Бюджетное учреждение высшего образования Ханты-Мансийского автономного округа – Югры

«СУРГУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический институт

Кафедра прикладной математики

Гркикян Мисак Эдикович

Неопределенный интеграл

Дисциплина «Математический анализ»

направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

направленность (профиль): «Технологии программирования и анализ данных»

Преподаватель: Ряховский Алексей Васильевич

Доцент

Студент гр. № 601-31

Гркикян Мисак Эдикович

Сургут 2024 г.

Лабораторная работа №4. Неопределенный интеграл

Вариант №6

Задание

4.Вычислить (аналитически и используя библиотеки Python для символьных вычислений) данные неопределенные интегралы. Для каждого интеграла, используя графические пакеты Python, на одном рисунке построить: график подынтегральной функции (синий цвет), и любые три различные интегральные кривые (зелёный цвет), соответствующие подынтегральной функции. Графики строить лишь на отрезках, которые целиком лежат в области определения функций.

Аналитическое решение 4.1

$$① \int \frac{x^2}{9-x^2}dx = -\int \frac{x^2}{x^2-9}dx = -\int\left(\frac{x^2-9}{x^2-9}+\frac{9}{x^2-9}\right)dx =$$

$$= -\int\left(\frac{9}{x^2-9}+1\right)dx = -9\int\frac{1}{x^2-9}dx - \int 1dx = -9\int\frac{1}{(x-3)(x+3)}dx$$

$$-x = -9\int\left(\frac{1}{6(x-3)}-\frac{1}{6(x+3)}\right)dx - x = -9\left(\int\frac{1}{6(x-3)}dx -\right.$$

$$\left.-\int\frac{1}{6(x+3)}dx\right) - x = -9\left(\frac{1}{6}\ln|x-3| - \frac{1}{6}\ln|x+3|\right) - x =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|x-3| + \frac{3}{2}\ln|x+3| - x$$

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+3)}$$

$$1 = A(x+3) + B(x-3)$$

$$1 = Ax + 3A + Bx - 3B$$

$$1 = (A+B)x + (3A-3B)$$

$$\begin{cases} 1 = 3A - 3B \\ 0 = A + B \end{cases} \Rightarrow A = -B$$

$$1 = -3B - 3B$$

$$1 = -6B$$

$$B = -\frac{1}{6}, \quad A = \frac{1}{6}$$

Программное решение 4.1

```
import sympy
from sympy.abc import x
```

```
f = x**2 / (9-x**2)
print(f.integrate(x))
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Определение функци1
def f(x):
    return x**2 / (9 - x**2)

def f1(x):
    return -x - 3 * np.log(x - 3) / 2 + 3 * np.log(x + 3) / 2 - 2

def f2(x):
    return -x - 3 * np.log(x - 3) / 2 + 3 * np.log(x + 3) / 2 + 2

def f3(x):
    return -x - 3 * np.log(x - 3) / 2 + 3 * np.log(x + 3) / 2

# Создание вектора значений x
x = np.linspace(-10, 10, 400)

# Построение графика и кривых
plt.plot(x, f(x), color='blue')
plt.plot(x, f1(x), color='green')
plt.plot(x, f2(x), color='green')
plt.plot(x, f3(x), color='green')


plt.grid(True)

# Настройка масштаба графика
plt.ylim(-10, 10)
plt.xlim(3.1, 10)

# Настройка внешнего вида графика
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('График функции f(x) и кривые')
plt.legend()

plt.show()
```

Иллюстрация решения

```
PS C:\Users\acer\Desktop\matan> python -u "c:\Users\acer\Desktop\matan\lab4\app.py"
-x - 3*log(x - 3)/2 + 3*log(x + 3)/2
PS C:\Users\acer\Desktop\matan>
```

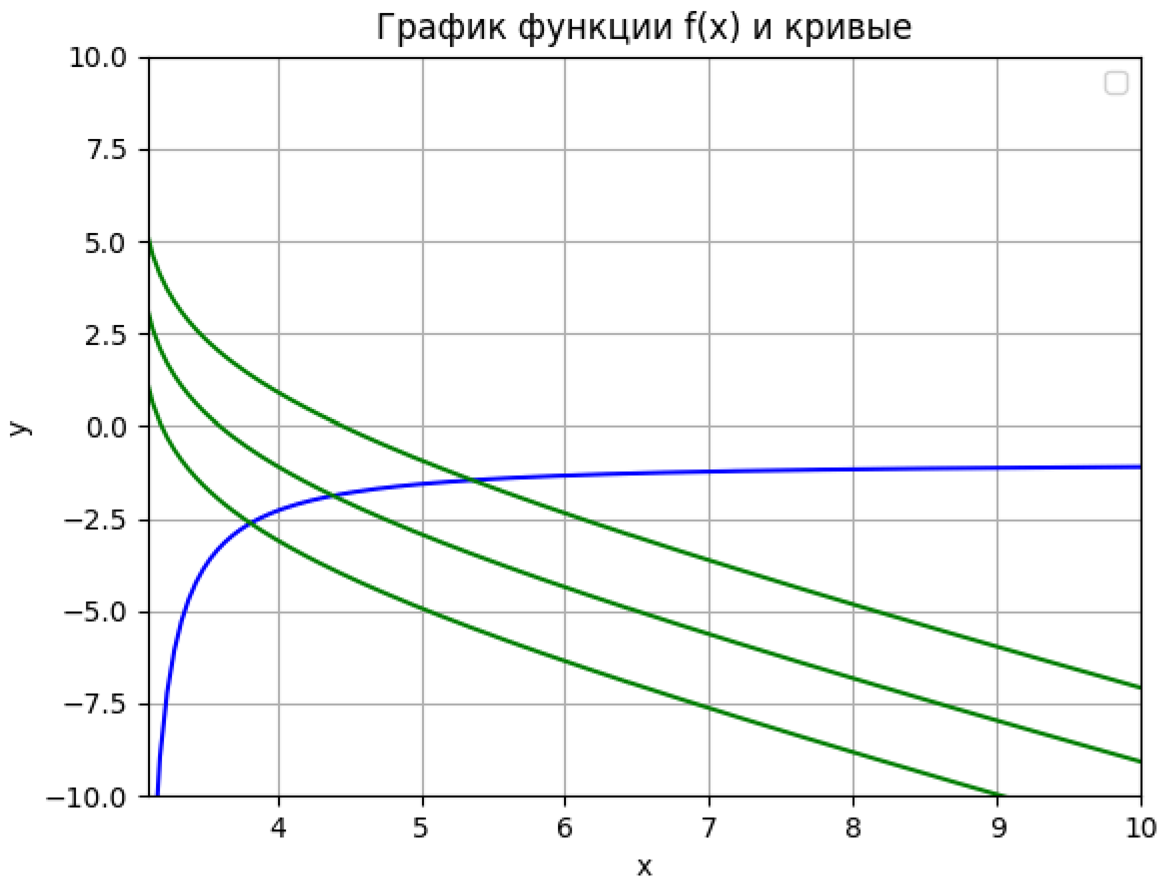

Рис. 4.1. Иллюстрация решения задачи.

Аналитическое решение 4.2

(2) $\int \sin x (\cos x + 2)^2 dx = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} = -\frac{(\cos x + 2)^3}{3} + C$

$u = \cos x + 2$

$du = -\sin x \, dx$

Программное решение 4.2

```
import sympy
from sympy.abc import x
f = sympy.sin(x) * ((sympy.cos(x) + 2)**2)
print(f.integrate(x))
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Определение функций
```

```python
def f(x):
    return np.sin(x) * (np.cos(x) + 2)**2

def f1(x):
    return (-np.cos(x)**3)/3 - 2*np.cos(x)**2 - 4*np.cos(x)

def f2(x):
    return (-np.cos(x)**3)/3 - 2*np.cos(x)**2 - 4*np.cos(x) + 2

def f3(x):
    return (-np.cos(x)**3)/3 - 2*np.cos(x)**2 - 4*np.cos(x) - 2

# Создание вектора значений x
x = np.linspace(-10, 10, 400)

# Построение графика
plt.plot(x, f(x), color='blue')
plt.plot(x, f1(x), color='green')
plt.plot(x, f2(x), color='green')
plt.plot(x, f3(x), color='green')


plt.grid(True)

# Настройка масштаба по оси x
plt.xlim(-10, 10)

# Настройка внешнего вида графика
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('График функции и кривые')
plt.legend()

plt.show()
```

Иллюстрация решения

```
PS C:\Users\acer\Desktop\matan> python -u "c:\Users\acer\Desktop\matan\lab4\tempCodeRunnerFile.py"
-cos(x)**3/3 - 2*cos(x)**2 - 4*cos(x)
PS C:\Users\acer\Desktop\matan>
```

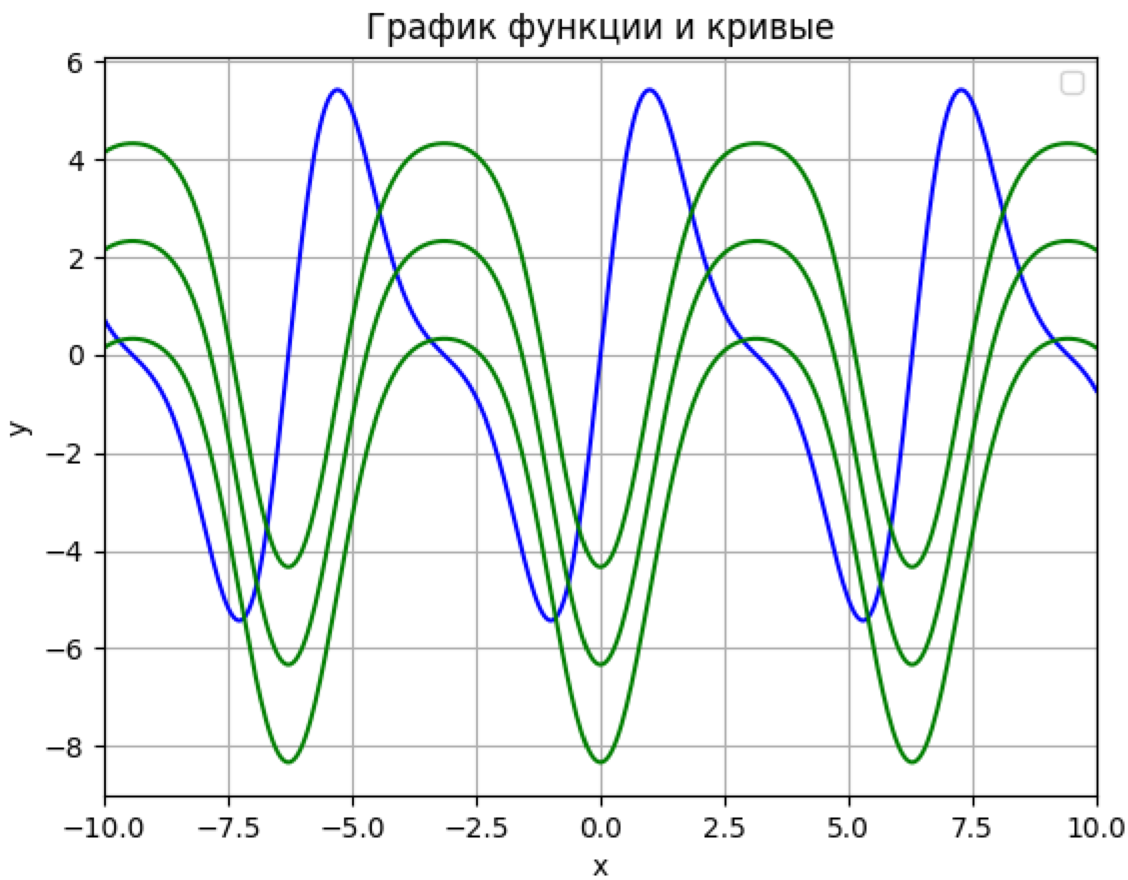

Рис. 4.2. Иллюстрация решения задачи.

Аналитическое решение 4.3

$$③\quad \int \sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\,2u\,du = 2\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2+1}}$$

$$u = \sqrt{x} \qquad x = u^2 \qquad dx = 2u\,du$$

$$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2+1}} = \int \frac{\frac{\sin^2(z)}{\cos^2(z)}}{\frac{1}{\cos(z)}} \cdot \frac{1}{\cos(z)}\,dz = \int \frac{\sin^2(z)}{\cos^3(z)}\,dz \ \boxed{=}$$

$$u = tg(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \rightarrow \sqrt{u^2+1} = \sqrt{\frac{\sin^2(z)}{\cos^2(z)} + 1} = \sqrt{\frac{\sin^2(z)+\cos^2(z)}{\cos^2(z)}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(z)}} = \frac{1}{\cos(z)}$$

$$du = \frac{1}{\cos^2(z)}\,dz$$

$$\boxed{=} \int \frac{1-\cos^2(z)}{\cos^3(z)}\,dz = \int \frac{1}{\cos^3(z)}\,dz - \int \frac{1}{\cos(z)}\,dz = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(z)}{\cos^2(z)} + \ln\left|tg(z) + \frac{1}{\cos(z)}\right|\right) - \ln\left|tg(z) + \frac{1}{\cos(z)}\right| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(z)}{\cos^2(z)} - \frac{1}{2}\ln\left|tg(z) + \frac{1}{\cos(z)}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(arctg(u))}{\cos^2(arctg(u))} - \frac{1}{2}\ln\left|tg(arctg(u)) + \frac{1}{\cos(arctg(u))}\right| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right)^2} - \frac{1}{2}\ln\left|u + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}}\right| = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2+1} - \frac{1}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2+1}\right| + C$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{(\sqrt{x})^2+1} - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x} + \sqrt{(\sqrt{x})^2+1}\right|\right) + C =$$

$$= \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1} - \ln\left|\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right|) + C$$

Программное решение 4.3

```python
import sympy
from sympy import sqrt
from sympy.abc import u, x

# Определение функции
f = (2 * u**2) / (sqrt(u**2 + 1))

# Вычисление интеграла
integral = sympy.integrate(f, u)

# Подстановка u = sqrt(x)
integral_x = integral.subs(u, sqrt(x))

print(integral_x)
```

```python
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# Определение функций
def f(x):
    return np.sqrt(x / (x + 1))

def f1(x):
    y = np.sqrt(x) * np.sqrt(x + 1) - np.log(np.sqrt(x) + np.sqrt(x + 1))
    return y

def f2(x):
    y = np.sqrt(x) * np.sqrt(x + 1) - np.log(np.sqrt(x) + np.sqrt(x + 1)) + 2
    return y

def f3(x):
    y = np.sqrt(x) * np.sqrt(x + 1) - np.log(np.sqrt(x) + np.sqrt(x + 1)) - 2
    return y

# Создание вектора значений x
x = np.linspace(-10, 10, 400)

# Построение графика
plt.plot(x, f(x), color='blue')
plt.plot(x, f1(x), color='green')
plt.plot(x, f2(x), color='green')
plt.plot(x, f3(x), color='green')


plt.grid(True)

# Настройка масштаба по осям x и y
plt.xlim(0, 10)
plt.ylim(-2, 6)

# Настройка внешнего вида графика
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('График функции и кривые')
plt.legend()

plt.show()
```

Иллюстрация решения

```
PS C:\Users\acer\Desktop\matan> python -u "c:\Users\acer\Desktop\matan\lab4\app3.py"
sqrt(x)*sqrt(x + 1) - asinh(sqrt(x))
PS C:\Users\acer\Desktop\matan>
```

Рис. 4.3. Иллюстрация решения задачи.