Problema 2

Sea S subespacio cerrado del espacio vectorial X. Suponga que $x_0 \in X \setminus S$. Muestre que $s + \lambda x_0 \mapsto \lambda$ pertenece a $(S + \langle x_0 \rangle)^*$

dem. Primero demostraremos que la aplicación esté bien definida.

Sean $s + \lambda x_0,\ \bar{s} + \bar{\lambda} x_0 \in S + \langle x_0 \rangle$, tales que $s + \lambda x_0 = \bar{s} + \bar{\lambda} x_0$

$\Rightarrow (s - \bar{s}) + (\lambda - \bar{\lambda}) x_0 = 0$. Como $s - \bar{s} \in S$ y $x_0 \in X \setminus S$, entonces necesariamente $\lambda - \bar{\lambda} = 0$,

$$\text{Si } \lambda - \bar{\lambda} \neq 0 \rightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}(s - \bar{s}) \in S \ (\Rightarrow\Leftarrow)$$

$$\therefore \lambda = \bar{\lambda}$$

$$\therefore s = \bar{s}$$

Así, $s + \lambda x_0 = \bar{s} + \bar{\lambda} x_0$.

No hay clases de equivalencia donde apriori habría que justificar esto.

Definimos $f : S + \langle x_0 \rangle \to \mathbb{C}$ por $f(s + \lambda x_0) = \lambda$, queremos demostrar $f \in (S + \langle x_0 \rangle)^*$, i.e, f es lineal continua.

Sean $s + \lambda x_0,\ \bar{s} + \bar{\lambda} x_0 \in S + \langle x_0 \rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}$

$$f((s + \lambda x_0) + (\bar{s} + \bar{\lambda} x_0)) = f(s + \bar{s} + (\lambda + \bar{\lambda}) x_0) = \lambda + \bar{\lambda}$$
$$= f(s + \lambda x_0) + f(\bar{s} + \bar{\lambda} x_0)$$

$$f(\alpha(s + \lambda x_0)) = f(\alpha s + (\alpha\lambda) x_0) = \alpha\lambda = \alpha f(s + \lambda x_0)$$

$$\therefore f \ \mathbb{C}\text{-lineal}$$

Pd: f continua.

Sea $C \subseteq \mathbb{C}$ cerrado. $f^{-1}(C) = \{ s + \lambda x_0 / \lambda \in C \} = S + \{ \lambda x_0 / \lambda \in C \}$.

Si $B = S + \{\lambda x_0 / \lambda \in C\} \Rightarrow B \subseteq \bar{B}$. Ahora, dado $\boxed{s + \lambda x_0 \in \bar{B}}$, al ser S y C cerrados, existen $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sucesiones tales que $s_k \xrightarrow{k \to \infty} s$, $\lambda_k \xrightarrow{k \to \infty} \lambda$. Definiendo $v_k = s_k + \lambda_k x_0$, vemos que $v_k \xrightarrow{k \to \infty} v$, donde $v = s + \lambda x_0$ (ya que la suma es continua). $\boxed{\text{Y } v \in B}$

Siempre lo supuste.

$$\therefore \bar{B} \subseteq B$$

(6,0)

Scanned with CamScanner

$$\therefore \overline{B} = B$$

Se concluye que $f \in (S + \langle x_0 \rangle)^*$.

Problema 7

(a) Muestre que el operador lineal $f: X \to Y$ entre los espacios de Banach X, Y es continuo ssi la imagen de cualquier conjunto acotado en X es acotado en Y.

Dem. Primero demostraremos que f continua en X ssi f continua en $x=0$:

Supongamos f continua en X $\Rightarrow$ f continua en x, $\forall x \in X$
$\Rightarrow$ f continua en $x=0$.

Ahora supongamos que f es continua en $x=0$ y demos $\varepsilon > 0$ arbitrario, junto con $x_0 \in X$. Como f continua en $y=0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall y$, $\|y\| < \delta \Rightarrow \|f(y)\| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall x \in X$ tq $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x-x_0)\| < \varepsilon$, pero
$f(x-x_0) = f(x) - f(x_0)$ (f lineal)

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X: \|x - x_0\| < \delta \to \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$

$\therefore$ f continua en $x = x_0 \in X$

Como el $x = x_0$ es arbitrario, se obtiene lo que nos propusimos al comienzo.

Ocupando esta caracterización de continuidad, demostraremos lo siguiente:

- $f: X \to Y$ continua en $x=0 \iff \exists k > 0, \forall x \in X: \|f(x)\| < k\|x\|$

($\Rightarrow$) Dado $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in X$: $\|x\| < \delta \Rightarrow \|f(x)\| < 1$

Sea $x \in X$, si $x=0$, entonces se cumple trivial la condición anterior: $\|0\| < \delta \Rightarrow \|f(0)\| = \|0\| < 1$.

Si $x \in X \setminus \{0\}$ $\Rightarrow$ $y = \delta \frac{x}{\|x\|}$ cumple $\|y\| = \|\frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|}\| = \frac{\delta}{2}\frac{\|x\|}{\|x\|} < \frac{\delta}{2} < \delta$

$\Rightarrow \|f(y)\| < 1$. Pero $\|f(y)\| = \|f(\frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|})\| = \|\frac{\delta}{2} f(\frac{x}{\|x\|})\|$
$= \frac{\delta}{2}\|f(\frac{x}{\|x\|})\| = \frac{\delta}{2\|x\|}\|f(x)\| < 1$

$$\therefore \quad \|f(x)\| < \frac{2}{\delta}\|x\|$$

Tomando $K = \frac{2}{\delta}$ se cumple lo pedido.

($\Leftarrow$) Dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ para que $\forall x \in X$,

$$\|x\| < \delta = \frac{\varepsilon}{K} \Rightarrow K\|x\| < \varepsilon \Rightarrow \|f(x)\| \leq K\|x\| < \varepsilon$$

$$\therefore \quad \|f(x)\| < \varepsilon$$

$\therefore$ f continua en $x = 0$.

Ahora tenemos los conocimientos suficientes para resolver nuestro problema:

Af. $\exists K > 0, \forall x \in X : \|f(x)\| \leq K\|x\|$ ssi $f(A)$ acotado en Y $\forall A \subseteq X$ acotado.

dem. ($\Rightarrow$) Si $A \subset X$ acotado $\Rightarrow \exists r > 0, \forall x \in A : \|x\| \leq r$

$$\Rightarrow \|f(x)\| \leq K\|x\| \leq Kr \quad \forall x \in A$$

$$\therefore \quad \|f(x)\| \leq Kr$$

$\therefore$ $f(A)$ acotado.

($\Leftarrow$) Recordemos que $f(0) = 0$ ya que f es lineal. Sea $x \in X \setminus \{0\}$, $\frac{x}{\|x\|} \in B(0,2)$. Como $B(0,2) \subset X$ acotado $\Rightarrow f(B(0,2)) \subset Y$ acotado $\Rightarrow \exists K > 0 : \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq K$. Pero $f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|} f(x)$

$$\therefore \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} f(x) \right\| = \frac{1}{\|x\|}\|f(x)\| \leq K$$

$$\therefore \|f(x)\| \leq K\|x\| \quad \forall x \in X \setminus \{0\}$$

$$\therefore \|f(x)\| \leq K\|x\| \quad \forall x \in X.$$

(6,0)

(b) Muestre que si un operador $T: X \to Y$ entre espacios de Banach X e Y es compacto (o sea, lineal y $T(F)$ relativamente compacto, para todo $F \subset X$ acotado), entonces necesariamente T es continuo.

dem. Ocuparemos la caracterización de continuidad demostrada en la parte (a):

$T: X \to Y$ continuo $\Leftrightarrow$ $T(A)$ acotado $\forall A \subset X$ acotado.

Sea $F \subseteq X$ acotado, $T: X \to Y$ compacto $\Rightarrow$ $T(A)$ relativamente compacto, es decir, $\overline{T(A)} \subset Y$ compacto. Como Y es espacio normado (en particular, métrico),

$\overline{T(A)}$ compacto $\Leftrightarrow$ $\overline{T(A)}$ completo y totalmente acotado.

Pero $\overline{T(A)}$ totalmente acotado $\Rightarrow$ $\overline{T(A)}$ acotado

$\Rightarrow \exists r > 0 : \overline{T(A)} \subset B(0, r)$. Como $T(A) \subseteq \overline{T(A)}$, se tiene $T(A) \subseteq \overline{T(A)} \subseteq B(0, r)$

$\therefore$ $T(A) \subseteq Y$ acotado

$\therefore$ $T: X \to Y$ es continuo

$\boxtimes$

Universidad de Chile
Departamento de Matemáticas

7 de Enero de 2012

ANÁLISIS ABSTRACTO I - PRUEBA 2

Profesor: Dr. Manuel Pinto Jiménez
Ayudante: Diego A. Jauré Romero

Resuelva sólo cuatro problemas. El problema 5 es obligatorio. La prueba es individual. Tiene 3 horas para realizarla ¡Suerte!

(1) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\beta \in \mathbb{R}$ constante, defina $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx + \beta) f(x)\, dx.$$

Demuestre que $\varphi(t) \to 0$ [2 pts.] si $|t| \to +\infty$, y deduzca que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\, dx, \quad \text{cuando} \quad |t| \to +\infty \quad [0.5\,\text{pts.}].$$

Encuentre una condición [1 pts.] para que φ sea diferenciable y luego demuestre la diferenciabilidad de φ [2.5 pts.].

(2) Suponga que $f_n \to g$ c.t.p. en A.

(a) Además suponga que $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que $m(B) < \delta$ con $\int_B |f_n| < \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que si $m(A) < \infty$ entonces $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A g$ [3 pts.].

(b) Verifique que el resultado anterior también es cierto si $\|f_n\|_2 \le 2012$ [3 pts.].

(3)

(a) Sea $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua. Demuestre que $m(A) = 0$, implica que $m(v(A)) = 0$ [2 pts.] ¿Vale esto para v sólo continua? [1 pts.]

(b) Sea $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ y considere la función $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $v(t) = \int_0^t \varphi$. Demuestre que $E \subset [a,b]$ es un conjunto medible implica que $v(E)$ también lo es (recuerde que un conjunto medible se escribe como $F \cup N$ con F un conjunto de Borel y N un conjunto de medida cero) [2.5 pts.] ¿Esto vale para toda v absolutamente continua? [0.5 pts.]

(4) Sean $h \in L^p(\mathbb{R})$ y $g \in L^q(\mathbb{R})$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Probar que para todo $t \in \mathbb{R}$, la función ψ dada por

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} g(s)\, |h(s) - h(s+t)|\, ds$$

está bien definida [1.5 pts.] y es continua en $t = 0$ [4.5 pts.].

(5) Sean $\varphi_n, f \in L^p(A)$, $m(A) < \infty$ y $\varphi_n \to f$ c.t.p. Demuestre que $\|\varphi_n\|_p \to \|f\|_p$ cuando $n \to \infty$ implica que $\|\varphi_n - f\|_p \to 0$ cuando $n \to \infty$ [4 pts.] ¿Vale el recíproco? [0.5 pts.] Extienda el resultado a $m(A) = \infty$ [1.5 pts.].

$\Rightarrow \psi(t) = \int_{\mathbb{R}} g(s)|h(s) - h(s+t)| < \infty$

$\therefore$ ψ está bien definida.

1,5/.

6,9

$\frac{7}{\frac{7}{6}}$

TAREA N° 2 de Análisis Abstracto

Nombre: Alejandro González Castro
Marco Godoy Valdebenito.

5) Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $A_n \subset A_{n+1}$. Sea $m^*(A_n)$ la medida externa de cada conjunto. Demuestre o refute las siguientes igualdades: $m^*(\bigcap A_n) = \lim\limits_{n \to -\infty} m^*(A_n)$, $m^*(\bigcup A_n) = \lim\limits_{n \to \infty} m^*(A_n)$
¿ y si los A_n son medibles? ¿ y si los A_n son borelos?

Para el caso $m^*(\bigcap A_n) = \lim\limits_{n \to -\infty} m^*(A_n)$ tomaremos un contraejemplo con boreles para demostrar que no se puede con ellos, luego tampoco se puede con medibles, ya que los boreles en particular son medibles.

Sea $A_n = \{(-\infty, n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, luego tenemos que

$$A_n \subseteq A_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{Z}.$$

por otro lado tenemos que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} A_n = \phi \quad , \text{Así} \quad m\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} A_n\Big) = m\,\phi = 0,$$

pero por otra parte tenemos que cada A_n tiene una medida por ser borel y ésta es

$$m\,A_n = \infty \; ; \text{luego}$$

$$m\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} A_n\Big) \neq \lim_{n \to \infty} m(A_n) \;!!$$

Ahora para el caso de medibles demostraremos que se cumple

$$m^*\left(\bigcup A_n\right) = \lim_{n\to\infty} A_n$$

Sea $A_1 = \bigcup_{i=-\infty}^{1} A_i$ notemos que esta igualdad tiene perfecto sentido, ya que $A_n \subset A_{n+1}$

Ahora Definimos $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ $\forall n \geq 2$
notemos que $B_i \cap B_j = \emptyset$ $\forall \underset{i\neq j}{i,j} \in n \geq 2$

Por otro lado $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=2}^{\infty} B_i \cup A_1$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = m\left(\bigcup_{i=2}^{\infty} B_i \cup A_1\right)$$

$$= m\left(\bigcup_{i=2}^{\infty} B_i\right) + m A_1$$

como los B_n son disjuntos, entonces

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=2}^{\infty} m(B_i) + m A_1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} m(B_i) + m(A_1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} m(A_i \setminus A_{i-1}) + m(A_1)$$

como cada A_i es medible entonces

$$m(A_i \setminus A_{i-1}) = m(A_i) - m(A_{i-1})$$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=2}^{n}\left(m(A_i) - m(A_{i-1})\right) + m A_1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(m A_n - m A_1 + m A_1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} m A_n \text{ //}$$

Ahora si los A_n no son medibles podemos encontrar un contraejemplo.

Sea P el conjunto de Vitali, recordemos que P es un subconjunto de $[0,1)$, Ahora tomemos una enumeración de los racionales en el intervalo $[0,1)$, es decir, $\mathbb{Q}\cap[0,1)$. Sea $\langle q_i\rangle_{i=1}^{\infty}$ tal enumeración, entonces vamos a definir una suma de clases laterales como sigue

$$P_i = P + q_i$$

Notemos que cada $P_i \subset [0,2)$, además sabemos que $P_i \cap P_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Luego

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \subseteq [0,2)$$

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i\right) \leq m^*([0,2]) = \ell([0,2]) = 2$$

pero por otro lado tenemos que $m\left(\sum_{i=1}^{\infty} P_i\right)$

$$\sum_{i=1}^{\infty} m^*(p_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(p) = \infty$$

Ahora definimos los A_i como sigue

$$A_1 = P_1$$
$$A_2 = P_1 \cup P_2$$
$$\vdots$$
$$A_n = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$$

por lo tanto "evidentemente"

$$A_n \subset A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq 2$, pero por otra parte tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} m^* A_n = \lim_{n\to\infty} m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} P_i\right)$$

como los P_i son disjuntos tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} m^* A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m^*(P_i)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m^*(P) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(P) = \infty$$

$$\therefore \quad m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \lim_{n\to\infty} m^* A_n$$

Problema 9

Suponga que $A_1, A_2, \ldots,$ es una colección numerable de conjuntos medibles tales que $\sum_i m(A_i) < \infty$

Demuestre que

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i\right) = 0$$

Dem:

Para todo $k \in \mathbb{N}$, tomamos $E_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i$, nos damos cuenta que $E_{k+1} \subset E_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, en efecto

$$E_{k+1} = \bigcup_{i=k+1}^{\infty} A_i \subset \left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} A_i\right) \cup A_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i = E_k.$$

Además se cumple

$$mE_1 = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} mA_i < \infty$$ (Propiedad Subaditiva de la medida)

Con lo anterior y usando la proposición 14 (Royden) basta ver que

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} mE_k$$

Afirmación $\lim_{k\to\infty} mE_k = 0$,

En efecto, $mE_k = m\left(\bigcup_{k=i}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=k}^{\infty} A_i$, y como $\sum_{i=1}^{\infty} A_i < \infty$, dado $\varepsilon > 0$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$

$\sum_{i=k}^{\infty} A_i < \varepsilon$. Por lo tanto $\lim_{k\to\infty} mE_k = 0$

Así obtenemos que

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}A_i\right)=0$$

Scanned with CamScanner

13. (a) Sea E medible, demuestre que:

i. Dado $\varepsilon > 0$, existe un abierto O que contiene a E tal que $m^*(O \setminus E) < \varepsilon$ ¿Es posible encontrar un F_σ con esta propiedad? ¿Por qué es importante la hipotesis de que E sea medible?

Primero vamos a suponer que $m^* E < \infty$

Por la proposicion 5 sabemos que

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ O abierto tal que $E \subset O$,

$$m^* O < m^* E + \varepsilon \quad \text{, luego}$$

$$m^* O - m^* E < \varepsilon$$

Ahora probaremos que $m^* O - m^* E = m^*(O \setminus E)$, en efecto, $O = E \dot{\cup} (O \setminus E)$, luego como E es medible tenemos que

$$m^*(O) = m^* E + m^*(O \setminus E)$$
$$m^*(O \setminus E) = m^*(O) - m^*(E)$$

luego $m^*(O \setminus E) = m^*(O) - m^*(E) < \varepsilon$

Ahora si $m^* E = \infty$, tenemos que para cada n, sea $E_n = E - n, n[\cap E$, luego por lo anteriormente demostrado tenemos que $\exists$ O_n abierto tal que $E_n \subset O_n$ tal que $m^*(O_n / E_n) < \varepsilon/2^n$

luego tomamos $O=\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$, entonces obtenemos trivialmente que $E\subset O$.

Ahora $m^*(O\setminus E)=m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$

$$=m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(O_n\setminus E_n)\right)<\varepsilon$$ //

Ahora para la pregunta ¿Es posible encontrar un F_σ con esta propiedad?

notemos que en el caso anterior $O=\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, con I_n intervalos abiertos, luego podemos tomar

$O'=\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{I_n}$, donde $\overline{I_n}$ es el intervalo cerrado, luego O' está en F_σ y además tenemos que

$$m^*O=m^*O' \text{ ya que}$$

$$\underset{l(I_n)=l(\overline{I_n})}{m^*I_n=m^*\overline{I_n}} \Rightarrow m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right)=m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{I_n}\right)$$

¿Por que es importante la hipotesis de que E sea medible?
notemos que en la demostracion fue escencial que $m(O\setminus E)=m(O)-m(E)$.
pero si E no es medible sólo podemos decir que

$$m^*(O\setminus E)+m^*(E)\geq m^*(O).$$

1 p

ii) Dado $\varepsilon>0$, existe un cerrado F contenido en E tal que $m^*(E\setminus F)<\varepsilon$ ¿Es posible encontrar un $G_{\delta\sigma}$ con esta misma propiedad?

En el ejercicio anterior teníamos que podíamos encontrar un $O\supset E$ abierto, luego tal que $m(O\setminus E)<\varepsilon$.

Ahora sea E medible, luego E^c es medible. Como E^c es medible, existe O abierto tal que

$$E^c\subset O \quad \forall\varepsilon>0 \quad m^*(O\setminus E^c)<\varepsilon.$$

Ahora definimos $O^c=F$ y notemos lo siguiente

$$E^c\subset O \;/(\;)^c$$

$$(E^c)^c\supset O^c, \text{ es decir, } E\supset O^c=F$$

ahora calculemos

$$\begin{aligned} m^*(E\setminus F) &= m^*(E\cap F^c)\\ &= m^*(E\cap O)\\ &= m^*(O\cap E) = m^*(O\setminus E^c)<\varepsilon \end{aligned}$$

luego $m^*(E\setminus F)<\varepsilon$,

0,5p

(iii) Existe un $G \in \mathcal{G}_\delta$ que contiene a E tal que $m^*(G \setminus E) = 0$

Por la proposición (5) (Royden), existe $G \in \mathcal{G}_\delta$ tal que $E \subset G$ y $m^*E = mG$. Por otro lado, como E es medible se tiene que $m^*(G|E) = m^*G - m^*E$. En efecto

$$E \subset G \Rightarrow G = E \dot{\cup} (G \setminus E)$$
$$\Rightarrow m^*G = m^*E + m^*(G \setminus E) \quad (E, G \text{ medibles})$$
$$\Rightarrow m^*(G \setminus E) = m^*G - m^*E$$

Por lo tanto, $m^*(G \setminus E) = 0$.

Esta demostración es válida cuando $m^*E < \infty$.

Ahora supongamos que $m^*E = \infty$, para ello ocupamos (i). O sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $O_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ (abierto de $\mathbb{R}$) tal que $E \subset O_n$ y $m^*(O_n \setminus E) < \frac{1}{n}$. Ahora tomamos la intersección $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$.

Este conjunto satisface $G \in \mathcal{G}_\delta$, $E \subset G$ y además

$$G \setminus E \subset O_n \setminus E, \text{ ya que } G \subset O_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, $m^*(G \setminus E) \leq m^*(O_n \setminus E) \leq \frac{1}{n}$. Se concluye que $m^*(G \setminus E) = 0$.

0,5p

(vi) Existe un $F \in \mathcal{F}_\sigma$ contenido en E tal que $m^*(E \setminus F) = 0$.

Si E es medible, entonces E^c es medible y luego existe $G \in \mathcal{G}_\delta$ tal que $E^c \subset G$ y $m^*(G|E^c) = 0$.

Por otro lado, $m^*(G \setminus E^c) = m^*(G \cap E) = m^*(E \cap (G^c)^c) = m^*(E \setminus (G^c))$.

Si tomamos $F = G^c$, vemos que se cumple $F \subset E$, y $F \in \mathcal{F}_\sigma$. Luego se comprueba lo pedido, $m^*(E \setminus F) = 0$.

1p

Respondiendo a la pregunta adicional de (iii)

¿Es posible construir explícitamente un $F_{\sigma\delta}$ con la misma propiedad

En efecto, si E es medible, entonces E^c también es medible, luego para todo $(n,m)\in\mathbb{N}^2$, existe $O_{(n,m)}$ abierto de $\mathbb{R}$ tal que $E^c\subset O_{(n,m)}$, $m^*(O_{(n,m)}\setminus E^c)\leq \frac{1}{n}+\frac{1}{m}$. Si tomamos

$G_n=\bigcap_{m\in\mathbb{N}} O_{(n,m)}\in\mathcal{G}_\delta$, vemos que se cumple $G_n\subset O_{(n,m)}$, y

$G_n\setminus E^c\subset O_{(n,m)}\setminus E$. A continuación $m^*(G_n\setminus E^c)\leq m^*(O_{(n,m)}\setminus E)\leq \frac{1}{n}+\frac{1}{m}$.

De lo anterior, $m^*(G_n\setminus E^c)\leq \frac{1}{n}$. Pero además

$$m^*(G_n\setminus E^c)=m^*(E\setminus G_n^c)$$

donde $G_n^c=\bigcup_{m\in\mathbb{N}} O_{(n,m)}^c\in\mathcal{F}_\sigma$. Finalmente tomamos

$F=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n^c\in\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ y así hacemos que se cumpla

$$F\subset G_n^c$$
$$F\setminus E\subset G_n^c\setminus E$$
$$m^*(F\setminus E)\leq m^*(G_n^c\setminus E)\leq\frac{1}{n}\quad .\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Por lo tanto $m^*(F\setminus E)=0$.

Muy Bien

0,3p

(b) Demuestre que cada uno de los enunciados de la parte (a), implican que que E es medible.

Primero veamos que se pueden demostrar los siguientes

(iii) $\Rightarrow$ E medible.

En efecto, si se cumple (iii) entonces existe $G \in \mathcal{G}_\delta$ tal que $E \subset G$ y $m^*(G \setminus E) = 0$. Pero esto implica que $G \setminus E$ es medible. Además, del hecho de que $E \subset G$ y G sea medible, se obtiene

$$E = G \setminus (G \setminus E)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} G \setminus (G \setminus E) &= G \cap (G \cap E^c)^c \\ &= G \cap (G^c \cup E) \\ &= (G \cap G^c) \cup (G \cap E) \\ &= \emptyset \cup (G \cap E) \\ &= G \cap E \\ &= E \quad (\text{ya que } E \subset G \Leftrightarrow G \cap E = E) \end{aligned}$$

Como G es medible y $(G \setminus E)$ también, $G \setminus (G \setminus E)$ es medible, (Medibles forman una σ-álgebra).

(iv) $\Rightarrow$ E medible

Si existe $F \in \mathcal{F}_\sigma$ tal que $F \subset E$, $m^*(E \setminus F) = 0$, implica que $E \setminus F$ es medible. Pero además $F \subset E$ implica $E = F \cup (E \setminus F)$:

$$\begin{aligned} F \cup (E \setminus F) &= F \cup (E \cap F^c) \\ &= (F \cup E) \cap (F \cup F^c) \\ &= (F \cup E) \cap \mathbb{R} \\ &= F \cup E \\ &= E \quad (\text{ya que } E \cup F = E \Leftrightarrow F \subset E) \end{aligned}$$

Ergo, F, $(E\setminus F)$ implica que $F\cup(E\setminus F)=E$ es medible.

Ahora veamos que el resto es consecuencia de lo anterior:

(i) $\Rightarrow$ E medible

Si se cumple (ii), entonces se cumple (iii). Para ello basta tomar $G=\bigcap O_n$, donde los O_n cumplen $G\subset O_n$, y $m^*(O_n\setminus E)\leq \frac{1}{n}$ (como se hizo anteriormente. En efecto, este método sirve tanto si $m^*E<\infty$ como $m^*E=\infty$).

Como demostramos que (iii) implica E medible, entonces se concluye la demostración.

(ii) $\Rightarrow$ E medible

Primero veamos que (ii) $\Rightarrow$ (iv)

Por (ii), dado $n\in\mathbb{N}$, existe C_n cerrado tal que $F_n\subset E$, $m^*(E\setminus C_n)\leq\frac{1}{n}$

Ahora basta tomar $F=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ y se ve que $C_n\in F$,

$$C_n\subset F \Rightarrow F^c\subseteq C_n^c \Rightarrow E\cap F^c\subseteq E\cap C_n^c$$
$$\Rightarrow m^*(E\cap F^c)\leq m^*(E\cap C_n^c)$$
$$\Rightarrow m^*(E\setminus F)\leq m^*(E\setminus C_n)<1/n$$

Por lo tanto $m^*(E\setminus F)$. Y no olvidemos que $F\in\mathcal{F}_\sigma$.

Como ya demostramos que (iv) $\Rightarrow$ E medible, entonces la demostración concluye.

P

(c) Si $m^*(E)<\infty$, demuestre que cada uno de los enunciados de la parte (a) equivalen a:

(i) Dado $\varepsilon>0$, existe una unión finita U de intervalos abiertos tal que

$$m^*(U\Delta E)<\varepsilon.$$

- Demostración -

Por definición de medida externa, dado $\varepsilon>0$ existe cubrimiento $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos abiertos tal que $E\subset\bigcup I_n$,

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right)\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\ell(I_n)<m^*E+\varepsilon/2$$

Como la suma $\sum_{n\in\mathbb{N}}\ell(I_n)$ está acotada, podemos tomar $N_0\in\mathbb{N}$ y así $\sum_{n=N_0+1}^{\infty}\ell(I_n)<\varepsilon/2$. No olvidar que $m^*\left(\bigcup_{n=N_0+1}^{\infty} I_n\right)\leq\sum_{n=N_0+1}^{\infty}\ell(I_n)$.

Si definimos $U=\bigcup_{n=1}^{N_0} I_n$, vemos que se cumple $U\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n=O$

Además $U\setminus E\subset O\setminus E$, y con ello $m^*(U\setminus E)\leq m^*(O\setminus E)<\varepsilon/2$.

Por otro lado es fácil ver que $E\setminus U\subseteq O\setminus U\subseteq O\setminus E$, luego $m^*(E\setminus U)\leq m^*(O\setminus E)<\varepsilon/2$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}m^*(E\Delta U)&=m^*((E\setminus U)\dot{\cup}(U\setminus E))\\&=m^*(E\setminus U)+m^*(U\setminus E)\quad(\text{ya que } U, E \text{ son medibles})\\&<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

$$\therefore\ m^*(E\Delta U)<\varepsilon/2.$$

0,5 p

Análisis Abstracto II

Desarrollo Tarea 3

Marco Godoy V

6

Problema 4

Sea A de medida finita, $\{A_n\}_n$ y $\{B_n\}_n$ dos sucesiones de subconjuntos de A, todos medibles tales que $\lim m(A_n)$ y $\lim m(B_n)$ existen.
¿Es cierto que $\lim m(A_n \cap B_n) = \lim m(A_n) \lim m(B_n)$? ¿Qué puede decir de $\lim m(A_n \Delta B_n)$?

- Desarrollo -

Es efectivo que no se cumple $\lim m(A_n \cap B_n) = (\lim m(A_n))(\lim m(B_n))$.
Para ello basta considerar $A = [0,1]$, $A_n = \left[0, \frac{1}{2} + \frac{1}{n+5}\right]$, $B_n = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{n+5}, 1\right]$. Se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n, B_n \subset [0,1]$, además

$$m A_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n+5}$$

$$m B_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{n+5} = \frac{2}{3} + \frac{1}{n+5}$$

$$A_n \cap B_n = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{n+5}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n+5}\right]$$

$$m(A_n \cap B_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n+5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{n+5} = \frac{1}{6} + \frac{2}{n+5}$$

$\lim m A_n = \frac{1}{2}$, $\lim m B_n = \frac{2}{3}$, $\lim m(A_n \cap B_n) = \frac{1}{6}$. Por lo tanto no se cumple que

$$\lim m(A_n \cap B_n) = (\lim m A_n)(\lim m B_n).$$

Scanned with CamScanner

¿Qué puede decir de $\lim m(A_n \Delta B_n)$?

Tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$m(A_n \Delta B_n) = m((A_n \setminus B_n) \dot{\cup} (B_n \setminus A_n)) = m(A_n \setminus B_n) + m(B_n \setminus A_n)$$

El caso más sencillo a considerar es $A_n \cap B_n = \phi$. Con lo anterior, $A_n \setminus B_n = A_n$, $B_n \setminus A_n = B_n$. Por lo tanto

$$m(A_n \Delta B_n) = m(A_n) + m(B_n)$$

$$\lim m(A_n \Delta B_n) = \lim m(A_n) + \lim m(B_n)$$

Supongamos que $A_n \cap B_n \neq \phi$. Un caso particular es $A_n \subset B_n$ $\forall n$.
Se puede considerar lo último y llegar a que

$$A_n \subset B_n \Rightarrow B_n = A_n \dot{\cup} (B_n \setminus A_n)$$

Como A_n, B_n son medibles , $m(B_n \setminus A_n) = m(B_n) - m(A_n)$; y además al ser de medida finita, nos queda

$$m(A_n \Delta B_n) = m(A_n \setminus B_n) + m(B_n) - m(A_n)$$

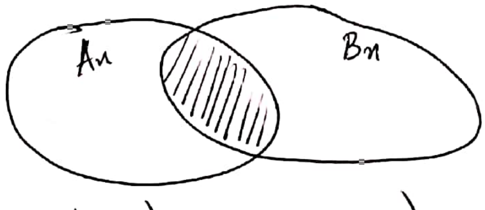
pero $A_n \setminus B_n = \phi$; luego

$$m(A_n \Delta B_n) = m(B_n) - m(A_n)$$

$$\lim m(A_n \Delta B_n) = \lim m(B_n) - \lim m(A_n)$$

Análogamente , si $B_n \subset A_n$, entonces $m(A_n \Delta B_n) = m(A_n) - m(B_n)$, y con ello, $\lim m(A_n \Delta B_n) = \lim m(A_n) - \lim m(B_n)$.

Ahora en el caso general, cuando no hay contención entre A_n y B_n , podemos hacer el siguiente análisis



o sea:

$$A_n = (A_n \setminus B_n) \dot{\cup} (A_n \cap B_n)$$
$$B_n = (B_n \setminus A_n) \dot{\cup} (A_n \cap B_n)$$

entonces

$$m A_n = m(A_n \setminus B_n) + m(A_n \cap B_n)$$
$$m B_n = m(B_n \setminus A_n) + m(A_n \cap B_n)$$

$$\Rightarrow \quad m(A_n \Delta B_n) = m(A_n \setminus B_n) + m(B_n \setminus A_n) = m A_n + m B_n - 2m(A_n \cap B_n)$$

Suponiendo en primera instancia que $\lim m(A_n \cap B_n)$ existe, se tiene

$$\lim m(A_n \Delta B_n) = \lim m(A_n) + \lim m(B_n) - 2 \lim m(A_n \cap B_n)$$

Problema 8

Sea f_1 la función ternaria de Cantor, y defina $f(x) = x^2 + f_1(x)$.

(a) Demuestre que f es un homeomorfismo de $[0,1]$ en $[0,2]$

(b) Demuestre que f lleva el conjunto de Cantor en un conjunto de medida 1.

(c) Sea $g = f^{-1}$. Demuestre que existe un conjunto medible A tal que $g^*(A)$ no es medible.

(d) De un ejemplo de una función continua g y una medible h tales que $h \circ g$ no es medible.

(e) Demuestre que existe un conjunto medible no boreliano.

Demostración

(a) Inmediatamente sale que f es continua ya que es suma de dos funciones continuas, a saber, $g(x) = x^2$, f_1 función de Cantor (Tarea 1).

Demostremos que es inyectiva. Sean $x, y \in [0,1]$ tales que $x < y$. Se tiene que por propiedad de f_1, $f_1(x) \leq f_1(y)$; y como $x < y$ implica $x^2 < y^2$, se sigue que

$$f_1(x) + x^2 < f_1(y) + y^2$$

$$\Rightarrow \quad f(x) < f(y)$$

Por lo tanto f es estrictamente creciente, en particular es inyectiva.

Demostraremos que f es sobreyectiva.

Como se tiene que $f(0) = f_1(0) + 0^2 = 0 + 0 = 0$, $f(1) = f_1(1) + 1^2 = 1 + 1 = 2$, se tiene que $f[0,1] = [f(0), f(1)] = [0,2]$ (funciones continuas mapean intervalos en intervalos). Ahora sea $y \in [0,2]$, por el teorema del valor intermedio, existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = y$. Por lo tanto f es sobreyectiva.

Se ha demostrado que f es biyectiva. Para demostrar que f es un homeomorfismo usaremos el siguiente

Lema. Si $f: X \longrightarrow Y$ es continua y biyectiva, X es compacto y Y es Hausdorff (T_2), entonces f es un homeomorfismo.

– Demostración – Basta demostrar que f es una biyección cerrada. Para ello sea $C \subset X$ cerrado. Al ser X compacto (en particular T_2), $C \subset X$ también es compacto. Una verificación rápida de esto es ver que si $\{V_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de C, entonces

$$C \subset \bigcup_{i\in I} V_i$$

$$\Rightarrow X \subset \left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) \cup (C^c)$$

$$\Rightarrow X \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k} \cup C^c \quad \left(\begin{array}{l}\text{Al ser } X \text{ compacto, admite} \\ \text{subcubrimiento finito}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow C \subset \left[(V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k}) \cup C^c\right] \cap C$$

$$\Rightarrow C \subset (V_{i_1} \cap C) \cup \dots \cup (V_{i_k} \cap C) \cup (C^c \cap C)$$

$$\Rightarrow C \subset (V_{i_1} \cap C) \cup \dots \cup (V_{i_k} \cap C) \cup \emptyset$$

$$\Rightarrow C \subset (V_{i_1} \cap C) \cup \dots \cup (V_{i_k} \cap C)$$

$$\Rightarrow C \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k}$$

Ergo C es compacto.

Como f es continua, $f_*(C)$ es compacto, pero $f_*(C) \subset Y$ (T_2), en particular es cerrado. Se concluye que f es una biyección cerrada.

Como $f = f_1 + x^2$ satisface las condiciones del problema (f biyectiva, $[0,1]$ compacto y $[0,2]$ T_2) se tiene que f es un homeomorfismo.

(b) Para demostrar que f mapea el conjunto de Cantor (denotémoslo por $\mathcal{C}$) en un conjunto de medida 1, primero tenemos que examinar nuestra función:

$$f(x) = f_1(x) + x^2 \quad , \quad \text{para todo } x \in [0,1]$$

Recordemos que $\mathcal{C} = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, donde los intervalos I_n son los que se retiran en las sucesivas etapas de la construcción de $\mathcal{C}$. Por resultado de la tarea 1, $f_1|_{I_n}$ es constante, luego basta estudiar $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_n$ mapeado por $g(x) = x^2$. Si $I_n = [a_n, b_n]$, entonces $g(I_n) = [a_n^2, b_n^2]$.

A continuación

$$g_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g_*(I_n) \qquad (g \text{ inyectiva})$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n^2, b_n^2]$$

$$\Rightarrow m\left(g_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' (b_n^2 - a_n^2) \qquad \left(\begin{array}{l}\text{Intervalos } [a_n, b_n] \\ \text{son disjuntos}\end{array}\right)$$

<u>Afirmación</u>. $\sum_{n=1}^{\infty}{}' (b_n^2 - a_n^2) = 1$.

– Demostración – Como el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ tiene medida 0, $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = 1$; pero

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' (b_n - a_n)$$

Ahora dado $0 < \varepsilon < 1$, vemos que existen infinitos $(a_n, b_n) \in [0,1]^2$ tales que $[a_n, b_n] = I_n$ (intervalo retirado en la construcción de $\mathcal{C}$), y $a_n + b_n > \varepsilon$

Sea $N = \inf \{ n \in \mathbb{N} \,/\, I_n = [a_n, b_n],\ a_n + b_n > \varepsilon \}$, se tiene que

$$\sum_{n=N}^{\infty}{}' (b_n^2 - a_n^2) = \sum_{n=N}^{\infty}{}' (b_n - a_n)(b_n + a_n)$$

$$> \sum_{n=N}^{\infty}{}' (b_n - a_n)\,\varepsilon$$

$$= \varepsilon \sum_{n=N}^{\infty}{}' (b_n - a_n)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon < \frac{\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}{}' (b_n^2 - a_n^2)}{\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}{}' (b_n - a_n)}$$

Tomando $\alpha_N = \dfrac{\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}{}' (b_n^2 - a_n^2)}{\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}{}' (b_n - a_n)}$, vemos que se cumple $0 < \varepsilon < \alpha_N < 1$

... y no sé como seguir! !! ⌢.

no importa...

Análisis Abstracto I
Desarrollo Control 1
Marco Godoy V.

6,5 // 7/6

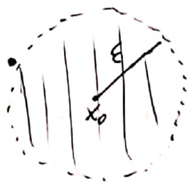
Pd: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}_\delta$.

Sea $F \in \mathcal{F}$ cerrado, se tiene que F^c es abierto. Luego F^c puede escribirse como unión numerable de bolas abiertas (segundo contable).
para todo esp. met.
O sea

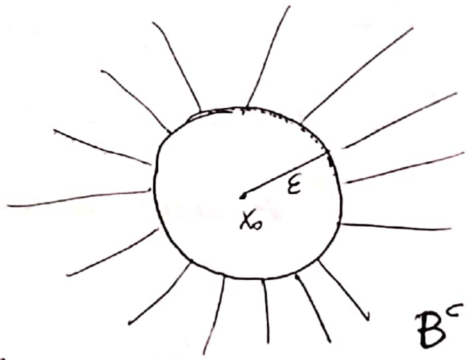
$$O = F^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \quad , \; B_n \text{ bolas abiertas (base de topología)}$$

Tomando complemento, $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n^c$. Luego basta demostrar que cada B_n^c puede escribirse como unión numerable de abiertos.

Veamos lo siguiente

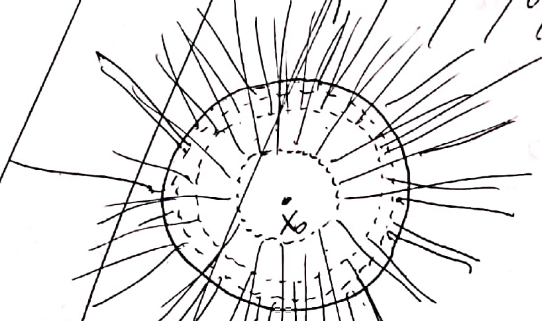


B



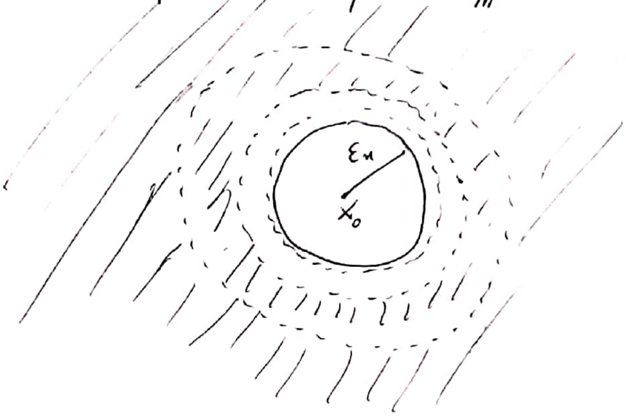
B^c

~~Para cada $m\in\mathbb{N}$, definimos el conjunto $V_m^n = \{x \in X \,/\, d(x,x_0) > \varepsilon_n - \frac{1}{m}\}$~~
~~Cada V_m es abierto en X (espacio métrico (X,d)). Veamos dibujo~~



~~Afirmamos que $B_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_m^n$~~

Para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto $V_m^n = \{x \in X \,/\, d(x,x_0) > \varepsilon_n + \frac{1}{m}\}$



Afirmación. (i) $\forall m \in \mathbb{N}$, V_m^n es abierto

(ii) $B_n^c = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_m^n$

En efecto, (i) es evidente, y (ii) se ve de la siguiente manera:
Automaticamente $B_n^c \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_m^n$, y para cada $\tilde{x} \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_m^n$,
existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $d(\tilde{x},x_0) > \varepsilon_n + \frac{1}{m} > \varepsilon_n$. Luego $x \in B_n^c$.
Se sigue que $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_m^n$ es abierto, ya que unión de abiertos es abierto.

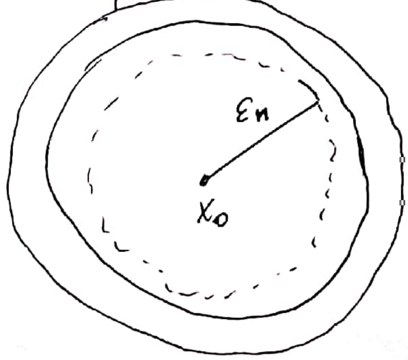
$\therefore$ $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}_\delta$

Pd: $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_\sigma$

Sea $O \in \mathcal{G}$. Como (X,d) espacio métrico posee propiedades buenas,
O puede escribirse como unión numerable de bolas abiertas,

$$O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

donde las bolas abiertas forman base para la topología $\mathcal{O}_d$. Ahora basta
comprobar que toda bola abierta puede escribirse como intersección de cerrados
Ver dibujo



Para todo $m \in \mathbb{N}$ consideramos el conjunto $W_m^n = \overline{B}(x_0, \varepsilon_n + \frac{1}{m})$ $= \{x \in X / d(x, x_0) \leq \varepsilon_n + \frac{1}{m}\}$. Cada W_m^n es un conjunto cerrado y además se tiene $B_n = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} W_m^n$. Como intersección de cerrados es cerrado, $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} W_m^n$ es cerrado y por lo tanto $O = \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} W_m^n}_{\text{unión numerable.}}$

$\therefore \quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_\sigma$

2p

(b) Pd: Todo conjunto medible puede escribirse como un boreliano y un conjunto de medida 0.

Sea E conjunto medible. Por la proposición 15 (Royden), existe $F \in \mathcal{F}_\sigma$ con $F \subset E$, $m^*(E \setminus F) = 0$. Luego

$$E = E \setminus F \cup F$$

donde se cumple lo que se pide, esto es, $F \in \mathcal{F}_\sigma$ es un boreliano y $E \setminus F$ es de medida 0.

2p

(c) Demuestre que los medibles forman una σ-algebra

-Dem-

Se sabe (visto en ayudantía) que el conjunto de los medibles es un álgebra de conjuntos, esto es, si $A, B \in \Sigma$ (Σ conjunto de medibles), $A \cup B$, $A^c \in \Sigma$. Basta demostrar que Σ es cerrado bajo unión numerable.

Sea $E \subseteq \Sigma$ unión numerable de conjuntos medibles. Sabemos que existe colección $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ disjunta tal que $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ ($E_i \cap E_j \neq 0$ $\forall i \neq j$)

Definimos $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, donde se satisfacen las siguientes propiedades

- $F_n \in \Sigma$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- $E^c \subset F_n^c$

A continuación, para todo $A \subseteq \mathbb{R}$

$$m^*(A) = m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F_n^c) \geq m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap E^c)$$

(ya que $m^* E^c \leq m^* F_n^c$)

Por lema 9 (Royden):

$$m^*(A \cap F_n) = m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i)$$

Luego se tiene

$$m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E^c)$$

válido para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$m^* A \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E^c)$$

Finalmente $m^* A \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$

$\therefore$ $E \in \Sigma$, o sea, E es medible.

7p

Problema 2

(a) $f_n(x) = x\left(\chi_{[-n,n]}(x) - \chi_{[-n,n]^c}(x)\right)$; dom $f_n = \mathbb{R}$.

Por demostrar que $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{1}{2^n} f_n(x)$

- Demostración -

Primero veamos que $\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{1}{2^n} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n}{}' \frac{1}{2^i} f_i(x)$

Por otro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n es una función medible. Para ello basta ver que $f_n(x) = \tilde{f}(x)\tilde{f}_n(x)$, donde $\tilde{f}(x) = x$ y $\tilde{f}_n(x) = \chi_{[-n,n]}(x) - \chi_{[-n,n]^c}(x)$ es medible, ya que $\chi_{[-n,n]}$ y $\chi_{[-n,n]^c}$ lo son (pues $[-n,n]$, $[-n,n]$ son medibles). Como multiplicación de medibles es medible, f_n es medible.

Además $\frac{1}{2^n} f_n$ es medible.

Y también $\sum_{i=0}^{n}{}' \frac{1}{2^i} f_i$ es medible (suma de medibles). Ahora si consideramos la sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por $g_n = \sum_{i=0}^{n}{}' \frac{1}{2^i} f_i$, vemos que g_n es medible y $\lim g_n = F$. Como la medibilidad de una función es cerrada bajo límite (visto en clases), F es medible. ▨

1,5 p

(b) Sea A medible, $mA < \infty$. Determinar $m(F(A))$

$A \subseteq [0,1]$.

Experimentemos un poco... Primero veamos cuando $A \subsetneq [0,1]$

~~[illegible]~~ Sea $x \in A$:

$$\chi_{[-n,n]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-n,n] \\ 0, & x \notin [-n,n] \end{cases}$$

Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $[-n,n] \supset A$, $\chi_{[-n,n]}(x) = 1$. En particular, $\chi_{[-n,n]}(A) = \{1\}$.

Por otro lado, $A \not\subset [-n,n]^c$, ~~[illegible]~~ $\forall n \geq 1$, entonces $\chi_{[-n,n]^c}(A) = \{0\}$.

Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n(A) = A$..

$\frac{1}{2^n} A = \{ \frac{1}{2^n} a \;/ a \in A \}$, y además $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} A = \{ \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} a_i \;/ a_i \in A \}$

Antes de seguir, demostraremos el siguiente

Lema. ~~[illegible]~~ Si es medible de medida finita, para todo $z > 0$, $m(zA) = z\, m(A)$. Donde $zA = \{ za / a \in A \}$

-Demostración- Si $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un cubrimiento de A, entonces $\{zI_n\}$ es un cubrimiento de zA. Luego

$$m^*(zA) = \inf_{zA \subset \bigcup zI_n} \sum l(zI_n)$$

pero $l(z[a,b]) = l([za, zb]) = zb - za = z(b-a) = z\, m^*[a,b]$

(Tambien $l(z(a,b)) = z\, l(a,b)$). Ergo

$$m^*(zA) = \inf_{zA \subset \bigcup zI_n} \sum l(zI_n)$$

$$= z \inf_{zA \subset \bigcup zI_n} \sum l(I_n) = z \inf_{A \subset \bigcup I_n} \sum l(I_n) = z\, m^* A.$$

Scanned with CamScanner

~~Ahora demostrado lo anterior~~,

$m(A+B)$

$A \subset \bigcup I_n \quad , \quad B \subset \bigcup J_m$

$\forall a \in A \quad , \quad a \in I_n$

$\forall b \in B \quad , \quad b \in J_m$

$a+b \in I_n + J_m$

$$A + B \subset \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} I_n + J_m$$

$$\ell(I_n + J_m) = \ell(I_n) + \ell(J_m) - \ell(I_n \cap J_m) <$$

(d) ¿Es cierto que una función f es medible si y sólo si $f^*(a)$ es medible para todo $a \in \mathbb{R}$?

- Demostración -

Por lo visto en clases, si f es medible, entonces para todo $a \in \mathbb{R}$, $f^*(a)$ es medible.

Veamos que no se cumple el recíproco.

Sea $N \subset \mathbb{R}$ conjunto no medible. Es fácil ver que si consideramos la característica χ_N tenemos que, para todo $a \in \mathbb{R}$:

$$\chi_N^*(a) = \{1\} \quad \text{ó} \quad \chi_N^*(a) = \{0\}$$

dependiendo si a está o no en N. Es evidente que $\{1\}, \{0\}$ son medibles (ya que $m^*\{1\} = m^*\{0\} = 0$), pero χ_N no es función medible.

1,5 p

Análisis Abstracto I
Desarrollo Tarea N° 1
Marco Godoy.

6,7

6,3 / 7

Problema 10

Sea $x \in [0,1]$ con la expansión ternaria (a_n). Defina $N = \infty$ si ninguno de los a_n es 1, y en caso contrario defina N como el menor valor de n para el cual $a_n = 1$.
Sea $b_n = \frac{1}{2}a_n$ para $n < N$ y $b_N = 1$.
(a) Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{2^n}$$

es independiente de la expansión ternaria de x (si es que tiene más de una)
(b) Demuestre que la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{2^n}$$

es continua y monótona.
(c) Demuestre que f es constante en cada intervalo contenido en el complemento del conjunto de Cantor.
(d) Demuestre que la imagen del conjunto de Cantor vía f es el intervalo $[0,1]$ completo.

Demostración

(a) Separaremos la demostración en dos casos:
(a.1) Caso finito
(a.2) Caso infinito

En (a.1), sea $x = (a_n)_{n \in \{1,\dots,k\}}$ una sucesión finita ternaria. O sea, de la forma

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_k}{3^k}$$

Notar que la escritura anterior es equivalente a $x = \frac{m}{3^k}$, donde $m = 3^{k-1}a_1 + 3^{k-2}a_2 + \dots + a_k$. Por lo tanto, $x \in [0,1]$ ssi $\frac{m}{3^k} \leq 1$, o mejor dicho, $m \leq 3^k$

Por otro lado, el estudio de la serie geométrica nos dice lo siguiente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

con esto tenemos que las expansiones del tipo $(x_1 x_2 \ldots x_n 222\ldots)$ son lo mismo que $(x_1 x_2 \ldots (x_n+1) 00\ldots)$. En efecto, basta ver que,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{k+n+1}} = \frac{2}{3^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^n}$$

En particular, $x=(1001) = (1000222\ldots)$ y $x=(1002) = (1001222\ldots)$

· Ahora dada expansiones del tipo $x=(a_1 a_2 \ldots a_n)$ $\hat{x} = (a_1 a_2 \ldots (a_n - 1) 222\ldots)$ satisfacen

$$\sum_{n=1}^{N_x} \frac{b_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{N_{\hat{x}}} \frac{b_n}{2^n}$$

Si $a_k = 1$ para $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ entonces la igualdad es trivial. Si $a_n = 1$, entonces

$$\sum_{k=1}^{N_{\hat{x}}} \frac{b_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{2^k} + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{2^k} + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{N_x} \frac{b_k}{2^k}$$

Si $a_n = 2$, se cumple trivialmente que

$$\sum_{k=1}^{N_x} \frac{b_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{N_{\hat{x}}} \frac{b_k}{2^k}$$

En el caso infinito evidentemente los números deben tener sólo una expansión ternaria. (porque es tan evidente Mauro?

$0,\bar{2}$

Observación. Para el caso finito supusimos que $a_k \neq 1$ $\forall k < n$.

(b) Debemos demostrar que $f(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{2^n}$ es continua y monótona.

Sean $x, \hat{x} \in [0,1]$ tales que $x \leq \hat{x}$. En ese caso definimos $n_0 = \max\{n \,/\, a_n = \hat{a}_n\}$ (donde $x = (a_i)$, $\hat{x} = (\hat{a}_i)$).

Si $x \leq \hat{x}$, entonces $a_{n_0+1} \leq \hat{a}_{n_0+1}$, y con ello

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N_x} \frac{b_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{b_k}{2^k} + \sum_{k=n_0+1}^{N_x} \frac{b_k}{2^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\hat{b}_k}{2^k} + \sum_{k=n_0+1}^{N_x} \frac{b_k}{2^k}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\hat{b}_k}{2^k} + \sum_{k=n_0+1}^{N_{\hat{x}}} \frac{\hat{b}_k}{2^k}$$

$$= f(\hat{x})$$

$$\therefore \quad f(x) \leq f(\hat{x})$$

Para demostrar que f es continua, primero veamos que para $x = (a_i)$ fijo, y $N \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\frac{1}{2^N} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \geq \sum_{k=N+1}^{N_x} \frac{1}{2^k} \geq \sum_{k=N+1}^{N_x} \frac{|b_k - \hat{b}_k|}{2^k} \geq \left| \sum_{k=N+1}^{N_x} \left(\frac{b_k}{2^k} - \frac{\hat{b}_k}{2^k} \right) \right|$$

$$\geq \left| \sum_{k=N+1}^{N_x} \frac{b_k}{2^k} - \sum_{k=N+1}^{N_{\hat{x}}} \frac{\hat{b}_k}{2^k} \right| = |f(x) - f(\hat{x})|$$

$$\frac{1}{3^N} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \geq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|a_k - \hat{a}_k|}{3^k} \geq \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{3^k} - \frac{\hat{a}_k}{3^k} \right) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} - \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\hat{a}_k}{3^k} \right|$$

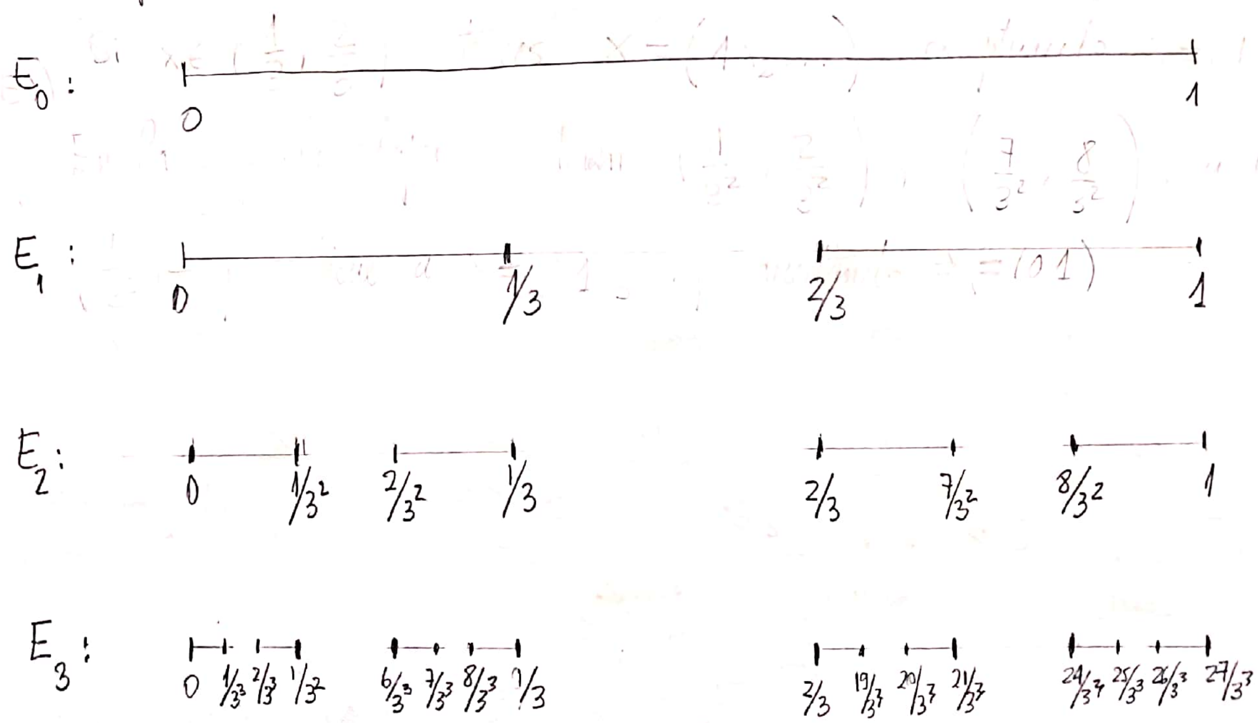
En ambos casos, tenemos que $a_i = \hat{a}_i$, $b_i = \hat{b}_i$, para todo $i \in \{1, \dots, N\}$. Ahora dado $\varepsilon > 0$, por propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$. Luego, si $\delta < \frac{1}{3^{N+10}}$, tal que $|x - \hat{x}| < \delta$, entonces $|f(x) - f(\hat{x})| < \frac{1}{2^{N+9}} < \varepsilon$.

1,5 P

(c) Queremos demostrar que f es constante en el complemento del conjunto de Cantor.

En efecto, basta demostrar que los números que se encuentran en Cantor admiten representación con 0 y 2.

Hacemos un esquema que representa las etapas de la contrucción del conjunto de Cantor:



Scanned with CamScanner

E_n : n-ésima etapa de la construcción de Cantor.

En la etapa E_1 se retiran ~~los~~ puntos de la forma $x=(1x_2\ldots)$, excepto $x=\frac{1}{3}$. En la etapa E_2 se retiran los puntos de la forma $x=(01x_3\ldots)$, $(21x_3\ldots)$ quedando $x=\frac{1}{3^2}, \frac{7}{3^2}$. En la etapa 3 se retiran los puntos de la forma

$x=(001x_4\ldots)$, $(021x_4\ldots)$, $(201x_4\ldots)$, $(2\ldots)$

Inductivamente se puede demostrar que con este hecho, los puntos que están en el complemento de Cantor tienen 1, cuando $x=(x_1x_2\ldots x_{n-1}1)$ podemos representarlo por $x=(x_1\cdots x_{n-1}0222\ldots)$

y porque es constante? 0,8p.

(d) Para todo $x\in[0,1]$, podemos representar x en base 2, o sea

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2^n}$$

donde $b_n\in\{0,1\}$. Tomando $a_n=2b_n$ vemos que $\hat{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$ es tal que $\hat{x}$ pertenece en Cantor (por (c)) y que $f(\hat{x})=x$. Por lo tanto f mapea sobreyectivamente el conjunto de Cantor en $[0,1]$.

1,7p

Problema 12.

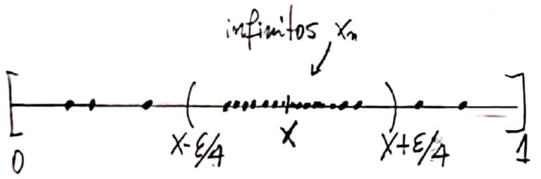
Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números que converge a x. Suponga que $x_n \in [0,1]$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y sea $A=\{x_n / n\in\mathbb{N}\}$. Demuestre que la función $f(t)=\chi_A(t)$ es Riemann integrable.

Demostración.

Recordemos que $f:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$f(t)=\begin{cases}1, & t\in A\\ 0, & t\in[0,1]\setminus A\end{cases}$$

Esta función f, para cualquier partición $P_n=\{t_0,\dots,t_n\}$ de $[0,1]$ satisface $m_i=\inf\{f(t)/ t\in[t_i,t_{i+1}]\}=0$, todo $i\in\{0,\dots,n-1\}$. Luego $s(f,P)=0$ (suma inferior). Ahora, dado $\varepsilon>0$, los intervalos $[0,x-\varepsilon/4]$, $[x+\varepsilon/4,1]$ contienen una cantidad finita de elementos de A, como se indica en la figura



Esto ocurre porque $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. A continuación, sea $m=\#\left(\left([0,x-\varepsilon/4]\cup[x+\varepsilon/4,1]\right)\cap A\right)$, entonces podemos escoger un $n\in\mathbb{N}$ tal que satisfaga las siguientes condiciones

(i) P_n es una partición regular de $[0,1]$ de largo $\frac{1}{n}$, o sea, P_n es del tipo $0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n-1}{n},1$.

(ii) Que en los extremos del intervalo $(x-\varepsilon/4, x+\varepsilon/4)$ existan $t_{i_1}, t_{i_1-1}, t_{i_2}, t_{i_2-1}\in P_n$ tales que $t_{i_1-1}<x-\varepsilon/4<t_{i_1}<t_{i_2-1}<x+\varepsilon/4<t_{i_2}$, y que no existan términos de A en los intervalos $[t_{i_1-1},t_{i_1}]$, $[t_{i_2-1},t_{i_2}]$. De esto se deduce de inmediato que los infinitos términos de (x_n) se encuentran en $[t_{i_1}, t_{i_2-1}]$.

(iii) $m/n<\varepsilon/2$

Es recomendable recordar que la elección de n depende de ε. De lo anterior se tiene que

$$\bar{S}(f,P_n) - \underline{S}(f,P_n) = \bar{S}(f,P_n)$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} M_i(t_{i+1}-t_i) \quad ; \quad M_i = \sup\{f(t) \mid t\in[t_i, t_{i-1}]\}$$
$$= \sum_{i=0}^{i_1-2} M_i(t_{i+1}-t_i) + M_{i_1-1}(t_{i_1}-t_{i_1-1}) + \sum_{i=i_1}^{i_2-2} M_i(t_{i+1}, t_i)$$
$$+ M_{i_2-1}(t_{i_2}-t_{i_2-1}) + \sum_{i=i_2}^{n-1} M_i(t_{i+1}-t_i)$$

Primero notemos que $M_{i_1-1}(t_{i_1}-t_{i_1-1}), M_{i_2-1}(t_{i_2}-t_{i_2-1}) = 0$; como $[t_{i_1}, t_{i_2-1}] \subset (x-\varepsilon/4, x+\varepsilon/4)$, entonces

$$\sum_{i=i_1}^{i_2-2} M_i(t_{i+1}-t_i) \leq \sum_{i=i_1}^{i_2-2} (t_{i+1}-t_i) = t_{i_2-1} - t_{i_1} < \varepsilon/2$$

y $\sum_{i=0}^{i_1-2} M_i(t_{i+1}-t_i) + \sum_{i=i_2}^{n-1} M_i(t_{i+1}-t_i) \leq \frac{m}{n}$, donde la suma anterior representa el area total de los rectángulos en cuya base se encuentra un elemento de (x_n) (recordemos que son finitos, y m/n sería en el caso en que cada x_n se encontrara en m rectángulos diferentes). De lo anterior nos queda que

$$\bar{S}(f,P_n) - \underline{S}(f,P_n) \leq \varepsilon/2 + m/n < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Por lo tanto, para todo $\varepsilon>0$, existe una partición P_n de $[0,1]$ tal que $\bar{S}(f,P_n) - \underline{S}(f,P_n) < \varepsilon$. Se concluye que f es Riemann integrable.

muy Bien.

Scanned with CamScanner