

## Partiel

[Durée une heure et demi. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont indépendants. Seules les réponses soigneusement justifiées seront prises en compte.]

Exercice 1. Soient  $T, S$  des temps d'arrêt pour une filtration  $(F_n)_{n \geq 0}$ .

- Montrer que  $U = \min(T, S)$  est un temps d'arrêt.
- Montrer que si  $S \leq T$  pour tout  $\omega$  alors  $F_S \subseteq F_T$ .

Exercice 2. Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite iid de valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $g(x) = E[e^{X_1}] < +\infty$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Soit  $(F_n)_{n \geq 0}$  la filtration naturelle de la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  (c-à-d.  $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $F_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$  pour  $n \geq 1$ ) et soit  $S_0 = 0$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  la marche aléatoire engendrée par les  $(X_n)_{n \geq 1}$ .

- Montrer que pour tout t.a.  $T$  borné associé à la filtration naturelle on a que

$$E[e^{-S_T} g(X_T)] = 1, \quad \forall T \text{ borné.}$$

- Soit  $a < 0 < b$  et  $T = \inf\{n > 0 : S_n \in (a, b)\}$ . Utiliser le résultat de la question a) pour montrer que si  $\hat{g}$  est tel que  $g(\hat{g}) = 1$  alors  $P(S_T = a) = e^{-a\hat{g}}$ .
- Soit  $X_k = 1$  avec probabilité  $q$  et  $X_k = 0$  avec probabilité  $1 - q$  et  $p > 1/2$ . Soit  $T = \inf\{n > 0 : S_n = 1\}$ . On suppose que  $P(T < +\infty) = 1$ . Montrer que

$$1 = e^{-p} E[g(X_T)]$$

pour tout  $p > 0$  et utiliser cette équation pour obtenir la fonction génératrice de  $T$  ( $s = E[s^T]$  pour  $|s| < 1$ ).

Exercice 3. Une chaîne de Markov contrôlée  $(X_n, U_n)_{n \geq 0}$  de valeurs dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{U}$  évolue selon la récurrence aléatoire contrôlée

$$X_{n+1} = X_n + U_n + \varepsilon_{n+1}$$

où  $U_n = u_n(X_n, \dots, X_0)$ ,  $u$  un contrôle de valeurs dans  $\mathbb{U}$  et  $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$  est une suite des v.a. iid de moyenne nulle et variance  $\sigma^2 > 0$ . On se fixe un horizon  $T > 0$  et une constante  $\beta \in ]0, 1[$ . On veut trouver un contrôle  $u$  qui minimise le coût moyen (actualisé)

$$W_T^u(t, x) = E_{(t, x)}^u \left[ \sum_{k=t}^{T-1} \beta^{k-t} C(X_k, U_k) + \beta^{T-t} R(X_T) \right]$$

où  $C(x, u) = -u^2 + ax^2/2$  et  $R(x) = a_0 x^2/2 + b_0$  avec  $a, a_0, b_0$  constantes réelles.

- Montrer que la fonction  $W_T(t, x) = \inf_{u \in \mathbb{U}} W_T^u(t, x)$  satisfait l'équation

$$W_T(t, x) = \inf_{u \in \mathbb{U}} \{C(x, u) + \beta E[W_T(t+1, x + u + \varepsilon_1)]\}.$$

- Montrer par récurrence croissante que  $W_T(t)$  est de la forme  $W_T(t) = \frac{1}{2} a_T \beta^{t-T} x^2 + b_T \beta^{t-T}$  avec  $(a_j)_{j=0}^T$  et  $(b_j)_{j=0}^T$  des constantes à déterminer.
- Montrer que le contrôle optimal  $u$  est Markovien et tel que  $u_t(x) = k_T \beta^{t-T} x$  pour une certaine suite  $(k_j)_{j=0}^T$  de constantes.
- Calculer les constantes  $a_j, b_j, k_j$  pour  $j = 0$ .