Universidad de las Américas
Cálculo Diferencial MA170
junio 11, 2019.

Desarrollo Cátedra 3.

Problema 1. Encuentre y clasifique todos los puntos críticos de la función

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{12} - \frac{2x^3}{9} + 16$$

Desarrollo. $f'(x) = \frac{5x^4}{5} - \frac{4x^3}{12} - \frac{6x^2}{9} = x^4 - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{3} = x^2\left(x^2 - \frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right)$

$= \frac{x^2}{3}(3x^2 - x - 2)$

$3x^2 - x - 2 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(3)(-2)}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{1 \pm 5}{6}$

$x_1 = 1 \ , \ x_2 = -\frac{2}{3}$

$f'(x) = 0$ siempre y cuando $x = 0$, $x = 1$, $x = -\frac{2}{3}$

Los puntos críticos de f son $x=0$, $x=1$, $x=-\frac{2}{3}$

$f''(x) = 4x^3 - x^2 - \frac{4x}{3}$

$f''(0) = 0 \implies x=0$ punto de inflexión de f

$f''(1) = \frac{5}{3} > 0 \implies x=1$ mínimo local de f.

$f''(-\frac{2}{3}) = -\frac{20}{27} < 0 \implies x = -\frac{2}{3}$ máximo local de f.

Problema 2. Use la regla de L'Hopital para calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{(e^x - 1)^3}$$

Desarrollo. Este límite es de la forma $\frac{0}{0}$, porque:

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0} (e^x - 1)^3 = 0 .$$

Regla de L'Hopital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{(e^x - 1)^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)}{3(e^x - 1)^2 e^x}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)\right) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) + \lim_{x \to 0} x\cos(x) = 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0} 3(e^x - 1)^2 e^x = 3 \lim_{x \to 0} (e^x - 1)^2 e^x = 3 \cdot (1 - 1) \cdot 1 = 0$$

Como es un límite de la forma $\frac{0}{0}$, ocupamos L'Hôpital nuevamente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)}{3(e^x - 1)^2 e^x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) + \cos(x) - x\operatorname{sen}(x)}{6(e^x - 1)e^x e^x + 3(e^x - 1)^2 e^x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\cos(x) - x\operatorname{sen}(x)}{6(e^x - 1)e^{2x} + 3(e^x - 1)e^x}$$

Problema 2. Usando la regla de L'Hopital calcule:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x \operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)\, e^x}$$

Desarrollo. Es un límite de la forma $\frac{0}{0}$, porque:

$$\lim_{x \to 1} x \operatorname{sen}(x-1) = \left(\lim_{x \to 1} x\right)\left(\lim_{x \to 1} \operatorname{sen}(x-1)\right) = 1 \cdot \operatorname{sen}(0) = .$$

$$\lim_{x \to 1} (x-1)e^x = \lim_{x \to 1}(x-1) \lim_{x \to 1} e^x = 0 \cdot e = 0$$

Ocupando regla de L'Hopital, queda:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x \operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)e^x} = \lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1) + x\cos(x-1)}{e^x + (x-1)e^x}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 1} \operatorname{sen}(x-1) + x\cos(x-1)}{\lim_{x \to 1} e^x + (x-1)e^x}$$

$$= \frac{0 + 1 \cdot \cos(0)}{e + 0 \cdot e} = \frac{1 \cdot 1}{e} = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

Problema 3. Tenemos $V = \frac{4}{3}\pi r^3$,

donde r cambia en función del tiempo t : $r = r(t)$

Velocidad de cambio del volumen en $\frac{dV}{dt}$,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^2 \cdot 3 \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Para $\frac{dr}{dt} = -4$ (cm/seg), $r = 10$ (cm)

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi(10)^2 \cdot (-4) = -1600\pi \approx -5026,54 \ (\text{cm}^3/\text{seg})$$

Problema 4

a. $X(t) = A\cos(5t) + B\,\text{sen}(5t)$

$$X'(t) = -5A\,\text{sen}(5t) + 5B\cos(5t)$$
$$X''(t) = -25A\cos(5t) - 25B\,\text{sen}(5t)$$

$$\begin{aligned} X'' + 25X &= -25A\cos(5t) - 25B\,\text{sen}(5t) + 25\big(A\cos(5t) + B\,\text{sen}(5t)\big) \\ &= -25A\cos(5t) - 25B\,\text{sen}(5t) + 25A\cos(5t) + 25B\,\text{sen}(5t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $X'' + 25X = 0$.

b. $X(0) = A\cos(5\cdot 0) + B\,\text{sen}(5\cdot 0) = A\cos(0) + B\,\text{sen}(0) = A\cdot 1 + B\cdot 0 = A \Rightarrow A = 0$

$$X'(0) = -5A\,\text{sen}(5\cdot 0) + 5B\cos(5\cdot 0) = -5A\cdot 0 + 5B\cdot 1 = 5B$$
$$X'(0) = 1 \Rightarrow 5B = 1 \Rightarrow B = 1/5$$

la función es: $X'(t) = \frac{1}{5}\,\text{sen}(5t)$.

Problema 5

a.

$U(q) = q^3 - 6q^2 + 9q + 6$

$U'(q) = 3q^2 - 12q + 9$

$U'(q) = 0$ es equivalente a $3q^2 - 12q + 9 = 0$

$$q = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{6} = \frac{12 \pm 6}{6} = 3, 1$$

$U''(q) = 6q - 12$

$U''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 18 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow U(3)$ mínimo relativo

$U''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = 6 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow U(1)$ máximo relativo.

La utilidad de la empresa se maximiza cuando se venden 1000 seguros.

b. Utilidad máxima:

$U(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 6 = 1 - 6 + 9 + 6 = 10$

La utilidad máxima de la empresa es de 1 millón de dólares.