Бюджетное учреждение высшего образования Ханты-Мансийского автономного округа – Югры

«СУРГУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический институт

Кафедра прикладной математики

Гркикян Мисак Эдикович

Формула Тейлора. Криволинейные интегралы.

Дисциплина «Математический анализ»

направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

направленность (профиль): «Технологии программирования и анализ данных»

Преподаватель: Ряховский Алексей Васильевич

Доцент

Студент гр. № 601-31

Гркикян Мисак Эдикович

Сургут 2024 г.

Лабораторная работа №7. Формула Тейлора. Криволинейные интегралы.

Вариант №7

Задание 1

Аналитически и средствами Python найти многочлен Тейлора 2-й степени в точке M для заданной функции $f(x, y)$:

Аналитическое решение 1

№1

$f(x,y) = x \cdot \operatorname{arctg}(x+y)$, $M=(0,0)$

$f(0,0) = 0 \cdot \operatorname{arctg}(0+0) = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \operatorname{arctg}(x+y) + x \cdot \left(\frac{1}{1+(x+y)^2}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x \cdot \left(\frac{1}{1+(x+y)^2}\right) \end{aligned}\right\} \text{1 порядка}$$

$M=(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{arctg} 0 + 0 \cdot \left(\frac{1}{1+0^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \cdot \left(\frac{1}{1+0^2}\right) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{2}{1+(x+y)^2} - \frac{2x(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{-2x(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{1+(x+y)^2} - \frac{2x(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} \end{aligned}\right\} \text{2 порядка}$$

$M=(0,0)$:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$

$$P_1(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot y \Rightarrow$$

$$P_1(x,y) = 0 + 0\cdot x + 0\cdot y = 0$$

$$P_2(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y^2}{2} \Rightarrow$$

$$P_2(x,y) = 0 + 0\cdot x + 0\cdot y + \frac{2x^2 + 2xy + 0\cdot y^2}{2} = x^2 + xy$$

Программное решение 1

```
from sympy import symbols, diff, atan, expand

# Определение символьных переменных
x, y = symbols("x y")

# Определение функции
f = x * atan(x + y)

# Вычисление частных производных первого порядка
df_dx = diff(f, x)  # частная производная по x
df_dy = diff(f, y)  # частная производная по y

# Вычисление частных производных второго порядка
d2f_dx2 = diff(df_dx, x)  # вторая производная по x
d2f_dy2 = diff(df_dy, y)  # вторая производная по y
d2f_dxdy = diff(df_dx, y)  # смешанная производная

# Точка m=(0,0)
args = [(x, 0), (y, 0)]  # аргументы для подстановки, x = 0, y = 0

# Вычисление первого дифференциала
df = df_dx.subs(args)*x + df_dy.subs(args)*y

# Вычисление второго дифференциала
d2f = (1/2) * (d2f_dx2.subs(args)*x**2 + 2*d2f_dxdy.subs(args)*x*y +
d2f_dy2.subs(args)*y**2)

# Вычисление многочлена Тейлора 2-й степени
Taylor_polynomial_2 = expand(f.subs(args) + df + d2f)

# Вывод результатов
print("Многочлен Тейлора 1-й степени:")
print("P1(x, y) = ", expand(f.subs(args) + df))
print("Многочлен Тейлора 2-й степени:")
print("P2(x, y) = ", Taylor_polynomial_2)
```

```
PS C:\Users\acer\Desktop\matan> & C:/Users/acer/AppData/Local/Microsoft/WindowsApps/python3.11.exe c:/Users/acer/Desktop/matan/lab_1/main1.py
Многочлен Тейлора 1-й степени:
P1(x, y) =  0
Многочлен Тейлора 2-й степени:
P2(x, y) =  1.0*x**2 + 1.0*x*y
PS C:\Users\acer\Desktop\matan>
```

Рис. 1. Вывод программы в терминале.

Задание 2

1. Средствами Python изобразить кривую γ , по которой производится интегрирование. На рисунке подписать координатные оси и точки, указанные в задании.
2. Ввести параметрическое представление кривой, приведя все необходимые вычисления.
3. Свести криволинейный интеграл 2-го рода к обычному определенному интегралу и вычислить его аналитически и средствами Python.
4. Проверить зависит ли интеграл от пути интегрирования и, если нет, то найти функцию $u(x, y)$, для которой подынтегральное выражение является полным дифференциалом, и вычислить интеграл с ее помощью (только аналитически).

Аналитическое решение 2

№2

$$\int\limits_{\gamma} x\,dy + (y+1)\,dx$$

$\gamma:\ x^2+y^2=1$

$A=(0,0)$

$B=(-1,0)$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$P=y+1 \quad Q=x$

$$du = x\,dy + (y+1)\,dx = d(xy+x)$$

$$u = xy+x$$

$$\int\limits_{\gamma} x\,dy + (y+1)\,dx = u(B) - u(A) =$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$$= -1$$

$x=\cos t \qquad t\in\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$y=\sin t$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [\cos t \cdot \cos t + (\sin t+1)\cdot(-\sin t)]\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t - \sin t)\,dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos 2t - \sin t)\,dt = \frac{\sin 2t}{2} + \cos t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\sin 2\pi}{2} + \cos\pi - \left(\frac{\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -1$$

Программное решение 2

```
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def plot_curve():
    theta = np.linspace(np.pi/2, np.pi, 100)
    x = np.cos(theta)
    y = np.sin(theta)

    plt.figure(figsize=(8, 8))
    plt.plot(x, y, 'b-')
    plt.plot([0, -1], [0, 0], 'ro')
    plt.text(0.1, 0.9, 'a(0,1)', fontsize=12)
    plt.text(-1.1, 0.1, 'b(-1,0)', fontsize=12)
    plt.axhline(y=0, color='k', linestyle='--')
    plt.axvline(x=0, color='k', linestyle='--')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
```

```python
    plt.title('Дуга окружности x²+y²=1 от a(0,1) до b(-1,0)')
    plt.grid(True)
    plt.axis('equal')
    plt.show()

def calculate_integral():
    t = sp.Symbol('t')
    x = sp.cos(t)
    y = sp.sin(t)
    dx = sp.diff(x, t)
    dy = sp.diff(y, t)

    integrand = x * dy + (y + 1) * dx
    integral = sp.integrate(integrand, (t, sp.pi/2, sp.pi))

    print("Аналитическое решение:")
    print(integral)
    print(f"Численное значение: {float(integral)}")


if __name__ == "__main__":
    print("1. Построение кривой:")
    plot_curve()

    print("\n2. Параметрическое представление кривой:")
    print("x = cos(t)")
    print("y = sin(t)")
    print("где t изменяется от π/2 до π")

    print("\n3. Вычисление интеграла:")
    calculate_integral()
```

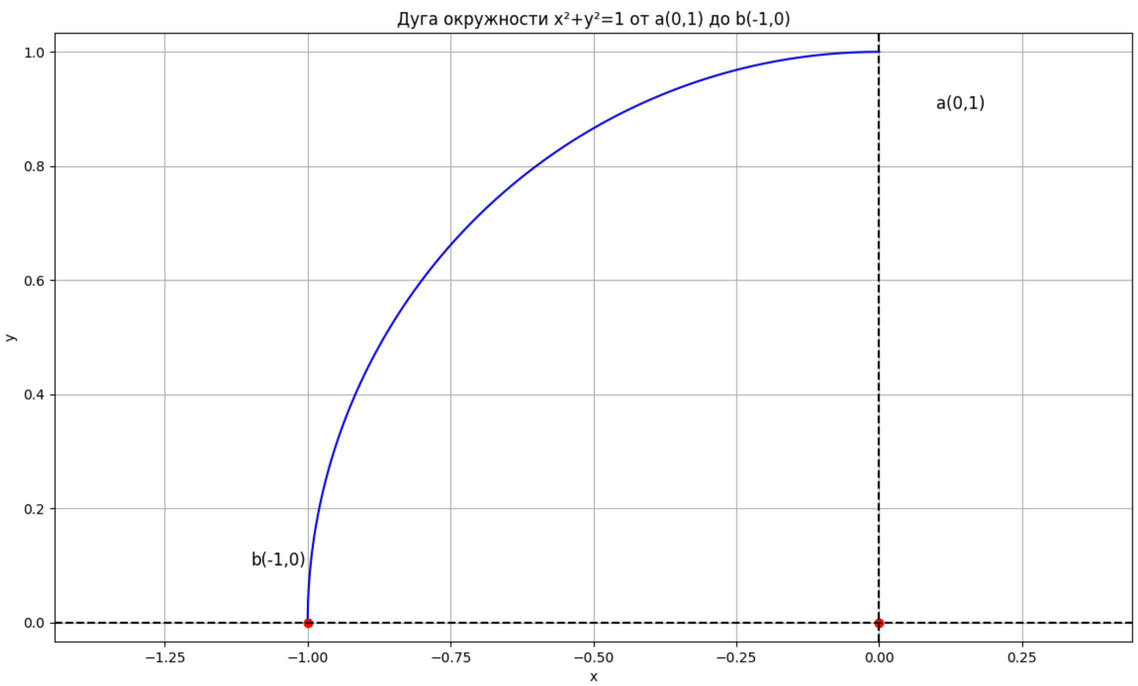

Рис. 2. Вывод программы в терминале.

```
PS C:\Users\acer\Desktop\matan> & C:/Users/acer/AppData/Local/Microsoft/WindowsA
1. Построение кривой:

2. Параметрическое представление кривой:
x = cos(t)
y = sin(t)
где t изменяется от π/2 до π

3. Вычисление интеграла:
Аналитическое решение:
-1
Численное значение: -1.0
PS C:\Users\acer\Desktop\matan>
```

Рис. 3. Вывод программы в терминале.