En [casi] todos los textos de Cálculo se usa la siguiente variante del Axioma Topológico: Todo subconjunto no vacío y acotado superiormente tiene un supremo. Trate de demostrar que estas dos propiedades son equivalentes [si lo consigue, reciba nuestras felicitaciones].

2.3 Límites.

En esta sección definiremos el concepto de límite de una función usando el concepto de continuidad. Esto nos permitirá demostrar rápidamente sus propiedades fundamentales. Esto nos permitirá introducir el concepto de derivada que es uno de los dos conceptos básicos del Cálculo.

Sean $A \subset \mathbb{R}$, $a \notin A$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$. Entonces diremos que b es un **límite de f en a** ssi la función $f_b : A \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f_b(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ b & \text{si } x = a \end{cases}$$

es continua en a.

Ejemplo 1. Sean $f :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f = F|\,]0,1]$ y que F es continua en 0. Entonces como

$$f_{F(0)} = F$$

se tiene que $\lim_0 f = F(0)$.

◇

Ejemplo 2. Si $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función entonces $\lim_2 = b$ para todo $b \in \mathbb{R}$.

En efecto, si $b \in \mathbb{R}$ entonces la función $f_b : [0,1] \cup \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en 2. Para demostrarlo, sea $\mathbf{a}$ una sucesión en $[0,1] \cup \{2\}$ tal que $\lim \mathbf{a} = 2$. Entonces, como $1/2 > 0$ existe N tal que, para todo $n \geqslant N$

$$|2 - a_n| < \frac{1}{2}$$

y, se debe tener que $a_n = 2$ ya que si $a_n \in [0,1]$ se tendría que

$$a_n \in [0,1] \qquad \text{y} \qquad a_n \in \left] 2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2} \right[$$

lo cual es imposible.

Ahora bien, como $f_b(a_n) = f_b(a) = b$ para todo $n \geqslant N$, concluimos que

$$\lim f_b \circ \mathbf{a} = b = f_b(a)$$

y, por lo tanto, f_b es continua en 2.

◇

Como no siempre se tiene la unicidad del límite, es conveniente darle un nombre a un caso importante en que hay unicidad. Si $A \subset \mathbb{R}$ y diremos que $a \in \mathbb{R}$ es **adherente** a A ssi existe $\varepsilon > 0$ tal que se cumple una de las siguientes propiedades:

i. $A \cap \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\, = \,]a-\varepsilon, a[\, \cup \,]a, a+\varepsilon[$.

ii. $A \cap \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\, = \,]a, a+\varepsilon[$.

iii. $A \cap \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\, = \,]a-\varepsilon, a[$.

Nótese que estas tres propiedades son mutuamente exclusivas [es decir, no se pueden cumplir dos de ellas al mismo tiempo] y que garantizan que $a \notin A$ [ya que si $a \in A$, entonces en cada uno de los tres casos a pertenece al conjunto de la izquierda y no pertenece al de la derecha].

Además, se tiene la siguiente propiedad que garantiza la existencia de sucesiones en A que convergen a a.

Teorema 1. *Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ adherente a A. Entonces existen sucesiones $\mathbf{a}$ en A tales que $\text{lím}\, \mathbf{a} = a$.*

Demostración. En los dos primeros casos podemos usar la sucesión $(a + \varepsilon/2n \mid n \in \mathbb{N})$ y en el tercer caso, la sucesión $(a - \varepsilon/2n \mid n \in \mathbb{N})$. $\square$

Usando estas propiedades, podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 2. *Sean $a \in \mathbb{R}$ adherente a $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $b, b' \in \mathbb{R}$ dos límites de f en a. Entonces $b = b'$.*

Demostración. Sea $\mathbf{a}$ una sucesión en A tal que $\text{lím}\, \mathbf{a} = a$ [nótese que aquí usamos la propiedad de que a es adherente a A]. Entonces, como $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$f_b(a_n) = f(a_n) = f_{b'}(a_n)$$

y, como las funciones f_b y $f_{b'}$ son continuas en a, se tiene que

$$\begin{aligned} b &= \text{lím}\, f_b \circ \mathbf{a} \\ &= \text{lím}\, (f_b(a_n) \mid n \in \mathbb{N}) \\ &= \text{lím}\, (f(a_n) \mid n \in \mathbb{N}) \\ &= \text{lím}\, (f_{b'}(a_n) \mid n \in \mathbb{N}) \\ &= \text{lím}\, f_{b'} \circ \mathbf{a} \\ &= b' \end{aligned}$$

$\square$

En vista de este resultado, podemos usar sin ambigüedad el símbolo $\text{lím}_a f$ para denotar al límite de f en a cuando existe y a es adherente a A. Cuando f está definida por una fórmula se acostumbra escribir

$$\text{lím}_a f = \lim_{x \to a} f(x)$$

y $\text{lím}_{x \to a} f(x)$ cuando aparece en una línea de texto.

Ejemplo 3. Es importante recalcar que sólo hemos definido el límite de f en a para funciones cuyo dominio no contiene a a. Sin embargo, si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función y $a \in \mathbb{R}$ es adherente a $A \setminus \{a\}$, podemos considerar la función $g = f|A \setminus \{a\}$ y definir $\lim_a f = \lim_a g$.

En otras palabras, $\lim_a f = b$ ssi la función f_b es continua en a. Nótese que, en este caso, no necesariamente se tiene que $\lim_a f = f(a)$. Nuestra definición ha sido adoptada para recalcar esta situación: como la existencia del límite no depende de $f(a)$, consideramos que no está definido. ◇

Ejemplo 4. A continuación veremos algunos ejemplos de elementos adherentes a un conjunto. Para ello, consideramos un intervalo $\mathbf{I} = \langle a, b \rangle$.

i. Si $c \in \mathbf{I}$ es tal que $a \neq c \neq b$ entonces c es adherente a $A = \mathbf{I} \setminus \{c\}$.

Para comprobarlo tenemos que considerar los distintos casos posibles. Sólo veremos dos, dejando los otros como ejercicio para el lector.

Si $a = -\infty$ y $b = \infty$, se comprueba fácilmente [ejercicio] que

$$A = \;]-\infty, c[\, \cup \,]c, \infty[$$

y, por lo tanto, que

$$A \cap \,]c-1, c+1[\, = \,]c-1, c[\, \cup \,]c, c+1[$$

Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces basta elegir $\varepsilon = \min\{c-a, b-c\}$ y se comprueba fácilmente [ejercicio] que

$$A \cap \,]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\, = \,]c-\varepsilon, c[\, \cup \,]c, c+\varepsilon[$$

ii. Si $c \in \mathbb{R}$ es uno de los extremos de $\mathbf{I}$, entonces c es adherente a $A = \mathbf{I} \setminus \{a\}$.

Sólo veremos el caso en que $\mathbf{I} = [a, b[$ [los otros casos son dejados como ejercicio]. Entonces se comprueba fácilmente que $A =]a, c[$ y que si $\varepsilon = b - c$, entonces

$$A \cap \;[c, c+\varepsilon[\, = \;[c, c+\varepsilon[$$

◇

La siguiente caracterización del límite de una función tiene un caracter más intuitivo, ya que dice que $\lim_a f = b$ si y sólo si cuando x se acerca a a, $f(x)$ se acerca a b.

Teorema 3. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ adherente a A y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i. $\lim_a f = b$.

ii. Para toda sucesión $\mathbf{a}$ en A tal que $\lim \mathbf{a}$ se cumple que $\lim f \circ \mathbf{a} = b$.

Demostración. [i $\Rightarrow$ ii] Supongamos que $\lim_a f = b$ y sea $\mathbf{a}$ una sucesión en A tal que $\lim \mathbf{a} = a$. Entonces, como $\mathbf{a}$ es una sucesión en $A \cup \{a\} = \operatorname{dom} f_b$ y f_b es continua en a se tiene que

$$\lim f_b \circ \mathbf{a} = f_b(a) = b$$

Por lo tanto, como $\mathbf{a}$ es una sucesión en A y $a \notin A$, concluimos que $f_b(a_n) = f(a_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, que $\lim f \circ \mathbf{a} = \lim f_b \circ \mathbf{a} = f_b(a) = b$.

[ii $\Rightarrow$ i] Supongamos i y, para demostrar que f_b es continua en a , sea $\mathbf{a}$ una sucesión en $A \cup \{a\} = \operatorname{dom} f_b$ tal que $\lim \mathbf{a} = a$.

Como a es adherente a A , por el Teorema 1, existe $k \neq 0$ tal que $a + k/n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\mathbf{b}$ la sucesión en A tal que

$$\mathbf{b}(n) = b_n = \begin{cases} a + \dfrac{k}{n} & \text{si } a_n = a \\ a_n & \text{si } a_n \neq a \end{cases}$$

Es fácil comprobar que $\lim \mathbf{b} = a$. Entonces, como, por hipótesis, $\lim_a f = b$, se tiene que $\lim f \circ \mathbf{b} = b$. y, como además o

$$f_b(a_n) - f(b_n) = \begin{cases} b - f(b_n) & \text{si } a_n = a \\ 0 & \text{si } a_n \neq a \end{cases}$$

se tiene que

$$0 \leqslant |f_b(a_n) - f(a'_n)| \leqslant |b - f(a'_n)|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema del Sandwich, $\lim (f_b(a_n) - f(b_n)) = 0$ y concluimos que

$$\begin{aligned} \lim f_b(a_n) &= \lim (f(b_n) + (f_b(a_n) - f(b_n)) \\ &= \lim f(b_n) + \lim (f_b(a_n) - f(b_n)) \\ &= \lim f(a'_n) = \\ &= b \end{aligned}$$

□

La siguiente caracterización de las funciones continuas es consecuencia inmediata del Teorema.

Corolario. *Sean $a \in \mathbb{R}$ adherente a A y $f : A \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces f es continua en a si y sólo si $\lim_a f|A = f(a)$.* □

Como es de esperar, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4. *Sean $a \in \mathbb{R}$ adherente a $A \subset \mathbb{R}$ y $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $\lim_a f$ y $lims_a g$ existen. Entonces* *i.* $lím_a(f+g)$ *existe y*

$$lím_a(f+g) = lím_a f + lím_a g$$

ii. $lím_a(f\cdot g)$ *existe y*

$$lím_a(f\cdot g) = (lím_a f)(lím_a g)$$

iii. Si además $g(x)\neq 0$ *para todo* $x\in A$ *y* $lím_a g\neq 0$ *, entonces* $lím_a(f/g)$ *existe y*

$$lím_a \frac{f}{g} = \frac{lím_a f}{lím_a g}$$

Demostración. Sean $b = \lim_a f$ y $c = \lim_a g$ y denotemos por $\star$ a cualquiera de las operaciones $+,\cdot,/$. Entonces como, por hipótesis, las funciones f_b, g_c son continuas en a , por 2.1 Teorema 3 en p.214, $(f\star g)_{b\star g}$ es continua en a y, como

$$(f\star g)_{b\star g} = (f_b)\star(g_b)$$

concluimos que $\lim_a(f\star g) = b\star c$. □

El siguiente resultado es consecuencia de una propiedad análoga de las funciones continuas.

Teorema 5. *Sean* $\mathbf{I}_1 = \langle a, b[$, $\mathbf{I}_2 =]\,]b, c\rangle$ *y, para* $i = 1, 2$ *, sean* $f_i : \mathbf{I}^i \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones tales que* $lím_b f_1 = lím_b f_2$ *. Entonces* $lím_b(f_1\cup f_2)$ *existe y, para* $i = 1, 2$ *,*

$$lím_b(f_1\cup f_2) = lím_b f_i$$

.

Demostración. Nótese que, como $I_1\cap I_2$, la función $f_1\cup f_2 : \mathbf{I}_1\cup\mathbf{I}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida y que b es adherente a $\mathbf{I}_1\cup\mathbf{I}_2$. Además si $d = \lim_b f_i$, como se tiene que

$$(f_1\cup f_2)_d = (f_1)_d\cup(f_2)_d$$

por 2.1 Teorema 7 en p.219, concluimos que $(f_1\cup f_2)_d = (f_1)_d$; es continua en d . □

El siguiente resultado será muy útil para simplificar algunas expresiones.

Teorema 6. *Sean* a *adherente a* A *y* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *. Entonces* 0 *es adherente al conjunto*

$$B = \{h\in\mathbb{R} \mid a + h\in A\}$$

y si $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ *es la función tal que* $g(h) = a + h$ *para todo* $h\in B$ *, se tiene que* $lím_a f$ *existe si y sólo si* $lím_a f$ *existe. Además, se tiene que*

$$lím_a f = lím_a f$$

En forma más resumida, se cumple que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$$

Demostración. Es fácil comprobar [ejercicio] que 0 es adherente a B, que $(f \circ g)_b = f_b \circ g$ y que g es continua. $\square$

Ejemplo 5. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $a \in A$ adherente a $A \setminus \{a\}$. Entonces si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, se acostumbra usar la notación $\lim_a f = b$ como sinónimo de $\lim_a f|(A \setminus \{a\})$. Entonces usando esta notación, $\lim_a f = f(a)$ si y sólo si f es continua en a. $\diamond$

Ejemplo 6. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que A es un conjunto y $a \in \mathbb{R}$. Entonces se dice que $b \in \mathbb{R}$ es el **límite por la derecha de** f **en** a ssi para toda sucesión $\mathbf{a} = (a_n)$ en A tal que $a_n > a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\lim f \circ \mathbf{a} = b$ y se usa la notación

$\lim \bar{a} = a$

$$b = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

El **límite por la izquierda de** f **en** a y $b \in \mathbb{R}$ se define en forma análoga considerando las sucesiones (a_n) tales que $a_n < a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y se usa la notación

$$b = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Nótese que el Teorema 4 dice que $\lim_a f = b$ existe si y sólo si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

Por la manera en que hemos definido el límite, no es necesario distinguir entre límites por la derecha y por la izquierda. $\diamond$

Ejercicios. 1. Sea $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Demuestre que 0 no es adherente a A y que si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función y b, b' son límites de f en 0, entonces $b = b'$.

Demuestre que si $\mathbf{a}$ es la sucesión tal que $a_n = f(1/n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim \mathbf{a} = b$ si y sólo si $\lim_0 f = b$.

2. Sean a adherente a A y $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Si existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$ tal que $|x - a| < \varepsilon$, demuestre que $\lim_a f$ existe si y sólo si $\lim_a g$ existe y que estos límites son iguales.

3. Determine cuales de los siguientes límites existen y encuentre su valor cuando existen [*justifique sus afirmaciones*]:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 2x^2 + 5x + 3}{x^2 + 2} \qquad \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{(x)} + x^2}{x + 5} \qquad \lim_{x \to 4} \frac{x - \sqrt{5}}{x^2 - 5}$$

$$\lim_{u \to 1} \frac{xu^2 + 5x}{x + u} \qquad \lim_{x \to 3} \frac{2x}{x^2 - 6x + 9} \qquad \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha^2 - uv\alpha^3}{5\alpha}$$

$$\lim_{x \to -1} \sqrt{x^2 - 1} \qquad \lim_{x \to 4} \frac{x^2 + 2\sqrt{x}}{|x|} \qquad \lim_{\alpha \to 0} x\alpha^{\frac{3}{2}}$$

4. Sean $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$ tales que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ y a adherente a A_1 y a A_2. Demuestre que a es adherente a $A_1 \cup A_2$.

Si además $f_i : A_i \longrightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones tales que $\text{lím}_a f = \text{lím}_a g$, demuestre que

$$\text{lím}_a (f_1 \cup f_2) = \text{lím}_a f_1 = \text{lím}_a f_2$$

5. Sea f una función tal que $\text{lím}_{x \to 0} f(x)/x = b$. Demuestre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(bx)}{bx}$$

existe y encuentre su valor.

6. Sea f una función tal que 0 es adherente a $\operatorname{dom} f$. Demuestre que $\text{lím}_0 f$ existe si y sólo si se cumple la siguiente propiedad:

$$\text{lím}_0 g \ \text{ no existe} \quad \Rightarrow \quad \text{lím}_0 (f+g) \ \text{ no existe}$$

7. Si f es una función tal que 0 es adherente a $\operatorname{dom} f$, demuestre que

$$\text{lím}_0 f = \lim_{x \to 0} f(x^3)$$

[note que esto significa que si uno de los límites existe, entonces el otro también existe y que son iguales].

¿Qué sucede si reemplazamos 0 por 3 ?

8. Encuentre una función tal que $\text{lím}_0 f$ existe y que $\text{lím}_{x \to 0} f(x^2)$ no existe. ?

9. Demuestre que $a \in \mathbb{R}$ es adherente a $A \subset \mathbb{R}$ si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que se cumple una de las siguientes afirmaciones:

$$\{x \in A \mid |x-a| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-a| < \varepsilon\}$$
$$\{x \in A \mid |x-a| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x-a < \varepsilon\}$$
$$\{x \in A \mid |x-a| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < a-x < \varepsilon\}$$

2.4 Derivadas.

Ahora definiremos el concepto básico del Cálculo Diferencial. Sean $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ tal que a es adherente a $A \setminus \{a\}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces diremos que f es **diferenciable en** a ssi existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

que llamaremos la **derivada de** f **en** a y denotaremos por $f'(a)$. Además diremos que f es **diferenciable** ssi f es diferenciable en a para todo $a \in A$ y que la función $f' : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $a \in A$, $f'(a)$ es la derivada de f en a es la **función derivada** de f.

Para evitar repeticiones y casos especiales, salvo indicación expresa de lo contrario, sólo consideraremos funciones f tales que todo $a \in \operatorname{dom} f$ es adherente a $\operatorname{dom} f \setminus \{a\}$.

Si esto el lector encuentra que esto lo confunde, puede considerar que los dominios de las funciones son uniones [finitas] de intervalos.

Ejemplo 1. Por ejemplo, la función identidad I es diferenciable y $I'(a) = 1$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

En efecto, es claro que todo $a \in \mathbb{R}$ es adherente a $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ y

$$
\begin{aligned}
I'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{I(x) - I(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} \\
&= 1
\end{aligned}
\qquad \diamond
$$

El siguiente resultado es muy conveniente para demostrar propiedades de las derivadas usando las propiedades de las funciones continuas.

Teorema 1. *Sean* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función y* $a \in A$. *Entonces* $b \in \mathbb{R}$ *es la derivada de* f *en* a *si y sólo si existe una función* $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua en* a *tal que* $\varphi(a) = b$ *y*

$$f(x) = f(a) + \varphi(x)(x - a)$$

para todo $x \in A$.

Demostración. Nótese que en el enunciado hemos postulado implícitamente la hipótesis que a es adherente a $A \setminus \{a\}$.

[$\Rightarrow$] Supongamos que $f'(a) = b$. Sea $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ la función tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ b & \text{si } x = a \end{cases}$$

$b \in \mathbb{R}$

Por la definición de límite, esta función es continua en a y

$$\varphi(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Además, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\varphi(x)(x - a) &= \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) & \text{si } x \neq a \\ b(a - a) & \text{si } x = a \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(x) - f(a) & \text{si } x \neq a \\ f(a) - f(a) & \text{si } x = a \end{cases} \\
&= f(x) - f(a)
\end{aligned}
$$

[$\Leftarrow$] Supongamos la existencia de φ entonces, por la definición de límite, tenemos que

$$b = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \qquad \square$$

Este resultado permite demostrar que las funciones diferenciables son continuas.

Corolario. *Si* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *es diferenciable en* $a \in A$ *entonces* f *es continua en* a *.*

Demostración. Como φ es continua en a y

$$f(x) = f(a) + \varphi(x)(x - a)$$

para todo $x \in A$, concluimos que f es continua en a . $\square$

El siguiente resultado permite comprender mejor el significado de la derivada.

Teorema 2. *Sean* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función y* $a \in A$ *. Entonces* $b \in \mathbb{R}$ *es la derivada de* f *en* a *si y sólo si existe una función* $\psi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua en* a *tal que* $\psi(a) = 0$ *y*

$$f(x) = f(a) + b(x - a) + \psi(x)(x - a)$$

para todo $x \in A$ *.*

Demostración. [Recuerde que, implícitamente, hemos supuesto que a es adherente a $A \setminus \{a\}$.]
Para demostrarlo, basta definir $\psi(x) = \varphi(x) - b$ para todo $x \in A$. $\square$

Este resultado dice que, cuando x está cerca de a , podemos aproximar $f(x)$ por $f(a) + f'(a)(x - a)$ y el error es $\varphi(x)(x - a)$. Este error es "doblemente pequeño" ya que $\varphi(x)$ y $(x - a)$ son pequeños [como ψ es continua en a y $\psi(a) = 0$, $\psi(x)$ es pequeño].

Ejemplo 2. Desgraciadamente se acostumbra a usar la expresión " $f'(a)$ es la derivada de f " en lugar de la expresión más precisa " $f'(a)$ es la derivada de f en a " y " f' es la derivada de f " en lugar de " f' es la función derivada de f ". Sin embargo, estas imprecisiones en el lenguaje no deberían causar problemas. $\diamond$

Ejemplo 3. El siguiente ejemplo puede servir de ayuda para comprender mejor el sentido de la función φ del Teorema 2. Si $f = I^2$ como para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= x^2 - a^2 \\ &= (x + a)(x - a) \end{aligned}$$

es claro que la función $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = x + a$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es continua en a y $\varphi(a) = 2a$. Por lo tanto, $f'(a) = 2a$.

Se invita al lector a considerar el caso de la función I^3 y, más generalmente I^n para todo $n \in \mathbb{N}$. $\diamond$

Ejemplo 4. También es posible demostrar el Corolario del Teorema 1 usando las propiedades de los límites. En efecto, basta notar que, como

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a} (x - a) \\
&= f'(a) \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

concluimos que $\lim_a f = f(a)$.

Ejemplo 5. La experiencia indica que es conveniente destacar que no todas las funciones continuas son diferenciables. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua pero no es diferenciable en 0 . [En efecto, es fácil comprobar que

$$\lim_{x \to a^+} \frac{|x|}{x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

y usar 3.2 Teorema 4.]

Incluso, es posible encontrar funciones continuas que no son diferenciables en ningún elemento de su dominio. Sin embargo, esto es much más difícil. $\diamond$

El siguiente resultado sirve para encontrar las derivadas de muchas funciones. Las demostraciones son aplicaciones del Teorema 1.

Teorema 3. *Sean* $f, g : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones diferenciables en* a *. Entonces*

i. $f + g$ *es diferenciable en* a *y*

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

ii. $f \cdot g$ *es diferenciable en* a *y*

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

En particular, si $c \in \mathbf{R}$ *, entonces* cf *es diferenciable en* a *y*

$$(cf)'(a) = cf'(a)$$

iii. Si además $g(x) \neq 0$ *para todo* $x \in A$ *, la función* f/g *es diferenciable en* a *y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

En particular,

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$$

Demostración. Sean $\varphi, \psi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en a tales que

$$f(x) = f(a) + \varphi(x)(x-a) \qquad \text{y} \qquad g(x) = g(a) + \psi(x)(x-a)$$

para todo $x \in A$ y $\varphi(a) = f'(a)$ y $\psi(a) = g'(a)$.

i. Como para todo $x \in A$

$$\begin{aligned}(f+g)(x) - (f+g)(a) &= f(x) - f(a) + g(x) - g(a) \\ &= \varphi(x)(x-a) + \psi(x)(x-a)\end{aligned}$$

si definimos $\chi = \varphi + \psi$, para todo $x \in A$, se tiene que

$$(f+g)(x) = (f+g)(a) + \chi(x)(x-a)$$

y, como χ es continua en a , concluimos que $f+g$ es diferenciable en a y que

$$(f+g)'(a) = \chi(a) = \varphi(a) + \psi(a) = f'(a) + g'(a)$$

ii. Como para todo $x \in A$

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= [f(a) + \varphi(x)(x-a)][g(a) + \psi(x)(x-a)] \\ &= (f \cdot g)(a) + [f(a)\psi(x) + g(a)\varphi(x) + \varphi(x)\psi(x)(x-a)](x-a)\end{aligned}$$

si $\chi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función tal que, para todo $x \in A$,

$$\chi(x) = f(a)\psi(x) + g(a)\varphi(x) + \varphi(x)\psi(x)(x-a)$$

se cumple que, para todo $x \in A$

$$(f \cdot g)(x) = (f \cdot g)(a) + \chi(x)(x-a)$$

Por último, como

$$\chi = f(a)\psi + g(a)\varphi + \varphi(a)\psi(a)(I - aI^0)$$

es continua en a , concluimos que $f \cdot g$ es diferenciable en a y que

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(a) &= \chi(a) \\ &= f(a)\psi(a) + g(a)\varphi(a) + \varphi(a)\psi(a)(a-a) \\ &= f(a)g'(a) + g(a)f'(a)\end{aligned}$$

En particular, si $g(x) = c$ para todo $x \in A$, entonces $cf = g \cdot f$ y, como $g'(a) = 0$, concluimos que $(cf)'(a) = cf'(a)$.

iii. Primero veremos al caso en que $f(x) = 1$ para todo $x \in A$. Como para todo $x \in A$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{g}(x) &= \frac{1}{g(a)} + \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)} \\
&= \frac{1}{g(a)} + \frac{1}{g(a) + \psi(x)(x-a)} - \frac{1}{g(a)} \\
&= \frac{1}{g(a)} + \frac{g(a) - [g(a) + \psi(x)(x-a)]}{g(a)[g(a) + \psi(x)(x-a)]} \\
&= \frac{1}{g(a)} + \frac{-\psi(x)}{g(a)[g(a) + \psi(x)(x-a)]}(x-a) \\
&= \frac{1}{g(a)} + \frac{-\psi(x)}{g(a)g(x)}(x-a)
\end{aligned}
$$

si $\chi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función tal que, para todo $x \in A$

$$\chi(x) = \frac{-\psi(x)}{g(a)g(x)}$$

se cumple que

$$\frac{1}{g}(x) = \frac{1}{g}(a) + \chi(x)(x-a)$$

Por último, como

$$\chi = -\frac{\psi}{g(a)g}$$

es continua en a [recuerde que g es continua en a], concluimos que $1/g$ es diferenciable en a y que

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \chi(a) \\
&= \frac{-\psi(a)}{g(a)g(a)} \\
&= -\frac{g'(a)}{g^2(a)}
\end{aligned}
$$

Por último, como $f/g = f \cdot (1/g)$ usando ii, concluimos que f/g es diferenciable en a y que

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) \\
&= f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\left(-\frac{g'(a)}{g(a)^2}\right) \\
&= \frac{f'(a)g(a)\,\Gamma\, f(a)g'(a)}{g(a)^2}
\end{aligned}
$$

□

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del teorema.

Corolario. *Sean* $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones diferenciables. Entonces*

i. La función $f + g$ *es diferenciable y*

$$(f+g)' = f' + g'$$

ii. La función $f \cdot g$ *es diferenciable y*

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

En particular, si $c \in \mathbb{R}$ *entonces* cf *es diferenciable y*

$$(cf)' = cf'$$

iii. Si además $g'(x) \neq 0$ *para todo* x *entonces* $\frac{f}{g}$ *es diferenciable y*

$$\left(\frac{1}{g}\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

En particular, $1/g$ *es diferenciable y*

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

□

El siguiente resultado nos permite demostrar que las funciones racionales son diferenciables y calcular sus derivadas.

Teorema 4. *Para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *la función* I^n *es diferenciable y* $(I^n)' = nI^{n-1}$.

Demostración. Primero demostraremos el resultado para todo $n \in \mathbb{N}$. Como es de esperar, la demostración es por inducción en n .

Si $n = 1$, sabemos que $(I^1)' = I^0 = 1I^{1-1}$.

Si suponemos que $n \in \mathbb{N}$ es tal que I^n es diferenciable y que $(I^n)' = nI^{n-1}$, entonces $I^{n+1} = I^1 \cdot I^n$ es diferenciable y

$$\begin{aligned}
(I^{n+1})' &= (I^1 \cdot I^n)' \\
&= I^1 \cdot (I^n)' + (I^1)' \cdot I^n \\
&= I^1 \cdot nI^{n-1} + I^n \\
&= nI^n + I^n \\
&= (n+1)I^n \\
&= (n+1)I^{(n+1)-1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el resultado es válido para $n+1$. Por inducción, hemos demostrado el resultado para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como I^0 es diferenciable y $(I^0)' = 0 = 0I^{-1}$, el resultado es válido para $n = 0$.

Por último, si $n \in \mathbb{N}$ entonces, $I^{-n} = 1/I^n$ también es diferenciable y

$$\begin{aligned}
(I^{-n})' &= -\frac{1}{I^n} \\
&= -\frac{(I^n)'}{(I^n)^2} \\
&= -\frac{nI^{n-1}}{I^{2n}} \\
&= (-n)I^{-n-1}
\end{aligned}$$

Así hemos comprobado que la fórmula es válida para todo $m \in \mathbb{Z}$. $\square$

Nótese que, si nos ponemos rigurosos [lo cual es bueno], la fórmula $(I^0)' = 0I^{-1}$ no es verdadera ya que la función $(I^0)'$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y la función $0 \cdot I^{-1}$ tiene dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sin embargo, esto no es grave y nos permite dar una formulación más elegante.

El siguiente resultado es consecuencia casi inmediata del Teorema.

Corolario. *Las funciones racionales son diferenciables.* $\square$

El siguiente resultado dice que la composición de dos funciones diferenciables también es diferenciable.

Teorema 5 (Regla de la Cadena). *Sean* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones tales que* $f(A) \subset B$ *[de modo que la función* $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *está definida] y supongamos que* f *es diferenciable en* $a \in A$ *y que* g *es diferenciable en* $b = f(a) \in B$. *Entonces* $g \circ f$ *es diferenciable en* a *y*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Demostración. Sean $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\psi : B \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que φ es continua en a, ψ es continua en b y

$$f(x) = f(a) + \varphi(x)(x - a) \quad \forall\, x \in A \qquad \text{y} \qquad g(y) = g(b) + \psi(y)(y - b) \quad \forall\, y \in B$$

Entonces, como para todo $x \in A$

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= g(b) + \psi(f(x))(f(x) - b) \\
&= (g \circ f)(a) + \psi(f(x))(f(x) - f(a)) \\
&= (g \circ f)(a) + \psi(f(x))\varphi(x)(x - a)]
\end{aligned}$$

si $\chi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función tal que para todo $x \in A$

$$\chi(x) = \psi(f(x))\varphi(x)(x - a)$$

se cumple que, para todo $x \in A$

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) + \chi(x)(x - a)$$

Por último, como

$$\chi = (\psi \circ f) \cdot \varphi \cdot (I - aI^0)$$

es continua, concluimos que $g \circ f$ es continua en a y que

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(a) &= \chi(a) \\ &= \psi(f(a))\varphi(a) \\ &= g'(f(a))f'(a)\end{aligned}$$

□

Es conveniente destacar la siguiente consecuencia del Teorema.

Corolario. *Sean* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones diferenciables tales que* $f(A) \subset B$ *. Entonces* $g \circ f$ *es diferenciable y*

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$$

□

El siguiente resultado es consecuencia casi inmediata del los Teoremas 4 y 5.

Teorema 6. *Sean* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función diferenciable y* $n \in \mathbb{Z}$ *. Entonces* $f^n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *es diferenciable y* $(f^n)' = nf^{n-1} \cdot f'$ *.*

Demostración. Basta notar que, $f^n = I^n \circ f$ es diferenciable y que

$$\begin{aligned}(f^n)' &= (I^n \circ f)' \\ &= (nI^{n-1} \circ f) \cdot f' \\ &= nf^{n-1} \cdot f'\end{aligned}$$

□

Ejemplo 6. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función tal que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = (x^2 + 2x - 1)$$

Entonces f^n es la función tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f^n(x) = (x^2 + 2x - 1)^n$$

y, por lo tanto, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$(f^n)'(x) = n(x^2 + 2x - 1)^{n-1}(2x + 2)$$

◇

Como es de esperar, podemos construir funciones diferenciables por pedazos.

Teorema 7. *Para* $i = 1, 2$ *sean* $\mathbf{I}_i$ *intervalos y* $f_i : \mathbf{I}_i \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones diferenciables tales que*

$$f_1|(\mathbf{I}_1 \cap \mathbf{I}_2) = f_2|(\mathbf{I}_1 \cap \mathbf{I}_2) \qquad y \qquad f_1'|(\mathbf{I}_1 \cap \mathbf{I}_2) = f_2'|(\mathbf{I}_1 \cap \mathbf{I}_2)$$

Si adeás suponemos que estos intervalos no son de la forma

$$\mathbf{I}_1 = \langle a, b] \qquad y \qquad \mathbf{I}_2 =]a, b\rangle$$

ni de la forma

$$\mathbf{I}_1 = \langle a, b[\qquad y \qquad \mathbf{I}_2 = [a, b\rangle$$

entonces la función $f_1 \cup f_2 : \mathbf{I}_1 \cup \mathbf{I}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *también es diferenciable y para todo* $x \in \mathbf{I}_i$

$$(f_1 \cup f_2)'(x) = f_i'(x)$$

Demostración. Sea $x \in \mathbf{I}_1 \cup \mathbf{I}_2$. Para demostrar que $f_1 \cup f_2$ es diferenciable en x , sea $\varphi_i : \mathbf{I}_i \longrightarrow \mathbb{R}$ la función tal que para todo $u \in \mathbf{I}_i$

$$\varphi_i(u) = \begin{cases} \dfrac{f_i(u) - f_i(x)}{u - x} & \text{si } u \neq x \\ f_i'(x) & \text{si } u = x \end{cases}$$

[nótese que no afirmamos que $x \in \mathbf{I}_i$ pero que si esto es verdad también definimos $\varphi_i(x)$]. Como f_i es diferenciable [y, por lo tanto, continua] las funciones φ son continuas. Es muy sencillo comprobar que

$$\varphi_1 | (\mathbf{I}_1 \cap \mathbf{I}_2) = \varphi_2 | (\mathbf{I}_1 \cap \mathbf{I}_2)$$

Por 2.1 Teorema 9 en p.221, $(f_1 \cup f_2)$ es continua y para todo $u \in \mathbf{I}_1 \cup \mathbf{I}_2$

$$(f_1 \cup f_2)(u) = (f_1 \cup f_2)(u) + ((\varphi_1 \cup \varphi_2)(u)(u - x)$$

y, por lo tanto $f_1 \cup f_2$ es diferenciable en x y

$$\begin{aligned} (f_1 \cup f_2)'(x) &= (\varphi_1 \cup \varphi_2)(x) \\ &= f_i'(x) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 7. Sean $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Entonces, por el Teorema 7, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^m & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

es diferenciable y

$$f'(x) = \begin{cases} mx^{m-1} & \text{si } x \leqslant 0 \\ nx^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Nótese que cuando $m = 1$ ó $n = 1$ la función f no es diferenciable en ;0 y que no se cumplen las hipótesis del Teorema 7.

◇

Ejemplo 8. Sea $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = \sqrt{x}$ para todo $x > 0$. A pesar de que esto es consecuencia inmediata del Teorema de la Fumón Inversa [que veremos más adelante], comprobaremos que f es diferenciable y calcularemos su derivada.

Para ello notamos que, si $a > 0$, como

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \\
&= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})((\sqrt{x} - \sqrt{a})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}
\end{aligned}
$$

concluimos que

$$
f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}
$$

Otra manera de hacer esta demostración consiste en notar que, como para todo $x > 0$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x} - \sqrt{a} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}(x - a) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}(x - a)
\end{aligned}
$$

si φ es la función tal que $\varphi(x) = 1/(\sqrt{x} + \sqrt{a})$, para todo $x > 0$ se tiene que

$$
\sqrt{x} = \sqrt{a} + \varphi(x)(x - a)
$$

Por lo tanto, como φ es continua, f es diferenciable y

$$
f'(a) = \varphi(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}
$$

Nótese que si $g : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ es la función tal que $g(x) = \sqrt{x}$ para todo $x \geqslant 0$, entonces g es continua y no es diferenciable en 0 . Para comprobar esto, supongamos que existe

$$
g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}
$$

Entonces, tendríamos que

$$
\begin{aligned}
1 &= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\
&= \left(\lim_{x \to 0} \sqrt{x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\
&= 0g'(0) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

lo cual es falso. $\diamond$

Ejemplo 9. $\mathbf{I}$ un intervalo, a un elemento interior de A [es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset \mathbf{I}$] y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función. Si definimos

$$\mathbf{I}_{\pm} = \{x \in \mathbf{I} \mid \pm(x-a) \geqslant 0\} \qquad \text{y} \qquad f_{\pm} = f|\mathbf{I}_{\pm}$$

Nótese que esto es una manera compacta de decir que $\mathbf{I}_{+} = \{x \in \mathbf{I} \mid x \geqslant a\}$ y que $\mathbf{I}_{-} = \{x \in \mathbf{I} \mid x \leqslant a\}$. Por ejemplo, si $\mathbf{I} = [c, d]$, entonces $\mathbf{I}_{-} = [c, a]$ y $\mathbf{I}_{+} = [a, d]$.

Entonces se acostumbra decir que

$$f'_{\pm}(a) = \lim_{x \to a^{\pm}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

son la **derivada por la derecha** y la **derivada por la izquierda** de f en a . Con esta terminología, el Teorema 7 dice que si $f'_{-}(a) = f'_{+}(a)$, entonces f es diferenciable en a y $f'(a) = f'_{\pm}(a)$.

Nootros jamás usaremos esta terminología ya que sólo contribuye a complicar cosas que son muy sencillas. ◇

Ejercicios. 1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Demuestre que si f es par [impar] entonces f' es impar [par].

2. Sea f una función diferenciable. Demuestre que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Use la función $f(x) = |x|$ para comprobar que la afirmación inversa no es válida en general.

3. Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones, $\mathbf{I} \subset A$ un intervalo abierto y $a \in \mathbf{I}$, tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbf{I}$. Demuestre que f es diferenciable en a si y sólo si g es diferenciable en a . [¡Esto es fácil pero no es obvio!].

4. Calcule $f(f'(x))$ y $f'(f(x))$ para las funciones tales que, para todo x ,

i. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ii. $f(x) = x^3$ iii. $f(x) = 5$ iv. $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

5. Si g es una función diferenciable, calcule f' para las funciones f tales que para todo x ,

i. $f(x) = g(x^2 + g(x))$ ii. $f(x) = g(x)(x-a)^2$ iii. $f(x+3) = g(x^3)$.

6. Sea f una función diferenciable y periódica de período a [es decir, tal que $f(x+a) = f(x)$ para todo x]. ¿Es f' periódica?

Por último, como

$$\chi = (\psi \circ f) \cdot \varphi \cdot (I - aI^0)$$

es continua, concluimos que $g \circ f$ es continua en a y que

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(a) &= \chi(a)\\ &= \psi(f(a))\varphi(a)\\ &= g'(f(a))f'(a)\end{aligned}$$

□

Es conveniente destacar la siguiente consecuencia del Teorema.

Corolario. *Sean* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones diferenciables tales que* $f(A) \subset B$ *. Entonces* $g \circ f$ *es diferenciable y*

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$$

□

El siguiente resultado es consecuencia casi inmediata del los Teoremas 4 y 5.

Teorema 6. *Sean* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función diferenciable y* $n \in \mathbb{Z}$ *. Entonces* $f^n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *es diferenciable y* $(f^n)' = nf^{n-1} \cdot f'$ *.*

Demostración. Basta notar que, $f^n = I^n \circ f$ es diferenciable y que

$$\begin{aligned}(f^n)' &= (I^n \circ f)'\\ &= (nI^{n-1} \circ f) \cdot f'\\ &= nf^{n-1} \cdot f'\end{aligned}$$

□

Ejemplo 6. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función tal que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = (x^2 + 2x - 1)$$

Entonces f^n es la función tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f^n(x) = (x^2 + 2x - 1)^n$$

y, por lo tanto, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$(f^n)'(x) = n(x^2 + 2x - 1)^{n-1}(2x + 2)$$

◇

Como es de esperar, podemos construir funciones diferenciables por pedazos.

Teorema 7. *Para* $i = 1, 2$ *sean* I_i *intervalos y* $f_i : \mathrm{I}_i \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones diferenciables tales que*

$$f_1|(\mathrm{I}_1 \cap \mathrm{I}_2) = f_2|(\mathrm{I}_1 \cap \mathrm{I}_2) \qquad y \qquad f_1'|(\mathrm{I}_1 \cap \mathrm{I}_2) = f_2'|(\mathrm{I}_1 \cap \mathrm{I}_2)$$

Si adeás suponemos que estos intervalos no son de la forma

$$\mathbf{I}_1 = \langle a, b] \qquad y \qquad \mathbf{I}_2 =]a, b\rangle$$

ni de la forma

$$\mathbf{I}_1 = \langle a, b[\qquad y \qquad \mathbf{I}_2 = [a, b\rangle$$

entonces la función $f_1 \cup f_2 : \mathbf{I}_1 \cup \mathbf{I}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *también es diferenciable y para todo* $x \in \mathbf{I}_i$

$$(f_1 \cup f_2)'(x) = f_i'(x)$$

Demostración. Sea $x \in \mathbf{I}_1 \cup \mathbf{I}_2$. Para demostrar que $f_1 \cup f_2$ es diferenciable en x , sea $\varphi_i : \mathbf{I}_i \longrightarrow \mathbb{R}$ la función tal que para todo $u \in \mathbf{I}_i$

$$\varphi_i(u) = \begin{cases} \dfrac{f_i(u) - f_i(x)}{u - x} & \text{si } u \neq x \\ f_i'(x) & \text{si } u = x \end{cases}$$

[nótese que no afirmamos que $x \in \mathbf{I}_i$ pero que si esto es verdad también definimos $\varphi_i(x)$]. Como f_i es diferenciable [y, por lo tanto, continua] las funciones φ son continuas. Es muy seneillo comprobar que

$$\varphi_1|(\mathbf{I}_1 \cap \mathbf{I}_2) = \varphi_2|(\mathbf{I}_1 \cap \mathbf{I}_2)$$

Por 2.1 Teorema 9 en p.221, $(f_1 \cup f_2)$ es continua y para todo $u \in \mathbf{I}_1 \cup \mathbf{I}_2$

$$(f_1 \cup f_2)(u) = (f_1 \cup f_2)(u) + ((\varphi_1 \cup \varphi_2)(u)(u - x)$$

y, por lo tanto $f_1 \cup f_2$ es diferenciable en x y

$$\begin{aligned} (f_1 \cup f_2)'(x) &= (\varphi_1 \cup \varphi_2)(x) \\ &= f_i'(x) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 7. Sean $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Entonces, por el Teorema 7, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^m & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

es diferenciable y

$$f'(x) = \begin{cases} mx^{m-1} & \text{si } x \leqslant 0 \\ nx^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Nótese que cuando $m = 1$ ó $n = 1$ la función f no es diferenciable en ;0 y que no se cumplen las hipótesis del Teorema 7. ◇

Ejemplo 8. Sea $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = \sqrt{x}$ para todo $x > 0$. A pesar de que esto es consecuencia inmediata del Teorema de la Funión Inversa [que veremos más adelante], comprobaremos que f es diferenciable y calcularemos su derivada.

Para ello notamos que, si $a > 0$, como

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})((\sqrt{x} - \sqrt{a})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \end{aligned}$$

concluimos que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Otra manera de hacer esta demostración consiste en notar que, como para todo $x > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{a} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}(x - a) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}(x - a) \end{aligned}$$

si φ es la función tal que $\varphi(x) = 1/(\sqrt{x} + \sqrt{a})$, para todo $x > 0$ se tiene que

$$\sqrt{x} = \sqrt{a} + \varphi(x)(x - a)$$

Por lo tanto, como φ es continua, f es diferenciable y

$$f'(a) = \varphi(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Nótese que si $g : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ es la función tal que $g(x) = \sqrt{x}$ para todo $x \geqslant 0$, entonces g es continua y no es diferenciable en 0. Para comprobar esto, supongamos que existe

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Entonces, tendríamos que

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= \left(\lim_{x \to 0} \sqrt{x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= 0g'(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo cual es falso. $\diamond$

Ejemplo 9. $\mathbf{I}$ un intervalo, a un elemento interior de A [es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset \mathbf{I}$] y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función. Si definimos

$$\mathbf{I}_{\pm} = \{x \in \mathbf{I} \mid \pm(x-a) \geqslant 0\} \qquad \text{y} \qquad f_{\pm} = f|\mathbf{I}_{\pm}$$

Nótese que esto es una manera compacta de decir que $\mathbf{I}_{+} = \{x \in \mathbf{I} \mid x \geqslant a\}$ y que $\mathbf{I}_{-} = \{x \in \mathbf{I} \mid x \leqslant a\}$. Por ejemplo, si $\mathbf{I} = [c,d]$, entonces $\mathbf{I}_{-} = [c,a]$ y $\mathbf{I}_{+} = [a,d]$.

Entonces se acostumbra decir que

$$f'_{\pm}(a) = \lim_{x \longrightarrow a^{\pm}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

son la **derivada por la derecha** y la **derivada por la izquierda** de f en a . Con esta terminología, el Teorema 7 dice que si $f'_{-}(a) = f'_{+}(a)$, entonces f es diferenciable en a y $f'(a) = f'_{\pm}(a)$.

Nootros jamás usaremos esta terminología ya que sólo contribuye a complicar cosas que son muy sencillas. ◇

Ejercicios. 1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Demuestre que si f es par [impar] entonces f' es impar [par].

2. Sea f una función diferenciable. Demuestre que

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

Use la función $f(x) = |x|$ para comprobar que la afirmación inversa no es válida en general.

3. Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones, $\mathbf{I} \subset A$ un intervalo abierto y $a \in \mathbf{I}$, tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbf{I}$. Demuestre que f es diferenciable en a si y sólo si g es diferenciable en a . [¡Esto es fácil pero no es obvio!].

4. Calcule $f(f'(x))$ y $f'(f(x))$ para las funciones tales que, para todo x ,

i. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ii. $f(x) = x^3$ iii. $f(x) = 5$ iv. $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

5. Si g es una función diferenciable, calcule f' para las funciones f tales que para todo x ,

i. $f(x) = g(x^2 + g(x))$ ii. $f(x) = g(x)(x-a)^2$ iii. $f(x+3) = g(x^3)$ . ...

6. Sea f una función diferenciable y periódica de período a [es decir, tal que $f(x+a) = f(x)$ para todo x]. ¿Es f' periódica?

7. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

i. $\cos(\operatorname{sen}^2(x) - x^3)$

ii. $\cos^n(x^2)\operatorname{sen}(e^x)$

iii. $e^{\cos(x)+5x}$

iv. $\operatorname{sen}^2(x)\cos(x^2)\operatorname{sen}(x^2)$

v. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))))$

vi. $(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))(\operatorname{sen}(\cos(x))$

vii. $(\operatorname{sen}(x) + \cos^2(x))^6$

viii. $e^{e^{e^x}} e^{-x}$

ix. $\dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x + \cos(x)}}$

x. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^2}{\cos\left(\dfrac{e^x}{\operatorname{sen}(x)}\right)}\right)$

8. Encuentre una función continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que no sea diferenciable en $a_1, a_2, \cdots a_n \in \mathbb{R}$.

9. Sea $f :]-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Encuentre $c, d \in \mathbb{R}$ tales que la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leqslant a \\ cx + d & \text{si } x > a \end{cases}$$

sea diferenciable. Calcule su derivada.

10. Sea f la función tal que si $x = 2t + |t|$, entonces $f(x) = 5t^2 + 4t|t|$. Demuestre que f es diferenciable en 0 y calcule $f'(0)$.

11. Demuestre que no existen dos funciones diferenciables $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(0) = g(0) = 0$ y que $x = f(x)g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. [¡Recuerde que en esta sección se han estudiado las derivadas!]

2.5 Teorema del Valor Medio.

Empezaremos demostrando un resultado que, a pesar de no ser muy interesante, tiene consecuencias muy útiles.

Lema. *Sean* $\mathbf{I}$ *un intervalo abierto,* $a \in \mathbf{I}$ *y* $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función diferenciable en* a .

i. Si $f(x) \leqslant f(a)$ *para todo* $x \in \mathbf{I}$ *tal que* $x < a$ *, entonces* $f'(a) \geqslant 0$.

ii. Si $f(x) \geqslant f(a)$ *para todo* $x \in \mathbf{I}$ *tal que* $x < a$ *, entonces* $f'(a) \leqslant 0$.

iii. Si $f(x) \leqslant f(a)$ *para todo* $x \in \mathbf{I}$ *tal que* $x > a$ *, entonces* $f'(a) \leqslant 0$.

iv. Si $f(x) \geqslant f(a)$ *para todo* $x \in \mathbf{I}$ *tal que* $x > a$ *, entonces* $f'(a) \geqslant 0$.

Demostración. Sea $\varphi : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en a tal que, para todo $x \in \mathrm{I}$,

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)(x - a)$$

i. Sea $x < a$. Entonces, como $f(x) - f(a) \leqslant 0$ y $x - a < 0$, concluimos que

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$

Por lo tanto, si $\mathbf{a}$ es una sucesión en $\mathbf{I}$ tal que $\lim \mathbf{a} = a$ y $a_n < a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$f'(a) = \varphi(a) = \lim\left(\varphi(a_n)\right) \geqslant 0$$

Los otros resultados se demuestran de la misma manera. □

El primer resultado que podemos obtener del Lema es el siguiente.

Teorema 1. *Sean* I *un intervalo abierto,* $a \in \mathrm{I}$ *y* $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función diferenciable en* a *tal que*

$$f(x) \leqslant f(a) \quad \forall\, x \in \mathrm{I} \qquad ó \qquad f(x) \geqslant f(a) \quad \forall\, x \in \mathrm{I}$$

Entonces $f'(a) = 0$.

Demostración. Si $f(x) \leqslant f(a)$ para todo $x \in \mathrm{I}$, por el caso i del Lema, concluimos que $f'(a) \geqslant 0$ y, por el caso iii, concluimos que $f'(a) \leqslant 0$. Por lo tanto, $f'(a) = 0$.

Cuando $f(x) \geqslant f(a)$ para todo $x \in \mathrm{I}$, se usan los casos ii y iv del Lema. □

El siguiente resultado es un caso especial de un resultado del Teorema del Valor Medio.

Teorema 2. *Teorema de Rolle Sean* $a < b$ *y* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua que es diferenciable en* $]a, b[$. *Entonces existe* $c \in]a, b[$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Demostración. Como f es continua en $[a, b]$, por 2.2 Teorema 9 3n p.234, existen $c_\pm \in [a, b]$ tales que para todo $x \in [a, b]$

$$f(c_-) \leqslant f(x) \leqslant f(c_+)$$

Si $c_\pm \in \{a, b\}$, entonces, como para todo $x \in [a, b]$

$$0 = f(c_-) \leqslant f(x) \leqslant f(c_+) = 0$$

concluimos que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$ y, por lo tanto, que $f'(c) = 0$ para todo $c \in]a, b[$.

Si $c_+ \in]a, b[$, demostraremos que $f'(c_+) = 0$. Para ello notamos que, como $f(x) \leqslant f(c_+)$ para todo $x \in]a, b[$, por el Teorema 1, concluimos que $f'(c_+) = 0$.

Por último, si $c_- \in]a, b[$ [usando un razonamiento análogo al anterior] concluimos que $f'(c_-) = 0$. Como esto cubre todas las posibilidades, hemos concluido la demostración. □

Usaremos el Teorema de Rolle para demostrar el siguiente resultado que tiene consecuencias muy interesantes.

Teorema 3 (Teorema del Valor Medio). *Sean* $a < b$ *y* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua que es diferenciable en* $]a,b[$ *. Entonces existe* $c \in]a,b[$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Demostración. Sea $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función tal que

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

para todo $x \in [a,b]$. Entonces, como g es continua en $[a,b]$, diferenciable en $]a,b[$ y

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0$$
$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = 0$$

por el Teorema de Rolle concluimos que existe $c \in]a,b[$ tal que

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

lo cual es equivalente a $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. □

Usaremos el Teorema del Valor Medio para demostrar las siguientes importantes propiedades de las funciones diferenciables cuyo dominio es un intervalo.

Teorema 4. *Sean* $\mathbf{I}$ *un intervalo y* $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función diferenciable. Entonces,*

i. $f'(x) = 0$ *para todo* $x \in \mathbf{I}$ *si y sólo si existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = k$ *para todo* $x \in \mathbf{I}$.

ii. $f'(x) \geqslant 0$ *[* $f'(x) \leqslant 0$ *] para todo* $x \in \mathbf{I}$ *si y sólo si* f *es creciente [decreciente].*

iii. Si $f'(x) > 0$ *[* $f'(x) < 0$ *] para todo* $x \in \mathbf{I}$ *, la función* f *es estrictamente creciente [estrictamente decreciente].*

Demostración. i. Si $f(x) = k$ para todo $x \in \mathbf{I}$, entonces $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbf{I}$.

Inversamente, si $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbf{I}$, elijamos $a \in \mathbf{I}$ y sea $k = f(a)$. Entonces si $a > x \in \mathbf{I}$, por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in]x,a[$ tal que

$$f(a) - f(x) = f'(c)(a-x) = 0$$

y, por lo tanto, $f(x) = f(a) = k$ para todo $x \geqslant a$.

En forma análoga, comprobamos que $f(x) = k$ para todo $x \leqslant a$.

ii. Supongamos que $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbf{I}$ y sean $a, b \in \mathbf{I}$ tales que $a \leqslant b$. Entonces, por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in]a,b[$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \geqslant 0$$

[ya que $f'(c) \geqslant 0$ y $(b-a) \geqslant 0$].

La afirmación inversa ya fué demostrada en el Lema al comienzo de esta sección.

iii. Si $a < b$, entonces existe $c \in]a,b[$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) > 0$$

[ya que $f'(c) > 0$]. $\square$

También usaremos la siguiente versión generalizada del Teorema del Valor Medio.

Teorema 5 (Teorema Generalizado del Valor Medio). *Sean* $a < b$ *y* $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones continuas, que son diferenciables en* $]a,b[$. *Entonces existe* $c \in]a,b[$ *tal que*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

Demostración. Sea $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función tal que

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

para todo $x \in [a,b]$. Entonces, como

$$\begin{aligned} h(a) &= (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) \\ &= f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) \\ &= f(b)g(a) - g(b)f(a) \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} h(b) &= (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b) \\ &= f(b)g(a) - g(b)f(a) \end{aligned}$$

concluimos que $h(a) = h(b)$. Como además, h es continua, y diferenciable en $]a,b[$, por el Teorema del Valor Medio, concluimos que existe $c \in]a,b[$ tal que

$$0 = h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c)$$

$\square$

Usaremos el Teorema Generalizado del Valor Medio para demostrar un resultado que es muy útil para calcular ciertos límites de funciones.

Teorema 6. *Sean* $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones diferenciables y* $a \in A$ *tales que*

$$f(a) = g(a) = 0 \qquad y \qquad \text{lím}_a \frac{f'}{g'} = k$$

Entonces

$$\text{lím}_a \frac{f}{g} = k$$

Demostración. Sea $\mathbf{a}$ una sucesión en $A \setminus \{a\}$ tal que $\text{lím}\ \mathbf{a} = a$. Entonces, por el Teorema Generalizado del Valor Medio, para cada n existe c_n entre a y a_n ; es decir,tal que

$$a < c_n < a_n \qquad \text{ó} \qquad a_n < c_n < a$$

tal que

$$\frac{f(a_n)}{g(a_n)} = \frac{f(a_n) - f(a)}{g(a_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

Entonces, si $\mathbf{c} = (c_n)$, como

$$0 < |a - c_n| < |a - a_n|$$

por el Teorema del Sandwich, $\text{lím}\,(c_n) = a$ y, por lo tanto,

$$\text{lím}\ \frac{f(a_n)}{g(a_n)} = \text{lím}\ \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = k$$

Así hemos demostrado que

$$\text{lím}_a\ \frac{f}{g} = k$$

□

La siguiente consecuencia es muy conveniente.

Corolario (Regla de l'Hôpital). *Sean* $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones tales que* f', g' *existen y son continuas y* $a \in A$ *tal que*

$$f(a) = g(a) = 0 \qquad y \qquad g'(a) \neq 0$$

Entonces

$$\text{lím}_a\ \frac{f}{g} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Demostración. Basta notar que, como f' y g' son continuas,

$$\text{lím}_a\ \frac{f'}{g'} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

□

Ejemplo 10. Nótese que en el Lema es necesario suponer que $\mathbf{I}$ es un intervalo abierto. Un contraejemplo si esto no es v'alido es la función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$ para todo $x \in [0,1]$. Entonces $f(x) \leqslant f(1)$ para todo $x \in [0,1]$ y $f'(1) = 1 \neq 0$. ◇

Ejemplo 11. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = x^2$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces el Teorema del Valor Medio garantiza la existencia de $c \in]0,1[$ tal que $1 = f(1) - f(0) = f'(c) = 1$. Como $f'(c) = 2c$, concluimos que c tiene que ser $1/2$.

Sin embargo, si consideramos la función $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^3 - x$ para todo $x \in [-1,1]$, como $g'(x) = 3x^2 - 1$, se tiene que $f(1) - f(-1) = f'(c)(1-(-1))$ si y sólo si $c = \pm 1/\sqrt{3}$. ◇

3. Es muy importante notar que en los resultados de esta sección, el dominio de las funciones deben ser intervalos. En efecto, si $f : [0,1[\cup]2,3[\longrightarrow \mathbb{R}$ es la función tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in]2,3[\end{cases}$$

es claro que f no es constante a pesar de que $f'(x) = 0$ para todo x.

En forma análoga, si $g :]0,1[\cup]2,3[\longrightarrow \mathbb{R}$ es la función tal que

$$g(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x \in]0,1[\\ x & \text{si } x \in]2,3[\end{cases}$$

es claro que $g'(x) = 1 > 0$ y que g no es creciente.

También es importante notar que la afirmación inversa de la parte iii del Lema no es válida en general. En efecto, la función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es estrictamente creciente a pesar de que $f'(0) = 0$. ◇

Ejemplo 12. Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas que son diferenciables en $]a,b[$. Si $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$, demostraremos que existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = g'(c)$.

Para ello, sea $h = f - g$. Entonces, como $h(a) = h(b) = 0$, por el Teorema de Rolle, existe $c \in]a,b[$ tal que $0 = h'(c) = f'(c) - g'(c)$.

Este resultado dice que si dos automóviles parten de un lugar en el mismo instante y llegan a otro lugar en el mismo instante entonces, en algún momento tienen la misma velocidad. ◇

Ejercicios. 1. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que f' es continua. Demuestre que existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que

$$m \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$$

Interprete esto en el caso en que $f(x)$ es la posición de un móvil en el instante x.

2. Sean $\mathbf{I}$ un intervalo abierto y $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que para todo $x, y \in \mathbf{I}$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant (x - y)^2$$

7. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

i. $\cos(\operatorname{sen}^2(x) - x^3)$

ii. $\cos^n(x^2)\operatorname{sen}(e^x)$

iii. $e^{\cos(x)+5x}$

iv. $\operatorname{sen}^2(x)\cos(x^2)\operatorname{sen}(x^2)$

v. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))))$

vi. $(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))(\operatorname{sen}(\cos(x))$

vii. $(\operatorname{sen}(x) + \cos^2(x))^6$

viii. $e^{e^x} e^{-x}$

ix. $\dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x + \cos(x)}}$

x. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^2}{\cos\left(\dfrac{e^x}{\operatorname{sen}(x)}\right)}\right)$

8. Encuentre una función continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que no sea diferenciable en $a_1, a_2, \cdots a_n \in \mathbb{R}$.

9. Sea $f :]-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Encuentre $c, d \in \mathbb{R}$ tales que la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leqslant a \\ cx + d & \text{si } x > a \end{cases}$$

sea diferenciable. Calcule su derivada.

10. Sea f la función tal que si $x = 2t + |t|$, entonces $f(x) = 5t^2 + 4t|t|$. Demuestre que f es diferenciable en 0 y calcule $f'(0)$.

11. Demuestre que no existen dos funciones diferenciables $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(0) = g(0) = 0$ y que $x = f(x)g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. [¡Recuerde que en esta sección se han estudiado las derivadas!]

2.5 Teorema del Valor Medio.

Empezaremos demostrando un resultado que, a pesar de no ser muy interesante, tiene consecuencias muy útiles.

Lema. *Sean* $\mathbf{I}$ *un intervalo abierto,* $a \in \mathbf{I}$ *y* $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función diferenciable en* a *.*

i. Si $f(x) \leqslant f(a)$ *para todo* $x \in \mathbf{I}$ *tal que* $x < a$ *, entonces* $f'(a) \geqslant 0$ *.*

ii. Si $f(x) \geqslant f(a)$ *para todo* $x \in \mathbf{I}$ *tal que* $x < a$ *, entonces* $f'(a) \leqslant 0$ *.*

iii. Si $f(x) \leqslant f(a)$ *para todo* $x \in \mathbf{I}$ *tal que* $x > a$ *, entonces* $f'(a) \leqslant 0$ *.*

iv. Si $f(x) \geqslant f(a)$ *para todo* $x \in \mathbf{I}$ *tal que* $x > a$ *, entonces* $f'(a) \geqslant 0$ *.*

Demostración. Sea $\varphi : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en a tal que, para todo $x \in \mathbf{I}$,

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)(x-a)$$

i. Sea $x < a$. Entonces, como $f(x) - f(a) \leqslant 0$ y $x - a < 0$, concluimos que

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$$

Por lo tanto, si $\mathbf{a}$ es una sucesión en $\mathbf{I}$ tal que $\lim \mathbf{a} = a$ y $a_n < a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$f'(a) = \varphi(a) = \lim\left(\varphi(a_n)\right) \geqslant 0$$

Los otros resultados se demuestran de la misma manera. □

El primer resultado que podemos obtener del Lema es el siguiente.

Teorema 1. *Sean* $\mathbf{I}$ *un intervalo abierto,* $a \in \mathbf{I}$ *y* $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función diferenciable en* a *tal que*

$$f(x) \leqslant f(a) \quad \forall\, x \in \mathbf{I} \qquad \text{ó} \qquad f(x) \geqslant f(a) \quad \forall\, x \in \mathbf{I}$$

Entonces $f'(a) = 0$.

Demostración. Si $f(x) \leqslant f(a)$ para todo $x \in \mathbf{I}$, por el caso i del Lema, concluimos que $f'(a) \geqslant 0$ y, por el caso iii, concluimos que $f'(a) \leqslant 0$. Por lo tanto, $f'(a) = 0$.

Cuando $f(x) \geqslant f(a)$ para todo $x \in \mathbf{I}$, se usan los casos ii y iv del Lema. □

El siguiente resultado es un caso especial de un resultado del Teorema del Valor Medio.

$f(a) = f(b)$

Teorema 2. *(Teorema de Rolle) Sean* $a < b$ *y* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua que es diferenciable en* $]a,b[$ *. Entonces existe* $c \in\,]a,b[$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Demostración. Como f es continua en $[a,b]$, por 2.2 Teorema 9 3n p.234, existen $c_{\pm} \in [a,b]$ tales que para todo $x \in [a,b]$

$$f(c_-) \leqslant f(x) \leqslant f(c_+)$$

Si $c_{\pm} \in \{a,b\}$, entonces, como para todo $x \in [a,b]$

$$0 = f(c_-) \leqslant f(x) \leqslant f(c_+) = 0$$

concluimos que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$ y, por lo tanto, que $f'(c) = 0$ para todo $c \in\,]a,b[$.

Si $c_+ \in\,]a,b[$, demostraremos que $f'(c_+) = 0$. Para ello notamos que, como $f(x) \leqslant f(c_+)$ para todo $x \in\,]a,b[$, por el Teorema 1, concluimos que $f'(c_+) = 0$.

Por último, si $c_- \in\,]a,b[$ [usando un razonamiento análogo al anterior] concluimos que $f'(c_-) = 0$. Como esto cubre todas las posibilidades, hemos concluido la demostración. □

Usaremos el Teorema de Rolle para demostrar el siguiente resultado que tiene consecuencias muy interesantes.

Teorema 3 (Teorema del Valor Medio). *Sean* $a < b$ *y* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua que es diferenciable en* $]a,b[$ *. Entonces existe* $c \in]a,b[$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Demostración. Sea $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función tal que

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

para todo $x \in [a,b]$. Entonces, como g es continua en $[a,b]$, diferenciable en $]a,b[$ y

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0$$
$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = 0$$

por el Teorema de Rolle concluimos que existe $c \in]a,b[$ tal que

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

lo cual es equivalente a $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. □

Usaremos el Teorema del Valor Medio para demostrar las siguientes importantes propiedades de las funciones diferenciables cuyo dominio es un intervalo.

Teorema 4. *Sean* $\mathbf{I}$ *un intervalo y* $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función diferenciable. Entonces,*

i. $f'(x) = 0$ *para todo* $x \in \mathbf{I}$ *si y sólo si existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = k$ *para todo* $x \in \mathbf{I}$.

ii. $f'(x) \geqslant 0$ *[* $f'(x) \leqslant 0$ *] para todo* $x \in \mathbf{I}$ *si y sólo si* f *es creciente [decreciente].*

iii. Si $f'(x) > 0$ *[* $f'(x) < 0$ *] para todo* $x \in \mathbf{I}$ *, la función* f *es estrictamente creciente [estrictamente decreciente].*

Demostración. i. Si $f(x) = k$ para todo $x \in \mathbf{I}$, entonces $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbf{I}$.

Inversamente, si $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbf{I}$, elijamos $a \in \mathbf{I}$ y sea $k = f(a)$. Entonces si $a > x \in \mathbf{I}$, por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in]x,a[$ tal que

$$f(a) - f(x) = f'(c)(a-x) = 0$$

y, por lo tanto, $f(x) = f(a) = k$ para todo $x \geqslant a$.

En forma análoga, comprobamos que $f(x) = k$ para todo $x \leqslant a$.

ii. Supongamos que $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbf{I}$ y sean $a, b \in \mathbf{I}$ tales que $a \leqslant b$. Entonces, por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in]a,b[$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \geqslant 0$$

[ya que $f'(c) \geqslant 0$ y $(b-a) \geqslant 0$].

La afirmación inversa ya fué demostrada en el Lema al comienzo de esta sección.

iii. Si $a < b$, entonces existe $c \in \,]a,b[$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) > 0$$

[ya que $f'(c) > 0$]. $\square$

También usaremos la siguiente versión generalizada del Teorema del Valor Medio.

Teorema 5 (Teorema Generalizado del Valor Medio). *Sean* $a < b$ *y* $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones continuas, que son diferenciables en* $]a,b[$ *. Entonces existe* $c \in \,]a,b[$ *tal que*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

Demostración. Sea $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función tal que

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

para todo $x \in [a,b]$. Entonces, como

$$\begin{aligned} h(a) &= (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) \\ &= f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) \\ &= f(b)g(a) - g(b)f(a) \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} h(b) &= (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b) \\ &= f(b)g(a) - g(b)f(a) \end{aligned}$$

concluimos que $h(a) = h(b)$. Como además, h es continua, y diferenciable en $]a,b[$, por el Teorema del Valor Medio, concluimos que existe $c \in \,]a,b[$ tal que

$$0 = h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c)$$

$\square$

Usaremos el Teorema Generalizado del Valor Medio para demostrar un resultado que es muy útil para calcular ciertos límites de funciones.

Teorema 6. *Sean* $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones diferenciables y* $a \in A$ *tales que*

$$f(a) = g(a) = 0 \qquad y \qquad \text{lím}_a \frac{f'}{g'} = k$$

Entonces

$$\text{lím}_a \frac{f}{g} = k$$

Demostración. Sea $\mathbf{a}$ una sucesión en $A \setminus \{a\}$ tal que $\lim \mathbf{a} = a$. Entonces, por el Teorema Generalizado del Valor Medio, para cada n existe c_n entre a y a_n ; es decir,tal que

$$a < c_n < a_n \qquad \text{ó} \qquad a_n < c_n < a$$

tal que

$$\frac{f(a_n)}{g(a_n)} = \frac{f(a_n) - f(a)}{g(a_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

Entonces, si $\mathbf{c} = (c_n)$, como

$$0 < |a - c_n| < |a - a_n|$$

por el Teorema del Sandwich, $\lim (c_n) = a$ y, por lo tanto,

$$\lim \frac{f(a_n)}{g(a_n)} = \lim \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = k$$

Así hemos demostrado que

$$\lim{}_a \frac{f}{g} = k \qquad \square$$

La siguiente consecuencia es muy conveniente.

Corolario (Regla de l'Hôpital). *Sean* $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones tales que* f', g' *existen y son continuas y* $a \in A$ *tal que*

$$f(a) = g(a) = 0 \qquad y \qquad g'(a) \neq 0$$

Entonces

$$\lim{}_a \frac{f}{g} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Demostración. Basta notar que, como f' y g' son continuas,

$$\lim{}_a \frac{f'}{g'} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \qquad \square$$

Ejemplo 10. Nótese que en el Lema es necesario suponer que $\mathbf{I}$ es un intervalo abierto. Un contraejemplo si esto no es v'alido es la función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$ para todo $x \in [0,1]$. Entonces $f(x) \leqslant f(1)$ para todo $x \in [0,1]$ y $f'(1) = 1 \neq 0$. ◇

Ejemplo 11. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = x^2$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces el Teorema del Valor Medio garantiza la existencia de $c \in \,]0,1[$ tal que $1 = f(1) - f(0) = f'(c) = 1$. Como $f'(c) = 2c$, concluimos que c tiene que ser $1/2$.

Sin embargo, si consideramos la función $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^3 - x$ para todo $x \in [-1.1]$, como $g'(x) = 3x^2 - 1$, se tiene que $f(1) - f(-1) = f'(c)(1 - (-1))$ si y sólo si $c = \pm 1/\sqrt{3}$. ◇

Ejemplo 12. Es muy importante notar que en los resultados de esta sección, el dominio de las funciones deben ser intervalos. En efecto, si $f : [0,1[\cup]2,3[\longrightarrow \mathbb{R}$ es la función tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in]2,3[\end{cases}$$

es claro que f no es constante a pesar de que $f'(x) = 0$ para todo x . ◇

En forma análoga, si $g :]0,1[\cup]2,3[\longrightarrow \mathbb{R}$ es la función tal que

$$g(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si } x \in]0,1[\\ x & \text{si } x \in]2,3[\end{cases}$$

es claro que $g'(x) = 1 > 0$ y que g no es creciente.

También es importante notar que la afirmación inversa de la parte iii del Lema no es válida en general. En efecto, la función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es estrictamente creciente a pesar de que $f'(0) = 0$. ◇

Ejemplo 13. Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas que son diferenciables en $]a,b[$. Si $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$, demostraremos que existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = g'(c)$.

Para ello, sea $h = f - g$. Entonces, como $h(a) = h(b) = 0$, por el Teorema de Rolle, existe $c \in]a,b[$ tal que $0 = h'(c) = f'(c) - g'(c)$.

Este resultado dice que si dos automóviles parten de un lugar en el mismo instante y llegan a otro lugar en el mismo instante entonces, en algún momento tienen la misma velocidad. ◇

Ejercicios. 1. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que f' es continua. Demuestre que existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que ?

$$m \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$$

Interprete esto en el caso en que $f(x)$ es la posición de un móvil en el instante x .

2. Sean $\mathbf{I}$ un intervalo abierto y $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que para todo $x, y \in \mathbf{I}$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant (x - y)^2$$

Demuestre que f es constante.

¿Es verdadero este resultado si $\mathbf{I}$ no es un intervalo abierto?

3. Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas, diferenciables en $]a,b[$ y que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in]a,b[$. Demuestre que existe $c \in]a,b[$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$g(b) \neq g(a)$

[¡Cuidado! Esto es un poco más complicado de lo que parece.]

4. Sea $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to b} f(x) = d$$

existen. Demuestre que existe $c \in]a,b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{d-c}{b-a}$$

5. Para cada $r \in \mathbb{R}$, sea $f_r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función tal que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$f_r(x) = x^3 - 3x + r$$

Demuestre que, para todo $r \in \mathbb{R}$ no existen dos raíces distinas de f_r en el intervalo $[0,1]$.

6. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $\operatorname{im} f \subset [0,1]$ y $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in [0,1]$. Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$, entonces $a = b$.

7. Demuestre [sin calcular $\sqrt{66}$] que

$$\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}$$

8. Use el Teorema de Rolle para demostrar que si $(x+y)^n = x^n + y^n$ y $y \neq 0$, entonces $x = 0$.

2.6 Teorema de la Función Inversa.

Sean $a \in A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en a que tiene una función inversa $f^{\leftarrow} : B \longrightarrow \mathbb{R}$ que es diferenciable en $b = f(a)$, entonces, como para todo $x \in A$,

$$f \circ f^{\leftarrow}(x) = x$$

por la Regla de la Cadena, se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &= (f \circ f^{\leftarrow})'(b) \\ &= f'(f^{\leftarrow}(b))(f^{\leftarrow})'(b) \end{aligned}$$

y, por lo tanto, concluimos que

$$f'(f^{\leftarrow}(b)) = f'(a) \neq 0 \qquad \text{y} \qquad (f^{\leftarrow})'(b) = 1/f'(f^{\leftarrow}(b))$$

El siguiente resultado dice que si $f^{\leftarrow}$ es continua, entonces es diferenciable.

Teorema 1. *Sean* $a \in A \subset \mathbb{R}$ *y* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función diferenciable en* a *. Supongamos que la función inversa* $f^{\leftarrow} : B \longrightarrow \mathbb{R}$ *existe y es continua. Entonces* $f^{\leftarrow}$ *es diferenciable en* $b = f(a)$ *y*

$$(f^{\leftarrow})'(b) = \frac{1}{f'(f^{\leftarrow}(b))}$$

Demostración. Sea $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ la función continua en a , tal que $\varphi(a) = f'(a)$ y

$$f(x) = f(a) + \varphi(x)(x - a)$$

para todo $x \in A$. Entonces si $y = f(x) \in B$ [y, por lo tanto, $x = f^{\leftarrow}(y)$] tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{f^{\leftarrow}(y) - f^{\leftarrow}(b)}{y - b} &= \frac{x - a}{f(x) - f(a)} \\ &= \frac{x - a}{\varphi(x)(x - a)} \\ &= \frac{1}{\varphi(x)} \\ &= \frac{1}{\varphi(f^{\leftarrow}(y)} \end{aligned}$$

para todo $b \neq y \in B$. Por lo tanto, como $\psi = 1/(\varphi \circ f^{\leftarrow})$, es una función continua en b que satisface que

$$f^{\leftarrow}(y) = f^{\leftarrow}(b) = \psi(y)(y - b)$$

para todo $y \in B$, concluimos que $f^{\leftarrow}$ es diferenciable en b y que

$$\begin{aligned} (f^{\leftarrow})'(b) &= \psi(b) \\ &= \frac{1}{f'(f^{\leftarrow}(b))} \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado demostrar la existencia y diferenciabilidad de muchas funciones.

Teorema 2 (Teorema de la Función Inversa). *Sean* $\mathbf{I}$ *un intervalo y* $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función diferenciable tal que* $f'(x) > 0$ *[ó* $f'(x) < 0$ *] para todo* $x \in \mathbf{I}$ *. Entonces* $f(\mathbf{I}) = \mathbf{J}$ *es un intervalo y la función inversa* $f^{\leftarrow} : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ *existe, es diferenciable y*

$$(f^{\leftarrow})' = \frac{1}{f' \circ f^{\leftarrow}}$$

Demostración. Supongamos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbf{I}$ [el caso en que $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbf{I}$ se demuestra en forma análoga o aplicando este caso a la función $-f$].

Por 2.5 Teorema 4 en p.257, f es estrictamente creciente, por 2.1 Teorema 7 en p.231, $\mathbf{J} = f(\mathbf{I})$ es un intervalo y por 2.1 Teorema 8 en p.232, $f^{\leftarrow} : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ existe y es continua. Entonces, por el Teorema 1, $f^{\leftarrow}$ es diferenciable y la fórmula para su derivada es válida. □

Por último, variación importante del Teorema de la Función Inversa.

Corolario. *Sean A un conjunto tal que todo $x \in A$ es adherente a $A \setminus \{x\}$, $a \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f' : A \longrightarrow \mathbb{R}$ existe, es continua y $f'(a) \neq 0$. Entonces existe un intervalo abierto $\mathbf{I}$ tal que $a \in \mathbf{I}$ y una función inversa diferenciable $f^{\leftarrow} : \mathbf{J} = f(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathbb{R}$ de $f|\mathbf{I}$.*

Demostración. Como f' es continua y $f'(a) \neq 0$, existe un intervalo abierto $\mathbf{I}$ tal que $a \in \mathbf{I}$ y $f'(x) \neq 0$ para todo $y \in \mathbf{I}$. Por lo tanto, usando el Teorema hemos terminado. □

Ejemplo 1. Recordemos que $i :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ es la función tal que $i(x) = x$ para todo $x \in]0,\infty[$. En el 2.2 Ejemplo 8 en p. 233 vimos como definir la función i^r para todo $r \in \mathbb{Q}$.

En particular, como $i^{\frac{1}{n}} = (i^n)^{\leftarrow}$, por el Teorema de la Función Inversa, esta función es diferenciable y

$$\begin{aligned}
(i^{\frac{1}{n}})' &= \frac{1}{(i^n)' \circ i^{\frac{1}{n}}} \\
&= \frac{1}{n i^{n-1} \circ i^{\frac{1}{n}}} \\
&= \frac{1}{n} \frac{1}{i^{(n-1)\frac{1}{n}}} \\
&= \frac{1}{n} i^{\frac{n}{n-1}} \\
&= \frac{1}{n} i^{\frac{1}{n}-1}
\end{aligned}$$

Además, usando la Regla de la Cadena, se tiene que si $r = m/n \in \mathbb{Q}$, entonces

$$\begin{aligned}
(i^r)' &= (i^m \circ i^{\frac{1}{n}})' \\
&= ((i^m)' \circ i^{\frac{1}{n}}) \cdot (i^{\frac{1}{n}})' \\
&= (m i^{m-1} \circ i^{\frac{1}{n}}) \cdot \left(\frac{1}{n} i^{\frac{1}{n}-1}\right) \\
&= \frac{m}{n} i^{\frac{m-1}{n}} \cdot i^{\frac{1-n}{n}} \\
&= \frac{m}{n} i^{\frac{m-1}{n} + \frac{1-n}{n}} \\
&= \frac{m}{n} i^{\frac{m}{n}-1} \\
&= r i^{r-1}
\end{aligned}$$

◇

Ejemplo 2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = x^2 - x + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces, como $f'(x) = 2x - 1$, tenemos que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \neq 1/2$. Por lo tanto, $f_1 = f|]-\infty, 1/2[$ y $f_2 = f|]1/2,\infty[$ tienen funciones inversas diferenciables. Para encontrar sus dominios, notamos que

$$\operatorname{im} f_1 = f_*(\,]-\infty, 1/2[\,) =]3/4,\infty[\qquad \text{y} \qquad \operatorname{im} f_2 = f_*(\,]1/2,\infty[\,) =]3/4,\infty[$$

Despejando x en función de y en la ecuación

$$x^2 - x + 1 = y$$

comprobamos que

$$f_1^{\leftarrow}(y) = \frac{1 - \sqrt{4y-3}}{2} \qquad \text{y} \qquad f_2^{\leftarrow}(y) = \frac{1 + \sqrt{4y-3}}{2}$$

Se recomienda calcular $(f_1^{\leftarrow})'(0)$ y $(f_2^{\leftarrow})'(5)$ usando estas fórmulas y usando el Teorema de la Función Inversa. Si se obtienen resultados diferentes, alquien cometió un error. $\diamond$

Ejercicios. 1. Encuentre todas las funciones diferenciables $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \operatorname{sen}(x)$$

2. Sean $\mathbf{I}$ un intervalo abierto, $a \in \mathbf{I}$ y $f, g : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables tales que $f(a) = g(a)$ y $f'(x) > g'(x)$ para todo $x \in \mathbf{I}$. Demuestre que $f(x) > g(x)$ para todo $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para todo $x < a$.

¿Es verdadero este resultado si $\mathbf{I}$ no es un intervalo abierto o si no se cumple que $f(a) = g(a)$?

3. Sean $\mathbf{I}$ un intervalo y $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable que tiene una función inversa diferenciable $f^{\leftarrow} : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbb{R}$. Demuestre que f es estrictamente creciente [estrictamente decreciente] si y sólo si $f^{\leftarrow}$ es estrictamente creciente [estrictamente decreciente].

4. Si f, g son funciones [estrictamente] crecientes, ¿qué se puede afirmar sobre las funciones $f+g$, $f \cdot g$ y $g \circ f$?

5. Sea f una función y $g = 1 + f$. Si $f^{\leftarrow}$ existe, calcule $g^{\leftarrow}$.

6. Encuentre los intervalos en los cuales la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$$

es inyectiva.

7. Sea f una función diferenciable tal que $(f(x))^5 + f(x) + x = 0$ para todo x . Demuestre que $f^{\leftarrow}$ existe y encuentre una expresión explícita para calcular $(f^{\leftarrow})'$. Compruebe que se obtiene el mismo resultado derivando la ecuación que define a f .

8. Sea f una función diferenciable inyectiva tal que $f(x) \neq 0$ para todo x . Si F es una función tal que $f = F'$, demuestre que la función

$$g(x) = x f^{\leftarrow}(x) - F \circ f^{\leftarrow}(x)$$

está bien definida y que $g' = f^{\leftarrow}$.

Taylor en Dimensión 1

<u>Lema de Hadamard</u>. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ C^∞, ~~[illegible]~~ U intervalo abierto, $0 \in U$

Si $f(0) = 0$, existe $g : U \to \mathbb{R}$ C^∞ tal que $f(x) = g(x)x$ y $g(0) = f'(0)$

<u>Dem</u>. Sea $\varphi(t) = tx$ (definida en un intervalo tal que $tx \in U$ $t \in [0,1]$

Entonces $$f(x) = f(x) - f(0) = f \circ \varphi(1) - f \circ \varphi(0)$$
$$= \int_0^1 (f \circ \varphi)'$$

Como
$$(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t) = f'(xt) \cdot x$$
$$f(x) = x \int_0^1 f' \circ \varphi$$

y si $g(x) = \int_0^1 f' \circ \varphi$, tenemos que $f(x) = g(x)x$. Cuando $x = 0$, $\varphi(t) = 0$
$$y \quad g(0) = \int_0^1 f'(0) = f'(0).$$

—

Nota. g es única. Si $f(x) = g(x)x = h(x)x$, entonces $g = h$ en $U \setminus \{0\}$ y por continuidad $g(0) = h(0)$.

Extendemos el siguiente

<u>Teo</u>. Si $0 = f^{(0)}(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ existe g_n tal que
$$f(x) = g_n(x)x^n \quad y \quad g_n(0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

<u>Dem</u> Para $n=1$ es Hadamard -

T2

Supongamos válido para n y demostremos para $n+1$

Si $f^{(0)}(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$

Por Hadamard existe h tal que $f(x) = h(x)x$ y $h(0) = f'(0) = 0$

Para calcular $h^{(i)}(0)$ usamos la propiedad

$$f^{(i)}(x) = h^{(i)}(x)x + i\,h^{(i-1)}(x)$$

que se demuestra por inducción ya que

$$f^{(i+1)}(x) = h^{(i+1)}(x)x + h^{(i)}(x) + i\,h^{(i)}(x)$$
$$= h^{(i+1)}(x)x + (i+1)\,h^{(i)}(x).$$

Como, por la hipótesis de inducción $f(0) = \dots = f^{(n)}(0)$, tenemos que si $i < n$

$$h^{(i)}(0) = \frac{1}{i+1} f^{(i+1)}(0) = 0$$

y

$$h^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(0)$$

Entonces por la hipótesis de inducción, aplicada a h,

$$h(x) = k_n(x)x^n \quad \text{y} \quad k_n(0) = \frac{1}{n!} h^{(n)}(0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x)$$

y

$$f(x) = h(x)x = k_n(x)x^n x$$
$$= g_{n+1}(x)\,x^{n+1}$$

Ahora, veamos como aplicar el desarrollo de Taylor

$$T^n f(0)(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(0) \cdot x^i.$$

Teo de Taylor $\quad f(x) = T^n f(0)(x) + R_n(x)\, x^{n+1}$

donde R_n es continua y $R_n(0)=0$

Dem Sea $\quad g(x) = f(x) - T^n f(0)(x)$

~~entonces~~ se comprueba fácilmente que

$$g^{(i)}(0) = 0 \qquad 0 \le i \le n$$

y por el Teo anterior, existe h tq

$$g(x) = h(x)\, x^{n+1} \qquad y \qquad h^{(n+1)}(0) = \frac{1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(0)$$

y, como $\quad g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(0)$, $\; g = R_n$ da el resultado

Si $t_\pm$ son tales que $\quad f(t_-) \le f(t) \le f(t_+)$ para todo $t \in [0,1]$

entonces $\quad f(t_-) \le \int_0^1 f \le f(t_+) \qquad \forall t$

Sup $t_- < t_+$ entonces existe t_0 tq $\int_0^1 f = f(t_0)$

Esto sirve para expresar las fórmulas de Hadamard sin usar integrales

T4

Importante notar que no son las derivadas lo que es importante sino que el polinomio de Taylor. El problema es aproximar f por un polinomio es decir, encontrar un polinomio P_n ~~de~~ de grado n t.q.

$$\lim_{a} \frac{f(x) - P_{n,f}(x-a)}{(x-a)^{n+1}} = 0$$

Este polinomio (si existe) es único y

$$P_n(t) = f(a) + f'(a)t + \frac{1}{2!} f''(a) t^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) t^n$$

No incurrir en el error de decir que

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} f^{(i)} t^i \qquad !$$

Derivadas de Orden Superior

Def. Si $f: U \to \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ abierto) $Df: U \to (\mathbb{R}^n)^*$ y es natural que $D^2 f = D(Df)$.

Con la interpretación obvia, tenemos que

$$Df: U \to \mathbb{R}^n : a \mapsto (D_1 f(a), \dots, D_n f(a))$$

$D_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ pero preferimos no usar esa notación.

También podemos identificar $Df(a) = \nabla f(a)$ y entonces $D^2 f(a)$ se puede pensar como la fn lineal con matriz

$$\left(D_i D_j f(a)\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)$$

Sin embargo, siguiendo de esta manera $D^3 f(a)$ se transforma en algo horrible (esto ha sido llamado "orgía de índices").

Por lo tanto, es conveniente usar un método invariante.

En primer lugar, veamos $f: U \to V$ donde $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y V es un espacio vectorial de dimensión n. Si $(e_1, \dots, e_n)$ es una base de V, entonces tenemos las proyecciones $\pi_i : V \to \mathbb{R} : v = \sum v^j e_j \mapsto v_i$ y entonces si W es un espacio vectorial, $L: W \to V$ es lineal si y sólo si $\pi_i \circ L$ es lineal para todo i

Si ~~...~~ $f: U \to \mathbb{R}^k$, entonces $Df: U \to V = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ ~~...~~

donde V es un espacio vectorial de dimensión nk.

Entonces $D(Df) = D^2 f : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

$$D^2 f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \quad ; \quad D^2 f(a)(u) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ es lineal}$$

y podemos considerar $D^2 f(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $D^2 f(a)(u,v) = D^2 f(a)(u, v)$

y es claro que $D^2 f(a)$ es bilineal

$$D^2 f(a)(\Sigma u^i e_i, \Sigma v^j e_j) = \Sigma D^2 f(a)(e_i, e_j) u^i v^j$$

Para determinar $D^2 f(a)(e_i, e_j)$, recordemos como determinamos $Df(a)(e_i)$

Si $\varphi_i(t) = a + t e_i$, entonces $\varphi_i'(0) = e_i = D\varphi_i(0)(1)$. Entonces

$$D(f \circ \varphi_i)(0)(1) = Df(\varphi_i(0)) \circ D\varphi_i(0)(1)$$

$$= Df(a)(e_i) = D_i f(a)$$

ya que $(f \circ \varphi_i)'(0) = D_i f(a)$.

Hagamos lo mismo con $Df : U \to \mathbb{R}^n : a \mapsto (D_1 f(a), \dots, D_n f(a))$

Para ello, consideramos el caso $n=1$ y vemos que

$$D^2 f(a) = D(Df)(a) = \left(D_j D_i f(a) \right)$$

Esto se interpreta mejor notando que

$$D^2 f(a)(e_i, e_j) = D_i D_j f(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

Comprobaremos que $D_i D_j = D_j D_i$ (donde suponemos que f es C^∞) y, para ello basta considerar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $a = 0$

Sea $F(x,y) = (f(x,y) - f(x,0)) - (f(0,y) - f(0,0))$

$$= (f(x,y) - f(0,y)) - (f(x,0) - f(0,0))$$

Aplicando Hadamard (en dimensión 1)

$$f(x,y) - f(x,0) = y\int_0^1 D_2 f(x, ty)\,dt$$

$$f(0,y) - f(0,0) = y\int_0^1 D_2 f(0, ty)\,dt$$

$$F(x,y) = y\int_0^1 (D_2 f(x, ty) - D_2 f(0, ty))\,dt$$

$$= yx\int_0^1\int_0^1 D_1 D_2 f(sx, ty))\,ds\,dt$$

El mismo método da

$$F(x,y) = yx\int_0^1\int_0^1 D_2 D_1 f(sx, ty))\,dt\,ds.$$

Usando continuidad,

$$F(0,0) = D_2 D_1 f(0,0) = D_1 D_2 f(0,0)$$

Por inducción,

$D_{i_1} \cdots D_{i_k} = D_{\alpha(i_1)} \cdots D_{\alpha(i_k)}$ donde α es una permutación

—

Tenemos todo listo para considerar ~~el~~ los desarrollos de Taylor en general y el método es el mismo del caso de dimensión 1

Como $Df: U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $D^2f(x)$ es una función lineal

$$D^2f(x): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

tal que $$\lim_{x\to a} \frac{Df(x) - Df(a) - D^2f(a)(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

Esto tiene la siguiente interpretación: $\overset{L(x)}{=} Df(x) - Df(a) - D^2f(x)(x-a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

es lineal para cada x y así por lo tanto,

$$\lim_{x\to a} \frac{L(x)}{\|x-a\|} = 0$$

es lo mismo que $\lim_{x\to a} \frac{L(x)(e_i)}{\|x-a\|} = 0 \quad \forall\, e_1, \dots, e_n$.

Ahora bien, $L(x)(e_i) = Df(x)(e_i) - Df(a)(e_i) - D^2f(a)(x-a)(e_i)$

$$= D_if(x) - D_if(a) - D^2f(a)(x-a)(e_i)$$

Veamos el último término $D^2f(a)$ puede ser interpretado como una función bilineal

$B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ — $B(u,v) = D^2f(a)(u)(v)$

Como $B(\sum u^i e_i, \sum v^i e_i) = \sum B(e_i, e_j)\, u^i v^j$, está determinada por los

números $b_{ij} = B(e_i, e_j)$ y, en forma matricial,

$$B(u,v) = u\, B\, v^t$$

Volviendo atrás, $L(x)e_i = D_if(x) - D_if(a) - B(x-a, e_i)$

Por último, si notamos que

$$\lim_{x\to a} \frac{L(x)(e_i)}{\|x-a\|} = 0 \iff \lim_{t\to 0} \frac{L(a+te_j)(e_i)}{|t|} = 0$$

concluimos que

$$\lim_{x\to a} \frac{Df(x)-Df(a)-D^2f(a)(x-a)}{\|x-a\|}=0$$

si y sólo si para todo i,j

$$0=\lim_{t\to 0}\frac{D_if(a+te_j)-D_if(a)-B(te_j,e_i)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{D_if(a+te_j)-D_if(a)}{t}-B(e_j,e_i)$$

$$=D_jD_if(a)-B(e_j,e_i)$$

Notar que $B(e_j,e_i)=B(e_i,e_j)$

Basándonos en lo que hicimos en dimensión 1, definiremos derivadas superiores y, lo que es más importante, Teorema de Taylor, siguiendo la misma ruta.

Manos a la obra.

Lema de Hadamard. $f: U\to\mathbb{R}$ C^∞ y $f(0)=0 \Rightarrow$ existe ~~g~~ $g: U\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ C^∞ tal que $f(x)=g(x)(x)$ y $g(0)=Df(0)$

Dem. Sea $\varphi_x(t)=tx$ $[\varphi_x:(-\varepsilon,\varepsilon)\to U]$. Entonces

$$f(x)=f(x)-f(0)=f\circ\varphi_x(1)-f\circ\varphi_x(0)$$

$$=\int_0^1 (f\circ\varphi_x)'$$

Como $\quad (f\circ\varphi_x)'(t)=D(f\circ\varphi_x)(t)(1)$

$$=[Df(\varphi_x(t))\circ D\varphi_x(t)](1)=Df(tx)(\varphi_x'(t))=Df(tx)(x)$$

si definimos $g(x) = \int_0^1 Df(tx)\,dt$, entonces $f(x) = g(x)(x)$ y

$$g(0) = \int_0^1 Df(0)\,dt = Df(0).$$

Nota que

$$g(x) = \left(\int_0^1 D_1 f(tx)\,dt \;\cdots\; \int_0^1 D_m f(tx)\,dt \right)$$

y, por lo tanto, $g(x) = \sum_{i=1}^{m} \left(\int_0^1 D_i f(tx)\,dt \right) x^i$

Concluimos que g es C^∞.

Ahora tenemos que enfrentar el problema de qué es el equivalente de $f^{(n)}$ para funciones de varias variables. ¡Vamos lento! En dimensión 1,

$$f(0) = f'(0) = 0 \implies \text{existe } g_2 \text{ tq } f(x) = g_2(x)\,x^2 \text{ y } f_2(0) = \frac{1}{2!} f^{(2)}(0).$$

En general, $f(0) = 0$ y $Df(0) = 0$.

En dimensión 1, usemos Hadamard para obtener $f(x) = h(x)x$ y $h(0) = h'$

Hagamos lo mismo en general:

$$f(x) = h(x)(x) \quad y \quad h(0) = 0.$$

$$h(x) = (h_1(x) \cdots h_m(x))$$

donde $\quad h_i(x) = \int_0^1 D_i f(tx)\,dt \qquad h_i(0) = D_i f(0) = 0$

Por lo tanto, podemos usar Hadamard

- Si $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, $f : A \to B$ es <u>continua en</u> $a \in A$ ssi para toda suc. $\bar{a}$ en A tq $\bar{a} \to a$, $f \circ \bar{a} \to f(a)$. f es <u>continua</u> ssi f es continua en todo $a \in A$

$f : A \to B$ es un <u>homeomorfismo</u> ssi f y f^{-1} son continuas: (Note que f tiene que ser biyectiva).

Si $i : B \to \mathbb{R}^n$ es la func. inclusión ($i(b) = b$), entonces f es continua si y sólo si $i \circ f$ es continua. Por lo tanto, basta considerar funciones $A \to \mathbb{R}^n$.

~~Abto~~ $A \subset \mathbb{R}^n$ es <u>abierto</u> ssi para todo $a \in A$ existe $r > 0$ tq $B(a; r) \subset A$ (note que se puede usar cualquier norma equivalente a la norma euclideana) y es <u>cerrado</u> ssi A^c es abierto. Por lo tanto, $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado si y sólo si para cada $a \notin A$ existe $r > 0$ tq $B(a; r) \cap A = \emptyset$.

Caracterización: A es abierto si y sólo si [$\bar{a} \to a \in A \iff \exists \nu_0 \in \mathbb{N}$ tq $a_\nu \in A$ para todo $\nu \geq \nu_0$].

A es cerrado si y sólo si para toda sucesión $\bar{a}$ en A, $\bar{a} \to a \Rightarrow a \in A$.

Propiedad importante

Sean $f_i : A_i \to \mathbb{R}^n$ $i = 1, 2$ tq $f_1 / A_1 \cap A_2 = f_2 / A_1 \cap A_2$ y

$$f = f_1 \cup f_2 : A_1 \cup A_2 \to \mathbb{R}^n : a \mapsto \begin{cases} f_1(a) & \text{si } a \in A_1 \\ f_2(a) & \text{si } a \in A_2 \end{cases}$$

Entonces si A_1, A_2 son abiertos [cerrados] y f_1, f_2 continuas, $f_1 \cup f_2$ es continua

Demostración para abiertos. Sea $\bar{a} \to a$. Si $a \in A_1$ entonces $a_\nu \in A_1$ para todo $\nu \geq \nu_0$ y, por lo tanto $f(a_\nu) \in A_1$ y $\lim f \circ \bar{a} = f(a)$

Análogo para cerrados

<u>Nota</u>. Esto se generaliza para $\{A_i \mid i \in I\}$ abiertos pero no para infinitos cerrados. La razón es que una intersección de cerrados no necesariamente es cerrado

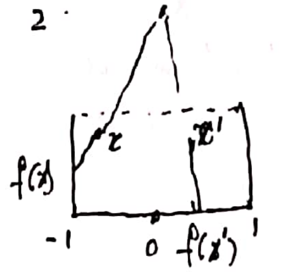
<u>Otra nota</u>. En algún momento hay que explicitar que si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son sucesiones tales que $a_\nu = b_\nu$ casi todo ν, entonces $\lim \bar{a} = \lim \bar{b}$ si y sólo si uno de los

Un ejemplo interesante e importante.

$$A = \mathbb{D}^m \times \{0\} \cup \mathbb{S}^{m-1} \times [0,1]$$

$\mathbb{D}^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \le 1\}$ y $\mathbb{S}^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| = 1\}$. Encontrar una función continua $f: \mathbb{D}^m \times [0,1] \to A$ tal que $f|A = 1_A$.

Para ello ver primero el caso $m = 1$, donde la función f esta dada por el siguiente dibujo



mejorar el dibujo

Notar que la función f es continua ya que es la unión de dos funciones definidas en cerrados y que la continuidad se demuestra componiendo con la inclusión en $\mathbb{R}^2$.
Es fácil ver como se obtiene el caso general.

Aplicación do método del brasilero. ~~Eo~~

$K \subset \mathbb{R}^m$ es compacto sii es cerrado y acotado.

Teo. $K \subset \mathbb{R}^m$ compacto y $f: K \to \mathbb{R}^l$ continua $\to f_*(K)$ cerrado.

Dem. Sea (y_ν) una sucesión en $f_*(K)$ tal que $\lim(y_\nu) = y$. Demostraremos que $y \in f_*(K)$.

Para ello, sea $I = [a,b]$ tq $K \subset I^m$ y ~~[illegible]~~

Elijamos $x_1 \in K$ tq $f(x_1) = y_1$.

Usando el método del brasilero, obtenemos una sucesión (x_ν) en K tal que

$$f(x_\nu) = y_{\varphi(\nu)} \quad \text{y} \quad (x_\nu) \to x \in K \quad (\text{ya que } K \text{ es cerrado})$$

donde φ es estrictamente creciente. Como $(y_{\varphi(\nu)}) \to y$ (subsucesión), tenemos que

$$y = f(x)$$

Esta demostración debe ser mejorada y vemos la necesidad de depurar la notación y la formulación del método del brasilero.