

# Rattrapage 2009

[Durée deux heures. Aucun document n'est autorisé. Seules les réponses soigneusement justifiées seront prises en compte.]

## 1. Temps d'arrêt

Soient  $T$  et  $S$  des temps d'arrêt par rapport à une filtration  $(F_n)_{n \geq 1}$  donnée et soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  un processus adapté à la même filtration.

- Montrer que  $\max(T, S)$  et  $\min(T, S)$  sont des t.a.s.
- Montrer que la v.a.  $X_T$  est  $F_T$  mesurable.
- Montrer que si  $S \leq T$  alors  $F_S \subseteq F_T$ .

## 2. Arrêt optimal en horizon fini

Soit  $(Y_n)_{1 \leq n \leq N}$  le processus des gains pour un problème d'arrêt optimal en horizon fini  $N$  pour la filtration  $(F_n)_{1 \leq n \leq N}$ .

- Donner la définition d'une enveloppe de Snell  $(Z_n)_{n \leq N}$  de  $(Y_n)_{n \leq N}$ .
- Donner la formule récursive satisfaite par l'enveloppe de Snell  $(Z_n)_{n \leq N}$ .
- Soit  $T = \inf \{k : 1 \leq k \leq N \text{ et } Y_k = Z_k\}$ . Montrer que  $T$  est un temps d'arrêt.
- Montrer que  $Z_{n-T}$  est une martingale.
- Montrer que  $E[Z_1] = \sup_T E[Y_T] = J_T$ , le gain moyen optimal du problème d'arrêt.

## 3. Le problème de Moser

On considère une suite iid  $(X_n)_{1 \leq n \leq N}$  tel que  $X_n \geq 0$ ,  $F_n = (X_1, \dots, X_n)$  la filtration associée et  $Y_n = X_n$  le processus des gains. On veut déterminer le gain optimal moyen  $J_T = \sup_T E[Y_T]$ .

- Montrer que  $Z_n$  est mesurable par rapport à  $(X_n)$ .
- Montrer que  $E[Z_n] = E[\sup_{k \geq n} (X_k, E[Z_{k+1}])]$  pour tout  $n < N$ .
- Montrer que  $E[Z_n]$  est une fonction décroissante de  $n$ .
- Montrer que une règle optimale est  $T = \inf_N \{k < N : X_k \geq E[Z_{k+1}]\}$  (où  $\inf_N A = \inf A$  si  $A \neq \emptyset$  et  $\inf_N \emptyset = N$ ).

## 3. Horizon infini

On considère un problème d'arrêt en horizon infini. On suppose que  $E[(\sup_{n \geq 1} Y_n)_+] < \infty$ . Soit  $T$  un t.a. et  $\tilde{T} = \inf \{n \geq 1 : E[Y_T / F_n] \leq Y_n\}$  (+ si l'ensemble est vide). On rappelle que  $S$  est un temps d'arrêt régulier si et seulement si pour tout  $n \geq 1$  on a que  $E[Y_S / F_n] > Y_n$  sur l'événement  $\{S > n\}$ .

- Montrer que  $\tilde{T} \leq T$ .
- Montrer que  $E[Y_T] = E[Y_{\tilde{T}}]$ .
- Montrer que  $\tilde{T}$  est un t.a. régulier.
- Montrer que si  $T_1$  et  $T_2$  sont t.a. réguliers alors  $E[Y_{\max(T_1, T_2)}] = \max(E[Y_{T_1}], E[Y_{T_2}])$ .