

Métodos Numéricos y Optimización:

Trabajo práctico 2

Zöe Velazquez Zorzi y Martina Grünewald

13 de Octubre 2023

Abstract

En el marco de esta investigación, se condujeron múltiples ensayos orientados al análisis de ecuaciones diferenciales en el contexto de aplicaciones prácticas, especialmente en relación a un péndulo simple y un modelo de crecimiento poblacional. El propósito central consistió en la evaluación de dos procedimientos de resolución de tales ecuaciones, a saber, el método de Euler y el método de Runge-Kutta. La indagación se orientó hacia el examen y análisis del desempeño de cada uno de estos métodos en las circunstancias particulares de los casos estudiados, considerando tanto la discrepancia entre sus resultados como la desviación en relación a soluciones analíticas de referencia. En conclusión, nuestros hallazgos indicaron que el método de Runge-Kutta demostró ser significativamente más preciso que el método de Euler para ambos experimentos.

Introducción

Este trabajo tuvo como objetivo principal investigar la estabilidad y convergencia de diversos métodos numéricos, así como el comportamiento dinámico de sistemas físicos variados. Para lograr esto, se abordó la resolución de las ecuaciones que describen tanto el péndulo simple como la dinámica poblacional, y se procedió a examinar cómo las soluciones se comportan en relación con los métodos numéricos empleados. El experimento implicó la manipulación de condiciones iniciales diversas y variaciones en los intervalos de tiempo, permitiendo la reconstrucción numérica de la trayectoria de cada sistema. La manipulación de las condiciones iniciales en ambos experimentos nos permitió un entendimiento más profundo de las ecuaciones y demostró la superioridad del método de Runge Kutta en términos de precisión. A lo largo de este trabajo, se presentarán los detalles de los experimentos realizados, los resultados obtenidos y las conclusiones derivadas de esta investigación.

1 Métodos numéricos utilizados

Euler

El método explícito de Euler es un método numérico iterativo que se utiliza para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Este consiste en dividir el dominio de tiempo en intervalos pequeños y calcular una estimación de la solución en cada uno de estos. Para utilizar este método se necesitan tener un α que funcione como condicion inicial y_0 , un intervalo $[a, b]$ en el cual está el valor t al cual se quiere estimar y un N que representa la cantidad de subintervalos que se quieren dividir.

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h * f(t_i, y(t_i)) \quad (1)$$

donde t_i es el valor de la variable t en la i -ésima iteración, $y(t_i)$ representa la estimación del valor de la variable, h es el tamaño de los intervalos, $t_{i+1} = t_i + h$ se refiere al valor de t en la siguiente iteración, y f es la ecuación diferencial que se quiere resolver, que tiene como parámetro un t y una estimación $y(t)$.

Este proceso se repite hasta llegar al último intervalo. Este método es usualmente elegido debido a su simplicidad para ser ejecutado.

Runge-Kutta 4

El método de Runge-Kutta es un método numérico utilizado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de una manera más precisa que el método de Euler. El método se basa sobre la idea de la utilización de multiples aproximaciones intermedias en cada paso de tiempo, lo que mejora la precisión. A continuación se presenta la fórmula de Runge-Kutta de orden 4, el elegido para este trabajo.

$$w_0 = \alpha \quad (2)$$

$$k_1 = h * f(t_i, w_i) \quad (3)$$

$$k_2 = h * f(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}) \quad (4)$$

$$k_3 = h * f(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}) \quad (5)$$

$$k_4 = h * f(t_{i+1}, w_i + k_3) \quad (6)$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (7)$$

donde w_i es el valor de w en la i -ésima iteración, t_i es la estimación del valor en la iteración i y f es la ecuación diferencial que se busca resolver con parámetros $f(t, y)$.

Este proceso iterativo se repite hasta obtener el valor deseado de la variable.

2 Otras herramientas utilizadas

A lo largo de los experimentos, específicamente para el caso del péndulo, se recurrió al uso de las energías producidas por este para estudiar el comportamiento de los métodos. A continuación, la presentación de las fórmulas:

Energía Cinética

$$T = \frac{1}{2}ml^2\theta^2 \quad (8)$$

Energía Potencial

$$V = -mgl\cos\theta + mgl \quad (9)$$

Energía Total

$$E = T + V \quad (10)$$

3 Desarrollo experimental

El desarrollo experimental se dividió en dos experimentos. Aunque se abordaron sistemas distintos, el objetivo en ambos casos fue identificar el método numérico más eficaz y preciso, junto con las condiciones iniciales más convenientes. Esto se logró mediante una variada manipulación de esas condiciones iniciales y mediante estudios de error que nos llevaron a seleccionar las que presentaban el menor error. A continuación se presentará un análisis detallado de los experimentos.

Descripción de los experimentos

3.1 Caso del péndulo simple

En este experimento, se realizó el análisis de un péndulo simple, un sistema físico que consiste en una masa suspendida de una cuerda de longitud fija. El objetivo fundamental fue investigar el comportamiento del péndulo y evaluar la eficacia de dos métodos numéricos: Runge-Kutta 4 y Euler. Estos métodos se utilizaron para resolver la ecuación diferencial que describe el comportamiento del péndulo, que se define como:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0, \quad (11)$$

Se realizaron simulaciones variando el ángulo inicial del péndulo, utilizando dos valores distintos: $\pi/6$ y $\pi/2$. Para cada valor de ángulo inicial, se aplicaron los dos métodos numéricos para resolver las ecuaciones de movimiento del péndulo. Durante las simulaciones, se registraron los valores de ángulo y velocidad angular a lo largo del tiempo. Además, se calculó la energía cinética, la energía potencial y la energía total del péndulo en cada paso de tiempo, con el fin de evaluar la conservación de la energía en el sistema y con ella, la estabilidad de los métodos.

También se compararon los resultados obtenidos mediante los métodos numéricos con la solución analítica en un escenario donde el péndulo tiene un punto de equilibrio estable en $\theta=0$. En ese escenario se realizó una expansión de $\sin \theta$ alrededor de $\theta=0$, lo que toma la forma de:

$$\sin \theta \approx \theta, \quad (12)$$

Y reemplazándolo en la ecuación (11), se obtuvo la ecuación lineal para la dinámica

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (13)$$

la cual resolviendo analíticamente arrojó la siguiente solución:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t), \quad (14)$$

Para todas estas resoluciones, se establecieron los parámetros básicos del péndulo como: $g = 9.81$ (gravedad), $l = 1$ (longitud de la cuerda) y "m=1" (masa del péndulo). Además, el estudio se llevó a cabo en un intervalo de tiempo que abarcó desde 0 hasta 10 segundos.

3.2 Caso Modelo logístico de crecimiento poblacional

En este experimento, se realizó un análisis detallado de un modelo de crecimiento poblacional que implica el estudio de la evolución de una población a lo largo del tiempo. En esta ocasión, a diferencia del caso del péndulo, se utilizó exclusivamente el método de Runge-Kutta 4, considerado el más eficaz. El objetivo principal de este estudio fue evaluar la estabilidad y la convergencia de dicho método al variar las condiciones iniciales y observar su impacto en los resultados. El método de Runge-Kutta 4 se aplicó a la resolución de la ecuación que modela el crecimiento poblacional, expresada de la siguiente manera:

$$\frac{dN}{dt} = r * N \left(1 - \frac{N}{K}\right) \left(\frac{N}{A} - 1\right), \quad (15)$$

en donde N representa el tamaño inicial de la población, r la tasa de crecimiento poblacional intrínseca, K es la cantidad máxima de individuos que se pueden sostener con los recursos disponibles en el sistema y A es el tamaño mínimo de la población necesaria para que esta pueda sobrevivir.

Para abordar este análisis, se llevaron a cabo simulaciones con parámetros fijos, a saber, $K=100$, $A=50$, y $r=0.1$, mientras que N se varió en el rango de 15 a 150. Esto permitió examinar situaciones en las cuales N era mayor, igual o menor que K y A , lo que generó una diversidad de escenarios y soluciones para su análisis.

4 Resultados y discusiones

Luego de llevar a cabo los diferentes experimentos previamente explicados para ambos modelos, se procedió a realizar un análisis de los resultados obtenidos.

En primer lugar, para el caso del péndulo simple resuelto con el método de Euler, se pudo observar en los siguientes gráficos, cómo las energías **no** se mantenían constantes, sino que estas iban aumentando significativamente a medida que el tiempo avanzaba, lo que demostró la mala estabilidad del método para resolver este tipo de problemas.

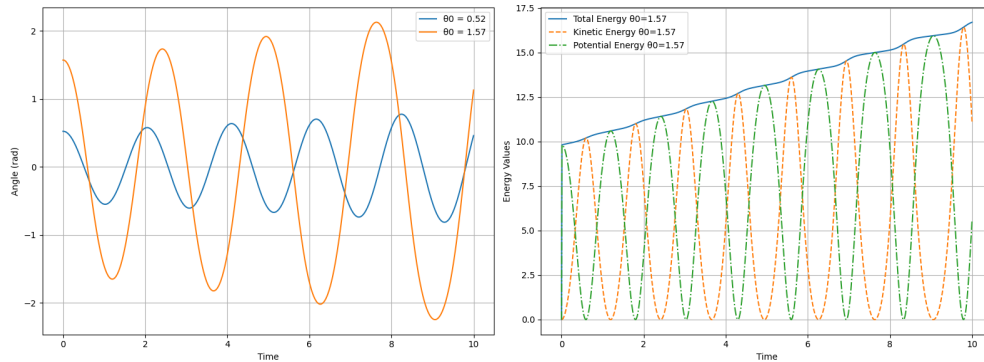
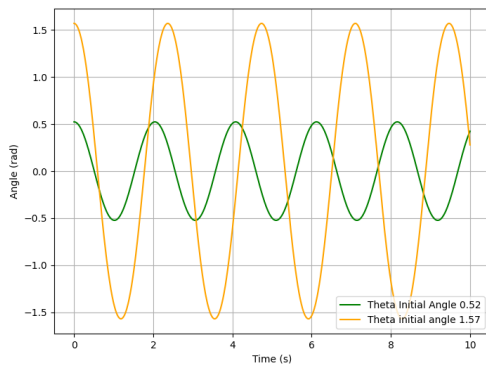
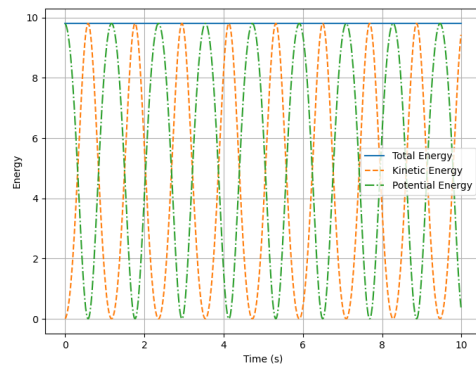


Figure 1: Izq: evolución de la trayectoria con Euler, Der: Evolución de la energía con respecto del tiempo

Por el contrario, en la resolución obtenida con el método de Runge-Kutta 4, graficamente se pudo observar cómo la evolución de las energías se mantuvo constante, demostrando que el método posee una mayor estabilidad.



(a) Evolución del ángulo (en radianes) del péndulo en función del tiempo (en segundos)



(b) Evolución de la energía en el sistema del péndulo en función del tiempo

Figure 2: Resolución con Runge Kutta 4

Pero, como fue explicado previamente, también se resolvió la ecuación analíticamente; pero esta solución solo funcionó correctamente para valores de θ extremadamente pequeños, y observó que mientras mayor era el valor de θ , mayor el error cometido.

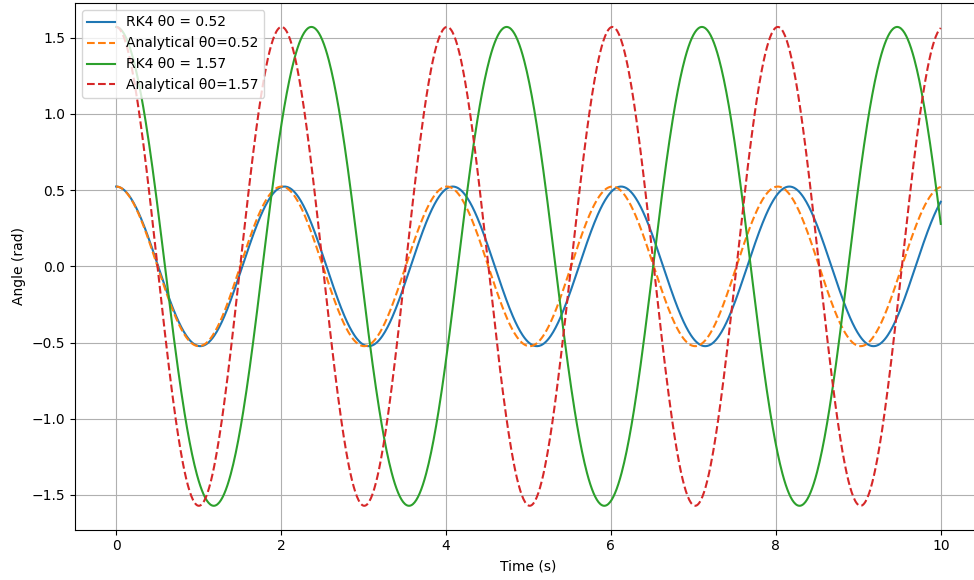


Figure 3: Comparación de la solución analítica contra la obtenida con Runge-Kutta

Graficamente se pudo apreciar como cuando $\theta = 0.52$, la evolución del ángulo en función del tiempo es casi la misma, pero cuando $\theta = 1.57$ la diferencia entre las curvas se acrecenta. Los cálculos arrojaron que el menor error cometido ($\theta = 0.01$, $t = 0.01$) fue de 0.035, mientras que el mayor error cometido ($\theta = 0.11$, $t = 0.1$) fue de 1.19.

En el siguiente gráfico se muestra una curva creciente, la cual representa el crecimiento del error en comparación con el θ elegido; demostrando una vez más que mientras mayor sea el θ , mayor el error cometido.

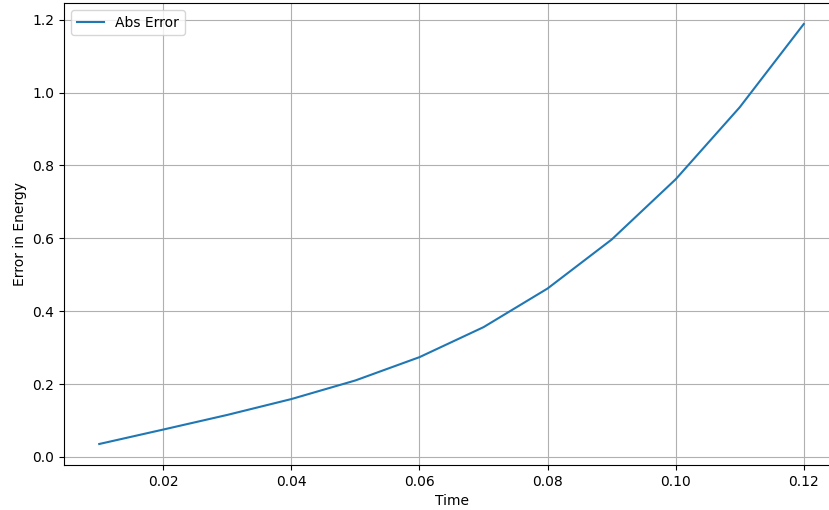


Figure 4: Evolución del error entre la energía de la solución analítica y la de Runge-Kutta

Otro resultado interesante, fue el obtenido con la prueba de usar diferentes valores para el paso (h) del modelo, ya que se observó que (de la misma manera que con el tita), mientras más grande sea este h , mayor era el error. Es importante destacar que este resultado no es siempre igual, sino que tiende a estancarse, como comienza a observarse en el gráfico.

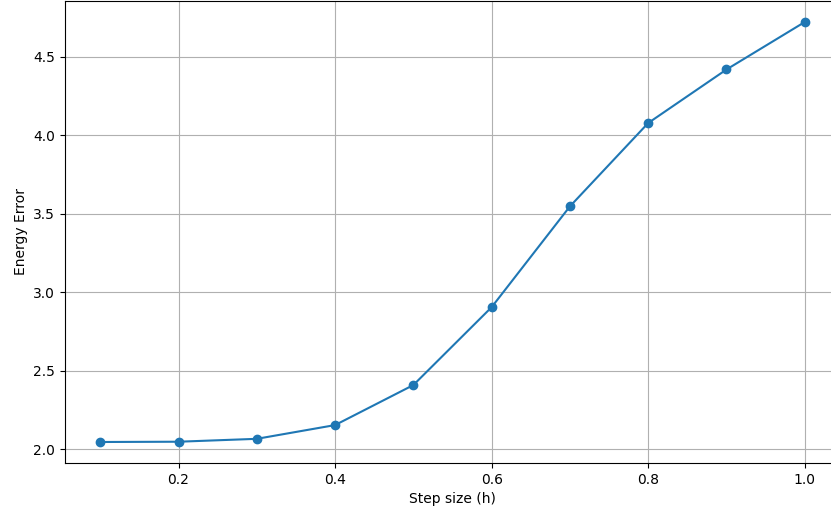


Figure 5: Evolución del error con respecto al tamaño de h

Para seguir analizando la estabilidad que Runge-Kutta aparentaba poseer, se realizó un diagrama de fases. En el se puede observar una repetición de óvalos uniforme.

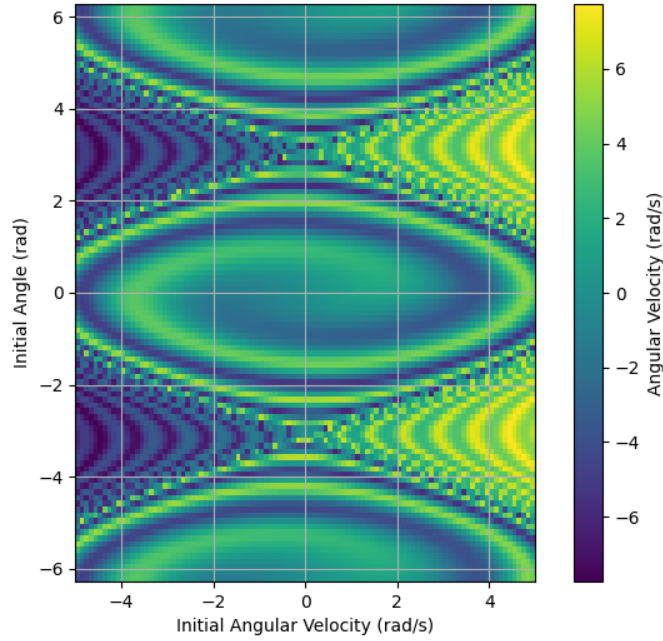


Figure 6: Diagrama de fases del péndulo simple con Runge-Kutta

Por otro lado, como se comentó previamente, para el modelo de crecimiento poblacional solo se aplicó el método de Runge-kutta. Luego de realizar los gráficos donde hubo variaciones en los valores de N_0 y r , específicamente en el de la izquierda, es posible apreciar que cuando $N_0 < A$ la población tiende a desaparecer

y cuando $N_0 = A$ la población se mantiene constante. Cuando $A < N_0 < K$, la población tiende a crecer hasta K , cuando $N_0 = K$ se mantiene constante en K y cuando $N_0 > K$ la población disminuye y tiende a K .

En el segundo gráfico de la derecha se ilustra cómo diferentes valores de la tasa de crecimiento r afectan la evolución de la población cuando el valor inicial de la población (N_0) se mantiene constante, y cómo un mayor valor de r genera un crecimiento más rápido que con uno menor.

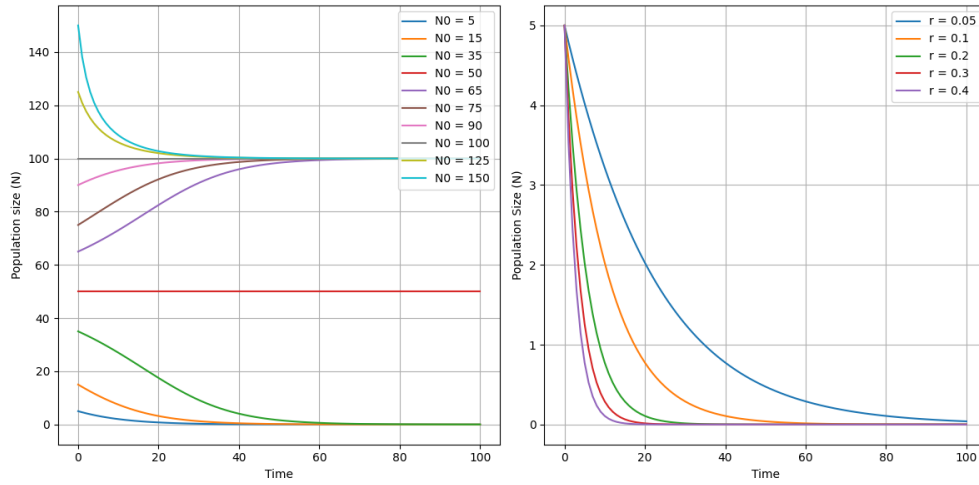


Figure 7: Izq: resolución del modelo con Runge-Kutta4 para diferentes N_0 , Der: Evolución del modelo para diferentes valores de r

5 Conclusiones

Después de llevar a cabo análisis exhaustivos en ambos escenarios y aplicar diversos métodos, los resultados arrojaron una clara ventaja en el rendimiento del método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden en comparación con el método de Euler y las soluciones analíticas. Estos hallazgos proporcionan una visión significativa de la idoneidad de estos métodos en diferentes contextos. El método de Euler, a pesar de su simplicidad, mostró ser menos preciso y estable en comparación con Runge-Kutta 4. Un aspecto crítico que destacó es la incapacidad del método de Euler para mantener constante la energía total del sistema. Esta falta de conservación de la energía llevó a una pérdida de estabilidad a medida que avanzaba el tiempo, lo que lo hace menos adecuado para resolver problemas donde la conservación de la energía es fundamental. La evaluación de las soluciones analíticas también arrojó resultados interesantes. Aunque las soluciones analíticas proporcionaron resultados precisos para valores de θ muy pequeños, su exactitud disminuyó significativamente a medida que θ aumentaba. Esta discrepancia entre las soluciones analíticas y las soluciones numéricas de Runge-Kutta resaltó la robustez y aplicabilidad más amplia del último método. Esto fue aún más evidente al observar el diagrama de fases, que mostró una evolución uniforme con óvalos, indicando una oscilación constante y un sistema no caótico. En contraste, si se hubiera graficado el mismo escenario con un θ grande utilizando la solución analítica, se habría observado caos en lugar de una oscilación uniforme, como proporciona Runge-Kutta.

Un hallazgo especialmente intrigante en estos experimentos fue la variación de los valores del paso (h) en el modelo. Esta variación resultó crucial, ya que se demostró que el tamaño del paso afecta la precisión y la estabilidad de los métodos numéricos utilizados, en particular, el método de Runge-Kutta de cuarto orden. A través de esta prueba, se pudo observar cómo la elección del valor de h influye en la calidad de las soluciones numéricas y en la convergencia del método. Cuando se aumenta el valor de h , se reduce la cantidad de puntos de muestreo a lo largo de la curva de solución, lo que conlleva a una aproximación menos detallada de la solución real. Esto puede resultar en una pérdida de precisión en los resultados, especialmente en regiones de la curva donde la función cambia rápidamente. El gráfico ilustró claramente cómo el error aumentó significativamente a medida que se incrementó el valor de h reforzando la idea de

que un valor pequeño de h tiende a producir resultados más precisos. Es relevante señalar que, aunque el error aumentó al incrementar el valor de h , este aumento no fue infinito. A medida que h crecía, el error tendía a estabilizarse en un valor específico. Esto sugiere que hay un equilibrio entre el tamaño del paso y la precisión de la aproximación. En otras palabras, si se selecciona un valor de h demasiado grande, se podrían obtener resultados menos precisos, pero llegar a un punto donde un valor aún mayor de h no tendría un impacto significativo en el error. Este estudio tiene importantes implicaciones en la elección de h al utilizar métodos numéricos. Con esto se vio que es fundamental encontrar un valor de h que equilibre la necesidad de obtener resultados precisos con la eficiencia computacional. Un h demasiado pequeño puede requerir más cálculos y tiempo de cómputo, mientras que un h excesivamente grande puede comprometer la precisión de las soluciones. En otras palabras, estos hallazgos tienen importantes implicaciones en la elección de h al utilizar métodos numéricos. En función de los objetivos y las restricciones computacionales, es fundamental encontrar un valor de h que ofrezca un equilibrio adecuado entre precisión y eficiencia, lo que asegurará que los resultados sean confiables y útiles para aplicaciones específicas.

En cuanto al modelo de crecimiento poblacional, el método de Runge-Kutta fue preferido en lugar del método de Euler debido a los malos resultados obtenidos con este último. Luego de analizar el gráfico donde variaban los valores de N_0 , nos fue posible ver que cuando N_0 es mucho menor que A , la fracción N/A se acerca a cero, y $N/A - 1$ se convierte en un número negativo. Como resultado, la ecuación diferencial dN/dt tiene un término negativo, lo que significa que la tasa de cambio de la población es negativa. Esto implica que la población disminuirá con el tiempo, y tiende a cero si no hay otras influencias significativas. En otras palabras, cuando la población es mucho menor que la capacidad de carga del entorno $N \ll A$, tiende a disminuir debido a la falta de recursos y espacio en el entorno para mantener un crecimiento positivo.

Por otro lado, cuando el valor inicial de la población $N_0 = A$, es posible concluir que la población permanecerá constante a lo largo del tiempo. Esto se debe a que, en ese caso, $N/A - 1$ será igual a cero en la ecuación diferencial logística, y la tasa de cambio de la población dN/dt se vuelve cero. Cuando N_0 se encuentra entre A y K , la población tiende a K . Por otro lado, para los valores de $N_0 = K$, la población se termina estabilizando en ese valor a lo largo del tiempo. Esto se debe a que el término $1 - N/K$ en la ecuación diferencial se convierte en cero. En otras palabras, si N_0 es igual a K , la población ya ha alcanzado su capacidad máxima desde el principio y, por lo tanto, no habrá un crecimiento ni una disminución significativos. La población se mantendrá constante a K a lo largo del tiempo. Por último cuando $N_0 > K$ la población inicial tiene más individuos de los que el entorno puede mantener a largo plazo. En este caso, se espera que la población disminuya con el tiempo hasta que alcance la capacidad de carga. Cabe aclarar que inicialmente, la población puede llegar a experimentar un crecimiento rápido debido a la disponibilidad de recursos, pero a medida que se acerca a la capacidad de carga, la tasa de crecimiento se reduce y eventualmente, la población alcanzará un equilibrio en el que el tamaño de la población se mantendrá constante en K . Este escenario representa una situación en la que la población inicial es igual a la capacidad máxima del entorno, y la población ya ha ocupado todos los recursos disponibles. Por lo tanto, no habrá un crecimiento adicional en estas circunstancias, y la población permanecerá en equilibrio en su capacidad de carga.

Para concluir, fue posible observar como diferentes valores de la tasa de crecimiento r afectan la evolución de la población cuando el valor inicial de la población (N_0) se mantiene constante. Un valor mayor de r acelera el crecimiento de la población, mientras que un valor menor de r lo ralentiza. Esto demuestra cómo la tasa de crecimiento es un factor crítico en la dinámica del crecimiento de la población en el modelo logístico.

En resumen, los resultados de los estudios respaldaron la superioridad del método numérico Runge-Kutta de cuarto orden sobre el método de Euler y las soluciones analíticas, especialmente en situaciones donde la estabilidad y la precisión son fundamentales.

6 Bibliografía

- Burden, R. L. y Faires, J. D. (1978). Numerical Analysis, 9na Edición.
- Todas las ecuaciones utilizadas a lo largo del trabajo fueron proporcionadas por los docentes o extraídas del libro del ítem anterior.