Problema 1.

Sean $\mu, \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ medidas finitas signadas. Pruebe que si son diferenciables en x, entonces $D(\mu \pm \nu) = D\mu \pm D\nu$.

dem. Primero vamos a considerar el caso en que μ, ν son medidas finitas positivas. Bien

$$\left\{ \frac{(\mu+\nu)(C)}{\lambda(C)} \,\middle|\, x \in C \in \mathcal{C},\ e(C) < \varepsilon \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\mu(C)}{\lambda(C)} + \frac{\nu(C)}{\lambda(C)} \,\middle|\, x \in C \in \mathcal{C},\ e(C) < \varepsilon \right\}$$

$A+B = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$?

$$\in \left\{ \frac{\mu(C)}{\lambda(C)} \,\middle|\, x \in C \in \mathcal{C},\ e(C) < \varepsilon \right\} + \left\{ \frac{\nu(C)}{\lambda(C)} \,\middle|\, x \in C \in \mathcal{C},\ e(C) < \varepsilon \right\}$$

no debería ser igualdad?

Por propiedad del supremo,

$$\sup \left\{ \frac{(\mu+\nu)(C)}{\lambda(C)} \,\middle|\, x \in C \in \mathcal{C},\ e(C) < \varepsilon \right\}$$
$$\leq \sup \left\{ \frac{\mu(C)}{\lambda(C)} \,\middle|\, x \in C \in \mathcal{C},\ e(C) < \varepsilon \right\} + \sup \left\{ \frac{\nu(C)}{\lambda(C)} \,\middle|\, x \in C \in \mathcal{C},\ e(C \right.$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \sup \left\{ \frac{(\mu+\nu)(C)}{\lambda(C)} \,\middle|\, x \in C \in \mathcal{C},\ e(C) < \varepsilon \right\}$$
$$\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \sup \left\{ \frac{\mu(C)}{\lambda(C)} \,\middle|\, x \in C \in \mathcal{C},\ e(C) < \varepsilon \right\}$$
$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{\nu(C)}{\lambda(C)} \,\middle|\, x \in C \in \mathcal{C},\ e(C) < \varepsilon \right\}$$

(2,0)

$$\therefore\ \overline{D}(\mu+\nu)(x) \leq \overline{D}\mu(x) + \overline{D}\nu(x)$$

Análogamente aplicando ínfimo:

$$\underline{D}(\mu+\nu)(x) \leq \underline{D}\mu(x) + \underline{D}\nu(x)$$

es al revés salvo que uses que $\overline{D}\mu = \underline{D}\mu$.

(Sin terminar)

Problema 2

Pruebe el teorema de recubrimiento de Vitali para familia de bolas en vez de cubos.

dem. Vamos a separar la demostración en dos partes. Considerando $A \subseteq \mathbb{R}^d$ primero veremos el caso acotado, y luego pasaremos al caso en que A es arbitrario.

Caso. $A \subseteq \mathbb{R}^d$ acotado.

Sea $\mathcal{V}$ un cubrimiento de Vitali de $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Al ser A acotado, existe $U = B(0, r_0) \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $A \subseteq U$

$\mathcal{L}^d$ medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d \Rightarrow \mathcal{L}^d(A) \leq \mathcal{L}^d(U) < \infty$

Consideremos la subfamilia $\mathcal{V}_0 = \{B \in \mathcal{V} / B \subseteq U\}$ (recordemos que el cubrimiento de Vitali $\mathcal{V}$ es con bolas cerradas).

Se tiene automáticamente que $\mathcal{V}_0$ también es un cubrimiento de Vitali, donde en este caso, $e(B)$ es el radio de la bola B.

Además, $\mathcal{L}^d\left(\bigcup_{B \in \mathcal{V}_0} B\right) < \infty$

$$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{V}_0 : B \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{V}_0} B \subseteq U \Rightarrow \forall B \in \mathcal{V}_0 : \mathcal{L}^d(B) < \mathcal{L}^d(U) < \infty$$

Más específicamente, $\mathcal{L}^d(B) = \sigma(e(B))^d$, donde $\sigma > 0$ es una constante que depende únicamente de d.

Construimos inductivamente una sucesión $((B_n, \delta_n))_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_n > 0$ y $B_n \in \Upsilon_0$ ($B_n \cap B_k = \emptyset$ para $n \neq k$) de la siguiente manera

$$\delta_1 := \sup\{e(B) \,/\, B \in \Upsilon_0\}$$

(Como $\forall B \in \Upsilon_0$, $\mathcal{L}^d(B) < \infty$. En particular $e(B) < \infty$)

$$B_1 \in \Upsilon_0 \text{ tal que } \delta_1/2 < e(B_1)$$

$$\delta_2 := \sup\{e(B) / B \in \Upsilon_0,\ B \cap B_1 = \emptyset\}$$

$$B_2 \in \Upsilon_0 \text{ tal que } \delta_2/2 < e(B_2),\quad B_2 \cap B_1 = \emptyset$$

En general,

$$\delta_{n+1} := \{e(B) / B \in \Upsilon_0,\ B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \emptyset\}$$

$$B_{n+1} \in \Upsilon_0 \text{ tal que } \delta_{n+1}/2 < e(B_{n+1}),\quad B_{n+1} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \emptyset$$

(B_{n+1}, δ_{n+1}) se consigue de la siguiente manera:

Si $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_n$ entonces $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ es el subcubrimiento buscado.

En caso contrario, $\exists\, x \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B_n \subset U \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B_n$

$\bigcup_{k=1}^{n} B_n$ cerrado $\Rightarrow U \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)^c$ es abierto

$$x \in U \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)^c \Rightarrow \exists B(x,r) \text{ tq } B(x,r) \subset U \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)^c$$

$$\Rightarrow \exists\, B \in \Upsilon_0 : x \in B \subset B(x,r) \subset U \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)^c$$

$$\Rightarrow B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \emptyset$$

Scanned with CamScanner

Así, $\{ e(B) / B \in \mathcal{V}_0 , B \cap (\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \phi \} \neq \phi$

Así, $\delta_{n+1} := \sup \{ e(B) / B \in \mathcal{V}_0 , B \cap (\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \phi \}$

y consideramos $B_{n+1} \in \mathcal{V}_0$ tal que $\delta_{n+1}/2 < e(B_{n+1})$,

$B_{n+1} \cap (\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \phi$.

Con la construcción de la familia $\{(B_n, \delta_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tenemos dos opciones: Que termine para algún $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_n = B_{n_0}$, $\delta_n = \delta_{n_0}$ $\forall n \geq n_0$; o que continue indefinidamente.

- Si el proceso para en algún $N \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset \bigcup_{k=1}^{N} B_k$, y $\{B_k\}_{k=1}^{N}$ es la subfamilia de $\mathcal{V}_0$ buscada.

Si el proceso no termina, obtenemos familia disjunta $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^d(B_n) = \mathcal{L}^d\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \leq \mathcal{L}^d\left(\bigcup_{B \in \mathcal{V}_0} B \right) \leq \mathcal{L}^d(U) < \infty$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} \mathcal{L}^d(B_n) = 0$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} e(B_n) = 0$$

Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_{n+1}/2 < e(B_{n+1}) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \delta_n = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$, definimos $D_n \in \mathcal{V}$ una bola d-dimensional concéntrica con B_n, pero $e(D_n) = 6\, e(B_n)$

se tiene $\mathcal{L}^d(D_n) = 6^d \mathcal{L}^d(B_n)$

Con lo anterior,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^d(D_n) = 6^d \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^d(B_n) < \infty$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}^d(D_n) = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} e(D_n) = 0$$

<u>Afirmación</u>: $\forall N \in \mathbb{N}$, $A \setminus \bigcup_{n=1}^{N} B_n \subset \bigcup_{n=N+1}^{\infty} D_n$

Sea $x \in A \setminus \bigcup_{n=1}^{N} B_n$. Por el mismo argumento anterior (mientras construimos $((B_n, \delta_n))_{n\in\mathbb{N}}$), existe $B \in \gamma_0$ tal que $x \in B$ y $B \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) = \phi$

Se tiene $e(B) \leq \delta_{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ tq $B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) = \phi$

Notar que $e(B) \leq \delta_{k+1}$ implica $B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{l} B_i\right) = \phi$ $\forall k = 1, \dots, l$

En el caso de que $e(B) \leq \delta_n$ $\forall n \geq k+1$, nos queda la opción

$$e(B) = 0$$

ya que $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

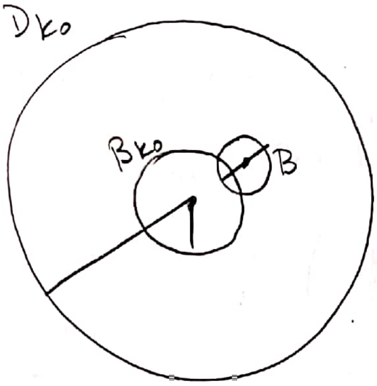
Como lo anterior no puede ocurrir de ninguna manera, debe existir $k_0 \in \mathbb{N}$ (podemos tomarlo como el mínimo) que cumple

$$B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \neq \phi$$

Por minimalidad de k_0 : $e(B) \leq \delta_{k_0}$

Como $B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k_0 - 1} B_i \right) = \phi \Rightarrow B \cap B_{k_0} \neq \phi$

y además $e(B) \leq 2e(B_{k_0})$. Para convencernos de que $B \subset D_{k_0}$, veamos el siguiente dibujo



$$2e(B) + e(B_{k_0}) \leq 2(2e(B_{k_0})) + e(B_{k_0}) = 5e(B_{k_0}) = e(D_{k_0})$$

habrías tomado 6.

$\therefore \quad B \subseteq D_{k_0}$

Como $B \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n \right) = \phi \Rightarrow k_0 \geq N+1$, ya que $k_0 \in \mathbb{N}$ mínimo con la propiedad $B \cap \left(\bigcup_{n=1}^{k_0} B_n \right) \neq \phi$.

$$\therefore \quad x \in B \subset D_{k_0} \subset \bigcup_{n=N+1}^{\infty} D_n$$

$$\therefore \quad A \setminus \bigcup_{n=1}^{N} B_n \subset \bigcup_{n=N+1}^{\infty} D_n$$

Aplicando la medida de Lebesgue a la última contención,

$$\mathcal{L}^d\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \mathcal{L}^d\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) \leq \mathcal{L}^d\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} D_n\right)$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathcal{L}^d(D_n) \quad ; \forall N \in \mathbb{N}$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^d(D_n) < \infty \rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathcal{L}^d(D_n) = 0$

$$\therefore \mathcal{L}^d\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 0$$

Así, tenemos que $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ cubre a A $\mathcal{L}$-ctp.

Obs. Por la demostración anterior, no importó para nada la geometría del abierto $U \subseteq \mathbb{R}^d$ que satisfizo $A \subseteq U$ (U en ese caso fue una bola); lo que quiere decir, es que U pudo ser un cubo, rombo, etc (abierto, obvio)... aunque eso tampoco influyó, solo importa que sea acotado). Este hecho importa para lo que viene.

Para el caso en que $A \subseteq \mathbb{R}^d$ no sea acotado, consideramos la familia $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ de cubos abiertos de aristas de tamaño 1 y paralelos a los ejes coordenados. Es evidente que

$$\mathcal{L}^d\left(\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) = 0$$

Ahora, dado el cubrimiento de Vitali $\mathcal{V}$ de A, consideramos, $\forall k \in \mathbb{N}$, las subfamilias

$$\mathcal{V}_0^k = \{ B \in \mathcal{V} \,/\, B \subset C_k \}$$

Se tiene que $\mathcal{V}_0^k$ es un cubrimiento de Vitali de $A \cap C_k$.
Como $A \cap C_k$ es acotado, podemos extraer subfamilia disjunta $\{B_{k,j}\}_{j=1}^{\infty}$ de $\mathcal{V}_0^k$ tal que $A \cap C_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{k,j}$ $\mathcal{L}^d$-ctp.

Si tomamos $\{B_{k,j}\}_{\substack{j=1\\k=1}}^{\infty}$ subfamilia de $\mathcal{V}$, vemos que $\{B_{k,j}\}_{\substack{j=1\\k=1}}^{\infty}$ es disjunta, numerable, y además $A \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} B_{k,j}$ $\mathcal{L}^d$-ctp. En efecto,

$\forall k \in \mathbb{N}$, sea $A_k \subset A \cap C_k$ tal que $\mathcal{L}^d(A_k) = 0$ y $(A \cap C_k) \setminus A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{k,j}$. Si $\bar{A} = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cup (L \cap A)$, entonces $\bar{A} \subset A$, y además $\left(L := \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \right)$:

$$\mathcal{L}^d(\bar{A}) = \mathcal{L}^d\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cup (L \cap A)\right) \leq \mathcal{L}^d\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cup L\right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^d(A_k) + \mathcal{L}^d(L) = 0 + 0 = 0 \quad \therefore \mathcal{L}^d(\bar{A}) = 0$$

y además, $A \setminus \bar{A} = \left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \cup L \right) \right) \setminus \left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \cup (L \cap A) \right)$

$$= \left(\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \right) \right) \cup (A \cap L) \right) \setminus \left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \cup (L \cap A) \right)$$

$$\subseteq \left(\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \right) \right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \cup \left((A \cap L) \setminus (A \cap L) \right) \right)$$

$$= \left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \right) \right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right)$$

$$= \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap C_k) \right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \left((A \cap C_k) \setminus A_k \right)$$

$$\subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{k,j}$$

$$\therefore \quad A \setminus \bar{A} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{k,j}$$

Así, $\{B_{k,j}\}_{k,j=1}^{\infty}$ cubre a A $\mathcal{L}^d$-ctp. $\blacksquare$

7

Scanned with CamScanner

Problema 3

Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Muestre que para cada $q \in \mathbb{R}$ y para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$

$$\fint_{B(x,\varepsilon)} |f(z)-q|\,dz \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} |f(x)-q|$$

Pruebe que

$$\fint_{B(x,\varepsilon)} |f(z)-f(x)|\,dz \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 0 .$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$.

<u>dem</u>. Por el teorema de diferenciación de Lebesgue (demostración omitida por sugerencia del profesor) ok

$$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \implies \fint_{B(x,\varepsilon)} f(z)\,dz \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} f(x)$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$. Evidentemente que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, entonces $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, donde $g(z) = |f(z)-q|$. En efecto:

$$\forall K \subseteq \mathbb{R}^d \text{ compacto}: \quad \int_K |g(z)|\,dz = \int_K |f(z)-q|\,dz \leq \int_K |f(z)|\,dz + \int_K q\,dz$$

pero $\int_K |f(z)|\,dz < \infty$ ($f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$) y $\int_K q\,dz = q\,\mu(K) < \infty$ (μ: medida de Lebesgue). Así, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Aplicando el teorema de diferenciación de Lebesgue a g se tiene, para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\fint_{B(x,\varepsilon)} |f(z)-q|\,dz \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} |f(x)-q| .$$

Por demostrar: Para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$, $\displaystyle\fint_{B(x,\varepsilon)} |f(z) - f(x)|\, dz \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 0$

dem: Sea $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists E_n \subseteq \mathbb{R}$, tal que $\mu(E_n) = 0$ y $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus E_n$:

$$\fint_{B(x,\varepsilon)} |f(z) - q|\, dz \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} |f(x) - q|$$

Tomando $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, se cumple:

$$\mu(E) = \mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0$$

$$\therefore \mu(E) = 0$$

además $E_n \subset E$, con lo que $\mathbb{R}^d \setminus E \subset \mathbb{R}^d \setminus E_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Con lo anterior,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus E: \quad \fint_{B(x,\varepsilon)} |f(z) - q_n|\, dz \longrightarrow |f(x) - q_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Con el mismo $x \in \mathbb{R}^d \setminus E$, dado cualquier $\eta > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x) - q_n| < \eta/2$, luego aplicando desigualdad triangular:

$$\fint_{B(x,\varepsilon)} |f(z) - f(x)|\, dz = \fint_{B(x,\varepsilon)} |f(z) - q_n + q_n - f(x)|\, dz$$

$$\leq \fint_{B(x,\varepsilon)} |f(z) - q_n|\, dz + \fint_{B(x,\varepsilon)} |f(x) - q_n|\, dz$$

$$\cancel{\leq} = \fint_{B(x,\varepsilon)} |f(z) - q_n|\, dz + |f(x) - q_n|$$

pero también existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall\, \varepsilon < \varepsilon_0$ se tiene

$$\fint_{B(x,\varepsilon)} |f(z) - q_n|\, dz < \eta/2 \quad \left(\text{porque } \fint_{B(x,\varepsilon)} |f(z) - q_n|\, dz \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} |f(x) - q_n| < \eta/2 \right)$$

Así, para $\varepsilon < \varepsilon_0$:

$$\fint_{B(x,\varepsilon)} |f(z) - f(x)|\, dz \leq \fint_{B(x,\varepsilon)} |f(z) - q_n|\, dz + |f(x) - q_n|$$

$$< \eta/2 + \eta/2 = \varepsilon \quad \overset{\text{mejor}}{\eta} \text{ para no haber confusión}$$

$$\therefore \fint_{B(x,\varepsilon)} |f(z) - f(x)|\, dz \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 0 \quad \text{c.t. } x \in \mathbb{R}^d.$$

7

Problema 4

Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

(a) Demostrar que si $x \in \mathbb{R}^d$ es un punto de Lebesgue de f entonces las funciones "blow-up" $f_\varepsilon(z) := f(x+\varepsilon z)$ convergen en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ a la función constante $z \mapsto f(x)$.

(b) Decimos que f es aproximadamente diferenciable en x si existe $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^d$ para el cual

$$\fint_{B(x,\varepsilon)} \frac{|f(z)-f(x)-\nabla f(x)\cdot(z-x)|}{\varepsilon}\,dz \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 0$$

Muestre que si f es aproximadamente diferenciable en x entonces las funciones

$$z \longmapsto \frac{f(x+\varepsilon z)-f(x)}{\varepsilon}$$

convergen en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ al mapeo lineal $z \mapsto \nabla f(x)\cdot z$

dem.

(a) Sea $K \subseteq \mathbb{R}^d$ compacto,

$$\int_K |f_\varepsilon(z)-f(x)|\,dz = \int_K |f(x+\varepsilon z)-f(x)|\,dz$$

aplicando cambio de variable $u = x+\varepsilon z$ $\left(\Leftrightarrow z = \frac{u-x}{\varepsilon}\right)$, conseguimos el difeomorfismo

$$T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

dado por $T(u) = \frac{1}{\varepsilon}u - \frac{x}{\varepsilon}$. $DT(u)$ tiene representación matricial

$$\begin{pmatrix} 1/\varepsilon & & & \\ & 1/\varepsilon & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\varepsilon \end{pmatrix}$$

Además, $T^{-1}(K) = x + \varepsilon K = \{x + \varepsilon z \,/\, z \in K\}$. Aplicando el teorema de cambio de variable:

$$\int_K |f(x+\varepsilon z) - f(x)|\,dz = \int_{T^{-1}(K)} |f \circ T^{-1}(T(u)) - f(x)|\,|DT(u)|\,du$$

$$= \int_{x+\varepsilon K} |f(u) - f(x)|\,\frac{1}{\varepsilon^d}\,du = \frac{1}{\varepsilon^d}\int_{x+\varepsilon K} |f(u)-f(x)|\,du$$

Al ser K compacto, existe $\delta > 0$ tal que $K \subseteq B(0,\delta)$, pero esto nos dice que $x + \varepsilon K \subseteq B(x, |\varepsilon|\delta)$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon^d}\int_{x+\varepsilon K} |f(u)-f(x)|\,du \leq \frac{1}{\varepsilon^d}\int_{B(x,|\varepsilon|\delta)} |f(u)-f(x)|\,du$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^d}\,\frac{\mathcal{L}^d(B(x,|\varepsilon|\delta))}{\mathcal{L}^d(B(x,|\varepsilon|\delta))}\int_{B(x,|\varepsilon|\delta)} |f(u)-f(x)|\,du$$

($\mathcal{L}^d$: medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$)

$$= \frac{1}{\varepsilon^d}\,\mathcal{L}^d(B(x,|\varepsilon|\delta)) ⨍_{B(x,|\varepsilon|\delta)} |f(u)-f(x)|\,du$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^d}\,(|\varepsilon|\delta)^d \alpha ⨍_{B(x,|\varepsilon|\delta)} |f(u)-f(x)|\,du$$

, donde $\alpha > 0$ constante que depende de la "dimensión" de la bola $B(x,\varepsilon\delta)$

$$= \delta^d \alpha ⨍_{B(x,|\varepsilon|\delta)} |f(u)-f(x)|\,du$$

Al ser x un punto de Lebesgue para f, $\varepsilon \to 0$ implica $|\varepsilon|\delta \to 0^+$, y con ello,

$$\delta^d \alpha \fint_{B(x,|\varepsilon|\delta)} |f(u) - f(x)|\, du \xrightarrow{|\varepsilon|\delta \to 0^+} 0$$

en q' momento aparecio? Que es δ?

$$\therefore \int_K | f_\varepsilon(z) - f(x)|\, dz \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

Así, f_ε converge en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ a $z \mapsto f(x)$.

(b) Supongamos que f es aproximadamente diferenciable en x y $K \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\int_K \left| \frac{f(x+\varepsilon z) - f(x)}{\varepsilon} - \nabla f(x) \cdot z \right| dz = \int_K \left| \frac{f(x+\varepsilon z) - f(x) - \varepsilon(\nabla f(x) \cdot z)}{\varepsilon} \right| dz$$

$$= \int_K \left| \frac{f(x+\varepsilon z) - f(x) - \nabla f(x) \cdot (\varepsilon z)}{\varepsilon} \right| dz$$

Ocupando el mismo cambio de variable que en la parte (a):

$$\int_K \frac{|f(x+\varepsilon z) - f(x) - \nabla f(x) \cdot (\varepsilon z)|}{|\varepsilon|} dz = \int_{x+|\varepsilon|K} \frac{|f(u) - f(x) - \nabla f(x) \cdot (\varepsilon(\frac{u-x}{\varepsilon}))|}{|\varepsilon|} \frac{1}{\varepsilon^d} du$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^d} \mathcal{L}^d(B(x,|\varepsilon|\delta)) \fint_{B(x,\varepsilon\delta)} \frac{|f(u) - f(x) - \nabla f(x) \cdot (u-x)|}{|\varepsilon|} du$$

que δ?

$$= \frac{1}{\varepsilon^d} (|\varepsilon|\delta)^d \alpha \fint_{B(x,\varepsilon\delta)} \frac{|f(u) - f(x) - \nabla f(x) \cdot (u-x)|}{|\varepsilon|} du$$

$$= \varepsilon\delta^{d+1}\alpha \int_{B(x,|\varepsilon|\delta)} \frac{|f(u)-f(x)-\nabla f(x)\cdot(u-x)|}{|\varepsilon|\delta}\,du$$

δ, α son las constantes que cumplen las mismas condiciones que en (a) para cada caso. Si $\varepsilon \to 0^+$, entonces $|\varepsilon|\delta \to 0^+$ y con ello

$$\delta^d \alpha \int_{B(x,|\varepsilon|\delta)} \frac{|f(u)-f(x)-\nabla f(x)\cdot(u-x)|}{|\varepsilon|\delta} \longrightarrow 0$$

$$\therefore \int_K \left| \frac{f(x+\varepsilon z)-f(x)}{\varepsilon} - \nabla f(x)\cdot z \right| dz \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

Así, $z \mapsto \dfrac{f(x+\varepsilon z)-f(x)}{\varepsilon}$ converge en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ a $z \mapsto \nabla f(x)\cdot z$.

(5,5)

Problema 6

Sea $f(x) := x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$. Muestre que $\int_\varepsilon^1 f'(x)\,dx \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 0$ pero la integral de Lebesgue $\int_{(0,1)} f'$ está indefinida.

Dem. Al ser f continua sobre $[\varepsilon, 1]$, para todo $\varepsilon > 0$, el teorema fundamental del cálculo se cumple (independiente si la integral es en el sentido de Riemann o Lebesgue, como quedó demostrado en el primer semestre). Entonces,

$$\int_\varepsilon^1 f'(x)\,dx = 1^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{1^2}\right) - \varepsilon^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\varepsilon^2}\right) = 0 - \varepsilon^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\varepsilon^2}\right)$$

$$= -\varepsilon^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\varepsilon^2}\right)$$

Como $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\varepsilon^2}\right) = 0$, se tiene,

$$\int_\varepsilon^1 f'(x)\,dx \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 0$$

Por demostrar: $\int_{(0,1)} f'$ no está definida.

Recordando que $f = f^+ - f^-$. Sea $M \subset (0,1)$ el conjunto de ceros de f. Como M es numerable, $\mathcal{L}^1(M) = 0$ ($\mathcal{L}^1$ medida de Lebesgue) y en general, f^+, f^- son derivables en $(0,1) \setminus M$. Así

$$\int_{(0,1)} f' = \int_{(0,1)} (f^+ - f^-)' = \int_{(0,1)} (f^+)' - \int_{(0,1)} (f^-)'$$

Problema 5

Sea $f(x) := \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$. Evaluar $\bar{D}f(0)$, $\underline{D}f(0)$.

dem. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x| < \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \frac{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

Evidentemente se sigue que $\sup_{0<|x|<\varepsilon} \{\operatorname{sen} \frac{1}{x}\} = 1$, $\inf_{0<|x|<\varepsilon} \{\operatorname{sen} \frac{1}{x}\} = -1$

$\therefore \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{0<|x|<\varepsilon} \{\operatorname{sen} \frac{1}{x}\} = 1$, $\lim_{\varepsilon \to 0^-} \inf_{0<|x|<\varepsilon} \{\operatorname{sen} \frac{1}{x}\} = -1$

$\therefore \bar{D}f(0) = 1$, $\underline{D}f(0) = -1$

F.

Recordemos, $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$. $f^+, f^- \geq 0$.

Vamos a demostrar que $\int_{(0,1)} (f^+)' = \infty$, $\int_{(0,1)} (f^-)' = \infty$.

Considerando $\left\{ \left[\sqrt{\frac{1}{1+2k}}, \sqrt{\frac{2}{1+4k}} \right] \right\}_{k=1}^{\infty}$ (disjunta), se tiene por el teorema fundamental del cálculo:

$$\int_{(0,1)} (f^+)' \geq \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{1}{1+2k}}, \sqrt{\frac{2}{1+4k}} \right]} (f^+)'$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\sqrt{\frac{1}{1+2k}}}^{\sqrt{\frac{2}{1+4k}}} (f^+)' = \sum_{k=1}^{\infty} \left((f^+)\left(\sqrt{\frac{2}{1+4k}}\right) - (f^+)\left(\sqrt{\frac{1}{1+2k}}\right) \right)$$

como $f\left(\sqrt{\frac{2}{1+4k}}\right) = \frac{2}{1+4k} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\frac{2}{1+4k}} \right) = \frac{2}{1+4k} \operatorname{sen}\left(\frac{1+4k}{2}\pi \right) = \frac{2}{1+4k}$,

$f\left(\sqrt{\frac{1}{1+2k}}\right) = \frac{1}{1+2k} \operatorname{sen}\left((1+2k)\pi \right) = 0$

$\Rightarrow (f^+)\left(\sqrt{\frac{2}{1+4k}}\right) = \frac{2}{1+4k}$, $(f^+)\left(\sqrt{\frac{1}{1+2k}}\right) = 0$

$\Rightarrow \int_{(0,1)} (f^+)' \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{1+4k}$, pero $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{1+4k} = \infty$

$\Rightarrow \int_{(0,1)} (f^+)' = \infty$

Scanned with CamScanner

Análogamente, considerando la familia $\left\{\left[\sqrt{\frac{1}{2k+2}}, \sqrt{\frac{2}{3k+4}}\right]\right\}_{k=1}^{\infty}$ de subintervalos de $(0,1)$ (disjunta igual que la anterior), se tiene

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{2k+2}}\right) = \frac{1}{2k+2}\operatorname{sen}\left((2k+2)\pi\right) = 0$$

$$f\left(\sqrt{\frac{2}{3k+4}}\right) = \frac{2}{3k+4}\operatorname{sen}\left((3k+4)\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3k+4}$$

$$\Rightarrow (f^-)\left(\sqrt{\frac{1}{2k+2}}\right) = 0 \quad , \quad (f^-)\left(\sqrt{\frac{2}{3k+4}}\right) = \frac{2}{3k+4} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \int_{(0,1)} (f^-)' \geq \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\sqrt{\frac{1}{2k+2}}, \sqrt{\frac{2}{3k+4}}\right]} (f^-)' = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\sqrt{\frac{1}{2k+2}}}^{\sqrt{\frac{2}{3k+4}}} (f^-)'$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (f^-)\left(\sqrt{\frac{2}{3k+4}}\right) - (f^-)\left(\sqrt{\frac{1}{2k+2}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3k+4} - 0\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3k+4}$$

Pero como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3k+4} = \infty \Rightarrow \int_{(0,1)} (f^-)' = \infty$

Se concluye que al tener una expresión del tipo $\infty - \infty$, no puede definirse $\int_{(0,1)} f'$ como $\int_{(0,1)} (f^+)' - \int_{(0,1)} (f^-)'$. En otras palabras, $\int_{(0,1)} f'$ no está definida.

7.

Problema 7

Muestre que $f(x) := \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ no es de variación acotada; además es continua pero no absolutamente continua.

dem

Primero veamos que f es continua. Al ser f derivable f en todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se tiene que f es continua en $x \neq 0$. En el caso de $x = 0$:

$$0 \leq | f(h) - f(0) | = \left| h \operatorname{sen} \frac{1}{h} - 0 \right| = \left| h \operatorname{sen} \frac{1}{h} \right| = |h| \left| \operatorname{sen} \frac{1}{h} \right| \leq |h|$$

cuando $h \to 0$, $|h| \to 0$, luego por el teorema del sandwich,

$$\lim_{h \to 0} | f(h) - f(0) | = 0$$

$\therefore$ f es continua en $x = 0$.

$\therefore$ f es continua en $\mathbb{R}$

Pd: f no es de variación acotada.

En efecto, si $x_n = \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi}$ $y_n = \frac{1}{2\pi n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$0 \leq x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq \ldots \leq x_n \leq y_n \leq \ldots \leq 1 ,$$

junto con $f(x_n) = \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi} \operatorname{sen}\left((2n + \frac{1}{2})\pi\right) = \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi}$,

$$f(y_n) = \frac{1}{2n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(f(y_n) - f(x_n) \right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} - \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi} = -\frac{1}{\pi} \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2n+1} = -\infty$$

Por lo tanto, $T_-(f,[0,1]) = -\infty$. Así, f no puede ser de variación acotada.

Pd: f no es absolutamente continua (Esto es gratis ya que no es de variación acotada!)

dem: Por lo visto en clases, una función absolutamente continua implica que sea de variación acotada; pero en este caso, f no es de variación acotada, luego no puede ser absolutamente continua.

Igualmente demostraremos esta afirmación de manera directa:

En $[0,1]$, sea, $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$x_k = \frac{1}{(2k+\frac{1}{2})\pi}, \quad y_k = \frac{1}{2k\pi}$$

Tenemos la colección disjunta $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ donde $x_{k+1} < y_k$ y

$$y_k - x_k = \frac{1}{2k\pi} - \frac{1}{(2k+\frac{1}{2})\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{(2k+\frac{1}{2})}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2k+\frac{1}{2}-2k}{2k(2k+\frac{1}{2})}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2k(2k+\frac{1}{2})}$$

Se tiene que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(y_k - x_k) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k(2k+\frac{1}{2})} < \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty$

Utilizaremos esta colección de la manera siguiente, como

$$|f(y_k) - f(x_k)| = \frac{1}{(2k+\frac{1}{2})\pi} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|f(y_k) - f(x_k)| = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}\frac{1}{2k+\frac{1}{2}} = \infty$$

Con lo anterior, al ser $\sum_{k=1}^{\infty}(y_k - x_k) < \infty$ y $\sum_{k=1}^{\infty}|f(y_k) - f(x_k)| = \infty$,

existe $\varepsilon > 0$, tal que para cualquier $\delta > 0$, siempre existe

$n_0 \in \mathbb{N}$ que cumple:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty}(y_k - x_k) < \delta$$

pero considerando el $m \in \mathbb{N}$ adecuado, $\sum_{k=n_0}^{m}(y_k - x_k) < \delta$, y

$\sum_{k=n_0}^{m}|f(y_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon$. Así, encontramos una subcolección finita disjunta $\{(x_k, y_k)\}_{k=n_0}^{m}$ que cumple $\sum_{k=n_0}^{m}(y_k - x_k) < \delta$

y $\sum_{k=n_0}^{m}|f(y_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon$.

$\therefore$ f no puede ser absolutamente continua.

7.

Problema 8

Muestre que la función ternaria de Cantor g es creciente, continua y que la desigualdad $\int g' \leq g(1)-g(0)$ es estricta. Muestre que la función ternaria de Cantor no es absolutamente continua.

dem. La función ternaria de Cantor es $g:[0,1]\to[0,1]$, $g(y) = \sup\{x \mid f(x)\leq y\}$, donde $f:[0,1]\to T$, T es el conjunto de Cantor en $[0,1]$ y

$$f: \sum_1^\infty \frac{x_n}{2^n} \longrightarrow \sum_1^\infty \frac{y_n}{3^n}$$

donde $\{x_n\}$ es la representación binaria de x (eligiendo en casos ambiguos aquella que no termina, ejemplo, cuando $x=\frac{1}{2}$ se opta opta por $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{2^n}$), entonces $y_n=0$ cuando $x_n=0$, $y_n=2$ si $x_n=1$.

Pd: g es creciente en $[0,1]$

dem: Sean $a,b\in[0,1]$ tales que $a\leq b$

$\Rightarrow \{x \mid f(x)\leq a\}\subseteq\{x\mid f(x)\leq b\}$

$\Rightarrow \sup\{x\mid f(x)\leq a\}\leq \sup\{x\mid f(x)\leq b\}$

$\Rightarrow g(a)\leq g(b)$

$\therefore$ g es creciente.

(2,0)

(Sin terminar)

Problema 9

Pruebe que las funciones absolutamente continuas son de variación acotada.

dem. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ absolutamente continua. Por este hecho, podemos encontrar $\varepsilon>0$ tal que para toda colección de subintervalos disjuntos $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{m}$:

$$\sum_{i=1}^{m}(b_i-a_i)<\varepsilon \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}|f(b_i)-f(a_i)|<1$$

Consideremos ahora una partición $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ tal que $x_k-x_{k-1}<\varepsilon$ ($k=1,\dots,n$). → n depende de ε.

Ahora, para toda partición $a=y_0<y_1<\dots<y_q=b$, consideremos $z_0,z_1,z_2,\dots,z_t$ la unión $\{x_k\}_{k=0}^{n}\cup\{y_l\}_{l=0}^{q}$. Se tiene que $\{z_0<\dots<z_t\}$ es una partición más fina que $\{y_0<\dots<y_q\}$, y para todo subintervalo $[x_{\lambda-1},x_\lambda]$ ($\lambda=1,\dots,n$), contamos los z_i tales que $x_{\lambda-1}\le z_{i-1}<z_i\le x_{\lambda-1}$. Como

$$\sum_i z_i-z_{i-1}<\varepsilon \Rightarrow \sum|f(z_i)-f(z_{i-1})|<1$$

. Como este proceso se repite n-veces (depende de ε.), entonces si sumamos sobre toda la partición $\{y_0<\dots<y_q\}$, mediante desigualdad triangular:

$$\sum_{i=1}^{q}|f(y_i)-f(y_{i-1})|\le\sum_{i=1}^{t}|f(z_i)-f(z_{i-1})|<n$$

→ cuando tomas sup. porque no depende de ε?

$\therefore$ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es de variación acotada.

6,0

Scanned with CamScanner

Problema 10

Muestre que el conjunto de las funciones absolutamente continuas forman un espacio vectorial.

dem. Primero veamos que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es absolutamente continua, entonces f es uniformemente continua. En efecto, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que para cualquier familia disjunta $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{n}$ de subintervalos de $[a,b]$,

$$\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|<\delta \implies \sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|<\varepsilon$$

Luego tomando $n=1$, $|y_1-x_1|<\delta \implies |f(y_1)-f(x_1)|<\varepsilon$.

Con esto:

$$\{\text{funciones absolutamente continuas}\}\subseteq\{\text{funciones continuas}\}$$

Como {funciones continuas} ya forman un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, sólo basta demostrar que las absolutamente continuas forman un subespacio.

En efecto, sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones absolutamente continuas; $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Definiendo $h:[a,b]\to\mathbb{R}$,

$$h(x):=\lambda f(x)+\mu g(x)$$

Para cualquier colección de subintervalos disjuntos $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ de subintervalos disjuntos, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n}|h(y_i)-h(x_i)|=\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda(f(y_i)-f(x_i))+\mu(g(y_i)-g(x_i))\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left(|\lambda| \, |f(y_i) - f(x_i)| + |\mu| \, |g(y_i) - g(x_i)| \right)$$

$$= |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| + |\mu| \sum_{i=1}^{n} |g(y_i) - g(x_i)|$$

Ahora, dado $\varepsilon > 0$, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que para cualquier par de colecciones $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ y $(\bar{x}_1, \bar{y}_1), \dots (\bar{x}_m, \bar{y}_m)$ de $[a,b]$ que sean disjuntas, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - x_i < \delta_1 \implies \sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i - \bar{x}_i < \delta_2 \implies \sum_{i=1}^{m} |f(\bar{y}_i) - f(\bar{x}_i)| < \frac{\varepsilon}{2|\mu|}$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene que para toda familia disjunta $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{\ell}$ de subintervalos disjuntos de $[a,b]$:

$$\sum_{i=1}^{\ell} y_i - x_i < \delta \implies \sum_{i=1}^{\ell} |h(y_i) - h(x_i)| \leq$$

$$|\lambda| \sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| + |\mu| \sum_{i=1}^{n} |g(y_i) - g(x_i)|$$

$$< |\lambda| \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} + |\mu| \frac{\varepsilon}{2|\mu|}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

7

$\therefore$ $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua, y con ello, las abs. continuas forman