Si ~~acotado~~ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ acotada tq

PD: g medible $\Leftrightarrow$ $\exists (s_n)_{n=1}^{\infty}, (t_n)_{n=1}^{\infty}$ simples tq $s_n \le g \le t_n \ \forall n\in\mathbb{N}$

$$\wedge \ \lim_{n\to\infty} \int_A (t_n - s_n) = 0$$

$\Leftarrow$] Lema: si $\int_{\mathbb{R}} f = 0 \wedge f \geq 0 \Rightarrow f=0$ ctp

D: Sea $E=\{x\in\mathbb{R} / f(x)>0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}/ f(x)>\frac{1}{n}\}$

Sea $E_n = \{x\in\mathbb{R}/ f(x) > \frac{1}{n}\}$

Como $f\geq 0 \Rightarrow (f=0$ ctp $\Leftrightarrow mE=0)$

Luego si $\neg(f=0$ ctp$) \Rightarrow mE>0$

$\Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}$ tq $mE_n>0$, sea $A\subseteq E_n$ tq $0<mA<\infty$

Luego

$$\int_{\mathbb{R}} f \geq \int_{E_n} f \geq \int_{E_n}\frac{1}{n} \geq \int_A \frac{1}{n} = \frac{mA}{n} > 0 \Rightarrow\!\!\Leftarrow$$

$\therefore f=0$ ctp

Sean $s=\sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$, $t=\inf_{n\in\mathbb{N}} t_n \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}\ s_n\le s\le g\le t\le t_n$

s_n, t_n medibles $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow s,t$ medibles.

Además

$0\le t-s\le t_n-s_n \ \forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow 0\le \int_{\mathbb{R}} t-s \le \int_{\mathbb{R}} t_n-s_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} t-s = 0 \wedge t-s\geq 0$

$\Rightarrow t=s$ ctp $\Rightarrow t=s=g$ ctp, s medible $\Rightarrow g$ medible.

~~Supongamos g medible, definimos $f_n, h_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$~~

~~$f_n(x) = \begin{cases} \frac{[nx]}{n}, & |x|\le n \\ -M, & |x|>n\end{cases}$, $h_n = \begin{cases}\frac{[nx]+1}{n}, & |x|\le n\\ M, & |x|>n\end{cases}$ (M cota de g)~~

~~f_n, h_n simples, pues en $[-n,n]$ toman finitos valores~~

~~Definimos $s_n = f_n\circ g$, $t_n = h_n\circ g$ simples pues f_n y h_n lo son~~

Si $f(x) \in [-n,n] \Rightarrow$

$$g(x) - s_n(x) = \frac{n g(x) - [n g(x)]}{n} \geq 0$$

$$t_n(x) - g(x) = \frac{[n g(x)]+1 - n g(x)}{n} \geq 0$$

$\Rightarrow \quad s_n(x) \leq g(x) \leq t_n(x)$

Si $|f(x)| > n \Rightarrow$

~~$s_n(x) = M < f(x)$~~

$-M < f(x) < M \quad \Rightarrow \quad s_n \leq f \leq t_n$

$\underset{s_n(x)}{\shortparallel} \qquad \underset{t_n(x)}{\shortparallel}$

ADEMAS COMO g ES MEDIBLE Y f_n, h_n ~~MEDIBLES~~ SIMPLES ~~...~~

~~$s_n^{-1}(a,\infty) = g^{-1} \circ f_n^{-1}(a,\infty) = g^{-1}$ (...) ES MEDIBLE~~

$\Rightarrow \quad s_n, t_n$ SON MEDIBLES.

ADEMAS

$\int_{\mathbb{R}} t_n - s_n =$

EL RECIPROCO NO ES CIERTO

Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $g(x) = \frac{1}{x} \chi_{(1,\infty)}$

SUPONGAMOS QUE $\exists\, s,t$ SIMPLES tq $s \leq g \leq t$

$\wedge \int_{(1,\infty)} t-s < 1$

~~Como s, t simples sean $a = \min_{x>1} t(x)$, $b = \max_{x<1} s(x)$~~

~~$\Rightarrow \nexists\, a, b$ tq son $a = \min_{x>1} t(x)$, $b = \max_{x<1} s(x)$~~

~~Sea $E = t^{-1}(\{a\}) \cap s^{-1}(\{b\})$~~

Si $\int_{(1,\infty)} t-s = 0 \Rightarrow t = s$ CTP $\Rightarrow g$ ADQUIERE FINITOS VALORES SALVO EN UN CONJUNTO DE MEDIDA NULA $\Rightarrow\!\!\!\!\!/\ \Leftarrow$ (g INYECTIVA

~~$0 < \int_{(1,\infty)} t-s < 1$~~

~~Sea a, b tq $E = t^{-1}(\{a\}) \cap s^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$, $a - b \geq 2$~~

~~(B) b) Sea $x_0 \in [a,b]$ y $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$~~

El recíproco no es cierto

Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tq $g(x)=\frac{1}{x}\chi_{[1,\infty)}$ $\quad 0\le g\le 1$ acotada

Supongamos $\exists\, s,t$ simples tq $s\le g\le t$ $\wedge$ $\int_{[1,\infty)} t-s < 1$

Luego $t-s$ es simple. SPG $s(x)=t(x)=0 \quad \forall x<1$

Supongamos $t-s$ toma los valores $\{a_1,\dots,a_n\}$ en $[1,\infty)$

$m[1,\infty)=\infty$ $\wedge$ $[1,\infty)=\bigcup_{i=1}^{n}(t-s)^{-1}(\{a_i\}) \Rightarrow m[1,\infty)=\sum_{i=1}^{n} m\left((t-s)^{-1}(\{a_i\})\right)=\infty$

$\Rightarrow \exists\, b\in\{a_1,\dots,a_n\}$ tq $m\left((t-s)^{-1}(\{b\})\right)=\infty$

Si $b=0 \Rightarrow g(x)=b \quad \forall x\in(t-s)^{-1}(\{b\})$ $\Rightarrow\!\Leftarrow$ pues g es inyectiva en $[1,\infty)$

y $|(t-s)^{-1}(\{b\})|>1$

$\therefore b>0$, $t-s\ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1>\int_{\mathbb{R}} t-s \ge \int_{(t-s)^{-1}(\{b\})} t-s = b\,\chi_{(t-s)^{-1}(\{b\})}=\infty \Rightarrow\!\Leftarrow$

(Sin d)

III) b

(4) $I = \int_{[0,1]} \varphi$ PARA

A) $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ TQ $\varphi(x) = \begin{cases} e^x , & x \in \mathcal{C} \\ 2^{-n} , & x \in \underset{\text{¿QUÉ?}}{I_{n,k}} , \quad \underbrace{k \in \{1, \dots, 2^{n-1}\}}_{\text{¿POR QUÉ?}} \end{cases}$

$1 \leq e^x \leq e \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow \forall x \in \mathcal{C} \quad 1 \leq e^x \leq e$

NOTAMOS QUE $\varphi = e^x \chi_{\mathcal{C}} + f \chi_{\mathcal{C}^c}$

DONDE: $f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} 2^{-n} \chi_{I_{n,k}}$

e^x ES CONTINUA $\Rightarrow$ e^x MEDIBLE

$\mathcal{C}$ MEDIBLE (ES BOREL) $\Rightarrow$ $\chi_{\mathcal{C}}$ MEDIBLE

$\mathcal{C}^c$ MEDIBLE (ES ABIERTO, LUEGO BOREL) $\Rightarrow$ $\chi_{\mathcal{C}^c}$ MEDIBLE

f ES EL LÍMITE PUNTUAL DE ~~SUCESIONES~~ SUCESIÓN DE FUNCIONES MEDIBLES (SUMAS DE CARACTERÍSTICAS)

$\Rightarrow$ f ES MEDIBLE

$\Rightarrow$ φ ES MEDIBLE.

ADEMÁS $\int_{[0,1]} \varphi = \int_{\mathcal{C}} \varphi + \int_{\mathcal{C}^c} \varphi$, PERO $\int_{\mathcal{C}} \varphi = \int_{\mathcal{C}} e^x dx$

$1 \leq e^x \leq e \Rightarrow \underset{= m\mathcal{C}}{\int_{\mathcal{C}} 1} \leq \int_{\mathcal{C}} e^x dx \leq \underset{= e\, m\mathcal{C}}{\int_{\mathcal{C}} e} \Rightarrow 0 \leq \int_{\mathcal{C}} e^x dx \leq e \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} e^x dx = 0$

$\Rightarrow \int_{[0,1]} \varphi = \int_{\mathcal{C}^c} \varphi$

LEMA: SI $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ACOTADA, $mE < \infty$, f_n MEDIBLES Y $f_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n$

D: SEA $g_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$ ~~[illegible]~~

SEA $M > 0$ TQ $|f| \leq M$, COMO $f_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow g_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

ADEMÁS $0 \leq g_n \leq f \leq M \Rightarrow g_n$ ACOTADAS POR M

ADEMÁS $g_n \to f$ PUNTUALMENTE $g_n \leq g_{n+1}$

POR TEO. DE CONVERGENCIA MONÓTONA. $\Rightarrow \int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n \overset{?}{=} \sup_m \int g_m$?

RAZONANDO UN POCO HABRÍA SALIDO LIM ¡¡DIC!!

1,7/2

NO ENTRABA! TENÍAS MUCHOS ELEMENTOS, RESULTADOS A USAR!

Pero $\int_E g_n = \int_E \sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{n} \int_E f_i \Rightarrow \int_E f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_E f_i$

Volviendo al problema:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} 2^{-n} \chi_{I_{n,k}} \quad , \quad |f| \leq 1 \quad , \quad m\mathcal{C}^c < \infty$$

$$y \quad 2^{-n}\chi_{I_{n,k}} \geq 0 \Rightarrow \int_{\mathcal{C}^c} f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} 2^{-n} \int_{\mathcal{C}^c} \chi_{I_{n,k}}$$

¿Por definición?¡

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}^c} f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} 2^{-n} \cdot 3^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{6^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)} - 1\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} - \frac{2}{2}\right] = \frac{1}{4}$$

2

B) Lema: Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann y es acotada medible

$\Rightarrow f$ es ... y

$$R\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$$

D: Notamos que como f es Riemann $\Rightarrow$

$$R\int_a^b f = \sup\left\{\int_a^b \varphi \;/\; \varphi \text{ escalonada}, \varphi \leq f\right\} = \inf\left\{\int_a^b \psi \;/\; \psi \text{ escalonada}, \psi \geq f\right\}$$

Pero φ, ψ escalonadas $\Rightarrow \varphi, \psi$ simples

$$\Rightarrow R\int_a^b f \leq \sup_{\substack{\varphi \leq f \\ \varphi \text{ simple}}} \int_{[a,b]} \varphi \leq \inf_{\substack{\psi \geq f \\ \psi \text{ simple}}} \int_{[a,b]} \psi \leq \inf_{\substack{\psi \geq f \\ \psi \text{ escalonada}}} \int_{[a,b]} \psi = R\int_a^b f$$

¿Cómo calculas tres por definición Riemann??

$$\Rightarrow \sup_{\substack{\varphi \leq f \\ \varphi \text{ simple}}} \int_{[a,b]} \varphi = \inf_{\substack{\psi \geq f \\ \psi \text{ simple}}} \int_{[a,b]} \psi = R\int_a^b f$$

$\Rightarrow f$ medible y $R\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$

Luego: $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$ tq $\varphi(x) = x^2 - 2x$ ~~es continua luego Riemann int.~~

Como φ continua y $[0,1]$ compacto $\Rightarrow \varphi$ es acotada.

$\wedge$ φ Riemann integrable.

Luego φ es medible y

$$\int_{[0,1]} \varphi = R\int_0^1 x^2 - 2x \, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

¿Por definición?

3

Scanned with CamScanner

cos, sen continuas $\Rightarrow$ cos y sen medibles

$\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}^c$ medibles $\Rightarrow$ $\chi_{\mathbb{Q}}$ $\wedge$ $\chi_{\mathbb{Q}^c}$ medibles. $\Rightarrow$ φ es medible

Con $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ tq $\varphi(x) = \cos(x)\,\chi_{\mathbb{Q}}(x) + \operatorname{sen}(x)\,\chi_{\mathbb{Q}^c}(x)$

Sean $\varphi_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\wedge$ $\varphi_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ tq

$\varphi_1(x) = \cos(x)\,\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ $\wedge$ $\varphi_2(x) = \operatorname{sen}(x)\,\chi_{\mathbb{Q}^c}(x)$

Notamos que como $m\,\mathbb{Q} \cap [0,1] \leq m\,\mathbb{Q} = 0 \Rightarrow m\,\mathbb{Q} \cap [0,1] = 0$

$\Rightarrow \varphi_1 = 0$ salvo en $\mathbb{Q} \cap [0,1]$

$\Rightarrow \varphi_1 = 0$ CTP $\Rightarrow \int_{[0,1]} \varphi_1 = 0$

Además $\varphi_2 = \operatorname{sen}$ salvo en $\mathbb{Q} \cap [0,1]$

$\Rightarrow \varphi_2 = \operatorname{sen}$ CTP $\Rightarrow \int_{[0,1]} \varphi_2 = \int_{[0,1]} \operatorname{sen}(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int_{[0,1]} \varphi = \int_{[0,1]} \varphi_1 + \int_{[0,1]} \varphi_2$$

$$= 0 + \int_{[0,1]} \operatorname{sen}(x)\,dx$$

Como sen es continua, acotada y Riemann integrable en $[0,1]$

$\Rightarrow$ sen es medible y

$$\int_{[0,1]} \operatorname{sen}(x)\,dx = R\int_0^1 \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^1 = 1 - \cos(1)$$

$$\Rightarrow \int_{[0,1]} \varphi = 1 - \cos(1)$$

3

IV) 4.5

ANEXOS:

(I) PD: SI $m^* E > 0 \Rightarrow \exists B \subseteq E$ NO MEDIBLE

D: PODEMOS ASUMIR QUE $E \subseteq [0,1)$ (DEBIDO A QUE m^* ES INVARIANTE POR TRASLACIONES)

SEA $B = P \cap E \subseteq E$, P VITALI.

$\Rightarrow [0,1) = \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} P_i \Rightarrow E = E \cap [0,1) = \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} P_i \cap E$, SEA $B_i = P_i \cap E$

$B_i = B \dot{+} r_i \Rightarrow \{B_i\}$ DISJUNTOS (PUES $\{P_i\}$ LO SON)

Y $E = \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} B_i$

ADEMAS $0 < m^* E \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^* B_i$

SI B ES MEDIBLE $\Rightarrow B_i = B \dot{+} r_i$ SON MEDIBLES, Y $m^* B = m^* B_i$

SI $m^* B > 0 \Rightarrow m^* [0,1) = 1 \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^* B_i = \infty \Rightarrow\Leftarrow$

$\therefore m^* B = 0$

PERO EN TAL CASO $0 < m^* E \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^* B_i = 0 \Rightarrow\Leftarrow$

$\therefore B$ NO ES MEDIBLE.

(II) PD: SI O ES ABIERTO

$\Rightarrow \exists \{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ DISJUNTOS TQ $O = \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} I_i$

D: $O = \dot{\bigcup_{i \in I}} I_i$, DONDE I_i SON COMPONENTES CONEXAS DE O

I_i CONEXOS $\Rightarrow I_i$ INTERVALOS

SI ALGUN I_i CONTUVIESE ALGUNO DE SUS EXTREMOS, SEA $a \in I_i$ EXTREMO

$\Rightarrow a \in O \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ TQ $(-\varepsilon + a, \varepsilon + a) \subseteq O$

LUEGO $I_i \cup (-\varepsilon + a, \varepsilon + a)$ ES CONEXO

Y $I_i \subsetneq I_i \cup (-\varepsilon + a, \varepsilon + a) \Rightarrow\Leftarrow$

A LA MAXIMALIDAD DE CADA COMPONENTE CONEXA.

$\Rightarrow I_i$ ES INTERVALO ABIERTO $\forall i \in I$

ADEMAS $\forall i \in I \; \exists q_i \in \mathbb{Q}$ TQ $q_i \in I_i$

SI I FUESE NO NUMERABLE, COMO $\{I_i\}_{i \in I}$ SON DISJUNTOS

$\Rightarrow \{q_i\}_{i \in I}$ ES NO NUMERABLE

$\Rightarrow\Leftarrow$, YA QUE $\{q_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{Q}$ NUMERABLE.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Curso: Análisis II, Primavera 2009
Profesor: Manuel Pinto
Ayudante: Patricio Quiroz H.

Prueba 2

Noviembre 4, 2009

Resuelva 4 de los 5 problemas.

1. Para $h \in L^1(\mathbb{R})$, defina $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx^2} h(x)dx.$$

Pruebe que φ es continua [2 pts.]. Encuentre una condición [1 pt.] que permita que φ sea derivable y demuestre su derivabilidad [3 pts.].

2. (a) Sea f integrable sobre $E \subset \mathbb{R}$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe una función simple φ tal que

$$\int_E |f - \varphi| < \varepsilon [2,5 \text{ pts.}]$$

(b) Sea $\{E_n\} \subset \mathbb{R}$ sucesión de conjuntos medibles. Demuestre que son equivalentes:

i) $\forall A \subset \mathbb{R}$ medible de medida finita,

$$\lim_{n\to\infty} m(A - E_n) = 0 [1 \text{ pts.}]$$

ii) $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$f\chi_{E_n} \to f \text{ en } L^1(\mathbb{R}) [2,5 \text{ pts.}]$$

[Hint: use (a)] (i) ⇒ (ii)

3. (a) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pruebe que

$$\lim_{x\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(t)dt = 0 \text{[3,5 pts.]}$$

(b) Deduzca que, $\forall A \subset \mathbb{R}$ medible de medida finita $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_A \sin(\alpha t + \beta)dt = 0$$

[2 pts.] ¿Vale para $A = \mathbb{R}$?[0,5 pts.]

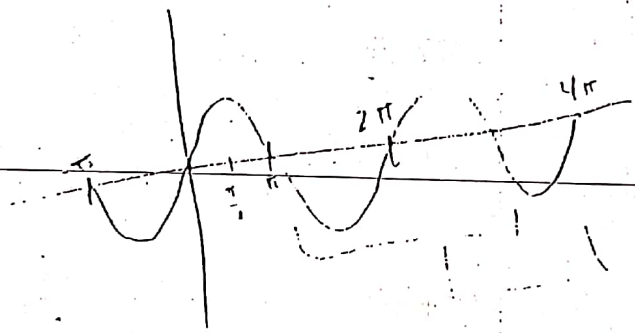
4. (a) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Demuestre que existe una única [3 pts.] función absolutamente continua x tal que (*) $x'(t) = f(t)$ c.t.p. y (**) $x(0) = 1$. Demuestre que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ existe una única x, solución de (*) tal que $x(t) \to \alpha$ cuando $t \to \infty$[1 pts.].

(b) Demuestre que, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función absolutamente continua, entonces $f(A)$ es de medida cero si A es de medida cero[1 pt.].¿Vale esto para f sólo continua?[1 pt.].

5. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles en $\mathbb{R}$ tal que $f_n \to f$ c.t.p. en $\mathbb{R}$. Demuestre que $\forall A \subset \mathbb{R}$ medible de medida finita se tiene $f_n \to f$ en $L^1(A)$ si alguna de las condiciones i) o ii) se satisface: (pruebe asumiendo sólo una de ellas)

i) $\int_{\mathbb{R}} (1 + x^2)^p |f_n|^p \leq 2009 \ \forall p > 1$ $\{2\pi, 4\pi\}$

ii) $\int_B |f_n| \leq \int_B e^{-x^2}dx \ \forall B \subset \mathbb{R}$ medible.



2π, 4π

0,

PRUEBA N°3 ANALISIS III

Julio, 2008.

Resuelva solo 4 problemas.

I) (a) Sea $f \geq 0$ tal que $\alpha = \int_{\mathbb{R}} f < 1$. Defina $f_n = f * f * f \cdots * f(n-1$ convoluciones). Pruebe que

$$\int_{\mathbb{R}} f_2 = \alpha^2 \ (1pt.),$$

$f_n \in L^1(\mathbb{R})(1pt.)$ y que $\|f_n\|_1 \to 0$ cuando $n \to \infty$ (1pt.).

(b) Suponga que $h_n, h \in L^p(A)$ y $g_n, g \in L^\infty(A)$, $g_n \to g$, $|g_n(x)| \leq 1$, $\forall n \in N, \forall x \in A$. Demuestre que si $h_n \to h$ en $L^p(A)$, entonces $h_n g_n \to hg$ en $L^p(A)(3pts.)$

II) Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal cualquiera en $L^2(\mathbb{R})$: Pruebe que dado $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 < \infty$, existe una única $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$c_k = < g, \varphi_k > \quad y \quad \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 = \|g\|_2^2 \ (4.5 \text{ pts}).$$

Demuestre que la correspondencia $c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2(\mathbb{N}) \to g \in L^2(\mathbb{R})$ es un isomorfismo (1.5 pts).

AYUDA: Considere $\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k = f_n$

III) Suponga que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ posee límites laterales $f(x \pm 0) = \lim_{\epsilon \to 0} f(x \pm \epsilon)$ en $x \in \mathbb{R}$ y que las funciones

$$g_{\pm}(z) = \frac{f(x+z) - f(x \pm 0)}{z}$$

son integrables para $z \in I_{\pm}, I_+ = (0, \delta_+], I_- = [-\delta_-, 0)$ para ciertos $\delta_{\pm} > 0$. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, demuestre que

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos[\lambda(t-x)]dt(4pts.).$$

→ no. si

Es uniforme la convergencia de la integral? (0.5pts). Y si f es acotada en $\mathbb{R}$ y derivable en $(-\delta_-, \delta_+)$?(1pt.). Y con una integrabilidad uniforme? (0.5 pts.).

IV) Para $f \in L^1(\mathbb{R})$, denote por $g = g(\lambda)$ su transformada de Fourier.
Demuestre que para λ fijo, la transformada de Fourier es un funcional continuo sobre $L^1(\mathbb{R})$ y calcule su norma (2pts). Pruebe, rigurosamente, que si $f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\lambda^p g(\lambda) \to 0$ cuando $|\lambda| \to \infty$ para $0 \leq p < 2(1pt.)$ y $\lambda^p g(\lambda) \in L^1(\mathbb{R})$ para $0 \leq p < 1(2pts)$, pero no para $p = 1$ (1pt.).

$\|F(u)-F(v)\|_1<\varepsilon$

V) Para $\beta \in (0, \frac{1}{2})$, considere la ecuación integral de convolución:

$+\beta\, u(x)*e^{-|x|}$

$\hat{u}(\lambda) - \hat{v}(\lambda)$

$$u(x) = e^{-|x|} + \beta\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-s|}u(s)ds.$$

$\to \|F(u-v)\|_1$

Usando la transformada de Fourier, obtenga que la transformada de Fourier de u, $F(u)$, es

$e^{-\sqrt{\gamma}|x|}$

$$F(u)(\lambda) = \frac{2}{\gamma + \lambda^2}, \gamma = 1 - 2\beta(2pts.)$$

$1-2\beta>0 \quad \beta<\frac{1}{2}$

y encuentre $u(2.5pts)$. Establezca que no existe otra solución en $L^1(\mathbb{R})(1pt.)$. Por qué no existe $u \in L^1(\mathbb{R})$, para $\beta \in [\frac{1}{2}, 1]$? (0.5pts.)

↳ Toda $f \in L^1$ está determinada únicamente por su transf de Fourier

ANÁLISIS III

Prueba N°3

Julio 03, 2007

Tiempo: 3 hrs.

Escoja y resuelva sólo 4 de los 5 problemas propuestos.

I) Sea $F_n : [-a, a] \longrightarrow [0, \infty)$ tal que

$$\int_{-a}^{a} F_n(t)dt = 1 \qquad y \qquad \forall \delta > 0 : \int_{|t|\geq\delta} F_n(t)dt \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

Demuestre que $\forall f \in L^p(-a, a)$ se tiene $f * F_n \to f$ en $L^p(-a, a)$ [5 pts.] ¿Este resultado vale en $L^p(\mathbb{R})$? [1 pt.]

II) Sea $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de periodo 2π, absolutamente continua y $f' \in L_2(-\pi, \pi)$. Demuestre que la serie de Fourier de f converge uniformemente a f en toda la recta [4 pts.] y satisface la identidad de Parseval

$$(\| f \|_2)^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \qquad [1 \text{ pt.}]$$

¿Cuál es el análogo de este resultado para la transformada de Fourier? [1 pt.]

III) Sean $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal en L^2 y $\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$. Entonces $\exists f \in L^2$ tal que

$$c_k = \langle f, \varphi_k \rangle \qquad y \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = (\| f \|_2)^2.$$

Ayuda: considere $f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$.

IV) Sea S el espacio de Schwarz, de las funciones $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en C^∞ rapidamente decrecientes en $\pm\infty$. Demuestre que S es denso en $L^p(\mathbb{R})$ para $p \geq 1$

PRUEBA N°3 ANALISIS III

Resuelva solo 4 problemas. Julio, 2008.

√ I) (a) Sea $f \geq 0$ tal que $\alpha = \int_{\mathbb{R}} f < 1$. Defina $f_n = f * f * f \cdots * f (n-1$ convoluciones$)$. Pruebe que

$$\int_{\mathbb{R}} f_2 = \alpha^2 \ (1pt.),$$

$f_n \in L^1(\mathbb{R})(1pt.)$ y que $\|f_n\|_1 \to 0$ cuando $n \to \infty$ (1pt.)..

(b) Suponga que $h_n, h \in L^p(A) y g_n, g \in L^\infty(A), g_n \to g, |g_n(x)| \leq 1, \forall n \in N, \forall x \in A$.
Demuestre que si $h_n \to h$ en $L^p(A)$, entonces $h_n\, g_n \to hg$ en $L^p(A)(3pts.)$

√ II) Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal cualquiera en $L^2(\mathbb{R})$: Pruebe que dado $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$, existe una única $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$c_k = \langle g, \varphi_k \rangle \quad y \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|g\|_2^2 \ (4.5 \text{ pts}).$$

Demuestre que la correspondencia $c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2(N) \to g \in L^2(\mathbb{R})$ es un isomorfismo (1.5 pts).

? sobreyectiva

AYUDA: Considere $\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$.

III) Suponga que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ posee límites laterales $f(x \pm 0) = \lim_{\epsilon \to 0} f(x \pm \epsilon)$ en $x \in \mathbb{R}$ y que las funciones

$$g_{\pm}(z) = \frac{f(x+z) - f(x \pm 0)}{z}$$

son integrables para $z \in I_{\pm}, I_+ = (0, \delta_+], I_- = [-\delta_-, 0)$ para ciertos $\delta_{\pm} > 0$. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, demuestre que

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos[\lambda(t-x)]dt (4pts.).$$

Es uniforme la convergencia de la integral? (0.5pts). Y si f es acotada en $\mathbb{R}$ y derivable en $(-\delta_-, \delta_+)$?(1pt.). Y con una integrabilidad uniforme? (0.5 pts.).

IV) Para $f \in L^1(\mathbb{R})$, denote por $g = g(\lambda)$ su transformada de Fourier.
Demuestre que para λ fijo, la transformada de Fourier es un funcional continuo sobre $L^1(\mathbb{R})$ y calcule su norma (2pts). Pruebe, rigurosamente, que si $f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\lambda^p g(\lambda) \to 0$ cuando $|\lambda| \to \infty$ para $0 \leq p < 2(1pt.)$ ✓
y $\lambda^p g(\lambda) \in L^1(\mathbb{R})$ para $0 \leq p < 1(2pts)$, pero no para $p = 1$ (1pt.). ?

V) Para $\beta \in (0, \frac{1}{2})$, considere la ecuación integral de convolución:

$$u(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-s|} u(s) ds.$$

Usando la transformada de Fourier, obtenga que la transformada de Fourier de u, $F(u)$, es

$$F(u)(\lambda) = \frac{2}{\gamma + \lambda^2}, \gamma = 1 - 2\beta (2pts.)$$

[illegible] (2.5pts). Establezca que no existe otra solución en $L^1(\mathbb{R})(1pt.)$. Por qué no existe $u \in L^1(\mathbb{R})$, [illegible]

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Curso: Análisis II, Primavera 2009
Profesor: Manuel Pinto
Ayudante: Patricio Quiroz H.

$-\cos \to \text{sen} \to \cos \to -x$

Prueba 3

Diciembre 2, 2009

Resuelva 4 de los 6 problemas eligiendo al menos uno de los problemas 3 y 4.

1. (a) Calcule la serie de Fourier de la función 2π-periódica $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$[2 pts.].

   (b) Demuestre que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}[2 \text{ pts.}].$$

   (c) Demuestre que, para $x \in [-\pi, \pi]$:
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}[2 \text{ pts.}].$$

2. Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal cualquiera en $L^2(\mathbb{R})$. Pruebe que dado $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$, existe una única $f \in L^2(\mathbb{R})$[2,5 pts.] tal que
$$a_k = < f, \phi_k >$$

$f_n = \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_k$

y
$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = ||f||_2^2[1 \text{ pt.}].$$

Demuestre que la correspondencia $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2(\mathbb{N}) \to f \in L^2(\mathbb{R})$ es un isomorfismo[2,5 pts.].

Scanned with CamScanner

3. Para $f \in L^1(\mathbb{R})$, denote por $g = g(\lambda)$ su transformada de Fourier. Demuestre que para λ fijo, la transformada de Fourier es un funcional continuo sobre $L^1(\mathbb{R})$ y calcule su norma[2,5 pts.]. Pruebe (rigurosamente) que si $f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\lambda^p g(\lambda) \to 0$ cuando $|\lambda| \to \infty$ para $0 \leq p < 2$[1 pt.] y $\lambda^p g(\lambda) \in L^1(\mathbb{R})$ para $0 \leq p < 1$[1,5 pts.], pero no para $p = 1$[1 pt.].

$$\frac{\begin{matrix} 52 \\ - 16 \end{matrix}}{36}$$

4. Demuestre que si $f \in L^1([-\pi, \pi])$, sus sumas de Fejer convergen hacia f en $L^1([-\pi, \pi])$.

5. (a) Demuestre que para $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

$$F[f * g] = F[f]F[g] \text{[2 pts.]}.$$

(b) Encuentre $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t - x)\phi(x)dx = \frac{1}{(13 + 8t + 4t^2)^2}, (t \in \mathbb{R})\text{[4 pts.]}.$$

6. (a) Demuestre que toda función $f \in L^1([-\pi, \pi])$ esta determinada únicamente por su serie de Fourier[3 pts.].

(b) Demuestre que toda función $f \in L^1(\mathbb{R})$ esta determinada únicamente por su transformada de Fourier[3 pts.].

$2\pi i \sum \text{Res}$

$\int f(x) e^{i\lambda x}$

$$e^{i\lambda t} = \frac{e^{i\lambda t} e^{i\lambda x}}{e^{i\lambda x}}$$

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f^{(k)}(x)(x-\alpha)^k_2}{(\ldots)}$$

Segunda Prueba de Análisis III

Sabado 28 de Junio del 2008
Resuelva 5 de los 6 problemas

(a) Sea $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ la función dada por $\varphi(x) = x^{2008}$ si $x \in C$, el conjunto de Cantor y $\varphi(x) = 2^{-k}$ para x en los intervalos de largo 3^{-k} que han sido removidos de $[0,1]$. Demuestre que $\varphi \in L^1([0,1])$ (i.e. integrable en el sentido de Lebesgue) (2,5 pts.) y que $\int_{[0,1]} \varphi = \frac{1}{4}$ (0,5 pts.)

(b) Suponga que $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ es una función medible para la cual $|f|$ es impropiamente integrable en el sentido de Riemann . Demuestre que f es integrable en el sentido de Lebesgue (i.e. $f \in L^1[(0,\infty)]$) (2,5 pts.). ¿Y si quitamos el valor absoluto? (0,5 pts.).

II) Defina $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-tx^2}\, dx.$$

Pruebe que φ es continua (2,5 pts), diferenciable (2 pts) y que satisface la ecuación diferencial

$$\varphi'(t) = -\frac{\varphi(t)}{2t}, t > 0 (1 \text{ pto}).)$$

Deduzca que $\varphi(t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}}$ (0,5 pts).

III) Consider $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función integrable. Pruebe que g es finita c.t.p. (2 pts) y

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} \left| g(x+t^2) - g(x) \right| dx = 0, \text{ (4 pts)}$$

IV) Sean $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible; $g_n \in L^1[A]$, $g_n \to g$ c.t.p.; f_n, f funciones medibles, $f_n \to f$ c.t.p., $|f_n| \le |g_n|$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f, \text{ (3 pts.)}$$

y que

$$\lim_{n\to\infty}\int_A |f_n - f| = 0 \text{(1,5 pts) ssi } \lim_{n\to\infty}\int_A |f_n| = \int_A |f| \text{ (0,5 pts)}$$

¿Es esto cierto para la integral de Riemann? (1 pto)

V) (a) Demuestre que si $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función absolutamente continua, entonces $v(A)$ es de medida cero si A es de medida cero (1 pto). ¿Vale esto para v sólo continua? (1 pto)

(b) Demuestre que $u(t) = e^{\int_0^t a(s)ds}$ es absolutamente continua en $[0, 1]$ si $a \in L^1([0, 1])$ (1,5 pts). Considere $b \in L^1([0, 1])$ y la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y'(t) &= a(t)y(t) + b(t), \text{c.t.p} \\ y(0) &= 2 \end{aligned}$$

Demuestre que existe (1,5 pts) una única (1 pto) solución de esta ecuación.

VI) Sea A un conjunto medible. Se dice que un conjunto $V \subseteq L^1(A)$ es uniformemente integrable si y sólo si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\int_E f\right| < \epsilon$$

para $f \in V$ y $mE < \delta$
Suponga $mA < \infty$

(a) Demuestre el siguiente Teorema de Vitali: Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable, $f_n \to f$ c.t.p. y f es finita c.t.p. Entonces $f \in L^1(A)$ y $f_n \to f$ en $L^1(A)$. (3 pts) ¿Vale si $A = \mathbb{R}$? (1 pto) $\frac{1}{2}\chi_{[n,n]}$.

(b) Lo mismo ocurre si $f_n \in L^1(A)$, $f_n \to f$ c.t.p. y existen $p > 1$ y constante $c > 1$ tal que $\|f_n\|_p \leq c$ para todo n (2 pts).

ANÁLISIS III

Prueba N°2

Junio 02, 2007

Tiempo: 3 hrs.

I)

(a) Sea $r(x) = \ln([x^{-1}])$, $x \in (0,1]$, donde $[\cdot]$ denota la función parte entera. Demuestre que r es Lebesgue integrable y calcule su integral [2,5 pts.] ¿Es integrable Riemann? [0,5 pts.]

(b) Demuestre que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible y $|f|$ es impropiamente Riemann integrable, entonces f es integrable Lebesgue y ambas integrales coinciden [2,5 pts.]. ¿Y si quitamos el valor absoluto? [0,5]

II) Sea $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable Lebesgue. Defina

$$\varphi(x) = \int_0^1 e^{-x/y} f(y)dy, \ x \in (0,1)$$

Demuestre que φ es continua [3,5 pts.]. Estudie y demuestre, bajo que condiciones es derivable. [2,5 pts.]

III)

(a) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Demuestre que existe una única [3 pts.] función absolutamente continua x tal que $x'(t) = f(t)$ c.t.p. y $x(0) = 1$. Demuestre que $x(t)$ converge cuando $t \rightarrow \pm\infty$. [1 pt.]

(b) Decida si el teorema fundamental del cálculo es válido en todo $[0,1]$, para una función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en todas partes, que lo ~~satisface en $[\epsilon, 1]$, $\forall \epsilon > 0$, y $f' \in L^1([0,1])$.~~ [3 pts.] Ayuda: Considere $f(x) = x^2 \mathrm{sen}(x^{-\alpha})$, $f(0) = 0$, $\alpha > 0$.

IV) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(a) Demuestre que dado $\epsilon > 0$, existe ψ una función continua con soporte compacto (i.e. $\psi \neq 0$ en un conjunto compacto) tal que $\|f - \psi\|_1 < \epsilon$. [1,5]

(b) Defina f_y la función dada por $f_y(x) = f(x-y)$ y $T : \mathbb{R} \longrightarrow L^1(\mathbb{R})$ por $T(y) = f_y$. Demuestre que T es una función uniformemente continua. 3,5

V) Sea A un conjunto medible. Se dice que un conjunto $V \subseteq L^1(A)$ es uniformemente integrable si , y sólo si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \int_E f \right| < \epsilon$$

para $f \in V$ y $mE < \delta$.

Suponga $mA < \infty$.

(a) Demuestre el siguiente Teorema de Vitali: Si $\{f_n\}$ es uniformemente integrable, $f_n \to f$ c.t.p. y f es finita c.t.p. Entonces $f \in L^1(A)$ y $f_n \to f$ en $L^1(A)$. ¿Vale si $A = \mathbb{R}$? (3

(b) Lo mismo ocurre si $f_n \in L^1(A)$, $f_n \to f$ c.t.p. y existen $p > 1$ y constante $c > 0$ tal que $\|f_n\|_p \leq c$ para todo n. (3)

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Curso: Análisis III, Otoño 2009
Profesor: Manuel Pinto
Ayudante: Patricio Quiroz H.

Prueba 2

Resuelva 4 de los 5 problemas   6 Junio , 2009

1. (a) Para $x \in \mathbb{R}$, sea $[x]$ su parte entera ($i.e.[x] \in \mathbb{Z}$ y $[x] \leq x < [x]+1$). Sea $\varphi : (0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $\varphi(x) = ([x^{-1}])^{1/2009}$. Demuestre que $\varphi \in L^1([0,1])$ y calcule $\displaystyle\int_{[0,1]} \varphi$.[2,5 pts.] ¿Es integrable Riemann? [0,5 pts.].

   (b) Suponga que $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ es una función medible para la cual $|f|$ es impropiamente integrable en el sentido de Riemann. Demuestre que f es integrable en el sentido de Lebesgue [2,5 pts.]. Y si quitamos el valor absoluto? [0,5 pts.].

2. Para $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable en el sentido de Lebesgue, defina $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$h_n \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}$

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) h(x) dx.$$

Pruebe que φ es continua [3 pts.]. Encuentre una condición [1 pt.] que permita que φ sea derivable y demuestre su derivabilidad [2 pts.].

3. Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable y $g_t(x) = g(tx)$.

   (a) Para $t \neq 0$, pruebe que $g_t \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = t \int_{\mathbb{R}} g_t(x)dx. \text{ [2,5 pts.].}$$

   (b) Pruebe que

$$\lim_{t \to 1} \int_{\mathbb{R}} | g_t(x) - g(x) | \, dx = 0, \text{[3,5 pts.].}$$

4. (a) Demuestre que si $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua que es absolutamente continua en todo $[0,\varepsilon]$ con $\varepsilon < 1$, entonces v es absolutamente continua en [0,1] [2 pts.]. Vale esto para v sólo continua? [1 pt.]

   (b) Sea $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones absolutamente continuas con $u_n(a) = 0$. Suponga que sus derivadas $\{u_n'\}_{n=1}^{\infty}$ forman una sucesión de Cauchy en $L^1([a,b])$. Demuestre que existe u absolutamente continua en $[a,b]$ [2 pts.] tal que $u_n \to u$ uniformemente en $[a,b]$ [1 pt.].

5. Sea A un conjunto medible. Se dice que un conjunto $V \subseteq L^1(A)$ es uniformemente integrable si y sólo si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_E |f| < \varepsilon$$

para $f \in V$ y $mE < \delta$.
Suponga $mA < \infty$

   (a) Demuestre el siguiente Teorema de Vitali: Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente integrable, $f_n \to f$ *c.t.p.* y f es finita c.t.p. Entones $f \in L^1(A)$ y $f_n \to f$ en $L^1(A)$. [3 pts.].

   (b) Lo mismo ocurre si $f_n \in L^1(A)$, $f_n \to f$ *c.t.p.* y existen $p > 1$ y constante $c > 0$ tal que $\|f_n\|_p \leq c$ para todo n [3 pts.].

UNIVERSO
VIA LACTEA
SISTEMA SOLAR
TIERRA
CHILE
SANTIAGO
UNIVERSIDAD DE CHILE
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
PROFESOR MANUEL PINTO
AYUDANTE FERNANFIO VENEGAS
FECHA 19 OCTUBRE 2013

ANALISIS ABSTRACTO I - PRUEBA 1

1. Demuestre o exhiba un contraejemplo (1.5 p cada uno)

   (a) Si $0 \leq f \leq g$ y g es Lebesgue integrable, entonces f es Riemann integrable ¿y si se intercambia Lebesgue con Riemann?

   (b) Para $A \subseteq \mathbb{R}$, $m^*(A) > 0$ si y sólo si A contiene un conjunto P no medible.

   (c) Si $f_n \rightrightarrows f$ entonces $\lim \int_A f_n = \int_A f$ ¿y con el limite inferior?

   (d) Para una función ψ medible, $\psi^{-1}(B)$ es medible para todo B boreliano.

2. (a) (3 p) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ con $0 < m^*(A) < \infty$. Pruebe que para todo $\alpha \in (0,1)$ existe un intervalo abierto I tal que

$$\alpha m(I) \leq m^*(A \cap I).$$

   (b) (3 p) Demuestre que $E \subseteq \mathbb{R}$ es medible si para todo intervalo I

$$\ell(I) = m^*(I \cap E) + m^*(I \cap E^c)$$

   donde $\ell(I)$ es el largo del intervalo I.

3. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto medible y $f_n : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles tales que $f_n \to f$ ctp. cuando n tiende a ∞. Demuestre que existe $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq E$ con $m(E - B) = 0$ (2.5 p) tal que $f_n \rightrightarrows f$ (uniformemente) en cada B_i (1.5 p) ¿La convergencia es uniforme en B? (1 p) ¿y si $m(E) < \infty$? (1 p)

4. (a) (2 p) Demuestre que $\int\limits_{[0,1]} x^2 = 1/3$ usando la definicion de integral de Lebesgue.

   (b) Encuentre la integral de Lebesgue $\int\limits_{[0,1]} f$ para:

      i. (2 p) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 \mathcal{X}_{[0.5^{n+1}, 0.5^n]}(x)$

      ii. (2 p) $f(x) = \sqrt[3]{[x^{-2}]}$ (Donde $[\,\cdot\,]$ representa la parte entera)

5. Suponga que $\psi_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ son funciones medibles uniformemente acotadas ($\psi_n \leq c$, c constante), satisfaciendo que $\forall \epsilon > 0$, $\exists T > 0$ tal que

$$\int\limits_{\{x \mid |x| > T\}} \psi_n \leq \epsilon, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

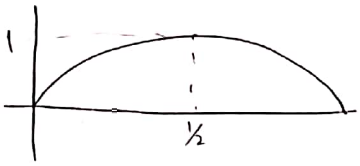
Demuestre que si $\psi_n \to \psi$ ctp. entonces

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \psi_n = \int\limits_{\mathbb{R}} \psi. \text{ (4 p)}$$

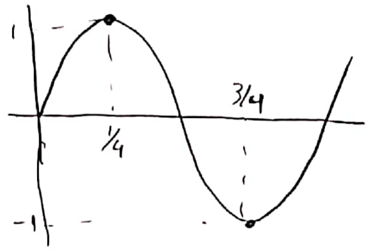
Deduzca el valor de

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}} |nx^5|\, e^{-n|x|} dx. \text{ (2 p)}$$

Scanned with CamScanner



$T=2.$



$T=4.$

Ej: Encontrar $f_n \rightrightarrows 0$ tq $T_a^b(f_n) \to \infty$.

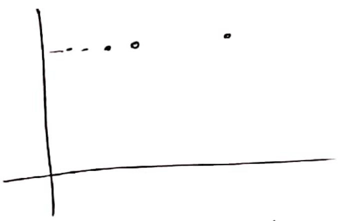
$A_n = \{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, 1\}$, $\#A_n = 2^n+1$, así $T(\chi_{A_n}) = 2^n+1$

$T(\frac{1}{n}\chi_{A_n}) = \frac{2^n+1}{n} \to \infty$, pero $\frac{1}{n}\chi_{A_n} \rightrightarrows 0$.

Derivable ctp no implica V.A.

$A = \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$.

χ_A :



05/11/13.

Ayudantía Análisis II

Si f es integrable, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua. Si $f > 0 \Rightarrow F$ monótona

$\Rightarrow F$ derivable ctp y F está acotado $|F(x)| = |\int_a^x f(t)dt| \leq \int_a^x |f(t)|\,dt \leq \int_a^b |f(t)|dt < \infty$.

$F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f_+ - \int_a^x f_-$ (diferencia de 2 monótonas) $\therefore$ F es de variación acotada

Luego: $F'(x) = f_+(x) - f_-(x)$ ctp.

Ej: $m(A) < \infty$. $f(x) = m((a,x] \cap A) = \int_a^x \chi_A \Rightarrow f' = \chi_A$ ctp.

Obs: Si f es V.A. $\Rightarrow f'$ es integrable. (usando $\int_a^b f' \leq f(b) - f(a)$).

$f' = h' - g' \Rightarrow |f'| \leq h' + g' \Rightarrow \int_a^b |f'| \leq h(b) - h(a) + g(b) - g(a)$

monótonas

Def: F es absolutamente continua si $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ tq $\sum_{\mathcal{Q}} |x_i - x_i'| < \delta$

$\Rightarrow \sum_{\mathcal{Q}} |f(x_i) - f(x_i')| < \varepsilon$.

Si $F(x) = \int_a^x f \Rightarrow$ F es abs. continua (prop. 13). ↝ f integrable

$\sum |f(x_i') - f(x_i)| \leq L \sum |x_i' - x_i|$.

Abs continua $\Rightarrow$ V.A.

Dem: Lo hacemos por contradicción y vamos viendo que si la variación total es infinita, en algún intervalo será infinita.

Prop: Si f abs. continua y $f' = 0$ ctp $\Rightarrow f = c$

Si f es de V.A. y $f' = 0 \not\Rightarrow f = c$, el ejemplo es:

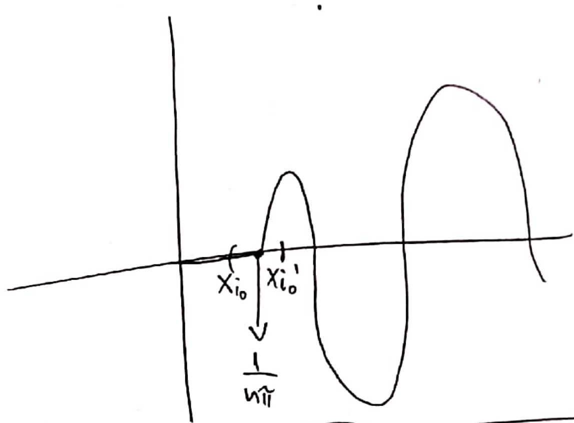
Derivada continua en un compacto es acotada y es de Lipschitz

Si f_n es abs. continua y $f_n \rightrightarrows f$, entonces ¿f es abs cont.?

Sabemos que $x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ entre $\frac{1}{n\pi}$ y 1 es Lipschitz. Dado $\varepsilon>0$, tomo $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$.

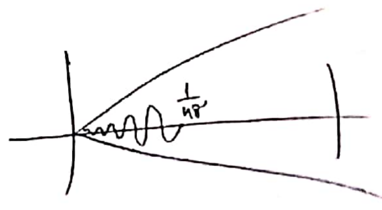
$\mathcal{Q} = \{x_i, x_i', \ldots, x_n, x_n'\}$

$$\sum_{i>i_0} |f(x_i) - f(x_i')| \leq L \sum |x_i - x_i'| \leq \varepsilon.$$



$$\sum |f(x_i) - f(x_i')|$$
$$= |f(x_{i_0}') - f(x_{i_0})| + \sum_{i>i_0} | \quad |$$
$$\leq |f(x_{i_0}') - f\left(\tfrac{1}{n\pi}\right) + f\left(\tfrac{1}{n\pi}\right) - f(x_{i_0})| + \sum | \quad |$$
$$\leq L\left(\left|\tfrac{1}{n\pi} - x_{i_0}'\right| + \sum |x_i - x_i'|\right)$$
$$\leq L\left(|x_{i_0}' - x_{i_0}| + \sum | \quad |\right) \leq L \frac{\varepsilon}{L}.$$

$|f - f_n|$



Scanned with CamScanner

Es diferenciable? - Para x fijo.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(x+\varepsilon_n)-\varphi(x)}{\varepsilon_n} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(\frac{e^{\frac{-x-\varepsilon_n}{y}} - e^{-\frac{x}{y}}}{\varepsilon_n} \right) f(y)\,dy, \text{ con } \varepsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Sea $g_n(y) = \dfrac{e^{\frac{-x-\varepsilon_n}{y}} - e^{-\frac{x}{y}}}{\varepsilon_n} f(y) \xrightarrow{n\to\infty} g(y) = e^{-\frac{x}{y}}\left(-\frac{1}{y}\right)f(y)$.

$f_y(x) = e^{-\frac{x}{y}}$ por T.V.M $\exists a_n \in]\,(x-\varepsilon_n, x+\varepsilon_n) \subseteq (0,1)$, $\exists\, 0 < x_0 < x-\varepsilon_n$.

$$\left|\frac{g_n(y)}{f}\right| = \left|\frac{f_y(x+\varepsilon_n) - f_y(x)}{\varepsilon_n}\right| \doteq |f'_y(a_n)| = \left|e^{-\frac{a_n}{y}}\left(-\frac{1}{y}\right)\right| \le e^{-\frac{x_0}{y}}\frac{1}{y} \le \frac{1}{x_0}.$$

$\varphi_n, f \in L_p(A)$ con $m(A)<\infty$ y $\varphi_n \to f$ ctp:

Dq: $\|\varphi_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} \|f\|_p \Rightarrow \|\varphi_n - f\|_p \to 0$.

PD: $\lim_{n\to\infty} \int_A |\varphi_n - f|^p = 0$.

Sea $h_n = |\varphi_n - f|^p$. Luego $h_n(t) \le \underbrace{2^p(|\varphi_n(t)|^p + |f(t)|^p)}_{g_n(t) \to 2^{p+1}|f(t)|^p}$.

Por hipótesis $\int|\varphi_n|^p \to \int |f|^p \Rightarrow \int 2^p(|\varphi_n|^p + |f|^p) \to \int 2^{p+1}|f|^p \Rightarrow \int g_n \to \int g$.

14/11/13.

Ayudantía Análisis II

(2010) 1) Sea $f \in L^1$ y $\beta \in \mathbb{R}$ constante. Defina $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $t \to \varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sen}(tx+\beta) f(x)\,dx$.

- Demuestre que $\varphi(t) \xrightarrow[|t|\to\infty]{} 0$ y deduzca que $\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\,dx \xrightarrow[|t|\to\infty]{} 0$.

Encuentre una condición para que φ sea diferenciable y luego demuestre la diferenciabilidad de φ.

Supongamos que f es continua y cumple que $f=0$ $\forall x \notin [-n,n]$, $n \in \mathbb{N}$.

$\varphi(t) = \int_{-n}^{n} \operatorname{sen}(tx+\beta) f(x)\,dx$. Sea $tx+\beta = u \Rightarrow t\,dx = du$.

$\varphi(t) = \int_{-tn+\beta}^{tn+\beta} \operatorname{sen}(u)\, f\left(\frac{u-\beta}{t}\right) du$, pero $|f(t)| \le K$, $\forall t \in [-n,n]$.

$$|\varphi(t)| \le \left|\frac{K}{t}\int_{-tn+\beta}^{tn+\beta} \operatorname{sen}(u)\,du\right| = \frac{K}{|t|}\left(-\cos(u)\right)\Big|_{-nt+\beta}^{nt+\beta} = \frac{K}{|t|}\left(\cos(-nt+\beta) - \cos(tn+\beta)\right) \le \frac{2K}{|t|} \xrightarrow[|t|\to\infty]{} 0$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ y g continua con soporte $[-N, N]$ tq

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| < \varepsilon.$$

Sea $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ tq $\varepsilon_n \to 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(t+\varepsilon_n) - \varphi(t)}{\varepsilon_n} = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon_n} \left([\operatorname{sen}(tx + \varepsilon_n x + \beta) - \operatorname{sen}(tx+\beta)] f(x) dx \right).$$

Como sen(·) tiene derivada acotada $\Rightarrow$ es de Lip.

$$\left| \frac{1}{\varepsilon_n} [\operatorname{sen}(tx + \varepsilon_n x + \beta) - \operatorname{sen}(tx+\beta)] f(x) \right| \leq \left| \frac{1}{\varepsilon_n} x \varepsilon_n f(x) \right| = |x f(x)|$$ (condición necesaria).

Ayudantía Análisis II

29/10/13.

Si f es integrable $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

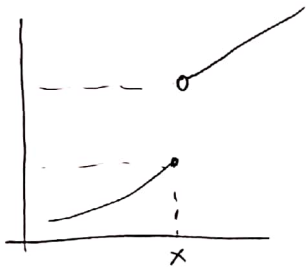
$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx.$

$\frac{F(t+\varepsilon) - F(t)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} f(x)dx.$ Si f es creciente, $x \in (t, t+\varepsilon)$, entonces:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} f(t) \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} f(x)dx \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} f(t+\varepsilon)$$

$$f(t) \leq \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} f(x)}_{\downarrow \, f(t)} \leq f(t+\varepsilon).$$

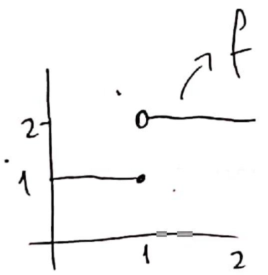
Obs: f creciente $\Rightarrow$ # número de discontinuidades



$x \to I_x \to q_x$ (de manera inyectiva), así toda función creciente en un intervalo es Riemann integrable.

Teo 2: f monótona $\Rightarrow$ f' $\exists$ ctp y $\int_a^b f' \leq f(b) - f(a)$.

Ej:



$\int_0^2 f = 3 \leq F(2) - F(0) = 4 - 0.$

primitiva: $F(x) = \begin{cases} x \\ 2x \end{cases}$

Sea $f_A(x) = m((-\infty, x] \cap A)$

$$\int_a^b f_A'(x)dx \leq f_A(b) - f_A(a) = m((-\infty, b] \cap A) - m((-\infty, a] \cap A) = m([a,b] \cap A) = \int_a^b \chi_A$$

$$f_A(x) = m((-\infty, x] \cap A) = \int_{-\infty}^{x} \chi_A \Rightarrow f_A'(x) = \chi_A \text{ ctp}.$$

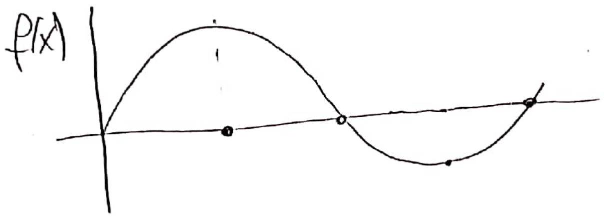
Funciones de variación acotada: $\mathcal{Q} = \{x_0=a, \dots, x_n=b\}$ de un $[a,b]$

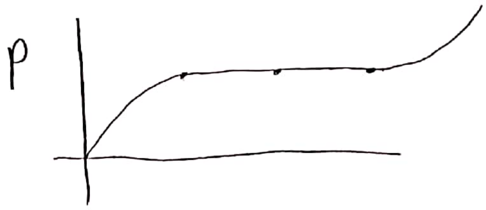
$p = \sum [f(x_n) - f(x_{n-1})]^+$, $P = \sup_{\mathcal{Q}} p$, $N = \sup_{\mathcal{Q}} n$

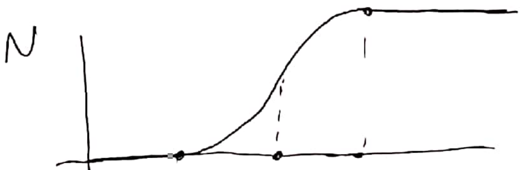
$T_a^b(f) = \sup \{ \sum | f(x_n) - f(x_{n-1}) | \}$, $T_a^b(f) < \infty$.

$f(x) - f(a) = P_a^x - N_a^x$

Ejemplo: $f(x) = \text{sen}(x)$.







V.A: → en un intervalo.
· Dif de 2 monótonas
· Derivable ctp
· Son Riemann integrable.
· Es acotada.

$T_a^b(f) + T_a^b(g) \geq \sum_{\mathcal{Q}} | f(x_n) - f(x_{n-1}) | + | g(x_n) - g(x_{n-1}) | \geq \sum_{\mathcal{Q}} | f(x_n) + g(x_n) - (f(x_{n-1}) - g(x_{n-1})) |$

$\therefore T_a^b(f) + T_a^b(g) \geq T_a^b(f+g)$.

$T_a^b(cf) = \sup \sum | c(f(x_n) - f(x_{n-1})) | = |c| \, T_a^b(f)$.

$T_a^b(f) \geq 0$. $T_a^b(f) = 0 \Rightarrow f = \text{constante} \Rightarrow f' = 0$. Definamos una norma:

$\|f\| = |f(a)| + T_a^b(f)$.

Lema: f monótona $\Rightarrow T_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Curso: Análisis III, Otoño 2009
Profesor: Manuel Pinto
Ayudante: Patricio Quiroz H.

Prueba 2

Resuelva 4 de los 5 problemas 6 Junio , 2009

1. (a) Para $x \in \mathbb{R}$, sea $[x]$ su parte entera ($i.e. [x] \in \mathbb{Z}$ y $[x] \leq x < [x]+1$). Sea $\varphi : (0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $\varphi(x) = ([x^{-1}])^{1/2009}$. Demuestre que $\varphi \in L^1([0,1])$ y calcule $\int_{[0,1]} \varphi$.[2,5 pts.] Es integrable Riemann? [0,5 pts.].

   (b) Suponga que $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ es una función medible para la cual $|f|$ es impropiamente integrable en el sentido de Riemann. Demuestre que f es integrable en el sentido de Lebesgue [2,5 pts.]. Y si quitamos el valor absoluto? [0,5 pts.].

2. Para $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable en el sentido de Lebesgue, defina $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)h(x)dx.$$

Pruebe que φ es continua [3 pts.]. Encuentre una condición [1 pt.] que permita que φ sea derivable y demuestre su derivabilidad [2 pts.].

3. Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable y $g_t(x) = g(tx)$.

   (a) Para $t \neq 0$, pruebe que $g_t \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = t \int_{\mathbb{R}} g_t(x)dx.$$

   (b) Pruebe que

$$\lim_{t \to 1} \int_{\mathbb{R}} | g_t(x) - g(x) | \, dx = 0,$$

4. (a) Demuestre que si $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua que es absolutamente continua en todo $[0, \varepsilon]$ con $\varepsilon < 1$, entonces v es absolutamente continua en [0,1] **[2 pts.]**. Vale esto para v sólo continua? **[1 pt.]**

   (b) Sea $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones absolutamente continuas con $u_n(a) = 0$. Suponga que sus derivadas $\{u_n'\}_{n=1}^{\infty}$ forman una sucesión de Cauchy en $L^1([a,b])$. Demuestre que existe u absolutamente continua en $[a,b]$ **[2 pts.]** tal que $u_n \to u$ uniformemente en $[a,b]$ **[1 pt.]**.

5. Sea A un conjunto medible. Se dice que un conjunto $V \subseteq L^1(A)$ es uniformemente integrable si y sólo si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_E |f| \leqslant \varepsilon$$

para $f \in V$ y $mE < \delta$.
Suponga $mA < \infty$

   (a) Demuestre el siguiente Teorema de Vitali: Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente integrable, $f_n \to f$ *c.t.p.* y f es finita c.t.p. Entones $f \in L^1(A)$ y $f_n \to f$ en $L^1(A)$. **[3 pts.]**.

   (b) Lo mismo ocurre si $f_n \in L^1(A)$, $f_n \to f$ *c.t.p.* y existen $p > 1$ y constante $c > 0$ tal que $\|f_n\|_p \leq c$ para todo n **[3 pts.]**.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Curso: Análisis II, Primavera 2009
Profesor: Manuel Pinto
Ayudante: Patricio Quiroz H.

Prueba 2

Noviembre 4, 2009

Resuelva 4 de los 5 problemas.

1. Para $h \in L^1(\mathbb{R})$, defina $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx^2} h(x)dx.$$

Pruebe que φ es continua [2 pts.]. Encuentre una condición [1 pt.] que permita que φ sea derivable y demuestre su derivabilidad [3 pts.].

2. (a) Sea f integrable sobre $E \subset \mathbb{R}$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe una función simple φ tal que

$$\int_E |f - \varphi| < \varepsilon [2,5 \text{ pts.}]$$

(b) Sea $\{E_n\} \subset \mathbb{R}$ sucesión de conjuntos medibles. Demuestre que son equivalentes:

i) $\forall A \subset \mathbb{R}$ medible de medida finita,

$$\lim_{n\to\infty} m(A - E_n) = 0[1 \text{ pts.}]$$

ii) $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$f\chi_{E_n} \to f \text{ en } L^1(\mathbb{R})[2,5 \text{ pts.}]$$

[Hint: use (a)] (i) ⇒ (ii)

3. (a) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pruebe que

$$\lim_{x\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(t)dt = 0[3{,}5 \text{ pts.}]$$

(b) Deduzca que, $\forall A \subset \mathbb{R}$ medible de medida finita $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_A \sin(\alpha t + \beta)dt = 0$$

[2 pts.] ¿Vale para $A = \mathbb{R}$?[0,5 pts.]

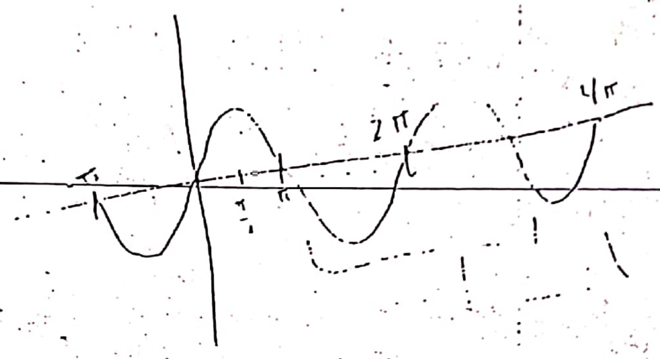
4. (a) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Demuestre que existe una única [3 pts.] función absolutamente continua x tal que (*) $x'(t) = f(t)$ c.t.p. y (**) $x(0) = 1$. Demuestre que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ existe una única x, solución de (*) tal que $x(t) \to \alpha$ cuando $t \to \infty$[1 pts.].

(b) Demuestre que, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función absolutamente continua, entonces $f(A)$ es de medida cero si A es de medida cero[1 pt.].¿Vale esto para f sólo continua?[1 pt.].

5. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles en $\mathbb{R}$ tal que $f_n \to f$ c.t.p. en $\mathbb{R}$. Demuestre que $\forall A \subset \mathbb{R}$ medible de medida finita se tiene $f_n \to f$ en $L^1(A)$ si alguna de las condiciones i) o ii) se satisface: (pruebe asumiendo sólo una de ellas)

0 i) $\int_{\mathbb{R}} (1 + x^2)^p |f_n|^p \leq 2009 \ \forall p > 1$ $[2\pi, 4\pi]$

0 ii) $\int_B |f_n| \leq \int_B e^{-x^2} dx \ \forall B \subset \mathbb{R}$ medible.



$2\pi, 4\pi$

0,

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Curso: Análisis III, Otoño 2009
Profesor: Manuel Pinto
Ayudante: Patricio Quiroz H.

Prueba 2

Resuelva 4 de los 5 problemas — 6 Junio, 2009

1. (a) Para $x \in \mathbb{R}$, sea $[x]$ su parte entera (*i.e.* $[x] \in \mathbb{Z}$ y $[x] \leq x < [x]+1$). Sea $\varphi : (0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $\varphi(x) = ([x^{-1}])^{1/2009}$. Demuestre que $\varphi \in L^1([0,1])$ y calcule $\int_{[0,1]} \varphi$. [2,5 pts.] ¿Es integrable Riemann? [0,5 pts.].

   (b) Suponga que $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ es una función medible para la cual $|f|$ es impropiamente integrable en el sentido de Riemann. Demuestre que f es integrable en el sentido de Lebesgue [2,5 pts.]. ¿Y si quitamos el valor absoluto? [0,5 pts.].

2. Para $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable en el sentido de Lebesgue, defina $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$h_n \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}$

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)h(x)dx.$$

Pruebe que φ es continua [3 pts.]. Encuentre una condición [1 pt.] que permita que φ sea derivable y demuestre su derivabilidad [2 pts.].

3. Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable y $g_t(x) = g(tx)$.

   (a) Para $t \neq 0$, pruebe que $g_t \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = t\int_{\mathbb{R}} g_t(x)dx. \quad [2,5 \text{ pts.}].$$

   (b) Pruebe que

$$\lim_{t\to 1} \int_{\mathbb{R}} | g_t(x) - g(x) | \, dx = 0, \, [3,5 \text{ pts.}].$$

4. (a) Demuestre que si $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua que es absolutamente continua en todo $[0,\varepsilon]$ con $\varepsilon < 1$, entonces v es absolutamente continua en [0,1] [2 pts.]. Vale esto para v sólo continua? [1 pt.]

   (b) Sea $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones absolutamente continuas con $u_n(a) = 0$. Suponga que sus derivadas $\{u'_n\}_{n=1}^{\infty}$ forman una sucesión de Cauchy en $L^1([a,b])$. Demuestre que existe u absolutamente continua en $[a,b]$ [2 pts.] tal que $u_n \to u$ uniformemente en $[a,b]$ [1 pt.].

5. Sea A un conjunto medible. Se dice que un conjunto $V \subseteq L^1(A)$ es uniformemente integrable si y sólo si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_E |f| < \varepsilon$$

para $f \in V$ y $mE < \delta$.
Suponga $mA < \infty$

   (a) Demuestre el siguiente Teorema de Vitali: Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente integrable, $f_n \to f$ *c.t.p.* y f es finita c.t.p. Entones $f \in L^1(A)$ y $f_n \to f$ en $L^1(A)$. [3 pts.].

   (b) Lo mismo ocurre si $f_n \in L^1(A)$, $f_n \to f$ *c.t.p.* y existen $p > 1$ y constante $c > 0$ tal que $\|f_n\|_p \leq c$ para todo n [3 pts.].

ANALISIS ABSTRACTO I
PRUEBA 2

Octubre 30, 2012

Responder 4 problemas
Tiempo = 3 horas

1. Demuestre o de un contraejemplo (1 p. c/u)

    (a) $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ implica $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
    (b) Si $f_n \rightrightarrows f$ entonces $T_a^b(f_n) \to T_a^b(f)$
    (c) f Riemann integrable implica $f \in L^1(\mathbb{R})$
    (d) $p < q$ implica $L^q(A) \subseteq L^p(A)$
    (e) El espacio $L^\infty([0,1])$ es completo
    (f) h es absolutamente continua en $[0,1]$ si y solo si $h(x) = h(1/2) + \int_{1/2}^{x} h'(t)dt$

2. Sean

$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt, \quad \xi(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 ; \quad x \geq 0.$$

Demuestre que existe $\varphi(\infty)$ (1 p) y φ' (2 p) y calculelos (0.5 p). Demuestre que $\varphi + \xi$ es constante (1,5 p) y deduzca que

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}/2 \qquad (1\ p)$$

3. Para $h \in L^1(\mathbb{R})$ defina $h_t(x) := h(tx)$. Demuestre que

    (a) Si $\cancel{t \neq 0}$ $t > 0$, entonces $h_t \in L^1(\mathbb{R})$ (1.0 p) y

$$\int_{\mathbb{R}} h = t \int_{\mathbb{R}} h_t \quad (2\ p)$$

    (b) Para $g \in L^\infty$,

$$\lim_{t\to 1} \int_{\mathbb{R}} g(x)\,|h_t(x) - h(x)|\,dx = 0 \quad (3.0\ p)$$

4. Suponga que para $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible, las funciones medibles $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfacen $|\varphi_n(x)| \leq 2012$ y $\varphi_n \to \varphi$ ctp. en A cuando $n \to \infty$. Sean $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^p(A)$ que verifican $\psi_n \to \psi$ en $L^p(A)$. Demuestre que si $m(A) < \infty$ entonces $\psi_n \varphi_n \to \psi\varphi$ en $L^p(A)$ (5 p).¿Y si $A = \mathbb{R}$? (1 p)

5. Suponga $f_n \to f$ ctp en $\mathbb{R}$ demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f$$

   (a) Si $A = \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ y para cada $\epsilon > 0$ existe $N_0 = N_0(\epsilon)$ tal que para todo $n \geq N_0$

$$\int_B |f_n| \leq \int_B |f| + \epsilon \quad \forall B \subset \mathbb{R} \quad (\text{ 2.5 p})$$

   (b) $m(A) < \infty$ y para todo $B \subset A$ medible

$$\int_B |f_n| \, dt \leq \int_B \frac{dt}{1+t^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{1.5 p })$$

   Extienda a $m(A) = \infty$ (2 p)

1

(2) $\xi, \varphi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tq

$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$$

$$\xi(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2$$

PD: $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)$ existe.

D: Sea $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, sea $f_n = \dfrac{e^{-x_n^2(1+t^2)}}{1+t^2}$, SPG $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-x_n^2(1+t^2)}}{1+t^2} = \frac{0}{1+t^2} = 0$$

$$|f_n| = \left|\frac{e^{-x_n^2(1+t^2)}}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2} \quad \forall t \in [0,1]$$

Por la parte (5) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+t^2} = \pi < \infty$

Luego

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{[0,1]}(t)\, dt}{1+t^2} \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+t^2} < \infty$$

Luego por Lebesgue:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{-x_n^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt = \int_0^1 0\, dt = 0$$

$\therefore$ $\forall x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = 0$ existe

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$ existe.

PD: $\exists\ \varphi'$ y calcularla.

D: Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tq $f(t) = e^{-t} \Rightarrow f'(t) = -e^{-t}$

$\Rightarrow |f'(t)| = |e^{-t}| \leq 1 \quad \forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow f$ es de Lipschitz $\Rightarrow \exists L > 0$ tq $|e^{-x} - e^{-y}| \leq L|x-y| \quad \forall x,y \in [0,1]$

Sea $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $x_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\varphi(x+x_n) - \varphi(x)}{x_n} = \int_0^1 \left(\frac{e^{-(x+x_n)^2(1+t^2)} - e^{-x^2(1+t^2)}}{x_n}\right) \frac{dt}{1+t^2}$$

Sea $P_n(t) = \dfrac{1}{1+t^2}\left(\dfrac{e^{-(x+x_n)^2(1+t^2)} - e^{-x^2(1+t^2)}}{x_n}\right)$

Sea $h(x) = e^{-x^2(1+t^2)}$ derivable luego como $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $x_n \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e^{-(x+x_n)^2(1+t^2)} - e^{-x^2(1+t^2)}}{x_n}\right) = \frac{d}{dx} e^{-x^2(1+t^2)}$$

$$= e^{-x^2(1+t^2)} \cdot -(1+t^2)\cdot 2x$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} P_n(t) = -2x e^{-x^2(1+t^2)}$$

$$|P_n(t)| = \frac{1}{1+t^2}\left|\frac{e^{-(x+x_n)^2(1+t^2)} - e^{-x^2(1+t^2)}}{x_n}\right| \leq \frac{L}{(1+t^2)} \cdot \frac{|1+t^2|}{|x_n|} \, |x^2 + 2xx_n + x_n^2 - x^2|$$

$$\leq L\,|1 + 2x + x_n|$$

$$\leq L(1 + 2|x| + |x_n|) \leq L(1 + 2|x| + M)$$

Donde $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty$, pues x_n es convergente.

$$\int_0^1 L(1+2|x|+M)\,dt = L(1+2|x|+M) < \infty$$

Por Lebesgue, como $L(1+2|x|+M)$ es integrable

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 P_n(t)\,dt = \int_0^1 -2x e^{-x^2(1+t^2)}\,dt$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(x+x_n) - \varphi(x)}{x_n} = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt$$

~~Sea $f(t) = e^{-x^2(1+t^2)}$, $t\in[0,1]$, f es continua en c~~

Además: $\left|-2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt\right| \leq 2|x|\int_0^1 |e^{-x^2(1+t^2)}|\,dt \leq 2|x| < \infty$

Luego el límite existe y es $\neq \pm\infty$

Luego $\forall x_n \to 0$ tq $x_n \neq 0$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(x+x_n) - \varphi(x)}{x_n} = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt \neq \pm\infty$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt \neq \pm\infty$$

$\therefore$ φ' existe, $\varphi'(x) = -2x\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt$

CALCULAMOS :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{e^{t^2}} \overset{L'H}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{2te^{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{t^2}} = 0$$

LUEGO $\exists\, t_0 > 0$. tq $\forall t \geq t_0$ $\left|\frac{t^2}{e^{t^2}}\right| < 1 \Rightarrow e^{-t^2} \leq \frac{1}{t^2} \; \forall t \geq t_0$

~~Visto~~

SEA $f_n(t) = \frac{1}{t^2}\chi_{[t_0,n]}(t) \longrightarrow \frac{1}{t^2}\chi_{[t_0,\infty)}(t)$

$\frac{1}{t^2} \geq 0 \Rightarrow f_n \leq f_{n+1}$ ADEMAS $f_n \geq 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{\infty} f_n = \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{n} \frac{dt}{t^2}$$

$f(t) = \frac{1}{t^2}$ ES CONTINUA EN $[t_0, n]$ LUEGO RIEMANN INTEGRABLE

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{n} \frac{dt}{t^2} = R\int_{t_0}^{n} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_{t_0}^{n} = \frac{1}{t_0} - \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{t_0}$$

$$\therefore \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t_0}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \int_0^{t_0} e^{-t^2}dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-t^2}dt \leq \int_0^{t_0} e^{-t^2}dt + \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{t^2}$$

$$= \int_0^{t_0} e^{-t^2}dt + \frac{1}{t_0} < \infty$$

ESTO SE DEBE A QUE $\int_0^{t_0} e^{-t^2}dt \leq t_0 < \infty$ $\therefore$ e^{-t^2} ES INTEGRABLE EN $[0,\infty)$

LUEGO $\bar{\xi}(x) := \int_0^x e^{-t^2}dt$ ES ABS. CONTINUA .

Y $\bar{\xi}'(x) = e^{-x^2}$ CTP

LUEGO φ Y $\xi = (\bar{\xi})^2$ SON DERIVABLES

$$Y \;\; (\varphi + \xi)'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt + 2\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)\cdot e^{-x^2}$$

$$= -2\left(\int_0^1 e^{-(xt)^2}x\,dt - \int_0^x e^{-t^2}dt\right)e^{-x^2}$$

$e^{-(xt)^2}x$ CONTINUA LUEGO

$$\int_0^1 e^{-(xt)^2}x\,dt = R\int_0^1 e^{-(xt)^2}x\,dt \underset{\substack{u = xt \\ du = x\,dt}}{=} R\int_0^x e^{-u^2}du \underset{(*)}{=} \int_0^x e^{-u^2}du$$

JUSTIFICAMOS $(*)$ $e^{-u^2}\chi_{(0,x)}(u)$ ES CONTINUA CTP EN $[0, 2x]$

LUEGO RIEMANN LUEGO LEBESGUE INTEGRABLE , LUEGO AMBAS INTEGRALES COINCIDEN

$\therefore \; (\varphi + \xi)'(x) = 0$

PD: $h(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ ES INYECTIVA.

D: SI $h(x) = h(y) \wedge x < y \Rightarrow \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \int_0^y e^{-t^2}$

$\Rightarrow \int_x^y e^{-t^2}\,dt = 0 \,, \; e^{-t^2} > 0 \Rightarrow e^{-t^2} = 0$ CTP $\Rightarrow\Leftarrow$

$\therefore$ h ES INYECTIVA.

PD: $f(x) = x^2 \,, \; x \geq 0$ ES ABS. CONTINUA.

D: f ES DERIVABLE Y $f'(x) = 2x$ ES CONTINUA LUEGO INTEGRABLE EN CUALQUIER INTERVALO $[a,b]$, $a \geq 0$, POR CALCULO II $\Rightarrow$ f SATISFACE EL TEO FUNDAMENTAL DEL CALCULO EN CUALQUIER INTERVALO $[a,b]$, EN PARTICULAR EN $[0,r]$, $r > 0$

LUEGO ξ ES ABS. CONTINUA EN $[0,r]$ $\forall r > 0$

PUES $\xi = f \circ h \,\wedge\, f$ Y h SON ABS. CONT $\wedge$ h ES INYECTIVA.
(ESTO SE DEMUESTRA EN ③)

PD: φ' ES CONTINUA

D: $\varphi'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt$

SI $x_n \to x$, SEA $\varphi_n(t) := -e^{-x_n^2(1+t^2)} \cdot 2x_n$, (x_n) CONVERGENTE $\Rightarrow \exists M > 0$ TQ $|x_n| \leq M \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = -2e^{-x^2(1+t^2)} \cdot x$, POR CONTINUIDAD DE EXPONENCIAL Y DE LA IDENTIDAD.

ADEMAS $|\varphi_n(t)| = 2|x_n|\, e^{-x_n^2(1+t^2)} \leq 2M$

$\wedge \int_0^1 2M\,dt = 2M < \infty$

POR LEBESGUE: $\lim_{n\to\infty} \varphi'(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(t)\,dt = -\int_0^1 2e^{-x^2(1+t^2)} x\,dt$

$\therefore$ φ' CONTINUA

LUEGO φ DERIVABLE Y φ' CONTINUA EN $[0,r]$ $\forall r > 0$, LUEGO φ' INTEGRABLE EN $[0,r]$

$\Rightarrow$ φ ABS. CONTINUA EN $[0,r]$ $\forall r > 0$

PD: Si φ, ξ ABS CONT. en $[a,b] \Rightarrow \varphi+\xi$ ABS CONT. en $[a,b]$

D: Dado $\varepsilon>0$ $\exists\,\delta>0$ tq si $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{P}([a,b])$ disjuntos

tq $\sum_{i=1}^{n}|b_i-a_i|<\delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}|\varphi(b_i)-\varphi(a_i)|<\varepsilon/2$

$\exists\,\delta'>0$ tq si $\{(c_i,d_i)\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{P}([a,b])$ disjuntos

tq $\sum_{i=1}^{n}|c_i-d_i|<\delta' \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}|\xi(c_i)-\xi(d_i)|<\varepsilon/2$

Sea $\delta_0=\min\{\delta,\delta'\}>0$

Sea $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{P}([a,b])$ disjuntos tq $\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|<\delta_0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left|\xi(a_i)+\varphi(a_i)-\left(\xi(b_i)+\varphi(b_i)\right)\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}|\xi(a_i)-\xi(b_i)|+\sum_{i=1}^{n}|\varphi(a_i)-\varphi(b_i)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

$\therefore\ \varphi+\xi$ ABS CONT. en $[a,b]$

Si $\varphi+\xi$ ABS CONT en $[0,r]$ $\forall r>0$, $(\varphi+\xi)'=0$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \varphi(x)+\xi(x) &= C_1 \quad \forall x\in[0,1]\\ \varphi(x)+\xi(x) &= C_2 \quad \forall x\in[0,2]\\ &\vdots\\ \varphi(x)+\xi(x) &= C_n \quad \forall x\in[0,n]\end{aligned}$$

Si $x\in[0,1] \Rightarrow \varphi(x)+\xi(x)=C_1=C_2=C_3=C_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Luego si $x\geq 0 \Rightarrow \exists\, n\in\mathbb{N}$ tq $x\leq n$

$$\Rightarrow \varphi(x)+\xi(x)=C_n=C_1$$

$$\therefore\ \forall x\geq 0 \quad \varphi(x)+\xi(x)=C_1$$

$\therefore\ \varphi+\xi$ es CTE. Digamos $\varphi+\xi=C$

En particular

$$C=\varphi(0)+\xi(0)=\int_0^1\frac{e^{-0(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg}(1)-\operatorname{arctg}(0)$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

Luego $C=\frac{\pi}{4}$, luego $\frac{\pi}{4}=\varphi(x)+\xi(x)$

HACIENDO $X \to \infty \Rightarrow \varphi(x) \to 0$.

Y SE TIENE QUE $\frac{\pi}{4} = \lim_{x\to\infty} \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$

PD: $\lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^\infty e^{-t^2} dt$

D: SEA $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, SEA $f_n(x) = e^{-x^2} \chi_{[0,x_n]}$.

$f_n(x) \longrightarrow e^{-x^2} \chi_{[0,\infty)}$, ADEMAS $|f_n(x)| \leq e^{-x^2}$ Y e^{-x^2} ES INTEGRABLE EN $[0,\infty)$

LUEGO POR LEBESGUE $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{x_n} e^{-t^2} dt = \int_0^\infty e^{-t^2} dt \qquad \forall\, x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^\infty e^{-t^2} dt$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} = \left(\int_0^\infty e^{-t^2} dt \right)^2 \Rightarrow \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(3) $h \in L^1(\mathbb{R})$ $h_t(x) = h(tx)$

A) PD: SI $t>0 \Rightarrow h_t \in L^1(\mathbb{R})$ $\wedge$ $\int_{\mathbb{R}} h = t \int_{\mathbb{R}} h_t$

D:

LEMA: SI $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $g:[c,d] \to \mathbb{R}$ ABS. CONTINUAS

TQ g ES INYECTIVA Y $g([c,d]) \subseteq [a,b]$

$\Rightarrow f \circ g$ ES ABS. CONTINUA.

D: DADO $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ TQ SI $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{P}([a,b])$ DISJUNTOS

TQ $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ (PUES f ES ABS. CONTINUA)

PARA $\delta > 0$ $\exists \delta' > 0$ TQ SI $\{(c_i,d_i)\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{P}([c,d])$ DISJUNTOS

TQ $\sum_{i=1}^n |d_i - c_i| < \delta' \Rightarrow \sum_{i=1}^n |g(d_i) - g(c_i)| < \delta$ (PUES g ES ABS. CONTINUA)

DADO $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{P}([c,d])$ DISJUNTOS

TQ $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta' \Rightarrow \sum_{i=1}^n |g(b_i) - g(a_i)| < \delta$

g INYECTIVA Y $g([c,d]) \subseteq [a,b] \Rightarrow \{(g(a_i), g(b_i))\}_{i=1}^n$ V $\{(g(b_i), g(a_i))\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{P}([a,b])$ DISJUNTOS

ADEMAS $\sum_{i=1}^n |g(b_i) - g(a_i)| < \delta$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(g(b_i)) - f(g(a_i))| < \varepsilon$

$\therefore f \circ g$ ES ABS. CONTINUA.

CONSECUENCIA: CON TALES HIPOTESIS $f \circ g$ ES DERIVABLE CTP

Y $(f \circ g)'(t) = f'(g(t))\, g'(t)$ CTP

$f \circ g$ ABS CONT $\Rightarrow$

$$(f \circ g)(x) = (f \circ g)(c) + \int_c^x f'(g(t))\, g'(t)\, dt \quad (*)$$ (PUES $g \in C^\infty$ Y ABS CONT.)

EN PARTICULAR PARA $[c,d] = [-\frac{n}{t}, \frac{n}{t}]$, $g(x) = tx$ INYECTIVA $[a,b] = [-n, n]$ ~~$f(x) = h(x)$~~

~~SI ...~~ Y PARA $f(x) = \int_{-n}^{x} h$ ABS. CONTINUA (PUES $h \in L^1(\mathbb{R})$)

SE TIENE QUE POR $(*)$

$$\int_{-n}^{x} h = \int_{-n}^{-n} h + \int_{-n/t}^{x/t} h(ts)\, t\, ds$$

PUES $g'(s) = t$ $\wedge$ $f'(x) = h(x)$ CTP $\Rightarrow \int_{-n}^{n} h = \int_{-n/t}^{n/t} h(ts)\, t\, ds$

~~Integrando~~ Sin $h_n = \chi_{[-n,n)} h \xrightarrow{n\to\infty} h$, $|h_n| \le |h|$, $|h|$ integrable en $\mathbb{R}$

Lebesgue $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n = \int_{\mathbb{R}} h$

$$\therefore \int_{\mathbb{R}} h = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} h = \lim_{n\to\infty} t \int_{-n/t}^{n/t} h(xt)\,dx$$

Sin $r_n(x) = |h(xt)| \chi_{[-\frac{n}{t}, \frac{n}{t}]} \xrightarrow{n\to\infty} |h(xt)|$

Por el mismo argumento anterior para $|h|$

$\wedge$ $r_n \le r_{n+1}$ $\wedge$ $r_n \ge 0$

Por convergencia monótona $\Rightarrow$ $\int_{\mathbb{R}} |h(xt)|\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{n}{t}}^{-\frac{n}{t}} |h(xt)|\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t} \int_{-n}^{n} |h|$ e

Por si $\bar{h}_n = \chi_{[-n,n]} |h| \xrightarrow{n\to\infty} |h|$, $|\bar{h}_n| \le |h|$ $\wedge$ h integrable

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} |h| = \int_{\mathbb{R}} |h| < \infty$$

$$\therefore \int_{\mathbb{R}} |h(xt)| = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} |h| < \infty$$

$\therefore$ h_t integrable

Además ~~...~~ Sin, $\bar{r}_n(x) = h(xt) \chi_{[-\frac{n}{t}, \frac{n}{t}]}$, $|\bar{r}_n| \le |h_t|$ $\wedge$ $|h_t|$ integrable

Por Lebesgue $\lim_{n\to\infty} \int_{-n/t}^{n/t} h(xt)\,dx = \int_{\mathbb{R}} h(xt)\,dx$, pues $\bar{r}_n \to h_t$

$$\therefore \int_{\mathbb{R}} h = t \lim_{n\to\infty} \int_{-n/t}^{n/t} h(xt)\,dx = t \int_{\mathbb{R}} h(xt)\,dx$$

B) si $g \in L^\infty \Rightarrow \lim_{t\to 1} \int_{\mathbb{R}} g(x) \, |h_t(x) - h(x)| \, dx = 0$

D: Sea $t_n \xrightarrow{n\to\infty} 1$, SPG $t_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (si no, para n suf. grande se tiene que $t_n > 0$.)

PD: $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) \, |h_{t_n}(x) - h(x)| \, dx = 0$

D: si $\|g\|_\infty = 0 \Rightarrow g = 0$ CTP $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} g(x) \, |h_{t_n}(x) - h(x)| \, dx = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

si $\|g\|_\infty \neq 0$

Dado $\varepsilon > 0$ $\quad h \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua de soporte $[a,b]$

tq $\int_{\mathbb{R}} |f - h| < \min\left\{ \varepsilon / 3\|g\|_\infty , \frac{m\,\varepsilon}{3\|g\|_\infty} \right\}$ (tal $m > 0$ se especifica más adelante en $(*)$ y no depende de f)

$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\ \circ\ \overline{\qquad\qquad\qquad}$

PD: $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_{t_n}(x)| \, dx = 0$

D: Sea $P_n(x) = |f(x) - f(t_n x)|$

$|P_n(x)| \leq |f(x)| + |f(t_n x)| := g_n(x)$

$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = |f(x) - f(\lim_{n\to\infty} t_n x)| = |f(x) - f(x)| = 0$, pues f continua.

$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = |f(x)| + |f(x)| = 2|f(x)|$

f de soporte $[a,b] \Rightarrow \int_a^b |f| = \int_{\mathbb{R}} |f|$

$\int_{\mathbb{R}} g_n = \int_{\mathbb{R}} |f| + \int_{\mathbb{R}} |f(t_n x)| dx = \int_a^b |f| + \underline{\frac{1}{t_n} \int_a^b |f|}$ (por la parte A), pues f integrable)

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n = \int_a^b |f| + \frac{1}{1} \int_a^b |f| = \int_{\mathbb{R}} 2|f| < \infty$

Por Lebesgue generalizado

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} P_n(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_{t_n}(x)| \, dx = 0$

$\overline{\qquad\qquad\qquad}\ \circ\ \overline{\qquad\qquad\qquad}$

Luego $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(t_n x)| \, dx < \varepsilon / 3\|g\|_\infty$

$(*)$ como $t_n \to 1 \Rightarrow \exists \tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq \tilde{n}_0$ $\quad t_n \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

como $t_n > 0$, sea $m = \min(\{ t_n \,/\, n \in \{1, \dots, \tilde{n}_0 - 1\}\} \cup \{\frac{1}{2}\})$

$\Rightarrow 0 < m \leq t_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \frac{1}{t_n} \leq \frac{1}{m} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

h, f INTEGRABLES $\Rightarrow h, f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow h - f \in L^1(\mathbb{R})$

POR PUNTO A) $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |h-f| = t_n \int_{\mathbb{R}} |h_{t_n} - f_{t_n}|$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |h_{t_n} - f_{t_n}| \leq \frac{1}{t_n} \int_{\mathbb{R}} |h-f| < \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} |h-f| < \frac{\varepsilon}{3\|g\|_\infty}$$

Luego si $n \geq n_0 \Rightarrow$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g(x) \, |h_t(x) - h(x)| \, dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} g(x) \, | h(x) - f(x) + f(x) - f_{t_n}(x) + f_{t_n}(x) - h_{t_n}(x) | \, dx \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |g(x)| \, |h(x) - f(x)| \, dx + \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_{t_n}(x)| \, |g(x)| \, dx + \int_{\mathbb{R}} |g(x)| \, |f_{t_n}(x) - h_{t_n}(x)| \, dx$$

$$\underset{\text{HÖLDER}}{\leq} \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |h-f| + \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_{t_n}(x)| \, dx + \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f_{t_n}(x) - h_{t_n}(x)| \, dx$$

$$< \|g\|_\infty \frac{\varepsilon}{3\|g\|_\infty} + \|g\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{3\|g\|_\infty} + \|g\|_\infty \frac{\varepsilon}{3\|g\|_\infty} = \varepsilon$$

Luego $\forall t_n \to 1 \quad \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) \, |h_{t_n}(x) - h(x)| \, dx = 0$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 1} \int_{\mathbb{R}} g(x) \, |h_t(x) - h(x)| \, dx = 0$$

(4) $A \subseteq \mathbb{R}$ medible

$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ son tq $|\varphi_n(x)| \leq 2012 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\wedge \quad \varphi_n \to \varphi$ ctp en A

$\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L^p(A)$ son tq $\psi_n \to \psi$ en $L^p(A)$

PD: si $mA < \infty \Rightarrow \psi_n \varphi_n \to \psi \varphi$ en $L^p(A)$

¿Y si $A = \mathbb{R}$?

D: $\varphi_n \to \varphi$ ctp en $A \Rightarrow \psi \varphi_n \to \psi \varphi$ ctp en A

$|\varphi_n| \leq 2012$ $\cancel{\Rightarrow |\varphi_n|^p \leq 2012^p}$ $\wedge$ $|\varphi_n| \to |\varphi|$ ctp

$\Rightarrow |\varphi| \leq 2012$ ctp.

$\Rightarrow \psi_n \to \psi$ en $L^p(A)$ $\wedge$ $L^p(A)$ completo $\Rightarrow \psi \in L^p(A)$

$\psi \in L^p(A) \Rightarrow |\psi|^p$ integrable $\wedge$ $|\psi|^p \geq 0$

luego $\exists \delta > 0$ tq $mB < \delta \Rightarrow \displaystyle\int_B |\psi|^p < \varepsilon / 3 \cdot 2^{2p+1} \cdot 2012^p$

$mA < \infty \wedge \psi\varphi_n \to \psi\varphi$ ctp $\Rightarrow \exists B \subseteq A$ tq $mB < \delta \wedge \psi\varphi_n \rightrightarrows \psi\varphi$ en $A - B$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0 \ \forall x \in A - B$: $|\psi(x)\varphi_n(x) - \psi(x)\varphi(x)| < \left(\dfrac{\varepsilon}{3 \cdot 2^p mA}\right)^{1/p}$

$\psi_n \to \psi$ en $L^p(A) \Rightarrow \exists \tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq \tilde{n}_0$ $\displaystyle\int_A |\psi_n - \psi|^p < \varepsilon / 3 \cdot (4024)^p$

si $n \geq \max\{n_0, \tilde{n}_0\} \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \int_A |\psi_n \varphi_n - \psi\varphi|^p = \int_A |\varphi_n \psi_n - \varphi_n \psi + \varphi_n \psi - \psi \varphi|^p$$

$$\leq 2^p \left(\int_A |\varphi_n \psi_n - \varphi_n \psi|^p + \int_A |\psi \varphi_n - \psi \varphi|^p \right)$$

$$= 2^p \left(\int_A |\varphi_n|^p |\psi_n - \psi|^p + \int_{A-B} |\psi\varphi_n - \psi\varphi|^p + \int_B |\psi\varphi_n - \psi\varphi|^p \right)$$

$$\leq 2^p \left(2012^p \int_A |\psi_n - \psi|^p + \left(\frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^p mA}\right) m(A-B) + 2^p \left(\int_B |\psi\varphi_n|^p + \int_B |\psi\varphi|^p \right) \right)$$

$$< (4024)^p \cdot \frac{\varepsilon}{3\,(4024)^p} + \frac{\varepsilon}{3} + 2^{2p} \left(2012^p \int_B |\psi|^p + 2012^p \int_B |\psi|^p \right)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \underbrace{2^{2p+1} \cdot 2012^p \int_B |\psi|^p}_{< \varepsilon/3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$\therefore \|\psi_n \varphi_n - \psi\varphi\|_p^p \to 0 \Rightarrow \|\psi_n \varphi_n - \psi\varphi\|_p \to 0$ ✓

Si $A = \mathbb{R}$, $\varphi_n \to \varphi$ en $L^p(\mathbb{R}) \Rightarrow$ DADO $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$

tq $\forall n \geq N$ $\int_{\mathbb{R}} |\varphi - \varphi_n|^p < \varepsilon / 4 \cdot 4024^p$

$\psi \in L^p(\mathbb{R}) \Rightarrow$ ADEMAS $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\int_{[-n_0,n_0]^c} |\psi|^p < \dfrac{\varepsilon}{4 \cdot 2^{2p+1} \cdot 2012^p}$ ADEMAS (*)

si $n \geq \max\{N_0, \bar{N}\} \Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_n \varphi_n - \psi\varphi|^p = \int_{[-n_0,n_0]} |\psi_n \varphi_n - \psi\varphi|^p + \int_{[-n_0,n_0]^c} |\psi_n \varphi_n - \psi\varphi|^p$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + 2^p \left(\int_{[-n_0,n_0]^c} |\psi_n \varphi_n - \varphi_n \psi|^p + \int_{[-n_0,n_0]^c} |\varphi_n \psi - \psi\varphi|^p \right)$$

$$< \varepsilon/2 + 2^p \left(2012^p \int_{[-n_0,n_0]^c} |\psi - \varphi_n|^p + 2^p \cdot 2 \left(\int_{[-n_0,n_0]^c} |\varphi_n|^p |\psi|^p + \int_{[-n_0,n_0]^c} |\varphi_n|^p |\psi|^p \right) \right)$$

$$< \varepsilon/2 + 4024^p \int_{\mathbb{R}} |\psi - \varphi_n|^p + 2^{2p+1} \cdot 2012^p \int_{[-n_0,n_0]^c} |\psi|^p$$

(*) en $[-n_0, n_0]$ $\int_{[-n_0,n_0]} |\psi_n \varphi_n - \psi\varphi|^p \to 0$, pues $m[-n_0, n_0] = 2n_0 < \infty$

$\Rightarrow \exists \bar{N} \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq \bar{N}$ $\int_{[-n_0,n_0]} |\psi_n \psi_n - \psi\varphi|^p < \varepsilon/2$

Scanned with CamScanner

Si $A=\mathbb{R}$ PD: $\int_{\mathbb{R}} |\psi_n\varphi_n - \psi\varphi|^p \xrightarrow{n\to\infty} 0$

D: Dado $\varepsilon>0$, como $\psi_n \to \psi$ en $L^p(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$ $\int_{\mathbb{R}} |\psi-\psi_n|^p < \varepsilon/4\cdot 4024^p$

$\psi \in L^p(\mathbb{R}) \Rightarrow \underline{\exists n_0 \in \mathbb{N}}$ tq $\underline{\int_{[-n_0,n_0]^c}} |\psi|^p < \varepsilon/4\cdot 2^{2p+1}\cdot 2012^p$,

Además $|\varphi_n(x)| \leq 2012$ $\forall x \in [-n_0,n_0]$ y $\varphi_n \to \varphi$ ctp en $[-n_0,n_0]$

$$\underbrace{0 \leq \int_{[-n_0,n_0]} |\psi_n-\psi|^p \leq \int_{\mathbb{R}} |\psi_n-\psi|^p}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \Rightarrow \psi_n \to \psi \text{ en } L^p([-n_0,n_0])$$

Como $m([-n_0,n_0]) = 2n_0 < \infty \Rightarrow \psi_n\varphi_n \to \psi\varphi$ en $L^p([-n_0,n_0])$

luego $\exists \bar{N} \in \mathbb{N}$ tq $\forall \underline{n \geq \bar{N}}$ $\underline{\int_{[-n_0,n_0]} |\varphi_n\psi_n - \psi\varphi|^p < \varepsilon/2}$

luego si $n \geq \max\{N,\bar{N}\} \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_n\varphi_n - \psi\varphi|^p = \int_{[-n_0,n_0]} |\psi_n\varphi_n - \psi\varphi|^p + \int_{[-n_0,n_0]^c} |\psi_n\varphi_n - \psi\varphi|^p$$

$$< \underline{\varepsilon/2} + 2^p\left(\int_{[-n_0,n_0]^c} |\psi_n\varphi_n - \underline{\varphi_n\psi}|^p + \int_{[-n_0,n_0]^c} |\underline{\varphi_n\psi} - \psi\varphi|^p\right)$$

$$< \varepsilon/2 + 2^p\left(\underline{2012^p\int_{[-n_0,n_0]^c} |\psi_n-\psi|^p} + 2^p\left(\int_{[-n_0,n_0]^c} |\varphi_n|^p|\psi|^p + \int_{[-n_0,n_0]^c} |\varphi_n|^p|\psi|^p\right)\right)$$

$$< \varepsilon/2 + 4024^p \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |\psi-\psi_n|^p}_{< \varepsilon/4\cdot 4024^p} + 2^{2p+1}\cdot 2012^p \underbrace{\int_{[-n_0,n_0]^c} |\psi|^p}_{< \varepsilon/4\cdot 2^{2p+1}\cdot 2012^p}$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon$$

$\therefore \|\psi_n\varphi_n - \psi\varphi\|_p^p \to 0 \Rightarrow \|\psi_n\varphi_n - \psi\varphi\|_p \to 0$

Bien!

6/

5) $f_n \to f$ CTP EN $\mathbb{R}$

A) $A = \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

$\wedge$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ TQ $\forall n \geq N_0$ $\int_B |f_n| \leq \int_B |f| + \varepsilon$ $\forall B \subseteq \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f$$

D: SEA $g_n := \chi_{[-n,n]} |f|$

AD: $g_n \to |f|$ PUNTUALMENTE

D: DADO $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ TQ $|x| \leq n_0$

SI $n \geq n_0 \Rightarrow g_n(x) = |f(x)|$

$$\Rightarrow \big| g_n(x) - |f(x)| \big| = 0 < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$|g_n| \leq |f|$ $\wedge$ $|f|$ INTEGRABLE, PUES $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

LUEGO POR LEBESGUE $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} |f| = \int_{\mathbb{R}} |f| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]^c} |f| = 0$.

DADO $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ TQ $\int_{[-n_0,n_0]^c} |f| < \varepsilon/10$ YA LO HABÍAS USADO!

~~$m[-n_0,n_0] = 2n_0 < \infty$ $\wedge$ $f_n \to f$ CTP EN $[-n_0,n_0]$~~

~~LUEGO POR EGOROFF $\exists B \subseteq [-n_0,n_0]$ TQ~~

$|f|$ INTEGRABLE $\wedge$ $|f| \geq 0$ $\Rightarrow \exists \delta > 0$ TQ $mA < \delta \Rightarrow \int_A |f| < \varepsilon/10$

$m[-n_0,n_0] = 2n_0 < \infty$, $f_n \to f$ CTP EN $[-n_0,n_0]$

LUEGO POR EGOROFF $\exists B \subseteq [-n_0,n_0]$ TQ $mB < \delta$ $\wedge$ $f_n \rightrightarrows f$ EN $[-n_0,n_0] - B$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ TQ TQ $\forall n \geq N$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/10n_0$ $\forall x \in [-n_0,n_0] - B$

POR HIPÓTESIS $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ TQ $\forall n \geq N_0$ $\int_B |f_n| \leq \int_B |f| + \varepsilon/5$ $\forall B \subseteq \mathbb{R}$ MEDIBLE

SI $n \geq \max\{N, N_0\} \Rightarrow$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_n - \int_{\mathbb{R}} f \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| \leq \int_{[-n_0,n_0]^c} |f_n| + \int_{[-n_0,n_0]^c} |f| + \int_{[-n_0,n_0]} |f_n - f|$$

$$\leq 2\int_{[-n_0,n_0]^c} |f| + \left(\frac{\varepsilon}{5}\right)^{(*)} + \int_{[-n_0,n_0]-B} |f_n - f| + \int_B |f_n - f|$$

$$\leq 2\cdot\left(\frac{\varepsilon}{10}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{5}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{10 n_0}\right) m([-n_0,n_0]-B) + \int_B |f_n| + \int_B |f|$$

$$\leq 2\left(\frac{\varepsilon}{10}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{5}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{10 n_0}\right)\cdot 2n_0 + 2\int_B |f| \overset{(**)}{+} \left(\frac{\varepsilon}{5}\right) \overset{(*)}{}$$

$$< \left(\frac{\varepsilon}{5}\right) + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + 2\cdot\frac{\varepsilon}{10} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

$(*)$ = ES DEBIDO A LA HIPOTESIS

$(**)$ = ES DEBIDO A LA CONTINUIDAD DE LA INTEGRAL, PUES $mB < \delta$

POR SI ACASO: JUSTIFICO QUE $f_n \in L^1(\mathbb{R})$, PARA n SUF. GRANDE.

PARA $\varepsilon = e^{\pi} < \infty$ ¿?? $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ TQ $\forall n \geq n_0$, $\int_{\mathbb{R}} |f_n| \leq \int_{\mathbb{R}} |f| + e^{\pi} < \infty$

PUES $|f|$ ES INTEGRABLE.

$\surd$

B) SI $mA < \infty$, $\int_B |f_n| \leq \int_B \frac{dt}{1+t^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall B \subseteq A$ MEDIBLE

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f$.

D: SEA $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$

PD: g ES INTEGRABLE EN $\mathbb{R}$

D: · NOTAMOS QUE $g \geq 0$, DEFINIMOS $g_n = \chi_{[-n,n]} g \geq 0$ Y $g_n \leq g$

PD: $g_n \leq g_{n+1}$

D: SEA $x \in \mathbb{R}$, SI $|x| > n+1 > n \Rightarrow g_n(x) = g_{n+1}(x) = 0$

· SI $n < |x| \leq n+1 \Rightarrow g_n(x) = 0$ Y $g_{n+1}(x) = \frac{1}{1+x^2} \geq 0$

$\therefore g_{n+1}(x) \geq g_n(x)$

SI $|x| \leq n \Rightarrow g_n(x) = g_{n+1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\therefore g_{n+1}(x) \geq g_n(x)$

~~LUEGO POR CONVERGENCIA~~

ES CLARO QUE (YA DEMOSTRADO EN A) $g_n \to g$

LUEGO POR CONVERGENCIA MONOTONA:

$$\int_{\mathbb{R}} g = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} g$$

g CONTINUA EN $[-n,n]$, LUEGO RIEMANN INTEGRABLE EN $[-n,n]$ LUEGO $\int_{-n}^{n} g = R\int_{-n}^{n} \frac{1}{1+x^2}dx$

CALCULAMOS $R\int_{-n}^{n} g(x)\,dx$, PARA ESTO CALCULO $\int \frac{dx}{1+x^2}$,

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \left(\begin{array}{l} tg\,\theta = x \\ 1+x^2 = \sec^2\theta \\ dx = \sec^2\theta\, d\theta \end{array} \right) = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}\, d\theta = \theta = \operatorname{arctg}(x)$$

LUEGO:

$$R\int_{-n}^{n} g(x)\,dx = \operatorname{arctg}(n) - \operatorname{arctg}(-n)$$

LUEGO: $\int_{\mathbb{R}} g = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} g = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(n) - \operatorname{arctg}(-n) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi < \infty$

$\therefore$ g INTEGRABLE, YA QUE $|g| = g \geq 0$

COMO $g \geq 0 \Rightarrow \chi_A g \leq g \Rightarrow \int_A g \leq \int_{\mathbb{R}} g < \infty$ $\therefore$ g INTEGRABLE EN A. $\forall A \subseteq \mathbb{R}$

PD: $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f$, DEFINIENDO $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ INTEGRABLE SOBRE A.

D: DADO $\varepsilon > 0$, $g \geq 0$ INTEGRABLE

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ tq } mB < \delta \Rightarrow \int_B g < \varepsilon/3$$

COMO $f_n \to f$ CTP $\wedge$ $mA < \infty \overset{\text{EGOROFF}}{\Rightarrow} \exists B \subseteq A$ tq $mB < \delta$, $f_n \rightrightarrows f$ en $A-B$

NOTAMOS QUE f ES INTEGRABLE SOBRE C, $\forall C \subseteq A$ MEDIBLE

PUES $f_n \to f$ CTP $\Rightarrow |f_n| \to |f|$ CTP $\wedge$ $|f_n| \geq 0$

POR FATOU: $\int_C |f| \leq \lim_{n\to\infty} \int_C |f_n| \leq \int_C g < \infty$

MAS AUN PARA $C = B$ SE TIENE QUE

$$\int_B |f| \leq \int_B g < \varepsilon/3 \quad \wedge \quad \int_B |f_n| \leq \int_B g < \varepsilon/3$$

YA QUE $mB < \delta$.

$f_n \rightrightarrows f$ en $A-B \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$ $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3mA}$ $\forall x \in A-B$

LUEGO SI $n \geq n_0 \Rightarrow$

$$\left|\int_A f_n - \int_A f\right| \leq \int_A |f_n - f| = \int_{A-B} |f_n - f| + \int_B |f_n - f| \leq \int_{A-B} |f_n - f| + \int_B |f_n| + \int_B |f|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3mA} \cdot m(A-B) + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \leq \frac{\varepsilon}{3} + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f$$

EXTENDEMOS PARA $mA = \infty$

PD: SI $\int_B |f_n| \leq \int_B g$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall B \subseteq A$ MEDIBLE $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f$

D: SEA $g_n = g\chi_{[-n,n]\cap A}$, $g_n \to g$, $|g_n| \leq g$, g INTEGRABLE SOBRE A

LEBESGUE $\Rightarrow \int_A g = \lim_{n\to\infty} \int_{A\cap[-n,n]} g \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{A\cap[-n,n]^c} g = 0$

DADO $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\int_{A\cap[-N,N]^c} g < \varepsilon/3$

SI $B \subseteq A\cap[-N,N] \subseteq A \Rightarrow \int_B |f_n| \leq \int_B g$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ADEMAS $m(A\cap[-N,N]) \leq m[-N,N] = 2N < \infty$

POR LA PARTE ANTERIOR $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$ $\left|\int_{[-N,N]\cap A} (f_n - f)\right| < \varepsilon/3$

$[-N,N]^c \cap A \subseteq A$ MEDIBLE ; LUEGO POR HIPOTESIS:

$$\int_{[-N,N]^c\cap A} |f_n| \le \int_{[-N,N]^c\cap A} g < \varepsilon/3 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$f_n \to f$ CTP $\Rightarrow |f_n| \to |f|$ CTP , $|f_n| \geq 0$, LUEGO POR FATOU

$$\int_{[-N,N]^c\cap A} |f| \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_{[-N,N]^c\cap A} |f_n| \le \int_{[-N,N]^c\cap A} g < \varepsilon/3$$

LUEGO SI $n \geq n_0$

$$\left| \int_A f_n - \int_A f \right| = \left| \int_A (f_n - f) \right| \le \underbrace{\left| \int_{A\cap[-N,N]} (f_n - f) \right|}_{< \varepsilon/3} + \left| \int_{A\cap[-N,N]^c} f_n - f \right|$$

$$< \varepsilon/3 + \int_{A\cap[-N,N]^c} |f_n| + \int_{A\cap[-N,N]^c} |f| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f$

$$(e^{-x})' = \frac{e^{-(x+h)} - e^{-x}}{h}$$

$e^{-x^2(1+t^2)}$

ANALISIS ABSTRACTO I

PRUEBA 2

Octubre 30, 2012

Responder 4 problemas
Tiempo = 3 horas

1. Demuestre o de un contraejemplo (1 p. c/u)

   (a) $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ implica $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

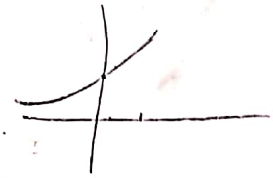
   (b) Si $f_n \rightrightarrows f$ entonces $T_a^b(f_n) \to T_a^b(f)$

   (c) f Riemann integrable implica $f \in L^1(\mathbb{R})$

   (d) $p < q$ implica $L^q(A) \subset L^p(A)$

   (e) El espacio $L^\infty([0,1])$ es completo

   (f) h es absolutamente continua en $[0,1]$ si y solo si $h(x) = h(1/2) + \int_{1/2}^x h'(t)dt$



2. Sean

$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt, \quad \xi(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2, \quad x \geq 0.$$

Demuestre que existe $\varphi(\infty)$ (1 p) y φ' (2 p) y calculelos (0.5 p). Demuestre que $\varphi + \xi$ es constante (1,5 p) y deduzca que

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}/2 \qquad (1 \text{ pto})$$

3. Para $h \in L^1(\mathbb{R})$ defina $h_t(x) := h(tx)$. Demuestre que

   (a) Si $t \neq 0$, entonces $h_t \in L^1(\mathbb{R})$ (1.5 p) y

   $t > 0$

   t positivo

$$\int_{\mathbb{R}} h = t\int_{\mathbb{R}} h_t \quad (2 \text{ p})$$

$||f| \leq |f-g| + |g|$

$||f|-|g|| \leq |f-g|$

   (b) Para $g \in L^\infty$,

$$\lim_{t\to1}\int_{\mathbb{R}} g(x)\,|h_t(x) - h(x)|\,dx = 0 \quad (3.5 \text{ p})$$

$\frac{\varepsilon}{2K}$

$\sup_{P \in P(a,b)}$ $\quad i=1$

$$\left| \frac{\sin(mx_i)}{m} - \frac{\sin(mx_{i-1})}{m} \right|$$

$$\sup_{P \in P(a,b)} \left(\frac{1}{m} \sum |\sin(mx_i) - \sin(mx_{i-1})| \right)$$

4. Suponga que para $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible, las funciones medibles $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfacen $|\varphi_n(x)| \leq 2012$ y $\varphi_n \to \varphi$ ctp. en A cuando $n \to \infty$. Sean $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^p(A)$ que verifican $\psi_n \to \psi$ en $L^p(A)$. Demuestre que si $m(A) < \infty$ entonces $\psi_n \varphi_n \to \psi\varphi$ en $L^p(A)$ (5 p).¿Y si $A = \mathbb{R}$? (1 p)

5. Suponga $f_n \to f$ ctp en $\mathbb{R}$ demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f$$

(a) Si $A = \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ y para cada $\epsilon > 0$ existe $N_0 = N_0(\epsilon)$ tal que para todo $n \geq N_0$

$\int_B |f_n| - \int_B |f| \leq \epsilon$

$$\int_B |f_n| \leq \int_B |f| + \epsilon \quad \forall B \subset \mathbb{R} \quad (2.5 \text{ p})$$

(b) $m(A) < \infty$ y para todo $B \subset A$ medible

$$\int_B |f_n|\, dt \leq \int_B \frac{dt}{1+t^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.5 \text{ p})$$

Extienda a $m(A) = \infty$ (2 p)

$f_n \to f \qquad |f_n| \to |f|$

$n\chi_{[1/n,\,2/n]} \quad = n\int \chi_{[\ ]} = n\,\frac{1}{n} = 1$

$\lim_{n\to\infty} \chi_{[1/n,\,2/n]}(x) =$ $\qquad \int^n \chi_{[n,\infty]}$

ANALISIS ABSTRACTO I - PRUEBA 2

23 - Noviembre - 2013

Tiempo: 3 horas.

I. Suponga que $f_n \to f$ c.t.p. en A. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f$$

(a) Para $A = \mathbb{R}$ si para todo B medible y $n \in \mathbb{N}$

$$\int_B |f_n| \leq \int_B e^{-x^2} g(x)dx$$

con $g \in L^{2013}(\mathbb{R})$ (3 p)

(b) Si $m(A) < \infty$ y $||f_n||_{2014} \leq c$, $c > 0$ constante. (3 p)

II. Sea

$$\psi(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{xt-x^2} dx$$

(a) Demuestre qu ψ es una función bien definida (1.5 p) y continua (1 p) en todo $\mathbb{R}$.

(b) Encuentre una condición (1 p) para que ψ sea diferenciable. Y luego pruebe la diferenciabilidad de ψ. (2.5 p)

III. Sea $h \in L^1(\mathbb{R})$

(a) Demuestre que existe (2 p) una única función x absolutamente continua satisfaciendo $x(0) = 1$ y

$$x'(t) = h(t) \text{ c.t.p.} \tag{1}$$

¿y si x es solo diferenciable c.t.p? (1 p)

(b) Demuestre que $x(E)$ es medible si $E \subseteq \mathbb{R}$ es medible. (2.5 p) ¿vale esto para toda solución de (1)? (0.5 p)

IIII. Para $g \in L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, considere

$$\psi(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{|g(s-1) - g(s+t)|}{1+s^2} ds$$

Pruebe que ψ esta bien definida y es acotada en $\mathbb{R}$ (1.5 p) y es continua en $t = -1$. (4.5 p)

IIII~~I~~. Considere f_n y f en $L^p(A)$, $m(A) < \infty$ con $f_n \to f$ c.t.p. Demuestre que $||f_n||_p \to ||f||_p$, cuando $n \to \infty$, implica que $||f_n - f||_p \to 0$ cuando $n \to \infty$. (4 p) ¿vale el reciproco? (0.5 p) extienda el resultado a $\mathbb{R}$. (1.5 p)

$\varphi(t) - \varphi(t+h) =$

$f(x) = \int_0^x f'(x) + f(0)$

$= \int_1^x - \int_1^x + \int_0^x + f(0)$

2° Prueba de Analisis II

Tiempo: 3 hrs.
Responda solo 4 problemas Octubre 28, 2010

1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\beta \in \mathbb{R}$ constante, defina $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \sin(tx + \beta) f(x)dx.$$

$\lim_{t\to\infty} \int \operatorname{sen} tx$

Demuestre que $\varphi(t) \to 0$ (2 puntos), cuando $|t| \to \infty$ y deduzca que

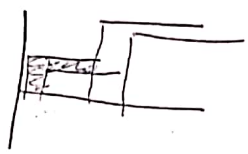
$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)dx \to 0, \quad \text{cuando} \quad |t| \to \infty \quad (0{,}5 \text{ puntos}).$$

Encuentre una condición (1 punto) para que φ sea diferenciable y luego demuestre la diferenciabilidad de φ (2,5 puntos).

2. Pruebe o de un contraejemplo (1 punto c/u):

$f'(x) = f(1) + \int_1^x$

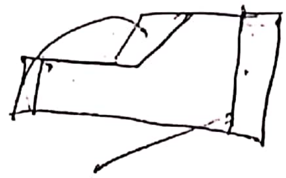
a) $f \in L^1(\mathbb{R})$ implica que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
b) $f \in L^1(\mathbb{R})$ implica f finita c.t.p.
c) f absolutamente continua si y solo si f es uniformemente continua.
d) f absolutamente continua en $[0,1]$ si y solo si $f(x) = f(1) + \int_1^x f'(t)dt$.
e) f Riemann integrable implica $f \in L^1(\mathbb{R})$.
f) $r < q$ implica $L^r(A) \subset L^q(A)$.



3. i) Sea $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. Demuestre que existe una única (2 puntos) función x, absolutamente continua tal que satisface $x(0) = 1$ y

$$x'(t) = \varphi(t) \quad \text{c.t.p.}$$

y si ¿ x es solo diferenciable c.t.p.?(1 punto)



ii) Sea $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua. Demuestre que $m(A) = 0$, implica que $m(v(A)) = 0$ (2 puntos). ¿Vale esto para v solo continua? (1 punto).

4. Sean $h \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Probar que para $t \in \mathbb{R}$, la función ψ dada por

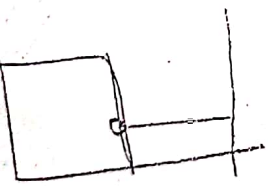
$x' - y' = 0$

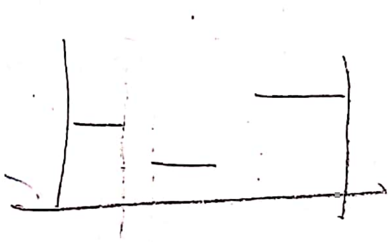
$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} g(s)|h(s) - h(s+t)|ds$$

está bien definida (1,5 puntos) y es continua en $t = 0$ (4,5 puntos).

$g(s)|h(s) - h(s+t)$

$\lim \int_0^1 \operatorname{sen} nt$





Scanned with CamScanner

$\|f\| \leq \|f - \varphi_n\| + \|f_n\|$

$\|f\| - \|\varphi_n\|$ $\quad |x-y| \to 0$

$\|\ \ \ |x| - |y| \to 0$

$\|\varphi_n - f\|_p \longrightarrow 0$

$\leq \|\varphi\| + \|f\|$

5. Sean $\varphi_n, f \in L^p(A)$, $m(A) < \infty$ y $\varphi_n \to f$ c.t.p. Demuestre que $||\varphi_n||_p \to ||f||_p$ cuando $n \to \infty$ implica que $||\varphi_n - f||_p \to 0$ cuando $n \to \infty$ (4 puntos). ¿Vale el recíproco? (0,5 puntos), extienda el resultado a $m(A) = \infty$. (1,5 puntos).

$\varphi_n, f \in L^p(A)$ $\quad m A = \infty$ $\quad \varphi_n \to f$ c.t.p.

---

si $\|\varphi_n\|_p \to \|f\|_p$ $\qquad \|f - \varphi_n\|_p$

pd. $\|\varphi_n - f\|_p \to 0$ $\qquad \|f\|_p = \|f$

$\|\varphi_n - f\|_p^p = \int |\varphi_n - f|^p$

g_n

$\int \operatorname{sen} tx$

$\int |f - \varphi_n|^p$