

**Бюджетное учреждение высшего  
образования Ханты-Мансийского  
автономного округа – Югры**

---

**«СУРГУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»**

---

**Политехнический институт**

---

Кафедра прикладной математики

Гркиян Мисак Эдикович

**Функции одной переменной. Предел и  
непрерывность функции.**

---

Дисциплина «Математический анализ»

направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

направленность (профиль): «Технологии программирования и анализ данных»

Преподаватель: Ряховский Алексей Васильевич

Доцент

Студент гр. № 601-31

Гркиян Мисак Эдикович

---

# Лабораторная работа №2. Функции одной переменной. Предел и непрерывность функции.

## Вариант №7

### Задание

2.1. Аналитически найти область определения функций, а затем построить их графики, используя графические пакеты Python. Для каждой из функций график построить на отдельном рисунке.

2.2. Вычислить пределы данных функций двумя способами: аналитически и используя библиотеки Python для символьных вычислений. Используя графические пакеты Python, построить графики функций, иллюстрирующие поведение функций в окрестностях тех точек, в которых вычисляется предел. Если предел существует, построить на соответствующем рисунке точку, изображающую предел данной функции.

2.3. Найти (аналитически и используя библиотеки Python для символьных вычислений) точки разрыва функции и определить их тип. Используя графические пакеты Python построить графики функций, иллюстрирующие поведение функций в окрестностях точек разрыва.

### Аналитическое решение 2.1.1

$$f(x) = \sqrt{5 + 4x - x^2}$$

Найдем область определения:

$$5 + 4x + x^2 \geq 0$$

$$x^2 - 4x - 5 \leq 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 16 + 20 = 36 = 6^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 \pm 6}{2} = -1; 5$$

$$(x + 1) * (x - 5) \leq 0$$

Область определения:

$$D(f) = [-1; 5]$$



ОТВЕТ:  $D(f) = [-1; 5]$

### Программное решение 2.1.1

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math
from sympy import *

# Определение функции
def f(x):
    return sqrt(5 + 4 * x - x ** 2)

# Создание массива значений x
x = np.linspace(-1, 5, 200)

# Вычисление значений y для каждого значения x
y = []
for i in x:
    y.append(f(i))

# Построение графика
plt.plot(x, y, linewidth=2)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.title('График функции f(x)')
plt.grid()
plt.show()
```

### Аналитическое решение 2.1.2

$$g(x) = \ln \sin x$$

Найдем область определения:

$$\sin x > 0$$

Следовательно:

$$D(g) = [2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in Z$$

ОТВЕТ:  $D(g) = [2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in Z$

### Программное решение 2.1.2

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from math import *
from sympy import *

# Определение функции
def f(x):
    return np.log(np.sin(x))

# Создание массива значений x
x = np.linspace(0, np.pi, 300)

# Вычисление значений y для каждого значения x
y = f(x)

# Построение графика
plt.plot(x, y)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.title('График функции f(x)')
plt.grid()
plt.show()
```

### Иллюстрация решения

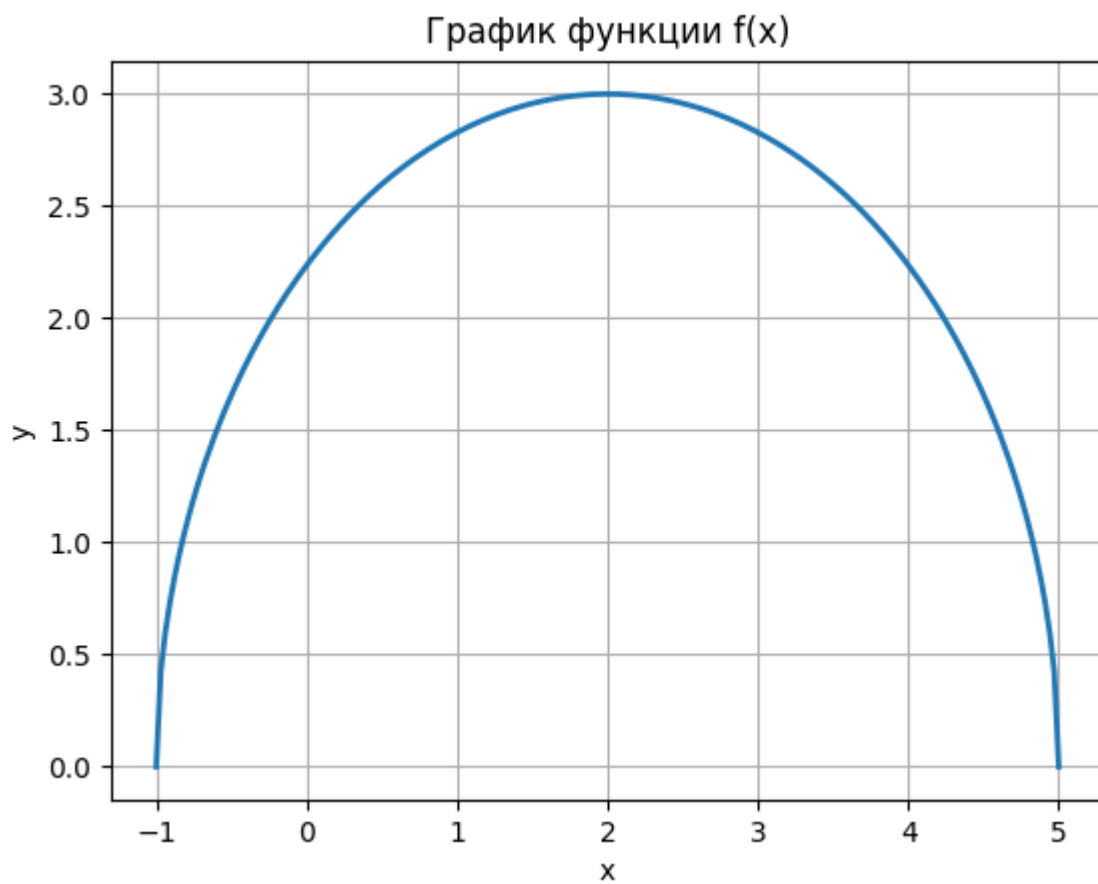


Рис. 2.1.1. Иллюстрация решения задачи.

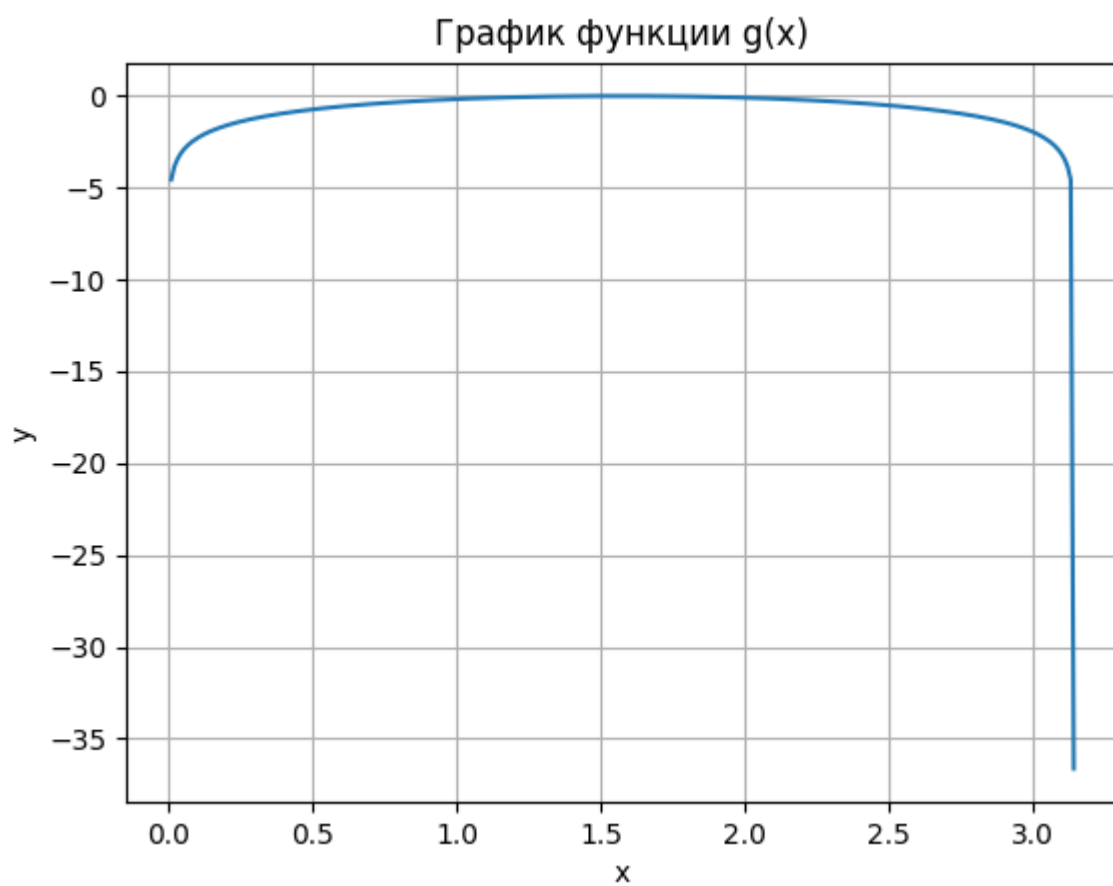


Рис. 2.1.2. Иллюстрация решения задачи.

## Аналитическое решение 2.2

Вычислим предел данной функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 7x)^{3 \operatorname{ctgx}}$$

Для начала попробуем преобразовать показатель:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3 \operatorname{ctgx} \Rightarrow \text{нет предела}$$

$$3 \operatorname{ctgx} = 3 * \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

По 1-му замечательному пределу находим предел синуса:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x * \sin x}{x} = x$$

Далее:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 7x)^{3 * \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{\ln(1+7x)})^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3}{x} * \ln(1+7x)}$$

С помощью следствия второго замечательного предела, попытаемся избавиться от логарифма в показателе:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + 7x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x) * 7x}{7x} = 7x$$

Вычислим же наконец предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3}{x} * 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{21} = e^{21}$$

ОТВЕТ:  $e^{21}$

## Программное решение 2.2

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import sympy as smp

x = smp.symbols('x')
```

```

# Объявляем функцию
def f(x):
    return (1 + 7 * x) * (3 * smp.cot(x))

def plot_points():
    x_values = np.linspace(0.1, 10, 400) # начинаем с 0.1, чтобы избежать деления
на ноль
    y_values = [f(n) for n in x_values]

    # Строим график
    plt.plot(x_values, y_values, label='f(x)')

    # Вычисление предела
    lim = smp.limit(f(x), x, 0)

    # Изображаем предел точкой
    plt.plot(lim, 'o', color='orange', label='Limit')

    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.title('График функции')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()

plot_points()

# Определение функции
f = (1 + 7 * x) ** (3 * smp.cot(x))

# Вычисление предела
lim = smp.limit(f, x, 0)
print(f'Limit: {lim}')

```

## Иллюстрация решения

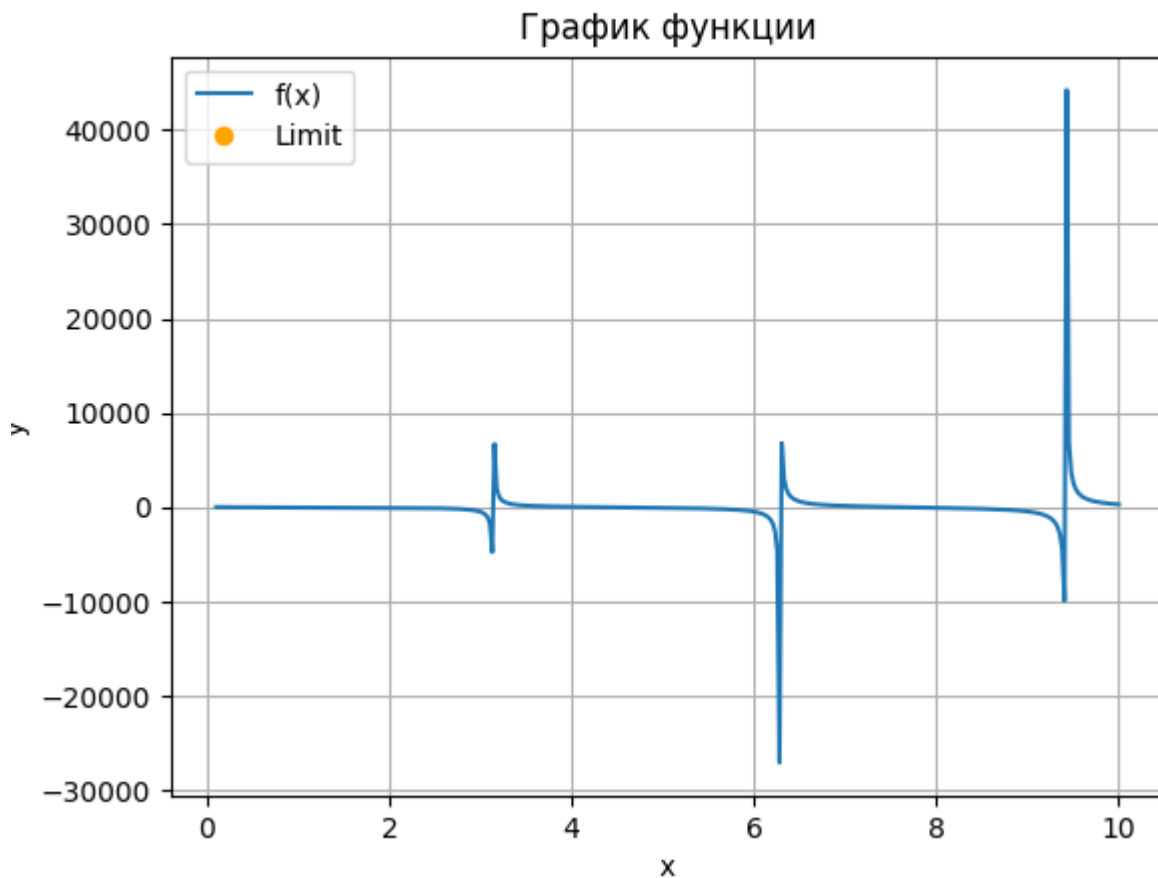


Рис. 2.2. Иллюстрация решения задачи.

```
PS C:\Users\acer\Desktop\matan> python -u "c:\Users\acer\Desktop\matan\lab2\app2.py"
Limit: exp(21)
PS C:\Users\acer\Desktop\matan>
```

Рис. 2.2. Вывод программы в терминале.

### Аналитическое решение 2.3

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

Давайте исследуем точку  $x_0 = 0$

Найдем предел справа и слева:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Теперь определим значение функции в точке  $x_0$ :

$$f(0) = 0 * \sin \frac{1}{0} - \text{функция в данной точке не определена}$$



Пределы слева и справа равны, а функция не определена. Отсюда следует, что данная точка является точкой устранимого разрыва  $I$ -го рода.

## Программное решение 2.3

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from math import *
from sympy import *

# Определение символа x
x = Symbol('x')

# Объявляем функцию
def f(x):
    return x * np.sin(1 / x)

# Создание массива значений x около точки разрыва
x0 = np.linspace(-0.125 * np.pi, 0.125 * np.pi, 100)
y0 = f(x0)

# Построение графика
plt.plot(x0, y0)
plt.axvline(x=0, color='red', linestyle='--', label='Точка разрыва')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('График функции f(x) = x * sin(1/x)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

# определение символьного выражения, соответствующего функции x*sin(1/x)
f = x * sin(1 / x)

# вычисление предела слева в нуле
lim_left = limit(f, x, 0, dir='-')

# по умолчанию вычисляется предел справа
lim_right = limit(f, x, 0)

print(f'Предел слева в точке x=0: {lim_left}')
print(f'Предел справа в точке x=0: {lim_right}')
```

## Иллюстрация решения

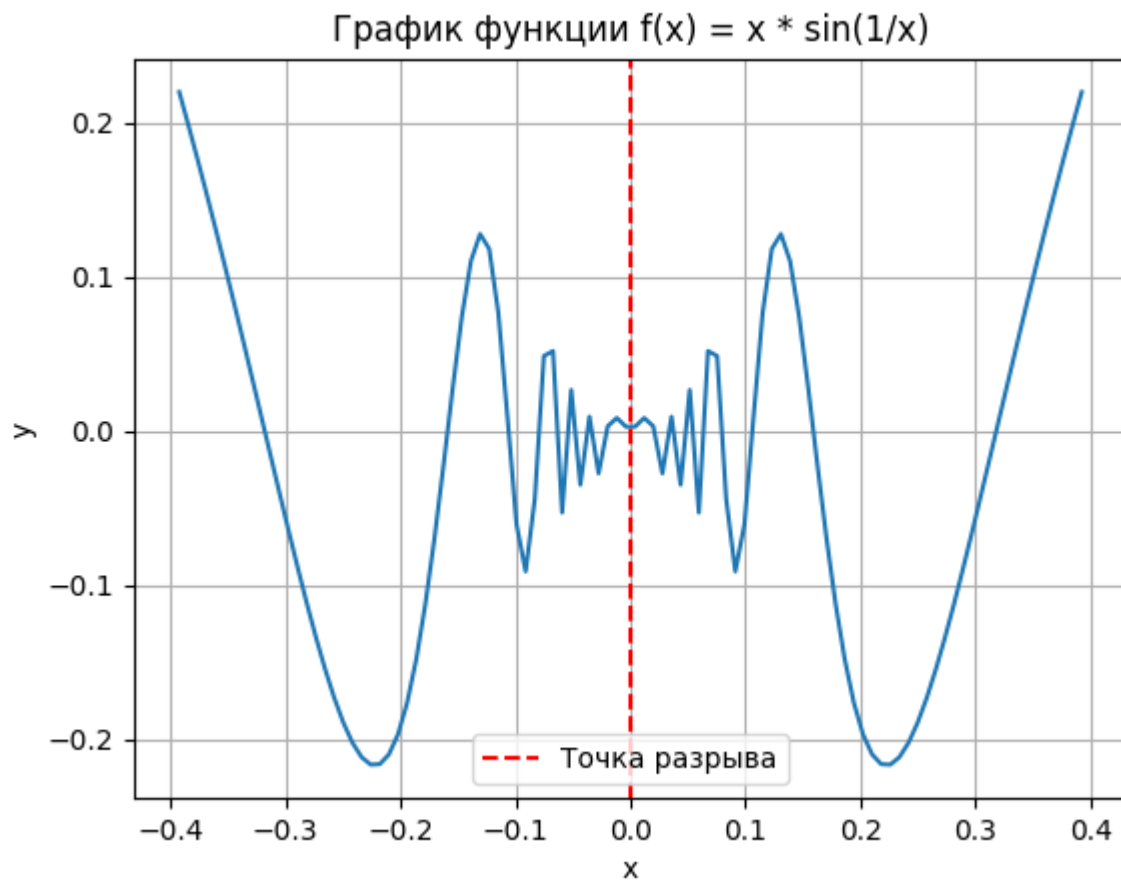


Рис. 2.2. Иллюстрация решения задачи.

```
PS C:\Users\acer\Desktop\matan> python -u "c:\Users\acer\Desktop\matan\lab2\tempCodeRunnerFile.py"
Предел слева в точке  $x=0$ : 0
Предел справа в точке  $x=0$ : 0
PS C:\Users\acer\Desktop\matan>
```

Рис. 2.2. Вывод программы в терминале.