

Partiel

Exercice 1. Considérons le couple (X, Y) de densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{e^{xy}}{X} \mathbf{1}_{0 < x < y^2} \mathbf{1}_{y > 0}.$$

- a) Déterminer $\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dy > 0$ t.q. $f_{(X,Y)}$ soit correctement normalisée.
- b) Déterminer les densités marginales f_X et f_Y .
- c) Calculer la densité conditionnelle $f_{Y|X=x}(y)$ de Y sachant $X = x$.

Exercice 2. Soit (X, Y) le vecteur gaussien centré de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Soit $W = X + 2Y$, $Z = Y - X$.

- a) Calculer moyenne et variance de la v.a. W .
- b) Déterminer la densité $f_W(w)$ de la v.a. W .
- c) Déterminer tel que X et Z soient indépendantes.
- d) Calculer $E[Y/X]$ et $\text{Var}(Y/X)$.

Exercice 3. Soient X_1, \dots, X_n , n variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{U}(0, 1)$. On pose $U = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ et $V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|^2$.

- a) Calculer $E[V]$.
- b) Déterminer la loi de V .
- c) Déterminer la loi de U et calculer $E[U]$.

Exercice 4. Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $(n+1)$. Montrer que la v.a. $X_n \log(1 + 1/n)$ converge en loi vers une v.a. $E(1)$ (exponentielle de paramètre 1).

Exercice 5. Soient X, Y deux v.a. réelles telles que $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y)/2 = 1$ et que $E[X] = E[Y] = 2$. Leur coefficient de corrélation est $\rho_{X,Y} = 1/2$ ce qui implique qu'il existe deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $X = aY + b$:

- a) Déterminer les deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$.
- b) Calculer $E[(X+3)^2/Y]$.