Lógica Elemental

Max Fernández de Castro
Asunción Preisser
Luis Felipe Segura
Yolanda Torres Falcón

LÓGICA ELEMENTAL

Max Fernández de Castro
Asunción Preisser
Luis Felipe Segura
Yolanda Torres Falcón

México

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
UNIDAD IZTAPALAPA

Dr. José Luis Gázquez Mateos
Rector

ISBN 970-654-048-2

Impreso y hecho en México
Printed and made in Mexico

Índice de Materias

www.elsolucionario.net

PRÓLOGO

El libro que aquí presentamos tiene como propósito principal familiarizar al estudiante con el material y los procedimientos más elementales de la lógica. Constituye, en ese sentido, una introducción a ésta, tan elemental como el rigor y los objetivos mismos de precisión de la materia lo permiten. Ha sido nuestra intención ofrecer con ello un texto que pueda ser estudiado enteramente por cualquier lector atento con la suficiente paciencia como para hacer algunos de los ejercicios de que cada sección va acompañada. Creemos, por esta razón, que tanto el profesor como el estudiante encontrarán en él un instrumento adecuado para adentrarse en estos temas.

Hemos tenido en mente al escribirlo a un principiante, en el sentido más estricto del término. En otras palabras: no se da por supuesta otra cosa que un manejo correcto del lenguaje y una normal competencia lingüística. Por esta razón, estamos seguros de que nuestro trabajo puede constituir un libro de texto adecuado para un curso de introducción a la lógica o para cubrir la parte de lógica y argumentación de un curso de metodología de la ciencia a nivel universitario.

En nuestra opinión, el profesor encontrará aquí una guía seria y accesible para la impartición de distintos temas básicos o, por lo menos, sugerencias que podrían apoyar y complementar considerablemente la presentación que haya elegido. Por su parte, el estudiante hallará en él una presentación breve, precisa y, a este nivel, completa de los diversos temas, acompañada, en cada caso, de ejemplos cuidadosamente seleccionados, teniendo, además, con los ejercicios propuestos, la posibilidad de comprobar constantemente sus avances.

Hemos optado por un enfoque gradual que concede amplio espacio a las relaciones entre la argumentación y el lenguaje. Nuestra experiencia como profesores de lógica y filosofía en la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa nos ha mostrado que es precisamente en este punto, relativo a la conexión entre el sentido que pueda tener una introducción de símbolos y, en general, de lenguajes formales, por una parte, y la evaluación y el manejo de argumentos en el lenguaje ordinario (o en el lenguaje poco menos que natural de muchas de las disciplinas sociales y humanísticas), por la otra, donde reside una de las mayores dificultades con las que se topa un estudiante no particularmente interesado en el manejo de sistemas deductivos abstractos. Pensamos que para este tipo de estudiante resulta prácticamente imprescindible, por lo menos al principio, una referencia continua a tal vínculo, por lo que un estudio de estos problemas que adoptara un enfoque abstracto, desatendiendo o prestando poca atención a tal aspecto, parecería estar condenado a resultar —como, por desgracia, ocurre con tanta frecuencia— incomprensible o poco atractivo para la mayoría de los alumnos, a pesar de su posible interés o ventajas técnicas y de elegancia. Por lo demás, creemos que esto último no se encuentra necesariamente reñido con el carácter elemental de nuestro propósito, ni con cierta frescura y amenidad en la presentación.

El libro consta de cuatro capítulos divididos en secciones. Nuestro tratamiento da inicio con una introducción general, en el capítulo I, al tema de las relaciones entre lógica y argumentación. A pesar de su carácter intuitivo, se presentan allí diferentes ideas preliminares cuya comprensión cabal exige de alguna familiaridad con distintos problemas y distinciones básicos de la lógica —validez, consistencia de argumentos y las relaciones deductivas que la subyacen— que solamente la práctica puede proporcionar, por lo que su relectura después de los capítulos siguientes es más que recomendable. Como sea, esta parte del libro introduce también una serie de conceptos básicos a las que el resto del texto hará continuamente referencia y su lectura atenta facilitará la comprensión del sentido de muchas nociones utilizadas más adelante.

El capítulo II se ocupa de introducir un lenguaje simbólico, lo mismo que de su justificación detallada. Un lenguaje así, se sostiene, resulta un medio idóneo para la evaluación exacta de muchos argumentos. Las conectivas proposicionales y los cuantificadores, como elementos básicos de la simbolización, son también objeto de un examen pormenorizado. Se presenta allí, asimismo, una serie de ejemplos que ponen de manifiesto algunas de las ambigüedades e imprecisiones en las que el lenguaje ordinario suele incurrir y que permanecen gran parte de nuestros asertos y argumentaciones. Se introduce, en primer lugar, un lenguaje simbólico proposicional (Sección 1), que se extiende después (Sección 2) a uno que pueda dar cuenta satisfactoriamente de argumentos en los que intervengan relaciones y cuantificadores. En este apartado se estudian también, de manera introductoria, varios conceptos de capital importancia para la lógica: tautología, equivalencia de enunciados, analiticidad, métodos efectivos de evaluación veritativa, etc.

En el capítulo III, dedicado a la validez o invalidez de argumentos, se analiza una gran cantidad de éstos, y se les les evalúa desde el punto de vista de su corrección. El propósito aquí es familiarizar al estudiante con una de las nociones más importantes de la lógica, por lo que se ha intentado ofrecer un tratamiento intuitivo.

El capítulo IV se ocupa del estudio sistemático y riguroso de algunas de las nociones semánticas más elementales: tautología, validez universal, contradicción, contingencia, equivalencia, etc. Un poco más adelante, se utilizan los métodos de demostración más comunes para demostrar la corrección o incorrección de argumentos. Se define allí, asimismo, el concepto de consistencia y se le relaciona con los conceptos presentados. en el capítulo anterior.

Sin duda alguna, la lógica es una de las disciplinas con un desarrollo más dinámico en el panorama actual de la ciencia. La lógica moderna, que surge apenas en el último tercio del siglo pasado, como una disciplina íntimamente vinculada a la tarea de una fundamentación estricta de las matemáticas y a consideraciones relativas al lenguaje de éstas, es hoy una ciencia altamente especializada cuyos nexos con otras ramas de la cultura son numerosos y diversos. A partir del último cuarto del siglo pasado, la investigación en este campo la ha convertido en una nueva disciplina de carácter matemático, independiente de la filosofía, aunque estrechamente ligada a ella. Aparte del interés que los problemas que la lógica se plantea puedan, por sí mismos, suscitar, su importancia para una cultura universitaria y general reside todavía en su valor altamente formativo, al hacernos conscientes de la estructura argumentativa de nuestro lenguaje y al proporcionar un modelo inferencial que puede servirnos como referencia y modelo para muchas de nuestras argumentaciones.

El desconocimiento que de estos temas priva en nuestro medio -especialmente en el ámbito de las ciencias sociales y humanidades- representa una limitante insalvable para su utilización como elemento metodológico en esas disciplinas, por lo que su difusión y estudio no requeriría, por este solo hecho, de mayor justificación.

Como hemos observado, el libro adopta un enfoque semántico. Hemos considerado que es precisamente éste el que resulta más accesible a un principiante. Se distingue con ello de la mayoría de los textos a este nivel, en los que se presta una gran atención al aspecto sintáctico. En nuestra opinión, la aproximación que hemos elegido constituye la vía de acceso más satisfactoria y natural a estos temas.

Como hemos apuntado, por último, este trabajo es producto de la experiencia docente de los autores en la UAM-Iztapalapa, en el área de Lógica y Filosofía de la Ciencia de la División de Ciencias Sociales y Humanidades, y de su preocupación por contar con un libro de texto apropiado para los estudiantes de los primeros trimestres de las carreras que allí se imparten. Es nuestro convencimiento, sin embargo, que también puede ser utilizado con provecho en cualquier curso introductorio de la materia a nivel universitario e inclusive, total o parcialmente, en un curso ideal de la misma en el bachillerato.

Nada nos alegraría más que recibir las sugerencias y críticas que a él puedan hacer tanto profesores como estudiantes.

Iztapalapa, septiembre de 1996.

Capítulo I
Lenguaje y Argumentación

1. Enunciados y argumentos

Uno de los usos más importantes del lenguaje es el informativo. Es decir, el lenguaje puede ser utilizado para informar, para hablar de ciertos objetos, para describir sus propiedades y relaciones. Pero el lenguaje tiene también una función discursiva, en la que, por así decirlo, se convierte en su propio objeto, en la que se da una reflexión sobre los objetos lingüísticos mismos, fundamentalmente sobre aquellos que constituyen, en realidad, las unidades comunicativas básicas: las proposiciones o enunciados. Suponer, justificar, contradecir, analizar, discutir, rechazar son todas ellas manifestaciones de la importante función del lenguaje a la que nos estamos refiriendo. Ahora bien, ¿qué es lo que realmente hacemos cuando suponemos, cuando justificamos, contradecimos, analizamos, discutimos, etc.?

Aceptamos condicionalmente que una cierta proposición o enunciado se afirme; establecemos una cierta relación entre proposiciones cuya afirmación no se pone en tela de juicio y otra proposición (justamente el objeto de nuestra justificación); negamos una afirmación, la hacemos objeto de reflexión, hacemos explícitos contenidos de la misma, comparamos ciertos enunciados con otros y afirmamos la existencia de ciertas relaciones entre ellos, etc.

En aras de la sencillez, podemos renunciar al término `discursivo', declaras con notaciones retóricas y, en consonancia con las pretensiones de claridad y exactitud de este escrito, hablar en su lugar de argumentación y argumentos.

La argumentación es un modo básico de nuestra racionalidad. La argumentación es esencial para cualquier tipo de procedimiento científico (establecimiento de teorías, validación, planteamiento de hipótesis, contrastación, prueba, etc.), pero va mucho más allá de la esfera de la ciencia, pues es claro que la racionalidad humana no se agota en ésta.

En efecto, en nuestra vida cotidiana esgrimimos argumentos a cada instante, por ejemplo, cuando tratamos de convencer a alguien de algo de lo que pensamos habernos percatado (v.gr. una mamá que explica a un niño por qué es importante que se lave las manos antes de comer, o alguien que pretende justificar una demora en el pago del alquiler de un departamento)

Los siguientes son ejemplos de argumentos.

a) México es un país que podemos considerar subdesarrollado, por lo que un tratado de libre comercio con una nación altamente industrializada puede ser de gran beneficio para el país o bien provocar graves desajustes económicos para su población. Ciertamente estos últimos no se presentarían si se contara con una tecnología que pudiera competir con la de otras naciones más avanzadas. Pero, precisamente, su subdesarrollo consiste en parte en no contar con ella. En esas condiciones, un TLC no puede sino provocar problemas.
b) La teoría del Big Bang no debe ser considerada como verdadera aunque sus defensores sean numerosos. Existen otras teorías alternativas que explican igualmente algunos fenómenos observables y son tan plausibles como aquélla.
c) En los últimos 150 años, la población del planeta se elevó de 1000 a 15000 millones de habitantes. Ante los nuevos problemas que todo esto plantea, se ha considerado que la ciencia y la tecnología podrían proveer a la humanidad de métodos eficientes para la producción de aquellos recursos materiales necesarios para nuestra subsistencia. En este orden de ideas la ingeniería genética juega un papel fundamental. Es necesario, entonces, eliminar todo tipo de trabas a la investigación biogenética.
d) Si existe un número primo q mayor que todos los demás, el sucesor de q, es decir, q+1, es expresable como producto de números primos.
e) Si solamente A, B y C sabían de la existencia de ese documento y únicamente A y C estaban enterados de que su difusión dañaría gravemente a las autoridades, seguramente fue B quien lo hizo público.
f) La historia no nos proporciona enseñanzas morales que influyan de manera ineludible en nuestro comportamiento. Esto es válido también para el nacionalismo y el racismo extremos. Lo ocurrido en Yugoslavia y el comportamiento de los países occidentales muestran que esto es así.
g) Puedo dudar de la existencia de todo, pero no puedo dudar de que dudo. Dudar es una actividad de mi pensamiento, de mi yo como entidad pensante. Por lo tanto, si dudo pienso y si pienso existo.
h) Ganaré la partida en dos movimientos porque si muevo el peón hasta la posición P pondré en jaque al rey, y éste estará obliga-

do a retroceder a la casilla Q, la única en la que no se encuentra ya amenazado. Pero mi alfil puede cubrir Q inmediatamente después y ninguna pieza de mi contrario puede ni tomar ese alfil, ni cubrir al rey.

i) a es mayor que 21, menor que 30 y primo.
Por lo tanto, a=23 o a=29.

Observemos que en todos estos casos tenemos una serie de enunciados, ocurriendo siempre que

1) afirmamos estos enunciados; y
2) afirmamos la existencia de una cierta relación, entre uno de ellos y todos los demás.

Ilustremos lo anterior con base en el ejemplo a) que ofrecimos un poco antes. En él los enunciados que hemos afirmado son:

i) México es un país que podemos considerar subdesarrollado;
ii) en un país subdesarrollado, un TLC con una nación altamente industrializada puede ser de gran beneficio o bien provocar graves desajustes económicos para su población;
iii) los desajustes económicos graves no se presentan cuando el país cuenta con una tecnología que puede competir con la de naciones altamente industrializadas.
iv) el subdesarrollo significa que no se cuenta con tecnología avanzada;
v) un TLC no puede sino provocar problemas.

Notemos, en primer lugar, que en i)-v) hemos formulado explícitamente y por separado cada uno de los enunciados del ejemplo a). Ahora bien, ¿qué es lo que convierte a los enunciados i)-v) en un argumento? La existencia de una cierta relación expresada en a) con las palabras ‘en estas condiciones’, que claramente nos indican una situación condicional: si ocurre que i), ii), iii) y que iv), entonces también tiene que suceder lo que el enunciado v) nos dice.

Es esta relación de afirmación condicional lo que intuitivamente reconocemos como lo esencial de un argumento, como lo que propiamente el argumento comporta como afirmación, por así decirlo.

Un par de ejemplos harán más claro lo que queremos decir.

j) Sólo es bueno quien actúa desinteresadamente;
jj) Juan ayuda a alguien únicamente si cree que puede sacar algún provecho de ello;
jjj) Juan no es bueno.

En este argumento no afirmamos simple y categóricamente que Juan no es bueno. Lo que hacemos es concluir, deducir que esto es así en vista de las afirmaciones j) y jj).

Consideremos el siguiente argumento.

z) Las frutas tropicales no son buenas para la salud;
zz) el mango, el mamey, la guanábana y la papaya crecen en el trópico;
zzz) Ni el mango, ni el mamey, ni la guanábana ni la papaya son buenas para la salud.

Nuevamente: lo que aquí afirmamos no es zzz) sin más, sino que afirmamos zzz) suponiendo z) y zz), es decir, afirmamos que si pasa z) y si pasa zz), entonces también pasa zzz). En México, por ejemplo, pocas personas mantendrían z), por lo que no estarían obligadas a sostener zzz) (el taoísmo, v.gr., afirmaría z) y, evidentemente, zz), por lo que tendría necesariamente que afirmar también zzz)).

Podemos ahora intentar algunas precisiones. Podemos decir que un argumento es una cadena de enunciados $A_1,\ldots,A_n$, B (donde n puede ser cualquier número natural). Podemos referirnos, además, a los enunciados, $A_1,\ldots,A_n$ como premisas y a B como la conclusión del argumento. Por supuesto, la identificación de B como la conclusión de este argumento no excluye la posibilidad de que este mismo enunciado pueda fungir como premisa de otro argumento, ni tampoco la de que cualquiera de los enunciados de A_1 a A_n aparezca como conclusión de algún otro argumento.

Es importante observar que nuestra definición presupone ya una cierta simplificación. No siempre damos o encontramos argumentos cuya conclusión vaya al final, después de las premisas. Sin embargo y por razones de uniformidad, es decir, con el objeto de alcanzar la mayor generalidad posible y porque ello no significa alterar nada esencial (pues podemos siempre recuperar la forma original del argumento), consideraremos que los argumentos se nos presentan siempre de la manera que hemos señalado: primero las premisas y al final la conclusión. Por lo demás, nuestra definición no distingue el orden en el que las premisas aparecen, por lo que los siguientes no son sino dos formas distintas del mismo argumento.

1) Si toda persona se convirtiera en comerciante, la competencia aumentaría a tal grado que habría un desajuste total en los precios, pero, además, si toda persona fuera comerciante, la demanda de artículos sería tan grande que proveerlos resultaría imposible. Esto muestra que es imposible que una sociedad consista exclusivamente de comerciantes.

2) Si toda persona fuera comerciante, la demanda de artículos sería tan grande que proveerlos resultaría imposible, pero, además, si toda persona se convirtiera en comerciante la competencia aumentaría a tal grado que habría un desajuste total de los precios. Esto muestra que es imposible que una sociedad consista exclusivamente de comerciantes.

Como hemos dicho, el uso normal de la palabra `argumento' remite a una relación entre las premisas y la conclusión. Hemos visto que la afirmación de la conclusión en un argumento es condicional, es decir, depende de la afirmación previa de las premisas. Sin embargo, con frecuencia algunas de las premisas de un argumento no se formulan explícitamente.

Consideremos el siguiente ejemplo.

Ç) El budismo es una de las pocas religiones en nombre de las cuales no se ha realizado hasta ahora ninguna guerra.

Por lo tanto,

ÇÇ) ni el Tibet ni Laos han realizado nunca una cruzada religiosa.

Aquí tenemos por lo menos una premisa implícita, a saber:

Tibet y Laos son países o regiones donde el budismo predomina.

Como aquí queda claramente de manifiesto, la relación existente entre premisas y conclusión en un argumento es la de que las premisas pretenden sustentar, avalar, garantizar, justificar la conclusión. A su vez, ésta se encontraría de alguna manera contenida, implícita en las premisas.

El estudio de esta relación entre premisas y conclusión, su precisión y el establecimiento de criterios para determinar exactamente cuándo se da y cuándo no constituye la meta más importante de nuestro texto.

Por lo pronto, observemos que los términos que hasta ahora hemos sugerido para caracterizarla distan de tener la claridad que desearíamos, pues son vagos o son circulares.

Por otra parte, es de notar que la definición de argumento que hemos introducido, si bien es clara, no parece recoger lo que hemos señalado como esencial en un argumento: la relación entre premisas y conclusión.

De acuerdo con esta caracterización, en efecto, toda serie (o, como también diremos, toda sucesión) finita de enunciados pueda considerarse como un argumento. Así, la secuencia

A1. $\sqrt{2}$ no es un número natural.

A2. G. Mahler compuso la sinfonía "Resurrección", aunque nunca escuchó "La Consagración de la Primavera".

A3. Los antiguos mexicanos usaban el cacao como moneda.
B. Mendel estableció las leyes de la herencia en el siglo XIX.
es un argumento.

La justificación que podemos ofrecer por el momento de ello es nuestro ya citado afán de simplificación y generalidad. Por lo demás, éste será un expediente al que recurriremos a menudo: caracterizar ciertas nociones de manera mucho más general de lo que nuestras intuiciones sugerirían; *i.e.* caracterizar algo de una manera que podría ser demasiado amplia respecto a lo que nuestras ideas previas parecerían hacer plausible, para, a partir de allí, ir estableciendo una serie de diferenciaciones que nos permitan acercarnos y, en última instancia, dar cuenta precisamente de esas ideas.

En nuestro caso presente conviene, según se hará evidente más adelante, prescindir provisionalmente de la relación que pueda existir entre los enunciados de una secuencia, para ocuparnos de ella con mucha mayor precisión un poco más adelante.

No está de más, sin embargo, observar una de las notas características de la misma, cuyo estudio nos ocupará extensamente un poco más abajo: la relación entre los enunciados ha de ser una que se haga cargo de las conexiones entre los valores de verdad de los mismos.

El concepto de verdad que hasta aquí hemos evitado mencionar es una de las nociones más primitivas de nuestra racionalidad. No pretenderemos ocuparnos en este momento de dar una definición precisa de la misma, pero sí hemos de notar que cuando hablamos de enunciados estamos entendiendo por estos fundamentalmente una expresión de un lenguaje que es susceptible de tomar uno de los dos valores verdadero o no-verdadero; esto es, un enunciado es una expresión que puede ser verdadera o falsa.

1. A la mitad del camino de la vida
2. ¡No fumar!
3. El director de *Ran*.
4. 'Jean Marie Arouet' es el verdadero nombre de Voltaire.
5. π es un número entero y mayor que 3.
6. Si el programa un día sin auto se convierte en dos días sin auto, el número de automóviles en circulación en la Ciudad de México se incrementará en 300,000 unidades.
7. Los conflictos sociales en la ex-URSS no representan un grave riesgo para la paz mundial.
8. Los países del llamado primer mundo consumen 73 % de la energía utilizada en el planeta, a pesar de contar con tan sólo 10 % de la población mundial.

9. En México existen 55 grupos étnicos distintos, aunque muchos de ellos están en proceso de extinción o de asimilación total.
10. ¡Ay mis hijos!
11. Newton, Goethe, Schopenhauer y Wittgenstein han formulado teorías de los colores y el segundo y el tercero son coetáneos.
12. 3+7=
13. ¡Te callas!
14. x obtuvo el Premio Nobel en 1968 o en 1972.

De las anteriores expresiones 4,5,6,7,8,9 y 11 sí son enunciados, mientras que el resto no lo es. Todos ellos son o verdaderos o falsos. No importa cuál sea el valor que tomen (verdad o falsedad), lo importante es que toman uno de ellos, que pueden ser evaluados con estos adjetivos. Este es también el caso de la expresión 11. Por otra parte, tanto 12 como 14 requerirían de algún tipo de suplemento para convertirse en enunciados. 14, por ejemplo, nos dice que x obtuvo el premio, pero sin hacer una afirmación precisa sobre un objeto específico. Para mayor claridad comparemos 14 con la expresión:

15. Kabawata obtuvo el Premio Nobel en 1968 o en 1972.

Resulta evidente que 15 a diferencia de 14 sí se refiere a algo específico, sí hace una afirmación que podemos evaluar en términos de verdad o falsedad.

Ejercicios.

a) ¿Por qué las expresiones 1,2,3 y 13 no son enunciados?
b) Dar 5 ejemplos de expresiones que sean enunciados y 5 ejemplos de expresiones que no sean enunciados.

Aunque esta idea de enunciado es vaga (¿qué es, por ejemplo, una expresión? ¿de qué lenguaje? etc.) podemos partir en nuestras consideraciones de ella para, provistos de una serie de conceptos y diferenciaciones, volver a estudiarla un poco más adelante.

2. Niveles del Lenguaje. uso y mención

Hemos dicho ya que la noción de verdad es de crucial importancia en nuestras consideraciones: "verdadero" se nos presenta como un predicado de enunciados. Parecería entonces plausible hablar de distintos niveles en nuestras reflexiones.

Podemos, en efecto, hacer afirmaciones sobre objetos de un cierto ámbito (*v.gr.* los invertebrados, los grupos sociales que componen una sociedad, las conductas de los individuos o las políticas de un gobierno, los miembros de un club, etc.); pero podemos también referirnos a esos enunciados, por ejemplo, para decir que no son verdaderos, que tales y cuales afirmaciones se encuentran en contradicción con otra, etc.

Esto sugiere que es posible establecer una jerarquía de niveles del lenguaje, pues es claro que cuando hablamos de ciertos enunciados, para, digamos, negar o afirmar que son verdaderos, lo hacemos sirviéndonos de otros enunciados, que a su vez pueden ser objetos de otra predicación, etc.

Ejemplo:

(1) Heidegger es un racionalista
(2) Heidegger habla de la Nada como de un objeto
(3) El enunciado (1) es falso
(4) (1) y (2) son enunciados incompatibles
(5) Es falso decir que los enunciados (1) y (2) son incompatibles.
(6) El enunciado (5) es absurdo.

El enunciado (3) se refiere a (1), habla sobre él. Por su parte, (4) se refiere tanto a (1) como a (2), afirmando la existencia de una cierta relación entre ellos. Finalmente (5) se refiere claramente a (4), y (6) a (5). Es evidente que podríamos continuar esta serie con enunciados que hablaran sobre (6) y otros que hablaran sobre éstos y así sucesivamente. Podemos tener una imagen de esta especie de jerarquía ordenando los enunciados de nuestro ejemplo como sigue

NIVEL 0: 1,2
NIVEL 1: 3,4
NIVEL 2: 5
NIVEL 3: 6

notando que para referirnos a enunciados de un cierto nivel tenemos que ubicarnos en otro nivel superior.

A partir de otra consideración podemos obtener una conclusión similar: Cuando queremos hablar del algo, cuando queremos referirnos a un objeto no nos servimos, obviamente, del objeto mismo del que hablamos. Si, deseamos decir que una persona, Juan, juega ajedrez, es claro que lo haremos afirmando, digamos, la proposición

Juan juega ajedrez.

Ahora bien, cuando afirmamos ésta última, no nos serviremos de la persona misma, sino de un nombre o descripción de ella (`Juan', `el hijo de fulano y perengano', etc.). Podemos generalizar esta observación diciendo que cuando hablemos de un objeto usaremos un nombre de ese objeto, pero nunca al objeto mismo (Principio de Uso y Mención).

La observación de este principio que acabamos de establecer no presenta normalmente ningún problema en la mayoría de los casos. Sin embargo, cuando los objetos de los que queremos hablar son ellos mismos de índole lingüística puede presentarse cierta confusión. Así, por ejemplo, cuando se afirma que

1) Esdrújula es esdrújula

es claro que no estamos afirmando algo parecido a

2) 3+4=3+4

o a

3) Venancio es Venancio

pues mientras que 1) es informativa (nos dice que cierta palabra se acentúa en la antepenúltima sílaba), 2) y 3) no lo son.

Lo que ocurre en 1) es que la palabra

esdrújula

es al mismo tiempo aquello de lo que se habla y aquello con lo que se habla, por así decirlo. Más claramente: En 1), la palabra en cuestión es a la vez mencionada y usada.

Consideremos ahora la siguiente expresión

Chartres es una catedral, pero Chartres tiene ocho letras.

En ella, el término

Chartres

tiene referencias distintas en cada uno de los dos casos en que se le usa en la frase anterior. Como hemos acordado que nunca nos referiremos a algo sino mediante nombres, se hace necesario, por razones de precisión, introducir nombres distintos para designar el objeto físico (la catedral) del objeto linguístico, es decir, del nombre de ese objeto (el nombre que usamos para referirnos a ese objeto físico).

Es una práctica común introducir comillas simples para formar el nombre de una expresión. Nosotros nos conformaremos también a ella. De esta manera, la proposición anterior puede reescribirse con mayor precisión como

Chartres es una catedral, pero 'Chartres' tiene ocho letras,

mientras que la versión no equívoca del enunciado 1) será

1') 'Esdrújula' es esdrújula.

'Esdrújula' es un nombre de la palabra encerrada entre comillas.

Otros ejemplos del uso de comillas son los siguientes:

4) "Esdrújula" es un nombre de 'esdrújula', que es esdrújula y
5) "Esdrújula" comienza con una comilla.
1') (4) y (5) son proposiciones verdaderas.

Tomando en cuenta estas convenciones, resulta natural hablar nuevamente de una jerarquía de niveles del lenguaje como la que hemos bosquejado un poco más arriba.

En efecto, para hablar de algo necesitamos utilizar su nombre, pero éste no se encuentra en el mismo nivel de aquello de lo que hablamos. Así, si hablamos de objetos, tenemos que ubicarnos en un lenguaje dado, más allá del ámbito de esos objetos.

En la actualidad es un expediente común cuando los objetos de los que se habla son parte de un lenguaje, esto es, cuando se trata de objetos de índole lingüística, distinguir entre el lenguaje en el que se habla y el lenguaje del que se habla, y referirse al primero como el *lenguaje objeto* y al segundo como el *metalenguaje*.

Dada la importancia de esta distinción, no está de más ofrecer un ejemplo. Si hablo en español del idioma inglés y digo que el enunciado

John broke his leg

es equivalente al enunciado español

Juan se rompió la pierna

el lenguaje objeto es el inglés, mientras que el español es el metalenguaje.

Por lo demás, aunque plausible, nuestra distinción no corresponde exactamente al funcionamiento de los lenguajes naturales (como el español, el alemán, el portugués, etc.), pues éstos son cerrados. Es decir, es posible hablar de ellos en ellos mismos (digamos, hablar de los verbos españoles en español). Por razones que sólo se entenderán cabalmente más adelante, nosotros nos ajustaremos aquí, sin embargo, a la práctica de distinguir siempre entre lenguaje objeto y metalenguaje.

Ejemplos:

1. Consideremos el siguiente enunciado:

Las abejas producen la miel al añadir una enzima al néctar recolectado de las flores

Si damos el nombre P al enunciado anterior, podemos obtener a partir de él otras afirmaciones. Por ejemplo,

(Q) P es verdadero

Con el enunciado Q estamos afirmando algo acerca del enunciado P, estamos hablando de él. Por lo tanto, mientras que P pertenece a cierto nivel lingüístico (en el que evidentemente podemos referirnos a objetos como las abejas), Q pertenece a otro nivel, a un nivel superior en el que de lo que podemos hablar es más bien de aquellos enunciados que se refieren a los objetos como la miel las abejas, etc. Q pertenece al metalenguaje, mientras que P es parte del lenguaje del que estamos hablando, del lenguaje objeto. Si deseamos proseguir y hablar (como de hecho estamos haciendo) de los enunciados del metalenguaje, estamos obligados a hacerlo desde otro nivel lingüístico, esto es, desde un metametalenguaje y así sucesivamente.

2. Consideremos el siguiente argumento:

A1. La raíz cuadrada de nueve es tres

A2. Tres es una palabra monosílaba

Por lo tanto,

A3. la raíz cuadrada de nueve es una palabra monosílaba.

Hay algo absurdo en la conclusión, a pesar de la aparente verdad de las premisas. Tenemos la idea (correcta) de que extraer la raíz cuadrada es una operación que se aplica a números y que nos da también números como resultado. La conclusión nos habla, sin embargo, de una palabra, no de un número como resultado de su aplicación al nueve. ¿Cuál es el problema?

El primer enunciado parece ser inobjetable y expresa una igualdad numérica. Podríamos perfectamente escribirlo como

$$3 = \sqrt{9}$$

Es más bien el segundo donde parecería residir la dificultad.

Reflexionemos brevemente en lo que estamos diciendo cuando afirmamos el segundo enunciado, es decir, cuando decimos

tres es una palabra monosílaba

Lo que aquí encontramos no es una expresión numérica, no estamos hablando de números, sino de palabras. Estamos afirmando que una palabra (la palabra 'tres') consta de una sola sílaba. Como normalmente usamos esta palabra para referirnos a un número (al tercero de la serie de los enteros positivos), la confusión resulta de usar la misma expresión para referirse tanto al número mismo como a la palabra que designa ese número, es decir, de no distinguir entre uso y mención de expresiones.

En otras palabras, el segundo de nuestros enunciados tendría que escribirse de conformidad con nuestro principio de uso y mención como sigue

'Tres' es una palabra monosílaba

De esta manera, nuestro anterior argumento sería claramente escrito

A1. La raíz cuadrada de nueve es tres

A2. 'Tres' es una palabra monosílaba

Por lo tanto,

A3. la raíz cuadrada de nueve es una palabra monosílaba.

Vemos ahora que los dos primeros enunciados se refieren a cosas muy distintas, por lo que la afirmación que se intenta concluir no parecería justificar la conclusión que se quiere extraer de ellas, a diferencia de lo que parecía ocurrir en la versión inexacta que hemos escrito al inicio.

En resumen, es importante tener siempre en mente que cuando hablamos de algo no estamos en el mismo nivel que aquello de lo que hablamos, de acuerdo con el Principio de Uso y Mención que hemos adoptado.

Ejercicios.

1. Poner comillas en las siguientes expresiones para obtener enunciados verdaderos

a). Lombardía es la provincia más rica e industrializada de Italia, su capital es Milán, pero mientras que Lombardía empieza con L, Milán comienza con M, aunque a ambas expresiones es común la a.

b). Dar-es-Salaam es una expresión de origen árabe y es también el nombre de la capital de Tanzania, al mismo tiempo, Dar-es-Salaam es una de las ciudades más grandes de Africa.

c). En alemán abuelo se dice Grossvater, en francés grandpêre, en portugués avô y en italiano nonno, y es un hecho histórico que en la antigua Grecia y en Roma los abuelos gozaban de un gran prestigio social.

2. Establecer las relaciones entre los distintos niveles del lenguaje clasificando el nivel al que pertenece cada una de las afirmaciones siguientes y considerando que P, Q y R son enunciados de un lenguaje objeto dado.

i). Q es equivalente a P

ii). Q es falso siempre que P es verdadero

iii). ‘Q es falso’ es falso

iv). ‘Q es equivalente a R’ es verdadero

v). ‘Q es equivalente a P’ es equivalente a ‘P es equivalente a R’

3. NO CONTRADICCIÓN

Nuestra ocupación principal es la de estudiar las condiciones en las que una argumentación *correcta* puede darse. Hemos dicho ya que este problema se encuentra estrechamente vinculado a la consideración de las condiciones de verdad de los enunciados, de la que nos ocuparemos un poco más abajo.

Es convieneniente, sin embargo, intentar una primera aproximación a un requerimiento indispensable de esa argumentación correcta: el carácter no contradictorio de la misma.

Nuestra noción más primitiva es la de enunciado. Entre los enunciados hemos establecido una diferenciación básica, de acuerdo al valor de verdad que toman. La posibilidad misma de una argumentación correcta depende de esta distinción entre verdadero y no–verdadero; es decir, del hecho de que un enunciado no pueda ser, a la vez, tanto verdadero como no–verdadero.

Ahora bien, conservar esta distinción fundamental impone el criterio general de la no contradicción. Supongamos, en efecto que, en un sistema cualquiera de enunciados, lleguemos tanto a un enunciado A como a un enunciado no–A; esto es, que en ese sistema ambos puedan ser afirmados. La diferencia entre verdadero y no-verdadero pierde entonces su sentido, en contraposición a lo que estaríamos dispuestos a aceptar.

Como en su momento veremos, la observación de esta exigencia de no contradicción se encuentra en la base de la distinción entre argumentos (argumentos correctos y argumentos incorrectos) que en lo que sigue haremos.

4. La función argumentativa del Lenguaje

En los párrafos anteriores nos hemos estado refiriendo exclusivamente a la función argumentativa del lenguaje. Sin embargo, esto podría hacer pensar que esa función es la única que el lenguaje cumple, o bien que otras funciones del mismo son claramente diferenciables y, por lo tanto, que puede abstraerse de ellas. Ni lo uno ni lo otro.

La función argumentativa del lenguaje puede ser vista como parte integrante de otra más amplia a la que, a falta de otra denominación más conveniente, podemos referirnos como la función informativa del lenguaje.

El lenguaje posee, sin embargo, otras funciones. Aunque no es del todo claro cuáles son en su totalidad las funciones que el lenguaje pueda tener, es decir, los fines que su uso persiga en distintas situaciones, sí podemos distinguir globalmente algunas de ellas. En este orden de ideas, es posible mencionar, por ejemplo, la función emotiva del lenguaje, lo mismo que la función imperativa del mismo.

¿Cuáles serían por ejemplo las diferentes situaciones en las que cada una de las siguientes frases o expresiones podría ser utilizada?

¡Te dije que ya no quería verte!
¡Vete de aquí!
¡Podría pasarme la vida en este lugar!
¡Qué gusto verte, hace tanto que no nos encontrábamos!

No es siempre fácil, sin embargo, distinguir la función que el lenguaje cumple en un momento dado. Así, *v.gr.* si alguien afirma

Cayó el Muro de Berlín,

puede ocurrir que las funciones mencionadas se presenten simultáneamente. Esto es, que no sólo se informe algo, sino que se exprese una cierta emoción (de entusiasmo o de dolor, digamos) y, a la vez, una orden (por ejemplo: "¡Destruyan los archivos!" o bien "¡Hay que invertir en la bolsa!")

A pesar de esto, nosotros nos ocuparemos exclusivamente de los usos informativos del lenguaje, particularmente de lo que hemos llamado su uso argumentativo. Por supuesto, esto significa hacer abstracción de sus otros aspectos, por más importantes que estos sean. Más aún, y siempre en nuestro afán de alcanzar la mayor exactitud posible, nos ocuparemos de ciertos lenguajes considerándolos exclusivamente como un sistema de signos gráficos. La formulación de un lenguaje particular necesariamente abstracto y artificial y, no obstante, adecuado para analizar la estructura argumentativa de grandes porciones de nuestro lenguaje podría servirnos de justificación en este proceder.

En realidad, nuestra estrategia no se aparta de otras observadas en diversas disciplinas científicas. Muchas ramas de la actividad científica (por ejemplo, la física) pueden formular sus resultados y problemas de manera mucho más clara en un lenguaje especial, completamente artificial o sólo "modelado" que en ocasiones parecerían dar lugar a complicaciones innecesarias, pero que, a la larga, hacen clara y precisa la estructura de problemas, contribuyendo de esta manera a su solución.

Este será también nuestro caso: examinar estructuralmente, desde una perspectiva lógica las ideas que expresamos en el lenguaje. Con esto queremos decir lo siguiente: Podríamos acercarnos al lenguaje con el ánimo de estudiar el condicionamiento social del habla o de la formación de conceptos, o buscar reglas generativas, etc. Nuestro enfoque se propone dar cuenta de la manera más precisa posible de la estructura lógica de la argumentación. Nuestras consideraciones parten, por lo tanto, del siguiente supuesto: en el uso argumentatitvo del lenguaje se da un encadenamiento de ideas al que expresiones como 'porque', 'así que', 'en consecuencia', 'por lo tanto', 'aunque', 'pero', 'no' y muchas otras remiten. En el lenguaje se encuentra implícita una estructura deductiva o inferencial. Echar luz sobre ésta de la manera más precisa posible, será la tarea que nos ocupe principalmente en lo que sigue.

Nuestra manera de proceder no será siempre directa, sin embargo, pues con frecuencia resultará más conveniente partir de una consideración abstracta para pasar posteriormente a sus aplicaciones, a la manera en la que, por ejemplo, el problema de calcular cuánto cuestan 15 naranjas si 22 valen 12 pesos puede resolverse mediante consideraciones que, en primera instancia, hacen abstracción de las naranjas y de la moneda en la que se cotizan.

II
Lenguajes Formales

1. Introducción

Las situaciones en que ordinariamente se presentan argumentos en nuestra vida diaria son aquellas en las que un individuo trata de convencer a otro de una determinada tesis y, para ello, esgrime un argumento. La persona a quien se trata de persuadir puede no aceptar la conclusión por diversas razones, pero principalmente por estas dos: porque considera que una o varias de las premisas son falsas, o bien, *porque aceptando éstas como verdaderas no le parezcan suficiente apoyo para la conclusión.* Veremos más adelante que sólo este segundo caso nos concierne desde el punto de vista lógico. Por ahora advirtamos que esas razones de desacuerdo podrían a su vez estar motivadas, y frecuentemente lo están, por la ambigüedad e imprecisión de que adolece el lenguaje cotidiano. Por ejemplo, si como premisa de un argumento se dice 'la sal es dañina para el corazón humano', alguien podría entenderla como refiriéndose a cualquier cantidad de esa substancia, mientras que quien la enunció tal vez quería decir que los excesos en la ingestión de sal son peligrosos para la salud. Diremos que este tipo de ambigüedad es de carácter *semántico* porque se origina en la multiplicidad de acepciones que tiene un vocablo, o en que se le usa, como en el ejemplo anterior, sin un significado fijo. Pero la ambigüedad de un enunciado también puede provenir de la forma o el orden en que están unidas las diversas palabras que lo constituyen. Los siguientes casos ejemplifican esta posibilidad.

a) Un capitán de un navío le dice a su tripulación 'Siempre que les hablo hay un marinero que no pone atención a lo que digo'. ¿Se infiere de ello que, de estar en lo cierto el capitán, siempre es el mismo marinero el que no presta atención?
b) En un soneto, Sor Juana declara que ama a Silvio y que es amada por Fabio; si más adelante hubiese dicho: 'aquel que ama mi alma es discreto' (*), no podríamos saber si se refería a Fabio o a Silvio, y ello no porque ignoráramos la acepción que se le debe dar a cada una de las palabras anteriores, sino porque el enunciado (*) es, sintáctica o formalmente, ambiguo.

c) ¿Se infiere de la proposición 'el hombre debe ser humilde y puro como un niño o no entrará en el reino de los cielos', que bastan la humildad y la pureza para acceder a la gloria?

d) En unos versos de Rubén Darío se lee:

'Que se humedezca el áspero hocico de la fiera
de amor si pasa por allí'

¿Es correcto preguntar a qué fiera de amor se refieren?

A este tipo de ambigüedad, ilustrada en los incisos anteriores, la llamaremos *sintáctica*.

Pensemos ahora en cuántas equivocidades y confusiones se evitan cuando un enunciado proferido oralmente y con cierta celeridad se escribe correctamente. Recordemos los versos de Villaurrutia:

y mi voz que madura
y mi voz quemadura
y mi bosque madura
y mi voz quema dura

cuyas diferencias de sentido casi no se perciben al oído. O considérense la diversidad de formas en que puede entenderse una frase en la que la puntuación ha sido suprimida, por ejemplo:

Con ayuda de algunos amigos dictando conferencias y escribiendo puedo sobrevivir.

¿Quién dicta las conferencias?

Así como al pasar del lenguaje oral al escrito pueden evitarse ciertas imprecisiones, así también es posible aclarar más nuestros enunciados, al menos en algunos aspectos, si los expresamos en un lenguaje más conveniente a este fin que el lenguaje ordinario. En lo que sigue nos concentraremos en la construcción de un lenguaje simbólico que, por un lado, suprima ciertas formas de ambigüedad, sobre todo las de carácter sintáctico, y sea, por ello, en muchos casos, más adecuado que el lenguaje ordinario para la presentación de argumentos, y que resalte, por el otro, las características formales de los enunciados que son —según veremos— las que determinan la corrección de los argumentos o su incorrección. ¿Por qué, desde un punto de vista lógico, sólo nos interesa eliminar las ambigüedades sintácticas y no las semánticas? No daremos por ahora una respuesta completa a esta cuestión, pero advirtamos que la acepción con que una palabra se tome en un argumento nada tiene que ver con la corrección de éste. Por ejemplo cualquiera aceptaría que la conclusión 'el quenopodio es una angiosperma' se sigue válidamente de las premisas:

'O el quenopodio es una angiosperma o sus semillas
no están envueltas por un pericarpio' y
'Las semillas del quenopodio están envueltas por un pericarpio'

aún cuando desconociese el significado de algunos de los términos anteriormente empleados.

Antes de proceder a la tarea mencionada, esbozaremos la idea que tuvo John Wilkins, un pensador inglés del siglo XVIII, para formar un lenguaje universal en que se eliminaran las confusiones semánticas. Éstas se originan en que quien profiere una palabra puede tener en mente una acepción de la misma, distinta de la que tiene su interlocutor. Eso se evitaría si con la palabra viniese, de algún modo, su definición. Así ocurre en el lenguaje de Wilkins. El procedimiento es el siguiente: pensemos en el reino animal que se halla dividido en familias, tribus, géneros, especies, etc. Para simplificar el caso, consideremos una familia de bacterias compuesta de muy pocas tribus, a saber, la de las enterobacteriacae, una parte de cuyo diagrama taxonómico es el que a continuación se presenta:

Familia: *Enterobacteriaceae*

Tribus: a) *Eschericheae* (dividida en 5 géneros) { 1) *Aerobacter*; 2) *Klebsiella*; 3) *Paracolobactrum*; 4) *Alginobacter*; 5) *Escherichia*

b) *Erwineae* { Unico género: 1) *Erwinia*

c) *Serrateae* { Unico género: 1) *Serratia*

d) *Proteae* { Unico género: 1) *Poteus*

e) *Salmonelleae* (2 géneros) { 1) *Sallmonella*; 2) *Shigella*

Asignemos a la familia la letra B y a cada una de sus cinco tribus, una vocal, tal como aparece en la tabla anterior. Ahora designemos con los números 1, 2, 3, o 4 a los géneros, según el orden en que aparecen dentro de cada tribu. Entonces, por ejemplo, al género salmonella lo llamaremos con el nombre 'Be1', que indica con el orden de los signos que lo constituyen, su definición, pues el primero de ellos representa la familia, el segundo, la tribu, y el último, el género. Es obvio que podemos continuar con este proceso, descendiendo a través del árbol taxonómico, hasta los biotipos o, si tuviésemos símbolos para las diferencias, hasta los individuos. Claro que para ello tendríamos que emplear en algunos niveles, números, pues *v.gr.*, las especies del género Salmonelleae son más de 800. Wilkins pensaba, a la manera de Aristóteles, que las cosas del universo son susceptibles de clasificación en géneros y especies, desde el género supremo que es el ser hasta cada uno de los individuos concretos. Por ello concibió su lenguaje como universal. El expediente por él propuesto es, después de todo, el mismo que empleamos para denominar a los números. Por ejemplo, cuando escribimos 1.24 estamos indicando que tenemos una unidad, dos décimas y cuatro centésimas. Estudiaremos en la siguiente sección un lenguaje igualmente artificial, pero diseñado para eliminar, en lo posible, las ambigüedades de que adolecen los lenguajes naturales.

Ejercicios

1. ¿Qué se entiende por 'ambigüedad semántica' de un vocablo de nuestro idioma? Poner un ejemplo.
2. ¿Por qué la ambigüedad semántica no tiene mucha importancia desde el punto de vista de la lógica?
3. ¿Qué se entiende por 'ambigüedad sintáctica de un enunciado'? Poner un ejemplo.
4. ¿Qué diferencia hay entre el primero (a) y el segundo (b) miembros de los siguientes pares de expresiones:

   (a) Cuando yo dije 'correctamente' me refería a....
   (b) Cuando yo dije correctamente 'me refería a'....
   (a) San Jerónimo estudiaba la palabra divina.
   (b) San Jerónimo estudiaba la palabra 'divina'.
   (a) 'Las quince letras' tiene quince letras.
   (b) Las quince letras son quince letras.
   (a) 'Violentamente' gritó el orador.
   (b) Violentamente gritó el orador.
   (a) María proviene de una familia muy antigua.

(b) 'María' proviene de una familia muy antigua.
(a) Pedro quería decir de piedra.
(b) 'Pedro' quería decir de piedra.
(a) En una parte de la carta le escribí a Sonia.
(b) En una parte de la carta le escribí 'a Sonia'.
(a) En el letrero creyó ver su suerte.
(b) En el letrero creyó ver 'su suerte'.
(a) Guadalupe ocupa mucho espacio.
(b) 'Guadalupe' ocupa mucho espacio.
(a) La multitud clamaba 'Domingo'.
(b) 'La multitud' clamaba Domingo.

5. En cada uno de los siguientes ejemplos se presentan ambigüedades sintácticas. Buscar todos los posibles modos en que, sin alterar el significado de las palabras, pueden interpretarse tales enunciados.

(a) Ves el amanecer, o contemplas las montañas, si no está muy nublado, hace viento y es temprano.
(b) Más vale que el hombre trabaje, que estudie, que sea flojo y se emborrache.
(c) Augusto, el hijo de Esteban, quien —por cierto— estaba enfermo y Armando salieron apresuradamente.
(d) Si la pulsera se lava con ese ácido, se pone amarilla, o es de cobre, es barata y no es mía.
(e) Efraín no reconoció a sus hermanos, ni a Pablo, ni a Iván.
(f) Todos los chiítas creen en un Dios.
(g) Los fenicios vendían muy caro a sus vecinos.

2. Lenguaje Proposicional

2.1 Simbolización de Enunciados y Condiciones de Verdad para éstos

Volvamos ahora a la tarea cuya necesidad planteamos en las páginas precedentes: la construcción de un lenguaje simbólico que elimine ambigüedades y sea un instrumento más adecuado que el lenguaje cotidiano para el análisis de argumentos. Para ello analicemos los enunciados de nuestro idioma. Algunos de éstos pueden ser considerados como expresiones complejas, constituidas en parte por enunciados más sencillos. Por ejemplo, 'El diamante es quebradizo aunque muy duro' (1), es un enunciado formado con otros dos, a saber, 'El diamante es quebradizo' y 'El diamante es muy duro', por medio de la conjunción gramatical 'aunque'.

El que la segunda proposición tenga el mismo sujeto y verbo que la primera nos permite abreviar la formulación del enunciado (1), que de otra manera quedaría 'El diamante es quebradizo aunque el diamante es muy duro'. En general, podemos considerar (1) como formado de las dos enunciados anteriores y de la matriz

X aunque Y

en que las variables X y Y deben entenderse como dos lugares vacíos que han de rellenarse con sendas proposiciones. La matriz nos conduce así a la obtención de nuevos enunciados cuando X y Y son reemplazados por dos proposiciones cualesquiera. Por ello llamaremos a la matriz anterior *esquema enunciativo de dos variables*, al enunciado (1), *enunciado compuesto*, y *enunciados simples*, a los dos que lo componen. Claro está que un enunciado compuesto puede, a su vez, ser considerado como simple si forma parte de una proposición más compleja. Análogamente las matrices

Que X es mentira
W excepto que X y Z

constituyen esquemas enunciativos de una y tres variables respectivamente. En particular, estudiaremos ahora ciertos esquemas enunciativos que tienen la siguiente característica: cuando se substituyen sus variables por proposiciones, el valor de verdad de estas últimas determina el del enunciado resultante. Por ejemplo, el enunciado 'Ni los fenicios conocieron el Mar del Norte, ni los vikingos llegaron a América', (en el que se ha empleado la matriz 'Ni P, ni Q'), es verdadero si 'los vikingos arribaron a nuestro continente' es falso y asimismo lo es 'los fenicios conocieron el Mar del Norte', y falso en cualquier otro caso. Nos basta saber si estos hechos acaecieron para determinar la verdad o falsedad del enunciado susodicho. En lo sucesivo llamaremos a las matrices de este tipo *esquemas enunciativos de verdad* y destacaremos cinco de ellas, empleadas comúnmente en lógica.

En el lenguaje coloquial una expresión del tipo 'P y Q', se emplea a veces para indicar que hay una conexión peculiar entre las proposiciones P y Q, como cuando decimos 'Lo sueltas y se cae'. No obstante, nosotros emplearemos en lo sucesivo dicha matriz como un esquema enunciativo de verdad, del cual resultará un enunciado verdadero únicamente si las dos proposiciones con que se reemplacen sus variables son asimismo verdaderas. En otras palabras, definimos la *conjunción* de P y de Q (a la que denotaremos con el símbolo '$P \wedge Q$') como el enunciado que es verdadero si $P \vee Q$ lo son, y falso en cualquier otro caso; lo cual puede expresarse mediante la tabla de verdad que se muestra a continuación:

P	Q	P ∨ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Adviértase que la conjunción de P y de Q es una matriz que, en ciertos aspectos, se ajusta al uso que en el lenguaje vernáculo se da a la partícula 'y'.

Análogamente, un enunciado de la forma 'PoQ' puede entenderse ordinariamente de por lo menos dos maneras, a saber, como afirmando que una cualquiera de las dos proposiciones que lo constituyen es verdadera, pero no ambas a la vez (como en el enunciado 'Alejandro fue el primero o el segundo de los hijos de Filipo'), o bien, que por lo menos una de ellas es verdadera o tal vez las dos (como cuando se dice 'El viento o la lluvia derribaron el árbol'). En lo subsiguiente emplearemos la matriz 'PoQ' de la segunda de las maneras referidas, es decir, de acuerdo con la siguiente tabla:

P	Q	P ∨ Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

en donde la expresión 'P ∨ Q' denota al esquema enunciativo así definido, al que llamaremos la *disyunción* de P y Q.

Otro esquema enunciativo de verdad es el que conduce de cada enunciado a su negación. Nos referimos a la matriz 'No es verdadero que P', o 'No P', en la que, evidentemente, el enunciado resultante de reemplazar P por una proposición cualquiera será verdadero si ésta es falsa, y viceversa. Esto se halla representado en la siguiente tabla de verdad:

P	~P
V	F
F	V

en la que hemos representado con '~P' a la *negación* de P. A veces también emplearemos el símbolo ' ¬P' para representar a la negación de P.

En el lenguaje coloquial la matriz 'Si P entonces Q' es empleada de tal manera que con ella se pretende señalar una relación, ordinariamente de carácter causal (aunque no siempre), entre los hechos enunciados a través de P y de Q. Se dice, por ejemplo, 'Si te arrepientes, entonces te salvarás'. Ahora bien, deseamos emplear un esquema enunciativo de verdad llamado 'el condicional de P y Q' (y denotado por 'P→Q' que se ajuste en lo posible al uso común de dicha matriz. En esta matriz llamaremos a P el *antecedente* y a Q el *consecuente* del condicional. Aquí enfrentamos problemas similares a los que tuvimos al definir la conjunción y la disyunción, aunque en este caso serán más notables. Por ejemplo, si P y Q son verdaderos, no hay dificultad en conceder que P→Q es verdadero y, análogamente, que P→Q es falso si P es verdadero y Q falso, excepto que podría ocurrir que entre P y Q no hubiese una relación aparente. Y en el caso en que el antecedente sea falso, no se ve cómo deba considerarse al enunciado resultante. Si, *v.gr.*, un candidato a algún puesto de elección popular declarara ante los votantes 'Si su decisión me favorece, entonces mandaré construir un parque', y luego resultara vencido, ¿cómo determinaremos si su enunciado es verdadero o no lo es? Diríamos que es falso si, pongamos por caso, nunca hubiese tenido la intención de cumplir su promesa, y ésta hubiese sido hecha con la esperanza de ganar adeptos. Pero de ser así, es decir, si para resolver la verdad o falsedad del enunciado, hubiese que considerar las intenciones del candidato, no estaríamos ante un esquema enunciativo de verdad, pues no nos bastaría conocer el valor de verdad de los enunciados simples, para saber si la proposición del candidato es verdadera o falsa. A continuación definiremos el esquema 'si P entonces Q' a través de una tabla de verdad. Esta representa una convención que se sigue ordinariamente en la lógica formal, según la cual un condicional es verdadero si su antecedente es falso o su consecuente verdadero. En seguida explicaremos a qué obedece la ordenación de las letras V y F tal como aparecen en la tabla.

P	Q	P→Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Reiteramos que si bien la elección de los valores en la última columna de la tabla tiene un cierto carácter arbitrario, puesto que no se adapta completamente al uso que de las palabras 'si... entonces' hacemos en la vida diaria, asimismo es cierto que está respaldada por muy buenas razones. Si hubiésemos convenido en que las proposiciones de la forma 'Si P entonces Q' fuesen falsas en el caso representado por el cuarto renglón de la tabla anterior, tendríamos que considerar falso un enunciado tal como 'para cualquier número n, si n es par, entonces n^2 también es par', sobre la base de que el antecedente y el consecuente son falsos cuando, digamos, n=5. Algo similar ocurriría si hubiese sido otra nuestra elección para la última columna y tercer renglón de la tabla anterior.

Notemos que esa convención nos obliga a conceder que el enunciado 'si 1+1=3 entonces la contaminación ambiental favorece a la salud' es verdadero, aunque el sentido común lo consideraría no falso sino, más bien, sin sentido. Veremos más adelante que ello no tiene ninguna otra consecuencia perniciosa, ni desagradable, y que, en cambio, tal esquema, así definido, nos es útil para el análisis sintáctico de proposiciones y argumentos, que es lo que ahora nos concierne. Recordemos a este respecto lo que ya hemos dicho en el capítulo anterior, cuando tratamos con la noción general de *argumento*. Nos referimos entonces a la conveniencia de definir un concepto no apegándonos estrictamente al uso concreto que un vocablo tiene en el lenguaje diario, sino ampliándolo de tal manera que, por un lado, sea más sencillo y, por tanto, más susceptible de un análisis riguroso y que, por otro, su estudio sea aplicable a un campo mayor que el que originalmente teníamos. Algo análogo sea aplica aquí; al definir de este modo el condicional perdemos algo del significado de la matriz 'si… entonces', pero ganamos en precisión. El lector podrá ver en breve las consecuencias que esto tiene.

Por el momento simplemente advirtamos que, de acuerdo a nuestra definición, si P es falsa, $P \rightarrow Q$ es verdadera, independientemente del valor de verdad de Q.

Por último, estipulemos el empleo que haremos del esquema 'P si y sólo si Q' al que denominaremos el *bicondicional* de P y Q (en símbolos $P \leftrightarrow Q$), mediante la tabla:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

entonces 'P si y sólo si Q' será verdadera cuando coincidan los valores de verdad de P y de Q, y falsa en cualquier otro caso.

Definición 1. Llamaremos *conectivos lógicos* al condicional ($\rightarrow$), a la disyunción ($\vee$), a la conjunción ($\wedge$), al bicondicional ($\leftrightarrow$) y a la negación ($\sim$).

Podemos ahora determinar las condiciones en que son verdaderos enunciados complejos formados a partir de otros más sencillos por medio de los esquemas definidos. Por ejemplo, la proposición 'Si la especie no ha caminado hacia adelante, entonces no importa lo rápido que haya andado', es falsa únicamente en el caso en que su antecedente sea verdadero y su consecuente falso, y esto a su vez ocurrirá cuando 'la especie ha caminado hacia adelante' sea falsa e 'importa lo rápido que la especie haya andado', verdadera. Todo ello se puede observar mejor a través de la construcción de la siguiente tabla de verdad en que el primero de los dos enunciados anteriormente mencionados está representado con 'P' y el segundo con 'Q'.

P	Q	~P	~Q	~P → ~Q
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Adviértase que la simple forma '~P → ~Q' es susceptible de malinterpretarse si se la considera como la negación de P → ~Q. Estos problemas podrían evitarse a través de la escritura de paréntesis. Para ello estableceremos, desde ahora, una convención que tiene la virtud de evitar las confusiones a que da lugar un empleo descuidado de los paréntesis. Por ahora, representaremos con letras mayúsculas a las proposiciones más simples, y trataremos de simbolizar las proposiciones ordinarias con esas letras y con los conectivos lógicos. Ese será nuestro primer lenguaje simbólico. Lo denominaremos *lenguaje proposicional o enunciativo*. Más adelante será ampliado, para convertirlo en un instrumento de análisis más poderoso. En general, llamaremos *formas proposicionales* a las expresiones de este lenguaje que estén bien escritas. La convención susodicha, es decir, las reglas para la correcta escritura de paréntesis, se encuentran implícitas en las siguientes definiciones:

Definición 2. Las letras mayúsculas del alfabeto con o sin subíndices son *fórmulas atómicas*.[1]

Definición 3.

a) Las fórmulas atómicas son formas proposicionales.
b) Si α y β son formas proposicionales, también lo son $\sim\alpha$, $(\alpha\vee\beta)$, $(\alpha\wedge\beta)$, $(\alpha\rightarrow\beta)$ y $(\alpha\leftrightarrow\beta)$
c) Unicamente son formas proposicionales las que satisfagan a) y b).

Entonces la expresión $(P\rightarrow(Q\wedge R))$ es una forma proposicional, a diferencia de lo que ocurre con $P\rightarrow Q\wedge R$, en la que es imposible determi-

1 Los subíndices se introducen para estar seguros de que tendremos siempre tantas letras como sean necesarias.

nar si se trata de una conjunción cuyo primer miembro es una condicional, o bien de una una condicional que tiene como consecuente a QR. En general, la regla implícita en la definición 3 establece que debemos colocar un par de paréntesis por cada conectivo empleado, excepto por la negación.

Definición 4. El *conectivo principal* de una forma proposicional α, es aquel que en la construcción de α a partir de las fórmulas atómicas se escribe en último término.

Así, en $((P \rightarrow Q) \vee (R \wedge S))$, el orden de los paréntesis nos revela que se trata de una disyunción, uno de cuyos miembros es $(P \rightarrow Q)$ y el otro, $(R \wedge S)$. Es decir, es aquí el conectivo principal. Si alguien pretendiera que el conectivo principal es la conjunción, para saber que estaba equivocado le bastaría reescribir la fórmula de acuerdo con su idea, es decir, colocando como último conectivo a. Entonces resultaría una fórmula diferente, pues empezaría ligando P y Q, por medio del condicional, después a esto anexaría R, a través de la disyunción, obteniendo $((P \rightarrow Q) \vee R)$; y, finalmente, al agregar la conjunción con S, obtendría la forma $(((P \rightarrow Q) \vee R) \wedge S)$ que no es la que teníamos originalmente. Es importante el saber localizar el conectivo principal de una forma proposicional para las técnicas de análisis de argumentos que veremos en lo sucesivo.

Retornemos ahora al análisis de las condiciones de verdad de un enunciado compuesto a partir de otros, mediante los conectivos lógicos. Este se consigue con la construcción de tablas de verdad. Consideremos el enunciado 'Platón escribió *Las leyes* o *El Timeo* y estuvo en Siracusa'. Representémoslo primeramente por medio de la forma proposicional $((P \vee Q) \wedge R))$, en donde 'Q' simboliza la proposición 'Platón escribió *El Timeo*', etc., para hacer ahora su tabla de verdad es necesario tomar en cuenta todas las posibles combinaciones de asignación de valores de verdad a las letras P, Q y R; es decir, que debemos considerar ocho casos, cada uno de los cuales estará esquematizado por un renglón de la tabla. Empecemos entonces la elaboración de ésta colocando en su extremo izquierdo las siguientes columnas

P	Q	R
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Sabemos por la disposición de los paréntesis en la forma anterior que, en su construcción, a partir de las fórmulas atómicas que la componen, se empleó primeramente la disyunción, y más tarde la conjunción. Ese es el orden en el que debemos llenar la tabla. Por tanto, debemos escribir, a continuación de las anteriores, la siguiente columna:

P	Q	R	$P \vee Q$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	F

para el llenado de la cual sólo deben tomarse en cuenta las columnas correspondientes a P y a Q. Por último, agreguemos la columna que contiene los valores de la forma completa en función de los asignados a P, Q, y R.

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge R$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

Veamos con una forma proposicional sencilla cómo se puede abreviar la escritura de las tablas de verdad. En lugar de la tabla, que ya antes elaboramos, atinente a la forma $(\sim P \rightarrow \sim Q)$ escribamos simplemente:

$(\sim$	P	$\rightarrow$	$\sim$	$Q)$
F	V	V	F	V
F	V	V	V	F
V	F	F	F	V
V	F	V	V	F

Ahora los valores correspondientes a la negación de P se encuentran bajo el signo respectivo, y en la columna bajo el símbolo de condicional tenemos los valores de la forma completa.

Ejercicios. Escribir las tablas de verdad abreviadas de las siguientes formas proporcicionales:

a) $(\sim P \leftrightarrow \sim Q)$
b) $((P \leftrightarrow Q) \wedge \sim P)$
c) $(P \rightarrow (Q \vee \sim R))$
d) $\sim(P \leftrightarrow \sim(Q \vee R))$
e) $((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)))$

En el lenguaje coloquial se emplean frecuentemente matrices proposicionales que si bien no son ninguna de las cinco anteriormente definidas, sí pueden, en cambio, ser representadas a través de ellas, al menos para los fines que aquí nos conciernen. Quien afirma, *v.gr.*, 'El mercurio es un metal, a pesar de que es un líquido en condiciones normales', afirma dos propiedades del mercurio y, por ello, podemos simbolizar dicho enunciado con la forma '$P \wedge Q$'. Es verdad que esa formalización no expresa cierto matiz de contraposición o extrañeza, implícitamente manifiesto en la proposición original por medio de la expresión 'a pesar de'. Con ella se deseaba tal vez resaltar que esos atributos del mercurio se hallan difícilmente juntos en la naturaleza. Pero, como esta es una cuestión de interpretación y que depende de aspectos subjetivos, *v.gr.*, de los conocimientos de quien escucha, la dejaremos de lado, aceptando como satisfactoria la formalización propuesta. Análogamente en los ejemplos que vienen a continuación, ilustraremos una formalización adecuada de algunos enunciados coloquiales. Junto a ellos anotaremos las formas proposicionales que mejor los representan. Al final de la sección proporcionamos una tabla de cómo asignar conectivos a ciertas palabras.

Ejemplos.

a) Para que Judith sea judía basta con que haya nacido en Israel. $(P \rightarrow Q)$, en donde P representa el enunciado 'Judith nació en Israel' y Q, 'Judith es judía'
b) Para que Erasmo haya conocido a Tomás Moro, es necesario que haya estado en Inglaterra. $(P \rightarrow Q)$, siendo P 'Erasmo conoció a Tomás Moro' y Q 'Erasmo estuvo en Inglaterra'
c) Si Aquiles venció a Héctor, entonces era más fuerte que él, excepto que los dioses lo hayan favorecido.

$(P \rightarrow (\sim Q \rightarrow R))$, siendo P 'Aquiles venció a Héctor', Q 'los dioses favorecieron a Aquiles' y R 'Aquiles era más fuerte que Héctor'

d) Si hay en tus manos iniquidad y si has dado mal trato a los que estaban en paz contigo, mereces que el enemigo te alcance y huelle en tierra tu vida. $((P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S))$, en donde, por ejemplo, R simboliza el enunciado 'mereces que el enemigo te alcance'.

e) A María no le asustaban las arañas, ni las serpientes, pero temblaba ante la presencia de un alacrán. $((\sim P \wedge \sim Q) \wedge R)$, en la que Q, v.gr., representa la proposición 'A María le asustaban las serpientes'.

2.2 Tautologías. Equivalencia lógica.

Definición 5. Una *tautología* es una forma proposicional que en la última columna de su tabla de verdad sólo tiene el valor de verdad V. Por ejemplo, son tautologías:

$(P \rightarrow P)$ $\quad$ $\sim(P \wedge \sim P)$, $\quad$ $(\sim\sim P \leftrightarrow P)$,
$((P \rightarrow Q) \rightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P))$, $\quad$ $(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$ etc.

Definición 6. Un enunciado es *tautológico* si resulta de una tautología por la substitución de sus fórmulas atómicas por proposiciones, reemplazando una letra cada vez que aparezca por la misma proposición. Por ejemplo, dado que

$$(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$$

es una tautología, el enunciado 'Si la luna se halla en cuarto creciente, entonces, si es equinoccio, la luna se halla en cuarto creciente' es tautológico. Los enunciados de este tipo son verdaderos únicamente en virtud de su forma.

La importancia que los dos conceptos anteriores tienen para la lógica, quedará de manifiesto en el capítulo IV, en el que estudiaremos sus relaciones con la noción de corrección de argumentos. Por ahora diremos tan sólo que cada tautología lo es en virtud de que simboliza proposiciones que son verdaderas al margen de toda experiencia. En cada una de las siguientes formas proposicionales puede descubrirse que se trata de una tautología, examinando cómo, por la disposición de sus letras y conectivos, representa alguna verdad lógica importante:

$(P \vee \sim P)$	Ley del tercero excluido
$\sim(P \wedge \sim P)$	Ley de la no contradicción
$(P \rightarrow Q)(\sim Q \rightarrow \sim P)$	Ley de la contraposición
$((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R))(P \rightarrow R)$	Transitividad del condicional
$(((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q)$	*Modus ponens*

De qué modo estas 'leyes', y otras tautologías, se relacionan con modos correctos de inferir es algo que dejamos para los próximos capítulos.

Definición 7. Una *contradicción formal* es una forma proposicional que en la última columna de su tabla de verdad sólo tiene el valor F. Por ejemplo:

$(P \wedge \sim P)$ $\sim(P \leftrightarrow P)$ $\sim(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$ $\sim(P \vee \sim P)$

Definición 8. Una *fórmula contingente* es una forma proposicional que no es tautología ni contradicción formal.

Definición 9. Dos formas proposicionales α y β son *lógicamente equivalentes* si y sólo si $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ es una tautología. Denotaremos dicha equivalencia con la expresión '$\alpha \equiv \beta$'.

Notemos que cuando dos formas proposicionales son equivalentes, cualquiera de ellas puede substituir a la otra sin que se altere el valor de verdad.

Ejemplos: Si α y β son formas proposicionales, entonces

a) $\alpha \equiv \sim\sim \alpha$
b) $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\sim \alpha \vee \beta)$
c) $\sim(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\alpha \wedge \sim \beta)$
d) $\sim(\alpha \wedge \beta) \equiv (\sim \alpha \vee \sim \beta)$
e) $\sim(\alpha \vee \beta) \equiv (\sim \alpha \wedge \sim \beta)$

Obsérvese que si $\alpha \equiv \beta$, entonces α y β son dos formas distintas de expresar la misma idea; *v.gr.* si alguien niega una condicional, implícitamente afirma su antecedente y niega su consecuente, como se simboliza en el inciso c). Análogamente, al negar una disyunción, estamos afirmando que las dos formas proposicionales que la constituyen (α y β) son falsas y, por lo tanto, que sus negaciones son verdaderas (inciso e)).

Tal vez el lector se extrañe del enunciado de la definición anterior. ¿Por qué escribimos 'α' y 'β', si ni α ni β son formas proposicionales? Bueno, de igual manera que en matemáticas simbolizamos a un número que puede ser cualquiera con variables, y éstas son letras y no símbolos numéricos, aquí también utilizamos una variable para expresar que no importa qué formas proposicionales reemplacen a α y a β en las equivalencias de arriba, el resultado seguirá siendo verdadero. Por ejemplo, substituyendo 'α' por '$(P \rightarrow Q)$', y 'β' por $(R \vee \sim S)$ en el inciso e), obtenemos la equivalencia:

$$\sim((P \rightarrow Q) \vee (R \vee \sim S)) \equiv (\sim(P \rightarrow Q) \wedge \sim(R \vee \sim S))$$

ahora, de acuerdo a c), podemos reemplazar '$\sim(P \rightarrow Q)$' por '$(P \wedge \sim Q)$' en la segunda parte de esta equivalencia, de lo cual resulta:

$$\sim((P \rightarrow Q) \vee (R \vee \sim S)) \equiv ((P \wedge \sim Q) \wedge \sim(R \vee \sim S))$$

análogamente, podríamos substituir '$\sim(R \vee \sim S)$' por '$(\sim R \wedge S)$', de acuerdo a e) y a) (¿por qué?), para así obtener:

$$\sim((P \rightarrow Q) \vee (R \vee \sim S)) \equiv ((P \wedge \sim Q) \wedge (\sim R \wedge S))$$

la cual es una afirmación verdadera, como se puede comprobar, haciendo la tabla de verdad de

$$\sim((P \rightarrow Q) \vee (R \vee \sim S)) \leftrightarrow ((P \wedge \sim Q) \wedge (\sim R \wedge S))$$

y viendo que se trata de una tautología.

A continuación damos una lista de otras equivalencias muy elementales. El lector no debe, desde luego, intentar memorizarlas. Todas estas equivalencias tienen una razón de ser que es fácil advertir en un simple análisis.

$(P \vee Q) \equiv (Q \vee P)$
$(P \wedge Q) \equiv (Q \wedge P)$
$(P \wedge (Q \vee R)) \equiv ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$
$(P \vee (Q \wedge R)) \equiv ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$
$(P \leftrightarrow Q) \equiv ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$
$(P \leftrightarrow Q) \equiv ((P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q))$
$\sim(P \leftrightarrow Q) \equiv ((P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q))$

TABLA EN QUE SE RELACIONAN CIERTAS EXPRESIONES DEL LENGUAJE COTIDIANO CON LOS CONECTIVOS LÓGICOS

$\sim P$	No p No es cierto que P No es el caso que P No es verdad que P
$(P \vee Q)$	P o Q o ambos P o Q o P o Q

$(P \wedge Q)$	P y Q P aunque Q Q pero P Ambos P y Q P a pesar de que Q
$(\sim P \wedge \sim Q)$	Ni P ni Q
$(P \rightarrow Q)$	Si P entonces Q Si P, Q En caso de P, Q P implica Q Q, si P Q cuando P Q en caso de que P P sólo si Q P sólo cuando Q P es una condición suficiente para que Q Q es una condición necesaria para que P
$(P \leftrightarrow Q)$	P si y sólo si Q Q si P y P si Q P es una condición necesaria y suficiente para que Q P cuando y sólo cuando Q Si P entonces Q, e inversamente

Ejercicios

1. ¿Qué es un esquema enunciativo? Dar algunos ejemplos.
2. ¿Qué caracteriza a un esquema enunciativo de verdad? Dar un ejemplo que no aparezca en el texto.
3. ¿Cuáles son las ventajas, y cuáles los inconvenientes, de definir el condicional como un esquema enunciativo de verdad con los valores que le asignamos?
4. ¿Qué es una tautología? Dar tres ejemplos.
5. ¿Qué es una contradicción formal? Dar ejemplos.
6. ¿Qué es una fórmula contingente?
7. ¿Cuándo decimos que dos formas proposicionales son lógicamente equivalentes?
8. Dadas las formas proposicionales de la izquierda, escribir a su derecha una forma equivalente conteniendo los conectivos que allí se especifican.

Por ejemplo:

Escriba una forma equivalente a

$(P \to Q)$	en términos de ~ y ∫	$(\sim P \vee Q)$
(a) $(P \vee Q)$	" " " ~ y $\wedge$	________
(b) $(P \wedge Q)$	" " " ~ y $\vee$	________
(c) $(P \leftrightarrow Q)$	" " " ~, $\vee$, y $\wedge$	________
(d) $(P \leftrightarrow Q)$	" " " $\to$ y $\wedge$	________

¿Puede dar una justificación intuitiva a sus respuestas?

10. Dar una forma equivalente a

$$((\sim P \to Q) \wedge \sim(Q \to (\sim R \vee \sim S)))$$

que no tenga signos de negación.

11. Simbolizar los siguientes enunciados con formas proposicionales adecuadas. Decir con qué letra va a simbolizar cada enunciado.
    (a) No quiero oro, ni quiero plata. Yo lo que quiero es romper la piñata.
    (b) No me gusta el rojo, el azul tampoco.
    (c) Las mujeres embarazadas deben evitar el consumo de alcohol porque afecta al feto.
    (d) Es suficiente para una filosofía de la ciencia mostrar la existencia de mecanismos causales, o tiene que elaborar una teoría metafísica de la realidad.
    (e) Joaquín va al cine a menos que llueva.
    (f) Estoy confuso, tú también.
    (g) Una condición suficiente para que yo apruebe el curso es que apruebe los exámenes parciales.
    (h) Una condición necesaria para que Humberto ría es que esté ebrio.
    (1) Voy al teatro sólo si ponen una obra de Shakespeare.
    (j) Estudio inglés si puedo salir más temprano de la oficina.

3. LENGUAJE DE PREDICADOS

3.1 Simbolización de Enunciados con cuantificadores.

En muchas ocasiones, para determinar si un argumento es o no correcto, nos bastará, en cuanto a su simbolización se refiere, con representar sus enunciados como hasta ahora lo hemos hecho, es decir, considerándolos como proposiciones complejas formadas a partir de otras más sencillas, por medio de los conectivos lógicos. Sin embargo, hay otros casos en que, para ese fin, será necesario llevar a cabo un análisis y simbolización más finos de los enunciados, que dé cuenta de la estructura interna de las proposiciones que antes hubiésemos concebido como atómicas. Por ejemplo, en el argumento con la sóla premisa 'Ningún cónsul asesinó a César', y cuya conclusión es 'Ninguno de los asesinos de César era cónsul', la corrección depende, entre otras cosas, de que ambas proposiciones comienzan con la palabra 'ningún', por lo cual de nada nos serviría el simbolizarlas con sendas letras enunciativas.

La lógica tradicional consideraba a todos los enunciados simples como formados de tres elementos: el sujeto, la cópula y el predicado. Este último era el nombre de un género, mientras que el sujeto lo era de una especie, bien, de un individuo. La proposición entonces aseveraba o negaba la inclusión de una especie en un género (en cuyo caso se llamaba general), o la pertenencia al mismo de un individuo (si era singular). A su vez las proposiciones generales se clasificaban en universales y particulares, según que se atribuyera el predicado a todo el sujeto o sólo a una parte de éste. Ejemplo del primer tipo (es decir, general y universal) sería la oración 'Todos los espartanos eran hábiles guerreros', y del segundo (general particular), el enunciado 'Algunos fenicios llegaron a América'. No entraremos ahora en la estudio de estas formas tradicionales de análisis lógico. Ejemplos posteriores, así como la exposición del lenguaje formal que ofrecemos a continuación, mostrarán las insuficiencias de que dichas formas adolecen para nuestros propósitos actuales.

Para hacer claro el tipo de análisis a que someteremos las proposiciones atómicas, consideremos el ejemplo de ciertas ecuaciones algebráicas, como '$x+1=4$'. Esta expresión en sí no es un enunciado, pues no es ni verdadera ni falsa, pero se convierte en un enunciado aritmético si en lugar de la variable 'x' colocamos un nombre de número. Por cada cifra que reemplace a 'x' tendremos una identidad numérica, falsa o verdadera. Veámos ahora cómo generalizar esta idea para hacerla aplicable a las expresiones o a los enunciados de nuestro lenguaje diario. A título de ilustración, consideremos la cláusula 'el padre de x', en la que la variable 'x' no denota a un individuo, ni a nada en particular, sino que representa un espacio vacío en el que debemos colocar el nombre de alguna persona. Obviamente, si se reemplaza a 'x' por 'Alejandro Magno', se obtiene una designación de Filipo, mientras que si en lugar de 'x' aparece 'Caín', se tiene una referencia al primer habitante humano del Paraíso. De igual manera, extendiendo aún más este recurso, podemos pensar que la proposición 'El Rey de Roma murió siendo joven' está formada por un sujeto, 'El Rey de Roma', y la matriz 'x murió siendo joven', en la que, de nuevo, la variable representa un lugar a llenarse. La matriz genera así proposiciones, cuando ese espacio se ocupa con el nombre de una persona determinada. En este caso llamaremos a la matriz *esquema predicativo unario* o simplemente *predicado unario*. Esta última palabra nos indica que un sólo nombre basta para transformar en enunciado la matriz, a diferencia de lo que ocurre, *v.gr.*, con 'x ama a y', que requiere de dos reemplazos y que por ello denominaremos *predicado binario* o del esquema 'x es el padre y z la madre de y' que es un esquema ternario. Llamaremos *aridad de un predicado* al número de variables que contiene, o al número de reemplazos que supone.

Antes de proseguir, hagamos ciertas aclaraciones relativas al uso de las variables y a la aridad de las matrices. El predicado unario 'x es un número par', que podría ser de utilidad en el análisis de ciertos enunciados aritméticos, en nada se altera si, en lugar de 'x', utilizamos, por ejemplo, 'y', es decir, si lo escribimos como 'y es un número par', pues las variables representan espacios en blanco, y nos sirven precisamente para referirnos a ciertas matrices o esquemas, a las que tomaremos como elementos de un enunciado, y que, tras ciertas substituciones de sus variables por expresiones lingüísticas, generan nuevas proposiciones. Además, un predicado como 'x es hermano de y' es binario, porque bastan dos nombres colocados en lugar de sus variables para transformarlo en un enunciado, y sería un error considerarlo como ternario en vista de que en una familia hay tres hermanos.

En nuestro lenguaje formal los predicados de aridad *n* (*n* un número natural) se simbolizarán con cualesquiera letras mayúsculas del alfabeto castellano seguidas del superíndice *n*, y los individuos, con minúsculas, excepto la 'x', la 'y' y la 'z' que se emplearán como variables. Todas las letras podrán llevar subíndices, para indicar que, por ejemplo, k representa a un individuo distinto del que simboliza k_1. Antes de enunciarlas formalmente, ilustremos estas reglas por medio de unos cuantos ejemplos.

La proposición 'Caín mató a Abel' podría representarse con la fórmula T^2ca donde cada uno de los hermanos está simbolizado con la inicial de su nombre, y el esquema 'x mató a y' con la letra T^2. En lo sucesivo, al formalizar un enunciado sin conectivos lógicos, se escribirá, como aquí, primeramente la letra que representa su predicado —a la que llamaremos *letra predicativa*— y en seguida las que representen individuos. Todas las letras predicativas deberán llevar como superíndice la aridad del predicado que representan. Asimismo a la proposición anterior se le podría considerar como formada de un sujeto y del predicado unario ‘x mató a Abel’, entonces sería correcto formalizarla a través de una expresión del tipo T^1c. O bien, si se tratara de la premisa de un argumento para el análisis del cual bastara simbolizarla con una sola letra, ésta sería una formalización adecuada. Con ello queremos decir, que el modo en que una proposición se debe simbolizar en el lenguaje formal no es única, sino que depende, en buena medida, de los otros enunciados que en cada caso se busque analizar, así como de los recursos de que para ello se disponga. Esto último quedará más claro con algunos ejemplos posteriores.

Siempre que formalicemos proposiciones en el lenguaje simbólico daremos, en una lista, la clave de lo que cada una de las letras a ser empleadas representa, exceptuadas las variables. En cada caso o ejemplo que consideremos, se entenderá que todos los individuos simbolizados con las letras minúsculas del alfabeto sean elementos de un conjunto general, llamado dominio, que denotaremos con la letra U y que a veces haremos explícito y otras quedará sobreentendido. *V.gr.*, sea U el conjunto de todos los hombres, F^1x el predicado ‘x vivió en Florencia’, A^2xy ‘x conoció a y’, E^1x ‘x fue escultor’, y representemos con l, m y j a Leonardo da Vinci, a Miguel Angel Buonarroti y al papa Julio II respectivamente. De acuerdo con lo cual daremos enseguida una lista de enunciados y su simbolización correspondiente:

a) Leonardo vivió en Florencia, fue escultor, pero no conoció al papa Julio II.

$$((F^1l \wedge E^1l) \wedge {\sim} A^2lj)$$

b) Si Miguel Angel vivió en Florencia, entonces conoció a Leonardo y al papa Julio II.

$$(F^1m \rightarrow (A^2ml \wedge A^2mj))$$

c) Julio II no fue escultor, ni vivió en Florencia, pero sí conoció a Leonardo y a Miguel Angel.

$$(({\sim} E^1j \wedge {\sim} F^1j) \wedge (A^2jl \wedge A^2jm))$$

Una vez establecido el significado de los símbolos a emplearse, es factible traducir al lenguaje coloquial algunas de las expresiones del lenguaje simbólico. Así, en el ejemplo anterior, la fórmula $(A^2ml \leftrightarrow (E^1m \wedge F^1m))$ podría traducirse como ‘Miguel Angel conoció a Leonardo si, y sólo si, fue escultor y vivió en Florencia’.

Para la formalización de los enunciados que en la lógica aristotélica se clasificaban como *universales* o *particulares*, utilizaremos los símbolos '$\exists$' y '$\forall$', llamados *cuantificadores*, *existencial* el primero, y *universal* el segundo, por ejemplo de la siguiente manera: si Σ es una letra predicativa unaria y δ una variable, la expresión $(\forall\delta)\Sigma\delta$ significará que el predicado representado por õ es afirmado para todo elemento del dominio. Así, continuando con el ejemplo anterior, la fórmula $(x)F^1x$ representaría la proposición 'todos los hombres vivieron en Florencia'. Análogamente la expresión $(\forall y)A^2yl$ significaría 'todos los hombres conocieron a Leonardo', mientras que 'todos los hombres se conocieron entre sí' se formalizaría con $(\forall z)(\forall y)A^2zy$. Por otro lado, la fórmula $(\exists\delta)\Sigma\delta$ simbolizará que hay al menos un elemento del dominio para el que se asevera el predicado representado por Σ. V.gr. el enunciado 'Algún escultor conoció a Julio II' se simbolizaría con la fórmula $(\exists x)(E^1xA^2xj)$. Este modo de representación de enunciados universales y particulares se ilustrará en los ejemplos siguientes:

Sea U el conjunto de los personajes de *La Iliada*, M^2xy el predicado 'x mató a y', P^2xy 'x fue el padre de y', A^1x 'x fue aqueo', T^1x 'x fue troyano', S^1x 'x sobrevivió a la guerra', A^2xy 'x amó a y'; y representemos con a, h, e, p, o, s y n a Aquiles, Héctor, Elena, Príamo, Peleo, Astiacnate y Eneas respectivamente. De acuerdo con esto, daremos a continuación una serie de enunciados y su correspondiente simbolización:

1) Aquiles fue aqueo, mató a Héctor y no sobrevivió a la guerra.

$$((\forall^1a \wedge M^2ah) \wedge \sim S^1a)$$

2) Un troyano, hijo de Príamo, amó a Elena y mató a Aquiles.

$$(\exists x)(((T^1x \wedge P^2px) \wedge A^2xe) \wedge M2xa)$$

Tal vez podría causar confusión el hecho de que al asignar un significado a nuestras letras predicativas, hayamos descrito P^2xy como el equivalente formal del predicado 'x es el padre de y', mientras que en este inciso en P^2px la variable x aparezca en segundo término. Recuérdese que en un predicado las variables representan únicamente espacios que deben ser llenados con nombres para que se obtenga un enunciado, y en ese sentido, es indiferente qué variables se utilicen. Pudimos haber escrito P^2yz como 'y es el padre de z', sin que con ello se alterase el significado adscrito a P^2. Lo que en cambio importa advertir es el orden relativo de las variables, pues la descripción anterior de P^2 especifica que la letra correspondiente al padre ocupe el primer sitio, mientras que la del hijo, el se-

www.elsolucionario.net

gundo. Por ejemplo, P^2ph significa que 'Príamo es el padre de Héctor'; en tanto que P^2hp traduce la proposición 'Héctor es el padre de Príamo'.

3) Ningún hijo de Príamo sobrevivió a la guerra.

$$(\forall x)(P^2px \rightarrow \sim S^1x)$$

Adviértase que esta fórmula traduce más bien la proposición 'Para todo personaje de *La Iliada,* si fue hijo de Príamo, entonces no sobrevivió a la guerra', que a su vez es equivalente o tiene el mismo significado que la original. Aquí se aplica lo que ya hemos dicho respecto al lenguaje formal cuando tratamos el tema de los conectivos, y de la adecuación de éstos al uso que ciertas palabras tienen en el habla cotidiana.

4) Astiacnate fue nieto de Príamo.

$$(\exists x)(P^2pxP^2xs)$$

Aquí a falta de una letra que represente directamente al predicado 'x es abuelo de y', hemos expresado a éste a través de la relación de paternidad, mediante la expresión $(\exists z)(P^2xz \wedge P^2zy)$, que se traduciría literalmente como 'hay un personaje de *La Iliada* que fue hijo de x y padre de y'.

5) Un hijo de Príamo mató a un hijo de Peleo.

$$(\exists x)(\exists y)((P^2px \wedge P^2oy) \wedge M^2xy)$$

6) Un aqueo mató a todos los hijos de Príamo.

$$(\exists x)(A^1x \wedge (\forall y)(P^2py \rightarrow M^2xy))$$

7) Algunos sobrevivientes de la guerra amaron a Elena.

$$(\exists x)(S^1x \wedge A^2xe)$$

Interpretamos la palabra 'algunos' como si significara lo que la expresión 'por lo menos uno'. A veces en el lenguaje cotidiano empleamos 'algunos' para indicar que más de uno de los miembros de un conjunto, pero no todos, tienen una cierta propiedad, como cuando decimos: 'algunos elementos son radiactivos' (se entiende que no todos). No es así como utilizaremos ese vocablo. De acuerdo a nuestra convención ('algún'='algunos'='por lo menos uno') los enunciados 'algunos alemanes son europeos' y 'algunos rusos escribieron *La Guerra y la Paz*' son verdaderas. Siempre podremos traducir el cuantificador existencial al lenguaje natural por medio de la palabra 'algunos' (u otra expresión equivalente), entendida del modo que acabamos de ver.

8) Todos los hijos de Héctor murieron a manos de algún aqueo.

$$(\forall x)(P^2hx \rightarrow (\exists y)(A^1y \wedge M^2yx)$$

9) Ningún personaje de *La Iliada* mató a Eneas.

$$\sim(\exists x)M^2xn$$

10) Elena amó a uno de los hijos de Príamo.

$$(\exists x)(P^2px \wedge A^2ex)$$

Como antes, estableceremos, por medio de una serie de definiciones, una convención (que de hecho ya hemos seguido en los ejemplos anteriores) para la escritura correcta de las fórmulas de nuestro lenguaje. Llamaremos *fórmulas bien formadas* a las expresiones del lenguaje formal que estén correctamente escritas.

Definición 10. Los símbolos del lenguaje formal son únicamente los siguientes:

Letras predicativas: Las letras mayúsculas del alfabeto castellano, con superíndice.

Letras enunciativas: Las letras mayúscula del alfabeto, sin superíndice.

Letras individuales: Las letras minúsculas, que se agruparán del siguiente modo: de la 'a' a la 'w' serán *constantes individuales* (representarán individuos determinados), y la x, la y y la z serán *variables*

(Las letras predicativas, enunciativas e individuales podrán llevar subíndices. Se entiende que los sub o superíndices deberán ser números naturales)

Constantes lógicas: Los símbolos $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ y $\exists$

Signos de agrupación:) y (

3.2 Sintaxis del Lenguaje Formal.

Definición 11. *Una expresión* del lenguaje formal es cualquier sucesión finita de símbolos del mismo. Por ejemplo, $P\sim\wedge(c(A^2$ es una expresión, a diferencia de lo que ocurre con B ∧ "x=E ↔ A^1ó en que el tercero, quinto y último símbolo no pertenecen al lenguaje que estamos definiendo.

Definición 12. Una *fórmula atómica* es o una letra enunciativa, o bien una letra predicativa con superíndice seguida de *n* letras individuales (*n* un número natural cualquiera). *V.gr.* A^2ax es una fórmula atómica, como también lo es P. En cambio, B^3xa o β^1x no son fórmulas atómicas (puesto que a la primera le falta una letra minúscula, y la segunda contiene el símbolo 'β' que no pertenece a nuestro lenguaje simbólico). Es esta una ampliación de la definición 2, que dimos en la sección correspondiente al lenguaje proposicional. En general usaremos las letras enunciativas para representar enunciados completos, cuya estructura no sea necesario analizar para determinar la corrección o incorrección de un argumento.

Definición 13.

a) Una fórmula atómica es una *fórmula bien formada*.
b) Si α y β son *fórmulas bien formadas*, también lo son $\sim\alpha$, $(\alpha\wedge\beta)$, $(\alpha\vee\beta)$, $(\alpha\rightarrow\beta)$, $(\alpha\leftrightarrow\beta)$, $(\forall\delta)\ \alpha$ y $(\exists\delta)\ \alpha$ si δ es una variable.
c) Únicamente son fórmulas bien formadas las expresiones que satisfagan a) y b).

De acuerdo con esta regla expresiones tales como 'A^1b', 'B^2xb', '$\sim B^2xb$', '$(A^1b \rightarrow \sim B^2xb)$', y '$(\exists x)(A^1b \rightarrow \sim B^2xb)$' son fórmulas bien formadas, a diferencia de lo que ocurre con '(B^2xb)', '$A^1b \rightarrow \sim B^2xb$', '$A^2abB^1x$', '$P^1B^2xy$' o '$H^3xa$'.

En algunas ocasiones omitiremos algunos paréntesis que deberían escribirse según las definiciones anteriores, para facilitar la lectura de las fórmulas, cuando ello no dé lugar a confusión.

El lector habrá seguramente advertido que cualquier enunciado del lenguaje ordinario puede traducirse al lenguaje formal de varias maneras, todas igualmente correctas. Así la proposición 'ningún hijo de Príamo sobrevivió a la guerra', del ejemplo anterior, podría también simbolizarse con '$\sim(\exists x)(P^2pxS^1x)$'. Sin olvidar este hecho, daremos algunas sugerencias y recomendaciones relativas a la simbolización de proposiciones:

1) Un enunciado que asevera que todos los elementos del dominio poseen una determinada propiedad P se traduce adecuadamente por una fórmula del tipo $(\forall x)\ P^1x$.

2) Una proposición que atribuye una propiedad P a todos los elementos de un subconjunto A del dominio puede representarse correctamente con una fórmula como

$$(\forall x)(A^1x \rightarrow P^1x)$$

3) Una oración que afirma que ninguno de los individuos de un conjunto A (distinto del dominio) tiene la propiedad P se simboliza adecuadamente con una expresión de la forma

$$(\forall x)(A^1x \to \sim P^1x)$$

o bien con $\sim(\exists x)(A^1x\ P^1x)$

4) La inversión en el orden de dos cuantificadores de diferente especie en una fórmula, por ejemplo, $(\exists x)(\forall y)A^2xy$ para obtener $(\forall y)(\exists x)A^2xy$ altera completamente el sentido de lo que se está simbolizando. Es evidente que no es lo mismo decir 'para todo número natural hay otro mayor', que 'hay un número mayor que todos lo naturales'. En cambio, las fórmulas $(\exists x)(\exists y)A^2xy$ y $(\exists y)(\exists x)A^2xy$ son equivalentes, es decir, cualquiera de ellas puede emplearse indistintamente para traducir un mismo enunciado.

Antes de continuar con estas recomendaciones, debemos dar algunas definiciones de carácter técnico necesarias para la traducción de enunciados al lenguaje formal.

Definición 14. *El alcance de un cuantificador* (es decir de una expresión tal como '$(\exists x)$' o '$(\forall x)$') en una f.b.f. es la f.b.f. que está inmediatamente a su derecha.

Ejemplos

1)

$$(\forall x)\underbrace{(P^1x \wedge (\exists y)\overbrace{A^2xy}^{\text{alcance de '}(\exists y)\text{'}})}_{\text{alcance de '}(\forall x)\text{'}}$$

En este caso sería incorrecto decir que el alcance de '$(\forall x)$' es 'P^1x' pues aunque 'P^1x' es una f.b.f. y se encuentra a la derecha de '$(\forall x)$', no se hallan contiguos, pues hay un paréntesis intermedio.

2)

$$((\forall x)\underbrace{P^1x}_{\substack{\text{alcance}\\ \text{del primer}\\ (\forall x)}} \to (\forall x)\underbrace{(A^1x \to B^1x)}_{\substack{\text{alcance}\\ \text{del segundo}\\ (\forall x)}})$$

En la fórmula anterior hay dos cuantificadores universales, cada uno de ellos tiene su alcance respectivo.

NOTA. A las diversas ocasiones en que aparece una variable δ en una fórmula β, las llamaremos *las ocurrencias de δ en β*, y nos referiremos a cada una de ellas según el orden en que se escriben en β. Por ejemplo en

$$(\forall x)((\exists y)A^2xy \rightarrow (A^1x \wedge \sim B^1x))$$

1^{era} 2a 3a 4a
ocurrencia oc. oc. oc.
de 'x' de 'x' de 'x'

la variable 'x' ocurre 4 veces (siendo la primera dentro de un cuantificador universal); 'y' sólo ocurre en 2 ocasiones. De 'z', en cambio, diremos que no ocurre en la fórmula anterior.

Definición 15. Una ocurrencia de una variable δ en una fórmula *está acotada*, si es la variable de un cuantificador $(\exists\delta)$ o $(\forall\delta)$, o está dentro del alcance de un cuantificador $(\exists\delta)$ o $(\forall\delta)$.

Ejemplos:

1) En $((\forall x)A^1x \rightarrow B^1x)$ las dos primeras ocurrencias de 'x' están acotadas (la primera por ser la variable de un cuantificador, la segunda, por estar en el alcance de '$(\forall x)$'); mientras que la tercera no lo está.

Definición 16. Si una ocurrencia de una variable en una fórmula no está acotada, se dice que está libre.

2) En $(\exists y)(A^2xy \rightarrow B^2xy)$ todas las ocurrencias de 'x' están libres y todas las de 'y' acotadas.

En realidad, la distinción entre ocurrencias libres y acotadas de un variable corresponde a dos muy diferentes funciones que las variables pueden cumplir en la expresión o simbolización del pensamiento. Para verlo, consideremos una fórmula aritmética tal como

$$x+2=5$$

esta identidad no es ni verdadera ni falsa, hasta que no se coloque en el lugar de 'x' a un numeral. La variable representa, como ya hemos visto, un hueco o espacio vacío que debe llenarse con la figura de un numeral.

En cambio, si escribimos

$$(\exists x)(x+2=5)$$

expresamos un enunciado aritmético verdadero, y sería absurdo querer reemplazar a la variable, en cualquiera de sus ocurrencias, por un número, pues obtendríamos algo así como $(\exists 3)(3+2=5)$ ó $(\exists 3)(x+2=5)$, ambas expresiones sin sentido, de acuerdo a nuestra definición. Pues bien, en este caso nos encontramos con una variable que está acotada en todas sus ocurrencias, en tanto que en la identidad '$x+2=5$', 'x' ocurría libre.

Definición 17. Un *enunciado del lenguaje formal* es una f.b.f. cuyas variables están acotadas en todas sus ocurrencias.

Ejemplos:

$$(\forall x)(A^1x \rightarrow (\exists y)(B^2xy \rightarrow (\forall z)C^3xyz)))$$
$$(P \rightarrow (Q \wedge R))$$
$$(\exists y)(A^1y \wedge (\forall x)(\forall z)A^2xz)$$

son enunciados, en tanto que

$$(A^1x \rightarrow (\forall x)B^1x)$$
$$\text{y } ((\forall x)A^1x \wedge B^1x)$$

no lo son.

Obsérvese que la palabra 'enunciado' la hemos empleado a lo largo del texto con dos acepciones muy diferentes. Por un lado, se refiere a expresiones del lenguaje cotidiano que son o verdaderas o falsas; por otro, en el lenguaje formal, alude a fórmulas bien formadas sin variables libres. La hemos usado así de propósito, pues se trata de una equivocidad que difícilmente puede dar lugar a confusiones y, además, porque, como veremos en seguida, la correcta traducción de un enunciado del lenguaje coloquial debe resultar en un enunciado del lenguaje simbólico.

Ejercicios

1. ¿A qué se llama una expresión de nuestro lenguaje formal?
2. ¿Qué es una fórmula bien formada? Dar 3 ejemplos de expresiones que sean fórmulas bien formadas, y 3 que no lo sean.
3. ¿Las siguientes expresiones son fórmulas bien formadas? En caso de que no, decir por qué.
   (a) $\sim\sim\sim\sim P$ ________________
   (b) $((P \wedge Q) \vee R')$ ________________
   (c) $(P) \wedge (\sim Q)$ ________________
   (d) $(\forall x)A^2ab$ ________________
   (e) $(\forall x)\sim(\exists y)(\sim(\forall z)A^3xyz \rightarrow B^2xx)$ ________________
   (f) $(P_{34} \rightarrow Q)$ ________________
   (g) $(\exists x)(\forall y)A^3xy$ ________________
   (h) $(\forall x)(\exists x)A^2xx$ ________________
   (i) $(A^3xzy \rightarrow B^2ww)$ ________________
   (j) $(\forall a)A2ab$ ________________

(k) $(A^3abc \wedge B^2cd)A^2ab$ ____________________

(l) $(\exists x)x<ò$ ____________________

4. ¿Cuándo decimos que una ocurrencia de una variable está acotada, en una fórmula bien formada?
5. ¿Qué es un enunciado del lenguaje formal? Dar un ejemplo.

Podemos ahora continuar con las sugerencias y comentarios para la simbolización adecuada de proposiciones.

5) En una f.b.f. del tipo $((\forall x)A^1x \rightarrow (\forall x)B^1x)$ (*) la ‘x’ puede cambiarse en su tercera y cuarta ocurrencias por otra variable, por ejemplo ‘y’, sin que se altere el ‘sentido’ de la fórmula, pues tanto $((\forall x)A^1x \rightarrow (\forall y)B^1y)$ como (*) aseveran que si todos los individuos del dominio tienen la propiedad simbolizada con ‘A^1’, todos comparten la propiedad que ‘B^1’ representa.

6) Los enunciados del lenguaje natural se traducen en enunciados del lenguaje formal (es decir, si alguna ocurrencia de una variable queda libre, eso es indicio de que la traducción es incorrecta). La fórmula

$$((\forall x)A^1x \wedge B^1x)$$

no puede traducirse al castellano, aún cuando se nos indique un dominio y se nos indique qué propiedades ‘A^1’ y ‘B^1’ simbolizan, pues en ella la tercera ocurrencia de ‘x’ está libre, representa únicamente un espacio a llenarse.

Damos a continuación una lista de ejercicios de simbolizaciones.

Ejercicios.

1. En el último ejercicio de la introducción se dieron algunos enunciados que presentaban una clara ambigüedad sintáctica. Representarlos en el lenguaje simbólico de acuerdo a cada una de sus posibles interpretaciones.

(2) Traducir los enunciados siguientes a enunciados adecuados del lenguaje formal. Decir cuál es el dominio en cada caso y con qué letras predicativas se van a representar los diversos predicados, así como decir qué letras minúsculas simbolizarán a cada uno de los individuos del dominio a que se refieren los enunciados.

(a) El Mar Negro no es grande, pero el Mediterráneo sí lo es.
(b) El hermano de Martha es pintor y el mío es músico.
(c) Todos los amigos de Jaime son alegres y todos los amigos de Rubén son antipáticos.
(d) Alguien que es cruel está enfermo o es un desadaptado.
(e) Ninguno de los vecinos de Lucrecia la felicitó.
(f) No todos los cristianos creen en el diablo, pero algunos sí.
(g) Si hubiera otro planeta, distinto de la tierra, con vida, debe haber una estrella muy cercana.

(h) Cualquier hijo de mi vecina tiene un amigo más agradable que tú.
(1) Todos aman a alguien y alguien ama a todos, pero no todos aman a todos.
(j) En el sistema solar no hay más de una estrella. (Sugerencia: el enunciado no asevera la existencia de una estrella en nuestro sistema planetario. Afirma —en cambio— que si en esa región halláramos dos estrellas, no podrían ser diferentes. Es decir, se trataría en ambas ocasiones de la misma estrella)

3.3 Interpretaciones.

Cada vez que hemos traducido del lenguaje formal al natural, o viceversa, lo hemos hecho por medio de un «diccionario» convencionalmente dado de antemano, con el que hemos determinado un universo de discurso (denotado con la letra 'U') y un significado para cada una de las letras predicativas e individuales (exceptuadas las variables), que aparecían en el enunciado formal a traducir, o bien que se requerían para transformar el enunciado del lenguaje natural en cuestión, en uno adecuado del lenguaje formal. Evidentemente para que una expresión como

$$((\exists x)P^1x \wedge (\forall y)(P^1y \rightarrow A^2ay))$$

pueda traducirse en un enunciado de nuestro idioma, tenemos que especificar cuál es nuestro universo U de discurso y qué representan 'a', 'P^1' y 'A^2'. Obviamente los significados de '$\rightarrow$', '$\wedge$', '(' y '$\exists$' han sido ya fijados y no es necesario darlos de nuevo. Además 'a' deberá simbolizar un elemento de U, 'P^1' un predicado unario de elementos de U (es decir, un subconjunto de U), y 'A^2' un predicado binario de elementos de U (una relación binaria, o subconjunto de UXU[1]). A este «diccionario» que nos permite traducir los enunciados de un lenguaje a otro y viceversa lo llamaremos una *interpretación del lenguaje simbólico.* Aunque daremos una definición más formal un poco más adelante, explicaremos desde ahora algunos de sus términos. Diremos que una interpretación consta de un conjunto universo U, y de una función[1] f que asigna significados ciertos símbolos del lenguaje formal. Claro está que f asociará a las constantes individuales con elementos de U, a las letras predicativas, con predicados de la misma claridad que el superíndice de la letra, etc. Además, f asignará un significado a todas las constantes individuales, letras predicativas y enunciativas del lenguaje formal, de tal manera que todo enunciado del lenguaje simbólico se traduzca, vía la interpretación, en un enunciado en lengua castellana. Por ejemplo, cuan-

[1] Para el lector que desconozca el significado que en matemáticas tienen los términos 'relación' o 'función', recomendamos consultar el apéndice, al final del libro.

do dimos anteriormente el ejemplo de los personajes de la Iliada, mostramos una posible interpretación, aunque incompleta pues no asignamos ningún valor, digamos, a la letra 'k'. Análogamente podemos dar las dos siguientes interpretaciones, ambas incompletas:[2]

1) Sea U={x: x es un número natural}
$f(P^1x)$=x es par (esto significa que 'P^1' designará la propiedad de ser par)
$f(A^2xy)$=x divide a y y f(a)=2

2) Sea U={x: x es un ser humano}
$f(P^1x)$=x es ruso
$f(A^2xy)$=y admira a x y f(a)=Dostoyevsky

De acuerdo a la primera interpretación el enunciado que teníamos más arriba, a saber,

$$((\exists x)P^1x \wedge (\forall y)(P^1y \rightarrow A^2ay))$$

se traduce como 'Hay un número que es par y el 2 divide a todos los pares' que es verdadero. Con respecto a la segunda, una traducción correcta sería: 'Hay un ruso y todos los rusos admiran a Dostoyevsky' el cual es un enunciado probablemente falso.

Un enunciado del lenguaje formal puede resultar verdadero al traducirse de acuerdo a una interpretación y falso respecto a otra.

Una vez familiarizados con la noción intuitiva de interpretación pasemos a su definición más rigurosa.

Definición 18. *Una interpretación del lenguaje formal* es una pareja <U, f> en la que U es un conjunto no vacío[3] llamado 'dominio de la interpretación', y f una función[4] que asigna:

(a) a cada constante individual, un elemento de U
(b) a cada letra predicativa n-aria, un predicado n-ario de elementos de U (es decir, un subconjunto de U^n)
(c) a cada letra enunciativa, un valor de verdad.

Parecería más natural que f asignara a las letras enunciativas enunciados referentes a los elementos de U. En efecto, esto podría hacerse así. Pero conviene más dejar la definición anterior tal y como está, pues si, por ejemplo, queremos mostrar que en algunas interpretaciones es verdadero el enunciado $(P \rightarrow (\forall x)A^1x)$, y elegimos para ello una en que f(P) sea una proposición falsa, digamos 'Napoleón venció en Borodino',

[2] Llamamos «incompletas» a estas asignaciones de significado a los símbolos no lógicos del lenguaje formal, porque como veremos en seguida, no satisfacen —rigurosamente hablando— la definición de 'interpretación'. Sin embargo, pueden fácilmente transformarse en interpretaciones en sentido estricto.

[3] Ver apéndice.

[4] Ver apéndice.

alguien podría poner en duda el valor de verdad de ese aserto. Después de todo no concierne a la lógica la verdad de proposiciones factuales, sino la relación entre los valores de verdad de distintos enunciados, como quedará en claro más adelante.

Ejemplo:

Sea U={x: x es un pico del Himalaya}
f(a)= el Everest
f(b)= el K2
f(A^2xy)=x es más alto que y
f(ó)= el Anapurna para cualquier constante individual ó distinta de 'a' y 'b'
(esto implica que, por ejemplo, la constante 'd' significará también el Anapurna)
f(ô)={} para toda letra predicativa ô distinta de 'A^2'
f(õ)= falso para cualquier letra enunciativa õ
entonces <U, f> es una interpretación del lenguaje formal.

El que a todas las constantes individuales, exceptuadas unas cuantas, asigne f un mismo elemento del dominio, en este caso el Anapurna, es un recurso que permite satisfacer en el requisito según el cual, una vez dada la interpretación, todo posible enunciado formal debe ser susceptible de traducción a nuestro idioma. Como ya lo hicimos anteriormente, en los ejemplos sucesivos daremos interpretaciones <<incompletas>>, es decir, en que sólo indicaremos el dominio y las asignaciones de las letras que aparezcan en los enunciados que estemos tratando, a sabiendas de que pueden convertirse en interpretaciones en sentido riguroso, empleando el recurso a que acabamos de hacer mención.

Al llegar aquí el lector se preguntará por qué hemos elaborado un lenguaje formal si después, al interpretar sus símbolos no lógicos, hemos vuelto al lenguaje cotidiano. ¿Qué sentido tiene este complicado rodeo? No podemos dar ahora sino una parte de la respuesta, pero es conveniente que el lector se cerciore de que puede contestar esta interrogante al finalizar todo el libro. Después de todo, lo que estamos haciendo es esquematizar, y a la vez seguir, una estrategía común en la resolución de problemas teóricos. Si al estudiar un conjunto cualquiera de objetos, nos atenemos a la naturaleza particular de sus elementos, todo cuanto podamos descubrir valdrá exclusivamente para el pequeño ámbito de ese conjunto. En cambio, si nos fijamos en sus relaciones mutuas y abstraemos de su naturaleza específica, todas nuestras conclusiones pueden tener un ámbito de validez mayor. Si analizamos, por ejemplo, el tráfico urbano a través de diagramas en que las calles aparezcan como líneas y las esquinas como puntos de intersección, todas nuestras inferencias sobre las posibles trayectorias por las que puede alcanzarse un punto partiendo de otros, valdrán para todo sistema de flujo similarmente dispuesto. Pongamos por caso que al «interpretar» las líneas de nuestro diagrama como líneas ferroviarias, éste se 'traduzca' en un mapa de circulación de trenes, entonces lo que se ha inferido de un sistema será verdadero también con respecto al otro. Es esta una forma frecuente del proceder intelectual y nuestra definición de 'interpretación' la fundamenta con mayor rigor.

Sin embargo, lo más importante, y que tal vez no pueda apreciarse ahora, es que las relaciones entre enunciados que interesan desde el punto de vista lógico son precisamente las que se mantienen independientemente de cualquier interpretación particular que se dé a sus vocablos no lógicos. Como dijimos al principio un argumento tal como:

Ningún poeta contemporáneo es mejor que Dante
Octavio Paz es un poeta contemporáneo.
Por lo tanto, Octavio Paz no es mejor que Dante.

es correcto independientemente de qué se entiende por (o cómo se interprete) 'ser mejor', con tal de que se entienda como una relación binaria, etc.

Por ello la definición rigurosa de 'argumento correcto' requerirá del concepto de interpretación. Esto quedará más claro en el siguiente capítulo.

Ejercicios

Dada la siguiente interpretación $I=<U,f>$

$U=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$ $f(a)=1$ $f(A^2xy)=$ x igual a y $f(B^2xy)=x<y$

$f(M^3xyz)=$x multiplicado por y es igual a z

$f(D^1x)=$x es primo $f(b)=^2$

Traducir al lenguaje coloquial los siguientes enunciados y decir si son verdaderos o falsos en la interpretación dada:

(a) $(\forall x)(\sim A^2xa \rightarrow B^2ax)$
(b) $(\exists x)(D^1x \wedge \sim B^2xb)$
(c) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((B^2xy \wedge B^2yz) \rightarrow B^2xz)$
(d) $(\exists x)(D^1x \rightarrow B^2xa)$
(e) $(\forall x)((\exists y)B^2yx \rightarrow \sim D^1x)$
(f) $(\forall x)D^1x \rightarrow (Ew)M^3wwa)$
(g) $(\forall x)((\exists y)M^3yyx \rightarrow \sim D^1x)$
(h) $(\forall x)(D^1x \wedge \rightarrow (\forall y)(\forall z)(M^3yzx \rightarrow (A^2ya \vee A^2za)))$
(1) $(\exists x)(D^1x \wedge (\forall y)(D^1y \rightarrow A^2yx))$
(j) $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(M^3zxy \rightarrow B^2yx)$

y traducir al lenguaje formal los enunciados:

(a) Ningún número distinto de 2 es primo y par a la vez.
(b) Hay un número menor que todos los demás (distintos de él)
(c) Para cualesquiera dos números, si el primero es menor que el segundo, existe un tercero mayor que el primero pero menor que el segundo
(d) Para cualquier número primo hay otro primo mayor que él
(e) Para cualesquiera tres números si el primero multiplicado por el segundo es igual al tercero, entonces el primero es menor que el segundo.
(f) No hay más de dos números primos.
(g) Dados dos números cualesquiera si el primero es menor que el segundo, entonces existe un tercer número que multiplicado con el primero da como resultado un número mayor que el segundo.
(h) No todos los números son pares
(1) Si hubiera un número par menor que 2, ningún número sería primo.
(j) Si hay un número que sea primo, sólo hay uno y ese número es el 2.

3.4 Validez Universal

Una pregunta que surge aquí naturalmente es la de si habrá enunciados formales que sean verdaderos en toda interpretación posible. Podemos ver claramente que sí, pues toda tautología es un enunciado del lenguaje formal y, obviamente, no puede ser falsa en ninguna interpretación. Lo mismo vale para toda fórmula que resulta de substituir las letras proposicionales de una tautología por enunciados cualesquiera. Por ejemplo si substituimos 'P' por '$(\exists x)B^1x$' en '$(P \to P)$'. ¿En qué interpretación podría ser falso

$$((\exists x)B^1x \to (\exists x)B^1x)?$$

Evidentemente en ninguna. ¿Qué otro tipo de enunciados formales tendrán esta característica?

Definición 19. Un enunciado del lenguaje formal es *universalmente válido* si es verdadero bajo toda interpretación.

Definición 20. Un enunciado del lenguaje natural es *lógicamente verdadero* si resulta de traducir, de acuerdo a alguna interpretación, un enunciado universalmente válido

Volvamos a nuestra pregunta ¿qué otro tipo de enunciados, aparte de los ya mencionados, es universalmente válido? O bien ¿qué enunciados serán lógicamente verdaderos? Tal vez pudiera pensarse que los enunciados aritméticos, tales como 1+1=2. Pero si consideramos que, por ejemplo, enviar por correo una carta de dos hojas no cuesta lo mismo que enviar dos de una sóla hoja, vemos que en esta "interpretación" del signo '+' no se mantiene aquella ecuación aritmética.

Para hallar otros ejemplos de enunciados universalmente válidos, consideremos el hecho de que los dos conceptos anteriormente definidos son una extensión de los de 'tautología' y 'enunciado tautológico'. La forma

$$\sim(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \sim Q)$$

es una tautología, pues representa el que al negar un condicional tácitamente afirmamos su antecedente y negamos su consecuente. Análogamente preguntémonos: ¿qué aseveramos implícitamente al negar que toda elemento de un conjunto tiene una cierta propiedad P? Pues que algunos elementos del conjunto no la tienen. De lo cual podemos conjeturar que el enunciado

$$\sim(\forall x)A^1 \leftrightarrow (\exists x)\sim A^1x$$

es universalmente válido. Lo mismo podemos decir, por razones similares, de la equivalencia

$$(\forall x)\sim A^1 \leftrightarrow \sim(\exists x)A^1x$$

Tomemos ahora otro enunciado, por ejemplo, $((\exists x)A^1x \rightarrow A^1b)$, ¿será universalmente válido? Podemos ver fácilmente que no, pues el antecedente afirma que hay un elemento que tiene una cierta propiedad, mientras que el consecuente asevera que precisamente el elemento denotado por 'b' la tiene. Podría ocurrir lo primero y no lo segundo. Pongamos por caso la siguiente interpretación

U={x: x es un lago}
$f(A^1x)$=x situado en Asia
f(b)= el lago de Pátzcuaro

en ella el enunciado anterior es falso, pues al "traducirlo" de acuerdo a esta interpretación, obtendríamos la proposición 'Si hay un lago en Asia, el lago de Pátzcuaro está en Asia', que no es verdadera. Con ello hemos probado que ese enunciado no es universalmente válido.

En cambio el condicional $(A^1b \rightarrow (\exists x)A^1x)$ parece ser, si se analiza con detenimiento, universalmente válido. No lo probaremos rigurosamente pues ello exigiría adentrarnos en complicadas técnicas de demostración. Simplemente daremos a continuación una breve lista de algunos enunciados universalmente válidos, pero pretendemos que el lector sea capaz de determinar, al menos en los casos más sencillos y con una simple inspección, si un enunciado es universalmente válido y, en caso de que no, de imaginar una interpretación en que sea falso.

Ejemplos de enunciados universalmente válidos:

$(\forall x)\sim A^1x \leftrightarrow \sim(\exists x)A^1x$
$\sim(\forall x)A^1x \leftrightarrow (\exists x)\sim A^1x$
$(A^1b \rightarrow (\exists x)A^1x)$
$((\forall x)A^1x \rightarrow A^1b)$
$(\forall x)(A^1x \rightarrow B^1x) \rightarrow ((\forall x)A^1x \rightarrow (\forall x)B^1x)$
$((\forall x)((A^1x \rightarrow B^1x) \wedge (\forall x)(B^1x \rightarrow C^1x)) \rightarrow (\forall x)(A^1x \rightarrow C^1x)$

Ejercicios

Demostrar que los siguientes enunciados no son universalmente válidos, dando en cada caso una interpretación en que sean falsos.

1. $((\forall x)(A^1x \rightarrow B^1x) \wedge B^1a) \rightarrow A^1a$
2. $((\exists x)A^1x \wedge (\exists x)B^1x) \rightarrow (\exists x)(A^1x \wedge B^1x)$
3. $((\forall x)A^1x \rightarrow (\forall x)B^1x) \rightarrow (\forall x)(A^1x \rightarrow B^1x)$
4. $(\forall x)(A^2xa \rightarrow \sim B^1x) \vee (\exists y)(B^1y \wedge A^2yb)$
5. $((\forall x)(\exists y)A^2xy \rightarrow (\exists y)(\forall x)A^2xy)$

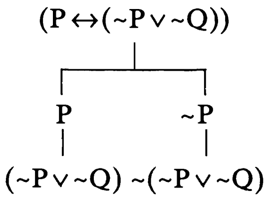
4. ÁRBOLES SEMÁNTICOS

Otro modo de analizar las condiciones de verdad de enunciados complejos, elaborados por medio de los conectivos lógicos, es a través de los llamados árboles de verdad. Para introducirlos examinemos el siguiente ejemplo: ¿en qué casos es verdadera una proposición de la forma

$$(P \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q))$$

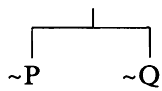
La tabla de verdad correspondiente nos muestra que sólo es verdadera esa forma, si lo son también P y la negación de Q. En efecto, el conectivo principal de bicondicional es verdadero únicamente si las dos formas que asocia tienen el mismo valor de verdad. Pero, en este caso, no puede ocurrir que ambas sean falsas pues, por un lado, tendríamos que P es falsa y, por otro, que P asimismo tendría que ser verdadera para que fuese falsa la disyunción $(\sim P \vee \sim Q)$. Siendo esto imposible, se infieren los valores de verdad para P y Q susodichos.

Ahora bien, para hacer más sencillo y gráfico este análisis, representemos la alternativa que plantea el conectivo principal de esa forma a través del diagrama

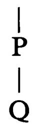


en que simbólicamente expresamos que el bicondicional es verdadero si P y (~P∨~Q) son los dos verdaderos (rama de la izquierda), o bien si ambos son falsos (rama de la derecha).

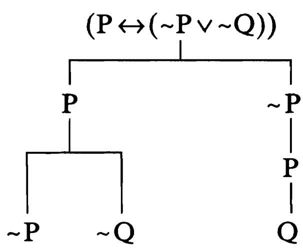
Similarmente, dado que la disyunción (~P∨~Q) es verdadera si por lo menos una de sus proposiciones componentes también lo es, reemplacemos en el árbol esa forma por un diagrama del tipo



Asimismo, sustituyamos ~(~P∨~Q) por el esquema



pues ~(~P~Q)ʃ(PQ). Con lo cual el árbol original quedaría así:



Cada rama representa una posibilidad de que la bicondicional sea verdadera, pero tanto la primera como la tercera deben ser eliminadas (lo que representaremos escribiendo el símbolo '--' bajo cada una de ellas), puesto que suponen la verdad y la falsedad de una misma proposición (lo que es inaceptable), quedando tan sólo la segunda, es decir, la que contiene a P y a ~Q.

En la tabla siguiente tabla mostraremos los árboles correspondientes a formas proposicionales muy sencillas, según lo que hemos visto anteriormente. Más adelante daremos las indicaciones para construir los árboles que representan enunciados más complejos a través de una serie de ejemplos.

$\sim\sim P$	P
$P \wedge Q$	P Q
$P \vee Q$	P Q
$P \rightarrow Q$	$\sim P$ Q
$P \leftrightarrow Q$	P $\sim P$ Q $\sim Q$
$\sim(P \wedge Q)$	$\sim P$ $\sim Q$
$\sim(P \vee Q)$	$\sim P$ $\sim Q$
$\sim(P \rightarrow Q)$	P $\sim Q$
$\sim(P \leftrightarrow Q)$	P $\sim P$ $\sim Q$ Q

Como ilustración del método que en general debe seguirse en el diseño de árboles de verdad, veamos cómo construir el que corresponde a la forma $((P \rightarrow Q) \wedge R)$. Partamos del conectivo principal, escribiendo su árbol de verdad con las formas que lo componen.

$$P \rightarrow Q$$
$$R$$

Si reemplazamos el condicional por su árbol correspondiente, obtenemos:

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \sim P & & Q \\ | & & | \\ R & & R \end{array}$$

en el que se ha colocado a R unida por un trazo vertical a cada una de las ramas del árbol de $(P \rightarrow Q)$, simbolizando así que para que la conjunción original sea verdadera, deben ser verdaderas R y ~P, o bien R y Q.

En los ejemplos que a continuación presentamos procedemos, paso a paso, a la construcción de los árboles de verdad de las formas dadas

Ejemplo 1

1.

$$\begin{array}{ccc} & (P \rightarrow (\sim Q \wedge (R \leftrightarrow S))) & \\ \sim P & & (\sim Q \wedge (R \leftrightarrow S)) \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{ccc} & (P \rightarrow (\sim Q \wedge (R \leftrightarrow S))) & \\ \sim P & & \sim Q \\ & & | \\ & & R \leftrightarrow S \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{ccc} & (P \rightarrow (\sim Q \wedge (R \leftrightarrow S))) & \\ \sim P & & \sim Q \\ & & | \\ & & R \leftrightarrow S \\ & & \begin{array}{cc} S & \sim S \\ R & \sim R \end{array} \end{array}$$

Ejemplo 2.

1.

$$\begin{array}{c} ((P \rightarrow Q) \wedge \sim Q) \wedge (\sim R \rightarrow \sim P) \\ | \\ ((P \rightarrow Q) \wedge \sim Q) \\ | \\ (\sim R \rightarrow \sim P) \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{c} ((P \rightarrow Q) \wedge \sim Q) \wedge (\sim R \rightarrow \sim P) \\ | \\ P \rightarrow Q \\ | \\ \sim Q \\ | \\ (\sim R \rightarrow \sim P) \end{array}$$

3.

$$((P \rightarrow Q) \wedge \sim Q) \wedge (\sim R \rightarrow \sim P))$$
$$P \rightarrow Q$$
$$\sim Q$$
$$\sim R \rightarrow \sim P$$

$\sim P$	Q
	--

En este caso hemos colocado el símbolo '--' debajo de la segunda arteria del árbol, para indicar que ésta representa una condición imposible, pues contiene unidas en línea vertical a Q y a ~Q. Por ello, no es necesario seguir desarrollando esa rama. Siempre que esto ocurra diremos que la *rama se cierra*.

4.

$$((P \rightarrow Q) \wedge \sim Q) \wedge (\sim R \rightarrow \sim P)$$
$$|$$
$$(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q$$
$$|$$
$$P \rightarrow Q$$
$$\sim Q$$
$$\sim R \rightarrow \sim P$$

$\sim P$		Q
$\sim Q$		
$\sim R \rightarrow \sim P$		--
R	$\sim P$	

Adviértase que en lugar de ~~R, hemos escrito simplemente R, pues ~~R≡R.

Ejercicios

Escribir los árboles de verdad de las siguientes formas proposicionales:

1. $(P \wedge ((\sim Q) \vee (\sim R)))$
2. $((P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\sim R))$
3. $((P \leftrightarrow Q) \wedge (\sim Q \leftrightarrow R)))$
4. $\sim((P \wedge Q) \rightarrow R)$
5. $\sim((P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow (P \wedge \sim Q))$

Ahora veamos cómo determinar, a través del método de los árboles de verdad, si una forma proposicional es o no una tautología. Evidentemente el resultado de negar una tautología es una forma proposicional que es una contradicción formal, es decir, que no tiene ninguna posibilidad de ser verdadera. Por ello, si hacemos el árbol de verdad de esta forma, todas sus ramas deberán cerrarse. También es verdad lo inverso, es decir, que si el árbol de la negación de una forma proposicional se cierra en todas sus ramas, entonces es una tautología. Para aclarar ésto considere la forma

$$(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R)) \quad (*)$$

que es una tautología. Hagamos el árbol de verdad de su negación

$$\begin{array}{c}
\sim((P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))) \\
| \\
\sim P \to Q \\
| \\
\sim((Q \to R) \to (P \to R)) \\
| \\
Q \to R \\
| \\
\sim(P \to R) \\
| \\
P \\
| \\
\sim R
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\sim P & & Q \\
\text{--} & & \begin{array}{cc} \sim Q & R \\ \text{--} & \text{--} \end{array}
\end{array}$$

El que el árbol se haya cerrado indica que la forma (*) es una tautología.

Ahora consideremos la forma $((P \to Q) \to Q)$. Para determinar si es una tautología o no, hagamos el árbol de verdad de su negación.

$$\sim((P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$$
$$|$$
$$P \rightarrow Q$$
$$|$$
$$\sim Q$$
$$\sim P \qquad\qquad Q$$
$$--$$

El que la primera rama del árbol haya quedado abierta nos indica que la forma proposicional $((P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$ es falsa cuando P es falsa y Q es falsa, y que, por lo tanto no es una tautología.

Ejercicios.

Determinar si las siguientes formas proporcicionales son o no tautologías usando el método de los árboles de verdad.

a) $((P \wedge Q) \vee R) \rightarrow (P \wedge (Q \vee R))$
b) $((P \wedge Q) \rightarrow R) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$
c) $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow ((P \wedge R) \leftrightarrow (Q \wedge R))$

Este método de los árboles semánticos será empleado nuevamente en el capítulo IV para determinar, entre otras cosas, la corrección o incorrección de cierto tipo de argumentos, vía la noción de consistencia de enunciados.

III
Validez e Invalidez de Argumentos

1. Introducción

Hemos dicho que nos servimos del lenguaje, entre otras cosas, para ofrecer argumentos cuando queremos establecer una tesis o demostrar cierto resultado. De hecho, diariamente ofrecemos razones para explicar tal o cual cosa o para asentar que algo es cierto. Como ejemplo, podemos citar las explicaciones encaminadas a establecer que el ejercicio aeróbico es más conveniente para la salud que el ejercicio anaeróbico. Es claro que al argumentar deseamos que nuestras conclusiones sean aceptadas por nuestros interlocutores y sólo podemos decir que lo hemos logrado cuando ellos hayan aceptado las razones que exponemos y vean claramente que éstas llevan a las tesis que pretendemos concluir. En ese caso, nuestra argumentación parecería correcta. Sin embargo, suele suceder que lo que parece convencer a una persona no convence a otra. En muchas ocasiones esto se debe —como mencionamos al principio del capítulo II— a que formulamos nuestros argumentos de manera imprecisa o ambigua. Pero existen situaciones en las que aún después de corregir tales ambigüedades, un argumento puede parecerle válido a una persona y no parecérselo a otra. Ante esto es necesario poseer un criterio general que supere la subjetividad e indique de manera exacta y objetiva cuándo una argumentación es correcta y cuándo no lo es. En realidad, el interés por tal criterio existe desde hace mucho tiempo y ha sido motivado por la necesidad de analizar los argumentos de la vida cotidiana, así como los que se formulan en la ciencias, la filosofía y en las diversas disciplinas del conocimiento humano.

Antes de describir el criterio que utilizaremos para distinguir entre argumentaciones correctas e incorrectas, necesitamos hacer las siguientes observaciones.

Cuando se habla de un argumento, en general se entiende que está escrito, o proferido oralmente, en un lenguaje natural como el español,[1] como por ejemplo:

[1] El estudio que sigue valdrá lo mismo para argumentos escritos en francés, inglés, ruso, etc.

2 es mayor que 1
Por tanto, 1 es menor que 2

Juan llegó tarde
Por tanto, no entró al concierto

Pero es claro que —utilizando el lenguaje de proposiciones definido en el capítulo II— ambos argumentos poseen la misma forma, ya que

si P = 2 es mayor que 1 o bien P=Juan llegó tarde
Q=1 es menor que 2 o bien Q=Juan no entró al concierto

en ambos casos la forma es:[2]

$$\frac{P}{Q}$$

Diremos que esta última simbolización es el argumento, en el lenguaje formal, que corresponde a los argumentos originales. Así tendremos argumentos en español y argumentos en el lenguaje formal. Podemos pensar que los dos argumentos ofrecidos en un principio son ejemplificaciones, instancias o particularizaciones del argumento escrito en el lenguaje formal, que exhibe un estructura general determinada.

Análogamente, los argumentos

2 es par
Por tanto, algún número es par

y

Juan habita esta casa
Por tanto, alguien habita esta casa

son instancias del siguiente argumento, escrito en el lenguaje formal:

$$\frac{P^1a}{(\exists x)P^1x}$$

Cuando dos o más argumentos particulares son instancias de un argumento del lenguaje formal, diremos que poseen la misma estructura (o forma). Cuando esto suceda, podremos analizar este último y transferir los resultados obtenidos a cada uno de los primeros. Por ejemplo,

$$\text{si } \frac{P^1a}{(\exists x)P^1x}$$

fuera correcto, todas sus instancias lo serían
y, por consiguiente, sería correcto el argumento

2 es par

[2] La raya horizontal corresponde a 'por tanto'.

Por tanto, algún número es par

o bien

$$\frac{\text{si } P^1a}{(\exists x)P^1x}$$

fuera incorrecto, todas sus instancias lo serían.

El criterio que determina la corrección o validez de un argumento es el siguiente.[3] Un argumento será correcto cuando y sólo cuando las razones expuestas (o hipótesis) tengan como consecuencia necesaria a la conclusión. Esto sucederá cuando el argumento esté formulado de tal manera que siempre que las hipótesis fueran verdaderas, la conclusión necesariamente deberá serlo. Este criterio se basa en una idea sensata: siempre que nuestros puntos de partida resultaran verdaderos, deberemos obtener verdades como consecuencias y no falsedades. En el caso de obtener falsedades, partiendo de verdades, algo debe estar mal, y esto sería la estructura o formulación del argumento.

El concepto anterior parece simple, y lo es. Rescata una idea bastante común. Sin embargo, debemos atender a las palabras 'siempre que las hipótesis fueran verdaderas', 'esté formulado de tal manera que...' y 'necesariamente', si queremos en verdad comprenderlo. Porque, como veremos, podemos tener un argumento particular, donde tanto hipótesis como conclusión sean verdaderas y que sea incorrecto; o bien, un argumento donde algunas o todas las hipótesis sean falsas y, sin embargo, sea correcto.

Un ejemplo del primer caso sería el argumento "Mario se casa. Por lo tanto, tiene hijos". Aquí hay sólo una hipótesis (o razón argüida para concluir), que es "Mario se casa", y la conclusión es "Mario tiene hijos". Puede ser verdadero, de hecho, que Mario esté casado y que tenga hijos y, a pesar de ello, el argumento sea incorrecto pues no haya una relación de consecuencia necesaria entre hipótesis y conclusión. Para ver claramente ésto, analicemos qué significa aquí la palabra 'siempre' dentro de la frase 'siempre que la hipótesis fuera verdadera'. Al argumento original le corresponde, en el lenguaje formal, el argumento

$$\frac{P}{Q}$$

donde

P=Mario se casa
Q=Mario tiene hijos

Para que fuera correcto, debería suceder que siempre que P fuera verdadera, Q tendría que serlo. Esto significa: para todas las instancias

[3] Más adelante daremos este concepto como definición.

posibles de P y Q se debería cumplir esa condición. Pero podemos encontrar muchas instancias que no lo hacen, ya que ha existido una gran cantidad de parejas de casados que no tuvieron hijos. Así, la forma de argumentar en este ejemplo es incorrecta ya que sugiere que hay una relación entre hipótesis y conclusión que no se cumple siempre.

Para ilustrar el segundo caso, analicemos el siguiente argumento. "Fernando Pessoa nació antes que Jorge Luis Borges y que Hermann Hesse. Por tanto, Pessoa nació antes que Jorge Luis Borges". La estructura formal de este argumento es tal que, siempre que las hipótesis sean verdaderas, la conclusión necesariamente lo es. En efecto, para cualesquiera que fuesen tres individuos y cualquiera que fuese una relación, se tendría que: si el primero guarda una relación con el segundo y también guarda esa relación con el tercero, entonces necesariamente el primer individuo guarda tal relación con el segundo. Sin embargo, en nuestro ejemplo particular una de las hipótesis es falsa pues Borges nació en 1899, Pessoa en 1888 y Hesse en 1877. Pero el argumento posee una estructura tal que siempre que resulten verdaderas ambas hipótesis, la conclusión necesariamente resulta verdadera, y eso es lo que lo hace correcto. Entonces las hipótesis son suficientes para garantizar la conclusión.

Este resultado puede parecer extraño, pero se aclarará con lo siguiente. Hemos dado un argumento en español, al cual corresponde una estructura que queda plasmada en un argumento del lenguaje formal, que es

$$\frac{P \wedge Q}{P}$$

donde

P = Pessoa nació antes que Borges

Q=Pessoa nació antes que Hesse

Al analizar este último, vemos que cumple la condición establecida para ser correcto. Por tanto, todas sus instancias son argumentos correctos, y así el argumento inicial debe también serlo.

Con estos ejemplos podemos entender más claramente lo que significa que un argumento sea correcto. Lo que interesa no es la verdad o falsedad de los enunciados que conforman un ejemplo particular (o instancia) de un argumento, sino la estructura o forma que posee, de modo que se comporte (o no) como indica el criterio que hemos dado para determinar su corrección. Esto es muy importante, pues carecerá de interés el tema del que se hable en una argumentación en lo que refiere a su validez. Así, podremos estudiar argumentaciones ofrecidas en ciencia, filosofía, economía, política, etc. tanto como argumentaciones de la vida cotidiana, obteniendo su estructura y, si esta es la misma para varios argumentos de distintas disciplinas, su análisis determinará para todos ellos si son concretos o no.

Es justamente la lógica la que estudia las argumentaciones dejando de lado los significados de los enunciados concretos que aparezcan en ellas analizando únicamente su forma. En el capítulo anterior hemos presentado dos lenguajes que cumplen exactamente esa función y por ello los utilizaremos ahora. Así como simbolizábamos enunciados, aquí simbolizaremos argumentos para después analizarlos por su estructura. Dado que el aprendizaje de esto sólo se logra con la práctica, hemos optado por trabajar con ejemplos en vez de efectuar una discusión teórica. Hemos elegido temas de la vida cotidiana, comunes a todos, ya que el contenido de cada argumentación carecerá de importancia y obtendríamos los mismos resultados si se tomaran temas de una disciplina específica. Será de gran utilidad aprender a aplicar estos conocimientos a cualquier tipo de argumentaciones.

En lo que resta de este capítulo, utilizaremos el criterio mencionado para determinar la corrección o incorrección de un argumento. Tal criterio queda plasmado en las siguientes definiciones.

Definición 1: Un argumento es *válido* (o *lógicamente correcto*) si y sólo si siempre que las premisas (o hipótesis) sean verdaderas, la conclusión necesariamente resulta ser verdadera. En ese caso, diremos que la conclusión es *consecuencia lógica* de las premisas.

Definición 2: Un argumento es *inválido* (o *lógicamente incorrecto*) si y sólo si puede ocurrir que las premisas sean verdaderas mientras la conclusión es falsa. En ese caso, la conclusión *no* es consecuencia lógica de las premisas.

2. Argumentos en un Lenguaje sin cuantificadores

Recordemos que un argumento fue definido como un conjunto de enunciados tales que uno de ellos —la conclusión o tesis— es lo que se desea establecer, mientras que los restantes —hipótesis o premisas— son las razones argüidas para concluirla.

En esta sección estudiaremos diversos argumentos en cuya formulación no interesa la estructura interna de los enunciados que lo conforman, sino únicamente su disposición o acomodo respecto a los conectivos lógicos. Por ello, requeriremos principalmente, de los conocimientos adquiridos en el capítulo II respecto a las condiciones en que un enunciado complejo del lenguaje de proposiciones es verdadero o falso.

Cada uno de los siguientes ejemplos será analizado intuitivamente y, ya que no conoceremos si las hipótesis correspondientes a ellos son o no verdaderas de hecho, supondremos que lo fueren para averiguar qué pasaría con su conclusión. En el siguiente capítulo mostraremos cómo efectuar un análisis más riguroso de las argumentaciones.

Analicemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Me dijeron que mi amigo Jorge está en el cuarto 213 o 214 del hospital San Juan. Pero llamé al 214 y no está ahí. Entonces estará en el 213.

Para analizar cada argumento es necesario que quede claro cuáles son las hipótesis (o premisas) y cuál es la conclusión. Además, tenemos que recordar que en el lenguaje natural usamos abreviaturas y darnos cuenta a qué corresponden.

En el ejemplo que nos ocupa, tenemos que:

a) 'Mi amigo Jorge está en el cuarto 214 o 213 del hospital San Juan' significa: mi amigo Jorge está en el cuarto 214 del hospital San Juan o mi amigo Jorge está en el cuarto 213 del hospital San Juan.
b) La frase 'no está ahí' no es siquiera un enunciado, pero significa, en este contexto, que mi amigo Jorge no está en el cuarto 214 del hospital San Juan.
c) La frase 'está en el 213' significa: mi amigo Jorge está en el cuarto 213 del hospital San Juan.

Es obvio que usamos el lenguaje como lo muestra el argumento original. Pero una vez que queda claro qué es lo que queremos decir, podemos elegir un punto intermedio y escribir el argumento 1 como sigue[4]:

H1. Jorge está en el cuarto 214 o 213
H2. Jorge no está en el cuarto 214
C. Jorge está en el cuarto 213

Es claro que C es la conclusión y que H1 y H2 son las hipótesis. Ahora analicemos si C se sigue necesariamente de H1 y H2.

Por la hipótesis H1, sólamente hay dos posibilidades para nuestro amigo. Pero una de ellas debe ser desechada, porque así lo indica la hipótesis H2. Entonces, lógicamente, sólo queda la otra posibilidad que menciona H1. Y entonces, necesariamente, C debe ocurrir, pues afirma esa otra posibilidad. En este caso, las hipótesis son suficientes para aseverar la conclusión, ya que siempre que aquéllas sean verdaderas, la conclusión lo será.

Podemos aplicar un razonamiento análogo para el argumento siguiente.

Ejemplo 2.

En el libro de Paul R. leí que los unicornios eran de ambos sexos, pero más adelante afirmó que no podrían ser hembras por ciertas razones, entonces para él los unicornios eran machos.

Tomando el esquema de la estructura de este argumento tenemos:

[4] De ahora en adelante, aunque las expresiones (frases) que aparezcan en los argumentos no sean enunciados en el estricto sentido de la definición, los tomaremos como tales. Pues, como en este ejemplo, es posible escribir la frase completa de modo que resulte un enunciado, a través de especificar el sujeto, la fecha, el lugar, etc.

H1. Para Paul R. los unicornios podrían ser machos o hembras
H2. Los unicornios no eran hembras
C. Los unicornios son machos (para Paul R.)

Notemos que en los ejemplos 1 y 2 lo que importa es que ambos argumentos mencionan dos posibilidades. De éstas, una queda descartada, y nos quedamos con la otra posibilidad. Entonces, si ignoramos el significado particular de los enunciados, podemos obtener el esquema lógico de ambos argumentos. Claramente comparten tal esquema, es decir, su forma es la misma. Tal forma es:

$$\begin{array}{c} P \vee Q \\ \sim Q \\ \hline P \end{array}$$

Y podemos ahora decir que de ‘P∨Q’ y ‘~Q’ sí se concluye ‘P’.[5] Es decir, el argumento es lógicamente correcto.

Entonces cada vez que encontremos una argumentación que posea esta forma, podemos estar seguros de que las hipótesis llevan a la conclusión.

Ejemplo 3.

Haré la cena, porque cuando Raúl viene, cena aquí.

Nuevamente necesitamos distinguir cuál es la forma lógica de este argumento. Su forma es:

`Si Raúl viene a casa, cena aquí. Pero Raúl vendrá. Así, Raúl cenerá aquí'

O más bien:[6]

H1. Si Raúl viene a casa, cena en casa
H2. Raúl viene a casa
C. Raúl cena en casa

La primera hipótesis, H1, es un condicional y nos indica que siempre que suceda lo que expresa su antecedente, deberá suceder lo que expresa su consecuente. Si el antecedente no ocurre, no sabemos nada del consecuente. Pero la segunda hipótesis afirma que el antecedente de H1 sí sucede. Entonces estamos obligados a aceptar que su consecuente sucede.

Algo análogo ocurre con:

[5] Análogamente, de ‘PvQ’ y ‘~P’ podemos concluir ‘Q’.

[6] Recordemos que en lenguaje usual damos por hecho múltiples aspectos, por ejemplo, en el argumento original no decimos explícitamente que Raúl va a venir y hay que hacerlo explícito. Y cuando decimos ‘cena en casa’, en general, en este contexto, se entiende que es la casa del que está hablando. Así, ‘Raúl viene a casa’ significa ‘Raúl viene a mi casa’, etc.

Ejemplo 4.

Si hay nubes, llueve.
Hay nubes
Entonces, llueve

o

Ejemplo 5.

Si asisto al curso, apruebo
Asisto al curso
Por tanto, apruebo

La forma de los tres últimos argumentos es:

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$$

Nótese que puede suceder que en el condicional que constituye la primera hipótesis de este tipo de argumentos (3, 4 y 5) se afirme una relación entre antecedente y consecuente que de hecho no se cumple siempre. Por ejemplo, no siempre que hay nubes tiene que llover, o no siempre la asistencia a un curso basta para aprobarlo (raras veces sucede esto). Sin embargo, cuando aceptamos como hipótesis un condicional y como otra hipótesis su antecedente, nos vemos obligados a aceptar su consecuente (como conclusión de ambas).

Dicho de otra manera, la estructura lógica de estos argumentos es tal que siempre que aceptemos sus hipótesis debemos aceptar su conclusión, únicamente por la forma lógica que posee el argumento.

Ejemplo 6.

H1. Si asisto al curso, apruebo
H2. Apruebo
C. Entonces asisto al curso

Notemos que, como en los ejemplos 3, 4 y 5, la primera hipótesis de (6) es un condicional. Si recordamos las tablas de verdad para una fórmula como H1, vemos que cuando el consecuente es verdadero -como lo afirma H2- el antecedente puede ser verdadero o falso. Entonces el antecedente de H1 puede ser falso, y éste es C. Así, puede ocurrir que H1 y H2 sean verdaderas y C sea falsa. Por tanto, H1 y H2 no son suficientes para concluir C.

Otros casos semejantes a (6) son:

Ejemplo 7.

Lidia tomó alcohol porque está enferma y cuando toma alcohol se enferma.

Ejemplo 8.

Yo pienso, porque existo, y porque si pienso, existo.
Que esquemáticamente son:
7'. H1. Si Lidia toma alcohol, se enferma.
H2. Lidia se enferma
C. Lidia toma alcohol
8'. H1. Pienso, luego existo
H2. Existo
C. Por tanto, pienso.
Los ejemplos 6, 7 y 8 tienen la forma:

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \underline{Q \quad\quad} \\ P \end{array}$$

y hemos visto que, como, en general, de '$P \rightarrow Q$' y 'Q' no se sigue 'P', tales argumentos no son válidos, pues no siempre que sus hipótesis sean verdaderas, su conclusión resulta verdadera.

Ejemplo 9.
Te compro los cigarros si voy a la gasolinera, porque, entonces, paso por la farmacia y si paso por ahí, nada me cuesta comprarlos.
Al usar el lenguaje expresamos matices, acentos e intenciones, además de dar por hecho que nuestro oyente comparte ciertas premisas que dejamos implícitas. Al obtener la estructura de un argumento hacemos explícita la información que nos interesa, dejando de lado intenciones, matices, etc.
En el caso del ejemplo 9, si alguien dice 'nada me cuesta comprarlos', da por hecho que el oyente entiende que comprará los cigarros pero, además, añade un acento de amabilidad, al dar a entender que no le molesta hacerlo. A nosotros nos interesa recuperar la información que concierne al resto del argumento. Por ello, el argumento es:
H1. Si voy a la gasolinera, paso por la farmacia
H2. Si paso por la farmacia, compro los cigarros
C. Si voy a la gasolinera, compro los cigarros
Ambas hipótesis son condicionales. Así, el pasar por la farmacia estaría sujeto a ir a la gasolinera, por H1, y el comprar los cigarros esta-

ría sujeto a pasar por la farmacia, por H2. No sabemos si esto sucederá de hecho o no, pero si aceptamos ambas hipótesis, debemos aceptar que finalmente la compra de los cigarros estaría condicionada por el hecho de ir a la gasolinera. Por tanto, de H1 y H2 se sigue C.

Es claro que con un análisis similar al anterior podemos estar seguros de que, siempre que tengamos hipótesis de la forma '$A \to B$' y '$B \to D$', podemos concluir lógicamente '$A \to D$'. Es decir, el argumento del tipo:

$$\begin{array}{c} A \to B \\ B \to D \\ \hline A \to D \end{array}$$

es lógicamente válido.

Ejercicios:

1. Decir, con sus propias palabras, cuándo un argumento es correcto.
2. ¿Qué es una instancia de un argumento del lenguaje formal?
3. Para mostrar que un argumento es correcto, ¿basta exhibir una instancia suya cuyas hipótesis y conclusión sean verdaderas? Explicar su respuesta.
4. Si en el lenguaje español tenemos un argumento con hipótesis y conclusión falsas, ¿podemos por ello afirmar de inmediato que es incorrecto?, ¿podríamos afirmar lo contrario? Explicar detalladamente su respuesta.
5. Para cada uno de los siguientes argumentos se ofrece un razonamiento que pretende establecer su corrección o incorrección. ¿Cuál es el error de cada razonamiento expuesto?
   a) Argumento: "México está en América o Francia en Europa. Por tanto, México está en América".
   Razonamiento: "Ya que es verdadero que México está en América y Francia en Europa, Podemos concluir que México está en América". Así el argumento es correcto.
   b) Argumento: "México está en Asia e Inglaterra en América. Por tanto, México está en Asia".
   Razonamiento: "Ya que México no está en Asia, el argumento es incorrecto".
6. En cada uno de los siguientes conjuntos de hipótesis dar, en cada caso, una conclusión que haga correcto al argumento cuyas premisas son:
   a) Si muero hoy, mañana ya no estaré aquí.
   Si no estoy aquí, no veré más lo que hay en esta Tierra.
   Entonces:

b) Si México gana a Alemania, tendrá el primero o segundo lugar.
Si esto es así, habrá fiesta nacional.
Por tanto:
c) Si el oro es caro, el plomo también.
Si el plomo es caro, el petróleo lo es.
Entonces:

7. Benjamín, Jorge y Manuel son sospechosos de evadir impuestos. Ante la policía sus testimonios son los siguientes.
Benjamín: Jorge es culpable y Samuel es inocente.
Jorge: Si Benjamín es culpable, entonces Samuel también lo es.
Samuel: Soy inocente, pero alguno de los otros es culpable.
Sean B, J, S los enunciados correspondientes a 'Benjamín es inocente', 'Jorge es inocente' y 'Samuel es inocente'.

Expresar el testimonio de cada sospechoso en una fórmula del lenguaje formal y contestar lo siguiente. Justificar detalladamente cada respuesta.

a) ¿Son contradictorios los tres testimonios?
b) ¿El testimonio de algún sospechoso es consecuencia del de algún otro? En caso afirmativo, ¿cuál lo es de cuál?
c) Suponiendo que todos son inocentes, ¿quién miente?
d) Suponiendo que todos los testimonios son verdaderos, ¿quién es inocente y quién es culpable?
e) Suponiendo que el inocente dice la verdad y el culpable miente, ¿quién es inocente y quién es culpable?

Ejemplo 10.
Si un filósofo es idealista, es platónico. Pero si es idealista, es realista. Entonces, si un filósofo es platónico, es realista.

La forma del argumento es:
H1. Si un filósofo es idealista, es platónico
H2. Si un filósofo es idealista, es realista.
C. Si un filósofo es platónico, es realista.

Es muy posible que nada sepamos de los filósofos y nada sepamos del realismo, del idealismo o del platonismo. Tal vez ignoremos el significado de estos térrminos. Sin embargo, podemos analizar si en este argumento las hipótesis son suficientes para concluir C. Su esquema formal es:

$$\begin{array}{c} \text{H1. } A \to B \\ \text{H2. } A \to D \\ \hline \text{C. } B \to D \end{array}$$

donde: A: 'un filósofo es idealista'
B: 'un filósofo es platónico'

D: ‘un filósofo es realista’

Por H1, ‘A’ es una condición para ‘B’. Por H2, ‘A’ es una condición para ‘D’. Pero en H1 y H2 nada se expresa para establecer un nexo entre ‘B’ y ‘D’ de modo que ‘D’ deba necesariamente estar condicionada por ‘B’. Entonces de ‘A6B’ y ‘A6D’ no se sigue ‘B6D’.

Esto es claro si tomamos como ejemplo el siguiente argumento.

H1. Si voy a Europa, voy a París.
H2. Si voy a Europa, voy a Atenas.
C. Si voy a París, voy a Atenas.

Aquí queda claro que ‘ir a Atenas’ no tiene por qué seguirse necesariamente de ‘ir a París’. Y entonces H1 y H2 pueden ser verdaderas y C falsa.

En general, cuando después de analizar un argumento vemos que su conclusión no se sigue necesariamente de las hipótesis podemos ofrecer otro argumento que posea la misma forma que el original donde quede clara esta situación. A esto le llamaremos ofrecer un *contraejemplo* para mostrar que un argumento no es lógicamente válido. Más tarde veremos la importancia de esto.

En los dos ejemplos anteriores vemos que, aunque en ambos casos todos sus elementos son condicionales, en un caso (ejemplo 9) de H1 y H2 se sigue C y en otro caso (ejemplo 10) no es así. El acomodo de los enunciados dentro de las hipótesis y la conclusión es de suma importancia.

Ejercicios:

Dar ejemplos de argumentos que tengan la forma:

a) $$\begin{array}{c} A \to D \\ \underline{B \to A} \\ B \to D \end{array}$$

b) $$\begin{array}{c} D \to A \\ \underline{B \to D} \\ B \to A \end{array}$$

c) $$\begin{array}{c} D \to A \\ \underline{B \to D} \\ A \to D \end{array}$$

y analizar si las hipótesis son suficientes para establecer la conclusión.

Ejemplo 11.

No debemos llamarnos humanos, porque si lo fuésemos cuidaríamos la Naturaleza y no lo hacemos.

Su estructura es:

H1. Si nos llamamos humanos, cuidamos la naturaleza.
H2. No cuidamos la naturaleza
C. No debemos llamarnos humanos

H1 es un condicional y, por tanto, cada vez que su antecedente se cumpla, deberá ocurrir su consecuente. Pero H2 afirma que el consecuente de H1 no sucede. Entonces no debe ocurrir el antecedente de H1, pues si ocurriera debería cumplirse el consecuente. Así, debe verificarse 'No debemos llamarnos humanos', que es C. El argumento sí es válido.

En general, si un argumento posee la forma:

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \underline{\sim Q} \\ \sim P \end{array}$$

de sus hipótesis se sigue su conclusión.

Ejemplo 12.

H1. Si obtengo 10 de calificación, apruebo.
H2. No obtengo 10 de calificación.
C. No apruebo

Su forma es:

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \underline{\sim P} \\ \sim Q \end{array}$$

La primera hipótesis indica que cada vez que se verifique 'P' deberá cumplirse 'Q'. Pero la segunda hipótesis indica que 'P' no se verifica. En este caso, si 'P' es falsa, 'Q' puede tomar cualquier valor veritativo y también '~Q'. Como '~Q' puede ser falsa, H1 y H2 no son suficientes para concluir C.

Analicemos ahora argumentos más complejos.

Ejemplo 13.

Debemos filosofar o no debemos filosofar. Si debemos filosofar, deberemos filosofar. Si no debemos filosofar, deberemos filosofar para ver por qué no. Entonces, debemos filosofar.

Sea A: debemos filosofar.

El esquema del argumento es:

$$\begin{array}{l} \text{H1. } A \vee \sim A \\ \text{H2. } A \rightarrow A \\ \underline{\text{H3. } \sim A \rightarrow A} \\ \text{C. } A \end{array}$$

Si aceptamos H2 y H3 tenemos:
Si 'A' sucede, entonces 'A' ocurre (H2)
Si '~A' sucede, entonces 'A' ocurre (H3)

Pero, por H1, debe cumplirse el antecedente de H2 o el antecedente de H3. En cualquiera de los dos casos, tendremos que entonces debe suceder 'A' O sea, C se cumple. Entonces H1, H2 y H3 son razones suficientes para establecer C.

Otra forma de llegar al mismo resultado es la siguiente:

¿Sería posible que H1, H2 y H3 no nos lleven a C? Es decir, ¿sería posible que aunque ocurran H1, H2 y H3, no se verifique C?.

Supongamos que fuesen ciertas H1, H2 y H3 y, sin embargo, C no lo fuere. En ese caso 'A' no se cumple y, por tanto, '~A' debe ocurrir (por H1). Pero, por H3, si '~A' ocurre, 'A' debe suceder. Pero entonces tenemos que tanto 'A' como '~A' se verifican. Esto es un resultado contradictorio. No puede suceder entonces que C no se cumpla cuando H1, H2 y H3 sí lo hagan. Por tanto, siempre que sucedan H1, H2 y H3, deberá ocurrir C. Y llegamos al resultado que ya teníamos usando otra vía.[7]

Ejemplo 14.

Si Humberto no es artista, no tiene sensibilidad. El tiene sensibilidad si le gusta la pintura. Entonces, si le gusta la pintura y tiene sensibilidad, es artista.

Sean A: Humberto es artista
B: Humberto tiene sensibilidad
D: A Humberto le gusta la pintura.

Su estructura es:

H1.	$\sim A \rightarrow \sim B$
H2.	$D \rightarrow B$
C.	$(D \wedge B) \rightarrow A$

Supongamos que H1 y H2 son ciertas. Como C es un condicional, en caso de que fuera verdadero, tendríamos que si su antecedente se cumple, entonces su consecuente debe verificarse.

Supongamos, entonces, que '$D \rightarrow B$' se cumple para averiguar si 'B' se sigue necesariamente o no (usando H1 y H2).

Si '$D \wedge B$' se cumple, entonces, en especial, se cumple 'B'. Pero entonces '~B' sería falso y por H1, '~A' debe ser falso. De donde 'A' necesariamente debe ser verdadero.

Entonces si suponemos que H1 y H2 ocurren vemos que C se verifica.

7 Esta forma de proceder es muy común. Por ejemplo, fue utilizada para descubrir la existencia del planeta Urano. Dadas las perturbaciones en las órbitas de los planetas conocidos, debería necesariamente existir otro planeta. Pues en caso de que no lo hubiera, se tendrían resultados contradictorios con los datos observados.

Ejemplo 15.

Si Alberto compra la casa, Fernando será su aval. Si los precios son accesibles, Alberto comprará la casa y Ricardo rentará un terreno. Pero si Fernando es el aval, Martha se disgustará con él. Por tanto, si Ricardo no renta el terreno, Martha se disgustará con Fernando.

Sean A: Alberto compra la casa
B: Fernando es el aval de Alberto
M: Los precios son accesibles
R: Ricardo renta un terreno
S: Martha se disgusta con Fernando

El argumento queda:

$$\begin{array}{l} \text{H1. } A \rightarrow B \\ \text{H2. } M \rightarrow (A \wedge R) \\ \text{H3. } B \rightarrow S \\ \hline \text{C. } {\sim}R \rightarrow S \end{array}$$

Supongamos que H1, H2 y H3 suceden y supongamos que también ocurre el antecedente de C para ver si necesariamente obtenemos su consecuente. '$\sim$R' se verifica. Pero entonces 'R' no debe cumplirse. Entonces '$A \wedge R$' debe ser falso en H2 y entonces 'M' debe serlo. En H1, 'A' puede suceder o no. Veamos qué pasa en cada caso.

CASO a) Si 'A' se cumple, entonces 'B' también. Y así, por H3, 'S' debe ocurrir. En este caso, de H1, H2, H3 y '$\sim$R' hemos llegado necesariamente a 'S'. Pero falta revisar el otro caso.

CASO b) Si 'A' no ocurre, entonces 'B' puede ocurrir o no en H1, pues si el antecedente de H1 es falso, 'B' puede tomar cualquier valor. Hay que investigar ambos casos. Si 'B' fuese verdadera, 'S' tendría que serlo, por H3. Si 'B' fuese falsa, 'S' podría tomar cualquier valor.

Pero, entonces, 'S' podría no suceder, aunque sucedan H1, H2, H3 y '$\sim$R'. Es decir, C puede fallar en alguna ocasión, a pesar de que H1, H2 y H3 sean verdaderas. Entonces C no se sigue de las hipótesis. El argumento no es válido.

Ejemplo 16.

Si Armando no vio a Luis anoche, Luis es el asesino o Armando miente. Si Luis no es el asesino, Armando no vio a Luis anoche o el asesinato ocurrió al mediodía. Si esto último es cierto, Luis es el asesino o Armando miente. Entonces, Luis es el asesino.

Sean A: Armando vio a Luis anoche
L: Luis es el asesino
R: Armando miente

M: El asesinato ocurrió a mediodía

Tenemos:

$$\begin{array}{l} \text{H1. } \sim A \rightarrow (L \vee R) \\ \text{H2. } \sim L \rightarrow (\sim A \vee M) \\ \text{H3. } M \rightarrow (L \vee R) \\ \hline \text{C. } L \end{array}$$

En este ejemplo, habría que considerar todos los casos posibles en que H1, H2 y H3 resultaran simultáneamente verdaderas para ver si C necesariamente también lo es. Tendríamos entonces once casos.

Razonemos entonces indirectamente: ¿qué pasaría si C no se cumple aunque H1, H2, H3 sí lo hagan?. Supongamos entonces que H1, H2, H3 son verdaderas y C no lo es. Así, 'L' no ocurre y por H2 '$\sim A \vee M$' debe ocurrir pues '$\sim L$' se cumple. Pero '$\sim A \vee M$' se cumple cuando al menos uno de sus componentes lo hace. Así, '$\sim A$' puede ser cierta o 'M' puede serlo, o ambas. Si '$\sim A$' fuese la que se cumple, por H1 tendríamos que '$L \vee R$' debe suceder. Esto puede ser, aun cuando 'L' falle y sea 'R' la que sea cierta. Ahora bien, como '$L \vee R$' es también el consecuente de H3, 'M' deberá ser cierta. No hemos encontrado ninguna contradicción.

Entonces, hemos visto que H1, H2 y H3 son ciertas en caso de que '$\sim A$', 'M' y 'R' se cumplan, aunque 'L' falle. Así, hay por lo menos una posibilidad en la que las hipótesis sean ciertas y la conclusión no lo sea. Por tanto, de H1, H2 y H3 no se sigue C (en caso de que sí se siguiera, debería ser cierta en todas las posibles ocasiones en que son ciertas las hipótesis).

Ejemplo 17.

Si México gana, entonces Alemania o Inglaterra pasarán a la final. Si Alemania pasa a la final, México no ganará. Si Argentina es finalista, Inglaterra no lo será. En consecuencia, si México gana, Argentina no irá a la final.

Si P: México gana

Q: Alemania pasa a la final

R: Inglaterra pasa a la final

S: Argentina es finalista

entonces el argumento queda esquematizado por:

$$\begin{array}{l} \text{H1. } P \rightarrow (Q \vee R) \\ \text{H2. } Q \rightarrow \sim P \\ \text{H3. } S \rightarrow \sim R \\ \hline \text{C. } P \rightarrow \sim S \end{array}$$

Supongamos que el antecedente de C se cumpla junto con H1, H2 y H3. Queremos ver si el consecuente de C se verifica.

Así, supongamos que 'P' sucede. Entonces, por H2, 'Q' debe ser falso, ya que '~P' no se verifica. Pero en H1, 'P' es cierta y 'Q' no lo es. Entonces 'R' debe cumplirse para que 'QwR' sea cierta. Pero si 'R' se verifica, '~R' no lo hace. Entonces, en H3, 'S' debe ser falsa para que 'S→~R' se verifique. Pero, entonces, '~S', el consecuente de C sucede cada vez que 'P' lo hace junto con H1, H2 y H3. Por tanto, C se sigue de H1, H2 y H3.

Ejemplo 18.

Si Veracruz exporta demasiados camarones, los peces grandes perecerán. Es un hecho que Veracruz exporta camarones en demasía y Japón los compra. Pero si los peces grandes perecen o la langosta escasea, entonces habrá menos divisas para el país y las poblaciones cercanas a Veracruz estarán desprotegidas. En consecuencia, habrá menos divisas para el país o las poblaciones cercanas a Veracruz estarán más desprotegidas.

Su estructura es:

H1. $R \rightarrow S$
H2. $R \wedge Q$
H3. $(S \vee R) \rightarrow (P \wedge M)$

C. $P \vee M$

donde

R: Veracruz exporta demasiados camarones
S: Los peces grandes perecen
Q: Japón compra los camarones
P: Hay menos divisas para el país
M: Las poblaciones cercanas a Veracruz estarán más desprotegidas.

Ya que la conclusión es una disyunción, no podemos auxiliarnos de ninguna parte de ella para comenzar a razonar, como cuando trabajamos con un condicional. Así, tendríamos que revisar todos los casos en que las hipótesis se cumplen para ver si C se sigue en cada uno de ellos. Pero son demasiados casos. Entonces elegimos un camino indirecto.

Supongamos que las hipótesis no son suficientes para C; es decir, supongamos que H1, H2, H3 se verifican y C no. Entonces '$P \vee M$' debe ser falso y por tanto, 'P' y 'M' deben ser falsas. Pero entonces el consecuente de H3 es falso y, por tanto, su antecedente debe serlo, es decir '$S \vee R$' debe ser falso. Pero, por H2, tanto 'R' como 'Q' deben verificarse. Así, '$S \vee R$' debe verificarse, pues 'R' lo hace. Entonces hemos llegado a un resultado contradictorio: '$S \vee R$' debe verificarse y no debe hacerlo. Así, es imposible que C falle cuando H1, H2 y H3 ocurran. Entonces H1, H2 y H3 son suficientes razones para establecer C.

Hemos expuesto ya ejemplos de argumentos y de cómo podemos analizarlos. En general, tenemos dos caminos: primero, analizar directamente todos los casos posibles en que las hipótesis se verifiquen simultáneamente para ver si la conclusión se cumple. Cuando la conclusión es un condicional, podremos auxiliarnos suponiendo adicionalmente que su antecedente ocurre para analizar si su consecuente ocurre o no. Y, si preferimos suponer siempre únicamente que las hipótesis ocurren, deberemos estudiar todas las posibilidades en que tales hipótesis se verifican.

Como en ocasiones ese proceso es largo, tenemos la posibilidad de elegir un segundo camino: suponer que las hipótesis se verifican y no así la conclusión. Si no hay ningún resultado absurdo al suponer esto, tendremos que, en efecto, la conclusión no se sigue de las hipótesis. Si encontramos un resultado absurdo o contradictorio, quiere decir que es absurdo suponer que la conclusión no se sigue de las hipótesis y, en ese caso, las hipótesis son suficientes para inferir la conclusión.

En todos los casos, se trata de ver si está justificado deducir la conclusión a partir de las hipótesis o no.

Podemos usar razonamientos análogos para resolver ciertos acertijos.

Supongamos que queremos poner a prueba la capacidad deductiva de tres personas y para ello les pedimos que formen una fila de modo que la primera persona dé la cara a la pared. Les informamos que tenemos tres sombreros blancos y dos negros y ponemos un sombrero a cada uno de manera que nadie ve el color de su sombrero, ni el de aquellos que le anteceden en la fila. Preguntamos a la tercera persona "¿De qué color es tu sombrero?" y responde "No sé". Preguntamos a la segunda persona por el color de su sombrero y responde "No sé". ¿De qué color es el sombrero de la persona que mira a la pared?

Tenemos dos hipótesis principales: las respuestas de las dos personas interrogadas. Analicemos esto para concluir cuál debe ser el color del sombrero de la primera persona.

Si la tercera persona dijo "No sé" entonces hay dos posibilidades: vio dos sombreros blancos (y el suyo es el tercer sombrero blanco o uno de los sombreros negros) o vio un sombrero blanco y uno negro (en cuyo caso su sombrero puede ser de cualquier color).

Si la segunda persona dijo "No sé", ¿qué sucede?. Si viera un sombrero negro, sabría que su sombrero es blanco y él dijo "No sé". Entonces él ve un sombrero blanco aunque no sabe cuál es el color de su sombrero.

Pero entonces la tercera persona sabe cuál es el color de su sombrero: es blanco y pudo concluir esto usando el razonamiento anterior.

Hay muchos acertijos de este tipo que podemos resolver con un análisis similar. Notemos que simplemente nos valemos de las hipótesis para llegar al resultado estudiando todas las posibilidades.

Ejercicios.

1. ¿Por qué no es válido el siguiente argumento?

$$\frac{\text{La Tierra es redonda}}{\text{La luna también lo es}}$$

2 Analizar si la conclusión se sigue necesariamente de las hipótesis en los siguientes argumentos:

a). Si tengo tiempo, estudiaré y trabajaré. Tengo tiempo o tengo ánimo para emprender nuevas actividades. No tengo tiempo. Entonces, trabajaré.

b). Si las lluvias aumentan, el caudal del los ríos crece. Si el caudal del los ríos crece, hay que construir represas que controlen el flujo del agua. No es verdad que no se construyan tales represas o que haya escasez de pozos. Por tanto, las lluvias aumentan o hay escasez de pozos.

c). Si me gusta el arte, voy a la exposición de pintura o a ver danza moderna. Si estoy enfermo o no me gusta el arte, entonces me quedo en casa. No me quedo en casa. En consecuencia, si no voy a la exposición de pintura, voy a ver danza moderna.

d). Si Alberto estudia medicina, Fernando le dará ayuda económica. Si la situación económica permanece estable, Alberto estudia medicina y Ricardo estudia computación. Si Fernando da ayuda económica a Alberto, Martha se disgustará con Fernando. Entonces, si Ricardo no estudia computación, Martha se disgustará con Fernando.

e). Mis amigos son sinceros o algunos disimulan. Pero si son honestos no deben disimular lo que sienten. Así, si mis amigos son sinceros, deben ser honestos.

f). Si Armando tiró un árbol, lo vio la policía. Armando deberá pagar una multa si lo vio la policía. Como él está en la delegación, no deberá pagar una multa. Entonces tiró un árbol y está detenido en la delegación.

g). Si voy a la fiesta, no termino de estudiar. Si es viernes, no voy al cine. Si es viernes y no termino de estudiar, entonces voy a la fiesta. En consecuencia, voy al cine.

h). Los fenómenos atmosféricos se originan si los electrones chocan entre sí. Al pasar esto último, las cargas eléctricas se polarizan o se producen grandes tensiones electromagnéticas. Si se producen grandes tensiones electromagnéticas, se producen campos magnéticos que entran en choque. Los campos magnéticos entran en choque y se producen rayos. Por tanto, si los electrones chocan entre sí, entonces se producen rayos.

i). Si Marx es un ideólogo, *El Capital* no es un buen libro. El valor de estudiar *El Capital* será poco, si y sólo si Marx es un ideólogo y Engels también. Es difícil comprender a Engels si y sólo si es un ideólogo y sus críticos no lo entienden. Si sus críticos entienden a Engels, entonces Engels es un ideólogo o es difícil comprenderlo y el valor de estudiar *El Capital* será poco. Engels es un ideólogo y no es difícil comprenderlo. En consecuencia, *El Capital* no es un buen libro.

j). Isabel opinaba que el Dr. Juárez era demasiado viejo para casarse. Si la conducta de Isabel fuera siempre coherente con sus opiniones y si opinaba que el Dr. Juárez era demasiado viejo para casarse, entonces no se casaría con él. Pero Isabel se casó con el Dr. Juárez. Así, la conducta de Isabel no es siempre coherente con sus opiniones.

k). La inmortalidad existe si y sólo si el espíritu existe. Si lo que vemos es real, la sabiduría no es tan difícil de obtener. El espíritu existe o la sabiduría no es tan difícil de obtener. Por tanto, si lo que vemos es real, la inmortalidad existe.

l). O Pedro y Jaime son de la misma edad o Pedro es mayor que Jaime. Si Pedro y Jaime son de la misma edad, entonces Elena y Pedro no tienen la misma edad. Si Pedro es mayor que Jaime, entonces Pedro es mayor que Marcia. Así que o Elena y Pedro no son de la misma edad o Pedro es mayor que Marcia.

3. Argumentos con cuantificadores

En la sección anterior trabajamos con argumentos cuya estructura podía obtenerse utilizando únicamente los conectivos lógicos y letras enunciativas; como A, P, M, etc. Pero si tenemos un argumento como

H1 Todos aprobaron geografía... (1)
C Juan aprobó geografía

y usamos letras enunciativas para simbolizarlo, obtendremos que su forma sería

$$\frac{\text{H1 P}}{\text{C Q}}$$

y esta estructura es la de un argumento incorrecto. Sin embargo, parece claro que el argumento original es tal que, a partir de sus hipótesis, se sigue necesariamente su conclusión. Para aclarar esto es necesario obtener la estructura de este argumento utilizando un lenguaje más refinado que pueda reflejar el nexo que existe entre hipótesis y conclusión. En el capítulo anterior vimos cómo utilizar un lenguaje de predicados para simbolizar enunciados semejantes a (1). Con tal lenguaje, la forma del argumento que nos interesa es:

$$\begin{array}{ll} \text{H1} & (\forall x)A^1x \\ \hline \text{C} & A^1j \end{array}$$

donde

V= el conjunto de los alumnos de un cierto grupo escolar
A^1x: x aprobó geografía
j: Juan

En esta sección veremos cómo analizar argumentos de este tipo. El análisis se efectuará siempre bajo la aplicación del criterio que establecimos desde el inicio de este capítulo para determinar su corrección o incorrección. Tal criterio refiere a todas las ocasiones posibles en que las hipótesis son verdaderas. Sabemos, que en el caso de un lenguaje de predicados, el concepto de verdad de un enunciado queda relativizado a una interpretación. Por ello, hablar de todas las ocasiones posibles en que las hipótesis son verdaderas nos remite a hablar de todas las posibles interpretaciones que verifiquen tales hipótesis. Entonces, nuestro estudio debería abarcar todas las interpretaciones donde sucediera tal verificación. Pero, en general, habrá demasiadas de éstas para poder estudiarlas a cada una. El camino para resolver esta dificultad es tomar, en abstracto, un dominio desconocido y hacer una lectura abstracta de los símbolos no lógicos que aparecen en un argumento, efectuando un análisis que, al no depender de una interpretación específica, valdrá para cualquier interpretación que cumpliera el requisito de hacer verdaderas a las hipótesis. Haremos este tipo de análisis a partir del ejemplo 24. En los ejemplos 21, 22 y 23 tomaremos la interpretación específica que se indica en cada caso[8] para ir introduciéndonos de manera intuitiva y gradual en el estudio de esta clase de argumentos.

Debemos notar que, aun en un lenguaje de predicados, existen argumentos que se comportarán como los que estudiamos en la sección anterior y que deben ser analizados como lo hicimos antes. La distinción entre estos argumentos y los que necesitan otro tipo de análisis debe ser hecha cuidadosamente con base en su estructura. En los ejemplos 19 y 20 mostramos argumentos cuyo análisis requiere de los conocimientos obtenidos en la sección anterior.

[8] En estos ejemplos será claro que el razonamiento utilizado puede extenderse para cualquier interpretación en la que las hipótesis resulten verdaderas.

Ejemplo 19.

Alguien cometió fraude, porque todas las cuentas son correctas. Su forma es:

$$\frac{\begin{array}{l} A \to B \\ A \end{array}}{B}$$

donde

A: Todas las cuentas son correctas

B: Alguien cometió fraude.

Ejemplo 20.

Si alguien es pobre y feliz, entonces todos los ricos son poderosos. Pero existen ricos que no son poderosos. Entonces todos los pobres son infelices.

Su forma es:

$$\frac{\begin{array}{l} (\exists x)(P^1x \wedge F^1x)(\forall y)(R^1y \to M^1y) \\ (\exists y)(R^1y \wedge \sim M^1y) \end{array}}{(\forall x)(P^1x \to \sim F^1x)}$$

donde

P^1x: x es pobre

F^1x: x es feliz

R^1x: x es rico

M^1x: x es poderoso

O bien

$$\frac{\begin{array}{c} A \to B \\ \sim B \end{array}}{\sim A}$$

pues $\sim(\forall y)(R^1y \to M^1y)\int(\$y)(R^1y \wedge \sim M^1y)$: $\sim B$

$\sim(\exists x)(P^1x \wedge F^1x) \equiv (\forall x)(\sim P^1x \vee \sim F^1x)$: $\sim A$

$\equiv (\forall x)(P^1x \to \sim F^1x)$:$\sim A$

Ambas estructuras fueron analizadas en los ejemplos 2 y 3.

En lo que sigue, veremos argumentos que requieren de interpretaciones para su análisis.

Ejemplo 21.

Mi perro Toby es pequeño porque es maltés

Su estructura es:

$$\frac{\begin{array}{l} (\forall x)(M^1x \to P^1x) \\ M^1a \end{array}}{P^1a}$$

Dominio: {z|z es un perro}
M^1x: x es maltés
P^1x: x es pequeño
a: Toby

La primera hipótesis nos dice que para todo elemento del universo tendremos que si es maltés, debe ser pequeño. Si no es maltés, no sabemos nada. Pero de Toby sí sabemos que es maltés, entonces sabemos que Toby debe ser pequeño.

Entonces la conclusión sí se sigue de las hipótesis.

Ejemplo 22.

Todos los parientes de José son güeros porque son de Los Altos de Jalisco.

Su estructura es:

$$\begin{array}{l} \text{H1. } (\forall x)(A^1x \rightarrow G^1x) \\ \text{H2. } (\forall x)(P^2xj \rightarrow A^1x) \\ \hline \text{C. } (\forall x)(P^2xj \rightarrow G^1x) \end{array}$$

donde Dominio={z|z es un ser humano}
A^1x: x es de Los Altos de Jalisco
G^1x: x es güero
P^2xy: x es pariente de y
j: José

De todos los seres humanos sólo algunos son parientes de José. Para aquellos que sí lo sean, tendremos por H2 que son de los “Altos de Jalisco”. Pero todos los “altos de Jalisco” son güeros por H1, entonces de todos los seres humanos tendremos que si son parientes de José, deberán ser güeros.

H1 y H2 son suficientes para llegar a C.

Ejemplo 23.

Si Jovita estuvo aquí, alguien estuvo aquí.

$$\begin{array}{l} \text{H1. } V^1j \\ \hline \text{C. } (\exists x)(V^1x) \end{array}$$

con Dominio={z|z es un ser humano}
y V^1x: x estuvo aquí
j: Jovita

V^1j nos dice que Jovita estuvo aquí, pero Jovita es uno de tantos elementos del dominio, entonces podemos afirmar que algún elemento del dominio estuvo aquí. Así, llegamos a C.[9]

Ejemplo 24.

Ningún artista es científico. Todos los artistas son vanidosos. Así, ningún artista vanidoso es científico.

Su forma es:

$$\begin{array}{l} \text{H1. } (\forall x)(A^1x \rightarrow \sim B^1x) \\ \text{H2. } (\forall x)(A^1x \rightarrow R^1x) \\ \hline \text{C. } (\forall x)((A^1x \wedge R^1x) \rightarrow \sim B^1x) \end{array}$$

Dominio={z|z es un ser humano}

A^1x: x es artista
B^1x: x es científico
R^1x: x es vanidoso

Sea D cualquier dominio no vacío. H1 y H2 nos informan que cualquier individuo del dominio que posea la propiedad denotada por 'A^1' deberá poseer la propiedad 'R^1' y no deberá cumplir la propiedad 'B^1'. Si tomamos los individuos que cumplan tanto 'A^1' como 'R^1', en especial cumplirán 'A^1' y, por tanto, no poseen la propiedad 'B^1'. De las hipótesis se sigue la conclusión.

Ejemplo 25.

Algunos de los que fueron al congreso salieron al extranjero, porque todos los que fueron a ese evento obtuvieron un diploma y algunos diplomados salieron del país. Tenemos:

$$\begin{array}{l} \text{H1. } (\forall x)(F^1x \rightarrow D^1x) \\ \text{H2. } (\exists x)(D^1x \wedge S^1x) \\ \hline \text{C. } (\exists x)((F^1x \wedge S^1x) \end{array}$$

Dominio={z|z es un ser humano}

F^1x: x fue al congreso
D^1x: x obtuvo diploma
S^1x: x fue al extranjero

Consideremos un dominio cualquiera. La primera hipótesis indica que, entre todas las entidades del universo, aquellas que cumplan 'F^1' deberán cumplir 'D^1', aunque es posible que haya muchos más individuos que cumplan 'D^1' que los que cumplan 'F^1'.

[9] Es claro que este análisis podría haberse efectuado de manera similar con una interpretación cualquiera.

La segunda hipótesis nos dice que algunos individuos cumplen 'D^1' y 'S^1'. Los invididuos que cumplen 'D^1' y 'S^1' pueden ser de dos tipos: aquéllos que cumplen 'D^1', porque cumplen 'F^1', y aquellos que sin cumplir 'F^1' cumplen 'D^1'.

Si tomamos la primera posibilidad, habrá individuos que cumplan 'F^1' y 'S^1'.

Si tomamos la segunda opción, no podemos concluir que algunos individuos cumplan 'F^1' y 'S^1'.

Entonces no podemos concluir C a partir de H1 y H2. Esto quedará más claro con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 26.

H1. $(\exists x)(M^1x \rightarrow H^1x)$

H2. $(\exists x)(H^1x \wedge R^1x)$

C. $(\exists x)((M^1x \wedge R^1x)$

donde: Dominio={x|x es un ser vivo}

M^1x: x es mujer

H^1x: x es humano

R^1x: x es varón

Este argumento posee la misma estructura que el del ejemplo anterior. Y vemos que del hecho de que las mujeres sean seres humanos (H1) y de que algunos seres humanos sean varones (H2) no se sigue que algunas mujeres sean varones (C). Así, existe alguna interpretación en que las hipótesis son verdaderas y la conclusión falsa. El argumento es incorrecto.

Ejemplo 27.

Todos los entrenadores de fútbol son irritables. Algunos entrenadores de fútbol son extranjeros. Así que algunos extranjeros son irritables.

Sean:

Dominio={z|z es un ser humano}

F^1x: x es entrenador de fútbol

I^1x: x es irritable

M^1x: x es extranjero

La forma del argumento es:

H1. $(\forall x)(F^1x \rightarrow I^1x)$

H2. $(\exists x)(F^1x \wedge M^1x)$

C. $(\exists x)((M^1x \wedge I^1x)$

Todos aquellos objetos que cumplan 'F^1' deben cumplir 'I^1' (por H1). Pero de entre todos los que cumplen 'F^1', hay algunos que cumplen 'M^1' (por H2). Tomemos estos de que nos habla H2. Tales objetos cumplen 'M^1' y 'F^1' y, por cumplir 'F^1', deben cumplir 'I^1'. Así, estos cumplirán tanto 'M^1' como 'I^1'. Entonces, C se sigue de H1 y H2.

Ejemplo 28.

Si un número es mayor que otro y éste a su vez es mayor que un tercero, entonces el número que mencionamos primero es mayor que el tercer número.

Sea M^2xy: x es mayor que y

El argumento se formaliza como:

$$(\forall x)((\forall y)(\forall z)(M^2xy \wedge M^2yz) \rightarrow M^2xz)$$

con Dominio={z|z es un número}

Puede resultar extraño que el argumento se exprese a través de un único enunciado. En ocasiones así sucede. En estos casos, el enunciado es la conclusión y no hay hipótesis.

Veamos si la conclusión es verdadera. Como no hay hipótesis, debemos hacer esto directamente; es decir, ver si tal enunciado es siempre verdadero (pues al no haber hipótesis no hay condiciones para su verdad.)

¿Será cierto siempre, que, para cualesquiera tres objetos a, b, c de cualquier dominio, se tenga que si a se relaciona con b y b con c, entonces necesariamente a se relaciona con c?

En el caso en que la relación sea '- es mayor que -', y el dominio sean los números naturales (o,i,z...), por ejemplo, sí se cumple. Pero esto no es verdad para cualquier relación y para cualquier dominio posibles. Por ejemplo, si la relación fuera '- es amigo de -', y el dominio los seres humanos, no resultaría un enunciado verdadero. Pues es claro que:

'a es amigo de b y b es amigo de c' puede ser verdadero sin que sea verdadero 'a es amigo de c'.

Entonces no siempre se cumple C y por tanto el argumento no es válido.

Ejercicio:

Probar que el argumento 'Si todos son irritables entonces algunos son irritables' es un argumento válido. Es decir, probar que la conclusión '$(\forall x)I^1x \rightarrow (\exists x)I^1x$' es siempre verdadera. Para cualquier dominio y cualquiera que sea la interpretación de 'I^1'.

Ejemplo 29.

Si alguien ama a todos, todos son amados por alguien.

Sea A^2xy: x ama a y   Dominio={z|z es un ser humano}

El argumento queda:

$$\begin{array}{l} \text{H1. } (\exists x)(\forall y)(A^2xy) \\ \hline \text{C. } (\forall x)((\exists x)(A^2xy) \end{array}$$

Pensemos en cualquier universo (o dominio). La hipótesis afirma que hay por lo menos un individuo de ese universo que está relacionado con todo individuo de ese universo (incluyéndose a él mismo). Entonces, si tomamos cualquier individuo b del universo, ¿hay necesariamente alguien que esté relacionado con él? La respuesta es afirmativa, pues, por lo menos, aquel que se relacionaba con todos estará relacionado con b. Entonces de H1 se sigue necesariamente C y el argumento es correcto

Ejemplo 30.
Si alguien ama a todos, todos aman a alguien.
Sean A^2xy: x ama a y Dominio={x|x es un ser humano}
La forma es:

$$\frac{\text{H1. } (\exists x)(\forall y)(A^2xy)}{\text{C. } (\forall x)((\exists x)(A^2xy)}$$

Supongamos que H1 es verdadera. Por tanto hay un elemento del dominio que está relacionado con todos (incluyéndose a él). ¿De ello se sigue que todos están relacionados con alguien? Veamos que no es así.

Supongamos que el dominio está constituido por los seres humanos que vivan en un pequeño pueblo donde hay un solo médico. Existen en México muchas comunidades con esas características. Supongamos que la relación es ‘x atiende médicamente a y’.

En esa situación, H1 es verdadera, pues hay alguien del dominio que atiende médicamente a todos los individuos (incluyendo al doctor mismo). Sin embargo, no es verdad que todo individuo atienda médicamente a algún otro, pues sólo el médico lo hace. Entonces C no se sigue de H1.

Observaciones

Notemos que en el ejemplo 28 hemos admitido como argumento a un solo enunciado.

En el capítulo I definimos ‘argumento’ como un conjunto cualquiera de enunciados. De acuerdo con esta definición, los siguientes son argumentos:

a) El Sol produce radiación electromagnética
b) Si hoy llueve, hoy llueve.
c) Agustín Lara nació en Veracruz
   Silvestre Revueltas nació en Durango.
   No tuvo éxito el golpe de Estado que hubo en Rusia en agosto de 1991
   El Tratado de Libre Comercio ha provocado cambios económicos en México

d) La libertad del hombre es una ilusión. Ya que cada uno es constantemente esclavo de los humores que se suscitan en él y cuya manifestación al exterior produce resultados contrarios a sus deseos, y esto lo esclaviza.

De los ejemplos anteriores sólo reconoceríamos como argumento al último —independientemente de que estemos de acuerdo con él. Esto es así, porque todos sus enunciados hablan del mismo tema, porque fácilmente reconocemos que hay conectivos lógicos en ellos y entre ellos ('ya que', 'y', etc.) y porque claramente hay una conclusión.

Sin embargo, nuestra definición permite que los ejemplos a, b y c sean argumentos. Los argumentos a) y c) resultan incorrectos pues poseen la forma.

a) C. P

c) H1. P
H2. Q
H3. ~R
―――――
C. S

El argumento b) es válido pues posee la forma

$$C.\ P \rightarrow P$$

Es claro que en los ejemplos a) y c) podemos encontrar casos en que las hipótesis sean verdaderas y la conclusión falsa. En caso de que no haya hipótesis, bastará con ver si la conclusión puede ser falsa.

En el caso b), la conclusión es necesariamente verdadera (es una tautología) y, por tanto, el argumento es válido.

Si bien estos casos límite son admitidos como argumentos, no los estudiaremos. Nuestro interés se centra, como hemos visto, en casos similares al ejemplo d), ya que son los que utilizamos ordinariamente.

Hemos dado ya una serie de ejemplos de argumentos y hemos expuesto cómo analizarlos para mostrar (y saber) si son válidos o no. El análisis se basa estrictamente en la estructura sintáctica que poseen y, entonces al estudiar un argumento estamos estudiando todos los argumentos que posean la misma estructura. Así, al no tomar en cuenta el significado que contiene cada argumentación, obtenemos resultados generales. Esta es una de las grandes ventajas que posee el tratamiento lógico de los argumentos. Otra ventaja es que al analizar la estructura sintáctica de ellos, adquirimos cierta visión de las relaciones que existen entre los enunciados de una argumentación.

Ejercicios

1. Para cada uno de los siguientes argumentos se ofrece un razonamiento que pretende establecer si son correctos o no. ¿Cuál es el error de cada razonamiento expuesto? Explicar detalladamente su respuesta.
   a) Argumento: Hermann Hesse nació antes que Fernando Pessoa y éste nació antes que Jorge Luis Borges. En consecuencia, Hesse nació antes que Borges.
   Razonamiento: Sean a, b y c cualesquiera tres seres humanos. Entonces, si a nació antes que b y b nació antes que c, es claro que a nació antes que c. Por tanto, cada vez que se verifican las hipótesis, la conclusión también lo hace. Así, el argumento es correcto.
   a) Argumento: "Todos los hombres son dioses y todos los dioses son inmortales. Por tanto, todos los hombres son inmortales".
   Razonamiento: "Ya que tanto las premisas como la conclusión son falsas, el argumento es incorrecto".

2. Analiza si las hipótesis son suficientes para establecer la conclusión, en los siguientes argumentos.
   a) Cualquier amigo de José es amigo de Humberto. Por tanto, cualquiera que conozca a un amigo de José, conoce a un amigo de Humberto.
   b) Los coches con buen motor son seguros para el conductor y no despiden contaminantes. Entonces, si un coche es nuevo, tendremos que los coches nuevos tienen buen motor y no despiden contaminantes.
   c) Todos los perros falderos son mansos. Por tanto, si algunos perros son excitables y ningún perro excitable es manso, los perros excitables no son falderos.
   d) Nadie respeta a una persona que no se ama a sí misma. Nadie procurará a una persona que no se ama a sí misma. Así, nadie procurará a una persona que no se ama a sí misma.
   e) (Lewis Carroll) Ningún pato quiere bailar. No hay ningún oficial que no quiera bailar. Todas mis aves de corral son patos. Entonces, ninguna de mis aves de corral es oficial.
   f) Cada quien es su propio juez. Por tanto, si alguien juzga a alguien, debe juzgarse a sí mismo.
   g) Todos los múltiplos de 3 son múltiplos de 9. Así que si un número es múltiplo de 9, es múltiplo de 3.

h) Todas las computadoras son inhumanas, porque todas las máquinas son inhumanas y todas las computadoras son máquinas.
i) Todos los libros son interesantes. Ningún periódico es libro. Entonces, ningún periódico es interesante.
j) Todo filósofo empirista admira a Hume. Algunos filósofos idealistas no respetan a nadie que admire a Hume. En consecuencia, algunos filósofos idealistas no respetan a ningún filósofo empirista.
k) Todos los órganos del cuerpo son necesarios. El corazón es un órgano del cuerpo. Así que el corazón es necesario.

IV
Métodos de Prueba

En este capítulo vamos a retomar conceptos vistos en los dos capítulos anteriores para tratarlos con más detalle y de una manera más rigurosa.

En la primera sección se clasifican las fórmulas del lenguaje proposicional en tautologías, contradicciones formales y fórmulas contingentes. También se analiza la relación de equivalencia lógica entre fórmulas de este lenguaje; se demuestran algunas propiedades de estas nociones y se dan ejemplos.

En la segunda sección se estudian métodos de demostración para la validez y la invalidez de argumentos en lenguajes proposicionales.

En la tercera sección se retoman todos estos conceptos para el lenguaje de predicados y en las últimas secciones se estudia el concepto de consistencia, se le relaciona con la corrección o validez de un argumento y se proporciona otro método para demostrar la corrección o incorrección de un argumento vía la consistencia.

1. Nociones semánticas para lenguajes proposicionales

Sea L el lenguaje proposicional visto en el Capítulo II. L tiene, pues, un conjunto de símbolos (letras mayúsculas, conectivos y paréntesis) y un conjunto de reglas de formación que permiten decidir cuándo una lista finita de símbolos de L es una forma proposicional o no.

De ahora en adelante llamaremos *fórmulas bien formadas*, *L-fórmulas* o simplemente *fórmulas* a las formas proposicionales.

Recordemos también que tenemos un método (a saber, las tablas de verdad) que nos permite obtener el valor de verdad de una fórmula a partir del valor de verdad de las letras proposicionales que aparecen en ella.

Si tenemos una fórmula α y construímos su tabla de verdad, podemos pensar en cada renglón de la tabla como una *interpretación* de los símbolos proposicionales de α. Cada renglón asigna a cada letra que aparece en A un valor de verdad y representa, por lo tanto, una situación posible. La tabla completa analiza el valor de verdad de α bajo todas las situaciones posibles.

Podemos generalizar esta idea y pensar en interpretar no solamente las letras proposicionales que aparecen en una fórmula sino todas las letras proposicionales del lenguaje. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 1

Una *interpretación* para L es una asignación de valores de verdad a todas las letras proposicionales de L.

Tal asignación puede ser representada por medio de una función

$$I:Pr \to \{V,F\}$$

donde Pr es el conjunto de letras proposicionales de L. Si P es una letra proposicional de L, I(P)=V (resp. F) quiere decir que la letra P se está interpretando como un enunciado verdadero (resp. falso).

El método de tablas de verdad garantiza que cualquier asignación de valores de verdad para las letras de L se puede extender a una asignación de valores de verdad para todas las fórmulas de L. Escribimos $I(\alpha)$ para denotar el valor de verdad de una fórmula bajo la asignación I.

Ejemplo:

Consideremos la fórmula $P \to (Q \vee \sim P)$, cuya tabla de verdad es la siguiente:

P	Q	$P \to (Q \vee \sim P)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Si I_1 es la interpretación tal que $I_1(A)=V$ para toda letra proposicional A, entonces I_1 está representada por el primer renglón de la tabla de verdad anterior y, por lo tanto, $I_1(P \to (Q \vee \sim P))=V$. Análogamente, si I_2 es la interpretación tal que $I_2(Q)=F$ y $I_2(A)=V$ para toda letra proposicional A distinta de Q, entonces $I_2(P \to (Q \vee \sim P))=F$, pues esta asignación está representada por el segundo renglón de la tabla.

Tautologías

La definición 5 del Capítulo II puede ser reescrita de la siguiente manera:

Definición 2

Una fórmula bien formada α de L es una *tautología* si y sólo si $I(\alpha)=V$ para cualquier interpretación para L.

Dicho de otra manera, una tautología es una fórmula verdadera bajo cualquier interpretación para L. Si α es una tautología, su verdad no depende de cómo se interpreten las letras proposicionales que la componen, a es verdadera en virtud de su *forma lógica*.

En los ejemplos que siguen el símbolo □ indica el final de la justificación o demostración.

Ejemplos

1. Ninguna letra proposicional es una tautología.

Esto se debe a que podemos definir una asignación I tal que I(P)=F para toda letra proposicional P. □

2. (P→P) es una tautología.

Porque si no lo fuera existiría una interpretación I tal que I(P→P)=F, y entonces, por definición de la tabla del condicional, se tendría que el antecedente es verdadero y el consecuente es falso bajo I, esto es, I(P)=V=F. Esto es imposible y, por lo tanto, no puede existir tal asignación. □

3. (P→(P∨Q)) es una tautología.

Esto se puede ver tomando una asignación arbitraria I y demostrando que bajo I la fórmula P→(P∨Q) es verdadera. Como I es una interpretación cualquiera, no sabemos qué valor de verdad le asigna a la letra P, pero sólo hay dos posibilidades: I(P)=V o I(P)=F. En el primer caso la fórmula I(P→(P∨Q))=V, porque el consecuente es verdadero bajo I, en el segundo, la fórmula es verdadera, porque el antecedente es falso. En ambos casos se obtuvo que la fórmula P→(P∨Q) es verdadera bajo I y, por lo tanto, podemos concluír que es una tautología.

Hay varias maneras de demostrar que una fórmula α es una tautología. Se puede construir su tabla de verdad completa y verificar que en todos sus renglones aparece el valor V. Este método es seguro, pero no muy práctico si se tiene una fórmula con más de 4 letras proposicionales, en cuyo caso se tendrían que calcular por lo menos 32 renglones. Incluso la verificación de que una tabla de verdad ha sido correctamente elaborada es muy fatigosa, aún en casos relativamente simples. Los métodos aplicados en los ejemplos (2) y (3) reducen mucho el trabajo.

En el ejemplo (2) supusimos que había una interpretación para L bajo la cual la fórmula fuera falsa. A partir de esta suposición llegamos a una contradicción. Como una contradicción es inaceptable, tuvimos que desechar la suposición y así llegar al resultado deseado. Este método de prueba es el llamado *Método por Reducción al Absurdo*. Se utiliza constantemente en muchos contextos; posteriormente veremos cómo se utiliza en el análisis de argumentos. La técnica general para demostrar algo por reducción al absurdo consiste en suponer lo contrario de lo que se quiere probar y, a partir de esa suposición, llegar a una contradicción. En nuestro caso, lo que queríamos probar es que una fórmula α era una tautología, es decir, que bajo toda interpretación I se tenía que I(α)=V. Para demostrar esto, supusimos que había una interpretación para L bajo la cual α era falsa, y con esta nueva suposición llegamos a una contradicción, con lo que la demostración quedó terminada.

En el ejemplo (3) procedimos directamente. Para demostrar que la fórmula era verdadera bajo cualquier interpretación, tomamos una interpretación cualquiera y, analizando todas las posibilidades, concluímos que, en efecto, la fórmula era verdadera bajo esa interpretación. Como la interpretación elegida era arbitraria (es decir, no se supuso nada especial sobre ella; sólo supusimos que era una interpretación y que por lo tanto a cada letra de L le asignaba un único valor de verdad), pudimos concluír que lo que valía para ella valía para cualquier interpretación y, por lo tanto, la fórmula era verdadera bajo cualquier interpretación. Este método de demostración, en el que no se incluyen hipótesis nuevas, sino que de las hipótesis que se tienen se infiere directamente la conclusión es el *Método Directo*.

En el ejemplo (1) la situación era distinta: se trataba de probar que cierta fórmula no era una tautología. En este caso lo que se quería demostrar era que la fórmula no era verdadera bajo toda interpretación. Claramente bastaba exhibir (definir) una interpretación bajo la cual la fórmula en cuestión fuera falsa. A este método de demostración se le llama *demostración por contraejemplo*, y se la utiliza para demostrar la falsedad de afirmaciones generales.

En la siguiente sección se dan muchos ejemplos de demostraciones por reducción al absurdo, por método directo y por contraejemplo para que el lector se familiarice con estos métodos de demostración.

Ejercicios

1. Probar que las siguientes fórmulas de L son tautologías. (Se pueden construir sus tablas de verdad o hacer demostraciones por método directo o por reducción al absurdo).
   a) $(P\to Q)\to((Q\to R)\to(P\to R))$ Principio del silogismo.
   b) $P\vee{\sim}P$ Ley del tercero excluido
   c) ${\sim}(P\wedge{\sim}P)$ Principio de la no contradicción
   d) $(P\wedge Q)\to P$
   e) ${\sim}P\to(P\to Q)$ (De algo falso se sigue cualquier cosa)
   f) $P\to(Q\to P)$ (Lo verdadero se sigue de cualquier cosa)
2. Probar, por medio de un contraejemplo, que las siguientes fórmulas no son tautologías.
   a) $(P\vee Q)\to P$
   b) $P\to(P\wedge Q)$
   c) ${\sim}P\to(Q\to P)$
3. Decir cuál es el error en la siguiente demostración de que $((P\vee Q)\wedge(P\leftrightarrow Q))\to(P\wedge Q)$ es una tautología:

Procedemos por reducción al absurdo y suponemos que la fórmula en cuestión no es una tautología. Entonces existe una interpretación I tal que:

1. $I[(P \vee Q)\ (P \wedge Q)]=V$ y
2. $I(P \wedge Q)=F$.

   De (2), se tienen varios casos.

Caso a. $I(P)=I(Q)=F$.

En este caso $I(P \vee Q)=F$ y $I[(P \vee Q) \wedge (P \leftrightarrow Q)]=F$. Esto contradice (1) y, por lo tanto es imposible.

Caso b. $I(P)=V$ e $I(Q)=F$.

Por (1), tenemos que $I(P \leftrightarrow Q)=V$. Pero los valores I(P) e I (Q) tendrían que hacer falsa esta formula por lo tanto, el caso es imposible.

Caso c. $I(A)=F$ e $I(Q)=V$. Análogo al anterior.

A continuación haremos algunas observaciones cuyo objetivo es ilustrar tanto el concepto de tautología como los métodos de demostración.

Proposición 1

(1) Si α es una tautología entonces también lo es $\alpha \vee \beta$, para cualquier fórmula β de L.

(2) Si α es una tautología entonces $\sim\alpha$ no lo es.

(3) Del hecho de que una fórmula α sea una tautología no se sigue que $\alpha \wedge \beta$ lo sea.

Demostración.

(1) (Por reducción al absurdo)

Sea α una tautología y supongamos que $\alpha \vee \beta$ no es una tautología. Entonces existe una interpretación I tal que $I(\alpha \vee \beta)=F$. Pero por definición de la tabla de la disyunción esto implica que $I(\alpha)=F$, lo que contradice la hipótesis de que A es una tautología, por lo tanto, no puede existir tal I. □

(2) (Por método directo)

Sea I una interpretación arbitraria para L. Como α es una tautología tenemos que $I(\alpha)=V$, pero, entonces, $I(\sim\alpha)=F$, por definición de la tabla de la negación. Por lo tanto $\sim\alpha$ no es una tautología. □

(3) (Por contraejemplo)

Sea α una tautología y sea B una letra proposicional de L. Sea I una interpretación tal que $I(B)=F$ (esta interpretación existe porque cualquier asignación de valores de verdad para las letras es una interpretación). Bajo esta interpretación $\alpha \wedge B$ es falsa y por lo tanto la fórmula $\alpha \wedge B$ no es una tautología. □

Ejercicios

Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. (Justificar su respuesta)

a) Si **a**$\vee$**b** es una tautología entonces **a** es una tautología o **b** es una tautología.
b) Si **a**$\wedge$**b** es una tautología entonces también lo son **a** y **b**.
c) Si **a** y **b** son tautologías, entonces también lo es la fórmula **a**$\leftrightarrow$**b**.
d) Si ~**a** no es una tautología, entonces **a** sí es una tautología.
e) Se puede construír una tautología en la que aparezcan exactamente 10 letras proposicionales.

Contradicciones

Definición 3

Una fórmula de L es una *contradicción formal* si es falsa bajo cualquier interpretación para L. La falsedad de una contradicción no es accidental, se debe a su forma lógica.

Ejemplos

(4) P$\wedge$~P es una contradicción.

Esto se debe a que cualquier interpretación para L que haga verdadera a la letra P tiene que hacer falsa a la fórmula ~P, por la tabla de la negación. Por lo tanto, la conjunción nunca puede ser verdadera. □

(5) ~(P→Q) $\wedge$~P es una contradicción.

Supongamos que no lo fuera. Entonces existe una interpretación I bajo la cual la fórmula es verdadera, como se trata de un conjunción, esto implica que I(~P)=V y también I(-(P→Q))=V. Por la tabla de la negación, tenemos que I(P)=F, pero esto implica que I(P→Q)=V. Esta contradicción nos lleva a concluír que tal asignación no puede existir y, por lo tanto, la fórmula es una contradicción. □

(6) ~P→P no es una contradicción.

Basta exhibir una asignación I tal que I(~P→P)=V. Sea I una asignación tal que I(P)=V. Entonces todo condicional que tenga a P como consecuente será verdadero bajo esta asignación, en particular I(~P→P)=V.

Proposición 2

Si α es una tautología entonces ~α es una contradicción.

Demostración.

Sea α una tautología y sea I una interpretación arbitraria para L. Entonces I(α)=V y, por la tabla de verdad para la negación, tenemos que I(~α)=F. Como I es cualquier interpretación, concluímos que ~α es una contradicción. □

Ejercicios

1. Probar que si es **a** una contradicción entonces ~**a** es una tautología.
2. Probar que si **a** es una contradicción entonces **a**→**b** es una tautología para cualquier fórmula **b** de L.

3. Decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justificar su respuesta.
   a). Si $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ son contradicciones entonces $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ también.
   b). Si $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ es una contradicción entonces, **a** y **b** lo son.
   c). Si $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ es una contradicción entonces, o **a** es una contradicción o **b** es una contradicción.
   d). Si alguna de las fórmulas **a** o **b** es una contradicción entonces también lo es $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{b}$.

Fórmulas contingentes

La mayoría de las fórmulas de L no son tautologías ni contradicciones. Esto es, son verdaderas bajo algunas interpretaciones de L y falsas bajo otras. Estas fórmulas son las *fórmulas contingentes*. Por ejemplo, las siguientes fórmulas son todas contingentes: P, $P \vee Q$, $P \leftrightarrow Q$, $(\sim P \wedge Q) \rightarrow R$.

Para demostrar que una fórmula es contingente se tienen que exhibir dos interpretaciones para L, una de las cuales haga verdadera a la fórmula y la otra falsa. Para demostrar que una fórmula no es contingente hay que demostrar que es una tautología o una contradicción.

Ejemplos

(7) Toda letra proposicional es contingente.

Sea P una letra proposicional de L y sean I_1, I_2 dos interpretaciones para L, tales que $I_1(P)=V$ y $I_2(P)=F$. No importa el valor de verdad que estas interpretaciones asignen a las demás letras proposicionales (se puede definir, por ejemplo, que las demás letras tengan el valor V bajo ambas interpretaciones.) I_1 prueba que P no es una contradicción, mientras que I2 demuestra que P no es una tautología, por lo tanto, P es contingente. □

(8) $P \rightarrow (Q \wedge R)$ es una fórmula contingente

Tenemos que exhibir dos interpretaciones, una de las cuales haga falsa a la fórmula y otra que la haga verdadera. Para la primera necesitamos que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso. Sea I cualquier interpretación tal que $I(P)=V$ y $I(Q)=I(R)=F$. Entonces $I(Q \wedge R)=F$ y $I(P)=V$ y, por lo tanto, $I((P \rightarrow (Q \wedge R))=F$. Para la segunda basta considerar cualquier interpretación que haga falsa a P, pues todo condicional con antecedente falso es verdadero. □

Observación: Las definiciones que hemos dado aquí de contradicción y fórmula contingente son reformulaciones de las definiciones dadas en el capítulo II.

Ejercicios

1. Probar que una fórmula **a** es contingente si y sólo si ~**a** también lo es.

2. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificar su respuesta:
   a). Si **a** es contingente y **b** es una tautología entonces **a**$\rightarrow$**b** es tautología.
   b). Si **a** es contingente y **b** es una tautología entonces **a**$\wedge$**b** es contingente.
   c). Si **a** es contingente y **b** es una tautología entonces **a**$\vee$**b** es tautología.
   d). Si **a** es contingente y **b** es una tautología entonces **a**$\leftrightarrow$**b** es contingente.

Equivalencia Lógica

Definición 4

Dos fórmulas de L son *lógicamente equivalentes* si cualquier interpretación para L les asigna el mismo valor de verdad.

Esto no quiere decir que ambas sean siempre falsas o siempre verdaderas (aunque, desde luego, todas las tautologías son lógicamente equivalentes, al igual que todas las contradicciones), significa, más bien, que en cualquier situación posible, si una es verdadera, la otra también y viceversa.

Cuando dos fórmulas α y β son lógicamente equivalentes, denotamos este hecho por:

$$\alpha \equiv \beta$$

Ejemplos

(9) $A \equiv \sim\sim A$

En este caso lo más fácil es calcular la tabla de verdad de $\sim\sim A$ y verificar que su valor de verdad coincide en ambos renglones con el de A. □

(10) $\sim(P \wedge Q) \equiv (\sim P \vee \sim Q)$

Sea I una interpretación para L. Probaremos por método directo que $I(\sim(P\wedge Q))=I(\sim P\vee\sim Q)$. Supongamos que $I(\sim(P\wedge Q))=F$, entonces, por la tabla de la negación, $I(P\wedge Q)=V$, de donde se sigue que $I(P)=I(Q)=V$. Por lo tanto, $I(\sim P)=I(\sim Q)=F$. De esto último se sigue que $I(\sim P\vee\sim Q)=F$. Supongamos ahora que $I(\sim(P\wedge Q))=V$. Entonces $I(P\wedge Q)=F$, y tenemos dos posibilidades: $I(P)=F$ o $I(Q)=F$. En el primer caso, tenemos que $I(\sim P)=V$ y, por lo tanto, $I(\sim P\vee\sim Q)=V$. En el segundo, tenemos que $I(\sim Q)=V$ y, por lo tanto, $I(\sim P\vee\sim Q)=V$. □

El lector atento habrá notado que hemos dado una definición de equivalencia lógica distinta a la dada en el capítulo II; la siguiente proposición muestra que ambas definiciones son equivalentes.

Proposición 3

Sean α y β dos fórmulas de L. Entonces $\alpha\equiv\beta$ si y sólo si $\alpha\leftrightarrow\beta$ es una tautología.

Demostración.

(Por reducción al absurdo)

Probamos primero que si $\alpha\equiv\beta$ entonces $\alpha\leftrightarrow\beta$ es una tautología. Supongamos que no. Entonces existe una interpretación I tal que $I(\alpha\leftrightarrow\beta)=F$, por la tabla de verdad de $\leftrightarrow$, esto quiere decir que $I(\alpha)$ es diferente de $I(\beta)$, pero esto contradice la hipótesis de que $\alpha\equiv\beta$.

Para probar que si $\alpha\leftrightarrow\beta$ es una tautología, entonces $\alpha\equiv\beta$ por reducción al absurdo suponemos, con la esperanza de llegar a una contradicción, que α y β no son lógicamente equivalentes. Esto quiere decir que hay una interpretación I que asigna a α y a β valores de verdad distintos, entonces $I(\alpha\leftrightarrow\beta)=F$ y esto contradice la hipótesis. □

Ejercicios

1. Probar las siguientes equivalencias lógicas:
   - a). $\mathbf{a}\vee(\mathbf{b}\wedge\mathbf{g})\equiv(\mathbf{a}\vee\mathbf{b})\wedge(\mathbf{a}\vee\mathbf{g})$
   - b). $\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\vee\mathbf{g})\equiv(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\vee(\mathbf{a}\wedge\mathbf{g})$
   - c). $\sim(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\equiv\mathbf{a}\sim\mathbf{b}$
   - d). $\sim(\mathbf{a}\vee\mathbf{b})\equiv\sim\mathbf{a}\wedge\sim\mathbf{b}$
2. Demostrar las siguientes afirmaciones:
   - a). Cualesquiera dos tautologías son lógicamente equivalentes.
   - b). Cualesquiera dos contradicciones son lógicamente equivalentes.
   - c). Si **a** y **b** son dos fórmulas lógicamente equivalentes entonces $\sim\mathbf{a}\equiv\sim\mathbf{b}$.
   - d). Si $\mathbf{a}\rightarrow\mathbf{b}$ y **a** son tautologías, entonces también **b** lo es.

2. MÉTODOS DE PRUEBA PARA LA VALIDEZ Y LA INVALIDEZ DE ARGUMENTOS EN LENGUAJES PROPOSICIONALES

En el capítulo anterior se analizaron argumentos y se vio cuándo son correctos, esto es, cuándo las hipótesis son suficientes para garantizar la conclusión. El enfoque era informal e intuitivo. En esta sección vamos a sistematizar lo aprendido en capítulos anteriores. Vamos a dar definiciones rigurosas de algunos conceptos importantes y vamos a estudiar distintas formas de demostrar que un argumento es correcto o incorrecto.

Sea L el lenguaje proposicional. Recordemos que un *argumento* en L es una sucesión finita de fórmulas de L, la última de las cuales es la conclusión del argumento. Las otras son las hipótesis o premisas del argumento. Un argumento es *correcto* si es imposible que, siendo todas las hipótesis verdaderas, la conclusión sea falsa.

Con la terminología de la sección anterior podemos reescribir esta ultima definición de la siguiente manera:

Definición 1

Un argumento en L es *correcto* si no existe ninguna interpretación para L bajo la cual todas las premisas del argumento sean verdaderas y la conclusión falsa.

Directamente de la definición anterior se sigue que un argumento es incorrecto si es posible que siendo todas sus premisas verdaderas, la conclusion sea falsa, es decir, cuando exista alguna interpretación para L bajo la cual todas las premisas sean verdaderas y la conclusion falsa.

Cuando se estudian argumentos en lenguajes naturales (como el español), es tentador guiarse por el valor de verdad que de hecho tienen las hipótesis y la conclusión. Pero lo que interesa de una argumentación es su forma lógica, no tanto si las premisas y la conclusión son verdaderas, sino si de la verdad de las premisas se sigue *necesariamente* la verdad de la conclusión.

En esta sección estudiaremos estudiaremos argumentos escritos en L, el lenguaje proposicional definido en el Capítulo II, de tal forma que cuando hayamos demostrado que un cierto argumento es correcto, también lo serán todos los argumentos en cualquier lenguaje natural que se obtengan sustituyendo las letras de las fórmulas del argumento original por enunciados particulares de manera uniforme, esto es, sustituyendo la misma letra, si aparece más de una vez, por el mismo enunciado. (cf. Capítulo III).

Para probar que un argumento es correcto hay que demostrar que si todas las hipótesis del argumento fueran verdaderas bajo alguna interpretación, también la conclusión tendría que ser verdadera. Esto se puede hacer de dos maneras:

1. *Método directo*. Se supone que todas las hipótesis son verdaderas bajo alguna interpretación para L. Se analizan todos los casos posibles en los que las hipótesis son todas verdaderas, basándonos en las condiciones de verdad dadas por las definiciones de los conectivos lógicos. Por último, se verifica que en todos estos casos la conclusión es verdadera, con lo que quedará demostrado que siempre que todas las hipótesis son verdaderas, la conclusión también lo es.

2. *Metodo indirecto (o reducción al absurdo)*. Suponemos que la verdad de la conclusión no se sigue de la verdad de las hipótesis, esto es, que bajo alguna interpretación las hipótesis son verdaderas y la conclusión falsa. A partir de todos estos supuestos llegamos a una contradicción (afirmar que un cierto enunciado es falso y verdadero al mismo tiempo, o, lo que es lo mismo, afirmar que un cierto enunciado y su negación son verdaderos al mismo tiempo). Esta contradicción indica que la suposi-

ción de que las hipótesis son verdaderas y la conclusión falsa es absurda y, por lo tanto, no se puede dar.

A continuación veremos algunos ejemplos de estos dos métodos para demostrar la correción de argumentos. Estos ejemplos están resueltos con todo detalle para que el lector se familiarice con los métodos de demostración y pueda aprender a hacer una demostración rigurosa. El énfasis se ha puesto en la forma de demostrar más que en la complejidad de los ejemplos en sí. El lector que sienta que ya ha comprendido el material puede pasar directamente a tratar de resolver los ejercicios que aparecen al final de la sección.

Se demostrará la correción de los siguientes argumentos por método directo.

Ejemplo 1

$$\begin{array}{l} H_1\ A \\ H_2\ A \rightarrow B \\ \hline C\ B \end{array}$$

Supongamos que tanto H1 como H2 son verdaderas bajo una cierta interpretación I. Entonces:

1.- $I(A)=V$ y

2.- $I(A \rightarrow B)=V$

Analizamos la tabla de verdad del condicional y vemos que hay tres casos en los cuales A->B es verdadero, pero sólo uno de ellos tiene al antecedente (en este caso A) verdadero, a saber, el primer renglón, cuando el consecuente, en este caso B, también es verdadero. Por lo tanto, si suponemos (1) y (2) al mismo tiempo, tenemos que concluir que $I(B)=V$. Por lo tanto, la conclusión C es verdadera bajo I. Esto termina la prueba de que el argumento es correcto. □

Antes de continuar con más ejemplos, conviene hacer la aclaración de que una prueba tan detallada como la que se acaba de dar no es necesaria. Aquí la hemos hecho así para tratar de guiar al lector paso a paso en una demostración, a fin de que se familiarice con todos los detalles hasta que se sienta lo suficientemente seguro como para omitir pasos que le parezcan obvios.

Ejemplo 2

$$\begin{array}{l} H1\ A \vee B \\ H2\ {\sim}A \\ \hline C\ B \end{array}$$

Supongamos que tanto H1 como H2 son verdaderas bajo alguna interpretación I. Entonces:

(1) I(A∨B)=V y

(2) I(~A)=V

Analizando la tabla de verdad para la negación vemos que si I(~A)=V, entonces I(A)=F. Por lo tanto, de (2) concluimos:

(3) I(A)=F

Nos vamos ahora a la tabla de verdad de la disyunción y vemos que hay tres posibilidades para que una disyunción sea verdadera. Pero, por (3), sabemos que uno de los componentes de la disyunción es falso, por lo tanto, el otro, en este caso B, tiene que ser verdadero. Por lo tanto, la conclusión C es verdadera bajo I y el argumento es correcto. □

Ejemplo 3

H1 A↔B
H2 ~A
———
C ~B

Supongamos que tanto H_1 como H_2 son verdaderas bajo I, una interpretación para L arbitraria. Entonces:

(1) I(A↔B)=V y

(2) I(~A)=V

De (2) y la tabla de la negación obtenemos:

(3) I(A)=F

Analizando la tabla del bicondicional vemos que A↔B es verdadero cuando A y B son ambos verdaderos o ambos falsos. Como por (3) sabemos que I(A)=F , entonces:

(4) I(B)=F

De (4) y la tabla de la negación obtenemos que I(~B)=V, esto es, la conclusión del argumento es verdadera. □

Ejemplo 4

H1 P∨Q
H2 P→R
H3 Q→R
———
C R

Supongamos que todas las hipótesis del argumento son verdaderas bajo I, una interpretación arbitraria para L, esto es:

(1) I(P∨Q)=V,

(2) I(P→R)=V y

(3) I(Q→R)=V

Analizando la tabla de verdad para la disyunción se puede observar que la disyunción es verdadera en tres casos. Veamos qué pasa en cada uno de los tres casos.

De (1) tenemos tres casos:

Caso 1a. I(P)=I(Q)=V

Caso 1b. I(P)=V y I(Q)=F

Caso 1c. I(P)=F y I(Q)=V

Caso 1a. En este caso tenemos:

(4a) I(P)=V y

(5a) I(Q)=V

De (2), (4a) y la tabla del condicional obtenemos:

(6a) I(R)=V y por lo tanto, en este caso, la conclusión es verdadera bajo I.

Caso 1b. En este caso tenemos:

(4b) I(P)=V y

(5b) I(Q)=F

De (2), (4b) y la tabla del condicional obtenemos:

(6b) I(R)=V y por lo tanto, en este caso, la conclusión es verdadera bajo I.

Caso 1c. En este caso tenemos:

(4c) I(P)=F y

(5c) I(Q)=V

De (3), (5c) y la tabla del condicional obtenemos:

(6c) I(R)=V y por lo tanto, en este caso, la conclusión del argumento es verdadera bajo I.

Concluimos que el argumento es correcto, ya que en todos los casos de la verdad de las hipótesis se siguió la verdad de la conclusión. □

Un lector atento habrá notado que en el análisis del argumento anterior no era necesario considerar tres casos, bastaba con considerar dos casos, el caso en el que P es verdadero y el caso en el que Q es verdadero.

Ejemplo 5

$$\begin{array}{l} H_1\ P\wedge Q \\ H_2\ R\rightarrow(\sim P\vee\sim Q) \\ H_3\ R\vee S \\ \hline C\ S \end{array}$$

Supongamos que todas las hipótesis de este argumento son verdaderas bajo alguna interpretación I. Entonces:

(1) I(P∧Q)=V,

(2) I(R→(~P∨~Q))=V y

(3) I(R∨S)=V

De (1) y la tabla de verdad para la conjunción obtenemos:
(4) I(P)=V y
(5) I(Q)=V
De estos dos hechos y la tabla de la negación concluimos que:
(6) I(~P)=F y
(7) I(~Q)=F
Por lo tanto, de (6), (7) y la tabla de la disyunción, tenemos que:
(8) I(~P ∨ ~Q)=F
De (2), (8) y la tabla del condicional obtenemos que:
(9) I(R)=F
Este último hecho, junto con (3) y la tabla de la disyunción nos permite concluir que I(S)=V. Por lo tanto el argumento es correcto. □

La corrección de los siguientes argumentos se demostrará por reducción al absurdo, esto es, por método indirecto.

Ejemplo 6

$$\begin{array}{l} \text{H1 } P\to Q \\ \underline{\text{H2 } Q\to R} \\ \text{C } P\to R \end{array}$$

Supongamos que el argumento es incorrecto, esto es, que de la verdad de las premisas no se sigue necesariamente la verdad de la conclusión. Dicho de otra manera, estamos suponiendo que es posible que todas las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa bajo alguna interpretación I. A partir de estos supuestos trataremos de llegar a una contradicción.

Nuestros supuestos son, pues:
(1) I(P→Q)=V,
(2) I(Q→R)=V y
(3) I(P→R)=F
De (3) y la tabla del condicional obtenemos:
(4) I(P)=V y
(5) I(R)=F
Considerando (2), (5) y la tabla del condicional, obtenemos que:
(6) I(P)=F
Tomando ahora (1), (6) y la tabla del condicional, obtenemos:
(7) I(P)=F
(4) y (7) se contradicen. La suposición de que todas las hipótesis son verdaderas y la conclusión falsa nos ha llevado a un absurdo, por lo tanto, esto no se puede dar, es decir, siempre que las hipótesis sean verdaderas la conclusión tendrá que ser verdadera también. La corrección del argumento ha quedado demostrada. □

Ejemplo 7

H_1 $P \rightarrow Q$
H_2 $R \rightarrow S$
H_3 $P \vee R$
C $Q \vee S$

Supongamos que el argumento es incorrecto, esto es, que de la verdad de las premisas no se sigue necesariamente la verdad de la conclusión. Estamos suponiendo, con la esperanza de llegar a una contradicción, que bajo alguna interpretación I, las tres hipótesis del argumento son verdaderas y la conclusión falsa. Esto es:

(1) I(P→Q)=V,
(2) I(R→S)=V,
(3) I(P∨R)=V y
(4) I(Q∨S)=F

Analizando la tabla de verdad para la disyunción vemos que para que una disyunción sea falsa es necesario que amnbos componentes de la disyunción lo sean. De (4) tenemos, entonces:

(5) I(Q)=F y
(6) I(S)=F

De (1), (5) y la tabla del condicional obtenemos:

(7) I(P)=F

De (2), (6) y la tabla del condicional obtenemos:

(8) I(R)=F

De (7), (8) y la tabla de la disyunción:

(9) I(P∨R)=F

(3) y (9) se contradicen, por lo que concluimos que el argumento es correcto. □

Ejemplo 8

H_1 $P \rightarrow \sim Q$
H_2 $Q \leftrightarrow R$
H_3 $R \vee S$
C $P \rightarrow S$

Supongamos que, bajo alguna interpretación I, todas las hipótesis de este argumento son verdaderas y la conclusión es falsa. Entonces tenemos:

(1) I(P→~Q)=V,
(2) I(Q↔R)=V,
(3) I(R∨S)=V y
(4) I(P→S)=F

De (4) y la tabla del condicional obtenemos:

(5) I(P)=V y
(6) I(S)=F
De (3), (6) y la tabla de la disyunción obtenemos:
(7) I(R)=V
De (2), (7) y la tabla del bicondicional obtenemos:
(8) I(Q)=V
De (8) y la tabla de la negación obtenemos:
(9) I(Q)=F
De (1), (9) y la tabla del condicional se obtiene:
(10) I(P)=F
(5) y (10) se contradicen, por lo que concluímos que el argumento es correcto. ▯

Ejemplo 9

H_1 $P \rightarrow R \vee S$
H_2 $P \rightarrow \sim R$

C $P \rightarrow S$

Supongamos, con la esperanza de llegar a una contradicción, que en alguna interpretación I todas las hipótesis de este argumento son verdaderas y la conclusión es falsa. Entonces tenemos:
(1) $I(P \rightarrow R \vee S)=V$,
(2) $I(P \rightarrow \sim R)=V$ y
(3) $I(P \rightarrow S)=F$
(4) I(P)=V y I(S)=F, por (3)
(5) $I(R \vee S)=V$, por (1) y (4)
(6) $I(\sim R)=V$, por (2) y (4)
(7) I(R)=F, por (6)
(8) I(S)=V, por (5) y (7)
(4) y (8) se contradicen, por lo que concluimos que el argumento es correcto. ▯

Ejemplo 10

H_1 $P \rightarrow Q$
H_2 $R \rightarrow S$

C $(P \vee R) \rightarrow (Q \vee S)$

Supongamos que el argumento es incorrecto. Entonces existe una interpretación I bajo la cual:
(1) $I(P \rightarrow Q)=V$,
(2) $I(R \rightarrow S)=V$ y
(3) $I((P \vee R) \rightarrow (Q \vee S))=F$.

De (3) y la tabla del condicional obtenemos:
(4) $I(P \vee R)=V$ y
(5) $I(Q \vee S)=F$.
Por lo tanto, de (5), se tiene que:
(6) $I(Q)=I(S)=F$.
De (4) tenemos dos casos:
Caso 7a. $I(P)=V$.
Entonces, por (1) y (7a), podemos concluir que:
(8) $I(Q)=V$, lo cual contradice a (6).
Caso 7b. $I(R)=V$
Entonces, por (2) y (7b):
(9) $I(S)=V$, lo cual contradice a (6).

Como en ambos casos se llegó a una contradicción, podemos concluir que la interpretación I no puede existir y por lo tanto el argumento es correcto. □

Nota: Cuando se está probando la corrección de un argumento por reducción al absurdo y en el transcurso de la prueba se tienen que considerar casos, se debe verificar que *cada uno de los casos* lleva a una contradicción. Si se diera por terminada la prueba al llegar a una contradicción en el primer caso, quedaría abierta la posibilidad de que el otro caso no condujera a contradicciones y, por lo tanto, sería posible para el argumento tener hipótesis verdaderas y conclusión falsa.

Puede suceder que al tratar de probar la corrección de un argumento no se pueda, ya sea porque no se puede llegar a la verdad de la conclusión directamente, o, en caso de que se esté procediendo por reducción al absurdo, porque no se llegue a ninguna contradicción. Este hecho por sí solo no demuestra que el argumento sea incorrecto, pues siempre cabe la posibilidad de que no se haya llegado a la contradicción por fallas personales; pero sí se puede sospechar que el argumento sea incorrecto.

Para demostrar que un argumento es incorrecto hay que demostrar que de la verdad de las premisas no necesariamente se sigue la verdad de la conclusión. Esto es, hay que demostrar que es posible que las premisas sean todas verdaderas y la conclusión sea falsa. Para esto basta exhibir una interpretación en la que todas las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa. A esto se le llama *contraejemplo*.

Vamos a demostrar la incorrección de los siguientes argumentos dando contraejemplos.

Ejemplo 11

$$\begin{array}{l} H_1\ A \rightarrow B \\ H_2\ D \rightarrow B \\ \hline C\ A \rightarrow D \end{array}$$

Para probar que el argumento es incorrecto tenemos que encontrar una interpretación en la cual todas las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa. Si la conclusión debe ser falsa en I, por la tabla del condicional, A debe ser verdadera y C falsa. Si H_1 debe ser verdadera, como A es verdadera, B tiene que ser verdadera también. Sea I una interpretación para L tal que I(A)=I(B)=V y I(C)=F, entonces tenemos:

$I(A \rightarrow B)=V$, $I(C \rightarrow B)=V$ y $I(A \rightarrow C)=F$. Por lo tanto, el argumento es incorrecto. □

Ejemplo 12

H_1 $A \vee B$
H_2 A

C $\sim B$

Para encontrar un contraejemplo para este argumento basta considerar una interpretación I tal que I(A)=I(B)=V. □

Ejemplo 13

H_1 $P \vee Q$
H_2 $P \rightarrow R$
H_3 $Q \rightarrow S$

C $R \wedge S$

Para construir el contraejemplo para este argumento hay que notar que, si queremos que la primera hipótesis sea verdadera, por la tabla de la disyunción, alguna de las dos componentes tiene que ser verdadera; pero si tomamos a ambas verdaderas y queremos que las otras hipótesis también sean verdaderas, tendríamos que tanto R como S son verdaderas, lo que nos daría por resultado una conclusión verdadera. Esto no es lo que queremos, por lo tanto, tenemos que tomar a uno de los disyuntos verdadero y al otro falso. Así, supongamos que I es una interpretación tal que I(P)=I(R)=V, mientras que I(Q)=I(S)=F. Con estos valores de verdad es fácil verificar que las tres hipótesis del argumento son verdaderas y la conclusión es falsa. Hemos probado, pues, que el argumento es incorrecto. □

Ejercicios

1. Demostrar que los siguientes argumentos son correctos:

a).	b).	c).
H1 $A \rightarrow B$	H1 $A \rightarrow B$	H1 $A \vee B$
H2 $\sim A \rightarrow B$	H2 $A \rightarrow \sim B$	H2 $B \rightarrow (D \wedge \sim D)$
C B	C $\sim A$	C A

d). H1 $(A \to B)D$
H2 $\sim D$
———
C $A \to B$

e). H1 $P \to Q$
H2 $\sim R \to \sim Q$
———
C $P \to R$

f). H1 $P \leftrightarrow Q$
H2 $\sim R \leftrightarrow \sim Q$
———
C $P \leftrightarrow R$

h). H1 $\sim(A \wedge B)$
———
C $\sim A \vee \sim B$

i). H1 $\sim(A \vee B)$
———
C $\sim A \wedge \sim B$

j). H1 $\sim(A \to B)$
———
C $A \wedge \sim B$

2. Demuestre que los siguientes argumentos son incorrectos:

a). H1 $\sim(P \to Q)$
———
C $\sim P \to \sim Q$

b). H1 $\sim(P \wedge Q)$
———
C $\sim P \wedge \sim Q$

c). H1 $\sim(P \vee Q)$
———
C $\sim P \vee \sim Q$

d). H1 $P \to Q$
H2 $\sim P$
———
C $\sim Q$

e). H1 $P \wedge Q$
H2 $Q \vee R$
———
C $P \wedge \sim R$

f). H1 $P \to Q$
H2 $Q \leftrightarrow R$
———
C $P \leftrightarrow R$

3. NOCIONES SEMÁNTICAS PARA LENGUAJES DE PREDICADOS

Sea L' el lenguaje de predicados definido en el Capítulo II. Ahí también se definió una interpretación para L' como una pareja ordenada <U,f> donde U es un conjunto no vacío y f es una función que asigna a cada constante individual de L' un elemento de U , a cada predicado n-ario de L' una relación n-aria en U y a cada letra proposicional de L' un valor de verdad.

Dada una interpretación para L' arbitraria y un enunciado de L' (un enunciado es una fórmula de L' sin variables libres), se puede calcular el valor de verdad del enunciado bajo I. Cuando un enunciado α de L' es verdadero bajo I escribimos $I(\alpha)=V$.

Si la definición de L'-interpretación parece muy abstracta, es suficiente recordar que cuando usamos este lenguaje estamos pensando en un universo de nuestro discurso que puede ser cualquier colección de objetos. Los predicados se usan para simbolizar relaciones entre estos individuos o propiedades de ellos, los conectivos se interpretan como en el lenguaje anterior , el cuantificador $(\forall x)$ significa 'para todo elemento del dominio...' y el cuantificador $(\exists x)$ significa 'existe algún elemento del dominio de discurso tal que...'.

Las nociones semánticas definidas en la sección 1 de este capítulo pueden ser aplicadas para enunciados del lenguaje de predicados. La única diferencia es que, en lugar de hablar de tautologías, se usa la expresión *universalmente válido* para hablar de enunciados del lenguaje de predicados verdaderos en toda interpretación. Las demás definiciones pueden ser transcritas substituyendo la palabra 'fórmula' por 'enunciado' y todo lo que se probó en la sección 1 sigue siendo verdadero para el lenguaje de predicados. Solamente hay que recordar que cuando se habla de interpretaciones en un lenguaje proposicional se está pensando en asignaciones de verdad y que cuando se trata del lenguaje de predicados una interpretación es de la forma <U,f>, como la describimos al principio.

Ejercicio

Se recomienda al lector revisar la sección 1 y convencerse de que, en efecto, todo puede ser transferido al lenguaje de predicados.

Damos a continuación ejemplos de enunciados universalmente válidos, contradictorios, contingentes y lógicamente equivalentes, para que el lector vea cómo usar la nueva definición de interpretación en las demostraciones. Daremos más ejemplos en la siguiente sección, donde se trabajan argumentos en el lenguaje de predicados.

Ejemplos

1. $(\forall x)P^1x \rightarrow (\exists x)P^1x$ es un enunciado universalmente válido.

Sea $I=\langle U, f\rangle$ una interpretación para L'. Supongamos que el enunciado es falso en I, para llegar a una contradicción. Entonces tenemos:

(1) $I((\forall x)P^1x)=V$ y

(2) $I((\exists x)P^1x)=F$.

De (1) se sigue que cualquier elemento de U satisface $f(P^1)$. Como U no es vacío, seleccionemos algún elemento de U, digamos u. Por lo tanto u satisface $f(P^1)$ y por lo tanto $I((\exists x)P^1x))=V$. Esto contradice a (2). □

2. $(\exists x)P^1x \rightarrow (\forall x)P^1x$ no es universalmente válido.

Para demostrar esto debemos construir una interpretación I bajo la cual el enunciado en cuestión sea falso. Para que el enunciado sea falso se requiere que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso, esto es, debemos construir una interpretación de tal forma que P^1 se interprete como una propiedad satisfecha por algunos, pero no todos los elementos del dominio. Sea $I=\langle U, f\rangle$ donde:

U={x: x es un ser humano}

$f(P^1x)=$ x es mujer

f(A)=V para toda letra proposicional A

Entonces $I((\exists x)P^1x)=V$, porque algunos seres humanos son mujeres, pero $I((\forall x)P^1x)=F$, porque no es cierto que todo ser humano sea una mujer. Por lo tanto, el condicional es falso en I y el enunciado no es universalmente válido. □

Nota: El valor que f asignó a las letras proposicionales no afectó el valor de verdad del enunciado bajo I. De ahora en adelante, cuando se construya una interpretación para L', será suficiente con dar las interpretaciones de los símbolos que aparezcan en las fórmulas que se estén considerando. (Recuérdese que en el capítulo II se hizo lo mismo).

3. Q^2ab es contingente.

Para probar esto tenemos que construir dos interpretaciones para L', una de las cuales haga verdadero al enunciado y la otra falso.

Sea I=<U,f> donde

U={x: x es un número entero}

$f(Q^2xy)$=x es menor que y,

f(a)= 1 y

f(b)= 2.

Entonces $I(Q^2ab)=V$, porque 1 es menor que 2.

Si se considera ahora una interpretación J idéntica a I con la excepción de que ahora Q^2xy se interprete como x es mayor que y, entonces $J(Q^2ab)=F$, porque 1 no es mayor que 2. □

4. El enunciado $\sim((\forall x)P^1x \rightarrow (\exists x)P^1x))$ es contradictorio.

Esto se sigue del ejemplo 1 y del hecho de que un enunciado es universalmente válido si y sólo si su negación es contradictoria. □

5. El enunciado $\sim((\exists x)P^1x \rightarrow (\forall x)P^1x))$ no es contradictorio.

Análogo al ejempolo 4. □

6. $(\exists x)(P^1x \vee Q^1x) \leftrightarrow (\exists x)P^1x \vee (\exists x)Q^1x$

Sea I una interpretación arbitraria para L'. Tenemos que demostrar que los dos enunciados tienen el mismo valor de verdad bajo I.

Supongamos que $I((\exists x)(P^1x \vee Q^1x))=V$. Entonces existe algún elemento u de U, el dominio de I, para el cual alguna de las propiedades $f(P^1)$ o $f(Q^1)$ es verdadera. En el primer caso $I((\exists x)P^1x)=V$ y en el segundo $I((\exists x)Q^1x)=V$, en ambos casos $I((\exists x)P^1x(\exists x)Q^1x)=V$.

Supongamos ahora que $I((\exists x)P^1x \vee (\exists x)Q^1x)=V$. Como es una disyunción, alguno de los disyuntos es verdadero en I. Si el primero es verdadero en I, entonces existe algún elemento u de U para el cual $f(P^1)$ es verdadera y por lo tanto $I((\exists x)(P^1x \vee Q^1x))=V$. Análogamente si el segundo disyunto es verdadero. □

Ejercicios

1. Decidir si los siguientes enunciados de L' son universalmente válidos, contradictorios o contingentes. (Justificar su respuesta)

a). $(\exists x)P^2xa \rightarrow (\exists x)P^2ax$
b). $(\forall x)P^2xx$
c). $P^1a \rightarrow (\exists x)P^1x$
d). $(\exists x)P^1xP^1a$
e). $P^1a(\forall x)P^1a$
f). $(\forall x)P^1xP^1a$

2. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
a). $((\forall x)P^1x \vee (\forall x)Q^1x) \rightarrow (\forall x)(P^1xQ^1x)$
b). $((\exists x)P^1x \wedge (\exists x)Q^1x) \rightarrow (\exists x)(P^1xQ^1x)$
c). $((\forall x)P^1x \wedge (\forall x)Q^1x) \rightarrow (\forall x)(P^1xQ^1x)$

4. MÉTODOS DE PRUEBA PARA ARGUMENTOS EN LENGUAJE DE PREDICADOS

En esta sección estudiaremos argumentos del lenguaje de predicados L' definido en el capítulo 1.

Los métodos utilizados para analizar argumentos en este lenguaje son los mismos que los usados para el lenguaje anterior. Se puede probar la corrección de un argumento por reducción al absurdo y por método directo y para demostrar la incorrección de un argumento hay que dar un contraejemplo.

Ejemplos
Probaremos que los siguientes argumentos son correctos:
Argumento 1.

H_1 $(\forall x)(P^1x \rightarrow Q^1x)$
H_2 P^1a

C Q^1a

Procedemos por reducción al absurdo. Suponemos que las dos premisas de este argumento son verdaderas y la conclusión es falsa bajo alguna interpretación I=<U, f> para L'. Esto es:

(1) $I((\forall x)(P^1x \rightarrow Q^1x))=V$,
(2) $I(P^1a)=V$ y
(3) $I(Q^1a)=F$

Recordemos que 'a' es una constante individual, y que por lo tanto $f(a) \in U$, el dominio de I. Ahora bien, la primera hipótesis asegura que todos los elementos del dominio de I que tengan la propiedad P^1 también tienen que tener la propiedad Q^1. La constante individual 'a' representa a un elemento entonces a debe tener también Q^1. Esto es, de (1) podemos concluir:

(4) $I(P^1a \rightarrow Q^1a)=V$

De (2) y (4) obtenemos:

(5) $I(Q^1a)=V$

(3) y (5) se contradicen, por lo tanto, es imposible que las hipótesis de este argumento sean verdaderas y la conclusión sea falsa, por lo que el argumento es correcto. □

Argumento 2.

$$\begin{array}{l} H_1\ P^1a \\ \hline C\ (\exists x)P^1x \end{array}$$

Procedemos de manera directa. Supongamos que la hipótesis del argumento es verdadera bajo alguna interpretación I para L'. Esto quiere decir que el elemento del universo representado por la constante 'a' tiene la propiedad denotada por P^1. Pero, entonces, es evidente que hay algún elemento del universo que tiene la propiedad P^1, que es precisamente lo que dice la conclusión. Por lo tanto, la conclusión es verdadera y el argumento es correcto.

Argumento 3.

$$\begin{array}{l} H_1\ (\forall x)(P^1x \rightarrow Q^1x) \\ H_2\ (\forall x)(Q^1x \rightarrow R^1x) \\ \hline C\ (\forall x)(P^1x \rightarrow R^1x) \end{array}$$

Supongamos que las hipótesis del argumento son verdaderas bajo alguna interpretación $I=\langle U, f\rangle$. Entonces tenemos:

(1) $I((\forall x)(P^1x \rightarrow Q^1x))=V$ y

(2) $I((\forall x)(Q^1x \rightarrow R^1x))=V$

Por el significado que tiene el cuantificador $(\forall x)$ sabemos que (1) dice que todos los elementos del dominio que satisfacen P^1 también satisfacen Q^1, y que (2) afirma que todos los elementos del dominio que satisfacen Q^1 también satisfacen R^1. A partir de estas suposiciones debemos probar que la conclusión del argumento es verdadera en I. La conclusión afirma que todos los elementos del universo que satisfacen P^1 también satisfacen R^1. Para probar que esta afirmación es verdadera, lo que haremos será considerar un elemento arbitrario del dominio de I y probar la afirmación para él. Como no se usará ninguna característica específica de él, lo que se argumente para él podría argumentarse para cualquier otro elemento del dominio y lo que él satisfaga será satisfecho por cualquier otro elemento de nuestro universo.

Para poder hablar de los elementos de U en L', agreguemos constantes individuales a L', una para cada elemento de U, de tal forma que si $u \in U$ entonces exista alguna constante a de L tal que $f(a)=u$. Sea $u \in U$ arbitrario y sea 'a' la constante que lo denota.

De (1) y el significado del cuantificador universal obtenemos:

$(3) I\ (P^1a \rightarrow Q^1a) = V$

Similarmente, de (2) obtenemos:

$(4) I(Q^1a \rightarrow R^1a) = V$

Por lo tanto, si u satisface la propiedad denotada por P^1, por (3) tiene que satisfacer la propiedad denotada por Q^1, similarmente, por (4), tendrá que satisfacer R^1. Hemos probado lo siguiente:

$(5)\ I(P^1a \rightarrow R^1a) = V$

Pero (5) es cierto para cualquier constante individual 'a', por lo tanto se puede afirmar que:

$(6)\ I((\forall x)(P^1x \rightarrow R^1x)) = V$

Esto último demuestra que el argumento es correcto. □

Argumento 4.

$$\frac{H_1\ (\exists x)(P^1x \int Q^1x)}{C\ (\exists x)P^1x \int (\exists x)Q^1x}$$

Supongamos que la hipótesis del argumento es verdadera bajo alguna interpretación I=<U,f>. Por el significado del cuantificador existencial sabemos que hay algún elemento u·U que satisface o bien P^1 o bien Q^1, si se da la primera opción entonces el primer disyunto de la conclusión es verdadero en I, si se da la segunda opción entonces el segundo disyunto de la conclusión es verdadero. En cualquier caso la conclusión es verdadera en I.

Probaremos que los siguientes argumentos son incorrectos:

Argumento 5.

$$\frac{H_1\ (\exists x)P^1x}{C\ P^1a}$$

Para demostrar que este argumento es incorrecto hay que producir un contraejemplo, esto es, construir una interpretación para L bajo la cual la hipótesis del argumento sea verdadera y la conclusión falsa.

Para hacer esto es necesario tratar de ver qué dicen los enunciados del argumento, tomando en cuenta el significado del cuantificador existencial. Es fácil ver que la hipótesis afirma que algún elemento del universo satisface la propiedad denotada por P^1 y la conclusión afirma que el elemento del universo denotado por 'a' satisface la propiedad P^1. Ahora bien, el universo del discurso en general cuenta con muchos elementos y afirmar que alguno de esos elementos tiene una propiedad no implica que alguno específico la tenga. Para exhibir el contraejemplo daremos un universo con varios elementos, uno de los cuales satisfaga P^1 y tal que el elemento denotado por 'a' no satisfaga P^1.

Sea pues, nuestro universo de discurso, el conjunto de todos los seres humanos, sea P^1 la propiedad de ser mujer y denotemos por 'a' a Amado Nervo. En otras palabras, sea I=<U,f> donde

U={x: x es un ser humano}

f(P1x)= x es mujer

f(a)= Amado Nervo

Con esta interpretación la hipótesis de nuestro argumento queda traducida como 'algunos seres humanos son mujeres', lo cual es verdadero; pero la conclusión se traduce como 'Amado Nervo es mujer', lo cual es falso. Hemos encontrado una instancia del argumento tal que su hipótesis es verdadera y su conclusión es falsa, por lo que concluimos que el argumento es incorrecto.

Argumento 6.

$$\begin{array}{l} H_1\ (\forall x)(P^1x \rightarrow Q^1x) \\ H_2\ Q^1a \\ \hline C\ P^1a \end{array}$$

Para construir el contraejemplo nótese que la primera hipótesis del argumento dice que todo aquel elemento del universo que satisfaga la propiedad P^1 tiene que satisfacer también la propiedad Q^1, mientras que la segunda afirma que el elemento denotado por 'a' satisface Q^1. La conclusión afirma que el elemento denotado por 'a' satisface P^1. Es claro que no tenemos suficientes razones para concluir esto, pues entre las hipótesis no se encuentra ninguna que diga que todo aquello que satisfaga Q^1 tiene que satisfacer también P^1.

Sea I=<U,f> tal que:

U={x: x es un ser humano},

f(P^1x)= x es alumno de la UAM

f(Q^1x)= x tiene más de 15 años y

f(a)= Bill Clinton.

Con esta interpretación tenemos lo siguiente:

(1) I(H_1)=V, ya que todos los alumnos de la UAM tienen más de 15 años,

(2) I(H_2)=V, pues Bill Clinton tiene más de 15 años,pero

(3) I(C)=F, ya que Bill Clinton no es alumno de la UAM.

Concluimos que el argumento es incorrecto.

Argumento 7.

$$\begin{array}{l} H_1\ R^2ab \\ H_2\ R^2bc \\ \hline C\ R^2ac \end{array}$$

Si tomamos I=<U,f> donde U es el conjunto de todos los países del planeta, interpretamos R^2xy como 'x colinda con y' y hacemos que a,b y c denoten a Estados Unidos, México y Guatemala respectivamente, obtenemos lo siguiente:

(1) $I(H_1)=V$ porque Estados Unidos colinda con México,
(2) $I(H_2)=V$ porque México colinda con Guatemala, pero
(3) $I(C)=F$ pues Estados Unidos no colinda con Guatemala.
De esto se concluye que el argumento no es correcto.

Argumento 8.

$$\begin{array}{l} H_1\ (\exists x)(P^1x \wedge Q^1x) \\ H_2\ (\exists x)(Q^1x \wedge R^1x) \\ \hline C\ (\exists x)(P^1x \wedge R^1x) \end{array}$$

Tomemos como dominio de la interpretación al conjunto de todos los números enteros positivos, es decir, U={1,2,3,...}. Sea P^1 la propiedad de ser par, Q^1 la propiedad de ser múltiplo de 3 y R^1 la propiedad de ser impar. Entonces la primera hipótesis del argumento es verdadera en I porque existe algún número entero que es a la vez par y múltiplo de 3, por ejemplo el 6. La segunda hipótesis también es verdadera en I porque existe algún número entero que es a la vez múltiplo de 3 e impar, por ejemplo el 9. Sin embargo la conclusión del argumento es falsa puesto que no existe ningún número entero que sea a la vez par e impar. Por lo tanto este contraejemplo prueba que el argumento es incorrecto.

Ejercicios

Decidir si los siguientes argumentos son correctos o incorrectos y demostrar su respuesta.

a). $$\begin{array}{l} H_1\ (\forall x)P^1x \\ H_2\ (\forall x)Q^1x \\ \hline C\ (\forall x)(P^1x \wedge Q^1x) \end{array}$$

b). $$\begin{array}{l} H_1\ (\exists x)P^1x \\ H_2\ (\exists x)Q^1x \\ \hline C\ (\exists x)(P^1x \wedge Q^1x) \end{array}$$

c). $$\begin{array}{l} H_1\ (\exists x)P^1x \\ H_2\ (\exists x)Q^1x \\ \hline C\ (\exists x)(P^1x \vee Q^1x) \end{array}$$

d). $$\begin{array}{l} H_1\ (\forall x)P^1x \\ H_2\ (\forall x)Q^1x \\ \hline C\ (\forall x)(P^1x \vee Q^1x) \end{array}$$

e). H_1 $\sim(\forall x)P^1x$
____
C $(\exists x)\sim P^1x$

f). H_1 $\sim(\exists x)P^1x$
____
C $(\forall x)\sim P^1x$

g). H_1 $(\forall x)(P^1x \rightarrow Q^1x)$
H_2 P^1a
____
C Q^1a

h). H_1 $(\exists x)(P^1x \rightarrow Q^1x)$
H_2 P^1a
____
C Q^1a

i). H_1 $(\exists x)(P^1x \vee Q^1x)$
H_2 $(\forall x)(P^1x \rightarrow R^1x)$
____
C $(\exists x)(R^1x \wedge Q^1x)$

j). H_1 $(\forall x)R^2ax$
H_2 $(\exists y)R^2ya$
____
C $(\forall x)R^2xa$

5. Consistencia

Hasta ahora hemos visto a la lógica como el estudio de de las argumentaciones válidas. En esta sección vamos a adoptar un enfoque distinto: estudiaremos el concepto de consistencia y veremos cómo se relaciona con las nociones semánticas analizadas en las primeras secciones de este capítulo. Expresaremos la corrección de argumentos en términos de consistencia y veremos también un método para establecer si un conjunto de enunciados de un lenguaje proposicional es consistente o no.

El término 'consistencia' en español tiene varias acepciones. Se dice, por ejemplo, que una persona que predica una cosa y hace otra es inconsistente, o que alguien que apoya a un partido político en una elección y a otro en la siguiente es inconsistente. En lógica el tipo de consistencia que nos interesa es la *compatibilidad de enunciados*, que no tiene nada que ver con la sinceridad o la lealtad.

Supongamos que estamos trabajando con algún lenguaje formal L, que puede ser un lenguaje de proposiciones o un lenguaje de predicados. Una definición más precisa de lo que en lógica entendemos por consistencia es la siguiente:

Definición 1

Un conjunto de Σ enunciados de L es *consistente* si existe alguna interpretación I para L tal que I(A)=V para todo enunciado A de Σ.

Se sigue que un conjunto de enunciados Σ es *inconsistente* si no existe ninguna interpretación para L bajo la cual todos los enunciados de Σ sean verdaderos. (Aquí estamos usando el término 'enunciado' para referirnos tanto a los enunciados de L —si L es un lenguaje de predicados como a las fórmulas de L— si L es un lenguaje proposicional).

Ejemplos

1. $\{P \wedge Q, P \rightarrow Q, \sim R\}$ es consistente.

Este es un conjunto de fórmulas de un lenguaje proposicional y, por lo tanto, una interpretación es una asignación de valores de verdad. Sea I una asignación tal que I(P)=I(Q)=V y I(R)=F. Entonces bajo I todas las fórmulas del conjunto son verdaderas, con lo que queda demostrada su consistencia.

2. $\{(\exists x)(P^1x \vee Q^1x), \sim P^1a \wedge \sim Q^1a\}$ es consistente.

Los enunciados del conjunto son enunciados de un lenguaje de predicados, así que una interpretación I bajo la cual los enunciados del conjunto sean verdaderos, debe ser de la forma <U, f>. Sea U={x: x es un ser humano},

f(a)= María Félix

$f(P^1x)$= x es hombre

$f(Q^1x)$= x es pintor.

Bajo esta interpretación el primer enunciado se traduce como 'Algún ser humano es hombre o pintor', que es verdadero y el segundo enunciado se traduce como 'María Félix no es ni hombre ni pintor', también verdadero. Por lo tanto, la asignación I así construída satisface a los enunciados del conjunto.

3. $\{P \wedge Q, \sim(P \rightarrow Q)\}$ es inconsistente.

Para probar esto tenemos que demostrar que ninguna interpretación I satisface a los dos enunciados del conjunto. Procedemos por reducción al absurdo y suponemos que existe alguna interpretación I bajo la cual $I(P \wedge Q)=I(\sim(P \rightarrow Q))=V$. De la primera parte y la tabla para la conjunción se sigue que I(P)=I(Q)=V, lo cual implica que $I(P \rightarrow Q)=V$ y por lo tanto $I(\sim(P \rightarrow Q))=F$. Esta contradicción demuestra que tal asignación no puede existir.

4. $\{(\exists x)(P^1x \vee Q^1x), (\forall x)(\sim P^1x \wedge \sim Q^1x)\}$ es inconsistente.

Por reducción al absurdo. Sea I=<U, f> una interpretación tal que ambos enunciados del conjunto son verdaderos bajo I. Entonces, de la verdad del primer enunciado se sigue que existe algún elemento $a \in U$ tal que a satisface la propiedad denotada por P^1 o la propiedad denotada por Q^1. Pero el segundo enunciado, también verdadero en I, afirma que dado cualquier elemento de U, no satisface ni la propiedad denotada por P1 ni la denotada por Q^1. Esto es cierto para todo elemento de U, en particular, para a. Esta contradicción demuestra la consistencia del conjunto.

Proposición 1

Si Σ es un conjunto consistente de enunciados y Γ está contenido en Σ entonces õ es consistente.

Demostración.

Sea I una interpretación bajo la cual todos los enunciados de Σ son verdaderos, entonces todos los enunciados de Γ son verdaderos bajo I y, por lo tanto, Γ es consistente. (Nótese que en la demostración no importa si se trata de lenguajes proposicionales o de predicados).

Ejercicios

1. Decir si los siguientes conjuntos de enunciados son consistentes o no:

a). $A \rightarrow \sim B$
$A \leftrightarrow B$

b). $P \rightarrow Q$
$Q \rightarrow S$
$\sim P \wedge S$

c). $P \leftrightarrow (A \vee B)$
$\sim A \wedge C$
$\sim B \vee P$

d). $P \rightarrow (Q \wedge R)$
$S \vee \sim (P \wedge Q)$

e). $A(B \vee C)$
$\sim (A \wedge \sim B)$
$\sim (B \wedge \sim C)$
$\sim (C \wedge \sim A)$

f). $A \leftrightarrow B$
$C \leftrightarrow D$
$E \leftrightarrow F$

g). $(\forall x)(Q^1x \leftrightarrow R^1x)$
Q^1a
$\sim R^1a$

h). $(\forall x)(A^1x \rightarrow B^1x)$
$(\forall x)(B^1x \rightarrow C^1x)$
$(\exists x)(A^1x \wedge \sim C^1x)$

i). $(P^1a \vee Q^1a)$
$(\forall x)\sim P^1x$
$(\forall)\sim Q^1x$

j). $(\exists x)(P^1x \wedge Q^1x)$
$(\forall x)(Q^1x \rightarrow \sim P^1x)$

2. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. (Justificar su respuesta)

Sean Σ y Γ dos conjuntos de enunciados arbitrarios.

a). Si Γ es consistente y Γ está contenido en Σ, entonces Σ es consistente.

b). Si Γ es inconsistente y Γ está contenido en Σ, entonces Σ es inconsistente.

c). Si Γ es inconsistente y Σ está contenido en Γ, entonces Σ es inconsistente.

Las siguientes proposiciones relacionan el concepto de consistencia con las nociones semánticas estudiadas en la sección 1. L es el lenguaje proposicional o de predicados.

Proposición 2

Un enunciado α de L es una tautología (universalmente válido) si y sólo si {~α} es inconsistente.

Demostración.

Supongamos que α es universalmente válido y que {~α} es consistente, para proceder por reducción al absurdo. Entonces, de la consistencia de {~α} se sigue que existe una interpretación I para L tal que I(~α)=V. Pero esto implica que I(α)=F, lo que contradice la primera hipótesis.

Supongamos ahora que {~α} es inconsistente y que no es universalmente válido. Entonces existe una interpretación I para L tal que I(α)=F y, por lo tanto, I(~α)=V. Esto implica que {~ó} es consistente. Esta contradicción concluye la demostración.

Proposición 3

Un enunciado α de L es contradictorio si y sólo si {α} es inconsistente.

Demostración.

Ejercicio para el lector

Proposición 4

Un enunciado α de L es contingente si y sólo si tanto {α} como {~α} son consistentes.

Demostración.

Por método directo. Supongamos que α es contingente. Entonces existen dos interpretaciones para L , I_1 y I_2 tales que I_1(α)=V y I_2(α)=F. Entonces I_2(~α)=V y por lo tanto {α} y {~α} son consistentes.

Supongamos ahora que {α} y {~α} son consistentes. Entonces existen dos interpretaciones para L, I_1 y I_2 tales que I_1(α)=V y I_2(~α)=V. Por lo tanto I_2(α)=F y por lo tanto α es contingente.

Proposición 5

Dos enunciados α y β son lógicamente equivalentes si y sólo si tanto {α, ~β} como {~α, β} son inconsistentes.

Demostración.

Por reducción al absurdo. Supongamos que α y ß son lógicamente equivalentes y que alguno de los conjuntos {α,~β} o {β, ~α} es consistente. Si {α, β} es consistente entonces existe alguna interpretación I tal que I(α)=I(~β)=V, esto implica que I(β)=F y por lo tanto α y β no son lógicamente equivalentes. El segundo caso es análogo y se deja como ejercicio para el lector.

Ahora supongamos que {α, ~β} y {β, ~α} son inconsistentes pero que α y β no son lógicamente equivalentes. Entonces existe una interpretación I bajo la cual α y β tienen distintos valores de verdad. Si I(α)=V y

$I(\beta)=F$ entonces $I(\sim\beta)=V$ y el conjunto $\{\alpha, \sim\beta\}$ es consistente, contradiciendo la hipótesis de que era inconsistente. El caso $I(\alpha)=F$ y $I(\beta)=V$ es análogo.

Regresemos ahora a los argumentos y analicemos el concepto de corrección bajo esta nueva perspectiva. Nuevamente estamos considerando argumentos en un lenguaje formal L que puede ser proposicional o de predicados.

Definición 2

Dado un argumento cualquiera definimos su conjunto contraejemplo como el conjunto que tiene como elementos a las hipótesis del argumento y a la negación de la conclusión.

Proposición 6

Un argumento es correcto si y sólo si su conjunto contraejemplo es inconsistente.

Demostración.

Supongamos que el argumento con premisas $H_1,\ldots,H_n$ y con conclusión C es correcto y que su conjunto contrajemplo, $\{H_1,\ldots,H_n,\sim C\}$ es consistente. Por definición de consistencia tenemos que existe una interpretación I para L tal que $I(H_1)=\ldots=I(H_n)=I(\sim C)=V$. La última igualdad implica que $I(C)=F$. Esto contradice la hipótesis de que el argumento es correcto, pues hemos encontrado una interpretación para L bajo la cual las hipótesis del; argumento son verdaderas y su conclusión falsa.

Supongamos ahora que $\{H_1,\ldots,H_n,\sim C\}$ es inconsistente y que el argumento es incorrecto. Entonces es posible encontrar una interpretación I bajo la cual las premisas del argumento son verdaderas y la conclusión falsa. Es decir, $I(H_1)=\ldots I(H_n)=V$ y $I(C)=F$. De la última igualdad se sigue que $I(\sim C)=V$ y, por lo tanto, la existencia de I implica que $\{H_1,\ldots,H_n,\sim C\}$ es consistente. Esta contradicción concluye la prueba.

De la proposición anterior se sigue que para demostrar que un argumento es incorrecto hay que probar que su conjunto contraejemplo es consistente, y se observará que eso es justamente lo que hacíamos al dar un contraejemplo: exhibíamos una situación en la que todos los elementos del conjunto contraejemplo del argumento eran verdaderos, demostrando así su consistencia.

Para demostrar que un argumento es correcto hay que probar que su conjunto contraejemplo es inconsistente , y cuando hacíamos reducción al absurdo lo que hacíamos era suponer que el conjunto contraejemplo era consistente y a partir de ahí llegar a un absurdo.

6. Otra aplicación de los árboles semánticos

En el capítulo II se estudiaron los árboles semánticos para analizar condiciones de verdad para enunciados de un lenguaje proposicional L. Este método también puede usarse para verificar la consistencia de un conjunto de enunciados de L. El método de construcción es el mismo, la única diferencia es que vamos a iniciar el árbol con una lista de enunciados y no con uno solo.

Supongamos que tenemos un conjunto de enunciados X y que queremos ver si es consistente. Para probar que es consistente tenemos que exhibir una situación posible en la que todos los enunciados de X sean verdaderos. Trataremos de describir esta situación utilizando enunciados de la menor complejidad posible. Un primer intento para describir esta situación es X mismo, lo escribimos y así empieza nuestro árbol.

A continuación seleccionamos algún enunciado de X, digamos P y tratamos de describir una situación en la que P sea verdadero. Si, por ejemplo, descubrimos que P es verdadero precisamente cuando otros dos enunciados, digamos Q y R son verdaderos entonces debajo de P escribimos Q y R. Nuestro árbol en este caso se vería así:

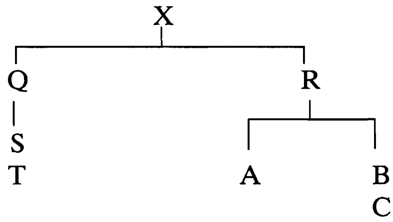
X
|
Q
R

Si en cambio descubrimos que P es verdadero precisamente en el caso en que alguno de dos enunciados, digamos Q y R sean verdaderos, entonces escribimos Q y R debajo de X, pero en diferentes ramas, ya que cada uno representa un posible situación distinta. Nuestro árbol en este caso se vería así:

<table><tr><td colspan="2" align="center">X</td></tr><tr><td align="center">Q</td><td align="center">R</td></tr></table>

Después continuamos la operación con otro enunciado de X, haciendo lo mismo hasta que no podamos continuar.

Nuestro árbol se podría ver de la siguiente manera:

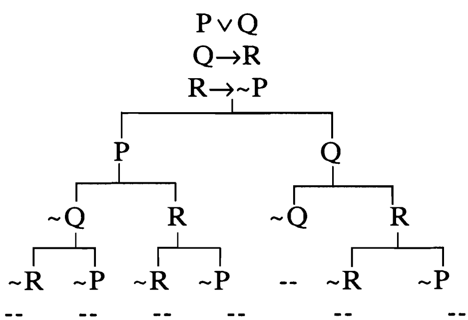


Cada rama representa una situación posible, los enunciados son tan pequeños que dentro de una misma rama es fácil verificar si hay inconsistencias, pues éstas se presentarán cuando en la misma rama haya enunciados de la forma A y ~A. Cuando esto ocurra dibujaremos una línea horizontal al final de la rama para indicar que esa posibilidad está cerrada. Si al terminar nuestro árbol queda alguna rama abierta esto indicará que esa posibilidad existe y que en esa situación todos los enunciados del conjunto original son verdaderos. Con eso quedará probada la consistencia del conjunto. Si, por otro, lado todas las ramas quedan cerradas esto indicará que no hay ninguna situación en la que todos los enunciados del conjunto original sean verdaderos. Esto demostrará la inconsistencia del conjunto.

Ejemplos

A continuación determinaremos cuáles de los siguientes conjuntos de enunciados son consistentes.

1. {P ∨ Q, Q→R, R→~P}



En este árbol se escribieron, en primer lugar, los tres enunciados del conjunto cuya consistencia se desea verificar. A continuación se abrieron dos ramas, que corresponden a las dos posibilidades para que el primer enunciado de la lista sea verdadero. El siguiente nivel se obtuvo considerando las dos posibilidades para que el segundo enunciado de la lista sea verdadero. Aquí tuvimos que cerrar una rama, que contenía a los enunciados Q y ~Q. El tercer nivel de la rama se obtuvo considerando las posibilidades para que el tercer enunciado del conjunto fuera verdadero. Aquí también tuvimos que cerrar cuatro ramas, que contenían a los enunciados R y ~R, o P y ~P. Cualquiera de las ramas abiertas define una situación en la que los tres enunciados del conjunto son verdaderos, por lo tanto, el conjunto es consistente.

2. {P ∧ Q, P→R, ~R}

```
        P∧Q
        P→R
        ~R
         |
         P
         Q
    ┌────┴────┐
   ~P         R
   --         |
             ~R
             --
```

En este árbol el primer nivel se obtuvo al considerar la única posibilidad para que el primer enunciado fuera verdadero, por eso pusimos al enunciado Q debajo de P. El segundo nivel se obtuvo al considerar las condiciones de verdad para el segundo enunciado del conjunto. Aquí tuvimos que cerrar la rama que contenía a P y a ~P. En el tercer nivel se consideraron las dos posibles situaciones en las que el tercer enunciado del conjunto es verdadero. Aquí tuvimos que cerrar la rama que contenía a R y a ~R. Como todas las ramas del árbol quedaron cerradas concluimos que el conjunto es inconsistente.

3. {P, ~R, P↔R}

```
          P
         ~R
         P↔R
          |
          P
         ~R
     _____|_____
    |           |
    P          ~P
    R          ~R
    --         --
```

Con este árbol se procedió exactamente igual, considerando las situaciones que hacen verdaderos a cada uno de los enunciados del conjunto. Los dos primeros no se pueden descomponer en enunciados más sencillos y por eso se escriben tal como están. El tercero es un bicondicional, que es verdadero cuando ambos componentes son verdaderos o ambos son falsos. Tuvimos que cerrar todas las ramas, por lo que concluimos que el conjunto es inconsistente.

Ejercicios

Utilizar árboles semánticos para verificar la consistencia de los conjuntos (a)-(f) del ejercicio 1 .

El método de árboles semánticos también puede utilizarse para verificar si un enunciado de un lenguaje proposicional es una tautología, una contradicción o es contingente, así como para decidir si dos enunciados son lógicamente equivalentes o no.

Como vimos en el capítulo II, para determinar si un enunciado α es una tautología o no se construye un árbol para $\sim\alpha$. Si todas las ramas se cierran, quiere decir que no existe ninguna posibilidad de que $\sim\alpha$ sea verdadera y, por lo tanto, α es una tautología. Si alguna rama queda abierta, quiere decir que α no es una tautología.

Ejemplo 4. Verificar por medio de árboles semánticos que $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ es una tautología.

$$
\begin{array}{c}
\sim(P \rightarrow (Q \rightarrow P) \\
| \\
P \\
| \\
\sim(Q \rightarrow P) \\
| \\
Q \\
\sim P \\
--
\end{array}
$$

Como la única rama del árbol se cerró, concluimos que la fórmula es una tautología.

Si queremos decidir si un enunciado α es una contradicción o no, construimos un árbol para α. Si todas las ramas se cierran α es contradictorio, mientras que una rama abierta indica que α no es contradictorio.

Ejemplo 5. Verificar que la fórmula $P \wedge (\sim P \vee R)$ no es contradictoria.

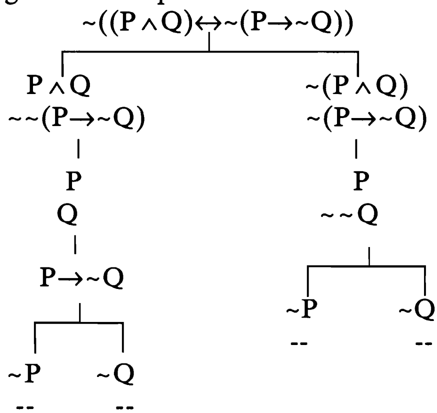
$$
\begin{array}{ccc}
 & P \wedge (\sim P \vee R) & \\
 & | & \\
 & P & \\
 & \sim P \vee R & \\
 & | & \\
\sim P & & R \\
-- & &
\end{array}
$$

Como una rama quedó abierta, la fórmula es contradictoria.

Para verificar que un enunciado es contingente por medio de árboles de verdad se verifica que no sea tautología ni contradicción.

Por último, para decidir si dos enunciados α y β son lógicamente equivalentes o no, se construye un árbol para $\sim(\alpha \leftrightarrow \beta)$. Si todas las ramas se cierran, eso quiere decir que $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una tautología y por lo tanto $\alpha \equiv \beta$. Si queda una rama abierta, entonces los enunciados no son lógicamente equivalentes.

Ejemplo 6. Decidir, usando árboles semánticos, si las fórmulas $(P \wedge Q)$ y $\sim(P \to \sim Q)$son lógicamente equivalentes o no.



Como todas las ramas se cerraron, las fórmulas son lógicamente equivalentes.

Ejercicio

Utilizar el método de árboles semánticos para demostrar ejemplos y ejercicios de la sección 1.

Apéndice
Explicación de algunos términos de la Teoría Elemental de Conjuntos empleados en el libro

Un conjunto es una colección bien definida de objetos. Los conjuntos serán denotados por letras mayúsculas: A, B, C,....

Ejemplos de conjuntos: El conjunto de todos los números enteros, el conjunto de todos los seres humanos, el conjunto de todas las palabras en español que tienen menos de 4 letras.

Cuando un objeto x está en un conjunto A se dice que es un elemento de A o que pertenece a A y se escribe $x \in A$.

Ejemplos: Si llamamos A, B y C, respectivamente, a los ejemplos de conjuntos dados anteriormente entonces tenemos:

$2 \in A$, $5 \in A$, Octavio Paz $\in B$ y 'pan' $\in C$.

Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen exactamente los mismos elementos. Notación: $A=B$

Hay dos formas de describir a los conjuntos:

a) Por extensión. Dando una lista de todos los elementos del conjunto. $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ quiere decir que A es el conjunto cuyos elementos son $a_1,\ldots,a_n$ y sólo ellos.

b) Por comprehensión. Dando una propiedad satisfecha por todos los elementos del conjunto y sólo por ellos. Si P es una propiedad, $A=\{x: P(x)\}$ quiere decir que A es el conjunto de todos aquellos objetos que tienen la propiedad P.

Ejemplos:

$\{1,2,3\}=\{x$: x es un número entero, positivo y menor que $4\}$.

$\{2,4,6\}=\{x$: x es un número par mayor que 1 y menor que $7\}$.

El conjunto que no tiene elementos se llama conjunto *vacío* y se denota por $\varnothing$

Si A y B son dos conjuntos decimos que A *está contenido en* B o que A es un *subconjunto* de B si y sólo si todo elemento de A es a su vez un elemento de B (en signos: $A \subset B$).

Ejemplos.

1. $\{2,4\} \subset \{2,4,6\}$
2. $\{x$: x es una mujer$\} \subset \{x$: x es un ser humano$\}$.
3. $\varnothing$ es un subconjunto de cualquier conjunto. Pues de lo contrario tendría que existir algún elemento de $\varnothing$ que no fuera elemento de algún conjunto, pero $\varnothing$ no tiene elementos.

Observaciones.

1. A=B si y sólo si A está contenido en B y B está contenido en A.

2. El orden en el que aparecen los elementos de un conjunto es irrelevante. Así:

$$\{2,4,6\}=\{4,2,6\}=\{2,2,4,6\}.$$

3. Las relaciones de pertenencia ($\in$) y de contención ($\subset$)son distintas. La primera se da entre un objeto y un conjunto y la segunda se da entre dos conjuntos.

A partir de dos conjuntos A y B se pueden obtener nuevos conjuntos por medio de las siguientes operaciones :

Unión.

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto cuyos elementos son los elementos de A junto con los elementos de B. Notación: $A \cup B$. Por comprehensión, $A \cup B$ se puede definir de la siguiente manera:

$A \cup B=\{x: x \in A \text{ o } x \in B\}$

Intersección

La intersección de dos conjuntos es el conjunto cuyos elementos son aquellos objetos que pertenecen tanto a A como a B. Notación: $A \cup B$. Por comprehensión A´B se puede definir de la siguiente forma:

$A \cap B= \{x: x \in A \text{ y } x \in B\}$

Diferencia

Si A y B son dos conjuntos la diferencia A-B es el conjunto de todos los elementos de A que no están en B.

$A\text{-}B=\{x: x \in A \text{ y } x \notin B\}$

Ejemplos

Si $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{1,3,5\}$ y $C=\{2,4,6\}$ entonces:

$A \cup B=A \cup C=A$, $A \cap B=B$, $A \cap C=C$, $B \cup C=A$, $B \cap C=\varnothing$, $A\text{-}B=C$, $A\text{-}C=B$, $B\text{-}C=B$ y $C\text{-}B=C$.

A veces es importante tomar en cuenta el orden de los elementos de un conjunto, para eso se introduce el concepto de par ordenado. El par ordenado de a y b se denota por $\langle a,b \rangle$ y tiene la propiedad de que si $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$ entonces a=c y b=d. En otras palabras, en un par ordenado el orden en que aparecen los elementos es muy importante. Esto no es cierto para conjuntos pues $\{1,2\}=\{2,1\}$.

La noción de par ordenado se puede generalizar para listas de cualquier número n de elementos y se obtienen las n-adas ordenadas. Notación: $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ denota la n-ada ordenada de $a_1,\ldots,a_n$, en donde a_1 es el primer elemento de la n-ada, a_2 es el segundo elemento de la n-ada, etc. Nuevamente, si $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle=\langle b_1,\ldots,b_n\rangle$ entonces $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, etc.

Si A y B son dos conjuntos, definimos el producto cartesiano de A y B, denotado por AXB, como el siguiente conjunto:

$AXB=\{\langle x,y\rangle: x \in A \text{ y } y \in B\}$

Ejemplos

Si $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{a.b\}$ entonces

$AXB=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle\}$ y

$BXA=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle a,3\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle b,3\rangle\}$.

$BXB=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$

El producto cartesiano de un conjunto A por sí mismo se denota A^2 y es el conjunto de las parejas ordenadas de elementos de A. Esto se puede generalizar para considerar el conjunto de n-adas ordenadas de elementos de A, este conjunto se denota por A^n.

Una relaciónn-aria R en un conjunto A es un subconjunto de A^n. Si $\langle a_1,\dots,a_n\rangle \in R$ decimos que los elementos $a_1,\dots,a_n$ están relacionados bajo R.

Ejemplos

Sea $A=\{1,2,3,4,5\}$

$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$ es una relación binaria en A.

$R_2=\{\langle 3,4,5\rangle\}$ es una relación ternaria en A.

A^4 es una relación 4-aria en A.(Bajo la cual todos están relacionados con todos).

$\varnothing$ es una relación n-aria en A para cualquier n. (Bajo la cual nadie está relacionado con nadie).

Sean A y B dos conjuntos. Una función f de A en B es una regla que asocia a cada elemento de A un único elemento de B. A es el dominio de f y B es el codominio o contradominio de f.

Notación. Si $a \in A$ entonces f(a) denota al (único) elemento de B asociado con a bajo f. Si f es una función de A en B esto se denota por $f:A \rightarrow B$.

Ejemplos

Sea $A=\{x$: x es un ser humano$\}$

Las siguientes son funciones de A en A.

f(x)=el papá de x

g(x)=la mamá de x

h(x)=el presidente de México

Esta última función es una función constante, es decir, a todos los elementos del dominio se les asigna el mismo elemento del contradominio. Nótese que esto no viola la definición de función, pues a cada elemento del dominio se le asocia un único elemento del contradominio, lo que está prohibido es asignar a un elemento del dominio varios elementos del contradominio, como en el siguiente caso:

r(x)=el hijo de x,

que no define un único elemento si una persona tiene varios hijos.

Bibliografía

1. Barker, S., *Elementos de Lógica*, McGraw-Hill, México, 1991.
2. Deaño, A., *Introducción a la Lógica Formal*, Alianza Universidad (Nos. 42 y 64), Madrid, 1978.
3. Frege, G., *Conceptografía*, UNAM, México, 1972.
4. Garrido, M., *Lógica Simbólica*, Técnos, Madrid, 1979.
5. Hilbert, D. y Ackerman, W., *Elementos de Lógica Teórica*, Técnos, Madrid, 1968.
6. Hodges, W., *Logic*, Pelican Books, Harmondsworth, 1981.
7. Jeffrey, R. C., *Lógica Formal: Su alcance y sus límites*, Univ. de Navarra, Pamplona, 1996.
8. Kneale, W. y Kneale, M., *El desarrollo de la Lógica*, Técnos, Madrid, 1972.
9. Mates, B., *Lógica Matemática Elemental*, Técnos, Madrid, 1971.
10. Mosterín, J., *Lógica de 1er Orden*, Ariel, Barcelona, 1976.
11. Piaget, J., (ed.), *Tratado de Lógica y Conocimiento Científico*, vol. II, Paidós, Buenos Aires, 1979.
12. Quine, W. O., *Lógica Elemental*, Grijalbo, México, 1983.
13. Stolyar, A. A., *Introduction to Elementary Mathematical Logic*, MIT, Cambridge Mass., 1970.
14. Suppes, P., *Introducción a la Lógica Simbólica*, CECSA, México, 1974.
15. Tarski, A., *Introducción a la Lógica y a la Metodología de las Ciencias Deductivas*, Técnos, Madrid, 1970.
16. Van Frassen, B. C., *Semántica Formal y Lógica*, UNAM, México, 1987.

Lógica Elemental, se terminó de imprimir
en el mes de diciembre de 1996 en los talleres
de Desarrollo Gráfico Editorial, S.A. de C.V.
Municipio Libre 175-A, Col. Portales,
C.P. 03300, México, D.F.
La composición tipográfica fue realizada
por Enkidu Editores, S.A. de C.V.
La edición constó de 1000 ejemplares.

www.elsolucionario.net

El libro que aquí presentamos tiene como propósito principal familiarizar al estudiante con el material y los procedimientos más elementales de la lógica. Constituye, en ese sentido, una introducción a ésta, tan elemental como el rigor y los objetivos mismos de precisión de la materia lo permiten. Ha sido nuestra intención ofrecer con ello un texto que pueda ser estudiado enteramente por cualquier lector atento con la suficiente paciencia como para hacer algunos de los ejercicios de que cada sección va acompañada. Creemos, por esta razón, que tanto el profesor como el estudiante encontrarán en él un instrumento adecuado para adentrarse en estos temas.

En nuestra opinión, el profesor encontrará aquí una guía seria y accesible para la impartición de distintos temas básicos o, por lo menos, sugerencias que podrían apoyar y complementar considerablemente la presentación que haya elegido. Por su parte, el estudiante hallará en él una presentación breve, precisa y, a este nivel, completa de los diversos temas, acompañada, en cada caso, de ejemplos cuidadosamente seleccionados, teniendo, además, con los ejercicios propuestos, la posibilidad de comprobar constantemente sus avances.

Casa abierta al tiempo UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA