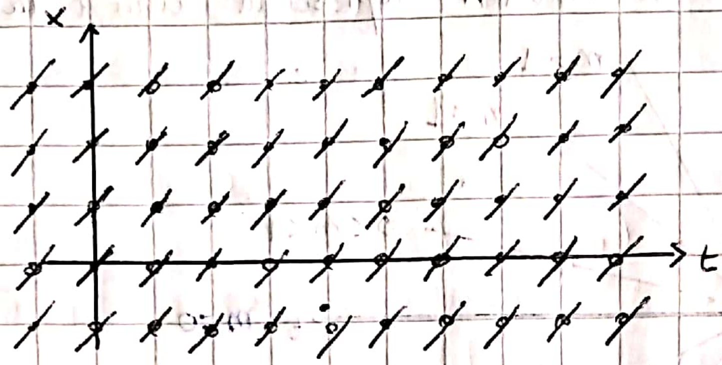
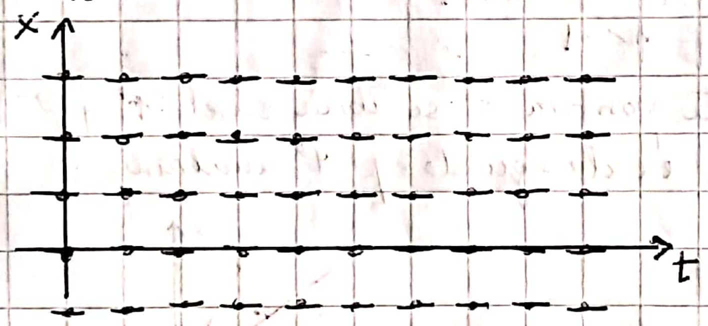
Campo de pendientes:



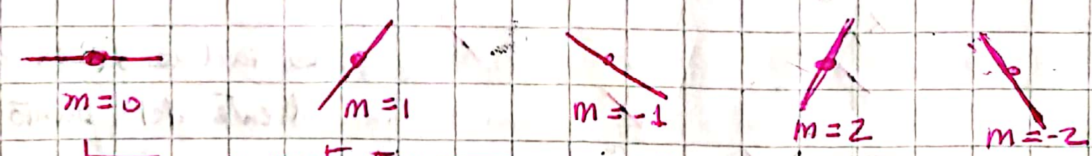
Ejemplo. $\frac{dx}{dt} = 0$:



Observación. Al ser $\frac{dx}{dt} = F(t,x)$, para poder dibujar el campo de pendientes, debemos estudiar la función $F(t,x)$. $F(t,x)$ puede ser cualquier expresión dependiente de las variables t, x.

Ejemplo. El caso $F(t,x) = at + bx$; $a, b \in \mathbb{R}$.
Para dibujar el campo de pendientes de $\frac{dx}{dt} = at + bx$, primero hay que tener pendientes de referencia:

(i)



$F(t,x) = 0$ $\qquad$ $F(t,x) = 1$

(ii) Estudiar la ecuación $F(t,x)=k$ (curva de nivel-k)

Nos responde la interrogante: ¿Cuáles son todos los puntos (t,x) tq el segmento de recta tiene pendiente k?

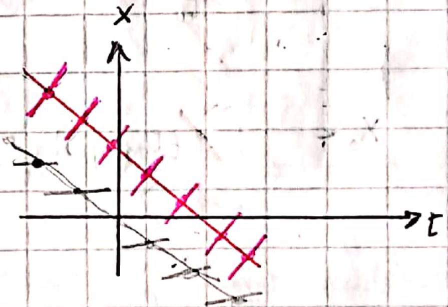
Notemos que $F(t,x)=k \iff at+bx=k \iff \boxed{\underbrace{bx+at-k=0}_{\text{una recta}}}$.

<u>Ejemplo.</u> $a=1$, $b=1$, $F(t,x)=t+x$

k	recta	pendiente
-2	$x=-t-2$	-1
-1	$x=-t-1$	-1
0	$\boxed{x=-t}$	-1
1	$x=-t+1$	-1
2	$x=-t+2$	-1

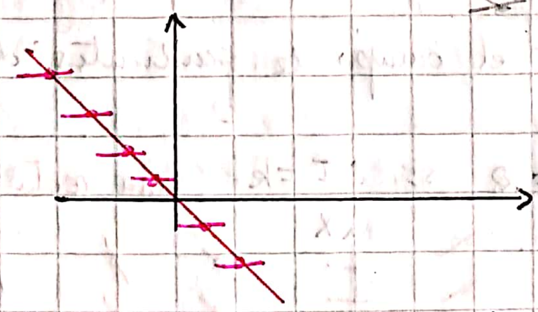
$x=mt+n$

Para $k=1$: $m=1$: $x(t)=-t+1$

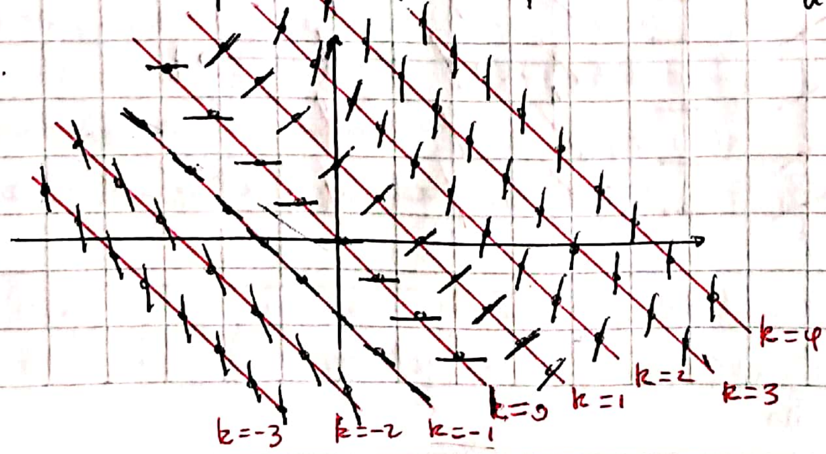


Para $k=0$: $x(t)=-t$

$m=0$



Ahora podemos dibujar el campo de pendientes de $\dfrac{dx}{dt}=x+t$

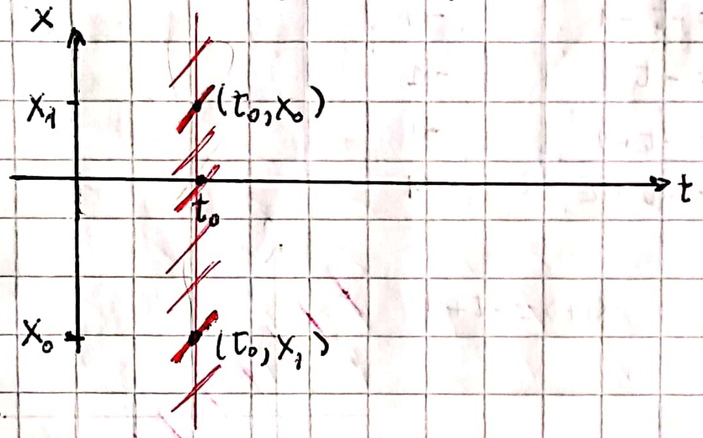


$F(t,x)$

2º El caso $\frac{dx}{dt} = f(t)$, f función que depende únicamente de la variable t.

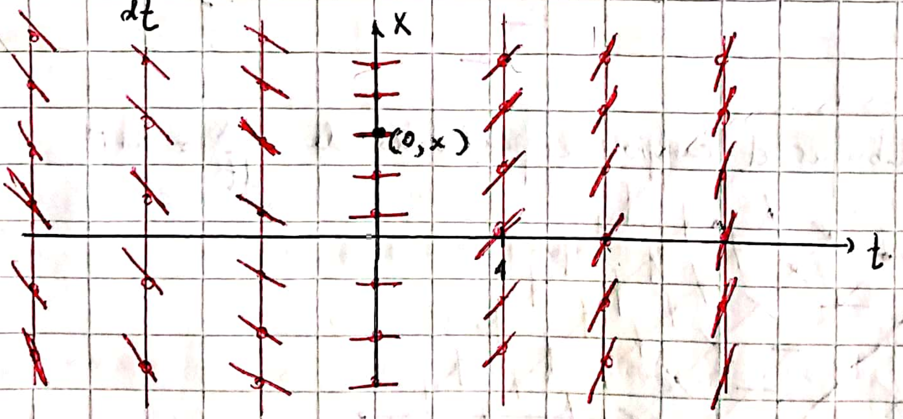
(i) $F(t,x) = f(t)$.

(ii) Si consideramos (t_0, x_0), (t_0, x_1); $F(t_0, x_0) = f(t_0)$, $F(t_0, x_1) = f(t_0)$. El campo de pendientes es invariante si nos movemos a lo largo del eje de las ordenadas.



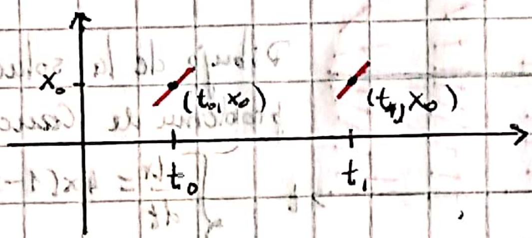
Ejemplo. Dibujar el campo de pendientes de $\frac{dx}{dt} = t$

Desarrollo. $\frac{dx}{dt} = k$ ssi $t = k$ una recta vertical



3° El caso $\frac{dx}{dt} = g(x)$ (Ecuación autónoma).

(i) $F(t,x) = g(x)$. Los valores de $F(t,x)$ no dependeuden de la variación de la variable t.



Observación. Para las ecuaciones $\frac{dx}{dt} = f(t)$, $\frac{dx}{dt} = g(x)$ podemos aplicar resultados de "Calculo 1" a las funciones $f(t)$, $g(x)$ para facilitar el trabajo.

Ejemplo. Dibujar el campo de pendientes de $\frac{dx}{dt} = 4x(1-x)$.

Desarrollo. $\frac{dx}{dt} = g(x)$; $g(x) = 4x(1-x)$ (Ecuación autónoma).

(i) Análisis de signo de g.

	$x<0$	$0<x<1$	$1<x$
x	$-$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$-$
$g(x)$	$-$	$+$	$-$

Consultar si lo recuerdan

$g(x) > 0$ para $x \in]0,1[$; $g(x) < 0$ para $x \in]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$

(ii) Monotonía de la función g:

$g'(x) = 4 - 8x = 4(1-2x)$. $g'(x) = 0$ ssi $x = \frac{1}{2}$

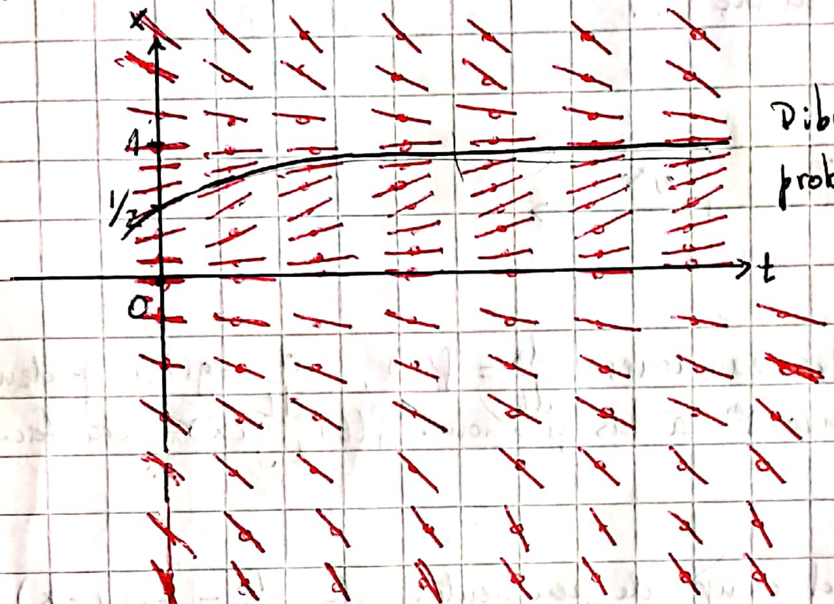
	$x < 1/2$	$1/2 < x$
$g'(x)$	$+$	$-$

Scanned with CamScanner

g creciente en $]-\infty, 1/2[$

g decreciente en $]1/2, \infty[$

iii) $g(x) = 0$ para $x = 0$, $x = 1$.



Dibujo de la solución al problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x(1-x) \\ x(0) = 1/2 \end{cases}$$

Pregunta: Por qué necesitamos un método cuantitativo?

Porque buscamos comportamiento a largo plazo para la solución de $\dfrac{dx}{dt} = F(t,x)$.

A veces ocupando el algebra no siempre llegamos a la solución.

para el primer caso

En efecto, para el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x(1-x) \\ x(0) = 1/2 \end{cases}$$

Sin resolver la ecuación, podemos deducir que $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 1$

Observación. No tiene sentido resolver la ecuación autónoma $\dfrac{dx}{dt} = e^{x^3/10}\operatorname{sen}^2(x)$, pero mediante su campo de pendientes podemos decir mucho.

Observación. En los campos de pendientes de las ecuaciones autónomas, las soluciones se obtienen sucesivamente por traslación horizontal.

Métodos cualitativos de una ecuación diferencial
Equilibrios y diagramas de fase.

Recordemos que nuestro trabajo se centra en ecuaciones diferenciales del tipo $\frac{dx}{dt} = F(t,x)$.
Nos centramos en ecuaciones autónomas $\frac{dx}{dt} = f(x)$

<u>Idea</u>. Los campos de pendientes de las ecuaciones $\frac{dx}{dt} = f(x)$ presentan una regularidad que no depende de la variable t. Si podemos dibujar las marcas de pendientes en la recta (t_0, x), entonces inmediatamente tenemos el campo de pendientes. Buscamos una línea vertical que sintetice esta información de $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Aquella línea es el diagrama de fase.

Método para dibujar una línea de fase de la ecuación $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

(i) Dibuje una línea vertical, paralela al eje x
(ii) Resuelva la ecuación $f(x)=0$. Las soluciones ubíquelas en la vertical.
(iii) Encontrar intervalos en los que $f(x)>0$ y dibujar flechas que apunten hacia arriba en estos intervalos.
(iv) Encontrar intervalos en los que $f(x)<0$ y dibujar flechas hacia abajo en estos intervalos.

Ejemplo. Dibujar el diagrama de fase de la ecuación $\frac{dx}{dt} = (x-2)(x+3)$

Desarrollo. $f(x) = (x-2)(x+3)$.

Ecuación $f(x) = 0$ implica $x = 2, -3$.

Tabla para ver el signo de f:

	$x < -3$	$-3 < x < 2$	$2 < x$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

$f(x) > 0$, $x \in]-\infty, -3[\cup]2, \infty[$

$f(x) < 0$, $x \in]-3, 2[$

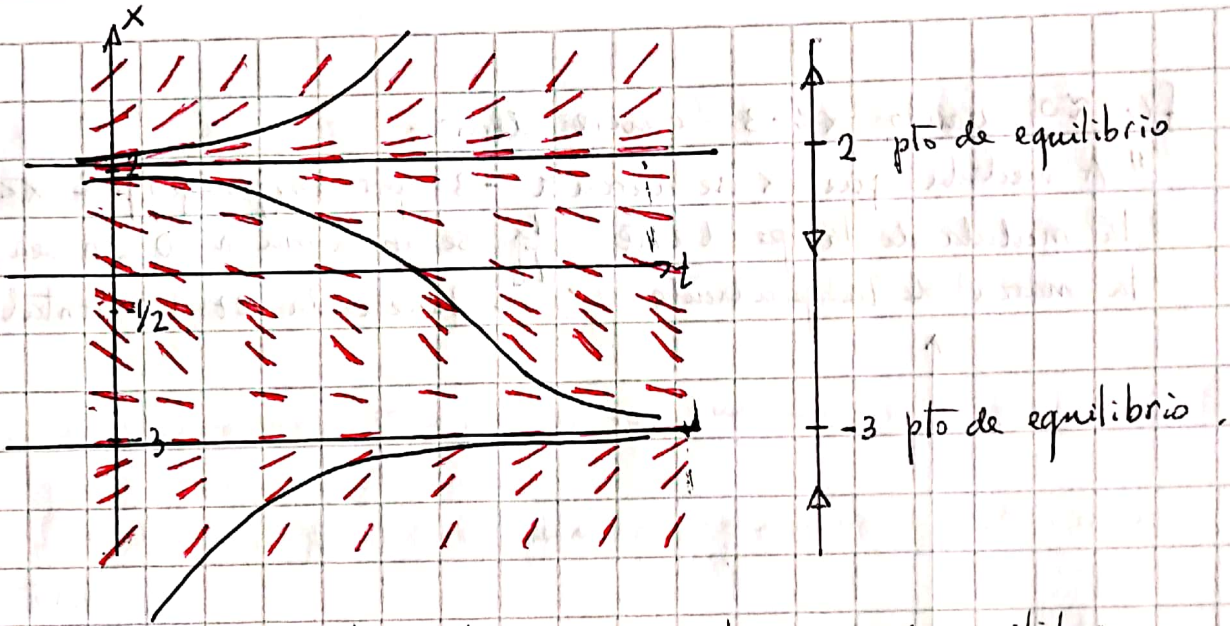
Finalmente el diagrama de fase:

Diagrama de fase v/s diagrama de pendientes:

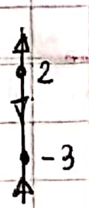
Para dibujar el campo de pendientes de $\frac{dx}{dt} = (x-2)(x+3)$,

$f(x) = x^2 + x - 6$, $f'(x) = 2x + 1 = 2(x + 1/2)$

	$x < -1/2$	$-1/2 < x$
$f'(x)$	$-$	$+$



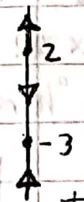
$x(t) = 2$, $x(t) = -3$ son las soluciones singulares o de equilibrio
En el diagrama de fase:



$2, -3$ se llaman puntos de equilibrio.

Pregunta. Para una ecuación $\frac{dx}{dt} = f(x)$ ¿se puede usar su diagrama de fase para esbozar una solución?
Respuesta: Sí, pero el dibujo no queda tan preciso.
Respondemos el problema con un ejemplo particular.

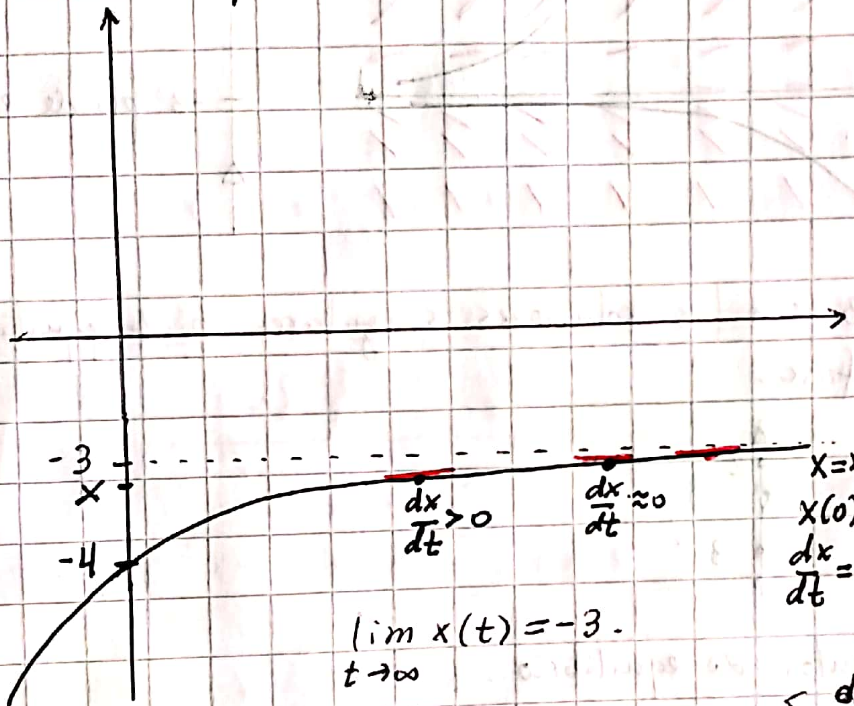
Para $\frac{dx}{dt} = (x-2)(x+3)$ el diagrama de fase es



Para el problema de Cauchy: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x-2)(x+3) \\ x(0) = -4 \end{cases}$ Tenemos que -4

$-4 \in \,]-\infty, -3[$. Por otro lado, $f(x) > 0$ cuando $x < -3$ y $f(x) \approx 0$ cuando $x \approx 3$.

$f(x) \approx 0$ cuando $x \approx -3$ quiere decir:
"A medida que x se acerca a -3 por abajo (porque $x < -3$), la medida de la pendiente $\frac{dx}{dt}$ se aproxima a 0, o sea, la marca de la pendiente se hace cada vez horizontal".

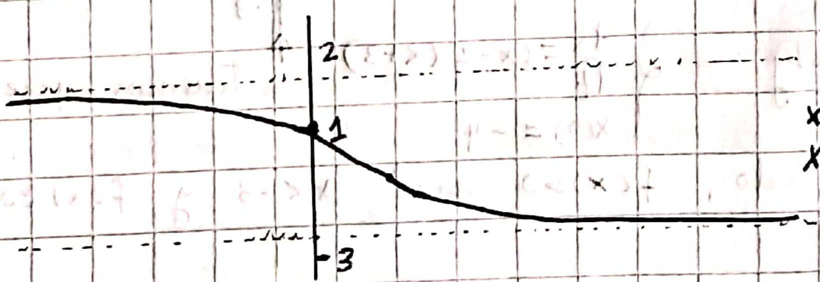


$x = x(t)$
$x(0) = 4$
$\frac{dx}{dt} = (x-2)(x+3)$

$\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = -3.$

Supongamos que queremos resolver el PVI: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x-2)(x+3) \\ x(0) = 1 \end{cases}$

Primero, $-3 < x(0) < 2$.
la solución $x = x(t)$ se mantiene en el intervalo $]-3, 2[$. $(-3 < x < 2)$
$x \in]-3, 2[$, $f(x) < 0 \Rightarrow$ La solución es decreciente.
Para $x \approx -3$, $x \approx 2$, $f(x) \approx 0$, i.e la pendiente de la recta tangente de $x = x(t)$ se "horizontaliza"



$x = x(t)$, $x(0) = 1$, $\frac{dx}{dt} = (x-2)(x+3)$.

Observación. $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = -3$.

Hecho. (i) Las soluciones no traspasan los intervalos definidos por los puntos de equilibrio.
(ii) Las flechas en el diagrama de fase indican las soluciones crecientes y decrecientes, pero no entregan info a qué velocidad lo hacen.

De lo analizado anteriormente se deduce lo siguiente.

(i) Si $f(x(0))=0$, $x(0)$ es un punto de equilibrio y $x(t)=x(0)$ para toda t.
(ii) Si $f(x(0))>0$, entonces $x=x(t)$ es creciente para toda t, en particular, $x\to\infty$ cuando t incrementa o bien $x=x(t)$ tiende al primer punto de equilibrio mayor que $x(0)$.
(iii) Si $f(x(0))<0$, entonces $x=x(t)$ es decreciente para toda t, en particular, $x\to-\infty$ cuando t incrementa o bien $x=x(t)$ tiende al primer punto de equilibrio menor que $x(0)$.

Pregunta. ¿Qué ocurre en el caso cuando $t\to-\infty$?

Clasificación de los puntos de equilibrio.

Para la ecuación autónoma $\frac{dx}{dt} = f(x)$ tenemos su diagrama de fase.
Para evitar problemas innecesarios, asumimos que f es continua.

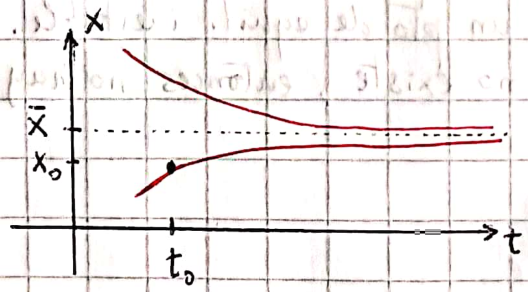
Definición. Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}$ un pto de equilibrio de $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Sea el problema de Cauchy

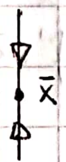
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

donde x_0 "está cerca" de $\bar{x}$.

(i) $\bar{x}$ es un punto de equil. estable o sumidero, si la solución $x = x(t)$ se acerca asintóticamente a $\bar{x}$ cuando $t \to \infty$.

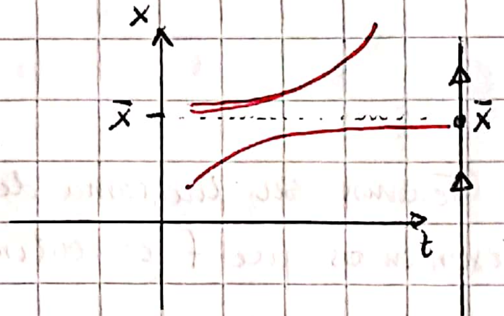
Gráficamente:

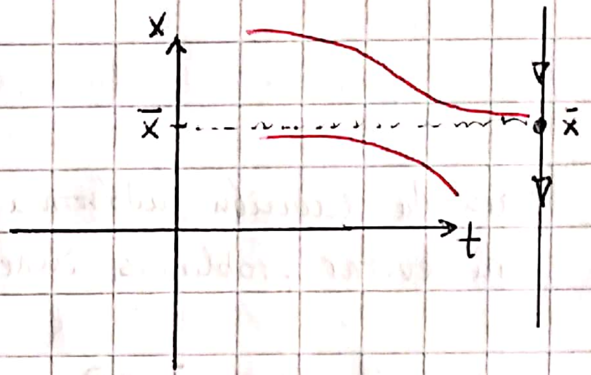




(ii) $\bar{x}$ es un punto de equil. inestable o fuente si la solución $x = x(t)$ se aleja a medida que t crece.

(iii) $\bar{x}$ es un nodo o pto de equil. semiestable si no es sumidero ni fuente. Existen 2 posibilidades de ptos. de equil. semiestable.





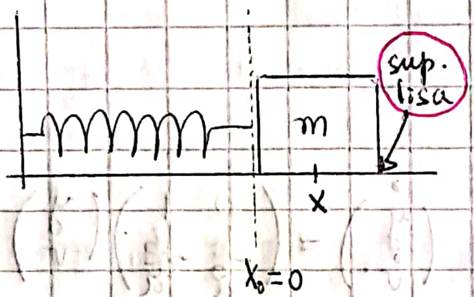
A continuación, un resultado que puede ayudar mucho:

Teorema de la linearización. Suponga que $\bar{x}$ es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = f(x)$, donde f diferenciable continuamente. Entonces:

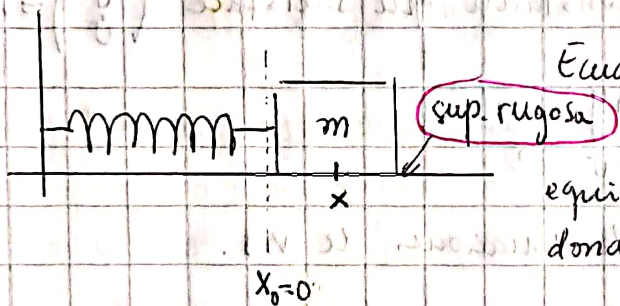
(i) $f'(\bar{x}) < 0$, $\bar{x}$ es un pto de equil. estable.
(ii) $f'(\bar{x}) > 0$, $\bar{x}$ es un pto de equil. inestable.
(iii) $f'(\bar{x}) = 0$ o $f'(\bar{x})$ no existe, entonces no hay info al respecto.

Ecuaciones lineales de segundo orden.

Motivación del tema: Movimiento oscilatorio, vibraciones mecánicas.

(I) 

2º Ley de Newton: $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$, donde $x=x(t)$ es la posición del bloque en el instante $t\geq 0$. $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ es una constante.

(II) 

Ecuación de movimiento del bloque:

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=0$$

equiv: $\ddot{x}+2p\dot{x}+\omega_0^2x=0$,

donde $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$, $p=\sqrt{\frac{b}{2m}}$ constantes.

(I) ecuación $\ddot{x}+\omega_0^2x=0$ ecuación del movimiento armónico simple (MAS)

(II) ecuación $\ddot{x}+2p\dot{x}+\omega_0^2x=0$ ec. movimiento armónico amortiguado (MAA)

Observación. Buscamos un método para resolver ecuaciones del tipo $ay''+by'+cy=0$. (I), (II) son casos particulares.

Importante: $a,b,c\in\mathbb{R}$ son constantes.

Para resolver la ecuación $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$ podemos hacer lo siguiente:

Sustitución $v = \dot{y}$; $a\dot{v} + bv + cy = 0$.

Luego queda el sistema de ecuaciones acoplado:

$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = -\frac{c}{a}y - \frac{b}{a}v \end{cases}$$

equivalente a la ecuación matricial $\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$.

Supongamos que λ es una constante que satisface $\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$,

es decir,

$$\begin{cases} \dot{y} = \lambda y \\ \dot{v} = \lambda v \end{cases}$$

es un sistema desacoplado de ecuaciones de v.s.

Aplicando m.s.v:

$$dy = \lambda y\, dt \Rightarrow \frac{dy}{y} = \lambda dt \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \lambda dt$$

una solución es: $\ln|y| = \lambda t \Rightarrow y = e^{\lambda t}$.

Para algún valor de λ, $y = e^{\lambda t}$ es solución de $\ddot{y} + c\dot{y} + y = 0$.

Sustituyendo:

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t} = 0 \quad / e^{-\lambda t}$$

$$\boxed{a\lambda^2 + b\lambda + c = 0}$$

se llama "la ecuación característica" de la ecuación $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$.

Pregunta: ¿Cómo encontrar las soluciones de $a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=0$?

Aún no sabemos, pero podemos hacer lo siguiente:

(i) Si y_0 es solución de $a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=0$, entonces para cualquier m constante, $y_1=my_0$ es también solución.

(ii) Si y_0, y_1 soluciones de $a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=0$, y_0+y_1 también es solución.

Demostración.
$$a\ddot{y}_1+b\dot{y}_1+cy_1 = a(m\ddot{y}_0)+b(m\dot{y}_0)+c(my_0)$$
$$= am\ddot{y}_0+bm\dot{y}_0+cmy_0$$
$$= m(a\ddot{y}_0+b\dot{y}_0+cy_0) = m\cdot 0 = 0.$$

$$a(\ddot{y_0+y_1})+b(\dot{y_0+y_1})+c(y_0+y_1) = a(\ddot{y}_0+\ddot{y}_1)+b(\dot{y}_0+\dot{y}_1)+c(y_0+y_1)$$
$$= (a\ddot{y}_0+b\dot{y}_0+cy_0)+(a\ddot{y}_1+b\dot{y}_1+cy_1)$$
$$= 0+0=0.$$

Afirmación. Si y_0, y_1 soluciones de $a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=0$, entonces para todo A_0, A_1 constantes, $y=A_0y_0+A_1y_1$ también es solución.

$y=A_0y_0+A_1y_1$ se llama una "combinación lineal" de y_0, y_1.

Pregunta. Supongamos que $y=A_0y_0+A_1y_1$ es solución de $a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=0$
¿puede darse el caso $y_1=-\frac{A_0}{A_1}y_0$ ó $y_0=-\frac{A_1}{A_0}y_1$?

Mas generalmente, puede darse el caso de que una solución sea el múltiplo de la otra, es decir, $y_0=\alpha y_1$ ó $y_1=\beta y_0$, donde α, β son constantes.

Ejemplo 1. Supongamos la ecuación $\ddot{y} - 2\dot{y} + 1 = 0$, $2\ddot{y} + 3\dot{y} + y = 0$

1. Ecuación característica es $\lambda - 2\lambda + 1 = 0$. $\Rightarrow \lambda = 1$.
Solución es $y = e^t$.

2° Ec. característica es $2\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$
Discriminante es $\Delta = 9 - 4 \cdot 2 = 1$. Soluciones, $\lambda = \frac{-3 \pm 1}{4}$
$\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -1$.
Soluciones $y_1 = e^{-\frac{1}{2}t}$, $y_2 = e^{-t}$. Por la afirmación anterior,
$y = A_1 e^{-\frac{1}{2}t} + A_2 e^{-t}$ también es solución. Más general que y_1, y_2.

¿Puede ocurrir que exista $B \in \mathbb{R}^*$ constante tq $y_1 = B y_2$?
En ese caso quedaría $y = (A_1 B + A_2) e^{-t} = B_1 e^{-t}$.

Mas generalmente, la ecuación $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$ para el caso
$\Delta = b^2 - 4ac > 0$ tiene por soluciones a $y_1 = e^{\lambda_1 t}$, $y_2 = e^{\lambda_2 t}$,
donde $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y soluciones de $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

(i) Sabemos que $y = A_1 y_1 + {}_2 y_2$ solución.
(ii) Si $y_1 = B y_2$ ($B \neq 0$ cte), entonces $y = (A_1 B + A_2) y_2$.

* Esta parte queda en desarrollo *

Scanned with CamScanner

Teorema. Supongamos que λ_1, λ_2 soluciones de la ecuación característica.

(i) λ_1, λ_2 reales y distintas ($\Delta > 0$), entonces la solución general es $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

(ii) Si $\lambda_1 = \lambda_2$ ($\Delta = 0$), entonces la ecuacion tiene por solución general a $y = (c_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$.

Pregunta: ¿hay soluciones de $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$ cuando $\Delta < 0$?
Respuesta: Sí hay, pero hay que conocer cómo trabaja el conjunto $\mathbb{C}$ (números complejos).

El conjunto $\mathbb{C}$.

El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ consiste en los elementos de la forma $a+bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Operaciones en $\mathbb{C}$ son la suma (+) y el producto ($\cdot$) definidos por:

$$(a+bi) + (c+di) = (a+b) + (c+d)i$$
$$(a+bi) \cdot (c+di) = (ac - bd) + (ad+bc)i$$

Ejemplo $z = 2+3i$, $w = -4+i$

$z + w = (2+3i) + (-4+i) = (2-4) + (3i+i) = -2+4i$

$zw = (2+3i)(-4+i) = -8 + 2i - 12i + 3i^2$

$= -8 - 3 - 10i = -11 - 10i$

Fórmula de Euler: Para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$,
$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Observación. Para cualquier $z \in \mathbb{C}$, $e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi}$, donde $z = a+bi$. En particular:
$$e^z = e^a\big(\cos(b) + i\,\mathrm{sen}(b)\big).$$

Observación. Sea $ax^2+bx+c=0$ una ecuación cuadrática. Las soluciones son
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$
donde $\Delta = b^2-4ac$ es el discriminante.

(i) $\Delta = 0$, $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ (raiz real única repetida)

(ii) $\Delta > 0$, $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$ y $x_1 \neq x_2$ raíces reales.

(iii) $\Delta < 0$, $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-\Delta}\, i$
$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

Las soluciones de la ecuación $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$ son $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, donde λ_1, λ_2 son raíces de la ecuación característica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

Como $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
$$e^{\lambda_1 x} = e^{-\frac{b}{2a}x} e^{i\sqrt{\frac{4ac-b^2}{2a}}x}$$
$$= e^{-\frac{b}{2a}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right)\right)$$
$$e^{\lambda_2 x} = e^{-\frac{b}{2a}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right)\right)$$

Sabemos que $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$ son soluciones de $a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=0$, entonces

$$\frac{e^{\lambda_1 x}+e^{\lambda_2 x}}{2}$$ también es solución.

pero $$e^{-\frac{b}{2a}}\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)=\frac{e^{\lambda_1 x}}{2}+\frac{e^{\lambda_2 x}}{2}$$

Por otro lado, $$e^{-\frac{b}{2a}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)=\frac{e^{\lambda_1 x}-e^{\lambda_2 x}}{2i}$$ También es solución.

Por principio de superposición, la solución general en este caso es

$$y(x)=C_1 e^{-b/2a}\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)+C_2 e^{-b/2a}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)$$

Ejemplo. Encontrar soluciones de la ecuación $2y''+2y'+4y=0$.

Desarrollo. La ecuación característica es $2\lambda^2+2\lambda+4=0$.
las raíces del polinomio característico son:

$$\lambda=\frac{-2\pm\sqrt{4-32}}{4}=\frac{-2\pm\sqrt{-28}}{}=\frac{-2\pm\sqrt{-7\cdot 4}}{2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{7}\,i}{2}$$

$\lambda_1=-1+i\sqrt{7}$, $\lambda_2=-1-i\sqrt{7}$.

La solución general de $2y''+2y'+4y=0$ es

$$y(x)=C_1 e^{-1}\cos(\sqrt{7}x)+C_2 e^{-1}\operatorname{sen}(\sqrt{7}x).$$

Scanned with CamScanner

Movimiento oscilatorio no amortiguado.

Para un bloque de masa m unido a un resorte de constante de restitución k que se desliza sobre una superficie pulida, su ecuación de movimiento es:

$$x'' + \omega_0^2 x = 0,$$

donde $x = x(t)$ es la posición del bloque en el tiempo t.

Observación. La ecuación característica de $x'' + \omega_0^2 x = 0$ es $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$, cuyas soluciones son $\lambda = \pm i\omega_0$.

Luego: $$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$$

Afirmación: Existen C, γ tales que $x(t) = C\cos(\omega_0 t - \gamma)$.

demostración. Vemos los casos $A = 0$, $B = 0$, $A, B \neq 0$

(i) Si $A = 0$, $x(t) = B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) = B\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$

Luego $C = B$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

(ii) $B = 0$, $x(t) = A\cos(\omega_0 t)$. $B = A$, $\gamma = 0$.

(iii) $A, B \neq 0$, tenemos la ecuación:

$$A\cos(\omega_0 t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) = C\cos(\omega_0 t - \gamma) \quad \forall t > 0$$

$t = 0$, $A \cdot 1 + B \cdot 0 = C\cos(-\gamma) = C\cos(\gamma) \Rightarrow A = C\cos(\gamma)$

$t = \frac{\pi}{2\omega_0}$, $A \cdot 0 + B \cdot 1 = C\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = C\,\mathrm{sen}(\gamma) \Rightarrow B = C\,\mathrm{sen}(\gamma)$

$A = C\cos(\gamma) \rightarrow C^2 = A^2 + B^2$, $\tan(\gamma) = \dfrac{B}{A}$
$B = C \operatorname{sen}(\gamma)$

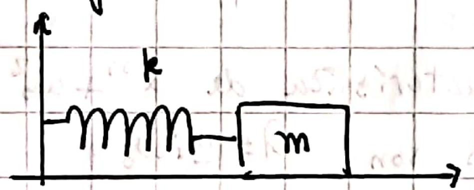
$C = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$, $\gamma = \arctan\left(\dfrac{B}{A}\right)$ o $\pi + \arctan(B/A)$

Luego: $\dfrac{B}{A} = \tan(\gamma)$

$C = \sqrt{A^2 + B^2} \rightarrow$ (sin pérdida de generalidad).

Observación. Recuerde ajustar la calculadora en radianes

Ejemplo resuelto. Ver el siguiente sistema



$k =$
m

Ecuación que determina el movimiento es $2x'' + 8x = 0$
$x(0) = 0.5$ (m) , $x'(0) = 1$ (m/s).

Movimiento armónico amortiguado.

Para el mismo sistema bloque-resorte, pero esta vez considerando amortiguación:

$$x'' + 2p x' + \omega_0^2 x = 0,$$

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $p = \frac{c}{2m}$

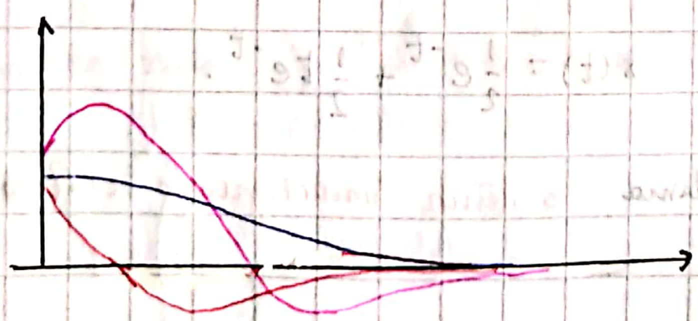
La ecuación característica es $\lambda^2 + 2p\lambda + \omega_0^2 = 0$.
Su discriminante es $\Delta = 4p^2 - 4\omega_0^2 = 4(p^2 - \omega_0^2)$

Las soluciones son $\lambda = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$

Las soluciones dependen del signo de $p^2 - \omega_0^2$.

(i) $p^2 - \omega_0^2 > 0$: $x(t) = A e^{(-p+\sqrt{p^2-\omega_0^2})x} + B e^{(-p-\sqrt{p^2-\omega_0^2})x}$
Como $-p+\sqrt{p^2-\omega_0^2}, -p-\sqrt{p^2-\omega_0^2} < 0$, se tiene que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

La gráfica de la solución es más o menos así:



Observación. $x = x(t)$ nunca alcanza a completar un ciclo. Para ello basta estudiar la ecuación $x(t) = 0$.

Ejemplo. Suponga que la masa inicialmente se suelta en la posición $x(0)=x_0$ estando en reposo $x'(0)=0$. Entonces:

$$x(t) = \frac{x_0}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}\right)$$

Probar para los casos $x_0 = 0.5, -0.7, 1$. $p=2$, $\omega_0 = 1$

* Este sistema se llama sistema amortiguado supercrítico

(ii) $p^2 = \omega_0^2$: $\lambda = -p$ (raíz repetida).
Solución es $x(t) = Ae^{-pt} + Bte^{-pt}$

Observación. $\lim\limits_{t\to\infty} Ae^{-pt} = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} te^{-pt} = 0$ (L'hôpital)

Por lo tanto, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. (tiende a su posición de equilibrio).

Ejemplo. $p = \omega_0 = 1$. $x(0) = 0.5$, $x'(0) = 0$
Desarrollo. $x(t) = Ae^{-t} + Bte^{-t}$
$x(0) = 0.5 = A$
$x'(t) = -Ape^{-pt} + B(e^{-pt} - pte^{-pt})$
$x'(0) = 0 = -Ap + B(1-0) = -Ap + B$, $0 = -\frac{p}{2} + B \Rightarrow B = \frac{p}{2} = \frac{1}{2}$

Solución particular: $x(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t}$.

* Este sistema se llama sistema amortiguado crítico.

(iii) $p^2 < \omega_0^2$: $\Delta = 4(p^2 - \omega_0^2) < 0$.

Las soluciones de la ecuación son

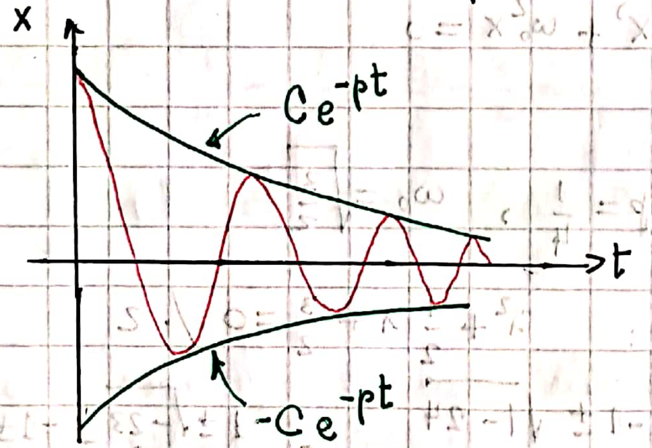
$$X(t) = A e^{\lambda_1} + B e^{\lambda_2}, \quad \lambda_1 = -p \pm i\omega_1, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2}$$

$$X(t) = e^{-pt}\left(A\cos(\omega_1 t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_1 t)\right)$$

También se puede dejar de la forma $x(t) = Ce^{-pt}\cos(\omega_1 t - \gamma)$, donde $C = \sqrt{A^2+B^2}$, $\tan(\gamma) = \dfrac{B}{A}$.

Observación. Es importante notar que $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

La gráfica de la solución es (aproximadamente):



Ce^{-pt}, $-Ce^{pt}$ son las curvas envolventes.

ω_1 es la pseudo-frecuencia del sistema ($\omega_1 < \omega_0$)

* Este sistema se llama sistema amortiguado subcrítico.

Ejercicios. (Lebl - Diffyqs)

Ejercicio. 2.4. Considere un sistema resorte - masa con masa $m=2$, constante del resorte $k=3$ y constante de amortiguación $c=1$

(a) Encuentre la solución general del sistema.

(b) Es el sistema amortiguado subcrítico, crítico o supercrítico?

(c) Si el sistema no es amortiguado crítico, encuentre el valor de c para que lo sea.

Desarrollo. (a) Ecuación de movimiento del sistema:

$$x'' + 2p x' + \omega_0^2 x = 0$$

donde $p = \dfrac{c}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$m=2$, $k=3$, $c=1$ $\Rightarrow$ $p = \dfrac{1}{4}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

Ecuación característica: $\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2} = 0 \;/\cdot 2$

$\Rightarrow 2\lambda^2 + \lambda + 3 = 0$

Soluciones: $\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-24}}{4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-23}}{4} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{23}}{4}$

Soluciones de la ecuación: $x(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$

$$e^{\lambda_1 t} = e^{\frac{-1+i\sqrt{23}}{4}t} = e^{-\frac{1}{4}t} e^{\frac{\sqrt{23}}{4} i t}$$

$$= e^{-1/4\, t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{4}t\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{23}}{4}t\right)\right)$$

$$e^{\lambda_2 t} = e^{-1/4\, t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{4}t\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{23}}{4}t\right)\right)$$

$$x(t) = e^{-\frac{1}{4}t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{4}t\right) + B\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{23}}{4}t\right)\right)$$

(b) El sistema es amortiguado crítico (subcrítico) porque $\omega_0^2 = \dfrac{3}{2} > \dfrac{1}{16} = p^2$

Scanned with CamScanner

$m=3$
$k=12$
$c=12$

El sistema es amortiguado crítico siempre y cuando $p^2=\omega_0^2$,
pero $p^2=\frac{c^2}{(2m)^2}=\frac{c^2}{4m^2}$

$\frac{c^2}{4m^2}=\omega_0^2 \Longleftrightarrow \frac{c^2}{4\cdot 4}=\frac{3}{2} \Rightarrow c^2=3\cdot 8=24 \Rightarrow c=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

La solución general es $x(t)=(A+B\ )e^{\lambda t}$
donde la ecuación es: $x''+2px'+\omega_0^2x=0$,
$p=\frac{c}{2m}$, $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$
Para $c=2\sqrt{6}$, $m=2$, $k=3$: $p=\frac{2\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\omega_0=\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\Delta=p^2-\omega_0^2=\frac{6}{4}-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0$. Por lo tanto, $\lambda=-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Solución general es $x(t)=(A+Bt)e^{-\frac{\sqrt{6}}{2}t}$

Problema. Resolver el sistema crítico anterior para las condiciones iniciales $x(0)=1$, $x'(0)=0$

Desarrollo. $x'(t)=Be^{-\frac{\sqrt{6}}{2}t}+(A+Bt)e^{-\frac{\sqrt{6}}{2}t}\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$
$x'(0)=B+A\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

Luego tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:
$x(0)=1 \Longleftrightarrow A=1$
$x'(0)=0 \Longleftrightarrow B-\frac{\sqrt{6}}{2}A=0$
Luego $B=\frac{\sqrt{6}}{2}$.
Solución particular es $x(t)=\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}t\right)e^{-\frac{\sqrt{6}}{2}t}$.

Ejercicio. Repita el problema 2.4 para el caso $m=3$, $k=12$, $c=12$.

Desarrollo. El oscilador armónico amortiguado es $x''+2px'+\omega_0^2 x=0$, donde:

$$p=\frac{c}{2m}=\frac{12}{2\cdot 3}=\frac{12}{6}=2.$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{12}{3}}=\sqrt{4}=2$$

Ecuación es : $x''+4x'+4x=0$.

Ecuación característica : $\lambda^2+4\lambda+4=0$, $\Delta=16-16=0$.

$x''+4x'+4x=0$ es un sistema amortiguado crítico.

$\lambda=\dfrac{-4\pm\sqrt{0}}{2}=-2$. Soluciones : $x(t)=(A+Bt)e^{-2t}$

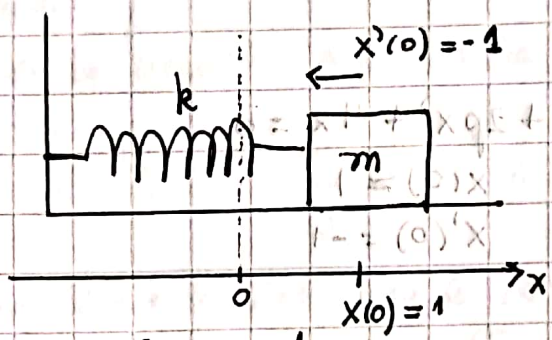
Resolver el problema de valores iniciales $x(0)=1$, $x'(0)=-1$.

Desarrollo.
$$x(0)=A=1$$
$$x'(t)=Be^{-2t}+(A+Bt)e^{-2t}(-2)$$
$$x'(0)=B-2A=-1$$

Sistema de ecuaciones : $\begin{cases} A=1 \\ B-2A=-1 \end{cases}$ $\therefore$ $B=1$

Solución particular es $x(t)=(1+t)e^{-2t}$.

Problema: De vuelta (una vez más) al oscilador armónico.



m = 3
k = 12

$x(0) = 1$ posición inicial
$x'(0) = -1$ velocidad inicial

$x = x(t)$ posición del bloque en el instante $t \geq 0$, obedece la ecuación: $x'' + \omega_0^2 x = 0$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$

Ecuación: $x'' + 4x = 0$

Polinomio característico: $p(\lambda) = \lambda^2 + 4$

Ecuación característica: $\lambda^2 + 4 = 0$

Soluciones son: $\lambda = \pm 2i$

luego: $x(t) = A\cos(2t) + B \operatorname{sen}(2t)$.

Mediante condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$ tenemos

$x(0) = A\cos(0) + B\operatorname{sen}(0) = A + 0 = A$

$x'(t) = -2A\operatorname{sen}(2t) + 2B\cos(2t)$

$x'(0) = -2A \cdot 0 + 2B \cdot 1 = 2B$

$$\left.\begin{aligned} A &= 1 \\ 2B &= -1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Solución particular es $x(t) = \cos(2t) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)$

Ahora tenemos el sistema sumergido en distintos líquidos de constante $c = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

PVI a resolver : $\begin{cases} x'' + 2px' + 4x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = -1 \end{cases}$

donde $p = \frac{c}{2m}$ $(m = 3)$

1° Para $c = 1$: $x'' + \frac{1}{3}x' + 4x = 0$

Polinomio característico es $\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda + 4$

Ecuación característica es $3\lambda^2 + \lambda + 12 = 0$ $(\Delta = 1 - 4\cdot 3 \cdot 12)$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{-143}}{12} = \frac{-1 \pm i\sqrt{143}}{12}$$

$$x(t) = e^{-\frac{1}{12}t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{143}t}{12}\right) + B\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{143}t}{12}\right)\right)$$

$1 = x(0) = 1(A + B\cdot 0) = A$

$$x'(t) = -\frac{1}{12}e^{-\frac{1}{12}t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{143}}{12}t\right) + B\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{143}}{12}t\right)\right)$$
$$+ e^{-\frac{1}{12}t}\left(-\frac{\sqrt{143}}{12}A\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{143}}{12}t\right) + \frac{\sqrt{143}}{12}B\cos\left(\frac{\sqrt{143}}{12}t\right)\right)$$

$$-1 = x'(0) = -\frac{1}{12}(A + 0\cdot B) + 1\left(A\cdot 0 + \frac{\sqrt{143}}{12}\cdot B\right)$$
$$= -\frac{1}{12}A + \frac{\sqrt{143}}{12}B$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ -\frac{1}{12}A + \frac{\sqrt{143}}{12}B = -1 \end{cases} \to B = \left(-1 + \frac{1}{12}\right)\frac{12}{\sqrt{143}} = \frac{-11\cdot 12}{\sqrt{143}}$$
$$= -\frac{11}{\sqrt{143}}$$

$$x(t) = e^{-\frac{1}{12}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{143}}{12}t\right) - \frac{11}{143}\cdot\sqrt{143}\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{143}}{12}t\right)\right)$$

Scanned with CamScanner

2º Para $c=6$, $p=\frac{6}{2\cdot 3}=1$: $x''+2x'+4x=0$

Ecuación característica es $\lambda^2+2\lambda+4=0$ $(\Delta=4-16=-12)$

Soluciones de la ecuación característica :

$$\lambda=\frac{-2\pm i\sqrt{12}}{2}=-1\pm i\sqrt{3}$$

Solución particular de la ecuación :

$$x(t)=e^{-t}\left(A\cos(\sqrt{3}t)+B\operatorname{sen}(\sqrt{3}t)\right)$$

$x(0)=1=A$

$x'(t)=-e^{-t}\left(A\cos(\sqrt{3}t)+B\operatorname{sen}(\sqrt{3}t)\right)$
$\quad +e^{-t}\left(-\sqrt{3}A\operatorname{sen}(\sqrt{3}t)+\sqrt{3}B\cos(\sqrt{3}t)\right)$

$x'(0)=-1=-(A+0)+1(0+\sqrt{3}B)=-A+\sqrt{3}B$

Sistema de ecuaciones : $\begin{cases} A=1 \\ -A+\sqrt{3}B=-1 \end{cases} \Rightarrow B=0$

Solución particular : $x(t)=e^{-t}\left(\cos(\sqrt{3}t)\right)$

3º Para $c=3$, $p=\frac{3}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}$: $x''+x'+4x=0$

$\lambda^2+\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1-16}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$

$x(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)+B\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right)$

$x(0)=1=A$

$x'(t)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)+B\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right)$
$\quad +e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}A\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)+\frac{\sqrt{15}}{2}B\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right)$

$x'(0)=-1=-\frac{1}{2}A+1\left(\frac{\sqrt{15}}{2}B\right)$

Sistema de ecuaciones $\begin{cases} A=1 \\ -\frac{1}{2}A+\frac{\sqrt{15}}{2}B=-1 \end{cases} \Rightarrow B=-\frac{1}{\sqrt{15}}=-\frac{\sqrt{15}}{15}$

Scanned with CamScanner

Solución particular es $x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{15}}{15}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right)$

4º Para $c=15$

$p = \frac{c}{2m} = \frac{15}{6}$, $\omega_0^2 = 4$

Tenemos la ecuación de segundo orden : $x'' + \frac{15}{3}x' + 4x = 0$

Ecuación característica es $\lambda^2 + \frac{15}{3}\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$.

$\Delta = 5^2 - 16 = 25 - 16 = 9$

Soluciones : $\lambda = -\frac{5 \pm 3}{2} = -1, -4$

Soluciones de la ecuación : $x(t) = Ae^{-t} + Be^{-4t}$

Cumpliendo condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$

$x(0) = 1 = A + B$

$x'(t) = -Ae^{-t} - 4Be^{-4t}$, $x'(0) = -A - 4B$

sistema de ecuaciones : $\begin{cases} A + B = 1 \\ -A - 4B = -1 \end{cases}$

$-3B = 0 \Rightarrow B = 0$, $A = 1$

Solución particular es $x(t) = e^{-t}$

Observación. El bloque no alcanza a cruzar el punto de equilibrio.

5º Para $c = 18$: $p = \frac{c}{2m} = \frac{18}{2\cdot 3} = 3$

Ecuación queda : $x'' + 6x' + 4x = 0$

Ecuación caract : $\lambda^2 + 6\lambda + 4 = 0$, $\Delta = 36 - 16 = 20$

$$\lambda = \frac{-6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -3 \pm \sqrt{5}$$

Soluciones de la ecuación diferencial :

$$x(t) = A e^{(-3+\sqrt{5})t} + B e^{(-3-\sqrt{5})t}$$

$$x'(t) = (-3+\sqrt{5}) A e^{(-3+\sqrt{5})t} + (-3-\sqrt{5}) B e^{(-3-\sqrt{5})t}$$

Sistema de ecuaciones : $\begin{cases} A + B = 1 \\ (-3+\sqrt{5})A + (-3-\sqrt{5})B = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow (-3+\sqrt{5})(1-B) + (-3-\sqrt{5})B = -1$

$(-3+\sqrt{5}) + B(-3-\sqrt{5}+3-\sqrt{5}) = -1$

$B = -\frac{2-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}} = \frac{5-2\sqrt{5}}{10} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5}$

$A = 1 - B = 1 - \frac{5-2\sqrt{5}}{10} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{5}$

Solución particular es $x(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{5}\right) e^{(-3+\sqrt{5})t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) e^{(-3-\sqrt{5})t}$

Scanned with CamScanner

Observación. En un sistema subamortiguado (amortiguación subcrítica) el bloque siempre cruza el punto de equilibrio.
¿Cuándo cruza el punto de equilibrio en un sistema crítico y supercrítico?

Sistema crítico: $x(t) = (A + Bt)e^{-pt}$

$t = t_1 > 0, \quad x(t_1) = 0 \iff (A + Bt_1)e^{-pt_1} = 0$

$\Rightarrow \quad A + Bt_1 = 0$

$t_1 = -\frac{A}{B} > 0 \Rightarrow AB < 0$ deben tener distinto signo.

Sistema supercrítico: $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$

$x(t_1) = 0 \iff Ae^{\lambda_1 t_1} + Be^{\lambda_2 t_1} = 0 \Rightarrow Ae^{\lambda_1 t_1} = -Be^{\lambda_2 t_1}$

$t_1 > 0$

$\Rightarrow e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t_1} = -\frac{B}{A} > 0$

Por lo tanto $BA < 0$ (deben tener distinto signo).

Ecuaciones no homogeneas.

Idea: Resolver ecuaciones no homogeneas del tipo $ay'' + by' + cy = f(x)$.

Ejemplo. $y'' + 5y' + 6y = 2x + 1$.

Si $L(y) = ay'' + by' + cy$, entonces L es una función $\mathbb{R}$-lineal.

y_p, $\tilde{y}_p$ soluciones particulares de $L(y) = f(x)$
$L(y_p) = f(x)$, $L(\tilde{y}_p) = f(x)$ $\Rightarrow$ $L(y_p) - L(\tilde{y}_p) = L(y_p - \tilde{y}_p) = 0$.
Luego: $y_p - \tilde{y}_p$ solución de la ecuación homogenea $L(y) = 0$.
Por lo tanto, la solución general de $L(y) = f(x)$ es

$$y = y_p + y_h,$$

donde $L(y_h) = 0$.

Objetivo: Calcular y_p.

Metodo de los coeficientes indeterminados: A partir de $f(x)$, construir una solución y_p.

Ejemplo 1. Para $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$ se propone la solución particular $y_p = A\cos(2x) + B\,\text{sen}(2x)$. Basta ahora encontrar las constantes A y B.

Si $L(y_p) = \cos(2x)$, entonces $A = -1/10$, $B = 1/5$

$$y_p = -\frac{1}{10}\cos(2x) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(2x)$$

La solución general de $L(y) = \cos(2x)$ es

$$y = e^{-x}\left(C_1\cos(x) + C_2\operatorname{sen}(x)\right) - \frac{1}{10}\cos(2x) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(2x)$$

Ejemplo 2. Para $L(y) = \cos(3x)$, se propone la solución particular
$y_p = A\cos(3x) + B\operatorname{sen}(3x)$

$L(y_p) = \cos(3x)$ implica el sistema $\begin{cases} -7A + 6B = 1 \\ -7B - 6A = 0 \end{cases}$

Resolviendo, $A = -\frac{7}{85}$, $B = \frac{6}{85}$

Solución general de $L(y) = \cos(3x)$:

$$y = e^{-x}\left(A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x)\right) - \frac{7}{85}\cos(3x) + \frac{6}{85}\operatorname{sen}(3x)$$

Ejemplo 3. Supongamos que queremos resolver $y'' + 2y' + 2y = x + 1$
Asumimos una solución particular de la forma

$$y_p = Ax + B$$

$L(y_p) = x+1 \rightarrow 0 + 2A + 2Ax + 2B = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + 2B = 1 \end{cases}$

Resolviendo el sistema: $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$.

Solución general: $y = e^{-x}\left(A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x)\right) + \frac{1}{2}x$

Ejemplo 4. Ahora para el caso de $f(x)=e^x$, tenemos la ecuación:

$$y'' + 2y' + 2y = e^x$$

O de manera equivalente: $L(y)=e^x$, $L(y) = y''+2y'+2y$.
Proponemos solución de la forma $y_p = Ae^x$:

$y_p' = Ae^x$, $y_p'' = Ae^x$.
$L(y_p)=e^x$ equivale a $Ae^x + 2Ae^x + 2Ae^x = e^x \Rightarrow 5Ae^x = e^x \Rightarrow 5A=1$
$A=\frac{1}{5}$. Solución general es: $y = e^{-x}\left(A\cos(x) + B\,\mathrm{sen}(x)\right) + \frac{1}{5}e^x$.

Observación. El método falla para $f(x)=e^{-x}\cos(x)$, es decir, no sirve proponer una solución de la forma

$$y_p = Ae^{-x}\cos(x) + Be^{-x}\mathrm{sen}(x).$$

En cambio, se puede proponer una solución de la forma

$$y_p = Axe^{-x}\cos(x) + Bxe^{-x}\mathrm{sen}(x)$$

Para $y_p = Axe^{-x}\cos(x) + Bxe^{-x}\mathrm{sen}(x)$, $L(y_p) = e^{-x}\cos(x)$ es equivalente a

$$2Be^{-x}\cos(x) - 2Ae^{-x}\mathrm{sen}(x) = e^{-x}\cos(x).$$

Luego, $A=0$, $B=1/2$.

La solución general es $y = e^{-x}\left(A\cos(x) + B\,\mathrm{sen}(x)\right) + \frac{1}{2}xe^{-x}\mathrm{sen}(x)$.

Para el caso que se quiera resolver una ecuación del tipo

$$L(y) = f(x) + g(x),$$

Buscamos u_p, v_p tq $L(u_p) = f(x)$, $L(v_p) = f(x)$.

$y_p = u_p + v_p$ cumple: $L(y_p) = L(u_p + v_p) = L(u_p) + L(v_p) = f(x) + g(x)$.

Por lo tanto, $y_p = u_p + v_p$ es una solución particular de $L(y) = f(x) + g(x)$.

Lebl - Notes on Diffy Qs.
Ejercicios propuestos.

Ejercicio .2.5.2. Encuentre una solución particular de $y'' - y' - 6y = e^{2x}$

Desarrollo. $y_p = Ae^{2x}$.

$L(y) = y'' - y' - 6y \Rightarrow L(y_p) = 4Ae^{2x} - 2Ae^{2x} - 6Ae^{2x} = e^{2x}$

$L(y_p) = e^{2x}$ equivalente a $-4Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow -4A = 1 \Rightarrow A = -1/4$

Por lo tanto: $y_p = -\frac{1}{4}e^{2x}$.

Ejercicio. 2.5.3. Encuentre una solución particular de $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

Desarrollo. Veamos su solución general homogenea:

Ecuación característica: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$

$y_h = (A + Bx)e^{2x}$.

No sirve plantear solución particular de la forma Cxe^{2x} ni Ce^{x}

Se propone solución particular $y_p = Cx^2e^{2x}$

$y_p' = 2Cxe^{2x} + 2Cx^2e^{2x}$

$y_p'' = 2(Ce^{2x} + 2Cxe^{2x}) + 2(2Cxe^{2x} + 2Cx^2e^{2x})$

$= 2Ce^{2x} + 4Cxe^{2x} + 4Cxe^{2x} + 4Cx^2e^{2x} = 2Ce^{2x} + 8Cxe^{2x} + 4Cx^2e^{2x}$

$L(y_p) = 2Ce^{2x} + \cancel{8Cxe^{2x}} + \cancel{4Cx^2e^{2x}} - \cancel{8Cxe^{2x}} - \cancel{8Cx^2e^{2x}} + \cancel{4Cx^2e^{2x}}$

$= 2Ce^{2x}$.

$L(y_p) = e^{2x}$ es equivalente a $2Ce^{2x} = e^{2x}$; es decir, $2C = 1$

$\therefore C = 1/2$

La solución particular es $y_p = \frac{1}{2}x^2e^{2x}$.

Scanned with CamScanner

Ejercicio. 2.5.4. Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 9y = \cos(3x) + \operatorname{sen}(3x) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner