Ayudantía N3
Prof: Duvan Henao
Ayu: José torres

1. Dados $1 \leq q < p \leq \infty$.

   (a) Muestre que $L^p([0,1]) \subset L^q([0,1])$.

   Sol: Sea $f \in L^p([0,1])$, nos intereza estimar la norma $||f||_q$. En efecto, por la desigualdad de Hölder, tendremos que

$$||f||_q^q := \int_{[0,1]} |f|^q \, dx = ||f^q \chi_{[0,1]}||_1$$
$$\leq ||f^q||_s \, ||\chi_{[0,1]}||_{s^*} ,$$

   donde s^* es el conjugado de $s = \frac{p}{q} > 1$. Luego,

$$||f||_q^q \leq ||f||_p^q < \infty .$$

   ¿La desigualdad de Jensen nos dará una cota más optima?

   (b) Muestre que la contención de la parte anterior es estricta.

   Sol: Primero se tratará el caso $p = \infty$. Sea $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[2q]{x}} \in L^q([0,1])$. Notar que el conjunto de puntos tales que $f(x) > M$, con $M > 0$, es el intervalo $(0, \min\{1, \frac{1}{M^{2q}}\})$. Por tanto $||f||_\infty = \infty$ ya que $\lambda(\{x \in (0,1) : f(x) > M\}) = \min\{1, \frac{1}{M^{2q}}\} > 0$ para todo $M > 0$.
   Para el otro caso se fijan $1 \leq q < p < \infty$ y se elige $s \in (p^{-1}, q^{-1})$. Notar que $1 - qs > 0$ y que $1 - ps < 0$. Entonces,

$$\int_{[0,1]} \left|\frac{1}{x^s}\right|^q dx = \lim_{r \to 0+} \int_r^1 x^{-qs} dx = \lim_{r \to 0+} \frac{1 - r^{(1-qs)}}{1 - qs} = \frac{1}{1 - qs} .$$

$$\int_{[0,1]} \left|\frac{1}{x^s}\right|^p dx = \lim_{r \to 0+} \int_r^1 x^{-ps} dx = \lim_{r \to 0+} \frac{r^{(1-ps)-1}}{ps - 1} = \infty .$$

   Por tanto $x^{-r} \in L^q([0,1]) \setminus L^p([0,1])$.

   (c) Encuentre un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ no trivial tal que $L^q(X) \subset L^p(X)$. Un ejemplo trivial sería $X =$" su conjunto favorito", $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ y $\mu(\cdot) = 0$.

   Sol: Un ejemplo no trivial es el siguiente: considere $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ y $\mu =$"medida cuenta puntos". Entonces si $f \in L^q(X)$,tendrémos que

$$\sum_{k \geq 1} |f(k)|^q < \infty .$$

   Luego, como la serie es finita,

$$\lim_{k \to \infty} |f(k)|^q = 0 .$$

Scanned with CamScanner

Por tanto, existe $N > 0$ tal que si $k \geq N$ entonces $|f(k)|^q < 1$. Entonces para los $k \geq N$, se tendrá que $|f(k)|^p \leq |f(k)|^q$. Y por tanto,

$$||f||_p^p = \sum_{k\geq 1} |f(k)|^p \leq \sum_{k=1}^{N+1} |f(k)|^p + \sum_{k\geq N+1} |f(k)|^q < \infty.$$

2. Sea f una función entera que pertenece a $L^1(\mathbb{R}^2)$. Muestre que $f \equiv 0$.

Sol: Sea $\gamma_{R,z}(t) = z + Re^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ una circinferencia centrada en $z \in \mathbb{C}$ y de radio $R > 0$. Luego, por la formula de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R,z}} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + Re^{i\theta}) d\theta .$$

Por tanto $|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(z + Re^{i\theta})\right| d\theta$. Con esto se tendrá que

$$\frac{r^2}{2} |f(z)| = \int_0^r |f(z)| \, R \, dR \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \left|f(z + Re^{i\theta})\right| R \, d\theta \, dR$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{B(z,r)} |f(w)| \, d\lambda^2(w) \leq \frac{1}{2\pi} ||f||_1 .$$

Por tanto $|f(z)| \leq \frac{||f||_1}{\pi r^2}$, hacer tender $r \to \infty$ da el resultado.¿ Que sucede si $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p \in \mathbb{N}$ mayor que 1?.

3. ¿Existe conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$ tal que para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$ se cumpla que $\frac{\lambda(E \cap I)}{\lambda(I)} = \frac{1}{2}$?

4. Sea $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible con $\lambda(X) = \infty$. Construya una función f tal que $f \in L^p(X)$ para todo $p \geq 1$ pero $f \notin L^\infty(X)$.

Sol: Como $\lambda(X)\infty$, existe una sequencia $(X_n)_n$ de subconjuntos medibles disjuntos de X tal que $\lambda(X_n) = 2^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$(Ejercicio!). Se considera

$$f = \sum_{n\geq 1} n\chi_{X_n} .$$

Como los X_n son medibles disjuntos y f es no negativa, se tendrá que

$$f = \sum_{n\geq 1} n^p \chi_{X_n} .$$

Scanned with CamScanner

Luego, por el teorema de convergencia monótona(verificar!), se tendrá que

$$||f||_p^p = \int_X \sum_{n\geq 1} n^p \chi_{X_n} d\lambda = \sum_{n\geq 1} n^p \int_{X_n} d\lambda = \sum_{n\geq 1} n^p 2^{-n} < \infty \,,$$

por tanto $f \in L^p(X)$ para $p \geq 1$. Pero $f \notin L^\infty(X)$, dado $M > 0$ sea $S_M := \{x \in X \,:\, f(x) > M\}$. Como para cada numero positivo existe un entero tal que $M < n$, entonces se tendrá que

$$X_n = \{x \in X \,:\, f(x) = n\} \subset S_n \,.$$

Por tanto, $\lambda(S_M) \geq 2^{-n} > 0$ para todo $M > 0$. O sea $||f||_\infty = \infty$, por tanto $f \notin L^\infty(X)$.

5. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita. Suponga que $f \in L^\infty(X)$ con $||f||_\infty > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $\alpha_n := ||f||_n^n$. Muestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = ||f||_\infty \,.$$

Sol: Primero se hace notar que

$$\alpha_n = \int_X |f|^n \, d\mu \leq ||f||_\infty^n \, \mu(X) \,,$$

por tanto para todo $n \in \mathbb{N}$ $\alpha_n \in (0, \infty)$. Además,

$$\alpha_{n+q} = \int_X |f|^n \, |f| \, d\mu \leq ||f||_\infty \, \alpha_n \,.$$

Por tanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leq ||f||_\infty \,.$$

Por otro lado, como $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} = 1$, por la desigualdad de Hölder se tendrá que

$$\begin{aligned}
\alpha_n = ||f^n \chi_X||_1 &\leq ||f^n||_{\frac{n+1}{n}} \, ||\chi_X||_{n+1} = ||f||_{n+1}^n \, \mu(X)^{\frac{1}{n+1}} \\
&= \frac{\alpha_{n+1} \mu(X)^{\frac{1}{n+1}}}{||f||_{n+1}} \,,
\end{aligned}$$

o bien,

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \geq ||f||_{n+1} \, \mu(X)^{\frac{1}{n+1}} \,.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(X)^{\frac{1}{n+1}} = 1$ por ser un espacio de medida finita, se tendrá que

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} &\geq \liminf_{n\to\infty} ||f||_{n+1} \, \mu(X)^{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} ||f||_{n+1} \, \mu(X)^{\frac{1}{n+1}} \\
&= ||f||_\infty \,.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = ||f||_\infty \,.$$

Scanned with CamScanner

6. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Defina la integral indefinida de f como

$$F(x) = \int_{[-\infty,x]} f d\lambda\,.$$

Muestre que F es de variación acotada y que $||F||_{BV(\mathbb{R})} = ||f||_{L^1}$.

Sol: Recordar que

$$||F||_{BV(\mathbb{R})} = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})|\; x_0 < \ldots < x_n,\; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Nos intereza estimar en primer lugar $|F(x_i) - F(x_{i-1})|$ con $x_i > x_{i-1}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
|F(x_i) - F(x_{i-1})| &= \left|\int_{[-\infty,x_i]} f d\lambda - \int_{[-\infty,x_i]} f d\lambda\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} f(\chi_{[-\infty,x_i]} - \chi_{[-\infty,x_{i-1}]}) d\lambda\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |f| \left|\chi_{[-\infty,x_i]} - \chi_{[-\infty,x_{i-1}]}\right| d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f| \chi_{[-\infty,x_i]\Delta[-\infty,x_{i-1}]} d\lambda = \int_{\mathbb{R}} |f| \chi_{(x_{i-1},x_i]} d\lambda\,.
\end{aligned}$$

Luego, para $x_0 < \ldots < x_n$, se tendrá que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f| \sum_{i=1}^{n} \chi_{(x_{i-1},x_i]} d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f| \chi_{\bigcup_{i=1}^{n}(x_{i-1},x_i]} d\lambda \\
&\leq ||f||_{L^1}\,.
\end{aligned}$$

Por tanto $||f||_{BV(\mathbb{R})} \leq ||f||_{L^1}$ y por tanto es de variación acotada. Para la otra desigualdad se usará un argumento de densidad de las funciones simples. En efecto, sea $f = \chi_A$ con A un conjunto medible con medidad positiva finita.
Dado $\epsilon > 0$ existe una secuencia creciente de numeros reales $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ tal que $\lambda\left(\bigcup_{i\geq 1}(x_{i-1}, x_i] \setminus A\right) < \epsilon$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| &= \lambda\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n}(x_{i-1}, x_i]\right) \\
&\geq \lambda(A) - \epsilon = ||f||_{L^1} - \epsilon.
\end{aligned}$$

Scanned with CamScanner

Tomando supremo sobre las secuencias crecientes se cumple la desigualdad $||F||_{BV(\mathbb{R})} \geq ||f||_{L^1} - \epsilon$. Como lo anterior se cumple para todo $\epsilon > 0$ se tendrá que $||F||_{BV(\mathbb{R})} \geq ||f||_{L^1}$.
Se deja como ejercicio escribir todos los detalles restantes!

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz, muestre que $||f'||_{L^\infty} = Lip(f)$.

<u>Sol:</u> Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x)$ existe. Para t suficientemente chico, se tendrá que

$$|f(x+t) - f(x)| \leq Lip(f)t \Rightarrow \frac{|f(x+t) - f(x)|}{t} \leq Lip(f) .$$

Haciendo tender t a 0, tendremos que $|f'(x)| \leq Lip(f)$ y por tanto

$$||f'||_{L^\infty} \leq Lip(f) .$$

Sean $\epsilon > 0$ y $L := ||f'||_{L^\infty}$.
Definimos $x_t := ty + (1-t)x$ y el conjunto

$$I_\epsilon := \{t \in [0,1] \ : |f(x) - f(x_s)| \leq (L+\epsilon)\,|x - x_s|\,, s \in [0,t]\} .$$

Afirmamos que este conjunto es de la forma $[0, t_0]$(Ejercicio!) con $t_0 \leq 1$. Notar que si $t_0 = 1$, entonces

$$|f(x) - f(x_1)| \leq (L+\epsilon)\,|x - x_1| \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq (L+\epsilon)\,|x-y| ,$$

y haciendo tender ϵ a 0, se tendrá que $Lip(f) \leq ||f'||_{L^\infty}$. Por tanto queremos mostrar que $t_0 = 1$.
En efecto, como f es diferenciable en x_{t_0} y $|f'(x_{t_0})| \leq L$, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(y) - f(x_{t_0})| \leq (L+\epsilon)\,|y - x_{t_0}|\,, \ \forall\, |y - x_{t_0}| < \delta \text{ .(Taylor)}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_s)| &\leq |f(x) - f(x_{t_0})| + |f(x_{t_0}) - f(x_s)| \\
&\leq (L+\epsilon)\left(|x - x_{t_0}| + |x_{t_0} - x_s|\right) \\
&= (L+\epsilon)\left(t_0 + |s - t_0|\right)|x-y| \\
&= (L+\epsilon)s\,|x-y| = (L+\epsilon)\,|x - (\,(1-s)x + sy)| \\
&= (L+\epsilon)s\,|x - x_s|\ ,
\end{aligned}$$

si $t_0 \leq s$ y $|x_{t_0} - x_s| < \delta \Leftrightarrow s < t_0 + \frac{\delta}{|x-y|}$. Por tanto t_0 no será supremo de I_ϵ a menos que $t_0 = 1$.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa. Muestre que f es dos veces diferenciable para casi todo punto.

Sol: Primero se mostrará que las funciones convexas son localmente lipschitz. En efecto, basta solo demostrar para intervalos $[a,b]$.
Notar que como f es convexa, para todo $\lambda \in [0,1]$, se cumple que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\ , \forall\, x, y \in [a,b] .$$

Scanned with CamScanner

En particular para c, d tales que $c < a < b < d$ se tendrá que

$$\frac{f(a)-f(c)}{a-c} \leq \frac{f(y)-f(x)}{x-y} \leq \frac{f(d)-f(b)}{d-b} \text{ . (Ejercicio!)} \qquad (1)$$

Luego, tomando $C := \max\left\{\left|\frac{f(a)-f(c)}{a-c}\right|, \left|\frac{f(d)-f(b)}{d-b}\right|\right\}$, se tendrá que

$$|f(y)-f(x)| \leq C\,|x-y| \ , \forall\, x, y \in [a,b] \, .$$

Con esto demostramos que f es localmente diferenciable para casi todo punto de $\mathbb{R}$. Por el ejercicio anterior sabemos que f' es acotada por la constante $Lip(f)$ y por (1) f' es monotona creciente, por tanto existe f'' para casi todo punto y es equivalente a una función integrable.

9. Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua y ϕ una función diferenciable con soporte compacto en (a,b). Muestre que

$$\int_{[a,b]} F'\phi dx = -\int_{[a,b]} F\phi' dx \, .$$

Scanned with CamScanner

Sea $y \in \delta V$ fijo, $\epsilon > 0$. Entonces hay $x_1 : \|x_1\| < 1$ y $\|y - \Lambda x_1\| < \delta \frac{\epsilon}{2}$. Reemplacemos el vector y por el vector $y - \Lambda x_1$. Entonces hay x_2 :

$$\|x_2\| \leq \frac{\delta \frac{\epsilon}{2}}{\delta} = \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad \|y - \Lambda x_1 - \Lambda x_2\| < \delta \frac{\epsilon}{2^2}$$

Supongamos que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ han sido elegidos de modo que

$$\|y - \Lambda x_1 - \Lambda x_2 - \cdots - \Lambda x_n\| < \frac{\delta \epsilon}{2^n}$$

Entonces por lo que se demostró y tomando $y - \Lambda x_1 - \Lambda x_2 - \cdots - \Lambda x_n$ en vez de y, tenemos que hay x_{n+1} con $\|x_{n+1}\| < \frac{\epsilon}{2^n}$ y $\|y - \sum_1^{n+1} \Lambda x_i\| < \frac{\delta \epsilon}{2^{n+1}}$.

Sea $s_n = \sum_1^n x_i$. Sea $m > n$,

$$\|s_m - s_n\| \leq \sum_{i=n+1}^{m} \|x_i\| < \epsilon \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{2^{i-1}} < \epsilon$$

luego s_n es de Cauchy. Sea $x = \lim s_n$. Entonces

$$\|s_n\| < 1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\epsilon}{2^{n-1}} = 1 + \frac{\epsilon}{2} \frac{(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} \to 1 + \epsilon$$

luego $\|x\| < 1 + \epsilon$ y además $\Lambda s_n \to \Lambda x$. Pero por construcción $\Lambda s_n \to y$ luego $\Lambda x = y$.

Hemos demostrado que para todo $\epsilon > 0$ $\delta V \subset \Lambda V \subset \Lambda(1 + \epsilon)U$ o sea

$$\frac{\delta}{1+\epsilon} V \subset \Lambda U \quad \Rightarrow \quad \delta V = \bigcup_{\epsilon > 0} \frac{\delta}{1+\epsilon} V \subset \Lambda U \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.80 *Sean X, Y Banach. Sea $T : X \to Y$ lineal, continua, 1-1 y sobre. Entonces T^{-1} es continua*

Nota: T^{-1} continua significa $\|T^{-1}y\| \leq \|T^{-1}\|\|y\|$ o sea

$$\|x\| \frac{1}{\|T^{-1}\|} \leq \|Tx\|$$

luego T^{-1} continua significa que hay $\delta > 0$ tal que $\|Tx\| \geq \delta \|x\|$ para todo $x \in X$.

2.12 Teorema del gráfico cerrado

Teorema 2.81 (Teorema del gráfico cerrado) *Sean B, B' espacios de Banach. Sea $T : B \to B'$ lineal. Se define el* gráfico de T *como el conjunto*

$$gr(T) = \{(x, Tx) : x \in B\}.$$

Defínase en $B \times B'$

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \quad x \in B\,, \quad y \in B'.$$

T es continua si y sólo si $gr(T)$ es cerrado.

Scanned with CamScanner

Demostración: Supongamos que T es continua. Sea (x, y) punto límite de $gr(T)$. Entonces hay sucesión $\{(x_n, Tx_n)\}$ tal que

$$\|(x_n - x, Tx_n - y)\| = \|x_n - x\| + \|Tx_n - y\| \to 0$$

Entonces $x_n \to x$, $Tx_n \to y$. Por continuidad $Tx_n \to Tx$. Como el límite es único, $y = Tx$ luego (x, y) está en $gr(T)$. Por lo tanto $gr(T)$ contiene todos sus puntos límite, esto es, $gr(T)$ es cerrado.

Supongamos ahora que $gr(T)$ es cerrado. Puesto que T es lineal, $gr(T)$ es claramente un subespacio vectorial de $B \times B'$. Dado que B y B' son espacios de Banach, y dada la manera en que fue definida la norma en $B \times B'$, se tiene que $B \times B'$ es un espacio de Banach. Toda sucesión de Cauchy en $gr(T)$ converge entonces en $B \times B'$, y como $gr(T)$ es cerrado, la sucesión converge en $gr(T)$. Por lo tanto $gr(T)$ es un espacio de Banach.

La transformación $\Lambda_1 : gr(T) \to B$ dada por $\Lambda_1((x, Tx)) = x$ es lineal, continua, 1-1 y sobre. Por lo tanto, por el teorema de la transformación abierta, la inversa Λ_1^{-1} de Λ_1 es una función continua. El operador lineal $\Lambda_2 : gr(T) \to B'$ definido por $\Lambda_2((x, Tx)) = Tx$ es también continuo. Por lo tanto T, que se obtiene de componer Λ_2 con Λ_1^{-1}, es una transformación continua de B en B'. ∎

2.13 Ejercicios

1. (a) **Sea B espacio de Banach. Sean M y N subespacios lineales tales que $B = M \oplus N$. Sea $z \in B$, $z = x + y$, con $x \in M$, $y \in N$. Demuestre que $\|z\|' \equiv \|x\| + \|y\|$ es un norma en B. Sea $B' \equiv (B, \| \|')$. Demuestre que B' es espacio de Banach si M y N son subespacios cerrados de B.**

   $\| \|'$ *es una norma:*

   - $\|x\|$, $\|y\|$ son positivas, luego $\|z\|' \geq 0$ para todo z. $\|z\| = 0$ sólo si $\|x\| = \|y\| = 0$, i.e., $z = 0$.
   - $\|\lambda z\|' = \|\lambda x\| + \|\lambda y\| = |\lambda|\|x\| + |\lambda|\|y\| = |\lambda|\|z\|'$
   - $\|z_1 + z_2\|' = \|x_1 + x_2\| + \|y_1 + y_2\| \leq \|x_1\| + \|y_1\| + \|x_2\| + \|y_2\| = \|z_1\|' + \|z_2\|'$

   Veamos ahora que B' es completo. Sea $\{z_n\}$ de Cauchy en B'. Entonces $\|x_r - x_s\| \leq \|z_r - z_s\|' < \epsilon$. Entonces $\{x_n\}$ es de Cauchy en B. Puesto que B es un espacio de Banach, $\{x_n\}$ converge a algún $x \in B$, y dado que M es cerrado, $x \in M$. Lo mismo sucede con la sucesión $\{y_n\}$ que converge a un $y \in N$. Sea $z = x + y$, se tiene que

   $$\|z_n - z\|' = \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2},$$

   si n es lo suficientemente grande, luego $z_n \to z$.

Scanned with CamScanner

(b) **Sea $P : B \to B$ lineal, continua y tal que $P^2 = P$. Sean $M = \operatorname{ran} P$, $N = \ker P$. Demuestre que $B = M \oplus N$ y que M y N son cerrados.**

Sea $x \in B$. $y = Px \in M$. Como $Py = P^2x = Px$ entonces $P(x - y) = 0 \Rightarrow y - x \in N$. Y como $x = y + (x - y)$, entonces $B = M + N$.

Sea $x \in B$. Sup $x \in M \cap N$. $Px = 0 \Rightarrow Px \in N$ y además $\exists y : x = Py$. Pero $Px = P^2y = x$ y $Px = 0$, entonces $x = 0$. Por lo tanto, $B = M \oplus N$.

Sea y punto límite de N, entonces hay $\{y_n\}$ tal que $y_n \to y$. Como P es continua, $Py_n \to Py$, y como $P_{y_n} = 0$ para todo n entonces $Py = 0$. Por lo tanto, N es cerrado.

Sea x punto límite de M. Hay $\{x_n\}$ tal que $x_n \to x$. Como P es continua $Px_n \to Px$, y como $x_n \in M$ para todo n, $Px_n = x_n$. Por lo tanto $x = Px$, de donde finalmente $x \in M$.

(c) **A la inversa, sean M, N subespacios cerrados de B tales que $B = M \oplus N$. Sea $z \in B$, $z = x + y$, $x \in M$, $y \in N$. Defínase $P : B' \to B$ por $Pz = x$. Demuestre que P es lineal, $P^2 = P$, P es continua, $\operatorname{ran} P = M$, $\ker P = N$.**

$P(\alpha z_1 + z_2) = P((\alpha x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)) = \alpha x_1 + x_2 = \alpha P z_1 + P z_2$, luego P es lineal.

$PPz = Px = x = Pz$ para todo $z \in B$ luego $P^2 = P$.

Sea $x \in M$. Entonces $x = Px$, luego $x \in \operatorname{ran} P$. De la definición de P es inmediato que $Pz \in M$ para todo $z \in B$, luego $M = \operatorname{ran} P$.

Sea $x \in N$. $Px = 0$, luego $x \in \ker P$. A la inversa, sea $z \in \ker P$. $Pz = 0$, entonces $z = 0 + y$, con $y \in N$, esto es, $z \in N$. Por lo tanto $N = \ker P$.

Finalmente demostremos que P es continua haciendo uso del teorema del gráfico cerrado. Sea $(z, \xi) \in B \times M$ un punto límite de

$$gr(P) = \{(z, Pz) : z \in B\} = \{(x + y, x) : x \in M,\ y \in N\}.$$

z puede escribirse como $z = x + y$, con $x \in M$ e $y \in N$. Puesto que (z, ξ) es punto límite de $gr(P)$, hay sucesión

$$(z_n, x_n), \quad z_n = x_n + y_n, \quad x_n \in M, \quad y_n \in N$$

de elementos en $gr(P)$ que converge a (z, ξ), i.e., $z_n \to z$, $x_n \to \xi$. De esto se tiene también que

$$\lim_{n\to\infty} y_n - y = \lim_{n\to\infty} (z_n - z) + (x - x_n) = 0 + (x - \xi) = \lim_{n\to\infty} x - x_n$$

Pero $y_n - y \in N$, $x - x_n \in M$ para todo n, luego $x - \xi$ es punto límite tanto de M como de N. Dado que M y N son cerrados y $B = M \oplus N$ se tiene

Scanned with CamScanner

necesariamente que $\xi = x = Pz$, i.e., $(z, \xi) \in gr(P)$. Por lo tanto el gráfico de P es cerrado y esto implica que P es continua. ■

2. **Sea H espacio de Hilbert, $T : H \to H$ lineal tal que**

$$< x, Ty > = < Tx, y > \quad \forall x, y \in H ,$$

donde $< x, y >$ denota el producto interior definido en H. Demuestre que T es continuo.

En primer lugar, si $\alpha_n \to \alpha$ entonces $< z, \alpha_n > \to < z, \alpha >$, puesto que

$$| < z, \alpha_n > - < z, \alpha > | = | < z, \alpha_n - \alpha > | \leq \|z\| \|\alpha_n - \alpha\| .$$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en H tal que $x_n \to x$ y $Tx_n \to y$. Sea $z = y - Tx$. Por un lado $< z, Tx_n > \to < z, y >$, pero por otro lado

$$< z, Tx_n > = < Tz, z_n > \to < Tz, x > = < z, Tx > .$$

Como el límite es único

$$< z, y > = < z, Tx > \Rightarrow < z, y - Tx > = 0 \Rightarrow < z, z > = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow y = Tx .$$

Por lo tanto, en virtud del teorema del gráfico cerrado, T es continuo. ■

3. (a) **Sea N espacio normado, M subespacio cerrado de N. Demuestre que la proyección canónica $T : N \to N/M$ dada por $T(x) = x + M$ es lineal, continua y que $\|T\| \leq 1$**

- $T(x + y) = T(x) + T(y) = \{x + m : m \in M\} + \{y + m' : m' \in M\} = \{x + m + y + m' : m + m' \in M\} = x + y + M$.

- $T(\alpha x) = \{\alpha x + m : m \in M\} = \{\alpha x + \alpha m : m \in M\} = \alpha(x + M)$.

Finalmente,

$$\|T(x)\| = \inf_{m \in M} \|x + m\| \leq \|x + 0\| = \|x\| ,$$

luego T es continua y $\|T\| \leq 1$.

(b) **Sea N' espacio normado, $T : N \to N'$ lineal continua. Sea $M = \ker T$. Demuestre que T induce una transformación lineal natural $T' : N/M \longrightarrow N'$ tal que $\|T'\| = \|T\|$.**

Sea $x + M \in N/M$. Defínase $T'(x + M) = Tx$. Esta función está bien definida ya que todo elemento $y \in x + M$ es de la forma $y = x + m$, con $m \in M$, esto es, con $Tm = 0$, luego $Ty = Tx$ para todo $y \in x + M$.

Scanned with CamScanner

Prueba 3 Análisis Real

Responda solo 4 de los 6 problemas propuestos. Tiempo 3 hrs.

Fecha: 08 de Julio 2010.

1. Para E un espacio métrico compacto considere una función $f : E \to E$ tal que existe $\rho > 0$ y $\lambda \in (0,1)$ satisfaciendo

$$d(x,y) < \rho \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x,y).$$

Demuestre que existe un único punto fijo $x_0 \in E$ para f, i.e. $f(x_0) = x_0$.
(Ayuda: Deduzca que para k suficientemente grande f^k es una contracción (3.5 pts), donde $f^k = f \circ f^{k-1}$)

2. I. Sea $A = Graf(h)$, donde $h(x) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{x}\right)$, $x \in (0,1]$ y $h(0) = \dfrac{1}{2}$.
Demuestre que A NO es arco-conexo. (3.0 pts). ¿ A es conexo ? (1.0 pts).
(Ayuda: Probar que todo camino en A, $\phi : [0,1] \to A$ es constante).

   II. Considere el conjunto $B \subset \mathbb{R}^2$ formado por los gráficos de las funciones g_n donde $g_n(t) = t^n$, $n \geq 1, t \in [0,1]$. Decida argumentando si los siguientes conjuntos son conexos y encuentre sus componentes conexas:

$$B, \quad D = B \cup \{(1,0)\}, \quad G = D \setminus \{(0,0)\}, \quad G \setminus \{(1,1)\} \qquad (2.0 \text{ pts})$$

arco-conexo ~~conexo~~ conexo

3. Considere la métrica $d_\infty(f,g) = \sup_{t \in [0,\infty)} |f(t) - g(t)|$ y el conjunto

$$K = \left\{ g : [0,\infty) \to \mathbb{R} \text{ derivables}/ \ |g(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}, \ |g'(x)| \leq 2010 \right\}.$$

   a) Demuestre que $K_{[a,b]}$, el conjunto de funciones en K restringidas al intervalo compacto $[a,b] \subseteq [0,\infty)$ es ~~compacto~~ TA en $C([a,b])$ con la métrica del supremo (2.0 pts).

   b) Demuestre que K es ~~compacto~~ TA (3.0 pts) ¿ Y si consideramos la métrica integral $d_1(f,g) = \int_0^\infty |f(t) - g(t)| dt$? (1.0 pts).

4. Sean V y W dos espacios normados y $u : V \to W$ una función lineal. Demuestre que son equivalentes:

   I) u es continua en $x_0 \in V$ (2.0 pts)

   II) $u(S_1)$ es $\|\cdot\|_W$-acotado, donde $S_1 = \{x \in V / \|x\|_V = 1\}$ (1.5 pts).

Deduzca que si $u : V \to W$ es una función lineal y continua entonces transforma totalmente acotados (1.0 pts) , completos (0.5 pts) y relativamente compactos (1.0 pts) en conjuntos similares.

$$\left\| u\left(\frac{z}{\|z\|_V}\right) \right\|_W \leq M$$

$$\frac{1}{\|z\|_V} \|u(z)\|_W \leq M$$

$$\|u(x)\|_W \leq M \|x\|_V$$

$$z \in V \Rightarrow \frac{z}{\|z\|_V} \in S_1$$

$$\|x - a\|_V < \delta \Rightarrow \|u(x) - u(a)\|_W < \varepsilon$$

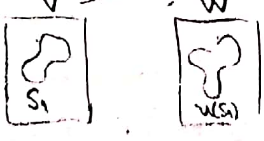
$$\|x\|_V < \delta \Rightarrow \|u(x)\|_W < \varepsilon$$

$$u\left(\frac{z}{\|z\|_V}\right) = \frac{1}{\|z\|_V} u(z)$$

$$\left\| u\left(\frac{z}{\|z\|_V}\right) \right\|_W = \left\| \frac{1}{\|z\|_V} u(z) \right\|_W$$

$$= \frac{1}{\|z\|_V} \|u(z)\|_W < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|u(z)\|_W < \|z\|_V \varepsilon$$



Scanned with CamScanner

5. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2(1-x) & x \in (\frac{1}{2}, 1] \\ 2 & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) Extienda f a $[-1, 1]$ en forma impar. Dibuje el gráfico de f. (1.0 pts)

b) Obtenga la serie de Fourier de la función extendida y decida su convergencia. (2.0 pts)

c) Calcule y justifique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ (1.0 pts)

d) Calcule y justifique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ (2.0 pts)

6. Sea $k_n : [-\pi, \pi] \to [0, \infty)$ una sucesión de funciones pares, $2\pi-$periódicas tales que para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(s)ds = 1 \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^r k_n(s)ds = \pi \quad \forall r \in (0, \pi)$$

Demuestre que si $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ es una función Riemann integrable $2\pi-$periódica y continua en t_0 entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(t_0 - s)\varphi(s)ds = \varphi(t_0) \quad (2.0 \text{ pts})$$

y que la convergencia es para todo $t_0 \in [-\pi, \pi]$ y uniformemente si φ es continua (1.5 pts)
Deduzca del resultado anterior los Teoremas de Fejer (1.5 pts) y de Poisson (1.0 pts).

$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{(-1)}{2}$

$\cos(\alpha) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)$

$= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$

$= \cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 + \cos^2\frac{\alpha}{2}$

$= 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos(\alpha)+1}{2}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$

$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(n\pi)}{2}}$

$= \sqrt{\frac{1+(-1)^n}{2}}$

$x = -t$

$-2\frac{\operatorname{sen}(kx)}{k}\Big|_{-1}^{1}$

$\int -2\cos(\ ) - 2x\cos(\ )$

$-2-2x$

$-\frac{x^2}{2} - 2x$

$\neq f_k\left(\lim_{p\to\infty} x_{n_p}\right) \neq f_k\left(\lim_{p\to\infty} x_{n_p}\right)$

$= x_0$

$= f_{k+1}(x_0)$

$f(x_0) = f_{k+1}\left(\lim x_{n_p}\right)$

$x_0 = \lim_{p\to\infty} x_{n_p} \Rightarrow f(f_k(x_0)) = f(f_k(\lim x_{n_p}))$

$\leq M\|x-y\|_v$

$\|x-y\|_v < \delta \Rightarrow \|u(x)-u(y)\|_w = \|u(x-y)\|_w$

Scanned with CamScanner

Universidad de Chile
Departamento de Matemáticas

ANÁLISIS REAL - PSEUDO PRUEBA 2

Profesor: Dr. Manuel Pinto Jimenez
Ayudante: Diego A. Jauré Romero

¡Es individual!

(1) Responda justificando $x(x-2)$ $f(]-1/2,$

$x^2-2x.$

(a) La función $x \to -1+(x-1)^2$ es abierta y no cerrada.

(b) $|\cdot|$ y d_e no son métricas equivalentes en $\mathbb{R}$ ¿$\mathbb{R}$ es relativamente compacto en $\overline{\mathbb{R}}$?

(c) ¿ℓ_2 es cerrado en c_0? NO

(d) ¿El conjunto $\{\frac{e_i}{i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es compacto en ℓ_p? → No! $\vec{0} \notin \{\frac{e_i}{i}\}_{i\in\mathbb{N}}$

(2) (E_i, d_i) son espacios métricos compacto para cada $i = 1, 2$ si y sólo si $E_1 \times E_2$ es compacto con la métrica del máximo ¿Y con la métrica de la suma y la euclideana? ¿Cuál es el correspondiente resultado para relativamente compacto?

(3) Encuentre, justificando, la completación de $\mathbb{Q}^n$ con la mátrica usual.

(4) Sea E un espacio métrico compacto y encadenable, esto es, que si $x, y \in E$ entonces para cada $\epsilon > 0$ existe una familia $\{z_i\}_{i=1}^m$ tal que

$$\begin{aligned} d(x, z_1) &< \epsilon \\ d(z_i, z_{i+1}) &< \epsilon \\ d(z_m, y) &< \epsilon \end{aligned}$$

Entonces si $f : E \to E$ cumple con la propiedad $d(f(x), f(y)) \le d(x, y)$ para todo $x, y \in E$ tenemos que f tiene un único punto fijo ¿Sigue ocurriendo lo mismo si f no es encadenable?

(5) Encuentre en ℓ_p, $1 \le p < \infty$, un criterio para que un conjunto cerrado y acotado sea compacto (¡Y demuestre!) ¿Y para relativamente compacto? ¿Qué pasa para $p = \infty$?

(4) Sea E un espacio métrico compacto y $\mathcal{E}$-encadenable
i.e.: dados $x, y \in E$, existen $\{x = z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = y\} \subseteq$
tales que $d(x_i, x_{i+1}) < \mathcal{E}$, $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$
$\alpha \in]0,1[$, Si $f : (E, d) \longrightarrow (E, d)$ cumple con la propiedad:
Si $d(x,y) < \mathcal{E} \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \alpha\, d(x,y)$, $\forall x, y \in E$
Demuestre que:
i) f tiene un único punto fijo
ii) Si E no es $\mathcal{E}$-encadenable, Qué es lo que puede ocurrir? Muestre ejemplos.

Scanned with CamScanner

Universidad de Chile
Departamento de Matemáticas

ANÁLISIS REAL - AYUDANTÍA 8

Profesor: Dr. Manuel Pinto Jimenez
Ayudante: Diego A. Jauré Romero

Teorema de punto fijo de Banach, funciones continuas, completación y conjuntos compactos.

(1) Resuelva los siguientes problemas.

- (a) Considere la función $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, definida por $f(x) \triangleq 2^{-\frac{x}{2}}$ para todo $x \in [0, +\infty)$. Vea que f es una contracción y obtenga que si $a$es un punto fijo de f entonces $=a$ cumple la ecuación $x^2 = 2^x$.
- (b) Considere la función $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, definida por $f(x) \triangleq \frac{1}{x+a}$ para todo $x \in [0, +\infty)$ y $a > 1$, para encontrar una raiz positiva del polinomio $p(x) = x^2 + ax - 1$.

(2) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Demuestre que f no es uniformemente continua sobre $\mathbb{R}$ con la métrica usual.
- (b) Restrinja f a $(0, +\infty)$ y encuentre una función $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ de modo que la función $f : (0, +\infty) \to (\mathbb{R}, d_h)$ es uniformemente continua. ¿Existe una función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, d_h)$ sea uniformemente continua?

demi-taske.

(3) Sea $A \subset E$, entonces la función $d^A : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, definida por $d^A(x) \triangleq d(A, x)$, es continua. Luego demuestre que los conjuntos $\{x \in E;\ d(A, x) < r\}$ y $\{x \in E;\ d(A, x) \leq r\}$ son abiertos y cerrados respectivamente.

(4) Demuestre que la función identidad $id : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, d_3)$, $d_3(x, y) = |x^3 - y^3|$ no es uniformemente continua.

(5) Definamos el conjunto $C \triangleq \{x \in \ell_1;\ \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \leq 1\}$.

- (a) Demuestre que $(C, \|\cdot\|_1)$ como subespacio métrico de ℓ_1 es cerrado.
- (b) Demuestre que $(C, \|\cdot\|_\infty)$ como subespacio métrico de c_0 no es cerrado.
- (c) Vea si la función identidad $i : (C, \|\cdot\|_1) \to (C, \|\cdot\|_\infty)$ es continua ¿Qué ocurre con la identidad inversa?.

(6) Obtenga la completación del espacio $\mathbb{Q}^n$ dotado de la métrica usual.

(7) Demuestre las siguientes afirmaciones

- (a) Sea $E \subset M$ con M espacio métrico completo. Demuestre que $\widetilde{E}$ es isométrico a $\overline{E}$.
- (b) Si $E_1 \cong E_2$ entonces no necesariamente $\widetilde{E_1} \cong \widetilde{E_2}$. Esto sí ocurre si el homeomorfismo es uniforme

(8) Demuestre las siguientes afirmaciones.

- (a) Si M es un espacio métrico completo, entonces $A \subset M$ es totalmente acotado si y sólo si $\overline{A}$ es compacto.
- (b) Es espacio métrico discreto es compacto si y sólo si es finito.
- (c) El cubo de Hilbert es compacto.
- (d) $\mathbb{R}$ no es compacto en $\overline{\mathbb{R}}$ (recta extendida).

(9) Un conjunto es compacto si y sólo si cumple la propiedad de intersección infinita: Si $(C_\lambda)_{\lambda \in I}$ es una familia de conjuntos cerrados tal que para cada $I' \subset I$ finito se cumple que $\cap_{\lambda \in I'} C_\lambda \neq \phi$ entonces $\cap_{\lambda \in I} C_\lambda \neq \phi$.

Scanned with CamScanner

Universidad de Chile
Departamento de Matemáticas

30 de Abril de 2011

ANÁLISIS REAL - PRUEBA 2

Profesor: Dr. Manuel Pinto Jiménez
Ayudante: Diego A. Jauré Romero

Resuelva sólo cuatro problemas. La prueba es individual. Tiene 3 horas para realizarla ¡Suerte!

(1) Responda demostrando o con contraejemplo.

(a) Si dos espacios E_1 y E_2 son homeomorfos
  (i) ¿Sus completaciones también lo son? [1 pt]
  (ii) ¿Y si el homeomorfismo es uniforme? [1 pt].

(b) Considere la proyección $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (con $\pi_1(x_1, x_2) = x_1$ para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)
  (i) Demuestre que es una función abierta [1 pt]
  (ii) Demuestre que no es una función cerrada [0.5 pts]
  (iii) ¿Y si $\mathbb{R}$ es cambiado por $[-1, 1]$? [1 pts]

(c) Si $\widetilde{C}$ es la completación de $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$, entonces la función característica $\chi_{\mathbb{Q}} \in \widetilde{C}$. [1.5 pts]

(2) Sean E, F espacios normados.

(a) Sea $f : E \to F$ una función lineal.
  (i) Demuestre que si f es continua en E entonces

$$\sup\{\|f(x)\|_F \,;\; \|x\|_E = 1\} < +\infty. \quad [2 \text{ pts}]$$

  (ii) Demuestre que si $\sup\{\|f(x)\|_F ;\; \|x\|_E = 1\} < +\infty$ entonces f es continua. [2 pts]

(b) En E dos normas se dicen equivalentes si las métricas inducidas por sus normas lo son.
  (i) Demustre que si $\|\cdot\|_1$ es equivalente a $\|\cdot\|_2$ entonces

$Id: E, \|\cdot\|_1 \longrightarrow \|\cdot\|_2$ cont.

$$\alpha_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \alpha_2 \|x\|_1$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ m $\|x-y\|_1 < \delta \Rightarrow \|x-y\|_2 < \varepsilon$

  para todo $x \in E$. [1 pt]
  (ii) Demuestre que si $\alpha_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \alpha_2 \|x\|_1$ entonces $\|\cdot\|_1$ es equivalente a $\|\cdot\|_2$. [1 pt]

(3) Sean E un espacio métrico compacto, considere la sucesión de funciones $\{f_n : E \to E\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $f_n \rightrightarrows f$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $f : E \to E$. Suponga que cada f_n es una contracción.

(a) Demuestre que f tiene un punto fijo z: $z = f(z)$ [4 pts]; y que es único [1 pt] si

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \;\; \forall x, y \in E.$$

(b) ¿Es cierto este resultado con sólo la completitud? [1 pt]

Scanned with CamScanner

Vanina

Analisis

Guía $3^2 - 2^2$ de ejercicios ayudantia

Ayudante=Fernando Venegas.

si bien son solo 2 problemas por persona, se suguiere trabajar en todos los ejercicios.
Ejercicios 4
En esta guia (al igual que en las guias que reciban en el resto de su vida) puede haber mentiras y gravisimas faltas a la ortografíá.
Tambien hay que considerar que cada "demuestre" debe ser un "demuestre o refute"

Definicion: un conjunto es compacto ssi es totalmente acotado y cerrado.

1. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua y decreciente tal que

$$\int_0^\infty |f(t)|^p \, dt < \infty$$

considere la función

$$F : (0, \infty) \to \ell_p : t \mapsto F_t$$
$$F_t(j) := f(tj)$$

   (a) Pruebve que esta función está bien definida y demuestre (o refute) que es continua.
   (b) ¿Es uniformemente continua?¿de lipschitz? ¿lo es en algún subconjunto abierto de su dominio?
   (c) ¿es abierta?¿es cerrada?¿y si se restringe su dominio?
   (d) Estudie la compacidad de $F((r,\infty))$,$F([r,\infty))$, $F([r,s])$ $(r \neq 0)$

2. Considere $B(A, B) = \{f : A \to B \mid f \text{ acotada}\}$ dotado de la norma del supremo.
Defina la "función P de pibe" (del pibe de oro)

$$P : \ell_p \to B([-1,1], \mathbb{R}) : a \mapsto P_a$$

$$P_a(t) := \sum_{j=0}^{\infty} t^j a(j)^p$$

   (a) Demuestre que P_a es efectivamente una función en $B([-1,1], \mathbb{R})$. Y que es una función continua para todo $a \in \ell_p$. (delecho diferenciables en (-1,1))
   (b) Estudie $P : \ell_1 \to C([-1,1])$ ¿es continua?¿es lineal?¿de lipschitz?
   (c) Demuestre (o refute) que si $B \subseteq \ell_p$ es totalmente acotado entonces $P(B)$ es equicontinuo, es decir, dado $t_0 \in [-1,1]$, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \epsilon \ \forall f \in P(B)$$

   (d) Dado $B \subseteq \ell_p$ totalmente acotado y $a_0 \in B$, considere el conjunto

$$\pi_B = \{x : B \to \mathbb{R} \mid x(a) = P_a \circ x(a_0) \text{ si } a \neq a_0, \text{ y } x(a_0) \in [-1,1]\}$$

demuestre (o refute) que $\pi_B \subseteq B(B, \mathbb{R})$ y que es compacto en este último.

Scanned with CamScanner

3. Sea

$$\ell_p(\mathbb{Z}) = \left\{ a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \mid \sum_{j\in\mathbb{Z}} |a(j)|^p < \infty \right\}$$

dado $\sigma \in Biy(\mathbb{Z})$ defina $T_\sigma : \ell_p(\mathbb{Z}) \to \ell_p(\mathbb{Z}) : a \mapsto a \circ \sigma$
Asuma que $\|\cdot\|_p$ es norma en $\ell_p(\mathbb{Z})$

(a) demuestre que T_σ es continua.

(b) defina $\sigma_1(n) = n+1$, $\sigma_2(n) = 3-n$, $\sigma_3(n) = 3n - 4[n/2]$ ($[x]$ =parte entera de x) describa los elementos de los conjuntos $A_{\sigma_i} = \{a \in \ell_p(\mathbb{Z}) \mid T_{\sigma_i}(a) = a\}$ $(i = 1, 2, 3)$ ¿son estos conjuntos cerrados?

(c) Dado $x \in \ell_p(\mathbb{Z})$, demuestre que no existe ninguna función continua y sobreyectiva

$$f : H_x \to Fr(B[0, 1])$$

(la frontera de la bola en $\ell_p(\mathbb{Z})$) donde

$$H_x = \{a \in \ell_p(\mathbb{Z}) \mid |a(j)| \leq |x(j)|\}$$

(d) ¿puede existir $f : H_x \to \ell_p(\mathbb{Z})$ abierta?
Demuestre que toda funcion continua $f : H_x \to \ell_p(\mathbb{Z})$ es cerrada

Definicion: Decimos que x es un punto fijo de la función f si y solo si $f(x) = x$

4. **punto fijo**

(a) Demuestre que una función continua $f : [a, b] \to [a, b]$ tiene un punto fijo almenos. (creo que esto se puede extender a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

(b) Sea E un espacio métrico completo, $A \subseteq E$ y una función $f : A \to A$ para la cual existe $k \in [0, 1)$ que verifica

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \;\; \forall x, y \in E$$

Demuestre que si A es cerrado, entonces f tiene un punto fijo en A. ¿es unico? ¿es necesario que A sea cerrado?

(c) Usted se preguntará por que nos interesan tanto los puntos fijos (al menos yo me lo pregunté hace unos dias cuando supe que era un contenido del curso), este ejercicio puede responder esa inquietud.

i. Sea $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Considere $T : C[0, 1] \to C[0, 1] : f \mapsto T_f$ donde

$$\begin{aligned} T_f(x) &= \frac{x^2 h(x)}{2} + \frac{1}{2x}\int_0^x \cos(f(t))dt. \quad x \neq 0 \\ T_f(0) &= \frac{1}{2}\cos(f(0)). \end{aligned}$$

Demuestre T_f es diferenciable en (0,1) cualquiera sea f. (creo que lo sería en 0 si f fuera derivable con derivada continua)

ii. Demuestre que existe $k \in [0, 1)$ tal que

$$\|T_f - T_g\|_\infty \leq k \|f - g\|_\infty$$

iii. Conluya para todo h diferenciable existe una solucion de la ecuación diferencial

$$2y + 2xy' = 3x^2 h(x) + x^3 h'(x) + \cos(y)$$

en el intervalo $(0, 1)$. ¿es única?

Scanned with CamScanner

5. **punto fijo segunda parte**

   (a) Sea E un espacio métrico completo, $A \subseteq E$ y una función $f : A \to A$ que verifica

   $$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \ \ \forall x, y \in E$$

   Demuestre que si A es compacto, entonces f tiene un punto fijo en A. ¿es unico?

   (b) Decimos que un espacio métrico E cumple la propiedad del punto fijo si para toda función continua $f : E \to E$ existe un punto fijo. Suponga que E y E' son dos espacios homeomorfos. ¿E' cumple también la propiedad del punto fijo?

   (c) Dado $\sigma \in Biy(\mathbb{Z})$, defina $P_\sigma = \frac{1}{2}(T_\sigma + T_{\sigma^{-1}})$ (ver ejercicio 3), demuestre que

   $$\|P_\sigma(a) - P_\sigma(b)\|_p \leq \|a - b\|_p.$$

   Encuentre almenos un $a \in \ell_p(\mathbb{Z})$ tal que $P_\sigma(a) = a$

6. **Espacios vectoriales**

   Sea $(E, \|\cdot\|_*)$ un espacio normado de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y $f : E \to E$ lineal.

   (a) Suponga que $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de E, demuestre o convénzase que $\left\|\sum_j \lambda_j v_j\right\|_s := \sum_j |\lambda_j|$ es una norma y demuestre que existe una constante k real tal que

   $$\|f(v)\|_* \leq k \|v\|_s$$

   (b) Demuestre que

   $$|\|x\|_* - \|y\|_*| \leq \|x - y\|_s k$$

   es decir $\|\cdot\|_* : (E, \|\cdot\|_s) \to \mathbb{R}_+$ es lipschitz.

   (c) Use la parte anterior para probar que existe una constante real $\hat{k}$, tal que $\|x\|_s \leq \hat{k} \|x\|_*$.

   (d) Concluya que en dimension finita, todas las normas son equivalentes.

7. **homeomorfismos**

   (a) Demuestre que una función continua, biyectvia y abierta o cerrada, es un homeomorfismo.

   (b) Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (cos(t), sen(t))$ es continua, pero no es un homeomorfismo aún si se restringe a algún intervalo.

   (c) Demuestre que el circulo ùnitaro $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ es homeomorfo al cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, \ z \geq 1\}$

8. (a) Sea $V = \mathbb{R}^n$ dotado de su norma favorita $\|\cdot\|$, dada una función lineal $f : V \to V$ demuestre que $V/\ker(f)$ es homeomorfo a $\text{Im}(f)$

   (b) Sean $\{a_1, \ldots, a_n\} \in \ell_p$ linealmente independientes, dado $F \subseteq \mathbb{R}$ compacto, demuestre que el conjunto

   $$A = \left\{\sum_j \lambda_j a_j \mid \lambda_j \in F\right\}$$

   es compacto. Estudie si quiere, esto mismo en un espacio normado E arbitrario.

   (c) Demuestre que en ℓ_p, las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_p$ no son equivalentes.

9. **isometrías**

Scanned with CamScanner

(a) Demuestre que $a \mapsto a^k$ es una isometría visto como función de $\ell_p(\mathbb{Z})$ en si mismo (ver ejercicio 3), pero no lo es como función de ℓ_p (usual) en si mismo.

(b) Sean a, b dos puntos en un espacio normado E, demuestre que existe una isometría que lleva a en b, encuentre otra. ¿cuantos puntos $f(a), f(b), f(c)$... se necesitan para determinar completamente una isometria de $\mathbb{R}^2$ en si mismo? ...

(c) Demuestre que una isometría es un homeomorfismo.

(d) De un ejemplo de dos espacios metricos homeomorfos cuyas respectivas completaciones no sean isométricas. ¿que pasa si los dos espacios originales son isometricos en ves de solo homeomorfos?

Scanned with CamScanner

Analisis

Guía 1 + 2 + 3 de ejercicios ayudantia

Ayudante=Fernando Venegas.

si bien son solo 2 problemas por persona, se suguiere trabajar en todos los ejercicios.

Ejercicios 6

En esta guia (al igual que en las guias que reciban en el resto de su vida) puede haber mentiras y gravisimas faltas a la ortografíá. Tambien hay que considerar que cada "demuestre" debe ser un "demuestre o refute"

1. Sea $\ell_p(\mathbb{Z}^3) = \{a : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{R} \mid \sum_{i,j,k} |a(i,j,k)|^p < \infty\}$. Enuncie y demuestre un criterio de compacidad (es decir condiciones suficientes y necesarias para que un subconjunto de $\ell_p(\mathbb{Z}^3)$ sea compacto). y uselo para probar que el conjunto
$$H_x = \{a \in \ell_p(\mathbb{Z}^3) \mid |a(i,j,k)| \leq |x(i,j,k)|\}$$
(para un $x \in \ell_p(\mathbb{Z}^3)$ fijo y arbitrario) es compacto. Estudie la compacidad del conjunto
$$G_1 = \{a \in \ell_p(\mathbb{Z}^3) \mid a(i+r,j,k) = \lambda_a^{|r|}a(i,j,k),\ \ a(i,j+r,k) = \gamma_a^{|r|}a(i,j,k),$$
$$a(i,j,k+r) = \delta_a^{|r|}a(i,j,k),\ \ \lambda_a, \gamma_a, \delta_a \in [-1/2, 1/2], a(0,0,0) = 1\}$$

2. (a) Dada $g \in BC([0,\infty))$, defina el conjunto
$$H_g = \{f \in BC([0,\infty)) \mid |f(x)| \leq |g(x)|\}$$
Demuestre que este conjunto no es compacto, y que nisiquiera esta contenido en una union numerable de compactos.
(b) Consiedere la función
$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$
Demuestre que el conjunto $\{f(\lambda x) \mid \lambda \in [1/2, 39/4]\}$ es relativamente compacto en $BC(\mathbb{R})$
(c) Estudie la total acotacion del conjunto $\{cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq BC([0, 2\pi])$

3. **Coeficiente de no compacidad**
Sea (E,d) un espacio metrico completo
(a) para $A \subseteq E$ sea $\alpha(A)$ el infimo de los números d para los cuales A admite un cubrimiento finito de conjuntos con diametro menor o igual a d. Sean , A, B subconjuntos acotados de E, demuestre las siguientes propiedades
   i. $0 \leq \alpha(A) \leq Diam(A)$.
   ii. $\alpha(\overline{A}) = \alpha(A)$
   iii. $A \subseteq B \Rightarrow \alpha(A) \leq \alpha(B)$
   iv. $\alpha(A \cup B) = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}$, $\alpha(A \cap B) \leq \min\{\alpha(A), \alpha(B)\}$.
   v. $\alpha(A) = 0$ si y solo si es relativamente compacto.
(b) Sea $\{B_n\}$ una cadena decreciente de conjuntos cerrados, acotados y no vacios. $B_1 \subseteq B_2 \subseteq ...$
   i. Pruebe que si $lim_{n\to\infty}\alpha(B_n) = 0$ entonces $\bigcap_{n>0} B_n$ es un compacto no vacio.
   ii. Que puede decir si $lim_{n\to\infty}Diam(B_n) = 0$???

Observacion: El teorema de Darbo-Sadovski estableece lo siguiente: Sea $f : E \to E$ (E completo) continua, si $\alpha(f(A)) < \alpha(A)$ para todo $A \subseteq E$ acotado, entonces si E es convexo y de diametro finito entonces f tiene un punto fijo.

Scanned with CamScanner

Universidad de Chile

$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$2^{\underline{da}}$ Prueba
Análisis II
30 de octubre, 2004

Prof.: Sr. Manuel Pinto.
Ayudante: Jaime Concjeros.
Tiempo: 3.5 horas.

$f(x) = x^{e^{x}}$

Escoger 5 problemas de entre los siguientes 6:

1. (a) Sea A un conjunto abierto en un espacio vectorial normado. [2] Demuestre que A es conexo si y solamente sí es poligonalmente conexo. [0.5] ¿Qué sucede si A no es abierto?

   (b) Considere el conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^2$ formado por los gráficos de las funciones $\varphi_n(t) = nt(1-t)^n$, $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. [2.5] Decida si los siguientes conjuntos son conexos: C, $B = C \cup \{(0,e^{-1}),(0,\frac{1}{3})\}$ y $B \setminus \{(0,0),(1,0)\}$. [1] ¿Cuáles de ellos son arco-conexos? Justifique sus respuestas.

2. Sea $\widehat{\ell}_\infty$ el espacio de las sucesiones reales acotadas, dotado de la métrica

$\hat{\ell}_\infty = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\}$ tq. $\sum \frac{|x_k|}{2^k} < \infty$, $\|x\| < \infty$.

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k},$$

donde $\mathbf{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{y} = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

$e_i = (0,0,0,\ldots,1,0,\ldots,0,\ldots)$

   (a) Sea $A = \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ la *"base canónica"* de $\widehat{\ell}_\infty$. [1.5] Demuestre que A es totalmente acotado. [2.5] Decida si $B[0,1]$ es totalmente acotada. Justifique sus respuestas.

   (b) [2] Demuestre que $\widehat{\ell}_\infty$ no es completo. $\left(X_k^n = \left(\frac{3}{2}\right)^k\right)$ con $k \le n$

$x_1, x_2, \ldots, x_3$

3. Sea $\widehat{\ell}_\infty$ el espacio definido en el ejercicio anterior. Conteste justificando:

   (a) [4] ¿Cuál es la completación de $\widehat{\ell}_\infty$?

   (b) [1.5] ¿En $\widehat{\ell}_\infty$ vale el criterio *compacto si y solo si cerrado y acotado*? [0.5] En caso contrario, ¿qué faltaría? Justifique.

$\sum \frac{k}{2^k} \leq \infty$

Scanned with CamScanner

4. Demuestre que:

(a) [2] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{|x|}$ es una función cerrada. [0.5] ¿Es una función abierta?

(b) [3] La proyección $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\pi_1(x, y) = x$ es una función abierta. [0.5] ¿Es cerrada?

5. Sean $k > 0$ y $A \subseteq (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ el conjunto formado por las funciones $f \in C([0,1])$ tales que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ para todo $x, y \in [0,1]$ y $\|f\|_\infty \leq 1$. [3] ¿Es A totalmente acotado? [2] ¿Relativamente compacto? [1] ¿Compacto? Justifique sus respuestas.

6. Responda justificando:

- (a) [1] ¿Cuáles son las bolas compactas en $(\mathbb{I}, |\cdot|)$, donde $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?
- (b) [1.5] ¿La recta real ampliada $\overline{\mathbb{R}}$ es compacta? [1] ¿Y $\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$?
- (c) [1.5] ¿En $\mathbb{R}$ las distancias $d(x, y) = |x - y|$ y $d_3(x, y) = |x^3 - y^3|$ son equivalentes? ¿Son uniformemente equivalentes?
- (d) [0.5] ¿Totalmente acotado implica separable? [0.5] ¿Y el recíproco?

$\mathbb{I}$: $[a, b] \cup [c, d]$

$id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta = \quad > 0$ tq $|x - (x + \alpha)| = |\alpha| <$

$\Rightarrow |x^3 - (x+\alpha)^3| < \varepsilon$

$|x^3 - (x+\alpha)^3| = |x - (x+\alpha)|\,|x^2 + x(x+\alpha) + (x+\alpha)^2|$

Scanned with CamScanner

$$\left(\sum |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |y_i|^p\right)^{1/p}$$

Prueba N° 2 Analisis II

Responda sólo 4 problemas. Tiempo: 3 horas. Septiembre 27, 2008.

I) Responda justificando:

a) ¿ Cuáles son la bolas compactas $(I; |\cdot|)$ $(I = \mathbb{R} - \mathbb{Q})$(1 pto.)

b) ¿ En ℓ_p, el cubo de Hilbert $C = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \mid |x_i| \leq \frac{1}{i}\}$ es compacto? (1.5 ptos.).

c) ¿En $\mathbb{R}$, las distancias $d(x,y) = |x-y|$ y $d_3(x,y) = |x^3 - y^3|$ son equivalentes? (1pto.) ¿Son uniformemente equivalentes?(0.5 ptos.)

d) De las siguientes propiedades: separabilidad, completitud, total acotación y compacidad, ¿Cuáles se preservan por homeomorfismo o isometría? (2=0.5 x 4 ptos.)

II) Demuestre que:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -1 + (x-1)^2$ es una función cerrada (2 ptos.) y no abierta (0.5 ptos.)

b) La proyección $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi_1(x,y) = x$ es una función abierta (2 ptos.) que no es cerrada (0.5 ptos.). Extienda a $E_1 \times E_2$, (E_i, d_i) espacios métricos $(i = 1, 2)$ (1 pto.)

III) Sea $\bar{d}(x,y) = |\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}|$ para $x, y \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, la recta ampliada. Considere el espacio métrico $(\bar{\mathbb{R}}, \bar{d})$. Demuestre que :

~~a) $\bar{\mathbb{R}}$ es completo (2 ptos~~).

b) $\bar{\mathbb{R}}$ es compacto (2 ptos).

c) $\mathbb{R}$ en $\bar{\mathbb{R}}$, es relativamente compacto (1 pto.) y $\bar{\mathbb{R}}$ es $\hat{\mathbb{R}}$ ($\hat{\mathbb{R}}$ la completación de $\mathbb{R}$ con respecto a $\bar{d}$) (1 pto.)

Scanned with CamScanner

IV) Sea $p \in [1, \infty)$. Demuestre que un conjunto $A \subset \ell_p(\mathbb{C})$ es compacto en $\ell_p(\mathbb{C})$ (2.5 ptos.) sí y sólo si A es cerrado, acotado y equiconvergente (2.5 ptos.), esto es, para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=N}^{\infty} |x_i|^p \leq \epsilon \ \ \forall x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in A.$$

¿Vale el correspondiente resultado para $p = \infty$?(1 pto.)

V) Sean E el espacio de sucesiones reales acotadas, dotado de la métrica

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{k^2}, x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}, y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$$

y

$$V = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \ : \ x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i < \infty \mid d(x, 0) < \infty\}.$$

Demuestre que E no es completo (1 pto.). Demuestre que V es completo (2.0 ptos.) y que E es denso en V (2.0 ptos.). Demuestre que V es la completación de E (1 pto.).

Scanned with CamScanner

Responda solo 4 de los 5 problemas propuestos. Tiempo 3 hrs. Fecha: 05 de Junio 2010.

1. Reponda justificando:

   a) ¿ Cuáles son las bolas compactas en $(\mathbb{I}, |\cdot|)$? donde $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (1.0 pts)

   b) ¿ En l_p el conjunto $B = \left\{ \frac{e_i}{i} \ / \ i \in \mathbb{N} \right\}$ es compacto ? (1.5 pts)

   c) ¿ En $\mathbb{R}$, las distancias $d_1(x,y) = |x-y|$ y $d_2(x,y) = |x^{\frac{5}{3}} - y^{\frac{5}{3}}|$ son equivalentes ? (1.0 pts) ¿ Son uniformemente equivalentes ? (0.5 pts)

   d) ¿ Cúales de las siguientes propiedades se preservan por homeomorfismo o isometría:

   - Separabilidad (0.5 pts)
   - Completitud (0.5 pts)
   - Total Acotación (0.5 pts)
   - Compacidad (0.5 pts)

   $\mathbb{R} \cong (-1,1)$

2. Sea V un espacio vectorial con dos normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$

   a) Demuestre que la función Identidad $I_d : (V, ||\cdot||_1) \longrightarrow (V, ||\cdot||_2)$ es continua si y sólo si el conjunto $A = \{x \in V \ / \ ||x||_1 = 1\}$ es acotado con respecto a $||\cdot||_2$ (3.0 pts)

   b) Se dice que $||\cdot||_1$ es equivalente a $||\cdot||_2$ si las métricas inducidas por ellas son equivalentes. Demuestre que $||\cdot||_1$ es equivalente a $||\cdot||_2$ si solo si existen $c_1, c_2 > 0$ tales que

   $$c_1 ||x||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2 ||x||_1 \quad \forall x \in V \qquad \text{(3.0 pts)}$$

3. Sea X un espacio vectorial normado, C un subconjunto compacto y convexo de X, es decir $\forall \ a, b \in C$ y $\forall \ t \in [0,1]$ se tiene que $(1-t)a + tb \in C$

   Sea $F : C \longrightarrow C$ tal que $\forall x, y \in C$, con $x \neq y$ se tiene que $||F(x) - F(y)|| < ||x - y||$

   Pruebe que F tiene un punto fijo $x_0 \in C$ tal que $F(x_0) = x_0$. (5.0 pts), y que esúnico. (1.0 pts) (Hint: Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $z \in C$ fijo, considere la función $F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) F(x) + \frac{1}{n} z$ y sus respectivos puntos fijos)

4. Demuestre que un conjunto $A \subset l_2(\mathbb{C})$ es totalmente acotado en $l_2(\mathbb{C})$ (2.5 pts) si y solo si A es acotado y equiconvergente (2.5 pts), esto es, para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

   $$\sum_{i=N}^{\infty} |x_i|^2 \leq \epsilon \qquad \forall x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in A$$

   ¿ Cuál es el correspondiente resultado para que A sea compacto ? (1.0 pts)

5. Sean E el espacio de sucesiones reales acotadas, dotado de la métrica

   $$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{k^{\frac{3}{2}}} \qquad x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, \ y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \qquad \text{y}$$

   $$V = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \ / \ x_i \in \mathbb{R}, \ d(x,0) < \infty\}$$

   a) Demuestre que E no es completo (1.0 pts) y que V es la completación de E (1.0 pts)

   b) Demuestre directamente, que V es completo (2.0 pts) y que E es denso en V (2.0 pts)

Scanned with CamScanner

Control 2

Responda solo 2 de los 3 problemas.

Definicion: para $a \in \ell_\infty$ y $k \in \mathbb{N}$, el simbolo a^k es la sucesión $a^k(j) = a(j+k)$.

1. Demuestre que la bola abierta $B(0,1)$ es totalmente acotada en $\mathbb{R}^2$ con la metrica euclideana (1.5 p), pero no lo es en $\mathbb{R}^2$ con la metrica discreta. (1.5 p)

2. Dado $x \in \ell_p$ y $n \in \mathbb{N}$, defina el conjunto

$$H_{x,n} = \{a \in \ell_p \mid a^n(j) \leq x^2(j)\}$$

   (a) Demuestre que $H_{x,n} \subseteq \ell_p$ (0.5 p)
   (b) Demuestre que dados a, b en $H_{x,n}$, para todo $t \in [0,1]$ la sucesión $a + t(b-a)$ está también en $H_{x,n}$ (0.5 p)
   (c) Demuestre que $H_{x,n}$ es equiconvergente pero no es totalmente acotado. (1 p)
   (d) Demuestre que si existe una sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H_{x,n}$ que converge a $\hat{x} \in \ell_p$ entonces $\hat{x} \in H_{n,x}$ (1 p)

3. Dado $x \in c_0$ y $n \in \mathbb{N}$, considere el conjunto

$$D_{x,n} = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid a^n \text{ es una subsucesión de } x\}$$

   (a) Demuestre que

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{x,n}\right) \cap \ell_p$$

   es denso en ℓ_p. (1 p)
   (b) Demuestre que si $x \in \ell_p$ entonces $D_{x,n} \subset \ell_p$ y $D_{x,n}$ es equiconvergente, pero $D_{x,n} \cap \ell_p$ no lo es necesariamente si $x \notin \ell_p$ (1 p)
   (c) Demuestre que $D_{x,n}$ no es totalmente acotado y no es cerrado necesariamente incluso si $x \in \ell_p$. (1 p)

a

, a_n, $a(n+1)$, $a(n+2)$

Scanned with CamScanner

Analisis - Guía 1

Ayudante=Fernando Venegas.

1. Demuestre que en $\mathbb{R}^2$, todo abierto es unión numerable de bolas abiertas. ¿Existe algún un espacio métrico donde esto no ocurra?

2. Demuestre que $\mathcal{G}_\delta \subseteq \mathcal{F}_{\sigma\delta}$.

3. Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de intervalos $I_n \subseteq \mathbb{R}$ tales que $I_n \subset I_{n+1}$. Sea $l(I_n)$ el largo de cada intervalo. Demuestre o refute las siguientes igualdades: $l\left(\bigcap I_n\right) = \lim_{n\to-\infty} l(I_n)$, $l\left(\bigcup I_n\right) = \lim_{n\to\infty} l(I_n)$.

4. Dado $\epsilon > 0$, construya un cubriento $\bigcup I_n$ de $\mathbb{Q}$ tal que $\sum l(I_n) < \epsilon$.

5. Suponga que $I_1, ..., I_n$ son intervalos abiertos tales que $I = \bigcup I_j$ es un intervalo. Demuestre que $\sum l(I_j) \geq l(I)$.

6. Demuestre que el conjunto de numeros algebraicos es un $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$

7. Demuestre que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ el conjunto de puntos donde f es continua, es un $\mathcal{G}_\delta$

8. ¿Puede una $\sigma-$álgebra infinita contener sólo una cantidad numerable de elementos?

9. Determine si las siguientes colecciones de conjuntos son una $\sigma-$álgebra.
   (a) En $\mathbb{N}$, la coleccion de conjuntos no acotados.
   (b) En $\mathbb{R}$, la coleccion de conjuntos con almenos un punto de acumulación, junto con el conjunto vacío.
   (c) Los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son finitos o bien su complemento es finito.
   (d) Los subconjuntos de $[0, 1]$ que son numerables o bien su complemento es numerable.

10. Sea $x \in [0, 1]$ con expansión ternaria $\langle a_n\rangle$. Defina $N := \infty$ si ninguno de los a_n es 1, y en caso contrario defina N como el menor valor de n para el cual $a_n = 1$. Sea $b_n = \frac{1}{2}a_n$ para $n < N$ y $b_N := 1$.
    (a) Demuestre que
    $$\sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{2^n}$$
    es independiente de la expansión ternaria de x (si es que tiene mas de una).
    (b) Demuestre que la función
    $$f(x) := \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{2^n}$$
    es conitnua y monotona.
    (c) Demuestre que f es constante en cada intervalo contenido en el complemento del conjunto de cantor.
    (d) Demuestre que la imagen del conjunto de cantor via f es el intervalo $[0, 1]$ commpleto. *Esta función tiene un nombre tan diabolico que por seguridad no será mencionado.*

11. Pruebe directamente (por definición) que la medida externa del conjunto de cantor es 0. ¿Es el conjunto de cantor un boreliano? ¿Es un $\mathcal{G}_\delta$?

Marco

12. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de numeros que converge a x, suponga que $x_n \in [0, 1], \forall n$ y sea $A := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, demuestre que la función $f(t) := \mathcal{X}_A(t)$ es Rieman integrable.

13. De un ejemplo de una función Riemman integrable en $[0, 1]$ cuyo conjunto de discontinuidades sea denso en $[0, 1]$

14. Pruebe que la integral $\int_0^\infty \sin(x^2)dx$ existe. (dehecho, se puede probar que para $a > 0$,
$$\int_0^\infty \sin(x^{1+a})dx = \frac{\sqrt{\pi}2^{\frac{2}{2+2a}}\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2+2a})}{(2 + 2a)\Gamma(1 - \frac{1}{2+2a})}$$
y lo interezante es que el lado derecho converge a 1 cuando a tiende a 0. Vea
http://math.stackexchange.com/questions/470199/how-to-prove-an-identity-related-to-int-0-infty-sinx1adx)

ACe

15. Sea $R := \mathcal{R}([0, 1])$ el anillo de funciones Riemann integrables (con la suma y producto usual). Defina $d(f, g) := \int |f-g|$. Demuestre que el conjunto $I := \{f \in R \mid d(f, 0) = 0\}$ es un ideal de R y que d se puede extender como una distancia al anillo cociente R/I. Demuestre que este último no es completo. (En este curso encontraremos su completado.)

Es señal de buen Islam de una persona abandonar aquello que no le concierne.

Scanned with CamScanner

Análisis Abstracto I

Requisitos: Análisis Real I

1. Medida y medida exterior de Lebesgue. Algebras y σ - álgebras.
   Funciones medibles. Operaciones con funciones medibles. Sucesiones de funciones.
   Convergencia en medida. Teorema de Egoroff. Teorema de Lusin.
2. Integración. Funciones simples. Integración de funciones simples. Integración de funciones positivas. Descomposición de una función medible como diferencia de dos funciones positivas. Funciones integrables. Teorema de Convergencia Monótona. Lema de Fatou. Teorema de Convergencia Dominada. Comparación con la integral de Riemann. Medida de Lebesgue-Stieltjes en R.
3. **Derivación de funciones monótonas y de variación acotada. Lema de Vitali. Funciones absolutamente continuas.**
   Teorema fundamental del cálculo para funciones absolutamente continuas.
   Integración por partes y cambio de variables.
4. **Teoría de las Medidas. Medidas completas. Medidas exteriores, Teorema de Carathedory. Medida producto. Medida de Lebesgue en** R y R^n. Teorema de Fubini.
   Espacios **L^p. El espacio L^1 – Convolución en L^1. El espacio L^p. Desigualdades de Hölder y Minkowski. Completitud. Teorema de representación.**
5. **Transformada de Fourier en L^2. Teorema de Plancherel. Aplicaciones a Ecuaciones en derivadas parciales.**

Bibliografía:

1. **H.L. Royden: Real Análisis.**
2. **W. Rudin, Real and Complex Analysis.**
3. **A. Friedman, Foundations of Modern Analysis**
4. **W. Rudin: Principles of Mathematical Analysis.**
5. **M. Munroe. Introduction to Measure Theory and Integration.**
6. **G.B. Folland, Real analysis.**

Scanned with CamScanner

Analisis - Guía 2
Ayudante=Fernando Venegas.

Dos aclaraciones:

1. En los problemas de esta guía (y en los que encuentren el resto de su vida), la palabra "demuestre" quiere decir "demuestre o refute".

Ejercicios:

1. La σ-álgebra de Borel es la generada por los abiertos. Claramente en $\mathbb{R}$ también puede ser obtenida como la generada por los cerrados acotados, es decir, los compactos (segun teorema de Heine-Borel). ¿Es cierto que en todo espacio métrico, la σ-algebra generada por los abiertos coincide con la generada por los compactos?

2. (a) Sea $f : A \to B$, y Σ una σ-álgebra en B, ¿ es $\{f^*(S) \mid S \in \Sigma\}$ una σ-álgebra en A?.

   (b) Sea $f : A \to B$, y Σ una σ-álgebra en A, Sea $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(B)$. ¿es suficiente que $f^*(S) \in \Sigma\ \forall S \in \mathcal{T}$ para poder asegurar que $f^*(S) \in \Sigma$ para todo S en la σ-álgebra generada por $\mathcal{T}$?

3. Defina $B_0 := \{\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} \mid \mathcal{O} \text{ es abierto}\}$, $B_{n+1} := (B_n)_{\delta\sigma}$

   (a) ¿es cierto que $\mathcal{F}_\sigma \subseteq B_1$?

   (b) Pruebe que $B_n \subseteq B_{n+1}$

   (c) ¿Es
   $$B := \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$$
   una σ-álgebra?

Scanned with CamScanner

4. Sea $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, demuestre que si $\{I_n\}$ es una coleccion finita de intervalos que cubre a A entonces $\sum l(I_n) \geq 1$.

5. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $A_n \subset A_{n+1}$. Sea $m^*(A_n)$ la medida externa de cada conjunto. Demuestre o refute las siguientes igualdades: $m^*\left(\bigcap A_n\right) = \lim_{n\to-\infty} m^*(A_n)$, $m^*\left(\bigcup A_n\right) = \lim_{n\to\infty} m^*(A_n)$.

   ¿y si los A_n son medibles?

   ¿y si los A_n son boreles?

6. (a) Calcule la medida externa del conjunto de cantor
   (b) ¿Es cierto que un conjunto que sonsiste solo de puntos aislados tiene medida cero?
   (c) Si bien un conjunto con medida cero tiene interior vacío, luego su complemento es denso, ¿es cierto que si un conjunto tiene interior vacío entonces su complemento es denso?

7. (a) ¿Es cierto que $|m^*(A) - m^*(B)| \leq m^*(A\triangle B)$?
   (b) ¿Es cierto que $m^*(\lambda A) = \lambda m^*(A)$ para todo $\lambda \geq 0$?

8. Conteste las siguientes preguntas, argumentando.

   (a) Defina $I_n := [n, n+1)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Dado $\sigma \in \mathrm{Biy}(\mathbb{Z})$ sea f_σ la funcion definida por $f_\sigma(x) = x - [x] + \sigma([x])$
   ¿Es cierto que $m^*(A) = m^*(f_\sigma(A))$?
   (b) Defina $I_{n,r} := [n/r, (n+1)/r)$, $\forall n \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$. Dado $\sigma \in \mathrm{Biy}(\mathbb{Z})$ sea $f_{\sigma,r}$ la funcion definida por $f_{\sigma,r}(x) = x - [rx]/r + \sigma([rx])/r$
   Demuestre o refute que

$$\lim_{r\to\infty} m^*(f_{\sigma,r}(A)) = m^*(A)$$

9. Suponga que $A_1, A_2, ...$ es una coleccion numerable de conjuntos medibles tales que $\sum m(A_i) < \infty$. Demuestre que

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i\right) = 0$$

10. Pruebe que si E es medible, entonces $E + x$ es medible.

11. Defina la medida externa m^* para subjonjuntos de $\mathbb{R}^2$ y calcule $m^*([0,1]^2)$

Scanned with CamScanner

12. Si A y B son medibles disjuntos y C es medible.

   (a) ¿es cierto que $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$?

   (b) ¿es cierto que $m^*(A \setminus C) = m^*(A) - m^*(C)$?

   comente respecto del caso no medible.

13. (a) Sea E medible, demuestre que:

      i. Dado $\epsilon > 0$, existe un abierto O que contiene a E tal que $m^*(O \setminus E) < \epsilon$ ¿Es posible encontrar un $\mathcal{F}_\sigma$ con esta misma propiedad?¿por que es importante la hipotesis de que E sea medible?

      ii. Dado $\epsilon > 0$, existe un cerrado C contenido en E tal que $m^*(E \setminus F) < \epsilon$ ¿Es posible encontrar un $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$ con esta misma propiedad?

      iii. Existe un $G \in \mathcal{G}_\delta$ que contiene a E tal que $m^*(G \setminus E) = 0$. ¿es posible construir explisitamente un $F_{\sigma\delta}$ con la misma propiedad? (con "construir explicitamente" me refiero a no usar que $\mathcal{G}_\delta \subseteq \mathcal{F}_{\sigma\delta}$)

      iv. Existe un $F \in \mathcal{F}_\sigma$ contenido en E tal que $m^*(E \setminus F) = 0$.

   (b) Demuestre cada uno de los enunciados de la parte (a), implican que E es medible.

   (c) Si $m^*(E) < \infty$ demuestre que cada uno de los enunciados de la parte (a) equivalen a:

      i. Dado $\epsilon > 0$ existe una union finita U de intervalos abiertos tal que
      $$m^*(U \triangle E) < \epsilon.$$

Entre las enseñanzas de la Profecía primordial que los hombres han retenido, están: Si no sientes verguenza, haz lo que quieras.

Scanned with CamScanner

Analisis - Control 1
Ayudante=Fernando Venegas.

1. (a) Demuestre que en **cualquier** espacio métrico $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}_\delta$ y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_\sigma$.
   (b) Demuestre que todo conjunto medible se puede escribir como union de un boreliano y un conjunto de medida cero.
   (c) Dmuestre que los medibles forman una σ-álgebra.

2. (a) Sea $f_n(x) := x(\mathcal{X}_{[-n,n]}(x) - \mathcal{X}_{[-n,n]^c}(x))$. Demuestre que
$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$$
   es una funcion medible.
   (b) Si A es un conjunto medible de medida finita, determine $m(F(A))$ $\left(A \subseteq [0,1) \right)$
   (c) ¿es cierto que $F \cdot \mathcal{X}_{\mathcal{N}}$ es siempre una función medible?
   (d) ¿es cierto que una función f es medible si y solo si $f^{*}(a)$ es medible para todo $a \in \mathbb{R}$?

Falso

Scanned with CamScanner

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Curso: Análisis III, Otoño 2009
Profesor: Manuel Pinto
Ayudante: Patricio Quiroz H.

Prueba 1

Abril 25, 2009

Escoja 5 de los 6 problemas. Se aceptan preguntas sólo de enunciado. Disponen de 3 horas para realizar la prueba.

1. Si $R \subset \mathbb{R}^3$ es un rectángulo, sea $v(R)$ su volúmen. Para $A \subset \mathbb{R}^3$ defina su medida externa por:

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v(R_i) / A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i, R_i \text{ rectángulo abierto} \right\}$$

Sea $E \subset \mathbb{R}^3$, entonces E es medible en el sentido de Lebesgue si $\forall A \subset \mathbb{R}^3$ se tiene $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$. Demuestre que la clase de todos los conjuntos medibles en $\mathbb{R}^3$ forman una $\sigma-$álgebra Ω.

2. Demuestre que $E \subset \mathbb{R}$ es medible sí y sólo sí, $\forall \epsilon > 0 \, \exists F$ un conjunto de Borel tal que $F \subset E$ y $m^*(E - F) < \epsilon$ **[2 pts.]**. Si $m^*(E) < \infty$, pruebe que E es medible **[2 pts.]** sí y sólo sí $\forall \epsilon > 0 \, \exists G = \bigcup_{i=1}^{n} I_i, I_i$ intervalos abiertos, tal que $m^*(E \Delta G) < \epsilon$ **[2 pts.]**.

3. Sea E un conjunto medible y $\varphi : E \to \mathbb{R}$ una función medible. Demuestre que existe una sucesión de funciones simples medibles $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas sobre E tal que $s_n \to \varphi$ cuando $n \to \infty$ **[4 pts.]**. Además, si φ es acotada, entonces $s_n \rightrightarrows \varphi$ (uniformemente) cuando $n \to \infty$ **[1 pto.]** y si $\varphi \geq 0$, entonces $\forall n$, $s_n \geq 0$ y $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión no-decreciente **[1 pto.]**.

Scanned with CamScanner

y que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f_n - f| = 0 \text{(1,5 pts) ssi } \lim_{n\to\infty} \int_A |f_n| = \int_A |f| \text{ (0,5 pts)}$$

¿Es esto cierto para la integral de Riemann? (1 pto)

V) (a) Demuestre que si $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función absolutamente continua, entonces $v(A)$ es de medida cero si A es de medida cero (1 pto). ¿Vale esto para v sólo continua? (1 pto)

(b) Demuestre que $u(t) = e^{\int_0^t a(s)ds}$ es absolutamente continua en $[0,1]$ si $a \in L^1([0,1])$ (1,5 pts). Considere $b \in L^1([0,1])$ y la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y'(t) &= a(t)y(t) + b(t), \text{c.t.p} \\ y(0) &= 2 \end{aligned}$$

Demuestre que existe (1,5 pts) una única (1 pto) solución de esta ecuación.

VI) Sea A un conjunto medible. Se dice que un conjunto $V \subseteq L^1(A)$ es uniformemente integrable si y sólo si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \int_E f \right| < \epsilon$$

para $f \in V$ y $mE < \delta$
Suponga $mA < \infty$

(a) Demuestre el siguiente Teorema de Vitali Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable, $f_n \to f$ c.t.p. y f es finita c.t.p. Entonces $f \in L^1(A)$ y $f_n \to f$ en $L^1(A)$.(3 pts) ¿Vale si $A = \mathbb{R}$? (1 pto) $\chi_{[n,\ldots}$

(b) Lo mismo ocurre si $f_n \in L^1(A)$, $f_n \to f$ c.t.p. y existen $p > 1$ y constante $c > 1$ tal que $\|f_n\|_p \leq c$ para todo n (2 pts).

Scanned with CamScanner

$\varphi(t) - \varphi(t+h) =$

$f(x) = \int_0^x f'(x) + f(0)$

$= \int^x - \int^x + \int_0^x + f(0)$

2° Prueba de Analisis II

Tiempo: 3 hrs.

Responda solo 4 problemas Octubre 28, 2010

$\lim_{t\to\infty} \int \sin tx$

1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\beta \in \mathbb{R}$ constante, defina $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \sin(tx + \beta) f(x)dx.$$

Demuestre que $\varphi(t) \to 0$ (2 puntos), cuando $|t| \to \infty$ y deduzca que

$\sin nx$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)dx \to 0, \quad \text{cuando} \quad |t| \to \infty \quad (0{,}5 \text{ puntos}).$$

Encuentre una condición (1 punto) para que φ sea diferenciable y luego demuestre la diferenciabilidad de φ (2,5 puntos).

2. Pruebe o de un contraejemplo (1 punto c/u):

$f(x) = f(1) + \int_1^x$

a) $f \in L^1(\mathbb{R})$ implica que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

b) $f \in L^1(\mathbb{R})$ implica f finita c.t.p.

$\sin tx$

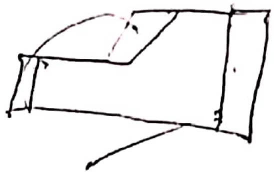
c) f absolutamente continua si y solo si f es uniformemente continua.

d) f absolutamente continua en $[0,1]$ si y solo si $f(x) = f(1) + \int_1^x f'(t)dt$.

e) f Riemann integrable implica $f \in L^1(\mathbb{R})$.

f) $r < q$ implica $L^r(A) \subset L^q(A)$.

3. i) Sea $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. Demuestre que existe una única (2 puntos) función x, absolutamente continua tal que satisface $x(0) = 1$ y



$\int \varphi = x$

$$x'(t) = \varphi(t) \quad \text{c.t.p.}$$

y si ¿ x es solo diferenciable c.t.p.?(1 punto)

ii) Sea $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua. Demuestre que $m(A) = 0$, implica que $m(v(A)) = 0$ (2 puntos). ¿Vale esto para v solo continua? (1 punto).

$x' - y' = 0$

4. Sean $h \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Probar que para $t \in \mathbb{R}$, la función ψ dada por

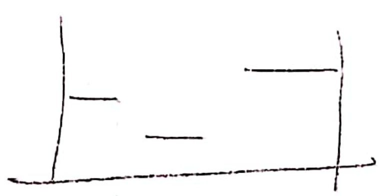
$\in L^q \quad \in L^p$

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} g(s)|h(s) - h(s+t)|ds$$

está bien definida (1,5 puntos) y es continua en $t = 0$ (1,5 puntos).

$g(s)|\, h(s) - h(s+t)$

$\lim \int_0^1 \sin nt$



Scanned with CamScanner

Segunda Prueba de Análisis III

Sabado 28 de Junio del 2008
Resuelva 5 de los 6 problemas

I) Sea $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ la función dada por $\varphi(x) = x^{2008}$ si $x \in C$, el conjunto de Cantor y $\varphi(x) = 2^{-k}$ para x en los intervalos de largo 3^{-k} que han sido removidos de $[0,1]$. Demuestre que $\varphi \in L^1([0,1])$ (i.e. integrable en el sentido de Lebesgue) (2,5 pts.) y que $\int_{[0,1]} \varphi = \frac{1}{4}$ (0,5 pts.)

(b) Suponga que $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ es una función medible para la cual $|f|$ es impropiamente integrable en el sentido de Riemann . Demuestre que f es integrable en el sentido de Lebesgue (i.e. $f \in L^1[(0,\infty)]$) (2,5 pts.). ¿Y si quitamos el valor absoluto? (0,5 pts.).

II) Defina $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-tx^2}\,dx.$$

Pruebe que φ es continua (2,5 pts), diferenciable (2 pts) y que satisface la ecuación diferencial

$$\varphi'(t) = -\frac{\varphi(t)}{2t}, t > 0 \text{(1 pto).)}$$

Deduzca que $\varphi(t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}}$ (0,5 pts).

III) Consider $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función integrable. Pruebe que g es finita c.t.p. (2 pts) y

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} \left|g\left(x+t^2\right) - g(x)\right| dx = 0, \text{ (4 pts)}$$

IV) Sean $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible; $g_n \in L^1[A]$, $g_n \to g$ c.t.p.; f_n, f funciones medibles, $f_n \to f$ c.t.p., $|f_n| \leq |g_n|$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f, \text{ (3 pts.)}$$

Scanned with CamScanner

Prueba 3 Analisis abstracto 1

Diciembre 8, 2012

Ayudante=fernando venegas.
responda solo 4 problemas, tiempo = 3 horas

1. Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$

   (a) Pruebe que dado $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ tal que $\sum |c_k|^2 < \infty$ existe una única $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

   $$c_k = < g, \varphi_k > \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|g\|_2^2 \quad (3\text{p})$$

   (b) Suponga que el subespacio generado por los φ_n es denso en $L^2(\mathbb{R})$. Demuestre que la correspondencia $\ell^2(\mathbb{N}) \ni \{c_k\}_k \mapsto g \in L^2(\mathbb{R})$ es un isomorfismo isométrico. (3p)

   hint: considere $\sum^{k=1} c_k \varphi_k$

2. Suponga que $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ y denote $F(f)$ la transformada de Fourier de f

   (a) Demuestre rigurosamente que la convolución satisface

   $$F(f * g) = F(f)F(g) \quad (1\text{p})$$

   (b) Si el producto $F(f) \cdot F(g)$ esta en $L^1(\mathbb{R})$, probar que

   $$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(f)F(g) e^{i\lambda t} d\lambda = (f * g)(t) \ , \ t \in \mathbb{R} \ (1.5\text{p})$$

   Establezca condiciones sobre f, g que garanticen ésta fórmula (1.5p)

   (c) Deduzca que para $a, b > 0$:

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{ab(a + b)} \quad (2\text{p})$$

3. Si $\varphi(x) = e^{-x^2}$, pruebe que $\varphi \in S_\infty$ (1p) y que la $n-$derivada $\varphi^{(n)}$ también está en S_∞ (1p). Demuestre que si $f \in S_\infty$ entonces $F(f) \in S_\infty$. (2p) y que $F : S \to S$ es un homeomorfismo (2p)

4. Resuelva (1 p) la ecuación del calor

   $$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} w(t, x) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, x) \ , \ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \\ w(0, x) = h(x) \ , \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

   Demuestre que, efectivamente, la función encontrada satisface la ecuación (2 p) y si $h \in L^1(\mathbb{R})$ la condición de borde:

   $$\lim_{t \to 0} w(t, x) = h(x) \quad (3 \text{ p})$$

Scanned with CamScanner

ANALISIS ABSTRACTO I
PRUEBA 2

Octubre 30, 2012

Ayudante = fernandini veneguini
Responder 4 problemas
Tiempo = 3 horas

1. Demuestre o de un contraejemplo (1 p. c/u)

   (a) $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ implica $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
   (b) Si $f_n \rightrightarrows f$ entonces $T_a^b(f_n) \to T_a^b(f)$
   (c) f Riemann integrable implica $f \in L^1(\mathbb{R})$
   (d) $p < q$ implica $L^q(A) \subset L^p(A)$
   (e) El espacio $L^\infty([0,1])$ es completo
   (f) h es absolutamente continua en $[0,1]$ si y solo si $h(x) = h(1/2) + \int_{1/2}^x h'(t)dt$

2. Sean

$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt, \quad \xi(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2, \quad x \geq 0.$$

   Demuestre que existe $\varphi(\infty)$ (1 p) y φ' (2 p) y calculelos (0.5 p). Demuestre que $\varphi + \xi$ es constante (1,5 p) y deduzca que

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}/2$$

3. Para $h \in L^1(\mathbb{R})$ defina $h_t(x) := h(tx)$. Demuestre que

   (a) Si $t \neq 0$, entonces $h_t \in L^1(\mathbb{R})$ (1.5 p) y

$$\int_{\mathbb{R}} h = t \int_{\mathbb{R}} h_t \quad (2\text{ p})$$

   (b) Para $g \in L^\infty$,

$$\lim_{t\to 1} \int_{\mathbb{R}} g(x)\,|h_t(x) - h(x)|\,dx = 0 \quad (3.5\text{ p})$$

Scanned with CamScanner

ANALISIS ABSTRACTO I
PRUEBA 1

Septiembre 8, 2012

Ayudante = Fernando Venegas
Responder 4 problemas
Tiempo = 3 horas

1. Demuestre o indique un contraejemplo.

   (a) Si $m^*(A) > 0$ entonces A contiene una cantidad no numerable de irracionales. (1 p)

   (b) Si $m^*(A) = 0$ entonces $\overline{A^c} = \mathbb{R}$ (1 p)

   (c) A no medible implica $m^*(A) > 0$ (1 p)

   (d) f medible si y solo si $\{x \mid f(x) = a\}$ es medible $\forall a \in \mathbb{R}$ (1 p)

   (e) Si f es acotada entonces f es integrable lebesgue. (1 p)

   (f) E medible implica $f^{-1}(E)$ medible para f medible. (1 p)

2. Pruebe que un conjunto E es medible (0.5 p) si y solo si $E = B \cup N$ con B un conjunto borel y $m(N) = 0$ (1 p) ¿N es un borel? (0.5 p) Además, si $m(E) < \infty$, demuestre que E es medible (2 p) si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $G = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ con I_i intervalos abiertos, tal que $m^*(E \triangle G) < \epsilon$ (2 p)

3. Sea $g : A \to \mathbb{R}$ una función acotada con $m(A) < \infty$, pruebe que g es medible (2,5 p) si y solo si existen sucesiones $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples tales que $s_n \leq g \leq t_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_A (t_n - s_n) = 0 \quad (2 \text{ p})$$

¿vale el resultado para $|g|$ finita c.t.p.? (0.5 p) ¿ y para $A = \mathbb{R}$? (1 p)

Scanned with CamScanner

ANÁLISIS III

Prueba N°2

Junio 02, 2007

Tiempo: 3 hrs.

I)

(a) Sea $r(x) = \ln([x^{-1}])$, $x \in (0,1]$, donde $[\cdot]$ denota la función parte entera. Demuestre que r es Lebesgue integrable y calcule su integral [2,5 pts.] ¿Es integrable Riemann? [0,5 pts.]

(b) Demuestre que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible y $|f|$ es impropiamente Riemann integrable, entonces f es integrable Lebesgue y ambas integrales coinciden [2,5 pts.]. ¿Y si quitamos el valor absoluto? [0,5]

II) Sea $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable Lebesgue. Defina

$$\varphi(x) = \int_0^1 e^{-x/y} f(y)dy, \; x \in (0,1)$$

Demuestre que φ es continua [3,5 pts.]. Estudie y demuestre, bajo que condiciones es derivable. [2,5 pts.]

III)

(a) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Demuestre que existe una única [3 pts.] función absolutamente continua x tal que $x'(t) = f(t)$ c.t.p. y $x(0) = 1$. Demuestre que $x(t)$ converge cuando $t \to \pm\infty$. [1 pt.]

(b) Decida si el teorema fundamental del cálculo es válido en todo $[0,1]$, para una función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en todas partes, que lo satisface en $[\epsilon, 1]$, $\forall \epsilon > 0$, y $f' \in L^1([0,1])$. [3 pts.] Ayuda: Considere $f(x) = x^2 \text{sen}(x^{-\alpha})$, $f(0) = 0$, $\alpha > 0$.

IV) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(a) Demuestre que dado $\epsilon > 0$, existe ψ una función continua con soporte compacto (i.e. $\psi \neq 0$ en un conjunto compacto) tal que $\|f - \psi\|_1 < \epsilon$. [1,5]

Scanned with CamScanner

(b) Defina f_y la función dada por $f_y(x) = f(x-y)$ y $T: \mathbb{R} \longrightarrow L^1(\mathbb{R})$ por $T(y) = f_y$. Demuestre que T es una función uniformemente continua. 3,5

V) Sea A un conjunto medible. Se dice que un conjunto $V \subseteq L^1(A)$ es uniformemente integrable si , y sólo si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \int_E f \right| < \epsilon$$

para $f \in V$ y $mE < \delta$.

Suponga $mA < \infty$.

(a) Demuestre el siguiente Teorema de Vitali: Si $\{f_n\}$ es uniformemente integrable, $f_n \to f$ c.t.p. y f es finita c.t.p. Entonces $f \in L^1(A)$ y $f_n \to f$ en $L^1(A)$. ¿Vale si $A = \mathbb{R}$? (3

(b) Lo mismo ocurre si $f_n \in L^1(A)$, $f_n \to f$ c.t.p. y existen $p > 1$ y constante $c > 0$ tal que $\|f_n\|_p \leq c$ para todo n. (3)

Scanned with CamScanner

2. ejercicios sujeridos
ayudante=fernando venegas

1. Indique cuál de las siguientes funciones son lebesgue integrables (demostrándolo) y calcule $\int_{\mathbb{R}} f$

$$f(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{1+|[x]|} \quad , \qquad f(x) = ([x]-x)^{-\frac{1}{2+|[x]|}}$$

1'. Sea h una función integrable y f una función acotada y de lipschitz, defina $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} h(x) f(tx) dx$$

Pruebe que φ es continua. Encuentre una condicion que permita que φ sea derivable y demuestre su derivabilidad.

2. Demuestre, refute o de un contraejemplo según corresponda

   (a) Si f es medible entonces f es integrable si y sólo si $|f|$ lo es

   (b) Sea $\{f_n\}_n$ una sucecion tal que $f_n \to f$, ¿puede ocurrir que $|\int f_n| < 37\ \forall n$ y que $\int f = \infty$? ¿y si para todo n, $f_n > 0$ ctp?

   (c) f de variación acotada implica f absolutamente continua ¿y el reciproco?

   (d) Si f es derivable ctp, entonces f es de variación acotada ¿es f absolutamente continua?

3. Sean $a, c : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dos funciones y $a_n, c_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ un par de sucesiones de funciones tales que $a_n(j) \xrightarrow[n\to\infty]{} a(j)$ y $c_n(j) \xrightarrow[n\to\infty]{} c(j)$ demuestre que si $|a_n| < c_n$ y

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_n(j) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j)$$

entonces

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_n(j) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{j\in\mathbb{Z}} a(j)$$

4. Demuestre que el conjunto de funciones de variación acotadas definidas en el intervalo $[a, b]$ es un espacio vectorial y que

$$\|f\| = \lim_{x\to b^-} |f(x)| + T_a^b(f)$$

es una norma en este espacio y mas aún, este es un espacio completo.

Scanned with CamScanner

CONTROL 1

Responda 2 de los tres problemas.

1. Encuentre g tal que

$$||x|-1| = 1 + \int_{-2}^{x} g(t)dt \ , \quad x \in [-2,2]$$

¿es $f(x) = ||x|-1|$ absolutamente continua en $[-2,2]$?

2. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y de variación acotada. Si f es absolutamente continua en $[0, 1-\epsilon]$ para todo $\epsilon > 0$, demuestre que f es absolutamente continua.

3. Sea f absolutamente continua, demuestre que f lleva medibles en medibles.

Scanned with CamScanner

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Curso: Análisis III, Otoño 2009
Profesor: Manuel Pinto
Ayudante: Patricio Quiroz H.

Prueba 2

Resuelva 4 de los 5 problemas — 6 Junio , 2009

1. (a) Para $x \in \mathbb{R}$, sea $[x]$ su parte entera ($i.e.[x] \in \mathbb{Z}$ y $[x] \leq x < [x]+1$). Sea $\varphi : (0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $\varphi(x) = ([x^{-1}])^{1/2009}$. Demuestre que $\varphi \in L^1([0,1])$ y calcule $\int_{[0,1]} \varphi$.[2,5 pts.] Es integrable Riemann? [0,5 pts.].

   (b) Suponga que $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ es una función medible para la cual $|f|$ es impropiamente integrable en el sentido de Riemann. Demuestre que f es integrable en el sentido de Lebesgue [2,5 pts.]. Y si quitamos el valor absoluto? [0,5 pts.].

2. Para $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable en el sentido de Lebesgue, defina $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$h_n \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}$

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)h(x)dx.$$

Pruebe que φ es continua [3 pts.]. Encuentre una condición [1 pt.] que permita que φ sea derivable y demuestre su derivabilidad [2 pts.].

3. Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable y $g_t(x) = g(tx)$.

   (a) Para $t \neq 0$, pruebe que $g_t \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = t\int_{\mathbb{R}} g_t(x)dx. \quad [2,5 \text{ pts.}].$$

   (b) Pruebe que

$$\lim_{t\to 1} \int_{\mathbb{R}} |\, g_t(x) - g(x) \,|\, dx = 0, [3,5 \text{ pts.}].$$

Scanned with CamScanner

4. (a) Demuestre que si $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua que es absolutamente continua en todo $[0, \varepsilon]$ con $\varepsilon < 1$, entonces v es absolutamente continua en $[0,1]$ **[2 pts.]**. Vale esto para v sólo continua? **[1 pt.]**

   (b) Sea $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones absolutamente continuas con $u_n(a) = 0$. Suponga que sus derivadas $\{u'_n\}_{n=1}^{\infty}$ forman una sucesión de Cauchy en $L^1([a,b])$. Demuestre que existe u absolutamente continua en $[a,b]$ **[2 pts.]** tal que $u_n \to u$ uniformemente en $[a,b]$ **[1 pt.]**.

5. Sea A un conjunto medible. Se dice que un conjunto $V \subseteq L^1(A)$ es uniformemente integrable si y sólo si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_E |f| < \varepsilon$$

para $f \in V$ y $mE < \delta$.
Suponga $mA < \infty$

   (a) Demuestre el siguiente Teorema de Vitali: Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente integrable, $f_n \to f$ *c.t.p.* y f es finita c.t.p. Entones $f \in L^1(A)$ y $f_n \to f$ en $L^1(A)$. **[3 pts.]**.

   (b) Lo mismo ocurre si $f_n \in L^1(A)$, $f_n \to f$ *c.t.p.* y existen $p > 1$ y constante $c > 0$ tal que $\|f_n\|_p \leq c$ para todo n **[3 pts.]**.

Scanned with CamScanner

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Curso: Análisis III, Otoño 2009
Profesor: Manuel Pinto
Ayudante: Patricio Quiroz H.

Prueba 2

Resuelva 4 de los 5 problemas 6 Junio , 2009

1. (a) Para $x \in \mathbb{R}$, sea $[x]$ su parte entera ($i.e.[x] \in \mathbb{Z}$ y $[x] \leq x < [x]+1$). Sea $\varphi : (0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $\varphi(x) = ([x^{-1}])^{1/2009}$. Demuestre que $\varphi \in L^1([0,1])$ y calcule $\int_{[0,1]} \varphi$.**[2,5 pts.]** Es integrable Riemann? **[0,5 pts.]**.

   (b) Suponga que $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ es una función medible para la cual $|f|$ es impropiamente integrable en el sentido de Riemann. Demuestre que f es integrable en el sentido de Lebesgue **[2,5 pts.]**. Y si quitamos el valor absoluto? **[0,5 pts.]**.

2. Para $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable en el sentido de Lebesgue, defina $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)h(x)dx.$$

   Pruebe que φ es continua **[3 pts.]**. Encuentre una condición **[1 pt.]** que permita que φ sea derivable y demuestre su derivabilidad **[2 pts.]**.

3. Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable y $g_t(x) = g(tx)$.

   (a) Para $t \neq 0$, pruebe que $g_t \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = t\int_{\mathbb{R}} g_t(x)dx.$$

   (b) Pruebe que

$$\lim_{t\to 1}\int_{\mathbb{R}} \mid g_t(x) - g(x) \mid dx = 0,$$

Scanned with CamScanner

4. Calcule $\int_{[0,1]} f$ para:

(a) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ si $x \in C$, C el conjunto de Cantor, y $f(x) = n$ en los intervalos de largo 3^{-n}[2 pts.].

(b) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$[4 pts.].

5. Suponga $E \subset \mathbb{R}$ medible. Sean $f, f_n : E \to [0,\infty]$ funciones medibles tales que $\forall A \subset E$ medible y $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_A f_n \leq \int_A g$, donde g es una función no-negativa e integrable sobre E. Demuestre:

(a) $\lim_{\nu \to \infty} m(\{x / f_n(x) > \nu\}) = 0$ uniformemente en n [1,5 pts.].

(b) Si $m(E) < \infty$ y $f_n \to f$ c.t.p. Entonces $\int_E f_n \to \int_E f$ [4,5 pts.].

6. Pruebe el Teorema de Lusin: Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función medible, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ función continua tal que $m(\{x / f(x) \neq g(x)\}) < \epsilon$ [4 pts.]. Estudie la extensión de este resultado al intervalo $(-\infty, \infty)$ [2 pts.].

Scanned with CamScanner

Analisis - Control 2

Ayudante=Fernando Venegas.

1. Sean $f, f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ tales que $f_n \to f$.
   (a) ¿puede ocurrir que $\int f_n = 3\ \forall n$ mientras que $\int f = \infty$?
   (b) ¿puede ocurrir que $\int f_n = \infty\ \forall n$ mientras que $\int f = 3$?

2. Calcule los siguientes limites
   (a) $\lim \int_{f^*([n,\infty])} f$
   (b) $\lim \int_{f^*([x-1/n,x+1/n])} f$
   (c) $\lim \int_{[0,\infty]} f(nt)dt$ (Asuma que f es continua)
   (d) $\lim \frac{\int_{1-n}^{n^2+1} \cos(nx^5)x^2dx}{3n^4+8n^7}$

3. Sea g positiva e integrable Lebesgue. Demuestre que dado $\epsilon > 0$, existe una función continua f tal que
$$\int |f-g| < \epsilon$$
¿se puede usar este problema para calcular la parte c) del item aterior?

4. Sean $f_n > 0$ tales que $\lim \int f_n = 0$. Demuestre que existe una función g tal que
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$
y que cumple
$$\lim_{n\to\infty} \int g \cdot f_n = 0$$

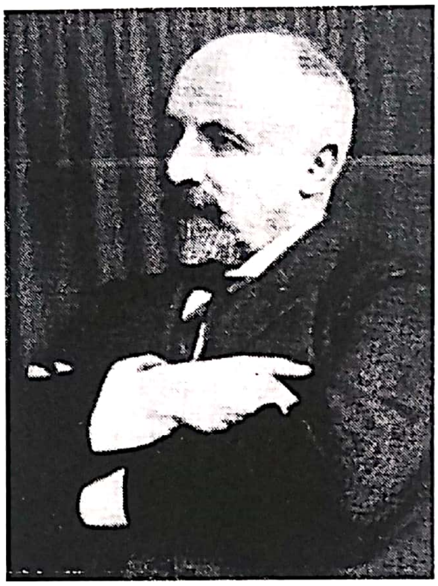
Scanned with CamScanner

Analisis - Guía 3
Ayudante=Fernando Venegas.

Definiciones:

3. La σ-algebra de los medibles se denotara por $\mathcal{M}$

5. El soporte de una funcion es el conjunto de puntos donde no es cero, es decir $\text{sop}(f) = \{x \in \text{Dom}(f) \mid f(x) \neq 0\}$.



Ejercicios:

1. Demuestre que $\mathcal{X}_E$ es medible si y solo si E es medible.

2. Demuestre que si $m^*E < \infty$, entonces existe para todo $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m(E \cap [-n, n]^c) < \epsilon$

3. Sea $\{A_n\}_n$ una sucesion de conjuntos en una σ-algebra Σ, defina $\limsup A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j$, y $\liminf A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$.

   (a) Demuestre que $\limsup A_n \in \Sigma$ y que $\liminf A_n \in \Sigma$.

   (b) Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ demuestre que existe una susecion de borelianos B_n tales que $\liminf B_n \subseteq A \subseteq \limsup B_n$

   (c) Sea $\Sigma = \mathcal{M}$, ¿bajo que hipotesis $m(\limsup A_n) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$? ¿bajo que hipotesis $m(\liminf A_n) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$?

4. Sea A de medida finita, $\{A_n\}_n$ y $\{B_n\}_n$ dos suseciones de subconjuntos de A, todos medibles tales que $\lim m(A_n)$ y $\lim m(B_n)$ existen. ¿Es cierto que $\lim m(A_n \cap B_n) = \lim m(A_n) \lim m(B_n)$? ¿Que puede decir de $\lim m(A_n \triangle B_n)$?

Scanned with CamScanner

5. Sea f una función medible con soporte finito (es decir la medida de su soporte es finita).

   Suponga que $m(f^*(A)) = 0$ para algún conjuto numerable $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   Demuestre que dado $\epsilon > 0$ se tiene que $|f(x) - y| > \epsilon$ para todo $y \in A$ excepto en conjunto de medida menor a ϵ.

6. Sean f y g son funciones Lebesgue medibles. Determie cual de los siguientes conjuntos son medibles: $\{x \mid f(x) > g(x)\}$, $\{x \mid f(x) \geq g(x)\}$, $\{x \mid f(x) = g(x)\}$, $\{x \mid f(x)^2 + g(x)^3 > f(x)g(x)\}$.

7. Sea $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ medible y finita ctp. Demuestre que dado $\epsilon > 0$ existe $g : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ escalonada y $h : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ continua, tales que

$$|f - g| < \epsilon \text{ y } |f - h| < \epsilon$$

   excepto un conjunto de medida menor a ϵ.

8. Sea f_1 la función ternaria de Cantor (la de la primera tarea), y defina $f(x) := x^2 + f_1(x)$.

   (a) Demuestre que f es un homeomorfismo de $[0,1]$ en $[0,2]$

   (b) Demuestre que f lleva el conjunto de cantor en un conjunto de medida 1.

   (c) Sea $g = f^{-1}$. Demuestre que existe un conjunto medible A tal que $g^*(A)$ es no medible.

   (d) De un ejemplo de función de una función continua g y una medible h tales que $h \circ g$ no es medible.

   (e) Demuestre que existe un conjunto medible no boreliano.

9. Demuestre el Teoremaso de Egoroff: "Si $\{f_n\}_n$ es una sucesión de funciones medibles que convergen ctp a una función medible f sobre un conjunto medible E de medida finita, entonces dado $\eta > 0$ existe $A \subseteq E$ con $mA < \eta$ tal que f_n converge uniformemente a f en $E \setminus A$".

10. Demuestre el Teorema de Lusin: "Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es medible, entonces dado $\delta > 0$, existe una funcion continua $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $m\{x \mid f(x) \neq \psi(x)\} < \delta$".

11. *Sea $F := \{f_i : X \to Y \mid i \in I\}$ una familia de funciones, y sea Σ_Y una sigma algebra en Y. Describa la menor sigma algebra en X que hace que todas las funciones en F sean medibles.

Siempre que le prestábamos nuestros votos de fidelidad y obediencia al Mensajero de Alláh , él nos decía, "hasta donde les sea posible".[1]

[1]Comentario: La obediencia al líder de los musulmanes está sujeta a dos condiciones: Primero, que sus órdenes no deben transgredir la Ley de Alláh y segundo, que no debe ir más allá de las limitaciones de la gente. En caso de que éste no cumpla con estas dos condiciones no es obligatorio obedecerlo. Este hadiz es una clara advertencia para los líderes de no imponer sobre su gente cargas que estos no pueden soportar.

Scanned with CamScanner

ANALISIS ABSTRACTO I
PRUEBA 1

Septiembre 8, 2012

Responder 4 problemas
Tiempo = 3 horas

1. Demuestre o indique un contraejemplo.

   (a) Si $m^*(A) > 0$ entonces A contiene una cantidad no numerable de irracionales. (1 p)

   (b) Si $m^*(A) = 0$ entonces $\overline{A^c} = \mathbb{R}$ (1 p)

   (c) A no medible implica $m^*(A) > 0$ (1 p)

   (d) f medible si y solo si $\{x \mid f(x) = a\}$ es medible $\forall a \in \mathbb{R}$ (1 p)

   (e) Si f es acotada entonces f es integrable lebesgue. (1 p)

   (f) E medible implica $f^{-1}(E)$ medible para f medible. (1 p)

2. Pruebe que un conjunto E es medible (0.5 p) si y solo si $E = B \cup N$ con B un conjunto borel y $m(N) = 0$ (1 p) ¿N es un borel? (0.5 p) Además, si $m(E) < \infty$, demuestre que E es medible (2 p) si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $G = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ con I_i intervalos abiertos, tal que $m^*(E \triangle G) < \epsilon$ (2 p)

3. Sea $g : A \to \mathbb{R}$ una función acotada con $m(A) < \infty$, pruebe que g es medible (2,5 p) si y solo si existen sucesiones $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples tales que $s_n \leq g \leq t_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_A (t_n - s_n) = 0 \quad (2 \text{ p})$$

¿vale el resultado para $|g|$ finita c.t.p.? (0.5 p) ¿ y para $A = \mathbb{R}$? (1 p)

Scanned with CamScanner

4. Calcule la integral de Lebesgue $\int_{[0,1]} \varphi$ para

(a) $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = e^x$ si $x \in C$ (C es el conjunto de cantor) y $\varphi(x) = 2^{-k}$ en los intervalos de largo 3^{-k} (2 p).

(b) $\varphi(x) = x^2 - 2x$ (3 p) y $\varphi(x) = cos(x)\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(x) + sen(x)\mathcal{X}_{\mathbb{Q}^c}(x)$ (1 p).

5. Sea $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Considere la función $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(t) = \int_{[a,b]} e^{itx} h(x)dx, \ t \in \mathbb{R}.$$

(a) Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \psi(1/n) \quad (1,5\text{p}).$$

(b) Pruebe usando sucesiones que ψ es una función continua (3 p) ¿vale el resultado si cambiamos $[a,b]$ por $[1,\infty)$ (0.5 p)? ¿qué es necesario? (1 p).

Scanned with CamScanner

NOTACIÓN: $f^*(A)$ = PREIMAGEN DE A $\qquad$ $\mathcal{B}$ = BORELIANOS
$f_*(A)$ = IMAGEN DE A $\qquad$ $\mathcal{M}$ = MEDIBLES

MOISES PACHECO

Por despreciar el V! 6,7 de lo completo! Podías el 7 dignamente!!

MUY BIEN!!

(1) A) SI $m^* A > 0 \Rightarrow \exists B \subseteq \mathbb{Q}^c$ NO NUMERABLE TQ $B \subseteq A$

D: ~~SUPONGAMOS QUE NO~~ $\cancel{\Rightarrow \forall B \subseteq \mathbb{Q}^c}$ ~~NO NUMERABLE~~

ESCRIBIMOS $A = (A \cap \mathbb{Q}) \dot{\cup} (A \cap \mathbb{Q}^c)$

RECORDEMOS QUE SI A ES NUMERABLE $\Rightarrow m^* A = 0$

LUEGO COMO $m^* A > 0 \Rightarrow A$ NO ES NUMERABLE.

SEA $B = A \cap \mathbb{Q}^c \Rightarrow A = (A \cap \mathbb{Q}) \dot{\cup} B$.

$B \subseteq \mathbb{Q}^c$ Y $B \subseteq A$ ADEMAS SI B FUESE NUMERABLE

PUES $A \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$ ES NUMERABLE

$\Rightarrow (A \cap \mathbb{Q}) \cup B$ ES NUMERABLE,

$\Rightarrow A$ ES NUMERABLE $\Rightarrow\!\Leftarrow$

$\therefore B$ ES NUMERABLE. $\quad$ 4 $\quad$ 22,7

B) $m^* A = 0 \Rightarrow \overline{A^c} = \mathbb{R}$

D: SI $\overline{A^c} \neq \mathbb{R} \Rightarrow \exists I$ INT. ABIERTO TQ $A^c \cap I = \emptyset$

$\Rightarrow I \subseteq A \Rightarrow m^*(I) = \ell(I) \leq m^* A = 0$

$\Rightarrow \ell(I) = 0 \Rightarrow\!\Leftarrow$

$\therefore \overline{A^c} = \mathbb{R}$ $\quad$ 3,

C) A NO MEDIBLE $\Rightarrow m^* A > 0$

D: SI $m^* A = 0 \Rightarrow A$ ES MEDIBLE. $\Rightarrow\!\Leftarrow$

LEMA: SI $m^* A = 0 \Rightarrow A$ ES MEDIBLE.

D: SEA $B \subseteq \mathbb{R}$ PD: $m^*(A \cap B) + m^*(A^c \cap B) \leq m^* B$

D: $A \cap B \subseteq A \Rightarrow m^*(A \cap B) \leq m^* A = 0 \Rightarrow m^*(A \cap B) = 0$

ADEMAS $A^c \cap B \subseteq B \Rightarrow m^*(A^c \cap B) \leq m^* B$

$\therefore m^*(A \cap B) + m^*(A^c \cap B) = m^*(A^c \cap B) \leq m^* B$ $\quad$ 3,

D) f MEDIBLE $\Leftrightarrow \{x / f(x) = a\}$ ES MEDIBLE $\forall a \in \mathbb{R}$.

D: $\Rightarrow$) f MEDIBLE $\Rightarrow \{x / f(x) = a\} = \underbrace{\{x / f(x) \geq a\}}_{\text{MEDIBLE}} \cap \underbrace{\{x / f(x) \leq a\}}_{\text{MEDIBLE}}$

$\Rightarrow \{x / f(x) = a\}$ ES MEDIBLE.

Scanned with CamScanner

c) g: Sea $f(x) = \chi_N(x)(x+1)$, N no medible.

$f^*(\{a\}) = \begin{cases} \{a-1\}, & \text{si } a \in N \\ \{0\}, & \text{si } a \notin N \end{cases}$ medibles, pero $f^*(\frac{1}{2}, \infty) = N$ no medible

$\Rightarrow f$ no es medible.

1

E) f acotada $\Rightarrow f$ integrable Lebesgue.

R: Sea N no medible, sea $f = \chi_N$, f es no medible

luego no integrable Lebesgue.

Pero $|f| \leq 1$ acotada.

1

F) $E \in \mathcal{M} \Rightarrow f^*(E) \in \mathcal{M}$, f medible.

D: No, se sabe que $f : [0,1] \to [0,2]$ tq $f(x) = f_1(x) + x$, (f_1 función de Cantor)

es un homeomorfismo tq $m\, f_1(\mathcal{C}) = 1 > 0$, $\mathcal{C}$ conjunto de Cantor

luego $\exists\, N \subseteq f_1(\mathcal{C})$ no medible. (I)

Sea $E = f^*(N) \Rightarrow N \subseteq f_1(\mathcal{C}) \Rightarrow f^*(N) \subseteq f^*(f_1(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$

$\Rightarrow E \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow m^*E \leq m^*\mathcal{C} = 0 \Rightarrow m^*E = 0$

$\Rightarrow E \in \mathcal{M}$, pero además como f es homeo

$\Rightarrow f^{-1}$ es continua, luego medible.

Pero: $(f^{-1})^*(E) = f_*(E) = f_*(f^*(N)) = N$ no medible.

I) L

(2) PD: Si $m^* E < \infty$ entonces:

$E \in \mathcal{M} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists G = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, I_i int. abiertos

tq $m^*(E \Delta G) < \varepsilon$

D: Lema: Si $m^* E < \infty \Rightarrow$

$E \in \mathcal{M} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists O$ abierto tq $E \subseteq O \wedge m^*(O - E) \leq \varepsilon$

D: $\Leftarrow)$ $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists O_n$ abierto tq $E \subseteq O_n \wedge m^*(O_n - E) \leq 1/n$

Sea $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$, $E \subseteq O_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow E \subseteq G$

Además $G \subseteq O_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow m^*(G - E) \leq m^*(O_n - E) \leq 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow m^*(G - E) = 0$

Además $G \in \mathcal{G}_\delta \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow G = E \cup (G - E) \wedge G^c \in \mathcal{M}$

Además $E \subseteq G \Rightarrow G^c \subseteq E^c \wedge G - E = G \cap E^c = G^{cc} \cap E^c$
$= E^c - G^c$

$\Rightarrow m^*(G - E) = m^*(E^c - G^c) = 0$

$\Rightarrow E^c = G^c \cup (E^c - G^c)$ y $G^c \in \mathcal{M} \wedge m^*(E^c - G^c) = 0$

$\Rightarrow E^c - G^c \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$ (unión de medibles)

$\Rightarrow E \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow)$ Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ int. abiertos tq

$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq m^* E + \varepsilon \wedge E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

Si $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \Rightarrow E \subseteq O \wedge m^* O \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq m^* E + \varepsilon$

$\Rightarrow m^* O - m^* E = m^*(O - E) < \varepsilon$

$E \in \mathcal{M}$

Demostración de lo primero:

$\Rightarrow)$ ~~$E \in \mathcal{M}$ ...~~

Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists O$ abierto tq $E \subseteq O \wedge m^*(O - E) < \varepsilon/2$, por el lema.

O es abierto $\Rightarrow \exists \{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ int. abiertos disjuntos (II)

tq $O = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, $m^* O = \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) < m^* E + \frac{\varepsilon}{2} < \infty$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} \ell(I_i) < \varepsilon/2$

Sea $G = \bigcup_{i=1}^{n_0} I_i \subseteq O$

Scanned with CamScanner

luego $m^*(E\Delta G) = m^*((E-G)\cup(G-E)) \le m^*(E-G) + m^*(G-E)$

$E \subseteq O \wedge G \subseteq O \Rightarrow E-G \subseteq O-G \wedge G-E \subseteq O-E$

pero $m^*(O-E) < \varepsilon/2 \wedge O-G = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} I_i$

$$\Rightarrow m^*(O-G) \le \sum_{i=n+1}^{\infty} \ell(I_i) < \varepsilon/2$$

$$\therefore m^*(E\Delta G) \le m^*(E-G) + m^*(G-E) \le m^*(O-G) + m^*(O-E)$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$\Leftarrow)$ PD. $\forall \varepsilon > 0\ \exists O$ abierto tq $E \subseteq O \wedge m^*(O-E) < \varepsilon$

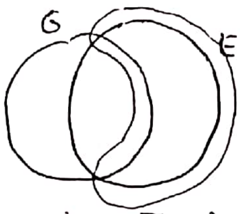
(que es equivalente a que $E \in \mathcal{M}$)

D: Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists G = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ intervalos abiertos tq

$$m^*(E\Delta G) < \varepsilon/4$$

como G es abierto, ~~...~~

tenemos:



$m^*(E-G) \le m^*E < \infty \Rightarrow$ ~~$\exists O$ abierto tq $E-G \subseteq O$~~

$\Rightarrow \exists \{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ int. abiertos tq $E-G \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \wedge$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) \le m^*(E-G) + \varepsilon/2$$

Sea $O = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right) \cup G$ abierto. $E = (E-G) \dot\cup (E \cap G)$

$$E-G \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \wedge E \cap G \subseteq G \Rightarrow E \subseteq O$$

Además:

$$O-E = \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right) \cup G\right] - E = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n - E\right) \cup (G-E)$$

$$\Rightarrow m^*(O-E) \le m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n - E\right) + m^*(G-E) \le \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{m^*(J_n)}^{\ell(J_n)} + m^*(G-E)$$

$$\le m^*(E-G) + m^*(G-E) + \varepsilon/2 \le 2\underbrace{m^*(E\Delta G)}_{<\varepsilon/4} + \varepsilon/2$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Scanned with CamScanner

PD: E es medible $\iff \exists B \in \mathcal{B}$, $N \underset{tq}{\subseteq} \mathbb{R}$ $mN = 0$ tq $E = B \cup N$

D: $\Leftarrow$) $B \in \mathcal{B}$ Borel $\Rightarrow B \in \mathcal{M}$, $mN = 0 \Rightarrow N \in \mathcal{M}$
$\Rightarrow B \cup N = E \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow$)

Lema: Si E es medible y $m^*E = \infty \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists O$ abierto tq $m^*(O - E) < \varepsilon$

D: Sabemos que es válido para casos ... el que $m^*E < \infty$
En nuestro caso $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n,n] \cap E$, sea $E_n = [-n,n] \cap E$, dado $\varepsilon > 0$
Como $mE_n \leq 2n < \infty \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $\exists O_n$ abierto tq $m^*(O_n - E_n) < \varepsilon/2^n$, $E_n \subseteq O_n$
Luego sea $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ abierto. $E_n \subseteq O_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}_{E} \subseteq \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n}_{O} \therefore E \subseteq O$

$$m^*(O - E) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

Pero
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c\right) \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (O_n) \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c\right)$$
$$\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (O_n \cap E_n^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n - E_n$$

$$\therefore m^*(O - E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(O_n - E_n) < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon$$

Luego para cualquier caso E medible $\Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists O$ ab. tq $m^*(O - E) < \varepsilon$, en nuestro caso si $E \in \mathcal{M}$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $\exists O_n$ abierto tq $m^*(O_n - E^c) < 1/n$, $E^c \subseteq O_n$, ya que $E^c \in \mathcal{M}$

Sea $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n^c \in \mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{B}$,

$E^c \subseteq O_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow O_n^c \subseteq E$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow B \subseteq E$

Sea $N = E - B \Rightarrow E = N \cup B$

Como $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n^c$, y O_n^c cerrado $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow B \in \mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{B}$

$\therefore B \in \mathcal{B}$.

Nota que $E - B = E \cap B^c = E^{c\,c} \cap B^c = B^c - E^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n - E^c \subseteq O_n - E^c$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow m^*(E - B) \leq m^*(O_n - E^c) < 1/n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow m^*(N) = m^*(E - B) = 0$

Scanned with CamScanner

NOTAMOS QUE $N = E - B$, SI $E \in \mathcal{B} \Rightarrow N \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ ES σ-ALGEBRA)

PERO EN GENERAL LA AFIRMACION: QUE

$$E \text{ ES MEDIBLE} \Leftrightarrow \exists B, N \in \mathcal{B} \text{ TQ } mN = 0 \wedge E = B \cup N$$

NO ES CIERTA, PUES ESTO IMPLICARIA QUE $\mathcal{M} = \mathcal{B}$

PERO SE DEMOSTRO QUE $\mathcal{M} - \mathcal{B} \neq \emptyset$

ESTO SE REALIZO EN LA PARTE (I) f) DONDE SE

ENCONTRO UN E MEDIBLE TQ $f^{*}(E)$ NO ES MEDIBLE, f MEDIBLE

SI TAL $E \in \mathcal{B}$, COMO f ES MEDIBLE $\Rightarrow f^{*}(E) \in \mathcal{M} \Rightarrow\Leftarrow$

ESTO DEBIDO A QUE

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad f^{*}(B) \in \mathcal{M} \qquad \text{(IV)}$$

Bien!!

Scanned with CamScanner

(3) $g : A \to \mathbb{R}$ ACOTADA $\wedge$ $mA < \infty$

PD: g ES MEDIBLE $\iff \exists (s_n)_{n=1}^{\infty} \wedge (t_n)_{n=1}^{\infty}$ SIMPLES

TQ $s_n \leq g \leq t_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\wedge \lim_{n\to\infty} \int_A (t_n - s_n) = 0$$

D: $\Rightarrow$) g ES ACOTADA $\Rightarrow \exists M > 0$ TQ $g_*(A) \subseteq [-M, M)$

CONSTRUIMOS LOS SIGUIENTES CONJUNTOS, PARA $n \in \mathbb{N}$

$$E_1^{(n)} = g^*\left(\left[-M, -M + \frac{M}{n}\right)\right)$$

$$\vdots$$

$$E_k^{(n)} = g^*\left(\left[-M + \frac{(k-1)M}{n}, -M + \frac{kM}{n}\right)\right), \quad k \in \{1, \dots, 2n\}$$

DEFINIMOS

$$s_n = \sum_{k=1}^{2n} \left(-M + \frac{(k-1)M}{n}\right) \mathcal{X}_{E_k^{(n)}}$$

$$t_n = \sum_{k=1}^{2n} \left(-M + \frac{kM}{n}\right) \mathcal{X}_{E_k^{(n)}}$$

NOTAMOS QUE COMO $g_*(A) \subseteq [-M, M) \Rightarrow A = \dot{\bigcup}_{k=1}^{2n} E_k^{(n)}$

E_k SON MEDIBLES PUES g LO ES. $\Rightarrow s_n, t_n$ SON SIMPLES Y MEDIBLES

$$\Rightarrow mA = \sum_{k=1}^{2n} mE_k^{(n)}.$$

ADEMAS SI $x \in A$, DIGAMOS $x \in E_k$

$$\Rightarrow -M + \frac{(k-1)M}{n} \leq g(x) < -M + \frac{kM}{n}$$

$$\Rightarrow s_n(x) \leq g(x) \leq t_n(x)$$

$$\Rightarrow s_n \leq g \leq t_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

PD: $\lim_{n\to\infty} \int_A t_n - s_n = 0$

D: SEA $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ TQ $\forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{n} < \varepsilon / MmA$

LUEGO SI $n \geq n_0$

$$\Rightarrow t_n - s_n = \sum_{k=1}^{2n} \left[-M + \frac{kM}{n} + M - \frac{kM}{n} + \frac{M}{n}\right] \mathcal{X}_{E_k^{(n)}} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{M}{n} \mathcal{X}_{E_k^{(n)}}$$

$$\Rightarrow \left|\int_A t_n - s_n\right| = \sum_{k=1}^{2n} \frac{M}{n} mE_k^{(n)} = \frac{M}{n} mA < \varepsilon$$

$\Leftarrow$) LEMA: SI $\int_A f = 0 \wedge f \geq 0 \Rightarrow f = 0$ CTP

D: SEA $E = \{x \in A / f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A / f(x) > \frac{1}{n}\}$

SEA $E_n = \{x \in A / f(x) > \frac{1}{n}\}$

SI $mE > 0$, i.e. SI SUPONEMOS QUE $\neg(f = 0$ CTP$)$ (PUES $f \geq 0$)

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ TQ $mE_n > 0$

(PUES SINO $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $mE_n = 0 \Rightarrow mE \leq \sum_{n=1}^{\infty} mE_n = 0 \Rightarrow mE = 0$)

LUEGO:

$$\int_A f \geq \int_{E_n} f \geq \int_{E_n} \frac{1}{n} = \frac{mE_n}{n} > 0 \Rightarrow\!\Leftarrow$$

$\therefore f = 0$ CTP.

VOLVIENDO A LO QUE QUEREMOS DEMOSTRAR

SEA $S = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n$, $t = \inf_{n \in \mathbb{N}} t_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $S_n \leq S \leq g \leq t \leq t_n$

ADEMAS COMO S_n, t_n SON MEDIBLES $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow S, t$ SON [illegible]-MEDIBLES

ADEMAS

$\Rightarrow 0 \leq t - S \leq t_n - S_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 0 \leq \int_A t - S \leq \int_A t_n - S_n \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow \int_A t - S = 0 \wedge t - S \geq 0$

$\Rightarrow$ $\underline{t = S \text{ CTP}}$ POR EL LEMA.

$\Rightarrow t = S = g$ CTP $\wedge$ S MEDIBLE

$\Rightarrow g$ ES MEDIBLE.

Bien!

EL RESULTADO NO ES VALIDO PARA $|g|$ FINITA CTP

Ej: $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [0,1]$

SUPONGAMOS QUE $\exists t$ SIMPLE TQ $0 \leq g \leq t$

SI $t = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, TOMAMOS $a_0 = \max\{a_1, \ldots, a_n\} + 1 \geq 1$.

$\Rightarrow g \leq t \leq a_0$ ~~$\Rightarrow g$ ... $\Rightarrow\!\Leftarrow$~~

$\Rightarrow \forall x \in (0,1)$ $\frac{1}{x} \leq a_0$, $\Rightarrow \forall x \in (0,1)$ $\frac{1}{a_0} \leq x$

EN PARTICULAR $x = \frac{1}{a_0 + 1} < 1$, YA QUE $a_0 \geq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{a_0} \leq \frac{1}{a_0+1} \Rightarrow 1 \leq 0 \Rightarrow\!\Leftarrow$ Bien!

Scanned with CamScanner