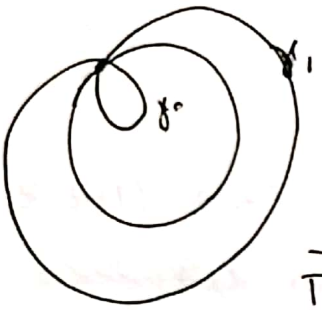
$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^{2015}-1}\,dz = \underbrace{\int_{\gamma_0} \frac{1}{z^{2015}-1}\,dz}_{=0} + \int_{\gamma_1} \frac{1}{z^{2015}-1}\,dz$$



$$P(z) = \prod_{i=1}^{d} (z-a_i)$$

$$\frac{1}{\prod (z-a_i)} = \sum_{i=1}^{d}{}' \frac{\alpha_i}{(z-a_i)} = \frac{\sum' \alpha_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{d} (z-a_i)}{\prod_{i=1}^{d} (z-a_i)} = \dots$$

$$\frac{1}{z^{2015}-1} = \sum_{i=0}^{2015}{}' \frac{\alpha_i}{z-\omega^i}, \quad \omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{2015}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{2014}{}' \frac{1}{z-\omega^i} = \frac{\sum_{i=0}^{2014}{}' \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2014} (z-\omega^j)}{\prod_{i=0}^{2014} (z-\omega^i)} = \frac{2015\, z^{2014}}{z^{2015}-1} \quad (\text{no resulta})$$

$$\sum_{i=0}^{2014}{}' \frac{\omega^i}{z-\omega^i} = \underline{\qquad\qquad} \dots$$

$$\prod_{j=0}^{2014} (z-\omega^j) = z \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2014} (z-\omega^j) - \omega^i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2014} (z-\omega^j)$$

$$2015\,(z^{2015}-1) = z \sum_{i=0}^{2014}{}' \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2014} (z-\omega^j)$$

$$= 2015\, z^{2015} - (z^{2015}-1)\left(\sum_{j=0}^{2014}{}' \frac{\omega^j}{z-\omega^j}\right)$$

$$\frac{2015}{z^{2015}-1} = \sum_{j=0}^{2014} \frac{\omega^j}{z-\omega^j} \qquad \therefore \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{2015}-1}, \omega^j\right) = \frac{\omega^j}{2015}.$$

$U \subseteq \mathbb{C}$ abierto convexo, $f: U \to \mathbb{C}$ holomorfa no constante

Sea $p \in U$, $f(p)=0$:

$f(z) = (z-p)^n g(z)$; $g: U \to \mathbb{C}$ holomorfa que no se anula en p.

$$f'(z) = n(z-p)^{n-1} g(z) + (z-p) g'(z) = (z-p)^{n-1}(ng(z) + (z-p) g'(z))$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{f'}{f}(z)}_{\text{derivada logarítmica}} = \frac{ng(z) + (z-p)g'(z)}{(z-p)g(z)} = \frac{n}{z-p} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Tenemos que $Res\left(\frac{f'}{f}, p\right) = n$.

<u>Principio del argumento</u>.

γ curva de Jordan C^1 a pedazos en U tal que no contiene ~~de~~ ceros de f y tal que el interior de $\gamma \subseteq U$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = \text{número de ceros de } f \text{ contados con multiplicidad en el interior de } \gamma.$$

<u>Teorema de Rouché</u>.

γ curva de Jordan en U C^1-pedazos, tal que la región que encierra γ está contenida en γ.

Sean $f, g: U \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que para todo $z \in \gamma$

$|f(z)| > |g(z)|$ y tq f no se anula en γ.

$\Rightarrow f, f+g$ tienen el mismo número de ceros en el interior de γ.

$f_t := f + tg, \quad t \in [0,1] \quad , \quad 0 = f_t(z) + tg(z)$

$f_t : U \to \mathbb{C}$ holomorfa tq no se anula en γ.

$$N(f_t, \text{interior } \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}\,dz$$

$\boxed{|f(z)| > |f(z) - \tilde{f}(z)|}$

$t \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}\,dz$ continua

$$\underset{\substack{\parallel \\ f}}{N(f_0, \text{interior } \gamma)} = \underset{\substack{\parallel \\ f+g}}{N(f_1, \text{interior})}$$

Aplicación para demostrar el 1º teo. fundamental del álgebra.

$$R > 0 \text{ tq : } \frac{|a_0| + |a_1|R + \dots + |a_{d-1}|R^{d-1}}{|a_d|} < R^d$$

$$|z| = R \quad \Rightarrow \quad |\underbrace{P(z) - a_d z^d}_{:= g(z)}| \leq |\underbrace{a_d z^d}_{:= f(z)}|$$

Teo de Rouché $\Rightarrow N(P, B(0,R)) = N(a_d z^d, B(0,R)) = d.$

$t \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}\,dz \in$ conjunto discreto

continua

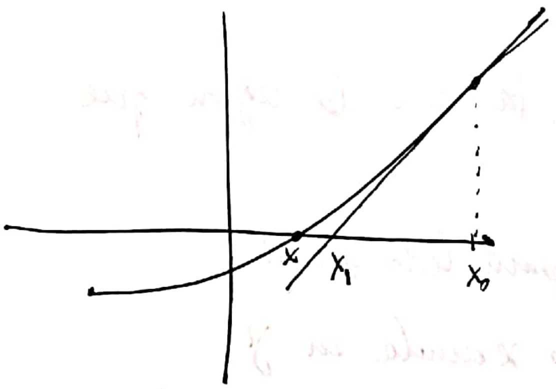
conexo $\mapsto$ conexo

$\overset{?}{\Rightarrow}$ constante

$$|P(z) - a_d z^d| \leq |a_0| + |a_1|R + \dots + |a_{d-1}|R^{d-1} < R^d |a_d| = |a_d z^d|$$

en $B(0,R)$

Método de Newton.



$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots$$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Tenemos $N_f(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Ahora si f tiene un cero de orden n:

$$f(x) = (x-p)^n g(x) \quad , \quad N_f(x) = x - \frac{(x-p)g(x)}{ng(x) + (x-p)g'(x)}$$

$$f'(x) = n(x-p)^{n-1} g(x) + (x-p)^n g'(x) \quad . \quad N_f(p) = p$$

$$N_f'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f')^2(x)} = \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$f''(x) = \cancel{\ldots}$$

$$= n(n-1)(x-p)^{n-2} g(x) + n(x-p)^{n-1} g'(x) + n(x-p)^{n-1} g'(x) + (x-p)^n g''(x)$$

$$f''(x) = (x-p)^{n-2}\left[n(n-1) g(x) + 2n(x-p) g'(x) + (x-p)^2 g''(x) \right] = \frac{g(x)\tilde{g}(x)}{\hat{g}(x)}$$

$\cancel{f}$ $f(x) = (x-p)g(x)$

$$f'(x) = g(x) + (x-p)g'(x)$$

$$f''(x) = 2g'(x) + (x-p)g''(x)$$

$$N_f'(x) = \frac{(x-p)g'(x)\left(2g'(x) + (x-p)g''(x)\right)}{\left(g(x) + (x-p)g'(x)\right)^2}$$

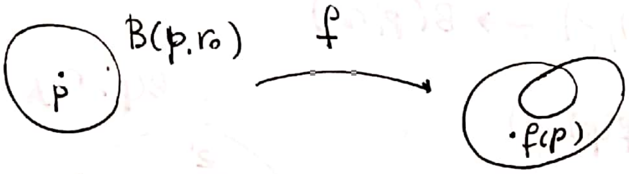
Teorema de la función abierta

$f: U \to \mathbb{C}$ holomorfa no constante, entonces f es abierta.

dem. $p \in U$. $\exists r_1 > 0 : \forall r_0 \in (0, 1)$ ~~[illegible]~~ $r_0 > 0$ tal que $f - f(p)$ no tiene ceros en $\partial B(p, r_0)$ (~~[illegible]~~)

$\rho := \inf_{z \in \partial B(p, r_0)} |f(z) - f(p)| > 0$

ρ chequear



$q' \in B(f(p), \rho)$. $F(z) := f(z) - f(p)$, $G(z) := f(z) - q'$

$|F(z) - G(z)| = |f(p) - q'| < \rho = \inf_{w \in \partial B(p, r_0)} |F(w)|$

G tiene al menos un cero en $B(p, r_0)$

$\Rightarrow$ para todo $r > 0$ pequeño, $f(p)$ esté en el interior de $f(B(p, r))$.

$V \subseteq U$ abierto

$p \in V$: $f(V)$ es abierto.

Obs. Teo de la función abierta $\Rightarrow$ principio del máximo. pendiente

· Toda función holomorfa (no constante) es localmente de la forma $z \mapsto z^n$, $n \geq 1$.

$$\begin{tikzcd}
U \ni p \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & f(p) \arrow[d, "g"] \\
0 \arrow[r, "z \mapsto z^n"'] & 0
\end{tikzcd}$$

f, g son cambios de coordenadas (holomorfas)

$n = \text{ord}(f - f(p), p)$

$\text{ord}(f - f(p), p) = n = 1 \iff f'(p) \neq 0.$

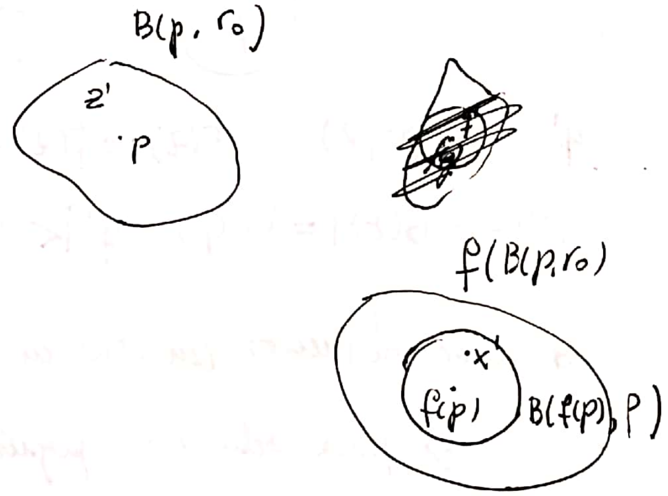
r_0 tal que el único cero de $f - f(p)$ en $\overline{B(p,r_0)}$ es p.

Sea $\rho := \inf\limits_{z \in \partial B(z, r_0)} |f(z) - f(p)|$
chequear

Teorema de Rouché $\Rightarrow$ $\forall q'$, existe único $z' \in B(z, r_0)$ tal que $f(z') = q'$.
Averiguar!

$g(q') := z'$, $g : B(f(p), \rho) \longrightarrow B(p, r_0)$

tq $f \circ g = id_{B(f(p),\rho)}$



$q = f(z)$, $q' = f(z')$

$$\frac{|g(q) - g(q')|}{|q - q'|} = \frac{|z - z'|}{|f(z) - f(z')|}$$

Afirmación. $f(z') - f(z) = \int_z^{z'} f'(z)dz$

dem: $f(z') - f(z) = \int_z^{z'} f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))(z' - z)dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$

$$= \int_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t)\,dt$$

$= f(z') - f(z)$

$$\frac{f(z') - f(z)}{z' - z} = \int_0^1 f'((1-t)z + tz')\,dt$$

$\varepsilon \in (0, r_0)$ tal que $\forall z \in B(p, \varepsilon)$, $\frac{1}{2} < \frac{|f'(z)|}{|f'(p)|} < 2$ (Continuidad de la derivada)

En particular, $\frac{1}{2}|f'(p)| < \left|\frac{f(z') - f(z)}{z' - z}\right| < 2|f'(p)|$

consideramos una sucesión $q := f(p)$

$$\frac{|g(q)-g(q_n)|}{|q-q_n|} < 2\,\frac{1}{|f'(p)|}$$

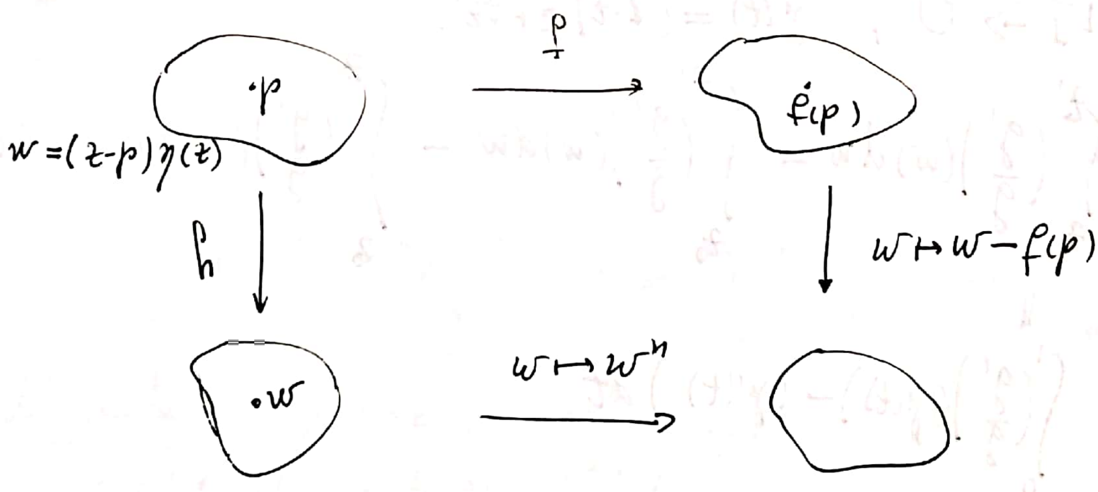
$(q_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $B(f(p),\rho)$ que converge a $f(p)$. $z_n := g(q_n)$

$$g'(p) = \frac{g(q_n)-g(f(p))}{q_n-f(p)} = \frac{z_n-p}{f(z_n)-f(p)} = \frac{1}{f'(p)}$$

Sea f tal que $n := \operatorname{ord}(f-f(p),p) \geq 2$.

$f(z) = f(p) + (z-p)^n g(z)$, g holomorfa, no se anula en p. Supongamos existe η función holomorfa definida en una vecindad de p tal que $\eta^n = g$

$$f(z) = f(p) + \big((z-p)\eta(z)\big)^n$$



$h(z) = (z-p)\eta(z)$
$h(z)^n = (z-p)^n\eta(z)^n = (z-p)^n g(z) = f(z)-f(p)$
$h'(z) = \eta(z) + (z-p)\eta'(z)$
$h'(p) = \eta(p)$
$\eta(p)^n = g(p) \neq 0$.

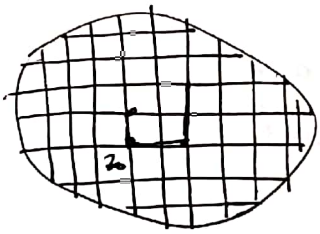
Scanned with CamScanner

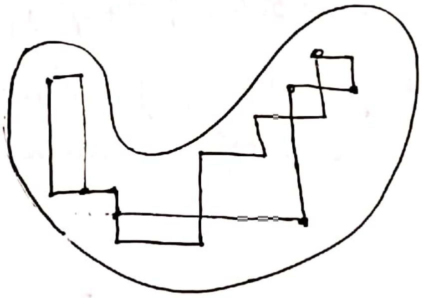
Pd: $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto simplemente conexo, $g: U \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ holomorfa

$\Rightarrow \exists \lambda: U \to \mathbb{C}$ tal que $g = \exp \circ \lambda$ en U.

$$\lambda(z) = \int_{z_0}^{z} \left(\frac{g'}{g}\right)(w)\,dw \qquad (*)$$

Obs. g'/g es holomorfa en U $\rightarrow$ $(*)$ no depende del camino





z, z' en la misma horizontal o en la misma vertical.

$\gamma: [0,1] \to U$, $\gamma(t) = (1-t)z + tz'$.

$$\int_{z}^{z'} \left(\frac{g'}{g}\right)(w)\,dw = \int_{z_0}^{z'} \left(\frac{g'}{g}\right)(w)\,dw - \int_{z_0}^{z} \left(\frac{g'}{g}\right)(w)\,dw = \lambda(z') - \lambda(z)$$

$$\| $$

$$\int_0^1 \left(\frac{g'}{g}\right)(\gamma(t) - \gamma'(t))\,dt$$

Repaso.

- Teo de la función abierta: Estudiar perturbaciones de $f - f(p)$.

- (Funciones holomorfas pueden verse como monomios).

  $f: U \to \mathbb{C}$ holomorfa no constante.

  $p \in U$:

$$\begin{tikzcd} \cdot p \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \cdot f(p) \arrow[d, "\tilde{h}"] \\ \cdot 0 \arrow[r, "z \mapsto z^n"] & \cdot 0 \end{tikzcd}$$

$n := \mathrm{ord}(f, p)$

$h, \tilde{h}$ holomorfas, $h', \tilde{h}'$ no nulas

- (Teo de la función inversa). h holomorfa, $h'(p) \neq 0 \Rightarrow h$ admite inversa holomorfa localmente.

$\cancel{f(z)=(z-p)g(z)}$, $\cancel{g(p)\neq 0}$. $f(z) =: f(p) + (z-p)^n g(z)$, $g(p) \neq 0$.

Lema. $\exists \eta$ holomorfa : $\eta^n = g$.

$h(z) = (z-p)\eta(z)$, $(h(z))^n = f(z) - f(p)$; $\tilde{h}(w) := w - f(p)$.

Pd. U simplemente conexo, $g: U \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ holomorfa $\Rightarrow \exists \lambda: U \to \mathbb{C}$ holomorfa, tal que $\exp(\lambda) = g$.

dem. $\lambda(z) := \lambda_0 + \int_{z_0}^{z} \left(\frac{g'}{g}\right)(w)\,dw$; λ_0 tal que $\exp(\lambda_0) = g(z_0)$. $\left(\lambda'(z) = \frac{g'}{g}(z)\right)$

Calculamos: $\left(\frac{\exp(\lambda)}{g}\right)' = \frac{\exp(\lambda)\lambda' g - \exp(\lambda) g'}{g^2} = \frac{\exp(\lambda)}{g^2}(\lambda' g - g') = 0$ ∎

Rama principal del logaritmo. $g(z) = z$, $U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

Rama principal del logaritmo es $\ln(z) := \int_1^z \frac{1}{z}\,dz$.

Sea $r > 0$, tal que $B(p,r)$ está en el dominio de f, tq g no se anula en $B(p,r)$.

$\eta(z) := \exp\left(\frac{\lambda(z)}{n}\right)$ tq $(\eta(z))^n = \exp(\lambda(z)) = g(z)$.

Transformada de Koebe. $g(z)=0$, $g'(z)\neq 0 \Rightarrow \Psi(z)^n = g(z^n)$

$f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ holomorfa inyectiva : $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$ $\quad |a_n|\leq n$.

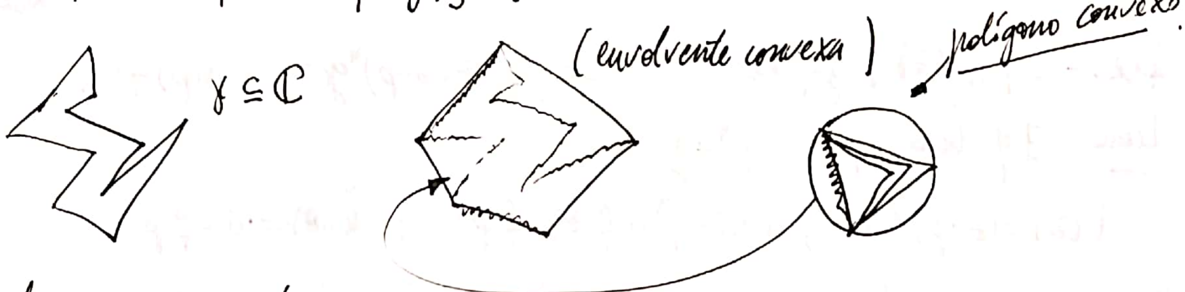
$(K(z)=z+2z^2+\cdots)$

Teorema de la curva de Jordan.

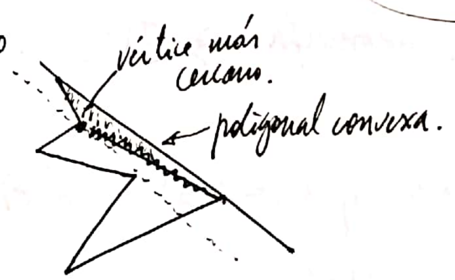
El complemento de una curva simple en S^2 consiste en dos componentes conexas, ambas ~~holomorfas~~ homeomorfas al disco.

(Versión fuerte del teorema). $\gamma: S^1 \to S^2$ continua e inyectiva $\Rightarrow \exists \hat{\gamma}: S^2\to S^2$ homeomorfismo tq $\hat{\gamma}|_{S^1}=\gamma$.

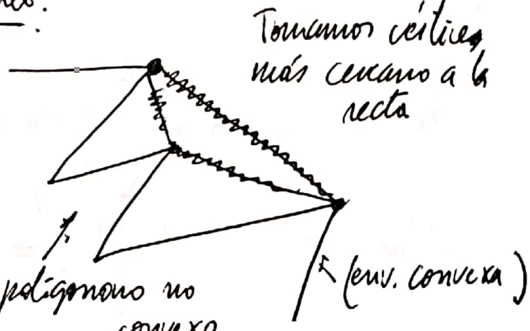
(Caso poligonal)



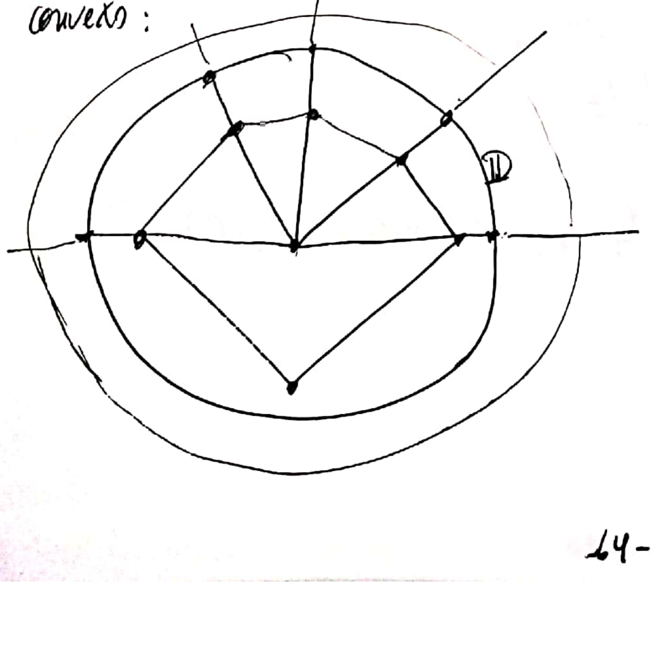
Caso complicado



Otro ejemplo!

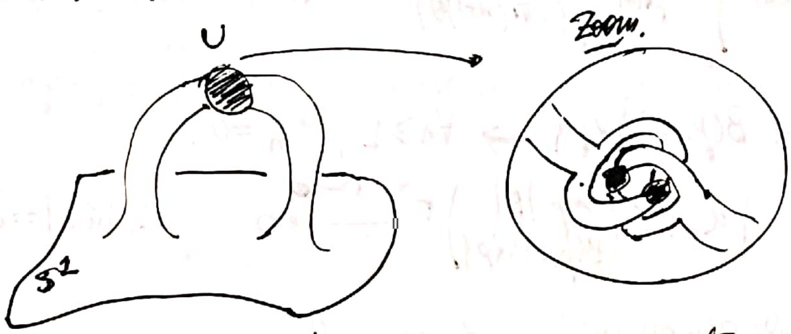


Dicho lo anterior, nos basta estudiar el caso convexo:

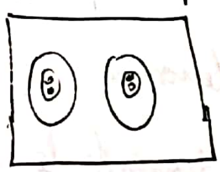


Cuando el polígono no es convexo, se procede inductivamente, de modo de reducir el problema a "triangulos" (polígonos convexos simples).

Esfera de Alexander

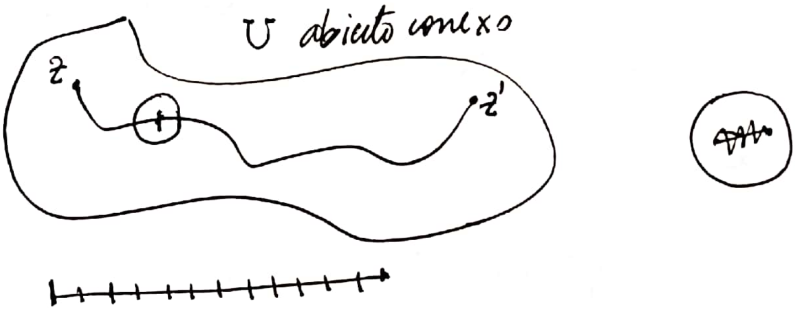


Construcción Tipo Cantor

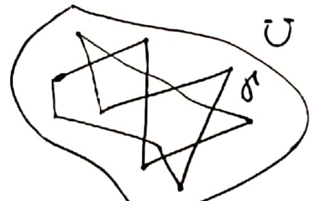


. El complemento de esta esfera no es simplemente conexo.

U abierto conexo



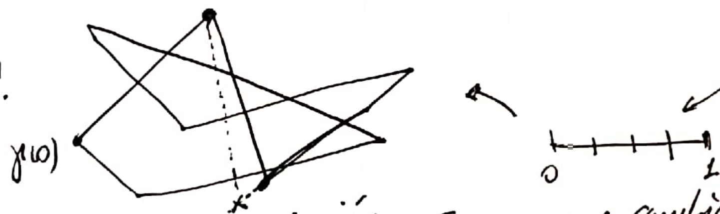
Sea $f : U \to \mathbb{C}$



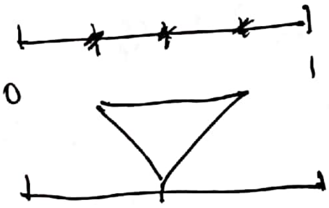
Pd: $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

γ poligonal cerrada.

dem.



Tenemos que cambiar las pendientes de las rectas para que sean distintas entre sí. Luego proceder por inducción.



Volviendo a las singularidades.

$n = ord(f, p)$
- ≥ 1 cero de orden n
- $= 0$ regular
- $-\infty < \leq -1$ polo de orden $-n$
- $= -\infty$ singularidad esencial.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \text{, donde}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int f(z)(z-p)^{-n} \, d\partial(p,r)$$

$\forall r > 0$ pequeño.

Scanned with CamScanner

$$\frac{f^{n}(p)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(p,r)} \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f(p+r\exp(2\pi i\theta))}{r^{n+1}\exp(2\pi i(n+1)\theta)}\, 2\pi i r \exp(2\pi i\theta)\, d\theta$$

Debemos demostrar: f acotada en $B(p,r_0)\setminus\{p\} \Rightarrow \forall n \geq 1,\ a_{-n} = 0$.

dem. Ocupando lo anterior, $|a_n| \leq \left(\sup_{B(p,r)\setminus\{p\}} |f|\right) r^{n} \xrightarrow{r\to\infty} 0 \quad \therefore |a_{-n}| = 0$.

Consecuencia: $\forall r>0$ pequeño, $f(B(p,r)\setminus\{p\})$ es denso en $\mathbb{C}$.

Consideramos ~~f~~

$f:(U\setminus\{p\})\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorfa tq p es singularidad esencial.

Pd: $\forall r>0$, $f(B(p,r)\setminus\{p\})$ es denso en $\mathbb{C}$.

Obs Generalizando a meromorfas $f:U\setminus\{p\}\to\overline{\mathbb{C}}$, $f(B(p,r)\setminus\{p\})$ es denso en $\overline{\mathbb{C}}$.

dem. Supongamos que existe $q\in\mathbb{C}$, $\delta>0$ tq $f(B(p,r)\setminus\{p\})\subseteq\mathbb{C}\setminus B(q,\delta)$

Tomamos la transformación de Moebius:

$$M:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$$
$$z\mapsto\frac{1}{z-q}$$

$M\circ f$ es acotada en $B(p,r)\setminus\{p\}$. Luego existe $h:B(p,r)\to\mathbb{C}$ tq $h|_{B(p,r)\setminus\{p\}}=M\circ f|_{B(p,r)\setminus\{p\}}$

$\therefore f=M^{-1}\circ h$ en $B(p,r)\setminus\{p\}$

$\therefore p$ no es una singularidad esencial de f.

Lema de Schwarz

$f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ holomorfa, $f(0)=0$.

$\Rightarrow |f'(0)|\leq 1$, con igualdad ssi $f(z)=\lambda z$, $|\lambda|=1$.

dem. $\frac{f(z)}{z}=a_1+a_2z+\dots$; $h(z):=\frac{f(z)}{z}$

$|z|=r$: $\sup\limits_{|z|=r}\left|\frac{f(z)}{z}\right|\leq\frac{1}{r}$ $\underset{\text{principio del máximo}}{\Longrightarrow}$ $|h(0)|\leq\sup\limits_{\mathbb{D}}|h(z)|\leq 1$

$|f'(0)|=|h(0)|=1\Rightarrow h$ constante $\Rightarrow f(z)=a_1z$, $a_1=|f'(0)|$

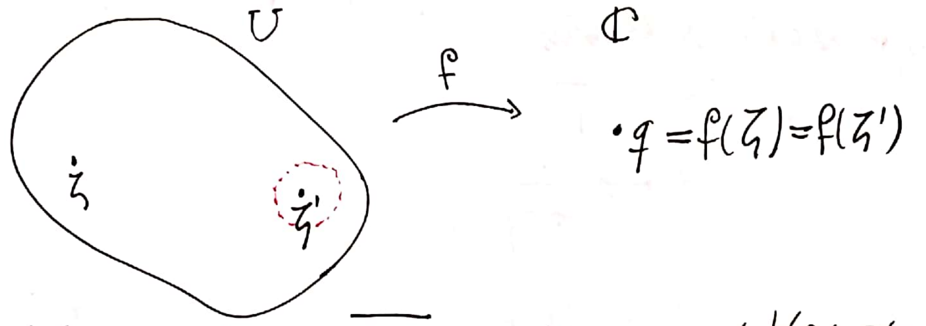
obs. Univalente = holomorfa + inyectiva.

Lema. Todo límite $\overset{\text{no constante}}{\text{localmente}}$ uniforme de funciones univalentes es univalente.

dem. $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo. $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n : U \to \mathbb{C}$ univalente que converge localmente uniforme a una función $f: U \to \mathbb{C}$ no constante.

Fórmula integral de Cauchy $\Rightarrow$ f holomorfa.

Supongamos



$r>0$ tal que $f^{-1}(q) \cap B(\zeta, r) = \{\zeta\}$. $\rho := dist(f(\partial B(\zeta, r)), q) > 0$

$\exists N \geq 1$, tq $\forall n \geq N$, $\sup_{B(\zeta,r)} |f_n - f| < \rho$

Teorema de Rouché $\Rightarrow$ f_n tiene al menos una solución de $f(z) = q$ en $B(\zeta, r)$.

$\Rightarrow$ $n \gg 1$, f_n tiene una solución de $f_n(z) = q$ cerca de ζ y cerca de ζ' ($\Rightarrow\!\Leftarrow$)

∎

· Teorema (Uniformización de Riemann).

Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto simplemente conexo tq $\#(\mathbb{C} \setminus U) \geq 2$.

$\Rightarrow \exists f : U \to \mathbb{D}$ univalente y sobreyectiva.

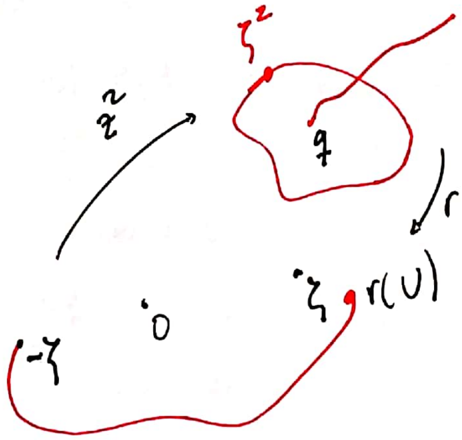
$(\forall p \in U,\ deg_f(p) := ord(f - f(p), p) = 1)$

dem. $\mathcal{F} := \{ f : U \to \mathbb{D},\ ~~holomorfas~~ \text{ univalentes} \mid f(z_*) = 0,\ f'(z_*) > 0 \}$, $z_* \in U$

Sea $q \in \mathbb{C} \setminus U$

$r : U \to \mathbb{C}$ holomorfa tq $r(z)^2 = \underbrace{z - q}_{g(z)}$

$r(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\log(z-q)\right)$; $r(U) \cap (-r(U)) = \emptyset$



$\therefore r$ es univalente y $r(U)$ no es denso en $\mathbb{C}$

$\Rightarrow \exists q' \in \mathbb{C} : r(U)\cap B(q',\delta)=\emptyset$
$\delta>0$

$M:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}},\ z\mapsto \frac{1}{z-q'}$, $\Rightarrow M\circ r$ es acotada en $\overline{U}$

Existe una función afín A tq $A\circ M\circ r(z_*)=0$, $(A\circ M\circ r)'(z_*)>0$, $(A\circ M\circ r)(U)\subseteq \mathbb{D}$ | $A(z)=\lambda(z-M\circ r(z_*))$

■

Sea $D := \sup_{f\in\mathcal{F}} f'(z_*)$.

Por el teo. de Montel, $\mathcal{F}$ es normal $\overset{\mathcal{F}\neq\emptyset}{\Rightarrow} \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{F}$ tq $\lim_{n\to\infty} f_n'(z_*)=D$

y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge localmente uniformemente a una función $f:U\to\mathbb{D}$.

$\therefore f$ holomorfa, $f'(z_*)=D \Rightarrow f$ no constante.

Lema $\Rightarrow f$ es univalente. ($f\in\mathcal{F}$).

Pd. f es sobreyectiva.

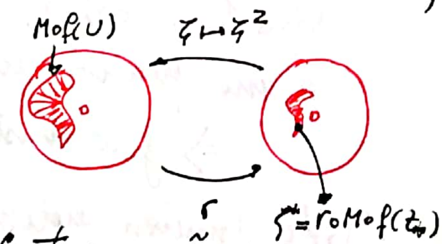
Por contradicción. Supongamos que $f(U)\neq\mathbb{D}$.

Sea $q\in\mathbb{D}\setminus f(U)$. consideramos $M(z)=\frac{z-q}{1-\bar{q}z}$. $M\circ f: U\to\mathbb{D}\setminus\{0\}$ es univalente,

$\Rightarrow M\circ f(U)$ es abierto y simplemente conexo.

$\Rightarrow \exists r: M\circ f(U)\to\mathbb{C}$ tal que $r(w)^2=w$.

Se tiene que $r\circ M\circ f(U)\subseteq\mathbb{D}$, r univalente.



Construimos $\tilde{M}(\zeta)$: $\tilde{M}(\zeta)=\frac{\zeta-\zeta_*}{1-\bar{\zeta}_*\zeta}$, tal que $(\tilde{M}\circ r\circ M\circ f)'(z_*)>0$ $\Rightarrow\ldots$

$\ldots\Rightarrow$ Se tiene que $g:=\tilde{M}\circ r\circ M: U\to\mathbb{D}$ está en $\mathcal{F}$

$h:=\tilde{M}\circ r\circ M\big|_{f(U)} : f(U)\to\mathbb{D}$

$g=h\circ f$ |

$f=h^{-1}\circ g$

$=G\circ g$ donde $G(0)=0$,

$h^{-1}: M^{-1}\circ c\circ\tilde{M}^{-1}\big|_{h\circ f(U)}$, $c(\zeta)=\zeta^2$; $G:=M^{-1}\circ c\circ\tilde{M}^{-1}:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$

Ocupando el lema de Schwarz: $|G'(0)|<1$

$|f'(0)| = |G'(0)||g'(0)| < |g'(0)|$

Sea $f : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ holomorfa no constante.

Tenemos $\sum'_{p\in\bar{\mathbb{C}}} \mathrm{ord}(f,p) = 0$.

$P := \{p \in \bar{\mathbb{C}} \mid \mathrm{ord}(f,p) < 0\}$, $p \in P : n_p := -\mathrm{ord}(f,p)$

$C := \{p \in \bar{\mathbb{C}} \mid \mathrm{ord}(f,p) > 0\}$, $p \in C : n_p := \mathrm{ord}(f,p)$

$\sum'_{p\in C} n_p = \sum'_{p\in P} n_p$

$$R([x:y]) = \left[\prod_{[z:w]\in C} (Xw - Yz)^{n_{[z:w]}} : \prod_{[z:w]\in P} (Xw - Yz)^{n_{[z:w]}}\right]$$

$R : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ holomorfa.

$D := \bar{\mathbb{C}} \setminus (C \cup P)$, def: $g : D \to \mathbb{C}^*$

$z \mapsto f(z)/R(z)$.

$\forall p \in \bar{\mathbb{C}}$: $\mathrm{ord}(g,p) = \mathrm{ord}(f,p) - \mathrm{ord}(R,p) = 0$. En particular, g se extiende a una función holomorfa de $\bar{\mathbb{C}}$ en $\mathbb{C}$,

$\Rightarrow g$ es constante $\Rightarrow f = R\cdot(\text{constante})$.

- Toda función holomorfa de $\bar{\mathbb{C}}$ en $\bar{\mathbb{C}}$ es una función racional. Importante

$\Leftrightarrow$ {Espacio de funciones holomorfas $\bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$} $= \mathbb{C}(z) \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}(z))$

- Toda función de $\bar{\mathbb{C}}$ en $\mathbb{C}$ es constante.

$\to$ Todo automorfismo de $\bar{\mathbb{C}}$ es de la forma $[X:Y] \mapsto [AX+BY : CX+DY]$

Si $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es un automorfismo, entonces f se extiende a una función de $\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$, $f(\infty)=\infty$.

Como f (tal que $f(\infty)=\infty$) es una transformación de Möbius $\Rightarrow f(z)=Az+B$.

Def. Una función $g:X\to Y$ entre espacios topológicos es propia si la preimagen de un compacto es un compacto.

Pd. Toda función holomorfa $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ no constante que es propia, es un polinomio.

$f^{-1}(\bar{\mathbb{D}})\subseteq\mathbb{C}$ es compacto.

Sea $R>0$ tal que $f^{-1}(\bar{\mathbb{D}})\subseteq B(0,R)$. $f:\mathbb{C}\setminus\overline{B(0,R)}\longrightarrow\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$

$\Rightarrow f$ se extiende a una función meromorfa de $\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$

Tratar de entender ~~$\Rightarrow$~~, existen $d\geq 1$, $P(x,y)=\sum_{i=0}^{d} a_i x^i y^{d-i}$, $Q(x,y)=\sum_{j=0}^{d} b_j x^j y^{d-j}$ tales que

$$f([x:y])=[P(x,y):Q(x,y)].$$

$$f^{-1}(\infty)=\{\infty\}\Rightarrow Q(x,y)=b_d y^d \quad (\Leftrightarrow b_0=b_1=\dots=b_{d-1}=0)$$

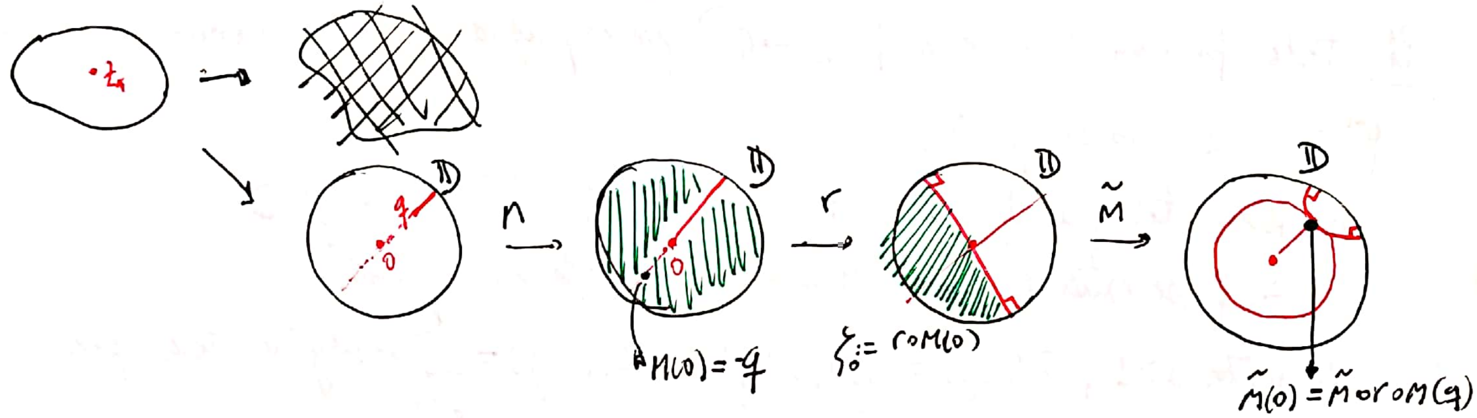
En coordenadas afines, $f(z)=\sum_{i=0}^{d}\left(\frac{a_i}{b_i}\right)z^i\in\mathbb{C}[z]$.

Repaso del teorema anterior.

$U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y simplemente conexo, $z_* \in U$. $\mathcal{F}_0 := \{ f: U \to \mathbb{C}$ univalentes $f(z_*) = 0,\ f'(z_*) > 0 \}$

$\exists f_0 \in \mathcal{F}$ tal que $f_0'(z_*) = \sup_{f \in \mathcal{F}_0} f'$.

Supongamos que $f(U) \not\subseteq \mathbb{D}$



$q \in \mathbb{D} \setminus f(U)$

$f(U) \subseteq \mathbb{D} \setminus \{ \eta q \mid \eta \geq 1 \}$ | $q =$

$M(z) = \dfrac{z-q}{1-\bar{q}z}$, $M(0) = -q = \rho_0 \exp\left(i(\theta_0 + \pi)\right)$

$r \circ M(0) = |q|^{1/2} \exp\left(i\left(\frac{\theta_0 + \pi}{2}\right)\right)$

$\tilde{M}(z) = \dfrac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}$, $\tilde{M}(0) = -\zeta_0 = |q|^{1/2} \exp\left(i\left(\frac{\theta + \pi}{2}\right)\right)$. $\rho_0^{1/2} \sim 1 - \varepsilon/2$

Endomorfismos de $\overline{\mathbb{C}}$ = funciones racionales

Automorfismos de $\overline{\mathbb{C}}$ = transformaciones de Moebius

Endomorfismos de $\mathbb{C}$ = polinomios

Automorfismos de $\mathbb{C}$ = transformaciones afines.

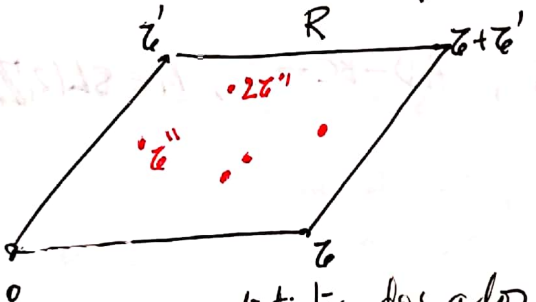
Lema. Todo grupo de traslaciones en $\mathbb{C}$ con órbitas discretas tiene a lo más dos generadores.

dem. $\forall \tau \in \mathbb{C}$, $T_\tau(z) := z+\tau$.

Sea G un grupo de traslaciones con órbitas discretas.

τ, τ' tales que $\mathbb{Z}\tau \cap \mathbb{Z}\tau' = \{0\}$, $T_\tau, T_{\tau'} \in G$

- τ, τ' linealmente independientes, entonces $G(0)$ es densa en $\mathbb{R}.\tau$. $(\Rightarrow\Leftarrow)$
- τ, τ' linealmente independientes. $\Pi = \mathbb{C}/\langle T_\tau, T_{\tau'}\rangle$ compacto.



Supongamos que existe $\tau'' \in \mathbb{C}$ tal que $T_{\tau''} \in G$ y no está en $\langle T_{\tau'}, T_{\tau''}\rangle$

$P_n := n\tau'' - (m\tau + m'\tau') \in R$

Si los P_n son distintos dos a dos, entonces $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n, n'$ tq: $|P_n - P_{\tilde{n}}| < \varepsilon$

$0 \neq (n-\tilde{n})\tau'' - ((m-\tilde{m})\tau + (m'-\tilde{m}')\tau') \in G.0$

$\Rightarrow G.0$ no es discreta en $\mathbb{C}$

$\Rightarrow \exists n, \tilde{n}$ enteros distintos tales que $P_n = P_{\tilde{n}} \Rightarrow \tau'' = \dfrac{(m-\tilde{m})\tau + (m'-\tilde{m}')\tau'}{n-\tilde{n}}$

$= \dfrac{(m-\tilde{m})\tau}{n-\tilde{n}} + \dfrac{(m'-\tilde{m}')}{n-\tilde{n}}\tau'$

$G.0 \subseteq \langle \frac{\tau}{N}, \frac{\tau'}{N} \rangle \Rightarrow G.0$ tiene rango 2

$\Rightarrow G.0 \cong \mathbb{Z}^2$

$\tau \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. $G = \langle T_\tau \rangle$. Cambiando coordenadas suponemos $\tau = 1$

T_1 actúa de forma propiamente discontinua en $\mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\exp(2\pi i)"] \arrow[d] & \mathbb{C}^* \\ \mathbb{C}/\langle T_1 \rangle \arrow[ur, "\varphi \text{ biholomorfa}"'] & \end{tikzcd}$$

- Uniformización del cilindro

G tiene dos generadores

$G = \langle T_1, T_\tau \rangle$, $\operatorname{Im}\tau > 0$; $\mathbb{C}/\langle T_1, T_\tau \rangle \longrightarrow \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 / y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\infty\}$

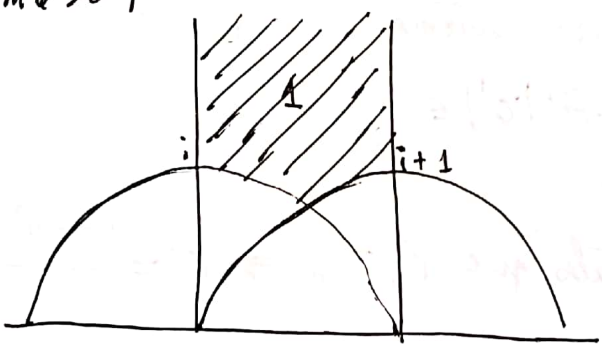
$\wp$ función de Weierstrass ; $x = \wp(z)$, $y = \wp'(z)$

Curva modular.

Observación. Si $M(z) = \dfrac{Az+B}{Cz+D}$; $A, B, C, D \in \mathbb{Z}$; $AD - BC = 1$, $M \in SL(2, \mathbb{Z})$

Entonces $\langle T_1, T_\tau \rangle = \langle T_1, T_{M(\tau)} \rangle$.

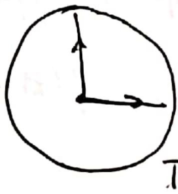
$\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}\tau > 0 \}$



$\mathbb{H}/SL(2,\mathbb{Z})$:= curva modular.

Métricas Planas

• Métricas conformes. $v \in T_z\mathbb{C}$, $|v|_\rho = \rho(z)|v|$



(respeta geometría)

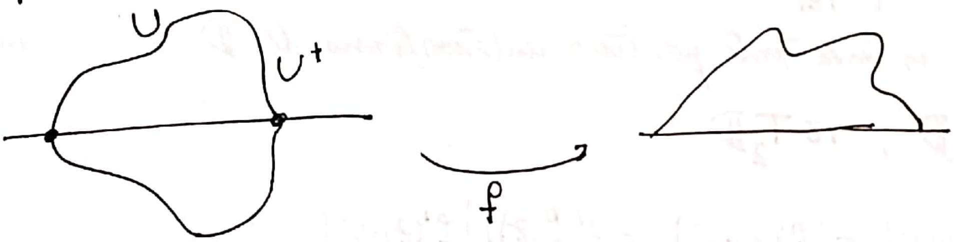
S superficie de Riemann recubierta por $\mathbb{C}$, entonces tiene una métrica plana.
($|dz|$ es invariante por traslaciones)

cilindro bi-holomorfo $\simeq \mathbb{C}^*$ $\left(\rho(z) = \frac{1}{|z|},\ \frac{|dz|}{|z|}\right)$

Endomorfismos propios de $\mathbb{D}$.

$f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ propia, tal que $f^{-1}(0)$. Para estudiar f, primero tenemos que ver el principio de Reflexión de Schwarz.

• Principio de reflexión de Schwarz:



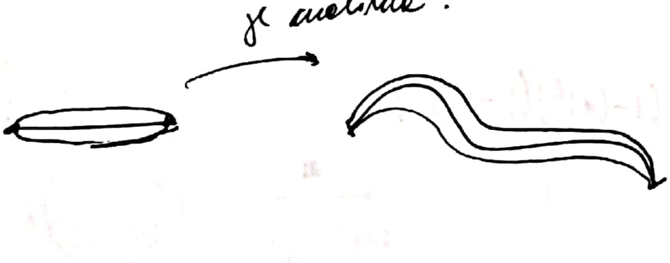
$\overline{U} = U$
$U^+ = U \cap \mathbb{H}$

$f: U^+ \to \mathbb{C}$ holomorfa. f admite extensión continua a $U^+ \cup (U \cap \mathbb{R})$ tal que $f(U \cap \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.

$$\hat{f}: U \to \mathbb{C},\quad \hat{f}(z) = \begin{cases} f(z) & z \in U^+ \cup (U \cap \mathbb{R}) \\ \overline{f(\bar{z})} & z \in \overline{U^+} \end{cases}$$ es holomorfa

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H} \arrow[loop left, "z \mapsto \bar{z}"] \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{D} \arrow[loop right, "z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}"] \end{tikzcd}$$

$\varphi(\mathbb{R}) = S^1$



Lema. f se extiende continuamente a $\overline{\mathbb{D}}$ y $f(S^1) \subseteq S^1$.

dem. Por el principio de reflexión de Schwarz, existe $\hat{f} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ tal que

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} f(z) , & z \in \overline{\mathbb{D}} \\ \dfrac{1}{\overline{f(\frac{1}{\bar z})}} , & z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \end{cases}$$

es holomorfa $\Rightarrow \hat{f}$ es una función racional. $\hat{f}^{-1}(S^1) \subseteq S^1$.

$a_1, \dots, a_k$ ceros de $\hat{f}$ con multiplicidades $m_1, \dots, m_k$, ~~$g(z) = \prod_{i=1}^k \left(\frac{z-a_i}{z-\frac{1}{\bar a_i}} \right)^{m_i}$~~

$$g(z) = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{z-a_i}{1-\bar{a}_i z} \right)^{m_i}.$$

Existe $\lambda \in S^1$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{D}$ y $m_1, \dots, m_k \geq 1$ enteros tales que $f(z) = \lambda \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{z-a_i}{1-\bar{a}_i z} \right)^{m_i}$

Todo automorfismo de $\mathbb{D}$ es de la forma $z \mapsto \lambda \dfrac{z-a}{1-\bar{a} z}$.

- **Métrica hiperbólica** $\rho(z) = \dfrac{1}{1-|z|^2}$

Pd: La métrica hiperbólica es invariante por todo automorfismo de $\mathbb{D}$.

$f(z) = \lambda \dfrac{z-a}{1-\bar{a} z}$, $z \in \mathbb{D}$, $v \in T_z \mathbb{D}$

$$|v|_\rho = \rho(z)|v| \overset{?}{=} |Df(z)v|_\rho = |f'(z) \cdot v|_\rho = \rho(f(z)) |f'(z) \cdot v|$$

$$|f'(z)| \overset{?}{=} \frac{\rho(z)}{\rho(f(z))}$$

Pequeño cálculo:

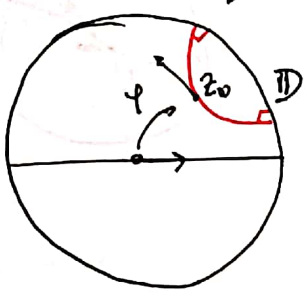
$f(z) = \lambda \dfrac{z-a}{1-\bar{a} z}$, $f'(z) = \lambda \dfrac{1-|a|^2}{(1-\bar{a} z)^2}$, $\rho(f(z)) = \dfrac{|1-\bar{a} z|^2}{|1-\bar{a} z|^2 - |z-a|^2}$

$$\frac{\rho(z)}{\rho(f(z))} = \frac{|1-\bar{a} z|^2 - |z-a|}{1-|z|^2} \cdot \frac{1}{|1-\bar{a} z|^2}$$

$$|1-\bar{a} z| - |z-a|^2 = (1-\bar{a} z)(1-a\bar{z}) - (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = (1-|a|^2)(1-|z|^2)$$

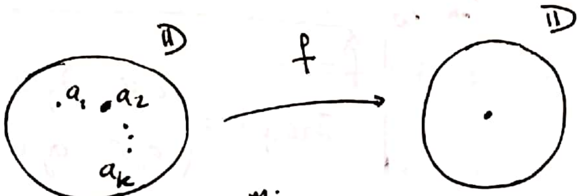
$$\therefore |f'(z)| = \frac{\rho(z)}{\rho(f(z))} \quad \blacksquare$$

¿ Aut($\mathbb{D}$)



$$\lambda \cdot \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

Reposo:

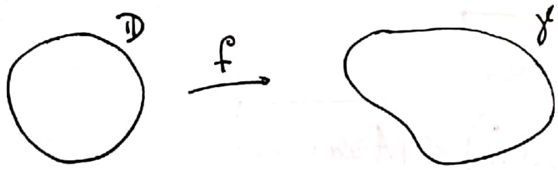


$\cdot\, f(z) = \lambda \prod_{n=1}^{k} \left(\frac{z - a_i}{1 - \bar{a}_i z} \right)^{m_i}$, $a_1, \dots, a_k$ ceros de f (producto de Blaschke)
$m_i = \mathrm{ord}(f, a_i)$

f endomorfismo.

. Todo automorfismo de $\mathbb{D}$ es de la forma $z \mapsto \lambda \dfrac{z - a_i}{1 - \bar{a}_i z}$

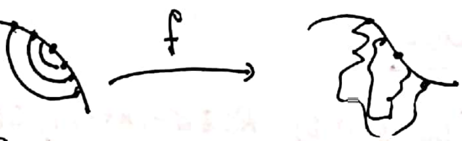
Problema:



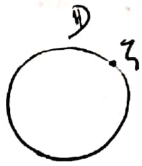
γ curva de Jordan

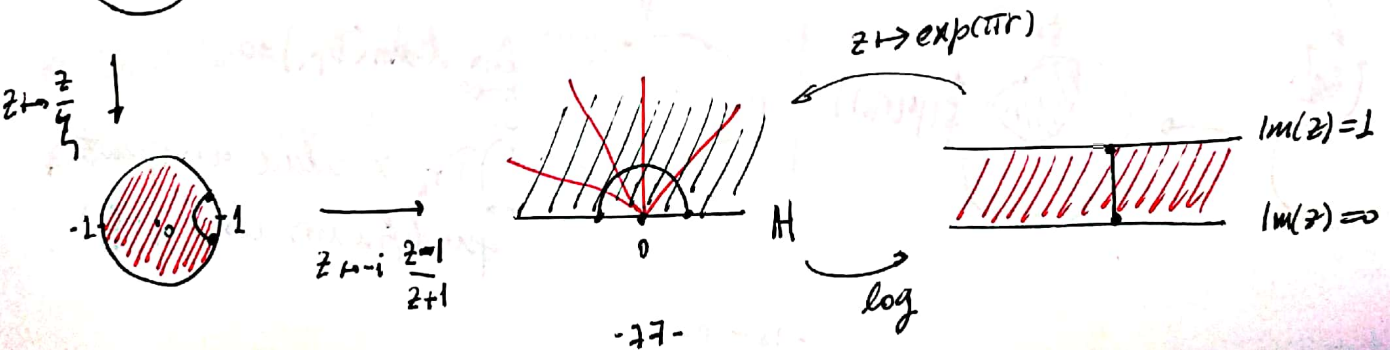
$f : \mathbb{D} \to D_\gamma$ biholomorfa

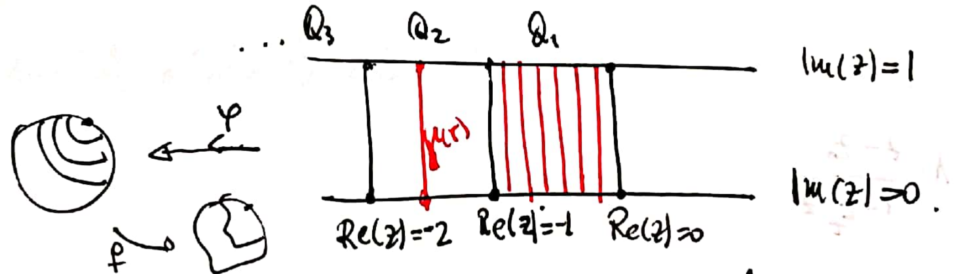
Pd: f se extiende continuamente a $\overline{\mathbb{D}}$.

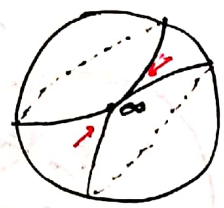


Nos aproximamos mediante curvas









$\gamma(r) = \{ z\in\mathbb{C} \,/\, Im(z)\in(0,1),\ Re\, z = r \}$, $\hat f = f\circ\varphi$.

$$Area(Q_n) = \int_{-n}^{-(n-1)} \text{longitud}(\hat f(\gamma(r)))\,dr = \int_{-n}^{n}\int_0^1 Jac(\hat f)(r,s)\,dr\,ds$$

$$= \int_{-n}^{-(n-1)}\int_0^1 |\hat f'|^2(r+is)\,dr\,ds$$

$\hat f = u+iv$

$Jac(\hat f) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$

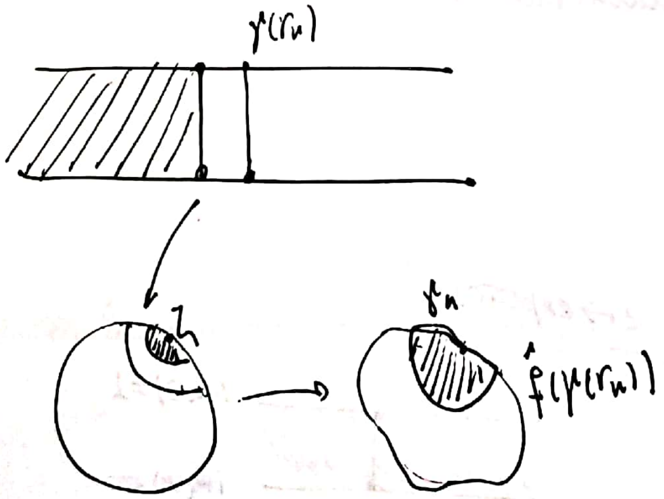
$$\cancel{Area(Q_n)} \int_{-n}^{-(n-1)} \text{longitud}(f(\gamma(r)))\,dr = \int_{-n}^{-(n-1)}\int_0^1 |\hat f'|(r+is) \le \left(\int_{-n}^{-(n-1)}\int_0^1 1^2\,dr\,ds\right)\cdot$$

$$\left(\int_{-n}^{-(n-1)}\int_0^1 |\hat f'|^2(r+is)\,dr\,ds\right)$$

$$= \sqrt{Area\ Q_n}$$

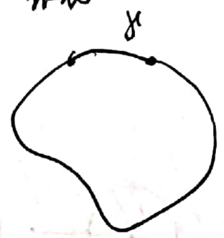
$\Rightarrow \forall n$ existe $r_n\in[-n,-(n-1)]$ tq longitud$(\hat f(\gamma(r))) \le \sqrt{Area(Q_n)}$

Obs. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} Area(\hat f(Q_n)) = Area(D_\gamma) < +\infty \Rightarrow \lim_{n\to-\infty} Area(\hat f(Q_n)) = 0$.



Consideraciones:

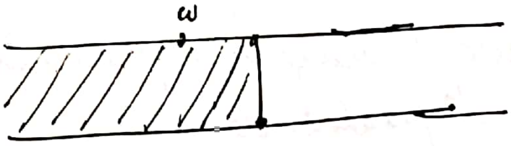
- $\hat f(\{z\in\mathbb{C} / Im\, z\in(0,1),\ Re\, z \le -(n+1)\}) \subseteq D_n$
- $\lim_{n\to\infty}$ longitud de $\hat f(\gamma(r_n)) = 0$



$\lim_{n\to\infty} diam(D_{\gamma_n}) = 0$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_{\gamma_n}$ se reduce a un punto, que definimos como $f(\xi)$

Nos falta estudiar la continuidad en los bordes de la banda



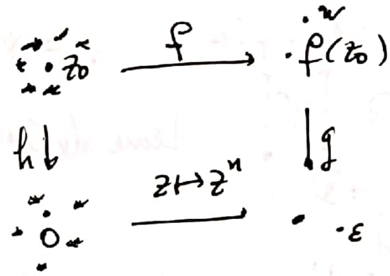
Basta observar que $f(w) \in \overline{D_n}$.

Sea $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ propia (no constante)

P.d.: $\exists$ entero $d \geq 1$, tal que para todo $w\in\mathbb{D}$,

$$\sum_{z\in f^{-1}(w)}' \deg_f(z) = d$$

donde $\deg_f(z) = \operatorname{ord}(f - f(z), z)$



n: grado local.

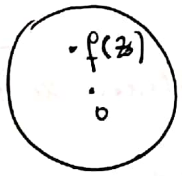
$w_0 \in \mathbb{D}$

$f_0(z) = f(z) - f(z_0)$

$w \in \mathbb{D}$ "cerca" de $f(z_0)$, $g_0(z) = f(z) - w$

$|f_0(z) - g_0(z)| < |f_0(z)|$ | $r \in (0,1)$. $\gamma_r := \partial B(0,r)$

$|w - f(z_0)| < |f_0(z)|$



Ocupamos el hecho de que f es propia.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(z_0),\varepsilon) \subseteq \mathbb{D}$. $f^{-1}(\overline{B(f(z_0),\varepsilon)})$ es compacto.

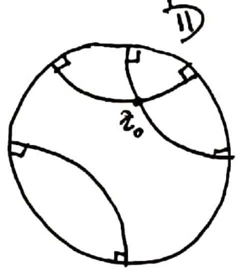
$$f^{-1}(\overline{B(f(z_0),\varepsilon)}) \subseteq B(0,r)$$

$$\Rightarrow \varepsilon' := \inf_{z\in\partial B(0,r)} |f_0(z)| > 0$$

Por teo. de Rouché $\Rightarrow$ $d(w)$ es constante en $B(f(z_0), \min\{\varepsilon,\varepsilon'\})$.

$$d(w) := \sum_{z\in f^{-1}(w)}' \deg_f(z)$$

Repaso: Métrica hiperbólica



- Geodésicas: arcos de circunferencia perpendiculares a $\mathbb{D}$
- No se cumple 5^{to} postulado de euclides.
- $\rho(z) = \dfrac{1}{1-|z|^2}$
- Métrica hiperbólica invariante por automorfismos de $\mathbb{D}$.

Lema (de Schwarz-Pick). $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ holomorfa $\Rightarrow |f'|_\rho \leq 1$. Si $\exists\, z_0 \in \mathbb{D}$ tq $|f'|_\rho(z_0) = 1$ $\Rightarrow f \in Aut(\mathbb{D})$.

Dem.

$$\begin{tikzcd} z_0\in\mathbb{D} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{D}\ni f(z_0) \arrow[d, "\psi"] \\ 0\in\mathbb{D} \arrow[r, "g"] & \mathbb{D}\ \ 0 \end{tikzcd}$$

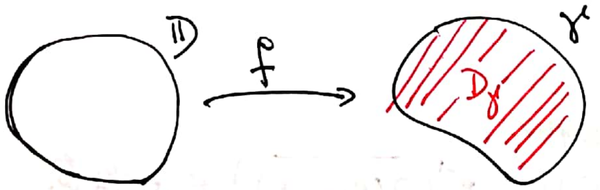
$f = \psi^{-1}\circ g\circ\varphi$

Lema de Schwarz $\Rightarrow \left(|g'(0)|\leq 1 \text{ con igualdad} \Leftrightarrow g\in Aut(\mathbb{D})\right)$

$$|f'|_\rho(z_0) = \underbrace{|(\psi^{-1})'|_\rho(0)}_{=1}\cdot|g'|_\rho(0)\cdot\underbrace{|\varphi'|_\rho(z_0)}_{=1} = |g'(0)| \leq 1$$

$$|f'|_\rho(z_0) = |f'|(z_0)\,\frac{\rho(f(z_0))}{\rho(z_0)}$$

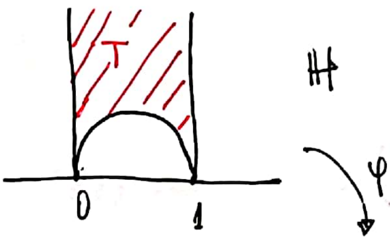
f automorfismo $\Leftrightarrow g$ automorfismo.



γ curva de Jordan

D_γ abierto simplemente conexo.

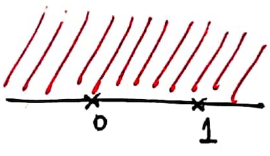
$f:\mathbb{D}\to D_\gamma$ holomorfa $\Rightarrow f$ se extiende a una función continua definida en $\overline{\mathbb{D}}$



$\pi:\mathbb{H}\to\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ recubrimiento universal holomorfo.

$T \xrightarrow{\varphi} \mathbb{H} \xrightarrow{\psi} \mathbb{D}$, $f = (\psi\circ\varphi)^{-1}:\mathbb{D}\to T\subseteq\overline{\mathbb{C}}$

Averiguar: Aplicaciones de Recubrimiento.



Teorema de Montel $\mathcal{F}$ familia de funciones holomorfas de $\mathbb{D}$ en $\overline{\mathbb{C}}$. Supongamos que existen 3 puntos $a,b,c\in\overline{\mathbb{D}}$ distintos dos a dos tales que

$$\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f(\mathbb{D})\subseteq \overline{\mathbb{C}}\setminus\{a,b,c\}.$$

Entonces $\mathcal{F}$ es normal.

dem. $\varphi:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ trans. de Moebius tal que $\varphi(a)=0$, $\varphi(b)=1$, $\varphi(c)=\infty$.

$\forall f\in\mathcal{F}$, $\varphi\circ f(\mathbb{D})\subseteq\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ $\Rightarrow$ existe única función $\tilde f:\mathbb{D}\to\mathbb{H}$ tal que $\varphi\circ f=\pi\circ\tilde f$ y $\tilde f(0)\in T$ $(\tilde f(0)\in\pi^{-1}(f(0)))$.

Sea Ψ transformación de Moebius tal que $\Psi(\mathbb{H})=\mathbb{D}$. $\tilde{\mathcal{F}}=\{\Psi\circ\tilde f \,/\, f\in\mathcal{F}\}$ es normal.

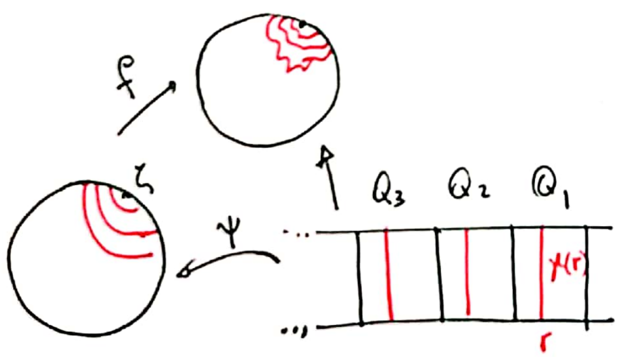
Pd: $\mathcal{F}$ es normal.

Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{F}$. Como la familia $\tilde{\mathcal{F}}$ es normal, existe $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que $(\Psi\circ\tilde f_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ converge localmente uniformemente. $\varphi\circ f_{n_j}=(\pi\circ\Psi^{-1})\circ\Psi\circ\tilde f_n$ ...

(queda pendiente)

Sea $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ holomorfa y propia.

Pd: f se extiende continuamente a $\overline{\mathbb{D}}$.

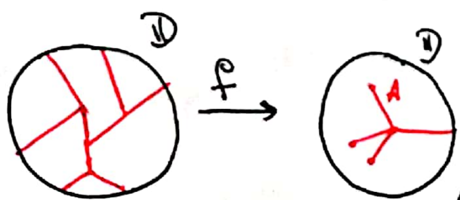


$$\int_{-(n+1)}^{-n} \text{longitud}(f\circ\gamma(r))\,dr \le \sqrt{\text{Area}(f(Q_n))}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \text{Area}(f(Q_n)) = \text{Area}\, f(\mathbb{D}) < +\infty$$

$$\Rightarrow \text{Area}\, f(Q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} .$$

$\exists d\geq 1$ entero tal que para todo $w\in\mathbb{D}$, $\sum_{z\in f^{-1}(w)} \deg_f(z)=d$.



A: árbol, Area$(A)=0$.

A arbol rectificable que contiene los valores críticos de f, y tal que $\mathbb{D}\setminus A$ es simplemente conexo.

$$f : \mathbb{D}\setminus f(A) \to \mathbb{D}\setminus A \quad (\text{aplicación de recubrimiento})$$

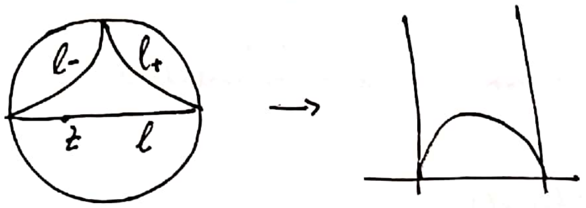
Para cada componente conexa U de $\mathbb{D}\setminus f(A)$, $f : U \to \mathbb{D}\setminus A$ es propia y localmente inyectiva (f biholomorfismo entre U y $\mathbb{D}\setminus A$).

U componente conexa de $\mathbb{D}\setminus f^{-1}(A)$. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \text{Area}(\hat{f}(Q_n \cap \Psi^{-1}(U)) \leq \text{Area}(\hat{f}(U)) \leq \text{Area}(\hat{f}(\mathbb{D}))$

$$\underbrace{\sum_{\substack{U \text{ comp} \\ \text{conexa} \\ \text{de } \mathbb{D}\setminus f^{-1}(A)}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \text{Area}(\hat{f}(Q_n \cap \Psi^{-1}(U))}_{= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \text{Area}(\hat{f}(Q_n))} \leq \sum_{U} \text{Area}(\hat{f}(U)) \leq d \,\text{Area}(\mathbb{D}).$$

Desarrollo prueba

Problema C.

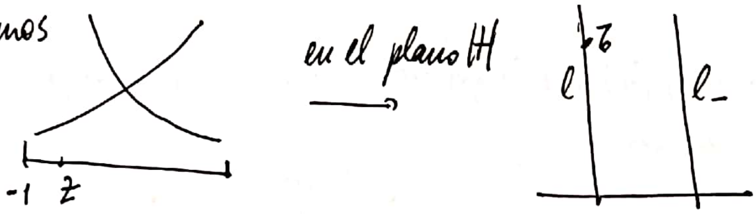


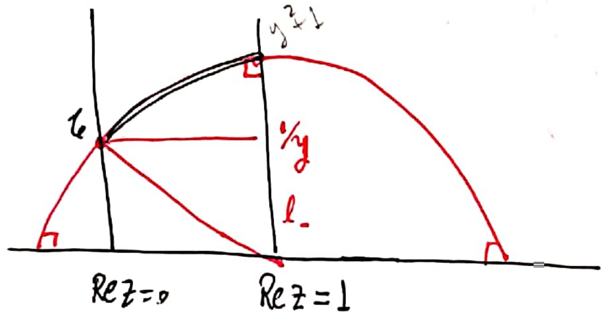
$\mathrm{dist}(\ell, \ell_- \cup \ell_+) = \min(\mathrm{dist}(\ell,\ell_-), \mathrm{dist}(\ell,\ell_+))$

$z \in \ell \mapsto \mathrm{dist}(z, \ell_-)$ (creciente)

$z \in \ell \mapsto \mathrm{dist}(z, \ell_+)$ (decreciente)

Tenemos





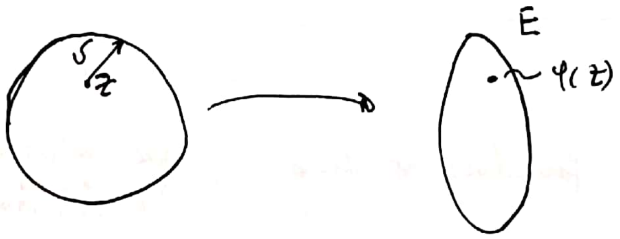
$\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{Im}(z)} ds$, $z = i \cdot y$.

"Distancia tiende a cero" (averiguar).

Problema D.

$\varphi : \mathbb{D} \to E$ biholomorfismo tq $\varphi(0) = 0$.

ρ métrica hiperbólica en E : $|\varphi'(z)| \cdot \frac{1}{1-|z|^2}$



$\frac{v}{1-|z|^2} = |v|_{\mathbb{D}} = 1$

$\rho(z)\,|dz|$

$\rho(\varphi(z))\,|\varphi'(z) v| = 1$

$\rho(\varphi(z)) = \frac{1}{|\varphi'(z)|} \cdot \frac{1}{|v|} = \frac{1}{|\varphi'(z)|} \cdot \frac{1}{1-|z|^2}$

$1 \geq |f'(0)|_{hyp} = \frac{|f'(0)v|_E}{|v|_{\mathbb{D}}} = \frac{\rho(f(0))\,|f'(0)|\cancel{|v|}}{\cancel{|v|}} = |f'(0)|\,\rho(f(0))$

$\Rightarrow |f'(0)| \leq \frac{1}{\rho(f'(0))}$

$f: \mathbb{D} \to E$, $|f'(0)|_{hyp} \leq 1$

Arciganas

$\boxed{\text{Mc Mullen}}$

$$1 \geq |f'(0)|_{hyp} = \frac{|f'(0)v|_E}{|v|_{\mathbb{D}}} = \frac{\rho(f(z))\,|f'(0)|\,|v|}{|v|} = |f'(0)|\,\rho(f(0))$$

$|f'(0)| \leq \frac{1}{\rho(f(0))}$ con igualdad $\Leftrightarrow$ f es un biholomorfismo.

Debemos encontrar explícitamente estos biholomorfismos.

$R(z) = z + \frac{1}{z}$ | $r \in (0,1)$:

$R: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ | $R(r\exp(i\theta)) = r\exp(\theta) + r^{-1}\exp(-i\theta) = (r + r^{-1})\cos\theta + i(r - r^{-1})\operatorname{sen}\theta$

satisface la ecuación:

$$\left(\frac{Re(z)}{(r+\frac{1}{r})}\right)^2 + \left(\frac{Im(z)}{(\frac{1}{r}-r)}\right)^2 = 1$$

R no sirve, ya que 

Problema B. Ocupar teo de Rouché...

Problema A. Suponer que p_j (cero de P) no es esencial. Entonces f admite extensión holomorfa o meromorfa (se puede demostrar a mano que para cualquier vecindad de p_j, su imagen es densa en $\mathbb{C}$)

Continuando con la materia...

1 Versiones 2 3

Normalidad: familias acotadas familias no densas, que omiten 3 ptos (Montel thm)

Cauchy

1 Versiones 2 3

singularidades removibles: singularidades acotadas singularidades no densas, que omiten 3 ptos (Great Picard thm).

desigualdades de Cauchy coef. y valores

dan extensión holomorfa

esenciales

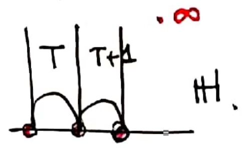
$\exists$ vecindad de singularidad que omite 3 ptos $\Rightarrow$ es removible $\Rightarrow$ f se extiende o meromorfa.

$\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ recubrimiento holomorfo.

Thm. Montel. $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\setminus\{0,1\}\}$, $f \in \mathcal{F}$. $\tilde{f} : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ tq $f = \pi \circ \tilde{f}$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{H} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{D} \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{C}\setminus\{0,1\} \end{tikzcd}$$

$\tilde{f}(0) \in \pi^{-1}(f(0))$ conjunto infinito.
normalizamos $\tilde{f}$ tal que $\tilde{f}(0) \in T \cup (T+1)$



Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $\mathcal{F}$.

Pd: $\exists$ subsucesión que converge localmente uniformemente. Tomando una subsucesión, supongamos que $\tilde{f}_n(0)$ converge en $(T \cup (T+1)) \cup \{0, 1, 2, \infty\}$.

Hay dos casos: uno fácil y otro difícil.

Caso 1. El límite está en $T \cup (T+1)$.

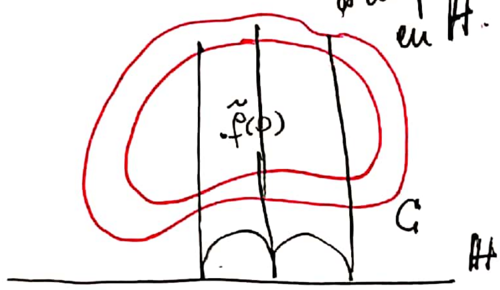
Supongamos que $(\tilde{f}_n)_{n=1}^{\infty}$ converge localmente uniformemente en $\tilde{f}$. $\tilde{f}(\{|z| \le r\})$ es compacto en $\mathbb{H}$.

$\Rightarrow \forall r \in (0,1)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tal que $\forall n \ge N$

$$dist(\tilde{f}_n, \tilde{f}) \le \varepsilon \text{ en } \{|z| \le r\}$$

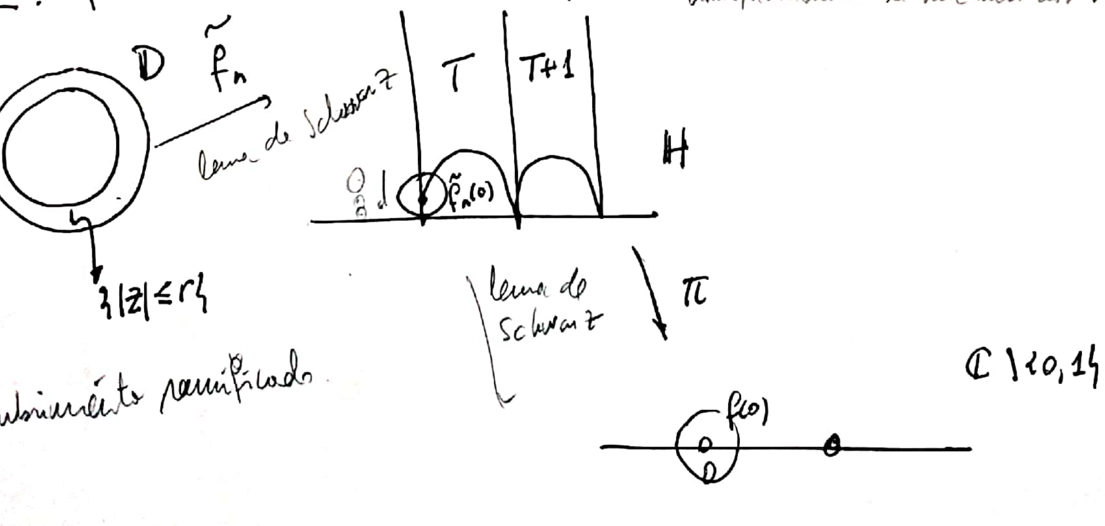
$$\varepsilon < dist(\tilde{f}(\{|z| \le r\}), \mathbb{R})$$

$\Rightarrow \forall n \ge N$, $\tilde{f}(\{|z| \le r\}) \subseteq C := B_\varepsilon^+(\tilde{f}(\{|z| \le r\}))$



$f_n = \pi \circ \tilde{f}_n$, $\sup_C |\pi'| < \infty$, $\inf_C |\pi'| > 0$ | $f_n|_{\{|z| \le r\}}$ converge uniformemente a $\pi \circ \tilde{f}|_{\{|z| \le r\}}$

Caso 2. $\tilde{f}(0) \in \{0, 1, 2, \infty\}$. Por simplicidad, siempre podemos suponer que $\tilde{f}(0) = 0$.
Transformaciones de Moebius nos dan esta posibilidad

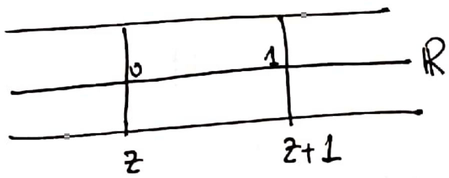


Recubrimiento ramificado

Teorema de Montel (Versión fuerte)

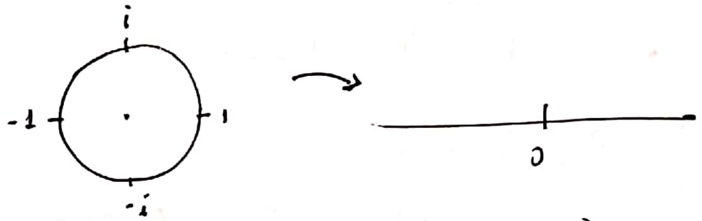
$\mathcal{F} = \{ f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{C}} \mid \text{holomorfas} \}$. Si $\mathcal{F}$ omite a lo más 3 puntos de $\mathbb{C}$, entonces $\mathcal{F}$ es normal.

Ejemplo. $\mathbb{D} \approx B$



$B = \{ z \in \mathbb{C} \mid -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1 \}$

$E_n : B \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$
$z \mapsto \exp(2\pi i n z)$



$\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$
$z \mapsto -i \dfrac{z-1}{z+1}$

$$\varphi(i) = -i \frac{i-1}{i+1} = -i \frac{(i-1)(-i+1)}{2} = -i \frac{2i}{2} = 1$$

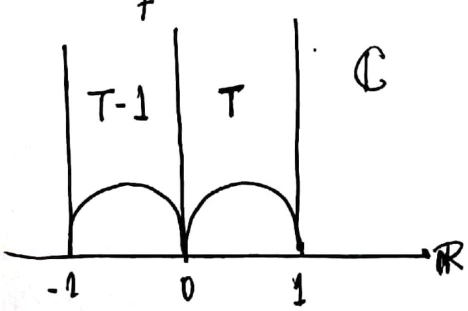
$\psi : \mathbb{H} \to B$
$\zeta \mapsto \exp\left(\frac{\pi}{2}(\zeta + 1)\right)$ | $\psi \circ \varphi : \mathbb{D} \to B$ biholomorfa

$\mathcal{F} := \{ E_n \circ \psi \circ \varphi \mid n \in \mathbb{N} \}$ omite 0 e ∞ y no es normal.

Demostración del teorema de montel.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{H} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{D} \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \end{tikzcd}$$

; $f \in \mathcal{F}$, $\pi \circ \tilde{f} = f$ tal que $\tilde{f}(0) \in T \cup (T-1)$ (hay que normalizar)
$(\tilde{f}(0) \in \pi^{-1}(f(0)))$



$\mathbb{C}$

$T \overset{\pi}{\longleftrightarrow}$ semiplano superior

$T-1 \overset{\pi}{\longleftrightarrow}$ semiplano inferior

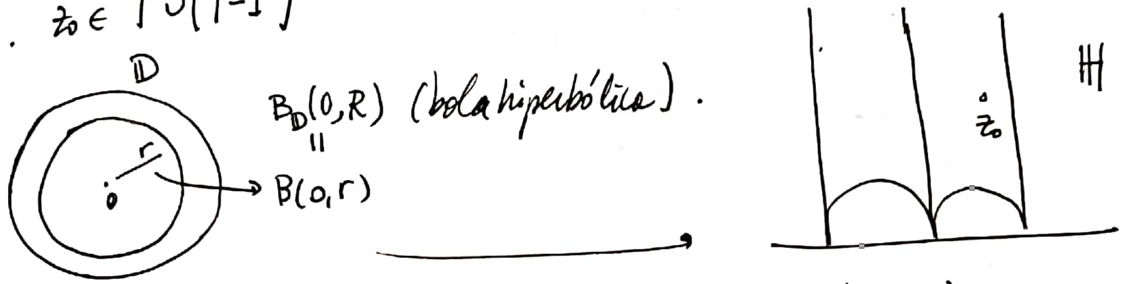
• $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{f} \mid f \in \mathcal{F}\}$

Teorema de Montel (versión "simple") $\Rightarrow$ $\tilde{\mathcal{F}}$ es normal.

• Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{F}$

Tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que $(\tilde{f}_n(0))_{n=1}^{\infty}$ converge en $\overline{\mathbb{C}}$ ($\overline{\mathbb{C}}$ compacto) a un punto z_0.

Caso I. $z_0 \in T \cup (T-1)$



Lema de Schwarz $\Rightarrow \tilde{f}_n(B(0,r)) = \tilde{f}_n\big(B_{\mathbb{D}}(0,R)\big) \subseteq B_{\mathbb{H}}(\tilde{f}_n(0), R)$

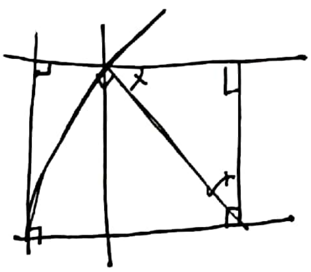
Tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que $d_{\mathbb{H}}(\tilde{f}_n(0), z_0) \leq 1$

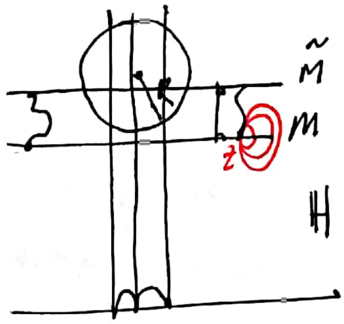
$\Rightarrow \tilde{f}_n(B(0,r)) \subseteq B_{\mathbb{H}}(z_0, R+1) \subseteq \underbrace{\overline{B_{\mathbb{H}}(z_0, R+1)}}_{\text{rel. compacto}} \subseteq \mathbb{H}$

Como $\sup\limits_{B_{\mathbb{H}}(z_0,R+1)} |D\pi| < \infty$, $\inf\limits_{B_{\mathbb{H}}(z_0,R+1)} |D\pi| > 0$, $f|_{B(0,r)} = \tilde{f} \circ \pi|_{B(0,r)}$ es normal.

Caso II. $z \in T \cup (T-1) \Rightarrow z_0 \in \{-1, 0, 1, \infty\}$

Pd: Para todo $r \in (0,1)$ y todo $M > 0$, existe N tal que $\forall n \geq N$, $\tilde{f}_n(B(0,r)) \subseteq \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im} z > M\}$





$\tilde{M} > M$

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}$

$\operatorname{Im} \gamma(0) = M$

$\operatorname{Im}(\gamma(1)) = \tilde{M}$

longitud de γ

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))}\, dt$$

$\gamma(t) = \gamma(0) + (\tilde{M} - M) i t$

$$\text{longitud}(\gamma) = \int_0^1 \frac{\tilde{M} - M}{M + (\tilde{M} - M)t}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{\frac{M}{\tilde{M} - M} + t}\, dt = \log\left(t + \frac{M}{\tilde{M} - M}\right)\Big|_0^1 = \log\left(\frac{\tilde{M}}{\tilde{M} - M}\right) - \log\left(\frac{M}{\tilde{M} - M}\right)$$

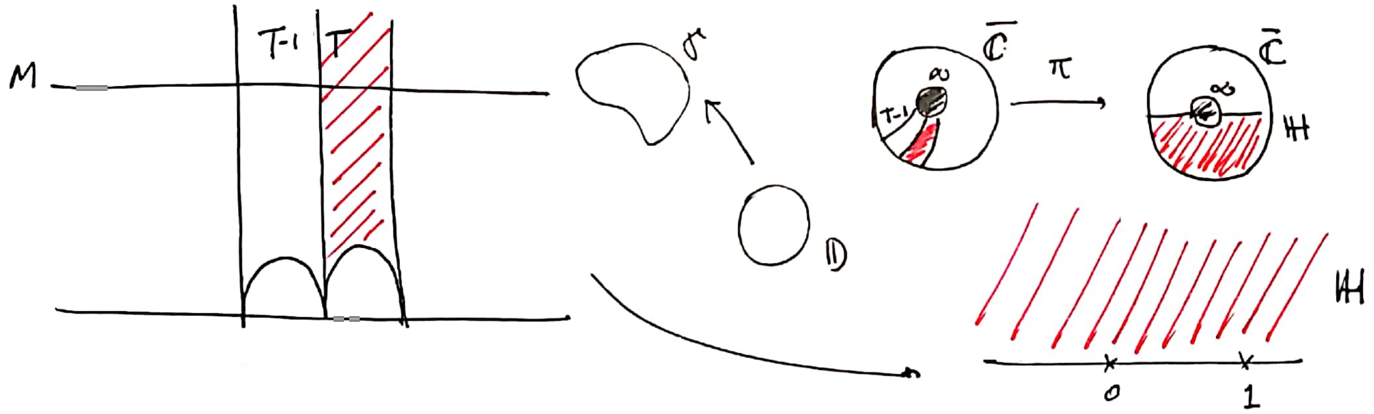
$$= \log\left(\frac{\tilde{M}}{M}\right) \xrightarrow{\tilde{M} \to \infty} \infty$$

$\tilde{M} := M \exp(R)$

N tal que $\forall n \geq N$, $\operatorname{Im}(\tilde{f}_n(0)) \geq \tilde{M}$

$\Rightarrow \tilde{f}_n(B(0,r)) \subseteq B_{\mathbb{H}}(\tilde{f}_n(0), R) \subseteq \{z \in \mathbb{H} \,/\, \operatorname{Im} z > M\}$

Pd: $\forall \varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que $\pi(z \in \mathbb{H} : \operatorname{Im} z \geq M) \subseteq B_{\overline{\mathbb{C}}}(\infty, \varepsilon)$



Funciones armónicas

$U\subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo. $u: U\to\mathbb{R}$ clase C^2 (se le puede pedir menos...)

$u: U\to\mathbb{R}$ es armónica si $\Delta u=0$

$$\Delta = \partial_x^2+\partial_y^2 = 4\partial\bar\partial = 4\bar\partial\partial$$

A nivel de formas: $\Delta u = (\partial_x^2+\partial_y^2)\, dx\wedge dy$

Afirmación. f holomorfa $\Rightarrow$ $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ son armónicas

Afirmación u armónica $\Rightarrow$ ∂u es función holomorfa

dem. $\partial u = \frac{1}{2}(\partial_x u - i\partial_y u)$, $\bar\partial\partial u=0$

Afirmación. Si U es simplemente conexo, $u: U\to\mathbb{R}$ es armónica. Entonces existe una función holomorfa $\tilde f: U\to\mathbb{C}$ tal que $u=\operatorname{Re}(\tilde f)$.

dem. f primitiva de ∂u $\to$ $f' = \partial u = \frac{1}{2}(\partial_x u - i\partial_y u)$

$f=a+ib$, $f' = \partial_x f = \partial_x a + i\partial_x b = \frac{1}{2}(\partial_x u - i\partial_y u)$

$\overline{f'} = \partial_x a - i\partial_x b = \frac{1}{2}(\partial_x u + i\partial_y u) = \bar\partial u$

f holo $\Rightarrow$ $\bar\partial f = 0 = \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f) = 0$
$\Rightarrow$ $\partial_x f + i\partial_y f = 0$
$\Rightarrow$ $\partial_x f = -i\partial_y f$

$\partial f = \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f)$
$= \frac{1}{2}(\partial_x f + \partial_x f) = \partial_x f$. ✓

$\operatorname{Re}(f') = \frac{1}{2}\partial_x u$

$\partial_x a = \frac{1}{2}\partial_x u$

$$\underbrace{\int_{x}^{x_1}\partial_x a(t,y)\,dt}_{a(x,y)-a(x_0,y)} = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\partial_x u(t,y)\,dt = \frac{1}{2}\big(u(x,y)-u(x_0,y)\big)$$

$$f' = \partial f = \partial f - \bar\partial f = -i\partial_y f = -i(\partial_y a + i\partial_y b) = \partial_y b - i\partial_y a$$

$\frac{1}{2}(\partial_x u - i\partial_y u)$. $\partial_y a = \partial_y u$

$$\Rightarrow a(x,y_1) - a(x,y_0) = \frac{1}{2}\left(u(x,y_1) - u(x,y_0)\right)$$

$c := \frac{1}{2}u - a$ es constante

$\tilde{f} := 2(f+c) \Rightarrow Re(\tilde{f}) = u$

—— o ——

Con lo anterior tenemos

$z_0 \in U$, $r>0$, tal que $\overline{B(z_0,r)} \subseteq U$ → (Teo. del valor medio) (MVP conway)

$\tilde{f}(z_0) = \int \tilde{f}(z)\, d\lambda_r(z_0,r)$ (fórmula integral de Cauchy)

promedio.

$\Rightarrow u(z_0) = \int u(z)\, d\lambda_r(z_0,r)$ tomar parte real!

Comportamiento.

$\Rightarrow$ Principio del máximo : $u(z_0) \leq \sup_U u(z)$, con igualdad sólo si u es constante.

(Obs. Aquí el dominio de u no es necesariamente simplemente conexo) — demostración: sólo basta estudiar f en su forma local

pendiente.

Averiguar

$\Rightarrow$ El límite uniforme de funciones armónicas es armónicas — Producto de la fórmula integral de Cauchy y después tomar parte real

$u_n \rightarrow f_n : U \to \mathbb{C}$ holo tq $Re(f_n) = u_n$

$\Rightarrow f_n(z_0) = \int f_n(z)\, d\lambda_r(z_0,r)$

$f(z) = \int \lim f_n(z)\, d\lambda_r(z_0,r)$

$= \int f(z)\, d\lambda_r(z_0,r)$ Forma integral de Cauchy

$\Rightarrow f$ holo. $\lim f_n = f$

$\Rightarrow Re(f) = \lim Re(f_n)$

$= u_n$

$\Rightarrow Re(f)$ es armónica

<u>Corolario</u>. Toda función armónica es analítica. — tomar parte real de $f = \sum a_n (z-z_0)^n$ por qué?

Consideremos $u : U \to \mathbb{R} \in C^2$

$f : V \to U$ holomorfa

Procedemos a calcular $\Delta(u \circ f) = 4\bar{\partial}\partial(u\circ f)$

$f(z) \sim f(z_0) + \partial f(z_0)(z-z_0) + \bar{\partial}(f(z_0))\overline{(z-z_0)}$

$u(w) \sim u(w_0) + \partial u(w_0)(w-w_0) + \bar{\partial} u(w_0)\overline{(w-w_0)}$

$w_0 = f(z_0)$

$f(w) \sim f(z_0) + \partial f(z_0)(z-z_0) + \bar{\partial}(f(z_0))\overline{(z-z_0)}$

$\partial, \bar{\partial}$ wirtinger derivaties.

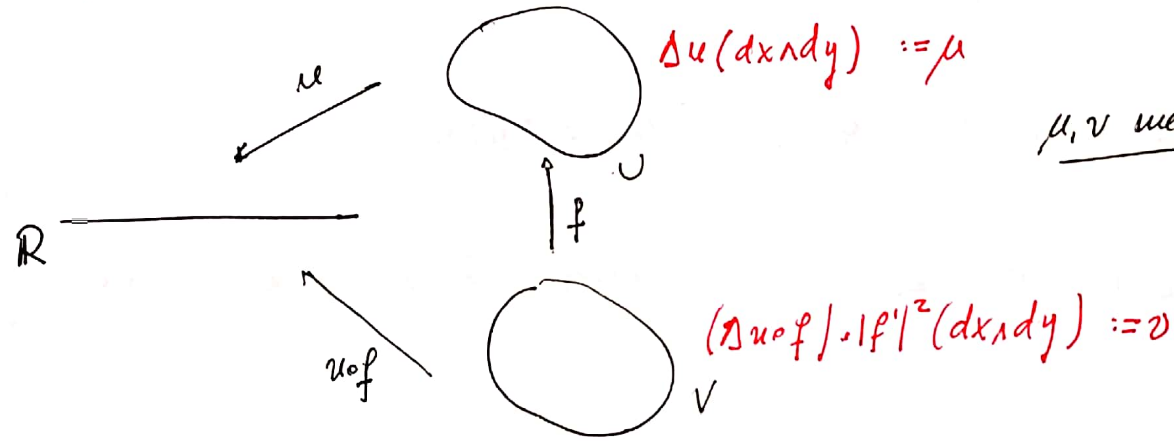
$$u\circ f \sim u(f(z_0)) + \partial u(w_0)\left(\partial f(z_0)(z-z_0)+\bar\partial f(z_0)\overline{(z-z_0)}\right)$$
$$+\ \partial u(w_0)\left(\overline{\partial f(z_0)(z-z_0)}+\overline{\bar\partial f\,\overline{(z-z_0)}}\right)$$

$$u(f(z_0)) + \left(\partial u(w_0)\,\partial f(z_0) + \bar\partial u(w_0)\,\overline{\bar\partial f(z_0)}\right)(z-z_0)$$
$$+\ \left(\partial u(w_0)\,\bar\partial f(z_0) + \bar\partial u(w_0)\,\overline{\partial f(z_0)}\right)\overline{(z-z_0)}$$

Entonces: $\Delta(u\circ f) = 4\bar\partial\partial(u\circ f) = 4\bar\partial(\partial u\circ f\cdot\partial f)$

$$= 4\bar\partial(\partial u\circ f)\cdot\partial f$$
$$= 4(\bar\partial\partial u\circ f\cdot\overline{\partial f})\,\partial f$$
$$= (\Delta u)\circ f\cdot|f'|^2$$

$\Delta(u\circ f) = ((\Delta u)\circ f)\,|f'|^2$ importante.



μ, ν medidas.

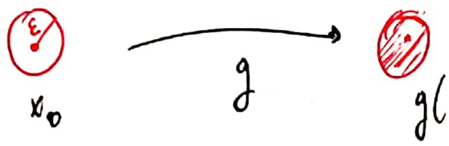
Lema. $g: X\to Y$ medible. X, Y espacios de medida. ν medida en $X \Rightarrow g_*\nu$ es una medida en Y donde $g_*\nu(A) = \nu(g^{-1}(A))$

Fórmula de cambio de variable: $v: Y\to\mathbb{R}$

$$\int_Y v\, d(g_*\nu) = \int_X v\circ f\, d\nu \qquad \nu = h\eta$$
$$g_*\nu = \tilde h\eta$$
$$\| $$
$$\int_Y v\,\tilde h\, d\eta = \int v\circ f\cdot h\, d\eta \qquad \tilde h = h\circ g^{-1}\,\mathrm{Jac}(g)^{-1}$$

$A \subseteq U$

$$f_* \nu(A) = \nu(f^{-1}(A)) = \iint_{f^{-1}(A)} \Delta u \circ f \cdot |f'|^2 \, dx\, dy$$



$$g(B(x_0,\varepsilon)) \approx B(g(x_0), |g'(x_0)|\varepsilon)$$

$$(g_* \nu)(g(B(x_0,\varepsilon))) \sim h(x_0)\,\eta(B(x_0,\varepsilon))$$

$$\wr\wr$$

$$(g_* \nu)(B(x_0, \underbrace{|g'(x_0)|\varepsilon}_{r})) \sim h(x_0)\,\eta(B(x_0,\varepsilon)) = h(x_0)\,\eta(B(x_0, r|g'(x_0)|^{-1}))$$
$$= h(x_0)\,|g'(x_0)|^{-2}\,\eta(B(x_0,r))$$

$$\frac{d f_* \nu}{d(\mathrm{Leb})}(y_0) = (\Delta u \circ f \cdot |f'|^2)(x_0) \cdot |f'|^{-2}(x_0) = \Delta u(y_0)$$

$\Delta(u\circ f) = (\Delta u)\circ f \cdot |f'|^2 \Rightarrow$ Si u es armónica, entonces $u \circ f$ es armónica.

dem: u armónica $\Leftrightarrow \Delta u = 0 \Rightarrow \Delta(u\circ f) = 0 \Rightarrow u\circ f$ armónica.

Reposo : $f: V \to U$ holomorfa . $u \circ f$ armónica $\Leftrightarrow$ u es armónica.

$\Delta(u \circ f) = (\Delta u) \circ f \cdot |f'|$

Laplaciano es una 2-forma (Naturalmente puede verse como una medida).

Teorema. Para toda función continua $u: S^1 \to \mathbb{R}$, existe una única función armónica $\hat{u}: \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ tal que $\hat{u}|_{S^1} = u$.

- $C(S^1)$ = Espacio de las funciones continuas en S^1 con valores en $\mathbb{C}$.
- $A(\overline{\mathbb{D}})$ = Espacio de las funciones complejas continuas en $\overline{\mathbb{D}}$, que son armónicas en $\mathbb{D}$.

Versión 2 del teo : $\exists \mathcal{P}: C(S^1) \to A(\overline{\mathbb{D}})$ operador lineal isométrico, $\mathcal{P}(u)|_{S^1} = u$.

Generalización del Laplaciano : $f: U \to \mathbb{C}$ holomorfa clase C^2.

$\Delta(f) := \Delta(\operatorname{Re} f) + i\Delta(\operatorname{Im}(f))$.

Unicidad : $\hat{u}_0, \hat{u}_1 : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ armónicas en $\mathbb{D}$ tq $\hat{u}_0|_{S^1} = \hat{u}_1|_{S^1}$

$\Rightarrow \hat{u}_0 - \hat{u}_1$ es armónica en $\mathbb{D}$

$\hat{u}_0 - \hat{u}_1|_{S^1} \equiv 0$

principio del máximo $\Rightarrow \hat{u}_0 - \hat{u}_1 \equiv 0$.

$N \in \mathbb{Z}$, $P_N: S^1 \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^N$. $\hat{P}_N : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto \begin{cases} z^N, & N \geq 0 \\ \bar{z}^N, & N < 0. \end{cases}$$

$\mathcal{P}_0 : V \to A(\overline{\mathbb{D}})$

$V = \langle P_N \mid n \in \mathbb{Z} \rangle \subseteq C(S^1)$

$\sum_{N \in \mathbb{Z}} a_N P_N$. $a_N = 0$ con un número finito de excepciones.

$$\mathcal{P}_0\left(\sum_{N \in \mathbb{Z}} a_N P_N\right) := \sum_{N \in \mathbb{Z}}' a_N \hat{P}_N$$

P_0 es lineal, $\forall u \in V$, $P_0(u)|_{S^1} = u$

es una isometría:

$$\| P_0(u_0) - P_1(u_1) \|_\infty = \| (P_0(u_0) - P(u_1))|_{S^1} \|_\infty = \| u_0 - u_1 \|_\infty$$

principio del máximo.

Como V es denso en $C(S^1)$, así que P_0 se extiende a una isometría lineal de $C(S^1)$ en $A(\overline{\mathbb{D}})$.

Obs. $A(\overline{\mathbb{D}})$ es cerrado en $C(\overline{\mathbb{D}})$.

$u \in C(S^1)$

$(u_i)_{i=1}^\infty$ en V converge a u. $(P(u_i))_{i=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $A(\overline{\mathbb{D}})$.

$P(u_i)$ converge uniformemente a $P(u)$ $\Rightarrow$ $u_i = P(u_i)|_{S^1}$ converge uniformemente a $P(u)|_{S^1}$ $\Rightarrow$ $P(u)|_{S^1} = u$

(dem. versión 2)

$\lambda := \lambda(0,1)$

$$u \cdot \lambda = \int u(z) \delta_z \, d\lambda(z)$$

Pregunta: ¿Cuál es la extensión armónica de "$u = \delta_1$"

$f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{C}}$ tq $\operatorname{Re} f|_{S^1 \setminus \{1\}} \equiv 0$, $(\operatorname{Re}(f))(0) = 1$

$f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ manda S^1 a recta imaginaria, $f(0) = -1$.

Necesitamos que $f(0) = 1$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

$$f(z)=\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{|1-z|^2}=\frac{1-|z|^2+z-\bar{z}}{|1-z|^2}=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}+\frac{2\,\mathrm{Im}(z)}{|1-z|^2}$$

$$\mathrm{Re}(f(z))=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2},\quad \mathrm{Im}(f(z))=\frac{2\,\mathrm{Im}\, z}{|1-z|^2}$$

$$u_1(z)=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

$\zeta\in S^1$, $R_\zeta(z)=\zeta z$, $(R_\zeta)_*\delta_1=\delta_\zeta$

$$u_\zeta:=u_1\circ R_\zeta^{-1},\quad u_\zeta(z)=\frac{1-|z/\zeta|^2}{|1-z/\zeta|^2}=\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}$$

de $u\cdot\lambda=\int u(z)\,\delta_z\,d\lambda(z)\Rightarrow \hat{u}=\int u(\zeta)\,u_\zeta\,d\lambda(\zeta)$, $\hat{u}(z)=\int\frac{u(\zeta)(1-|z|^2)}{|\zeta-z|^2}d\lambda(\zeta)$

Chequeam que $\hat{u}$ es armónica: $\Delta\hat{u}=\Delta\int u(\zeta)\,u_\zeta\,d\lambda(\zeta)=\int u(\zeta)\,\Delta u_\zeta\,d\lambda(\zeta)=0$.

Pd: Para u continua, $\hat{u}$ se extiende continuamente a $\bar{\mathbb{D}}$ y es igual a u en S^1.

Extensiones armónicas.

$u : S^1 \to \mathbb{R}$ continua

$P(u) : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ continua, $P(u)|_{S^1} = u$

$P(u)$ es armónica en $\mathbb{D}$.

$P(u)$ está únicamente determinada por u. $P : C(S^1, \mathbb{R}) \longrightarrow A(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{R})$ biyección isométrica

---

Núcleo de Poisson.

$u \cdot \lambda(0,1)$ medida en S^1

$u\lambda(0,1) = \int u(\zeta)\delta_\zeta \, d(\lambda(0,1))(\zeta)$

$f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$

$Re(f) \equiv 0$ en $S^1 \setminus \{1\}$

$Re\, f(0) = 1$

$f(z) = -\dfrac{z+1}{z-1} \xrightarrow{\text{tomando } Re(\cdot)} Re(f(z)) = \dfrac{1-|z|^2}{|z-1|^2}$

$\Downarrow$

$f_\zeta(z) = f(z/\zeta) \longrightarrow Re(f_\zeta(z)) = \dfrac{1-|z/\zeta|^2}{|z/\zeta - 1|^2}$

Con lo anterior: $\hat{u}_1(z) = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$, $\hat{u}_\zeta(z) = \dfrac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}$

Candidato: $P(u)(z) = \int u(\zeta)\, \hat{u}_\zeta(z)\, d(\lambda(0,1))(\zeta) = \int u(\zeta)\, \hat{u}_1(z/\zeta)\, d(\lambda(0,1))(\zeta)$

$\Delta P(u)(z) = \int u(\zeta)\, \Delta \hat{u}_\zeta(z)\, d(\lambda(0,1))(\zeta) = 0$.

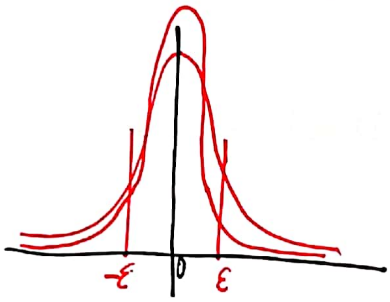
Pd: $P(u)$ se extiende continuamente a $\overline{\mathbb{D}}$ y $P(u)|_{S^1} = u$.

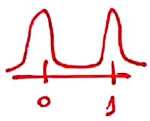
$z = r\exp(2\pi i \theta)$

$$\hat{u}_1(z) = \frac{1-r^2}{(1-r\cos(2\pi\theta))^2 + (r\,\mathrm{sen}(2\pi\theta))^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi\theta)+r^2}$$

$$P(u)(r\exp(2\pi i\theta)) = \int_0^1 u(\exp(2\pi i\omega))\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi(\theta-\omega))+r^2}\,d\omega$$

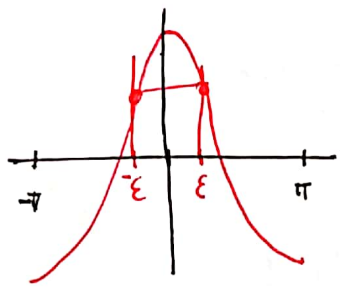
~~[illegible]~~ $= P_r : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $\quad P_r(\theta) := \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi\theta)+r^2}$ núcleo de Poisson.



1-periódica 

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{(1-r)^2+2r(1-\cos(2\pi\theta))} \qquad \left(\begin{array}{l}\theta\in[-\pi,\pi]\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)\\ 1-\cos(2\pi\theta)\geq 1-\cos(2\pi\varepsilon)\end{array}\right)$$

$$\leq \frac{1-r^2}{2r(1-\cos(2\pi\varepsilon))} \xrightarrow{r\to 1} 0$$



Pd: $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi\theta)+r^2}\,d\theta = 1 \quad (\dots ?)$

$v = \tan\left(\frac{z}{2}\right)$, $\quad z = 2\pi\theta$

$$\cos(z) = 2\cos\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 1 = \frac{2}{\tan\left(\frac{z}{2}\right)^2+1} - 1 = \frac{2}{v^2+1} - 1$$

$$1+r^2-2r\cos(z) = (1+r^2) - 2r\left(\frac{2}{v^2+1} - 1\right) = (1+r)^2 - \frac{4r}{v^2+1}$$

$$dv = \frac{1}{2}\sec\left(\frac{z}{2}\right)^2 dz = \frac{1}{2}(1+v^2)\,dz = \pi(1+v^2)\,d\theta$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi\theta)+r^2}\,d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-r^2}{(1+r)^2 - \frac{4r}{v^2+1}}\,\frac{dv}{\pi(1+v^2)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-r^2}{(1+r)^2(1+v^2)-4r}\,dv$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-r^2}{(1-r)^2+(1+r)^2 v^2} dv \quad ; \quad v = \frac{1-r}{1+r} \tan w \,,\; dv = \frac{1-r}{1+r} (\sec w)^2$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1-r^2}{(1-r)^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{(\sec w)^2} \cancel{\frac{1-r}{1+r}} (\sec w)^2 dw = 1$$

$$P_r(\theta) = Re\left(\frac{1-z}{1+z}\right) . \quad \int_0^1 P_r(\theta) d\theta = Re\left(\int_0^1 \frac{1-r\exp(2\pi i\theta)}{1+r\exp(2\pi i\theta)} d\theta \right) \qquad \begin{array}{l} \gamma : [0,1] \longrightarrow S^1 \\ \theta \mapsto \exp(2\pi i \theta) \end{array}$$

$$= Re\left(\int_{S^1} \frac{1-r\gamma}{1+r\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{\gamma} \right) = Re\left(\frac{1}{2\pi i} \int \frac{1-r\gamma}{1+r\gamma} \frac{1}{\gamma} d\gamma \right) = 1$$

$$\frac{1-r\gamma}{1+r\gamma} \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}(1-r\gamma)(1-r\gamma+r^2\gamma^2+\cdots) = \frac{1}{\gamma}(1-2r\gamma+\cdots) = \frac{1}{\gamma} + \cdots$$

$(P_r)_{r\in(0,1)}$ es una aproximación de la identidad.

Fijamos $\theta \in (0,1)$

Pd: $P(u)(r\exp(2\pi i\theta)) \xrightarrow[r\to 1^-]{} u(\theta)$

- $\varepsilon > 0$
- existe $\delta > 0$ tal que $\forall \theta' \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, con $|\theta-\theta'| \leq \delta$, $|u(\theta)-u(\theta')| < \varepsilon$
- existe $r_0 \in (0,1)$ tq $\forall r \in (r_0,1)$: $P_r(\theta') \leq \varepsilon \quad \forall \theta' \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $|\theta-\theta'| \geq \delta$.

$$|P(u)(r\exp(2\pi i\theta)) - u(r\exp(2\pi i\theta))| = \left| \int_0^1 [u(\exp(2\pi i\theta)) - u(\exp(2\pi i\theta))] P_r(\theta-w) dw \right|$$

$$\leq \varepsilon \int_{[\theta-\delta,\theta+\delta]} P_r(\theta-w)dw + \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z} \setminus [\theta-\delta,\theta+\delta]} 2\|u\|_\infty \varepsilon \, dw \leq \varepsilon + 2\|u\|_\infty \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 .$$

Repaso: $P : C(S^1) \to A(\overline{D})$ biyección isométrica

$P(u)|_{S^1} = u$

$P(u)(\exp(2\pi i\theta)) = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} u(\exp(2\pi i\omega)) P_r(\theta-\omega)d\omega$, $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi\theta)+r^2}$ Núcleo de Poisson.

ψ transformación de Moebius t.q. $\psi(S^1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\psi(-1) = \infty$, $\psi(1) = 0$, $\psi(i) = 1$. $\psi(z) = -i\,\frac{z-1}{z+1}$

$C_0(\mathbb{R}) := \{v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid$ continua t.q. $\lim_{|x|\to\infty} v(x) = 0\}$.

$\psi_* : C_0(\mathbb{R}) \to C(S^1)$

$v \mapsto \psi_*(v)(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta = -1 \\ v \circ \psi(\zeta) & \text{si no.} \end{cases}$

$u \in C(S^1) \mapsto v := u \circ \psi^{-1} - u(1) \in C_0(\mathbb{R})$

es tal que $\psi_* v = u - u(-1)$

$v \in C_0(\mathbb{R})$

$\psi_* v \in C(S^1)$ | $P_{\mathbb{H}}(v) := P(\psi_* v) \circ \psi^{-1}$

$P_{\mathbb{H}}(v)|_{\mathbb{R}} = P(\psi_* v)|_{S^1\setminus\{-1\}} \circ \psi^{-1}|_{\mathbb{R}} = (\psi_* v)|_{S^1\setminus\{-1\}} \circ \psi^{-1}|_{\mathbb{R}}$

$= (v \circ \psi)|_{S^1\setminus\{-1\}} \circ \psi^{-1}|_{\mathbb{R}}$

$= v|_{\mathbb{R}} \circ \psi|_{S^1\setminus\{-1\}} \circ \psi^{-1}|_{\mathbb{R}} = v$ $\therefore P_{\mathbb{H}}(v)|_{\mathbb{R}} = v$

$P_{\mathbb{H}}(v)$ se extiende continuamente a $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\} := \overline{\mathbb{H}}$,
y la extensión es nula en ∞.

$P_{\mathbb{H}}(v)$ es armónica en $\mathbb{H}$.

$A_0(\overline{\mathbb{H}}) := \{ \hat{v} : \overline{\mathbb{H}} \to \overline{\mathbb{C}} \;/\; \hat{v}$ continua, armónica en $\mathbb{H}$, $\hat{v}(\infty)=0$, provisto $\}$ de la norma uniforme

$P_{\mathbb{H}} : C_0(\mathbb{R}) \to A_0(\overline{\mathbb{H}})$ biyección isométrica.

$$P_{\mathbb{H}}(v) = P(\Psi_* \circ v) \circ \Psi^{-1} = P(v \circ \Psi) \circ \Psi^{-1}$$

$\zeta \in \mathbb{H}$, $z := \Psi^{-1}(\zeta) = r\exp(2\pi\theta i)$

$$P_{\mathbb{H}}(v)(\zeta) = P(v \circ \Psi)(z) = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} v \circ \Psi(\exp(2\pi i \omega)) P_r(\theta - \omega)\, d\omega$$

$x = \Psi(\exp(2\pi i \omega))$, $\omega \in (-\pi, \pi)$

$$dx = \Psi'(\exp(2\pi i\omega))\, 2\pi i \exp(2\pi i \omega)\, d\omega$$

$$\Psi' = -\frac{2i}{(z+i)^2}, \quad \zeta + 1 = \frac{2i}{x+i}$$

$$x = \Psi(\zeta) = -i\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \to \zeta = \frac{-x+i}{x+i}$$

$$\frac{\frac{-x+i}{x+i} - \frac{-\zeta+i}{\zeta+i}}{\frac{-x+i}{x+i} + \frac{-\zeta+i}{\zeta+i}} = -i\frac{x+\zeta}{x\zeta - 1}$$

$$-i\left(\frac{-x+\zeta}{x\zeta+1}\right) = \frac{(x^2+1)\operatorname{Im}\zeta}{|x\zeta+1|^2} + \text{parte imaginaria}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} v(x)\, Re\left(\frac{1 - \frac{z}{\exp(2\pi i \omega)}}{1 + \frac{z}{\exp(2\pi i\omega)}}\right) \frac{1}{2\pi i \exp(2\pi i \omega)} \left(-\frac{(\exp(2\pi i \omega)+1)^2}{2i}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} v(x) \frac{(x^2+1)\operatorname{Im}(\zeta)}{|x\zeta+1|^2}\left(-\frac{4}{(x+i)^2} \cdot \frac{\cancel{x+i}}{-x+i}\right) dx = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} v(x) \frac{\operatorname{Im}(\zeta)}{|x\zeta+1|^2}\, dx$$

Algo más que decir sobre el laplaciano...

Sea z_0

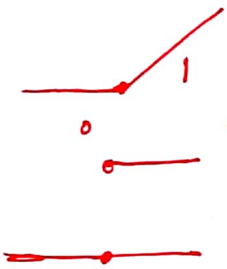
$$g(z_0) = \int \log|\zeta - z_0| \, d\lambda_{0,1}(\zeta) = \log \max\{1, |z_0|\}$$

$$\longrightarrow \Delta \log^+|z| = \lambda_{0,1}$$

$$\Delta \log|\zeta - z_0| = \delta_{z_0}$$

$$\mu = \int \delta_z \, d\mu(z)$$

$$g_\mu(\zeta) := \int \log|\zeta - z_0| \, d\mu(z_0) \longrightarrow \Delta g_\mu = \mu.$$



derivada en sentido distribucional. (averiguar).

obs. $\zeta \mapsto \log|\zeta - z_0|$ es armónica en $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$.

Sea $\zeta_0 \in \mathbb{C}\setminus\{z_0\}$. $\varepsilon > 0$ menor que $|\zeta_0 - z_0|$ existe una rama de log en U tal que

$$\operatorname{Re} \log(\zeta - z_0) = \log|\zeta - z_0|.$$

$$\Delta\left(\log|\zeta - z_0|\Big|_{\mathbb{C}\setminus\{z_0\}}\right) \equiv 0.$$

$$\int \varphi \, \Delta \log|\zeta - z_0| = \varphi(z_0)$$

$$\int \varphi \, \Delta \log|\zeta - z_0| = \int \Delta\varphi \, \log|\zeta - z_0| \, dLeb(\zeta)$$

$$= \lim_{M\to\infty} \int \Delta\varphi \, \log\max\{\exp(-M), |\zeta - z_0|\} \, dLeb(\zeta)$$

[Teo. convergencia monótona]

$$= \lim_{M\to\infty} \int \varphi(\zeta) \, \Delta \log\max\{\exp(-M), |\zeta - z_0|\} \, dLeb(\zeta)$$

$$= \lim_{M\to\infty} \int \varphi(\zeta) \, d\lambda_{z_0, \exp(-M)}(\zeta) = \varphi(z_0). \blacksquare$$

FIN !!