Бюджетное учреждение высшего образования Ханты-Мансийского автономного округа – Югры

«СУРГУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический институт

Кафедра прикладной математики

Гркикян Мисак Эдикович

Числовые последовательности

Дисциплина «Математический анализ»

направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

направленность (профиль): «Технологии программирования и анализ данных»

Преподаватель: Ряховский Алексей Васильевич

Доцент

Студент гр. № 601-31

Гркикян Мисак Эдикович

Сургут 2023 г.

Лабораторная работа №1. Числовые последовательности.

Вариант №7

Задание

Вычислить пределы данных числовых последовательностей двумя способами:

- аналитически
- используя библиотеки Python для символьных вычислений.

Для каждой числовой последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ на одном рисунке построить (используя графические пакеты Python) следующие множества точек ($k = 1, \dots, m$):

- (k, 0) – синий цвет
- (0, x_k) – зеленый цвет
- (k, x_k) – красный цвет

В случае, если последовательность сходится, построить на соответствующем рисунке точку (оранжевый цвет) изображающую предел последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

В задача 1 для сходящихся последовательностей, для заданного $\varepsilon > 0$ найти такой номер $n(\varepsilon)$, начиная с которого $|x_k - A| < \varepsilon, \forall k \geq n(\varepsilon)$

Аналитическое решение 1

Рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+7}{2\sqrt{n}+1}$$

Найдем пределы числителя и знаменателя:

- $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}+7) = \infty$
- $\lim_{n\to\infty}(2\sqrt{n}+1) = \infty$

Поскольку выражение $\frac{\infty}{\infty}$ является неопределенностью, преобразуем его, деля каждое слагаемое в числителе и знаменателе на старшую степень, в данном случае это $\sqrt{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+7}{2\sqrt{n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}+7}{\sqrt{n}}}{\frac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}}$$

Вычислим предел числителя и знаменателя, вычисляя предел каждого слагаемого:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}+\frac{7}{\sqrt{n}}}{\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{\sqrt{n}} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 2$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Следовательно: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{7}{\sqrt{n}} = 1$

Аналогично для знаменателя: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2$

Найдем предел:

$$\lim_{n\to\infty} (\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

Найдем номер n(ε):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+7}{2\sqrt{n}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{\sqrt{n}+7}{2\sqrt{n}+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2(\sqrt{n}+7)-(2\sqrt{n}+1)}{4\sqrt{n}+2}\right| = \left|\frac{2\sqrt{n}+14-2\sqrt{n}-1}{4\sqrt{n}+2}\right| = \left|\frac{13}{4\sqrt{n}+2}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{13}{4\sqrt{n}+2} < \varepsilon$$

$$\frac{13}{\varepsilon} < 4\sqrt{n} + 2$$

$$\frac{13}{\varepsilon} - 2 < 4\sqrt{n}$$

$$\frac{\frac{13}{\varepsilon}-2}{4} < \sqrt{n}$$

$$\left(\frac{\frac{13}{\varepsilon}-2}{4}\right)^2 < n$$

$$\left(\frac{\frac{13}{\varepsilon}-2}{4}\right)^2 < n(\varepsilon)$$

$\varepsilon = 0,001$:

$n(\varepsilon) = [(\frac{\frac{13}{0,001} - 2}{4})^2]$ = $[10559250, 25]$, $\forall n \geqslant 10559250, 25$

все члены последовательности начиная с $x_{10559251}$ будут удовлетворять неравенству:

$\frac{1}{2} - 0,001 < x_n < \frac{1}{2} + 0,001$

$0,499 < x_n < 0,501$

Ответ: $\frac{1}{2}$

Программное решение 1

```
#!/usr/bin/env python

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math
from sympy import *


n = Symbol("n")


def sequence(n):
    return (n ** 0.5 + 7) / (2 * n ** 0.5 + 1)


def plot_points(m):
    x = np.arange(1, m + 1)
    y = sequence(x)

    # (k, 0) - blue colour
    plt.plot(x, np.zeros_like(x), 'bo', label='$(k, 0)$')
    # (0, x_k) - green color
    plt.plot(np.zeros_like(x), y, 'go', label='$(0, x_k)$')
    # (k, x_k) - red color
    plt.plot(x, y, 'ro', label='$(k, x_k)$')

    lim_value = limit((n ** 0.5 + 7) / (2 * n ** 0.5 + 1), n, oo)
    plt.plot(0, lim_value, 'o', color='orange', label='$(lim)$')  # Точка предела

    plt.xlabel('$k$')
    plt.ylabel('$x_k$')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()
```

```
m = 20  # number of points
plot_points(m)
a = limit((n ** 0.5 + 7) / (2 * n ** 0.5 + 1), n, oo)
print(a)
```

Иллюстрация решения

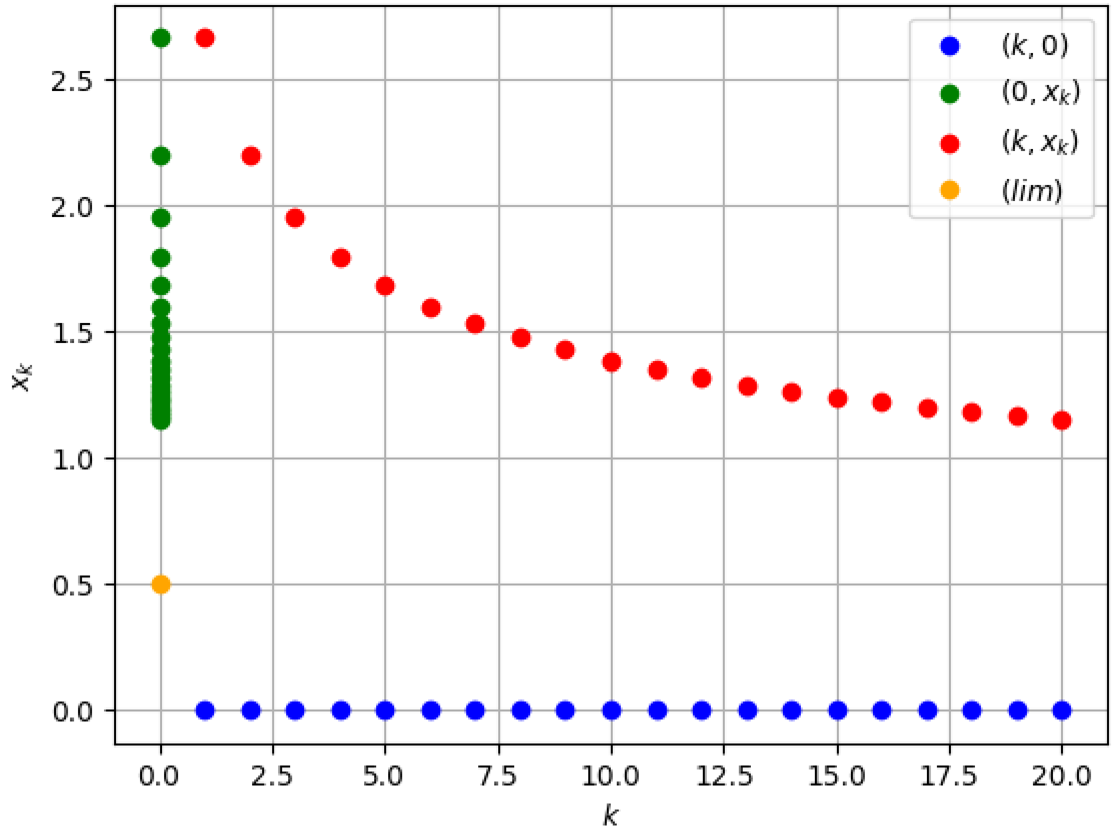
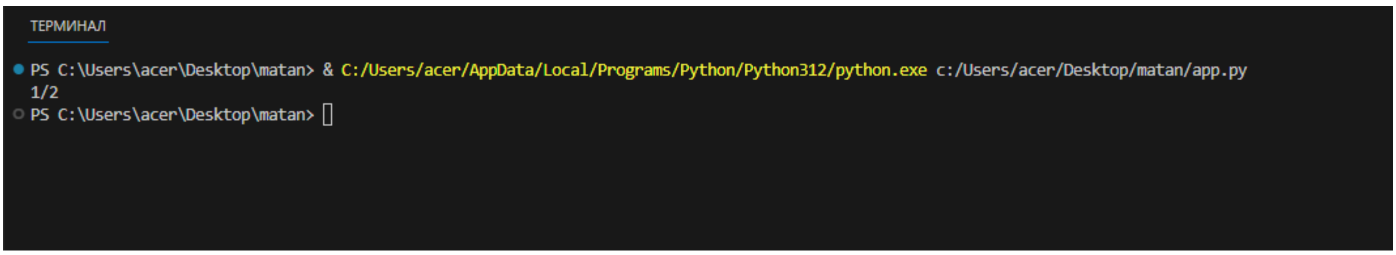


Рис. 1. Иллюстрация решения задачи.



```
ТЕРМИНАЛ
PS C:\Users\acer\Desktop\matan> & C:/Users/acer/AppData/Local/Programs/Python/Python312/python.exe c:/Users/acer/Desktop/matan/app.py
1/2
PS C:\Users\acer\Desktop\matan>
```

Рис. 2. Вывод программы в терминале.

Аналитическое решение 2

Рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{16}-1}{\sqrt[n]{4}-1}$$

Найдем пределы числителя и знаменателя:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{16}-1)=0$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{4}-1)=0$

Поскольку выражение $\frac{0}{0}$ является неопределенностью, преобразуем его:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{16}-1}{\sqrt[n]{4}-1}$ = $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{4}-1)\cdot(\sqrt[n]{4}+1)}{\sqrt[n]{4}-1}$

Можем сократить на $(\sqrt[n]{4}-1)$:

Получаем: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{4}+1)$

Проведем вычисления:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{4})=1$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(1)=1$

Следовательно: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1)$ = 2

Ответ: 2

Программное решение 2

```
#!/usr/bin/env python

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math
from sympy import *


n = Symbol("n")


def sequence(n):
    return (16 ** (1 / n) - 1) / (4 ** (1 / n) - 1)

def plot_points(m):
    x = np.arange(1, m+1)
    y = sequence(x)

    # (k, 0) - blue colour
    plt.plot(x, np.zeros_like(x), 'bo', label='$(k, 0)$')
    # (0, x_k) - green color
    plt.plot(np.zeros_like(x), y, 'go', label='$(0, x_k)$')
    # (k, x_k) - red color
```

```
    plt.plot(x, y, 'ro', label='$(k, x_k)$')

    lim_value = limit((16 ** (1 / n) - 1) / (4 ** (1 / n) - 1), n, oo)
    plt.plot(0, lim_value, 'o', color='orange', label='$(lim)$')  # Точка предела

    plt.xlabel('$k$')
    plt.ylabel('$x_k$')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()

m = 20 # number of points
plot_points(m)

a = limit((16 ** (1 / n) - 1) / (4 ** (1 / n) - 1), n, oo)
print(a)
```

Иллюстрация решения

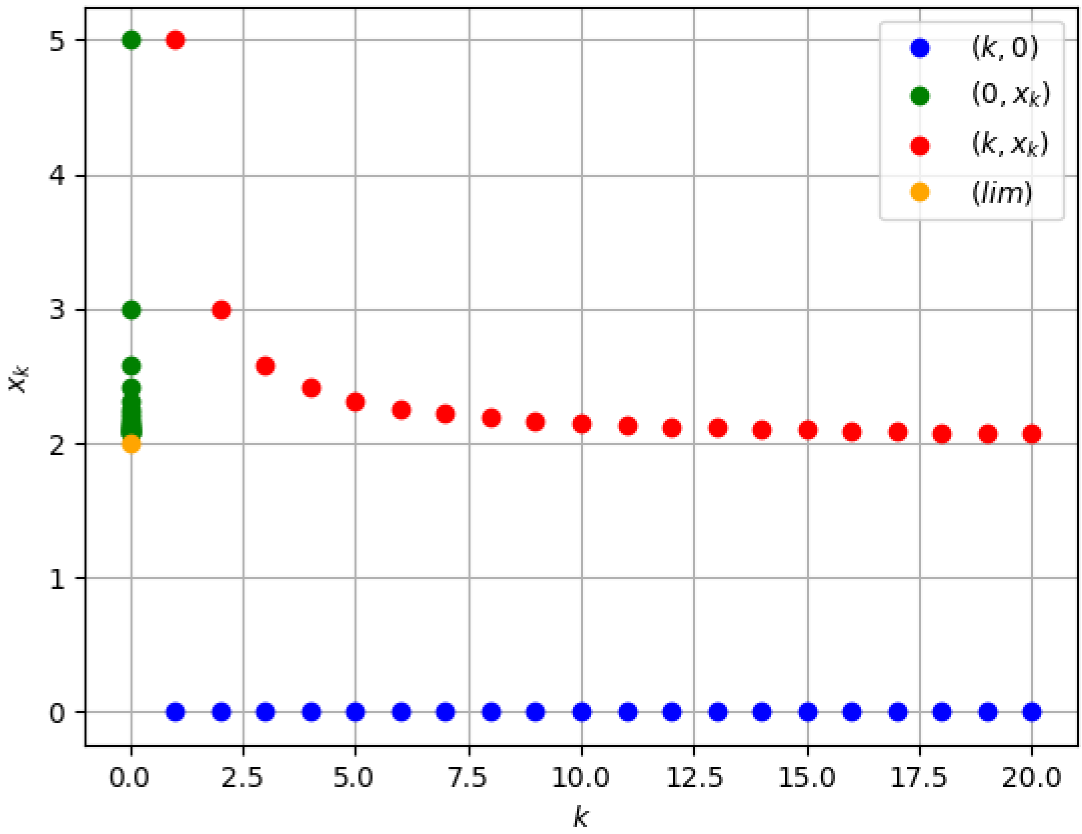


Рис. 1. Иллюстрация решения задачи.

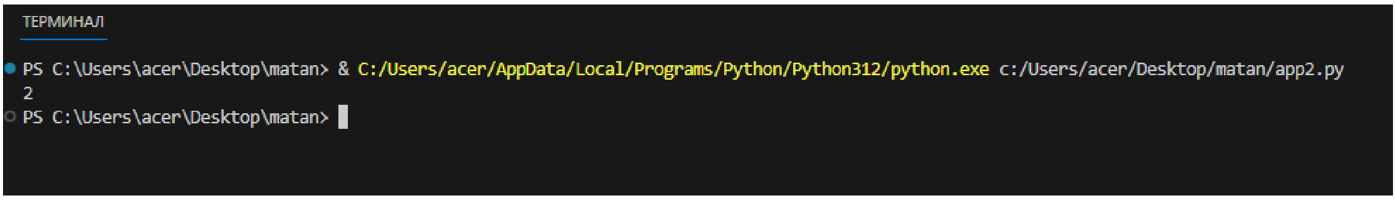


Рис. 2. Вывод программы в терминале.

Аналитическое решение 3

Рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{5n+1}+\frac{3n^2+1}{15n+1}\right)$$

Приведем к общему знаменателю выражение внутри скобок, потом все раскрываем:

$$\left(\frac{n^2+1}{5n+1}-\frac{3n^2+1}{15n+1}\right)=\frac{(n^2+1)\cdot(15n+1)-(3n^2+1)\cdot(5n+1)}{(5n+1)\cdot(15n+1)}=\frac{15n^3+15n+n^2+1-15n^3-5n-3n^2-1}{75n^2+20n+1}=\frac{10n-2n^2}{75n^2+20n+1}$$

Будем делить и числитель, и знаменатель на старшую степень:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n-2n^2}{75n^2+20n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10n}{n^2}-\frac{2n^2}{n^2}}{\frac{75n^2}{n^2}+\frac{20n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10}{n}-2}{75+\frac{20}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

Находим предел слагаемых в числителе и знаментеле:

- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{10}{n}\right)=0$
- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{20}{n}\right)=0$
- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=0$

Найдем предел: $\lim_{n\to\infty}\frac{0-2}{75+0+0}=-\frac{2}{75}$

Ответ: $-\frac{2}{75}$

Программное решение 3

```
#!/usr/bin/env python

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math
from sympy import *
```

```python
n = Symbol("n")


def sequence(n):
    return ((n ** 2 + 1) / (5 * n + 1) - (3 * n ** 2 + 1) / (15 * n + 1))


def plot_points(m):
    x = np.arange(1, m + 1)
    y = sequence(x)

    # (k, 0) - blue colour
    plt.plot(x, np.zeros_like(x), 'bo', label='$(k, 0)$')
    # (0, x_k) - green color
    plt.plot(np.zeros_like(x), y, 'go', label='$(0, x_k)$')
    # (k, x_k) - red color
    plt.plot(x, y, 'ro', label='$(k, x_k)$')

    lim_value = limit((n ** 2 + 1) / (5 * n + 1) - (3 * n ** 2 + 1) / (15 * n + 1),
n, oo)
    plt.plot(0, lim_value, 'o', color='orange', label='$(lim)$')  # Точка предела

    plt.xlabel('$k$')
    plt.ylabel('$x_k$')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()


m = 20  # number of points
plot_points(m)

a = limit((n ** 2 + 1) / (5 * n + 1) - (3 * n ** 2 + 1) / (15 * n + 1), n, oo)
print(a)
```

Иллюстрация решения

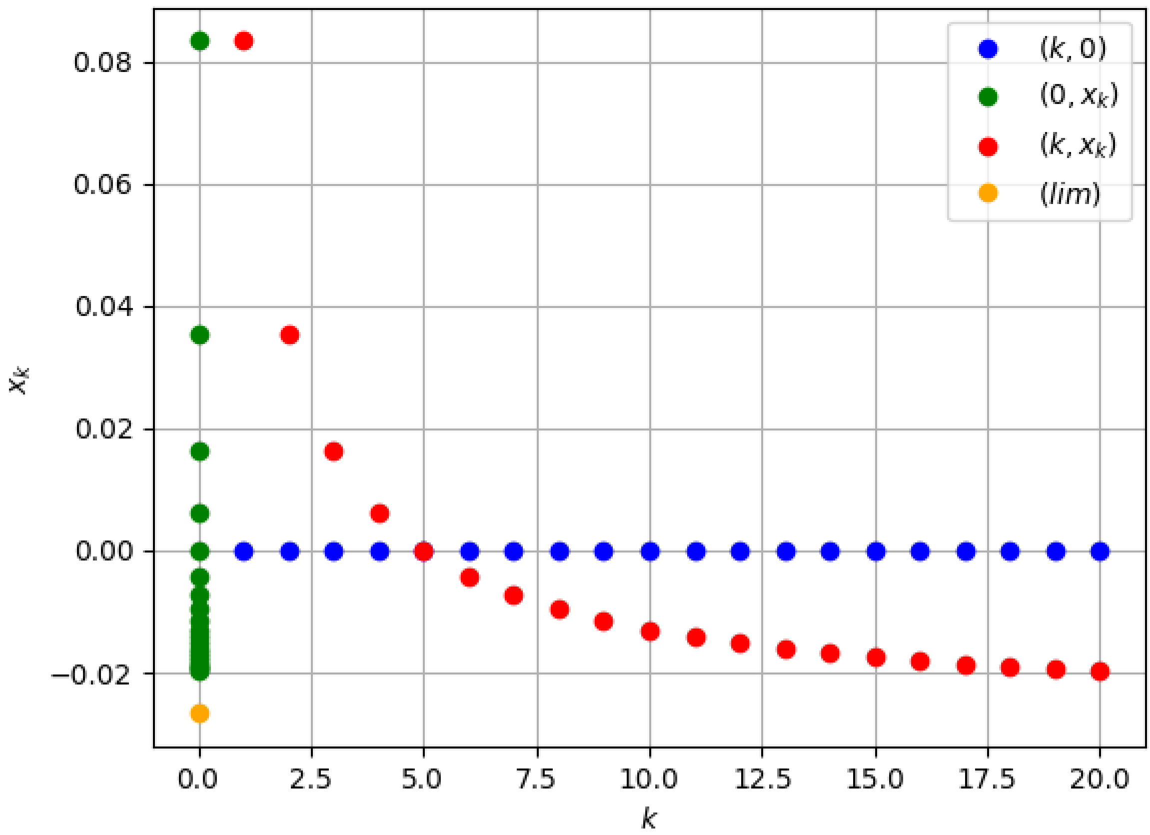


Рис. 1. Иллюстрация решения задачи.

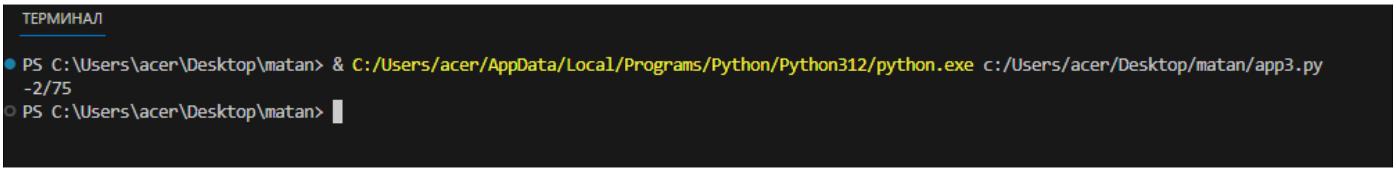


Рис. 2. Вывод программы в терминале.