Бюджетное учреждение высшего образования Ханты-Мансийского автономного округа – Югры

«СУРГУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический институт

Кафедра прикладной математики

Гркикян Мисак Эдикович

Индивидуальное задание №1

Дисциплина «Алгебра и геометрия»

направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

направленность (профиль): «Технологии программирования и анализ данных»

Преподаватель: Шапошникова Ирина Вадимовна

Доцент

Студент гр. № 601-31

Гркикян Мисак Эдикович

Сургут 2024 г.

Задание 1

Программное решение

```
import numpy as np

# Заданные матрицы
A = np.array([[4, -1, 7], [0, 1, -2], [0, 0, 9]])
B = np.array([[-1, 1, 0], [0, 0, 3], [6, 2, -1]])
C = np.array([[5, 1, 1], [1, 5, 1], [1, 1, 5]])

# Вычисление B^T и A^T
B_T = np.transpose(B)
A_T = np.transpose(A)

# Вычисление (A+3B^T) и (3A^T-B)
term1 = np.add(A, 3*B_T)
term2 = 3*A_T - B

# Вычисление (A+3B^T)(3A^T-B)
product = np.dot(term1, term2)

# Решение уравнения (A+3B^T)(3A^T-B)X = C
X = np.linalg.solve(product, C)

# Проверка решения с использованием подстановки
equation = np.dot(np.dot((A+3*B_T), (3*A_T-B)), X)
print(np.allclose(equation, C))  # True, если все элементы достаточно близки
print("\nРезультаты:")
print(X)
```

Результат 1

```
PS C:\Users\acer\Desktop\ALGEBRA> python -u "c:\Users\acer\Desktop\ALGEBRA\lab3\app.py"
True

Результаты:
[[ 0.00640364  0.13849858  0.02662009]
 [ 0.00481596  0.14738959  0.26159668]
 [ 0.00494827 -0.03283851  0.06252812]]
PS C:\Users\acer\Desktop\ALGEBRA>
```

Аналитическое решение

1 задание

$$\left(\begin{pmatrix}4 & -1 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1 & 0 & 6\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}\right)\cdot\left(3\cdot\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 7 & -2 & 9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 6 & 2 & -1\end{pmatrix}\right)\cdot X = \begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}4 & -1 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3 & 0 & 18\\ 3 & 0 & 6\\ 0 & 9 & -3\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}12 & 0 & 0\\ -3 & 3 & 0\\ 21 & -6 & 27\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 6 & 2 & -1\end{pmatrix}\right)\cdot X = \begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1 & 25\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & 9 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}13 & -1 & 0\\ -3 & 3 & -3\\ 15 & -8 & 28\end{pmatrix}}_{A}\cdot X = \underbrace{\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}}_{B}$$

$$\begin{pmatrix}391 & -204 & 703\\ 96 & -32 & 109\\ 63 & -21 & 141\end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = A^{-1}\cdot B}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{221} & \frac{359}{12597} & \frac{20}{37791}\\ \frac{3}{221} & \frac{278}{12597} & \frac{1913}{37791}\\ 0 & -\frac{7}{741} & \frac{32}{2223}\end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix}-\frac{1}{221} & \frac{359}{12597} & \frac{20}{37791}\\ \frac{3}{221} & \frac{278}{12597} & \frac{1913}{37791}\\ 0 & -\frac{7}{741} & \frac{32}{2223}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{242}{37791} & \frac{5234}{37791} & \frac{1006}{37791}\\ \frac{5312}{37791} & \frac{388}{2223} & \frac{10912}{37791}\\ \frac{11}{2223} & -\frac{73}{2223} & \frac{139}{2223}\end{pmatrix}$$

Задание 2

Программное решение

```python
import numpy as np

# Заданные матрицы
A = np.array([[-1, 2, -4], [1, -1, 7], [-1, 0, 0]])
B = np.array([[1, 0, 0], [0, 2, 0], [1, 0, 3]])
C = np.array([[3, 8, -1], [0, 8, 0], [2, -1, 3]])

# Вычисление (A^2 * B + B^3 * A)^T
term1 = np.dot(np.dot(A, A), B)
term2 = np.dot(np.dot(B, B), np.dot(B, A))
result = np.transpose(term1 + term2)

# Решение уравнения (A^2 * B + B^3 * A)^T * X = B * C
X = np.linalg.solve(result, np.dot(B, C))

print(X)

# Проверка решения с использованием подстановки
equation = np.dot(np.transpose(term1 + term2), X)
print(np.allclose(equation, np.dot(B, C)))  # True, если все элементы достаточно
близки
print("\nРезультаты:")
print(X)
```

Результат 2

```
PS C:\Users\acer\Desktop\ALGEBRA> python -u "c:\Users\acer\Desktop\ALGEBRA\lab3\tempCodeRunnerFile.py"
[[ 0.22296242  1.33433954  0.11689393]
 [ 0.0146768  -0.93317373  0.17716249]
 [ 0.06214219  1.00634954  0.04798584]]
True
```

Аналитическое решение

2 задание

$$\left(\begin{pmatrix}-1&2&-4\\1&-1&7\\-1&0&0\end{pmatrix}^2\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}^3\cdot\begin{pmatrix}-1&2&-4\\1&-1&7\\-1&0&0\end{pmatrix}\right)^T\cdot X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&8&-1\\0&8&0\\2&-1&3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}7&-4&18\\-8&3&-11\\1&-2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&8&0\\13&0&27\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2&-4\\1&-1&7\\-1&0&0\end{pmatrix}\right)^T\cdot X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&8&-1\\0&8&0\\2&-1&3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}25&-8&54\\-20&6&-33\\5&-4&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&2&-4\\8&-8&56\\-40&26&-52\end{pmatrix}\right)^T\cdot X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&8&-1\\0&8&0\\2&-1&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}24&-6&50\\-12&-2&23\\-35&22&-40\end{pmatrix}^T\cdot X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&8&-1\\0&8&0\\2&-1&3\end{pmatrix}$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix}24&-12&-35\\-6&-2&22\\50&23&-40\end{pmatrix}}\cdot X=\underset{B}{\begin{pmatrix}3&8&-1\\0&16&0\\9&5&8\end{pmatrix}}$$

$$\boxed{X=A^{-1}B}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{213}{9607}&\frac{1285}{19214}&\frac{167}{9607}\\-\frac{430}{9607}&-\frac{395}{9607}&\frac{159}{9607}\\\frac{19}{9607}&\frac{576}{9607}&\frac{60}{9607}\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}\frac{213}{9607}&\frac{1285}{19214}&\frac{167}{9607}\\-\frac{430}{9607}&-\frac{395}{9607}&\frac{159}{9607}\\\frac{19}{9607}&\frac{576}{9607}&\frac{60}{9607}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&8&-1\\0&16&0\\9&5&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2142}{9607}&\frac{12819}{9607}&\frac{1123}{9607}\\\frac{141}{9607}&-\frac{8965}{9607}&\frac{1702}{9607}\\\frac{570}{9607}&\frac{9596}{9607}&\frac{470}{9607}\end{pmatrix}$$

Задание 3

Программное решение

```python
import numpy as np

A = np.array([[2, -1, -1], [0, 2, -1], [0, 0, -1]])
B = np.array([[-1, 0, 0], [1, -3, 0], [1, 1, -5]])

# Вычисляем A^3, A^2 и A
A_cubed = np.linalg.matrix_power(A, 3)
A_squared = np.linalg.matrix_power(A, 2)

# Вычисляем выражение (A^3 - 2A^2 + 3A)
expression = A_cubed - 2 * A_squared + 3 * A

# Вычисляем транспонированное выражение
expression_transpose = expression.T

# Вычисляем 4B^2 - B
B_squared = np.linalg.matrix_power(B, 2)
result = 4 * B_squared - B

# Решаем уравнение (A^3 - 2A^2 + 3A)^T * X = 4B^2 - B
X = np.linalg.solve(expression_transpose, result)

print(X)
```

Результат 3

```
PS C:\Users\acer\Desktop\ALGEBRA> python -u "c:\Users\acer\Desktop\ALGEBRA\lab3\app3.py"
[[ 8.33333333e-01 -1.01506105e-15 -0.00000000e+00]
 [-1.86111111e+00  6.50000000e+00 -0.00000000e+00]
 [ 4.32407407e+00  1.16666667e+00 -1.75000000e+01]]
```

Аналитическое решение

3 задачи

$$\left(\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&2&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}^3-2\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&2&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}^2+3\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&2&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}\right)^T\cdot X=4\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-3&0\\1&1&-5\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-3&0\\1&1&-5\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&2&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&2&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}-4&2&2\\0&-4&2\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\right)\right)^T\cdot X=4\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-3&0\\1&1&-5\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-3&0\\1&1&-5\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&2&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}4&-4&0\\0&4&-1\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4&2&2\\0&-4&2\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\right)\right)^T\cdot X=4\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-3&0\\1&1&-5\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-3&0\\1&1&-5\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&2&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-2&2\\0&3&1\\0&0&6\end{pmatrix}\right)^T\cdot X=4\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&9&0\\-5&-8&25\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-3&0\\1&1&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\-16&36&0\\-20&-32&100\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-3&0\\1&1&-5\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}6&0&0\\-7&6&0\\-3&-4&-6\end{pmatrix}}_{A}\cdot X=\underbrace{\begin{pmatrix}5&0&0\\-17&39&0\\-21&-33&105\end{pmatrix}}_{B}$$

$$\boxed{X=A^{-1}\cdot B}$$

$$X=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&0&0\\\frac{7}{36}&\frac{1}{6}&0\\-\frac{23}{108}&-\frac{1}{9}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&0&0\\-17&39&0\\-21&-33&105\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6}&0&0\\-\frac{67}{36}&\frac{13}{2}&0\\\frac{467}{108}&\frac{7}{6}&-\frac{35}{2}\end{pmatrix}$$