □ Kodierung
 - □ Informationstheorie
 - Kompression

Kompression

Lernziel

Unterthemen

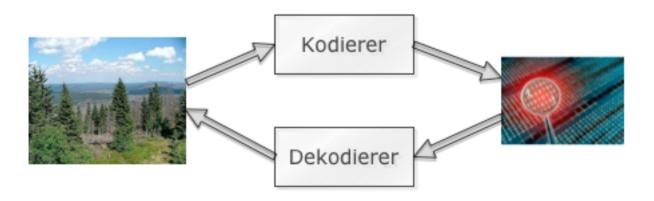
- Kompressionsarten und genereller Prozess
- Lauflängenkodierung
- Huffman Kodierung Entropie-basiert
- Arithmetische Kodierung
- LZW Kodierung Wörterbuch-basiert

Fragestellungen

- Wie kann Information komprimiert werden?
- Wie nutzt man Entropie zur Komprimierung?
- Welche Kompressionsverfahren gibt es?

Prozess der Kompression/Dekompression

- Kompression: Kodierung der Ausgangsdaten in neuen, kleineren Code
- Dekompression: Dekodierung des kleineren Code in die Ausgangsdaten
- Kompressionscode verwendet i.a. variable lange Codewörter, um unterschiedlichen Frequenzen der Zeichen im Originalcode zu berücksichtigen



Definition und Klassifikation

Definition 14 (Kompression)

Unter Kompression versteht man die Kodierung eines Datenstroms mit einem neuem, i.a. zu errechnenden Code geringerer Redundanz, sodass die Originaldaten wieder herstellbar sind. Eine optimale Kompression erzeugt eine optimale Kodierung.

Klassifikation nach Anwendungsdomäne

- Universelle Kompressionsverfahren: Treffen keine Annahmen über Daten oder Domäne und sind daher universell auf jeden Datenstrom anwendbar
- □ Speziell Kompressionsverfahren: Treffen Annahme über Daten bzw. Domäne. Sind daher nur beschränkt einsetzbar, arbeiten i.A. aber auf dieser Domäne effizienter

Klassifikation nach Erhaltung der Information

- □ **Verlustfreie Kompression:** Der Originaldatenstrom kann wieder rekonstruiert werden
- □ **Verlustbehaftete Kompression:** Der Originaldatenstrom kann nicht mehr rekonstruiert werden. Information geht verloren, dafür erreicht man i.A. bessere Kompressionsraten

Verlustbehaftete Verfahren werden bei den entsprechenden Medien behandelt

Überblick verlustfreie Kompressionsverfahren

Statistische bzw. Entropie-basierte Verfahren

- Huffman-Kodierung Optimale Kodierung im Shannon'schen Sinn
- Arithmetische Kodierung Erweiterung von Huffman

Zeichenorientierte Verfahren

- Lauflängen Kodierung (Run Length Encoding)
- □ LZW-Kodierung (Wörterbuch-basierter Ansatz)

	Universelle Verfahren	Spezielle Verfahren
Verlustfreie Verfahren	z.B. Huffman, LZW	z.B. PNG, AIFF
Verlustbehaftete Verfahren	(nicht sinnvoll)	z.B. JPEG, MP3

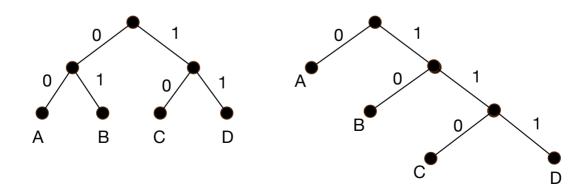
Code-Bäume und Vergleich Codes variabler/nicht-variabler Länge

Arten v. Codes

- □ Codes fixer Länge: Jedes Zeichen wird mit der gleichen Anzahl an Bits kodiert (i.a. hohe Redundanz)
- Codes variabler Länge: Jedes Zeichen wird mit unterschiedlichen Anzahl an Bits kodiert

Zeichen a	Α	В	C	D
Kodierung c_1	00	01	10	11
Kodierung c_2	0	10	110	111

Code-Baum: Darstellung der Kodierung als Baumstruktur



 c_1 links und c_2 rechts

Codes mit variabler Codelänge

Wie trennt man jedoch Zeichen in Codes variabler Bitlänge?

Beispiel: Morse-Code Codierung für Maus

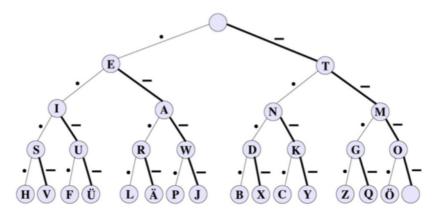


Abbildung 21.1: Baumstruktur des Morsealphabets mit deutschen Umlauten

Bildquelle [?]

Problem der Dekodierung: Morsecode benötigt ein Trennzeichen (Pause).

Beispiel: ".... 'w kodiert seen und eier

Codes mit variabler Codelänge

Definition 15 (Fano-Bedingung)

Ein Code erfüllt die Fano-Bedingung, wenn kein Wort aus dem Code der Anfang eines anderen Wortes desselben Codes ist.

- Präfix ist die Teilfolge von Zeichen die am Beginn eines Wortes stehen
- □ z.B. C, Co, Cod und Code wären Präfixe des Wortes Code
- Codes die der Fano-Bedingung genügen nennt man präfixfreie Codes
- Präfixfreie Codes können ohne Trennzeichen dekodiert werden

Beispiel:

Zeichen	Code
а	0
b	10
С	11

10111011001011

b c b c aab c

Grundidee Huffman-Kodierung

Entwickelt von David Huffman als PhD Student 1952 am MIT

- □ Zeichen größerer Häufigkeit werden durch kürzere Codes repräsentiert
- Dies führt zu Codes mit variabler Länge
- Für eine effiziente Kodierung/Dekodierung muss die Fano Bedingung erfüllt sein
- Beobachtung: Wenn der Code optimal ist, müssen die beiden Symbole der niedrigsten Häufigkeit mit gleicher Länge kodiert sein.
- Beweis Skizze:
 - Wären die Längen verschieden, könnte man das längere Wort bei der Länge des kürzeren abschneiden
 - Dann sind die beiden entsehenden Codes verschieden, da sonst die Fano-Bedingung vorher verletzt gewesen wäre
 - Kein anderes Codewort kann länger sein (da Zeichen niedrigster Häufigkeit und Code optimal ist), also kann die Kürzung selbst nicht die Fano-Bedingung verletzen, das ein anderes Wort mit der Kürzung kodiert wird
 - Dann hätten wir einen neuen Code mit kleinerer durchschnittlicher Wortlänge und der erste Code wäre nicht optimal gewesen

Vorgehensweise Huffman-Kodierung

Gegeben: Zeichenvorrat und Häufigkeitsverteilung

Gesucht: Kodierung (ist optimal, wenn alle Häufigkeiten Kehrwerte von Zweierpotenzen sind)

- □ Schritt 1: Ersetze die beiden Einträge niedriger Häufigkeit durch einen Code-Teilbaum mit zwei Ästen "0" und "1"
- Schritt 2: Trage die Summe der Häufigkeiten als Häufigkeit für den neuen Code-Teilbaum ein
- Wiederhole 1 und 2 bis alle Zeichen im Codebaum enthalten sind

Vorgehensweise Huffman-Kodierung - Beispiel

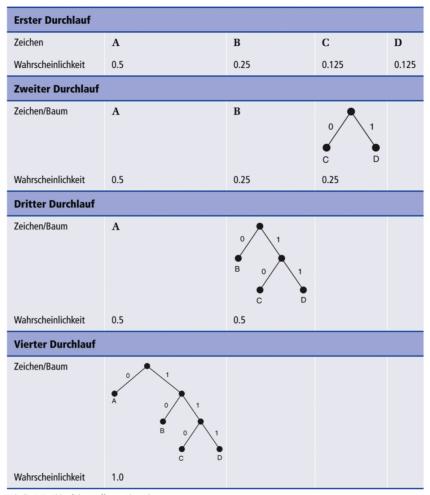


Tabelle 2.7: Ablauf des Huffman-Algorithmus

Bildquelle [?]

Experiment Bilddaten

- □ Graubild, 256x256 Pixel, 8 Bit (i.e. 256 Graustufen)
- □ Unkopmrimiert: 256*256 = 65 536 Bytes
- Mit Huffman: 40.543 Bytes (ca. 38% Reduktion)
- Einfacher Zusatztrick:
 - Umwandlung der Kodierung vor Kompression: Differenzkodierung
 - Differenz zwischen benachbarten Pixeln
 - Huffman Kodierung auf dieser Differenzkodierung erreicht 33 880 Bytes (50% Reduktion)
 - Differenzkodierung verwendet Domänenwissen ⇒ keine universelle Kompression mehr (Details siehe Bild-Kapitel)

Weitere Anwendungsgebiete:

- JPEG, MP3, PNG als Teil der Kompressionsschritte
- ¬ bzip bzw. bzip2

Eigenschaften

- Code-Baum muss für Dekodierung übergeben werden
- Häufigkeiten in einer Domäne können vorgegeben werden
 - z.B. Zeichen der deutschen Sprache
- □ Optimaler Code (im Sinne der Entropie) wenn Wahrscheinlichkeiten von der Form $1/2^n$ sind (e.g. 0.5, 0.25, 0.125)
 - 1-Bit Auflösung pro Häufigkeit moeglich
 - In der Praxis kaum gegeben, d.h. digitale Repräsentation ist nicht optimal
 - Ein Zeichen welches Häufiger wie 50% auftritt, kann kein Code < 1-Bit gegeben werden
 - Für eine optimale Repräsentation müss das Alphabet verändert werden
- Anzahl der Codewörter steigt exponentiell wenn man Teilworte als Einzelzeichen verwendet (e.g Einzelzeichen 01 od. 10), d.h. der Code Baum wächst exponentiell.
- ⇒ Arithmetische Codierung

Arithmetische Codierung

Arithmetische Codierung

Überblick

Idee

- Verwende unendliche genaue reele Zahlen in einem definierten Intervall und unterteilt dieses Intervall auf Basis der Daten
- Die durch diese Teilung entstandene Zahl entspricht dem komprimierten Code

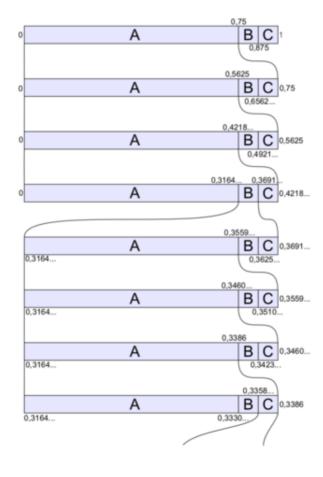
Verfahren

- 1. Starte mit vereinbarten Intervall (e..g [0,1))
- 2. Zerlege das aktuelle Intervall auf Basis des nächsten Zeichens z, sodaß die Intervallgröße der Auftrittswahrscheinlichkeit von z entspricht
- 3. Mache dieses Subintervall zum neuen Intervall. Wenn es noch weitere Zeichen gibt gehe zu 2.
- 4. Ausgabe einer beliebigen Zahl x aus dem Intervall plus die Anzahl der kodierten Zeichen, sodaß die Zahl möglichst wenige Nachkommastellen hat.

Arithmetische Codierung

Kodierung - Beispiel

Arithmetische Kodierung der Zeichenkette "AAABAAAC"



Bildquelle Wikipedia

Arithmetische Codierung

Dekodierung

- 1. Starte mit vereinbarten Intervall (e..g [0,1))
- Unterteile das Intervall in Subintervalle deren Größe von der Häufigkeit der Zeichen abhängt. Die Zeichenreihenfolge ist mit dem Kodierer vereinbart.
- 3. Finde das Subintervall der übertragenen Zahl und gib das Zeichen aus
- 4. Wiederhole 2 solange noch Zeichen auszugeben sind

Arithmetische Codierung

Eigenschaften

- □ Erzeugt einen theoretische optimalen Code, der jedoch durch Rundungseffekte der reelen Zahl i.a. nicht optimal abgebildet werden kann.
 - Bei der Implementierung muss das Intervall wieder vergrößert werden, d.h. ändert sich eine Stelle sicher nicht mehr, dann wird diese Stelle ausgegeben und das Intervall neu skaliert
 - Die Teilung des Intervalls sowie das Intervall selbst muss dem Kodierer und Dekodierer bekannt sein.
- Implementierung meist aufwendig und langsam, da Divsion ausgeführt werden muss oder mehrmals kodiert werden muss

Überblick

- Einfache From der Datenkomprimierung
- Zeichenkette-basiertes Verfahren ohne statistischen Hintergrund

Verfahren

□ Für gleiche, aufeinander folgende Zeichen wird die Anzahl der Zeichen und das Zeichen gespeichert

Beispiel

- □ AAAABBCD
- □ RLE Kodierung: 4A2B1C1D

```
http://www.daniel-lemire.com/blog/archives/2009/11/27/
run-length-encoding-part-2/
```

Unerschiedliche Formate

- □ Zähler wird nur verwendet wenn ein Zeichen zweimal vorkommt, um unötige Zähler zu vermeiden (AAABBBBBZWWK ⇒ AA1BB3ZWWK)
- Benutzung eines Bits pro Zeichen zur Spezifikation ob ein Zähler verwendet werden soll od. nicht
- Es wird nicht der Zähler, sondern die Position gespeichert. Dies erlaubt randomisierten Zugriff in O(log(n)), verhindert aber Zählervermeidungsstrategien (AAABBBBBZWWK \Rightarrow 1A4B9Z10W11K)

Eigenschaften

- RLE komprimierte Daten k\u00f6nnen in einem Lauf gelesen und geschrieben werden (keine Statistik)
- $exttt{ iny }$ Auf einen in RLE repräsentierte Vektor V können Skalarfunktionen in O(|V|) angewendet werden (lineare Laufzeit)
- Lineare Laufzeit auch für Addition zweier Vektoren
- Langsamer randomisierter Zugriff
- Gute Komprimierung benötigt lange Sequenz gleicher Zeichen
- Burrows-Wheeler Transformation ermöglicht die Erzeugung langer Sequenzen
- Anwendung der Burrows-Wheeler Transformation in bzip2

Überblick

Geschichte:

- Entwickelt 1978 von Abraham Lempel und Jacob Ziv (LZ78)
- Einige Verbesserungen von Terry A. Welch (LZW)
- Angewendet in Bildformat GIF

Verfahren

- Wörterbuch-basiertes Verfahren bei dem das Wörterbuch automatisch aufgebaut wird
- Während dem Einlesen des Datenstroms, wir für jede noch nicht bekannte Sequenz ein Wörterbucheintrag angelegt
- Gibt es schon einen Wörterbucheintrag, wird diesr Code raus geschrieben.
- Das Wörterbuch muss nicht mitübertragen werden

Kodierung

- Präfix ist Leer und Wörterbuch ist mit allen vorkommenden Zeichen initialisiert
- 2. lies das nächste Zeichen z vom Eingabestrom
- 3. Ist "Präfix+z" im Wörterbuch?

```
Ja: Pr\overline{a}fix = Pr\overline{a}fix + z
Nein:
```

Gib Code für Präfix aus trage Präfix+z im Wörterbuch ein Präfix = z

4. Ist das Ende des Eingabestroms erreicht?

Nein: Gehe zu Schritt 2

Ja: Ist Präfix nicht leer, gib den korrepsondierenden Code aus

Beispiel

Kodiere ABBABABAC (Z steht für Zeichen, P für Präfix)

			P+z im Wörterbuch?						
			Ja	Nein					
$\parallel z$	P	P+z	Neues P	Ausgabe	Wörterbuch	Neues P			
					1:A,2:B,3:C				
Α		Α	Α						
В	Α	AB		1	4:AB	В			
В	В	BB		2	5:BB	В			
A	В	BA		2	6:BA	Α			
В	Α	AB	AB						
A	AB	ABA		4	7:ABA	Α			
В	Α	AB	AB						
Α	AB	ABA	ABA						
С	ABA	ABAC		7	8:ABAC				
-	С			3					

Dekodierung

Dekodierer benötigt den Code plus das **initiale** Wörterbuch. Das vollständige Wörterbuch kann während der Dekodierung generiert werden.

Beobachtung: Wann gibt ein Kodierer den Code aus?

- □ Wenn die Zeichenkette "Präfix+z" nicht im Wörterbuch ist, wird der Code für "Präfix" geschrieben und "z" wird das neue Präfix
- □ Lesen wir also den Code, so wissen wir, daß "Präfix+?" (? steht für ein beliebiges Zeichen) zu dieser Kodierung geführt hat.
 - Präfix ist bekannt und steht im WB
 - ? kann ermittelt werden, da es das erste Zeichen vom n\u00e4chsten Code ist
 - ⇒ wir müssen für jeden Code den wir ausgeben, das erste Zeichen des Code plus die Zeichen des vorhergehenden Code (der im WB ist) ins Wörterbuch eintragen
 - ⇒ Das Wörterbuch des Dekodierers ist immer um einen Schritt hinter dem des Kodierers hinterher, da wir ja den Wörterbucheintrag über den aktuell gelesenen Code und den zuvor gelesenen Code erstellen

Dekodierung

Wann ist nun ein Code nicht im Wörterbuch des Dekodierers?

- □ Annahme: zΩz wird derzeit kodiert und zΩ ist im Wörterbuch Ω ist eine beliebige Zeichenkette und z ein einzelnes Zeichen
- $lue{}$ Der Kodierer schreibt nun den Code für $z\Omega$ und fügt $z\Omega z$ zum Wörterbuch
- □ Liest der Kodierer gleich darauf nochmals die Sequenz $z\Omega z$ ein, so gibt er den Code für das zuvor hinzugefügt $z\Omega z$ aus.
- Da der Dekodierer immer um einen Wörterbucheintrag hinterher hinkt, kann er den Code nicht kennen.
- Da diese Situation **nur genau dann Auftritt, wenn** $z\Omega z$ zuvor zum Wörterbuch hinzugefügt wurde, kann der Dekodierer den neuen Wörterbucheintrag aus dem alten Code $z\Omega$ vollständig rekonstruieren

Dekodierung

- Wörterbuch mit allen vorkommenden Zeichen initialisiert
- 2. Code = erster Code aus dem Eingabstrom (immer ein Zeichen)
- Ausgabe des Eintrags für Code und
- 4. Speicher Code in altCode
- 5. Code = nächster Code im Eingabestrom
- Ist Code im Wörterbuch?

Ja:

- Gib Zeichen von "Code " aus
- 'Präfix = Zeichen von "altCode"
- Zeichen = erstes Zeichen von "Code "
- Trage "'Präfix+Zeichen" ins Wörterbuch ein vgl. die Beobachtungvon vorher

Nein (bei Zeichenfolgen $z\Omega z\Omega z$)

- 'Präfix = Zeichen von "altCode"
- Zeichen = erstes Zeichen von "altCode"
- Trage "'Präfix+Zeichen" in Wörterbuch ein UND gib es aus
- 7. Solange noch Zeichen existieren, lese neuen Code und gehe zu 4.

Beispiel

Code: 122473

С	Ausgabe	WB?	Präfix	altCode		Bemerkung
			=code(altCode)		1:A,2:B,3:C	
1	Α	J				Erstes Zeichen muss im WB sein: Ausgabe
2	В	J	Α	1	4:AB	Präfix + neues Zeichen ins WB
2	В	J	В	2	5:BB	neuer Präfix ist alter Code (hier 2)
4	AB	J	В	2	6:BA	Neuer WB Eintrag Präfix+Zeichen
7	ABA	Ν	AB	4	7:ABA	neuer Code nicht im Wörterbuch
3	С	J	ABA	7	8:ABAC	
-						

Zusammenfassung

Kompression

Verschiedene Kompressionsarten

- Verlustfrei/Verlustbehaftet
- Unviersell/Speziell

Verlusfreie Kompression

- Entropy-basierte, optimale Kodierungen Huffman-Code, Artihmetische Kodierung
 - Aufbau von Code-Bäumen mit variabler Code Lönge
 - Rechenintensive
- Zeichenketten-basierte Kodierung
 - Lauflängenkodierung: Wiederholende Zeichen als Anzahl-Zeichen Paar
 - LZW Kodierung: Automatische Erzeugung eines Wörterbuchs

Zusammenfassung

Bibliographie

- Malaka, Butz, Hussmann (2009) Medieninformatik: Eine Einführung (Pearson Studium - IT), Kapitel 2.4
- Herold, Lurz, Wohlrab (2006) Grundlagen der Informatik, Pearson Studium