Universidad de las Américas
Cálculo II, MA171
Junio 17, 2019

Desarrollo Cátedra 3, MAT171

Problema 1.

$Q = Q(t)$: cantidad de dinero (en pesos) que hay en la cuenta de ahorro para $t \geq 0$.

Modelo de capitalización: $\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = rQ \\ Q(0) = 1000000 \end{cases}$

interés anual del 5 % $\Rightarrow Q(1) = 1000000 + 50000 = 1050000$

Tenemos: $Q(t) = Q_0 e^{rt}$, $Q_0 = Q(0) = 1000000$

$$1050000 = Q(1) = 1000000 e^{r \cdot 1} \Rightarrow e^r = \frac{1050000}{1000000}$$

$$r = \ln\left(\frac{1050000}{1000000}\right) \approx 0.05$$

Luego: $Q(t) = 1000000\, e^{0.05t}$

La cuenta duplica su cantidad cuando: $Q(t) = 2000000$

$$2000000 = 1000000\, e^{0.05t}$$

$$e^{0.05t} = 2 \quad / \ln(\ )$$

$$0.05t = \ln(2)$$

$$t = \frac{\ln(2)}{0.05} \approx 13.9$$

Conclusión: Para que la cantidad inicial depositada se duplique, deben pasar 13,9 años.

Problema 2. $x = x(t)$: Cantidad de sal (en gramos) en el estanque en $t \geq 0$.

Inicialmente: $x(0) = 5000$

$$\frac{dx}{dt} = (\text{razón entrada sal}) - (\text{razón de salida de sal})$$

$$\text{razón de entrada} = \left(200\ \frac{gr}{lt}\right)\left(2\ \frac{lt}{min}\right) = 400\ \frac{gr}{min}$$

$$\text{razón de salida} = \left(2\ \frac{lt}{min}\right)\left(\frac{x}{50}\ \frac{gr}{lt}\right) = \frac{x}{25}\ \frac{gr}{min}$$

$$\frac{dx}{dt} = 400 - \frac{x}{25} \iff \frac{dx}{dt} + \frac{x}{25} = 400$$

Solución general de la ecuación lineal $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{25} = 400$:

$$x(t) = \mu(t)^{-1}\left(\int \mu(t)\, 400\, dt + C\right), \quad \mu(t) \text{ factor integrante.}$$

$$\mu(t) = \exp\left(\int \frac{1}{25} dt\right) = \exp\left(\frac{1}{25} t\right)$$

$$x(t) = \exp\left(-\frac{1}{25} t\right)\left(\int 400 \exp\left(\frac{1}{25} t\right) dt + C\right)$$

$$\int 400 \exp\left(\frac{t}{25}\right) dt = 400 \int \exp\left(\frac{t}{25}\right) dt = 400 \cdot 25 \exp\left(\frac{t}{25}\right) = 10000 \exp\left(\frac{t}{25}\right)$$

Luego: $x(t) = \exp\left(-\frac{1}{25} t\right)\left(10000 \exp\left(\frac{t}{25}\right) + C\right) = 10000 + C \exp\left(-\frac{t}{25}\right)$

Cuando $x(0) = 5000$:

$$5000 = 10000 + C \exp(0) = 10000 + C \Rightarrow C = -5000$$

$$x(t) = 10000 - 5000 \exp\left(-\frac{t}{25}\right)$$

Después de 1 hora: $t=60$

$$x(60) = 10000 - 5000\exp\left(-\frac{60}{25}\right) \approx 9546.4$$

Conclusión: Después de 1 hora, la cantidad de sal que hay en el estanque es aproximadamente de 9.5 kg.

Problema 3. $T = T(t)$: temperatura de la taza de café para $t \geq 0$

t: tiempo (minutos)

Ley de enfriamiento de Newton:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T-25) \\ T(0) = 90 \end{cases}$$

a. La solución general de $\dfrac{dT}{dt} = k(T-25)$ es:

$$T(t) = 25 + Ce^{kt}$$

Inicialmente: $T(0) = 90$:

$$90 = T(0) = 25 + Ce^{0} = 25 + C \quad \Rightarrow C = 90 - 25 = 65$$

$$T(t) = 25 + 65e^{kt}$$

Pasado 2 minutos: $T(2) = 85$:

$$85 = T(2) = 25 + 65e^{2k} \quad \rightarrow \quad e^{2k} = \frac{85-25}{65} = \frac{60}{65}$$

$$\Rightarrow \quad 2k = \ln\left(\frac{60}{65}\right)$$

$$k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{60}{65}\right) \approx -0.04$$

Luego: $T(t) = 25 + 65e^{-0.04t}$

b. Hay que resolver la ecuación: $T(t) = 70$

$$25 + 65e^{-0.04t} = 70$$

$$e^{-0.04t} = \frac{70-25}{65} = \frac{45}{65} \quad / \ln(\ )$$

$$-0.04t = \ln\left(\frac{45}{65}\right)$$

$$t = -\frac{1}{0.04}\ln\left(\frac{45}{65}\right) \approx 9.2$$

Conclusión: Pedro debe dejar pasar aproximadamente 9.2 minutos para que pueda comenzar a beber su café.