Prueba 3 Analisis abstracto 1

Diciembre 8, 2012

responda solo 4 problemas, tiempo = 3 horas

6,9

Muy Bien!

1. Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$
   (a) Pruebe que dado $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ tal que $\sum |c_k|^2 < \infty$ existe una única $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que
   $$c_k = < g, \varphi_k > \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|g\|_2^2 \quad (3p)$$
   (b) Suponga que el subespacio generado por los φ_n es denso en $L^2(\mathbb{R})$. Demuestre que la correspondencia $\ell^2(\mathbb{N}) \ni \{c_k\}_k \mapsto g \in L^2(\mathbb{R})$ es un isomorfismo isométrico. (3p)

   hint: considere $\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$

2. Suponga que $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ y denote $F(f)$ la transformada de Fourier de f
   (a) Demuestre rigurosamente que la convolución satisface
   $$F(f * g) = F(f)F(g) \quad (1p)$$
   (b) Si el producto $F(f) \cdot F(g)$ esta en $L^1(\mathbb{R})$, probar que
   $$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(f)F(g)e^{i\lambda t} d\lambda = (f * g)(t) \ , \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.5p)$$
   Establezca condiciones sobre f, g que garanticen ésta fórmula (1.5p)
   (c) Deduzca que para $a, b > 0$:
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{ab(a + b)} \quad (2p)$$

23,5 : 4 = 5,

3. Si $\varphi(x) = e^{-x^2}$, pruebe que $\varphi \in S_{\infty}$ (1p) y que la $n-$derivada $\varphi^{(n)}$ también está en S_{∞} (1p). Demuestre que si $f \in S_{\infty}$ entonces $F(f) \in S_{\infty}$. (2p) y que $F : S \to S$ es un homeomorfismo (2p)

4. Resuelva (1 p) la ecuación del calor
   $$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} w(t, x) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, x) \ , \ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \\ w(0, x) = h(x) \ , \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$
   Demuestre que, efectivamente, la función encontrada satisface la ecuación (2 p) y si $h \in L^1(\mathbb{R})$ la condición de borde:
   $$\lim_{t \to 0} w(t, x) = h(x) \quad (3 \text{ p})$$

5. Considere la ecuación integral en $u \in L^1(\mathbb{R})$
   $$u(t) = e^{-4|t|} + \beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|t-s|} u(s) ds \quad \beta > 0$$
   Demuestre que si $\beta \in (0, 2)$ existe (2p) una única (1p) solución en $L^1(\mathbb{R})$ y encuentrela (2p) ¿ por que no existe $u \in L^1(\mathbb{R})$ para todo β en $[2, 3]$? (1p)

① $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ SISTEMA ORTONORMAL EN $L^2(\mathbb{R})$

A) PD: DADO $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ TQ $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$

$\Rightarrow \exists!\, g \in L^2(\mathbb{R})$ TQ

$$c_k = \langle g, \varphi_k\rangle \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|g\|_2^2$$

D: DEFINIMOS $g_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$

NOTAMOS QUE $\|g_n\|_2^2 = \langle \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k , \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j \rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_k \overline{c_j} \overbrace{\langle \varphi_k, \varphi_j\rangle}^{\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$ (*)

A.1) PD: (g_n) ES DE CAUCHY EN $L^2(\mathbb{R})$

D: DADO $\varepsilon > 0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ TQ $\forall m \geq n_0$ $\sum_{k=m}^{\infty} |c_k|^2 < \varepsilon^2$ (PUES $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$)

LUEGO SI $n \geq m \geq n_0 \Rightarrow$

$$\|g_n - g_m\|_2^2 = \|\sum_{k=m}^{n} c_k\varphi_k\|_2^2 = \langle \sum_{k=m}^{n} c_k\varphi_k , \sum_{j=m}^{n} c_j\varphi_j\rangle = \sum_{j=m}^{n}\sum_{k=m}^{n} c_k\overline{c_j}\,\delta_{kj} = \sum_{k=m}^{n} |c_k|^2$$

$$\leq \sum_{k=m}^{\infty} |c_k|^2 < \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \|g_n - g_m\|_2 < \varepsilon \quad \forall\, n \geq m \geq n_0$$

LUEGO COMO $L^2(\mathbb{R})$ ES COMPLETO $\Rightarrow \exists\, g \in L^2(\mathbb{R})$ TQ $g_n \xrightarrow{L^2} g$

A.2) PD: SI $g_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k \xrightarrow{L^2} g \Rightarrow \|g\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$

D: NOTAR QUE $0 \leq \big|\|g_n\|_2 - \|g\|_2\big| \leq \|g - g_n\|_2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_2^2 = \|g\|_2^2$

$\to 0 \leftarrow$ $n \to \infty$

PERO POR (*) $\|g_n\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$

$$\Rightarrow \|g\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$$

A.3) PD: SI $g_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k \xrightarrow{L^2} g \Rightarrow c_k = \langle g, \varphi_k\rangle$

D: SEAN $a_k = \langle g, \varphi_k\rangle$

LUEGO

$$\|g - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\|_2^2 = \langle g - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k , g - \sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_j\rangle = \|g\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k \underbrace{\langle\varphi_k, g\rangle}_{\overline{a_k}} - \sum_{j=1}^{n} \overline{a_j}\langle g, \varphi_j\rangle + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_k \overline{a_j}\langle\varphi_k, \varphi_j\rangle$$

$$= \|g\|_2^2 - 2\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = \|g\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \|g\|_2^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$$

Por otro lado

$$\|g-g_n\|_2^2 = \|g - \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k\|_2^2 = \langle g - \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k , g - \sum_{j=1}^n c_j\varphi_j\rangle = \|g\|_2^2 - \sum_{k=1}^n c_k \overbrace{\langle\varphi_k, g\rangle}^{\bar{a}_k} - \sum_{k=1}^n \bar{c}_j \overbrace{\langle g,\varphi_k\rangle}^{a_k} + \sum_{k=1}^n |c_k|^2$$

y
$$\sum_{k=1}^n |c_k - a_k|^2 = \sum_{k=1}^n |c_k|^2 + |a_k|^2 - a_k\bar{c}_k - \bar{a}_k c_k$$
$$= \sum_{k=1}^n |c_k|^2 + \sum_{k=1}^n |a_k|^2 - \|g\|_2^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 + \|g-g_n\|_2^2$$
$$= \sum_{k=1}^n |a_k|^2 - \|g\|_2^2 + \|g-g_n\|_2^2 \qquad (1)$$

Haciendo $n \to \infty \Rightarrow$

$$0 \leq \sum_{k=1}^\infty |c_k - a_k|^2 = \sum_{k=1}^\infty |a_k|^2 - \|g\|_2^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^\infty |a_k|^2 \geq \|g\|_2^2$$

Pero por lo anterior $\sum_{k=1}^\infty |a_k|^2 \leq \|g\|_2^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^\infty |a_n|^2 = \|g\|_2^2$

y por (1) se tiene que

$$\sum_{k=1}^\infty |c_k - a_n|^2 = \sum_{k=1}^\infty |a_k|^2 - \|g\|_2^2 + 0 = 0$$

$\Rightarrow c_k = a_k$

luego $c_k = \langle g, \varphi_k\rangle$ y $\|g\|_2^2 = \sum_{k=1}^\infty |c_k|^2$

PD: dado $\{c_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathbb{C}$ tq $\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 < \infty$

$\Rightarrow \exists!\ g \in L^2(\mathbb{R})$ tq $c_k = \langle g, \varphi_k\rangle$ $\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 = \|g\|_2^2$

D: basta probar la unicidad

si $g, \bar{g} \in L^2(\mathbb{R})$ tq $c_k = \langle g, \varphi_k\rangle = \langle \bar{g}, \varphi_k\rangle$ y $\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 = \|g\|_2^2 = \|\bar{g}\|_2^2$

luego

$$0 \leq \|g-\bar{g}\|_2^2 = \int_{-\infty}^\infty |g-\bar{g}|^2 \leq 2^2\left(\int_{-\infty}^\infty |g - \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k|^2 + \int_{-\infty}^\infty |\bar{g} - \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k|^2\right)$$

$$= 4\left(\|g - \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k\|_2^2 + \|\bar{g} - \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k\|_2^2\right)$$

$$= 4\left(\underbrace{\|g\|_2^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \underbrace{\|\bar{g}\|_2^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}\right), \text{ ya que } c_n = \langle g, \varphi_n\rangle = \langle \bar{g}, \varphi_n\rangle$$

$$\Rightarrow \|g-\bar{g}\|_2^2 = 0 \Rightarrow g = \bar{g}$$

B) Sea $\psi : \ell^2(\mathbb{N}) \to L^2(\mathbb{R})$ tq $\psi(c_k) = g$ tq

$$c_k = \langle g, \varphi_k \rangle \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|g\|_2^2$$

PD: ψ es lineal e inyectiva.

D: Sean $(b_k), (c_k) \in \ell^2(\mathbb{N})$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Sea $f = \psi(b_k)$, $g = \psi(c_k)$

Por la unicidad $\sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k \xrightarrow{L^2} f$ y $\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \xrightarrow{L^2} g$

luego

$$0 \leq \left\| f+\lambda g - \left(\sum_{k=1}^{n} (b_k + \lambda c_k) \varphi_k \right) \right\|_2 \leq \underbrace{\left\| f - \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k \right\|_2}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 0} + |\lambda| \underbrace{\left\| g - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|_2}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 0}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (b_k + \lambda c_k) \varphi_k \xrightarrow{L^2} f + \lambda g$$

luego ~~para~~ como $(b_k + \lambda c_k) \in \ell^2(\mathbb{N})$

Por A.2 y A.3) se tiene que:

$$\| f+\lambda g \|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k + \lambda c_k|^2 \quad y \quad b_k + \lambda c_k = \langle f+\lambda g, \varphi_k \rangle$$

luego

$$f + \lambda g = \psi(b_k + \lambda c_k) = \psi(b_k) + \lambda \psi(c_k)$$

Como ψ es lineal basta probar que $\mathrm{Ker}\,\psi = \{0\}$ para probar que ψ es inyectiva

Si $(c_k) \in \mathrm{Ker}\,\psi \Rightarrow \psi(c_k) = 0$

$\Rightarrow 0 \in L^2(\mathbb{R})$ es la única función tq $c_k = \langle 0, \varphi_k \rangle$

y $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = 0$

$$\Rightarrow c_k = 0 \Rightarrow (c_k) = 0$$

PD: ψ es isometría.

D: Por linealidad:

$$\| \psi(a_k) - \psi(c_k) \|_2^2 = \| \psi(a_k - c_k) \|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - c_k|^2$$

$$\Rightarrow \| \psi(a_k) - \psi(c_k) \|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - c_k|^2 \right)^{1/2} \quad \text{isometría.}$$

PD: Ψ ES SOBREYECTIVA.

D: CONSIDEREMOS $\Psi_0 : \ell^2 \longrightarrow \Psi(\ell^2)$ ES UNA ISOMETRIA Y ES BIYECCION

COMO ℓ^2 ES COMPLETO $\Rightarrow$ $\Psi(\ell^2)$ ES COMPLETO.

NOTAR QUE $\langle \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rangle \subseteq \Psi(\ell^2) \subseteq L^2(\mathbb{R})$

COMO $\langle \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rangle$ ES DENSO EN $L^2(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $\Psi(\ell^2)$ ES DENSO EN $L^2(\mathbb{R})$

ADEMAS $\Psi(\ell^2)$ ES COMPLETO

COMO $L^2(\mathbb{R})$ ES COMPLETO $\Rightarrow$ $\Psi(\ell^2) = L^2(\mathbb{R})$ LUEGO Ψ ES SOBRE

POR SI ACASO:

PD: $\langle \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rangle \subseteq \Psi(\ell^2)$

D: SI $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \in \langle \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rangle$

$\Rightarrow C = (c_1, \dots, c_n, 0, 0, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N})$

Y $\langle S_n, \varphi_k \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j, \varphi_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \delta_{jk} = c_k$

Y $\|S_n\|_2^2 = \langle \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k, \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_k \overline{c_j} \delta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$

LUEGO $S_n = \Psi(C)$.

Scanned with CamScanner

(2) $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

A) PD: $F[f*g] = F[f]F[g]$

D: SI $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f*g| = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t)\, dt \right| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)||g(x-t)|\, dt\, dx$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{TONELLI}}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-t)|\, dx \right) |f(t)|\, dt$$

PERO $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-t)|\, dx \underset{\substack{u = x-t \\ du = dx}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|\, du = \|g\|_1 < \infty$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f*g| \leq \|g\|_1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty \quad \Rightarrow f*g \in L^1(\mathbb{R})$$

$$F[f*g](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t)\, dt \right) e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) e^{-i\lambda x}\, dt\, dx$$

POR TONELLI SE TIENE:

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(t) g(x-t) e^{-i\lambda x}|\, dt \times dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)||g(x-t)|\, dx\, dt$$

$$= \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty$$

LUEGO $f(t) g(x-t) e^{-i\lambda x}$ ES INTEGRABLE EN $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, LUEGO POR FUBINI

$$F[f*g](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) e^{-i\lambda x}\, dx\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x-t) e^{-i\lambda x} dx \right) f(t)\, dt$$

PERO

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x-t) e^{-i\lambda x} dx \underset{\substack{u = x-t \\ du = dx}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\lambda(u+t)} du = e^{-i\lambda t} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\lambda u} du = e^{-i\lambda t} F[g](\lambda)$$

$$\Rightarrow F[f*g](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} F[g](\lambda) f(t)\, dt = F[g](\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt = F[g](\lambda)\, F[f](\lambda)$$

$$\Rightarrow F[f*g] = F[f]F[g]$$

✓

8) PD: SI $F[f]\,F[g] \in L^1(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F[f]\,F[g]\, e^{i\lambda t}\, d\lambda = (f*g)(t)$$

D: SI $f*g$ SATISFACE DINI EN t $\forall t \in \mathbb{R}$

POR FORMULA DE INVERSION SE TIENE QUE

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F[f*g](\lambda)\, e^{i\lambda t}\, d\lambda = (f*g)(t)$$

PERO $F[f*g] = F[f]\,F[g] \Rightarrow (f*g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F[f]\,F[g]\, e^{i\lambda t}\, d\lambda$

Y ¿CÓMO SE TIENE?

B) ASUMIENDO QUE SI $F[f]F[g] \in L^1(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F[f]F[g]\, e^{i\lambda t}\, d\lambda = (f * g)(t)$$

· PARA QUE SE GARANTICE ESTA FORMULA BASTA BUSCAR CONDICIONES PARA QUE $F[f]F[g] \in L^1(\mathbb{R})$

OBVIAMENTE ES NECESARIO QUE $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

ADEMAS COMO $|F[g]| \leq \|g\|_1$ Y $|F[f]| \leq \|f\|_1$

BASTA QUE ALGUNA TRANSFORMADA $F[f] \in L^1(\mathbb{R})$ O $F[g] \in L^1(\mathbb{R})$

POR EN TAL CASO, DIGAMOS $F[f] \in L^1(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |F[f]\, F[g]| \leq \|g\|_1 \int_{-\infty}^{\infty} |F[f]| < \infty$$

PARA QUE $F[f] \in L^1(\mathbb{R})$ BASTA IMPONER QUE f' EXISTA Y QUE f' SEA ABS. CONTINUA Y QUE $f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$ PUES EN TAL CASO SE TIENE QUE

$$|F[f''](\lambda)| = |\lambda^2 F[f](\lambda)| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

ADEMAS $|F[f](\lambda)| \leq \|f\|_1$ Y $|F[f''](\lambda)| \leq \|f''\|_1$

LUEGO

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F[f](\lambda)|\, d\lambda = \int_{[-1,1]} |F[f](\lambda)|\, d\lambda + \int_{[-1,1]^c} |F[f](\lambda)|\, d\lambda$$

$$\leq 2\|f\|_1 + \|f''\|_1 \int_{[-1,1]^c} \frac{1}{|\lambda|^2}\, d\lambda$$

$$= 2\|f\|_1 + 2\|f''\|_1 \int_1^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2} < \infty$$

EN CONCLUSION :

SI $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ Y f ; g CUMPLEN QUE

$f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$ (v) $g', g'' \in L^1(\mathbb{R})$ Y MENOS DERIVABLE !

Y ABSOLUTA'/ CONT.

$\Rightarrow$ $F[f]F[g] \in L^1(\mathbb{R})$ Y SE VERIFICA TODO ?

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F[f]\, F[g]\, e^{i\lambda t}\, d\lambda = (f * g)(t)$$

Y COMO SE RESUELVE DINI !!

1,2/1,5

c) PD: $\forall a,b>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{ab(a+b)}$$

D: Sean $f(x) = e^{-a|x|}$, $g(x) = e^{-b|x|}$

$f, g \in L^1(\mathbb{R})$ pues

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f| = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|ax|}\,dx \overset{\substack{u=ax \\ du=a\,dx}}{=} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx = \frac{2}{a}\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \frac{2}{a} < \infty$$

Análogo para g.

Además $\underline{F[f](x) = \dfrac{2a}{a^2+x^2}}$ y $F[g](x) = \dfrac{2b}{b^2+x^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F[f](x)\, F[g](x)|\,dx = 4ab\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} \leq \frac{4ab}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{b^2+x^2} < \infty$$

Pues $a^2 \leq a^2+x^2 \Rightarrow \dfrac{1}{a^2+x^2} \leq \dfrac{1}{a^2}$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{b^2+x^2} < \infty$

$\therefore$ $F[f]\,F[g] \in L^1(\mathbb{R})$

Luego se tiene que

$$\underline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2a}{a^2+x^2}\right)\left(\frac{2b}{b^2+x^2}\right) e^{ixt}\,dx = (f*g)(t)}$$

Evaluando en $\underline{t=0}$ $\Rightarrow$ $\underline{(f*g)(0) = \dfrac{4ab}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}$

Pero

$$\underline{(f*g)(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(-t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}\cdot e^{-b|t|}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+b)|t|}\,dt = \underline{\frac{2}{a+b}}$$

, por el cálculo que hice para probar que $f \in L^1(\mathbb{R})$

Luego

$$\underline{\frac{4ab}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{2}{a+b}}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{ab(a+b)}$$

II) 5,7

$$\left|x^n f^{(m)}(x)\right| \leq C_{n,m}$$

$$\left|f^{(m)}(x)\right| \leq \frac{C_{n,m}}{|x^n|}$$

(3)

1) PD: $e^{-x^2} \in S_\infty$

2) PD: $(e^{-x^2})^{(n)} \in S_\infty$

3) PD: si $f \in S_\infty \Rightarrow F[f] \in S_\infty$

3) PD: $F: S_\infty \to S_\infty$ es homeomorfismo

1) PD: $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\exists H_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ tq $\partial H_n(x) = n$ y $(e^{-x^2})^{(n)} = H_n(x)\, e^{-x^2}$

D: Por inducción sobre n.

Para $k=0$ $\quad (e^{-x^2})^{(0)} = e^{-x^2}$ y $1 \in \mathbb{R}[x]$ tq $\partial(1) = 0$

Para $k=1$ $\quad (e^{-x^2})' = -2x\, e^{-x^2}$, $-2x \in \mathbb{R}[x]$ y $\partial(-2x) = 1$

Asumo para $k=n$ $\quad$ i.e. $\exists H_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ tq $\partial H_n(x) = n$ y $(e^{-x^2})^{(n)} = H_n(x)\, e^{-x^2}$

luego $\quad (e^{-x^2})^{(n+1)} = H_n'(x)\, e^{-x^2} - 2x H_n(x)\, e^{-x^2} = (H_n'(x) - 2x H_n(x))\, e^{-x^2}$

como $H_n(x)$ es polinomio $\Rightarrow H_n'(x)$ también lo es, además como $\partial H_n(x) = n$

$\Rightarrow \partial(x H_n(x)) = \partial x + \partial H_n(x) = n+1$

luego $(e^{-x^2})^{(n+1)} = H_{n+1}(x)\, e^{-x^2}$

donde $H_{n+1}(x)$ es polinomio de grado $n+1$ y se tiene la ecuación de recurrencia:

$$H_{n+1}(x) = H_n'(x) - 2x H_n(x)$$

PD: $e^{-x^2} \in C^\infty$

D: e^{-x^2} es composición de e^x y $-x^2$ ambas en C^∞

$\Rightarrow e^{-x^2} \in C^\infty$

PD: $\forall n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\exists\, C_{n,m} > 0$ tq $|x^m (e^{-x^2})^{(n)}| < C_{nm}$ $\forall x \in \mathbb{N}$

D: Sean $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow (e^{-x^2})^{(n)} = H_n(x)\, e^{-x^2}$

Digamos $H_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

$$\Rightarrow |x^m (e^{-x^2})^{(n)}| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| |x^{i+m}| e^{-x^2} \qquad (0)$$

Lema: $\forall\, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\exists M_r > 0$ tq $|x^r e^{-x^2}| < M_r$

D: ~~Si ... P~~

Cálculo

$$\lim_{|x|\to\infty} x^r e^{-x^2} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{x^r}{e^{x^2}} \overset{L'H}{=} \lim_{|x|\to\infty} \frac{r x^{r-1}}{2x\, e^{x^2}} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{r x^{r-2}}{(2)\, e^{x^2}}$$

L'H

$$= \lim_{|x|\to\infty} \frac{r(r-2)x^{r-4}}{2^{2}e^{x^2}} = \dots = \begin{cases} \lim_{|x|\to\infty} C\frac{1}{xe^{x^2}} = 0, & \text{SI } r \text{ ES IMPAR} \\ \lim_{|x|\to\infty} \overline{C}\frac{1}{e^{x^2}} = 0, & \text{SI } r \text{ ES PAR} \end{cases}$$

PARA CIERTAS CONSTANTES $C, \overline{C}$

LUEGO $\exists r_0 > 0$ TQ SI $|x| > r_0 \Rightarrow |x^r e^{-x^2}| < 1$

COMO $x^r e^{-x^2}$ ES CONTINUA EN $[-r_0, r_0]$ COMPACTO

$\Rightarrow x^r e^{-x^2}$ ACOTADA $\Rightarrow \exists M > 0$ TQ $|x^r e^{-x^2}| < M \ \forall x \in [-r_0, r_0]$

$$\Rightarrow |x^r e^{-x^2}| \leq \text{MAX}\{1, M\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

LUEGO OCUPANDO EL LEMA Y A PARTIR DE (1) SE TIENE QUE

$$|x^m (e^{-x^2})^{(n)}| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i| M_{i+m}\right) := C_{nm} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\therefore e^{-x^2} \in S_\infty$$

2) PD: $(e^{-x^2})^{(n)} \in S_\infty$

D: COMO $e^{-x^2} \in C^\infty \Rightarrow (e^{-x^2})^{(n)} \in C^\infty$ (TRIVIALMENTE)

ADEMAS DADOS $r, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ COMO $e^{-x^2} \in S_\infty$

$\Rightarrow \exists C_{r+n,m} > 0$ TQ $\underline{|x^m (e^{-x^2})^{(r+n)}| < C_{r+n,m}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow |x^m((e^{-x^2})^{(n)})^{(r)}| < C_{r+n,m} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

LUEGO $(e^{-x^2})^{(n)} \in S_\infty$

3) PD: si $f \in S_\infty \Rightarrow F[f] \in S_\infty$

D:

Lema: si $f \in S_\infty \Rightarrow \forall n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\quad x^n f^{(m)}(x) \in L^1(\mathbb{R})$

D: como $f \in S_\infty \Rightarrow \exists\, C_{n,m}, C_n > 0$ tq

$$|x^n f^{(m)}(x)| \leq C_{n,m} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{y } |x^{n+2} f^{(m)}(x)| \leq C_{n+2,m} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego si $x \in [-1,1]^c \Rightarrow |x^n f^{(m)}(x)| \leq \dfrac{C_{n+2,m}}{x^2}$

Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x^n f^{(m)}(x)|\,dx = \int_{[-1,1]} |x^n f^{(m)}(x)|\,dx + \int_{[-1,1]^c} |x^n f^{(m)}(x)|\,dx$$

$$\leq 2 \cdot C_{n,m} + C_{n+2,m} \int_{[-1,1]^c} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= 2\, C_{n,m} + 2\, C_{n+2,m} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < \infty$$

Recordar que:

si $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow F[f] \in C^\infty$ y $F[f]^{(n)} = (-i)^n F[x^n f(x)](\lambda)$

y si g es n veces derivable y $g^{(n)}$ abs. continua

$$\Rightarrow F[g^{(n)}] = (i\lambda)^n F[g]$$

~~Luego esto $\forall n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow$~~

~~$\lambda^m F[f]$~~

Luego por el lema como $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow F[f] \in C^\infty$

Notar que como $f \in C^\infty \Rightarrow x^n f(x) \in C^\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (i\lambda)^m F[x^n f(x)](\lambda) = F\left[\frac{d^m}{dx^m} x^n f(x)\right](\lambda)$$

Luego dados $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\Rightarrow |\lambda^m F[f]^{(n)}(\lambda)| = |(i\lambda)^m (-i)^n F[x^n f(x)](\lambda)| = \left|F\left[\frac{d^m}{dx^m}(x^n f(x))\right](\lambda)\right|$$

Notar que $\displaystyle \frac{d^m}{dx^m}(x^n f(x)) = \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{d^k}{dx^k} x^n\right) f^{(m-k)}(x) \binom{m}{k} = \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} \frac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k} f^{(m-k)}(x) \binom{m}{k}$

~~Por el lema $\forall k \in \{0, \dots, m\}$ $\exists C_k > 0$ tq $|x^{n-k} f^{(m-k)}(x)| < C_k$ $\forall x \in \mathbb{R}$~~

~~(Asumamos spg que $m \leq n$, en el otro caso el análisis es similar~~

~~sabiendo que al derivar ...)~~

Por lema $\forall k \in \{0, \dots, \min\{m,n\}\}$ $\quad x^{n-k} f^{(m-k)} \in L^1(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow |F[x^{n-k} f^{(m-k)}](\lambda)| \leq \| x^{n-k} f^{(m-k)}(x) \|_1$$

luego:

$$|x^m F[f]^{(n)}(\lambda)| \leq \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} \binom{m}{k} \frac{n!}{(n-k)!} |F[x^{n-k} f^{(m-k)}(x)](\lambda)|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} \binom{m}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \|x^{n-k} f^{(m-k)}(x)\|_1 = K_{n,m} > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$\therefore \quad F[f] \in S_\infty$

4) $F: S_\infty \to S_\infty$ es Homeomorfismo

D: si $f, g \in S_\infty \Rightarrow f, g \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f-g \in L^1(\mathbb{R})$

si $F[f] = F[g] \Rightarrow F[f-g] = 0 \Rightarrow f-g=0$ CTP $\Rightarrow f=g$ CTP

como f, g continuas $\Rightarrow f=g$

$\therefore$ F es inyectiva.

si $g \in S_\infty$ sea $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = F[g](x) \Rightarrow f \in S_\infty$

luego $f^*(x) = \dfrac{f(-x)}{2\pi} \in S_\infty$

Por otro lado como g es derivable $\Rightarrow g$ satisface Dini en λ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

luego por formula de inversion

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx \quad , \quad u = -x, \; du = -dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(-u) e^{-i\lambda u} du = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(u) e^{-i\lambda u} du = F[f^*](\lambda)$$

$\therefore$ $g = F[f^*]$, con $f^* \in S_\infty$ luego F es sobreyectiva. $\therefore$ F biyeccion

Notar que debido a la formula de inversion $F^{-1}: S_\infty \to S_\infty$ esta dada por:

$$F^{-1}[g](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

SI CONSIDERAMOS S_∞ CON MÉTRICA $\|\cdot\|_2$

COMO $S_\infty \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

SE TIENE QUE $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|g\|_2^2$ POR PLANCHEREL

LUEGO $\|f-g\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|F[f] - F[g]\| \quad \forall f, g \in S_\infty \quad (1)$

LUEGO DADO $\varepsilon > 0$ SEA $\delta = \varepsilon / \sqrt{2\pi}$

SI $\|f-g\|_2 < \delta \Rightarrow \|F[f] - F[g]\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f-g\|_2 < \sqrt{2\pi}\,\delta = \sqrt{2\pi}\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} = \varepsilon$

$\therefore$ F ES CONTINUA.

DE (1) SE TIENE TAMBIÉN QUE

$$\|F^{-1}[f] - F^{-1}[g]\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f-g\|_2 \quad \forall f, g \in S_\infty$$

LUEGO DADO $\varepsilon > 0$ SEA $\delta = \sqrt{2\pi}\,\varepsilon$

SI $\|f-g\|_2 < \delta \Rightarrow \|F^{-1}[f] - F^{-1}[g]\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f-g\|_2 < \frac{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} = \varepsilon$

$\therefore$ F^{-1} CONTINUA.

1,8/2 ???

4/ 5,8

PD: Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ tq $\underline{F[f] = 0} \Rightarrow \underline{f = 0 \text{ CTP}}$

D: Considerar $\varphi(x) = \int_0^c f(x+t)\,dt$

PD: φ es abs. continua en todo intervalo $[a,b]$

D: Notar que $\varphi(x) = \int_0^c f(x+t)\,dt = \int_x^{c+x} f = \int_a^{c+x} f - \int_a^x f$

como f integrable $\Rightarrow$ φ es resta de funciones abs. continuas, luego abs. continua.

PD: $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$

D: $$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\,dx \leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^c |f(x+t)|\,dt\,dx \underset{\uparrow \text{ Tonelli}}{=} \int_0^c \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)|\,dx\,dt = c\int_{-\infty}^{\infty}|f| < \infty$$

PD: $F[\varphi] := \hat{\varphi} \equiv 0$

D: $$F[\varphi](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^c f(x+t)\,e^{-i\lambda x}\,dt\,dx =$$

Notar que por Tonelli: $$\int_{\mathbb{R}\times[0,c]} |f(x+t)\,e^{-i\lambda x}|\,dt \times dx = \int_0^c\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)|\,dx\,dt = c\int_{-\infty}^{\infty}|f| < \infty$$

Luego por Fubini:

$u = x+t$
$du = dx$

$$F[\varphi](\lambda) = \int_0^c \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,e^{-i\lambda x}\,dx\right)dt$$

$$= \int_0^c \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-i\lambda u}\,du}_{0}\right) e^{i\lambda t}\,dt = 0$$

PD: $\varphi \equiv 0$

D: φ abs. continua $\Rightarrow$ φ derivable CTP $\Rightarrow$ φ cumple Dini CTP

$$\Rightarrow \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F[\varphi](\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda = 0 \quad \text{CTP}$$

φ continua $\Rightarrow$ $\varphi \equiv 0$

$$\therefore \varphi(0) = \int_0^a f(t)\,dt = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{f = 0 \text{ CTP}}$$

(5) CONSIDERAR LA ECUACION INTEGRAL:

$$u(t) = e^{-4|t|} + \beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|t-s|} u(s)\,ds \quad , \beta > 0 \qquad (*)$$

1) PD: SI $\beta \in (0,2) \Rightarrow$ HAY UNA UNICA SOLUCION PARA $(*)$ $u \in L^1(\mathbb{R})$

2) ENCONTRAR $u \in L^1(\mathbb{R})$ TQ $(*)$ SI $\beta \in (0,2)$

3) ¿POR QUE NO $\exists\, u \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall \beta \in [2,3]$?

1) CONSIDERAMOS LA TRANSFORMACION $T: L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ DEFINIDO POR:

$$T[u](t) = e^{-4|t|} + \beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|t-s|} u(s)\,ds$$

PD: T ESTA BIEN DEFINIDO (i.e. $T[u] \in L^1(\mathbb{R})$ SI $u \in L^1(\mathbb{R})$)

D: SI $u \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |T[u]| \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|t|} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|t-s|} |u(s)|\,ds\right) dt$$

$$\underset{\text{TONELLI}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|t|} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|t-s|} dt\right) |u(s)|\,ds$$

NOTAR QUE: $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|t-s|} dt \underset{\substack{u = t-s \\ du = dt}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|u|} du$$

ADEMAS: $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|t|} dt \underset{\substack{u = 4t \\ du = 4dt}}{=} \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|u|} du = \frac{2}{4}\int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{1}{2}\, e^{-u}\Big|_{\infty}^{0} = \frac{1}{2}$$

LUEGO $$\int_{-\infty}^{\infty} |T[u]| \leq \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |u(s)|\,ds < \infty \quad , \text{ PUES } u \in L^1(\mathbb{R})$$

PD: T ES CONTRACTIVO SI $\beta \in (0,2)$

D: $$\int_{-\infty}^{\infty} |T[u] - T[v]| = \beta \int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|t-s|} (u(s) - v(s))\,ds\right| dt$$

$$\leq \beta \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|t-s|} |u(s) - v(s)|\,ds\,dt$$

$$\underset{\uparrow}{=} \beta \int |u(s) - v(s)| \left(\int_{-\infty} e^{-4|t-s|} dt\right) ds = \frac{\beta}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |u(s) - v(s)|\,ds$$

Luego
$$\| T[u] - T[v] \|_1 \leq \frac{\beta}{2} \|u - v\|_1$$

Como $0 < \beta < 2 \Rightarrow 0 < \frac{\beta}{2} < 1 \Rightarrow T$ es contractivo

Luego por Teorema de Punto Fijo de Banach (pues $L^1(\mathbb{R})$ es completo)

se tiene que $\exists! \; u \in L^1(\mathbb{R})$ tq $T[u] = u$ i.e.

$$\therefore \; u(t) = e^{-4|t|} + \beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|t-s|} u(s)\, ds \quad , \text{ si } \beta \in (0,2)$$

2) Sea $u \in L^1(\mathbb{R})$ tq $u(t) = e^{-4|t|} + \beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|t-s|} u(s)\, ds \quad , \beta \in (0,2)$

Aplicamos transformada F

$$F[u](\lambda) = F[e^{-4|t|}](\lambda) + \beta F[e^{-4|t|} * u](\lambda) \qquad (1)$$

Como $u, e^{-4|t|} \in L^1(\mathbb{R})$ se tiene que

$$F[e^{-4|t|} * u](\lambda) = F[e^{-4|t|}](\lambda) \, F[u](\lambda)$$

Recordamos que
$$F[e^{-4|t|}](\lambda) = \frac{2 \cdot 4}{4^2 + \lambda^2} = \frac{8}{\lambda^2 + 16}$$

Luego de (1) se tiene que

$$F[u](\lambda) = \frac{8}{\lambda^2 + 16} + \beta F[u](\lambda) \cdot \frac{8}{\lambda^2 + 16}$$

$$\Rightarrow (\lambda^2 + 16) F[u](\lambda) = 8 + 8\beta F[u](\lambda)$$

$$\Rightarrow (\lambda^2 - 8\beta + 16) F[u](\lambda) = 8 \Rightarrow F[u](\lambda) = \left(\frac{8}{\lambda^2 - 8\beta + 16} \right) \qquad (2)$$

Luego
$$F[u](\lambda) = \frac{8}{\lambda^2 + (\sqrt{16 - 8\beta})^2} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{16-8\beta}}{\sqrt{16-8\beta}\,(\lambda^2 + (\sqrt{16-8\beta})^2)}$$

Recordando que
$$F[e^{-\gamma|x|}](\lambda) = \frac{2\gamma}{\lambda^2 + \gamma^2}$$

$$\Rightarrow F[e^{-\sqrt{16-8\beta}\,|x|}](\lambda) = \left(\frac{2\sqrt{16-8\beta}}{\lambda^2 + (\sqrt{16-8\beta})^2} \right)$$

$$\Rightarrow F[u](\lambda) = F\left[\frac{4}{\sqrt{16-8\beta}} e^{-\sqrt{16-8\beta}\,|x|} \right](\lambda)$$

$$\Rightarrow \quad F\left[u(x) - \frac{4}{\sqrt{16-8\beta}}\, e^{-\sqrt{16-8\beta}\,|x|} \right] = 0$$

Como $u(x) - \frac{4}{\sqrt{16-8\beta}}\, e^{-\sqrt{16-8\beta}\,|x|} \in L^1(\mathbb{R})$ (diferencia de dos funciones en $L^1(\mathbb{R})$)

$$\Rightarrow \quad u(x) = \frac{4}{\sqrt{16-8\beta}}\, e^{-\sqrt{16-8\beta}\,|x|}$$

3) Para $\beta \in [2,3]$ supongamos que $\exists\, u \in L^1(\mathbb{R})$ tal que satisface $(*)$

Luego realizando el mismo cálculo previo obtenemos por (2) que:

$$F[u](\lambda) = \frac{8}{\lambda^2 - 8\beta + 16} = \frac{8}{\lambda^2 - (8\beta - 16)} = \frac{8}{\lambda^2 - (\sqrt{8\beta-16})^2}$$

Como $\beta \geq 2 \Rightarrow 8\beta \geq 16 \Rightarrow (8\beta - 16) \geq 0$

En particular se tiene que

$$\lim_{\lambda \to \sqrt{8\beta-16}} F[u](\lambda) = \infty$$

Luego $F[u](\lambda)$ no es acotada y no es continua en $\mathbb{R}$!!

Pero como $u \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow |F[u](\lambda)| \leq \|u\|_1$ acotada $\Rightarrow\Leftarrow$

(b) Defina f_y la función dada por $f_y(x) = f(x-y)$ y $T : \mathbb{R} \longrightarrow L^1(\mathbb{R})$ por $T(y) = f_y$. Demuestre que T es una función uniformemente continua. 3,5

V) Sea A un conjunto medible. Se dice que un conjunto $V \subseteq L^1(A)$ es uniformemente integrable si , y sólo si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \int_E f \right| < \epsilon$$

para $f \in V$ y $mE < \delta$.

Suponga $mA < \infty$.

(a) Demuestre el siguiente Teorema de Vitali: Si $\{f_n\}$ es uniformemente integrable, $f_n \to f$ c.t.p. y f es finita c.t.p. Entonces $f \in L^1(A)$ y $f_n \to f$ en $L^1(A)$. ¿Vale si $A = \mathbb{R}$? (3

(b) Lo mismo ocurre si $f_n \in L^1(A)$, $f_n \to f$ c.t.p. y existen $p > 1$ y constante $c > 0$ tal que $\|f_n\|_p \leq c$ para todo n. (3)

ANÁLISIS III

Prueba N°2

Junio 02, 2007

Tiempo: 3 hrs.

I)

(a) Sea $r(x) = \ln([x^{-1}])$, $x \in (0,1]$, donde $[\cdot]$ denota la función parte entera. Demuestre que r es Lebesgue integrable y calcule su integral [2,5 pts.] ¿Es integrable Riemann? [0,5 pts.]

(b) Demuestre que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible y $|f|$ es impropiamente Riemann integrable, entonces f es integrable Lebesgue y ambas integrales coinciden [2,5 pts.]. ¿Y si quitamos el valor absoluto? [0,5]

II) Sea $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable Lebesgue. Defina

$$\varphi(x) = \int_0^1 e^{-x/y} f(y)dy, \; x \in (0,1)$$

Demuestre que φ es continua [3,5 pts.]. Estudie y demuestre, bajo que condiciones es derivable. [2,5 pts.]

III)

(a) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Demuestre que existe una única [3 pts.] función absolutamente continua x tal que $x'(t) = f(t)$ c.t.p. y $x(0) = 1$. Demuestre que $x(t)$ converge cuando $t \to \pm\infty$. [1 pt.]

(b) Decida si el teorema fundamental del cálculo es válido en todo $[0,1]$, para una función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en todas partes, que lo satisface en $[\epsilon, 1]$, $\forall \epsilon > 0$, y $f' \in L^1([0,1])$. [3 pts.] Ayuda: Considere $f(x) = x^2 \mathrm{sen}(x^{-\alpha})$, $f(0) = 0$, $\alpha > 0$.

IV) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(a) Demuestre que dado $\epsilon > 0$, existe ψ una función continua con soporte compacto (i.e. $\psi \neq 0$ en un conjunto compacto) tal que $\|f - \psi\|_1 < \epsilon$. [2,5]

y que

$$\lim_{n\to\infty}\int_A |f_n - f| = 0 (1{,}5 \text{ pts}) \text{ ssi } \lim_{n\to\infty}\int_A |f_n| = \int_A |f| (0{,}5 \text{ pts})$$

¿Es esto cierto para la integral de Riemann? (1 pto)

V) (a) Demuestre que si $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función absolutamente continua, entonces $v(A)$ es de medida cero si A es de medida cero (1 pto). ¿Vale esto para v sólo continua? (1 pto)

(b) Demuestre que $u(t) = e^{\int_0^t a(s)ds}$ es absolutamente continua en $[0,1]$ si $a \in L^1([0,1])$ (1,5 pts). Considere $b \in L^1([0,1])$ y la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y'(t) &= a(t)y(t) + b(t), \text{c.t.p} \\ y(0) &= 2 \end{aligned}$$

Demuestre que existe (1,5 pts) una única (1 pto) solución de esta ecuación.

VI) Sea A un conjunto medible. Se dice que un conjunto $V \subsetneq L^1(A)$ es uniformemente integrable si y sólo si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \int_E f \right| < \epsilon$$

para $f \in V$ y $mE < \delta$
Suponga $mA < \infty$

(a) Demuestre el siguiente Teorema de Vitali: Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniforme~~mente integrable, $f_n \to f$ c.t.p. y f es finita c.t.p. Entonces~~ $f \in L^1(A)$ y $f_n \to f$ en $L^1(A)$. (3 pts) ¿Vale si $A = \mathbb{R}$? (1 pto) $\frac{1}{n}\chi_{[1,n]}$

(b) Lo mismo ocurre si $f_n \in L^1(A)$, $f_n \to f$ c.t.p. y existen $p > 1$ y constante $c > 1$ tal que $\|f_n\|_p \leq c$ para todo n (2 pts).

4. Demuestre que:

(a) [2] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{|x|}$ es una función cerrada. [0.5] ¿Es una función abierta?

(b) [3] La proyección $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\pi_1(x, y) = x$ es una función abierta. [0.5] ¿Es cerrada?

5. Sean $k > 0$ y $A \subseteq (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ el conjunto formado por las funciones $f \in C([0,1])$ tales que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ para todo $x, y \in [0,1]$ y $\|f\|_\infty \leq 1$. [3] ¿Es A totalmente acotado? [2] ¿Relativamente compacto? [1] ¿Compacto? Justifique sus respuestas.

6. Responda justificando:

Ilt
1 Pto.

- (a) [1] ¿Cuáles son las bolas compactas en $(\mathbb{I}, |\cdot|)$, donde $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? 1
- (b) [1.5] ¿La recta real ampliada $\overline{\mathbb{R}}$ es compacta? [1] ¿Y $\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$? 1,5
- (c) [1.5] ¿En $\mathbb{R}$ las distancias $d(x,y) = |x - y|$ y $d_3(x,y) = |x^3 - y^3|$ son equivalentes? ¿Son uniformemente equivalentes?
- (d) [0.5] ¿Totalmente acotado implica separable? [0.5] ¿Y el recíproco?

$\mathbb{I}$: $[a,b] \cup [c,d]$.

$id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta = \quad > 0$ tq $|x - (x+\alpha)| = |\alpha| <$

$\Rightarrow |x^3 - (x+\alpha)^3| < \varepsilon$

$|x^3 - (x+\alpha)^3| = |x - (x+\alpha)|\,|x^2 + x(x+\alpha) + (x+\alpha)^2|$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{k}{2}}$

Universidad de Chile

2da Prueba
Análisis II
30 de octubre, 2004

Prof.: Sr. Manuel Pinto.
Ayudante: Jaime Concjeros.
Tiempo: 3.5 horas.

$f(x) = x^{e^x}$

Escoger 5 problemas de entre los siguientes 6:

1. (a) Sea A un conjunto abierto en un espacio vectorial normado. [2] Demuestre que A es conexo si y solamente sí es poligonalmente conexo. [0.5] ¿Qué sucede si A no es abierto?

   (b) Considere el conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^2$ formado por los gráficos de las funciones $\varphi_n(t) = nt(1-t)^n$, $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. [2.5] Decida si los siguientes conjuntos son conexos: C, $B = C \cup \{(0,e^{-1}),(0,\frac{1}{3})\}$ y $B \setminus \{(0,0),(1,0)\}$. [1] ¿Cuáles de ellos son arco-conexos? Justifique sus respuestas.

2. Sea $\widehat{\ell}_\infty$ el espacio de las sucesiones reales acotadas, dotado de la métrica

$\hat{\ell}_\infty = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\} \text{ tq. } \sum \frac{|x_k|}{2^k} < \infty$, $\|x\| < \infty$

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k},$$

donde $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

$e_i = (0, 0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ → i-ésimo lugar.

(a) Sea $A = \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ la *"base canónica"* de $\widehat{\ell}_\infty$. [1.5] Demuestre que A es totalmente acotado. [2.5] Decida si $B[0,1]$ es totalmente acotada. Justifique sus respuestas.

(b) [2] Demuestre que $\widehat{\ell}_\infty$ no es completo. $\left(x^n_k = \left(\frac{3}{2}\right)^k\right)$ con $k \leq n$.

$x_1 \quad x_2 \ldots x_3 \ldots$

3. Sea $\widehat{\ell}_\infty$ el espacio definido en el ejercicio anterior. Conteste justificando:

   (a) [4] ¿Cuál es la completación de $\widehat{\ell}_\infty$?

   (b) [1.5] ¿En $\widehat{\ell}_\infty$ vale el criterio *compacto si y solo si cerrado y acotado*? [0.5] En caso contrario, ¿qué faltaría? Justifique.

$\sum \frac{k}{2^k} < \infty$

4. Demuestre que:

1

(a) [2] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{|x|}$ es una función cerrada. [0.5] ¿Es una función abierta?

1

(b) [3] La proyección $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\pi_1(x, y) = x$ es una función abierta. [0.5] ¿Es cerrada?

5. Sean $k > 0$ y $A \subseteq (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ el conjunto formado por las funciones $f \in C([0,1])$ tales que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ para todo $x, y \in [0,1]$ y $\|f\|_\infty \leq 1$. [3] ¿Es A totalmente acotado? [2] ¿Relativamente compacto? [1] ¿Compacto? Justifique sus respuestas.

6. Responda justificando:

Slt

- (a) [1] ¿Cuáles son las bolas compactas en $(\mathbb{I}, |\cdot|)$, donde $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? 1

1 Tlo.

- (b) [1.5] ¿La recta real ampliada $\overline{\mathbb{R}}$ es compacta? [1] ¿Y $\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$? 1,5
- (c) [1.5] ¿En $\mathbb{R}$ las distancias $d(x,y) = |x - y|$ y $d_3(x,y) = |x^3 - y^3|$ son equivalentes? ¿Son uniformemente equivalentes?
- (d) [0.5] ¿Totalmente acotado implica separable? [0.5] ¿Y el recíproco? 0 7

$\sqrt{}$: $[a,b] \cup [c,d]$.

id : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta = \quad > 0$ tq $|x - (x+\alpha)| = |\alpha| <$

$\Rightarrow |x^3 - (x+\alpha)^3| < \varepsilon$

$|x^3 - (x+\alpha)^3| = |x - (x+\alpha)|\,|x^2 + x(x+\alpha) + (x+\alpha)^2|$

$\left(\sum |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |y_i|^p\right)^{1/p}$

Prueba N° 2 Analisis II

Responda sólo 4 problemas. Tiempo: 3 horas. Septiembre 27, 2008.

I) Responda justificando:

a) ¿ Cuáles son la bolas compactas $(I; |\cdot|)$ $(I = \mathbb{R} - \mathbb{Q})$(1 pto.)

b) ¿ En ℓ_2, el cubo de Hilbert $C = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \mid |x_i| \le \frac{1}{i}\}$ es compacto? (1.5 ptos.).

c) ¿En $\mathbb{R}$, las distancias $d(x, y) = |x - y|$ y $d_3(x, y) = |x^3 - y^3|$ son equivalentes? (1pto.) ¿Son uniformemente equivalentes? (0.5 ptos.)

d) De las siguientes propiedades: separabilidad, completitud, total acotación y compacidad, ¿Cuáles se preservan por homeomorfismo o isometría? (2=0.5 x 4 ptos.)

II) Demuestre que:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -1 + (x - 1)^2$ es una función cerrada (2 ptos.) y no abierta (0.5 ptos.)

b) La proyección $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi_1(x, y) = x$ es una función abierta (2 ptos.) que no es cerrada (0.5 ptos.). Extienda a $E_1 \times E_2$, (E_i, d_i) espacios métricos $(i = 1, 2)$ (1 pto.)

III) Sea $\bar{d}(x, y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$ para $x, y \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, la recta ampliada. Considere el espacio métrico $(\bar{\mathbb{R}}, \bar{d})$. Demuestre que :

~~a) $\bar{\mathbb{R}}$ es completo (2 ptos).~~

b) $\bar{\mathbb{R}}$ es compacto (2 ptos).

c) $\mathbb{R}$ en $\bar{\mathbb{R}}$, es relativamente compacto (1 pto.) y $\bar{\mathbb{R}}$ es $\hat{\mathbb{R}}$ ($\hat{\mathbb{R}}$ la completación de $\mathbb{R}$ con respecto a $\bar{d}$) (1 pto.)

IV) Sea $p \in [1, \infty)$. Demuestre que un conjunto $A \subset \ell_p(\mathbb{C})$ es compacto en $\ell_p(\mathbb{C})$ (2.5 ptos.) sí y sólo si A es cerrado, acotado y equiconvergente (2.5 ptos.), esto es, para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=N}^{\infty} |x_i|^p \leq \epsilon \;\; \forall x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in A.$$

¿Vale el correspondiente resultado para $p = \infty$?(1 pto.)

V) Sean E el espacio de sucesiones reales acotadas, dotado de la métrica

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{k^2}, x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}, y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$$

y

$$V = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \; : \; x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i < \infty \mid d(x, 0) < \infty\}.$$

Demuestre que E no es completo (1 pto.). Demuestre que V es completo (2.0 ptos.) y que E es denso en V (2.0 ptos.). Demuestre que V es la completación de E (1 pto.).

Segunda Prueba de Análisis III

Sabado 28 de Junio del 2008
Resuelva 5 de los 6 problemas

a) Sea $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ la función dada por $\varphi(x) = x^{2008}$ si $x \in C$, el conjunto de Cantor y $\varphi(x) = 2^{-k}$ para x en los intervalos de largo 3^{-k} que han sido removidos de $[0,1]$. Demuestre que $\varphi \in L^1([0,1])$ (i.e. integrable en el sentido de Lebesgue) (2,5 pts.) y que $\int\limits_{[0,1]} \varphi = \frac{1}{4}$ (0,5 pts.)

(b) Suponga que $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ es una función medible para la cual $|f|$ es impropiamente integrable en el sentido de Riemann . Demuestre que f es integrable en el sentido de Lebesgue (i.e. $f \in L^1[(0,\infty)]$) (2,5 pts.). ¿Y si quitamos el valor absoluto? (0,5 pts.).

II) Defina $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-tx^2}\, dx.$$

Pruebe que φ es continua (2,5 pts), diferenciable (2 pts) y que satisface la ecuación diferencial

$$\varphi'(t) = -\frac{\varphi(t)}{2t}, t > 0 \text{(1 pto).)}$$

Deduzca que $\varphi(t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}}$ (0,5 pts).

III) Consider $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función integrable. Pruebe que g es finita c.t.p. (2 pts) y

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} |g(x+t^2) - g(x)|\, dx = 0, \text{ (4 pts)}$$

IV) Sean $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible; $g_n \in L^1[A]$, $g_n \to g$ c.t.p.; f_n, f funciones medibles, $f_n \to f$ c.t.p., $|f_n| \leq |g_n|$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f, \text{ (3 pts.)}$$

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Curso: Análisis III, Otoño 2009
Profesor: Manuel Pinto
Ayudante: Patricio Quiroz H.

Prueba 2

Resuelva 4 de los 5 problemas 6 Junio, 2009

1. (a) Para $x \in \mathbb{R}$, sea $[x]$ su parte entera (*i.e.* $[x] \in \mathbb{Z}$ y $[x] \le x < [x] + 1$). Sea $\varphi : (0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $\varphi(x) = ([x^{-1}])^{1/2009}$. Demuestre que $\varphi \in L^1([0,1])$ y calcule $\int_{[0,1]} \varphi$. [2,5 pts.] ¿Es integrable Riemann? [0,5 pts.].

   (b) Suponga que $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función medible para la cual $|f|$ es impropiamente integrable en el sentido de Riemann. Demuestre que f es integrable en el sentido de Lebesgue [2,5 pts.]. Y si quitamos el valor absoluto? [0,5 pts.].

2. Para $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable en el sentido de Lebesgue, defina $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$h_n \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}$

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) h(x) dx.$$

Pruebe que φ es continua [3 pts.]. Encuentre una condición [1 pt.] que permita que φ sea derivable y demuestre su derivabilidad [2 pts.].

3. Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable y $g_t(x) = g(tx)$.

   (a) Para $t \neq 0$, pruebe que $g_t \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = t \int_{\mathbb{R}} g_t(x) dx. \quad [2,5 \text{ pts.}].$$

   (b) Pruebe que

$$\lim_{t \to 1} \int_{\mathbb{R}} | g_t(x) - g(x) | dx = 0, [3,5 \text{ pts.}].$$

4. (a) Demuestre que si $v : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que es absolutamente continua en todo $[0, \varepsilon]$ con $\varepsilon < 1$, entonces v es absolutamente continua en [0,1] [2 pts.]. Vale esto para v sólo continua? [1 pt.]

   (b) Sea $u_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones absolutamente continuas con $u_n(a) = 0$. Suponga que sus derivadas $\{u_n'\}_{n=1}^{\infty}$ forman una sucesión de Cauchy en $L^1([a,b])$. Demuestre que existe u absolutamente continua en $[a,b]$ [2 pts.] tal que $u_n \longrightarrow u$ uniformemente en $[a,b]$ [1 pt.].

5. Sea A un conjunto medible. Se dice que un conjunto $V \subseteq L^1(A)$ es uniformemente integrable si y sólo si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_E |f| < \varepsilon$$

para $f \in V$ y $mE < \delta$.
Suponga $mA < \infty$

   (a) Demuestre el siguiente Teorema de Vitali: Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente integrable, $f_n \longrightarrow f$ *c.t.p.* y f es finita c.t.p. Entones $f \in L^1(A)$ y $f_n \to f$ en $L^1(A)$. [3 pts.].

   (b) Lo mismo ocurre si $f_n \in L^1(A)$, $f_n \longrightarrow f$ *c.t.p.* y existen $p > 1$ y constante $c > 0$ tal que $\|f_n\|_p \leq c$ para todo n [3 pts.].

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Curso: Análisis II, Primavera 2009
Profesor: Manuel Pinto
Ayudante: Patricio Quiroz H.

Prueba 2

Noviembre 4, 2009

Resuelva 4 de los 5 problemas.

1. Para $h \in L^1(\mathbb{R})$, defina $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx^2} h(x)dx.$$

Pruebe que φ es continua [2 pts.]. Encuentre una condición [1 pt.] que permita que φ sea derivable y demuestre su derivabilidad [3 pts.].

2. (a) Sea f integrable sobre $E \subset \mathbb{R}$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe una función simple φ tal que

$$\int_E |f - \varphi| < \varepsilon [2,5 \text{ pts.}]$$

(b) Sea $\{E_n\} \subset \mathbb{R}$ sucesión de conjuntos medibles. Demuestre que son equivalentes:
i) $\forall A \subset \mathbb{R}$ medible de medida finita,

$$\lim_{n\to\infty} m(A - E_n) = 0 [1 \text{ pts.}]$$

ii) $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$f\chi_{E_n} \to f \text{ en } L^1(\mathbb{R}) [2,5 \text{ pts.}]$$

[Hint: use (a)] (i) ⇒ (ii)

3. (a) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pruebe que

$$\lim_{x\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(t)dt = 0 [3{,}5 \text{ pts.}]$$

(b) Deduzca que, $\forall A \subset \mathbb{R}$ medible de medida finita $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_A \sin(\alpha t + \beta)dt = 0$$

[2 pts.] ¿Vale para $A = \mathbb{R}$?[0,5 pts.]

4. (a) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Demuestre que existe una única [3 pts.] función absolutamente continua x tal que (*) $x'(t) = f(t)$ c.t.p. y (**) $x(0) = 1$. Demuestre que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ existe una única x, solución de (*) tal que $x(t) \to \alpha$ cuando $t \to \infty$[1 pts.].

(b) Demuestre que, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función absolutamente continua, entonces $f(A)$ es de medida cero si A es de medida cero[1 pt.].¿Vale esto para f sólo continua?[1 pt.].

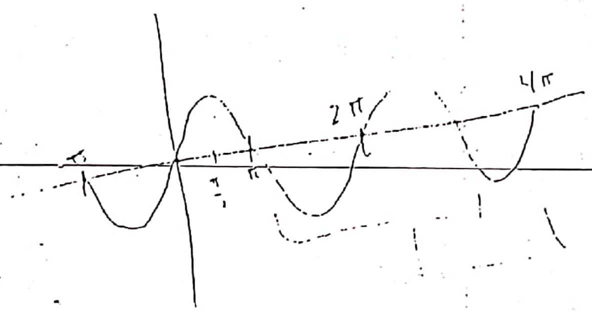
0

5. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles en $\mathbb{R}$ tal que $f_n \to f$ c.t.p. en $\mathbb{R}$. Demuestre que $\forall A \subset \mathbb{R}$ medible de medida finita se tiene $f_n \to f$ en $L^1(A)$ si alguna de las condiciones i) o ii) se satisface: (pruebe asumiendo sólo una de ellas)

0 i) $\int_{\mathbb{R}} (1 + x^2)^p |f_n|^p \leq 2009 \ \forall p > 1$

0 ii) $\int_B |f_n| \leq \int_B e^{-x^2} dx \ \forall B \subset \mathbb{R}$ medible.

$[2\pi, 4\pi]$



2π, 4π

0,

Analisis Real

Prueba 1

12-Mayo-2012

Responda 4 de las 5 preguntas.

1. (a) i. Demuestre que un intervalo ~~abierto~~ en $\mathbb{R}$ no se puede escribir como unión disjunta de abiertos. (1,5 p)

   ii. Considere la sucesión de funciones $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_n(t) = \sqrt[n]{t^2 - t^4}$$

   ¿Es una sucesión de Cauchy con respecto a $\|\cdot\|_\infty$? (0.5 p)
   ¿Es una sucesión de convergente respecto a $\|\cdot\|_1$? (1 p)

   (b) Considere $\mathbb{R}^n$ con la norma euclideana $\|(x_1, ..., x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$.

   i. ¿ Es $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}(\overset{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{2}}}))^n$ es separable? (justifique) (1 p)

   ii. Dado $r > 0$, demuestre que $\overline{B(x, r)} = B[x, r]$ (1 p)
   ¿Ocurre lo mismo en un espacio normado arbitrario?(0.5 p)
   ¿Y en un espacio métrico arbitrario? (0.5 p)

2. Sea c el espacio vectorial de las sucesiones reales $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes, dotado de la métrica del supremo. Considere c_π el conjunto de las sucesiones ~~racionales~~ casi π (es decir, $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_\pi$ si y sólo si $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = \pi$ $\forall n \geq N$ y $x_n \in \mathbb{Q}$ $\forall n < N$) Grua

   (a) ¿Es c_π abierto en c?. Encuentre los puntos de acumulación de c_π en c. (3 p)

   (b) Demuestre que c es completo. (3 p)

3. Sea $\hat{c}$ el conjunto de todas las sucesiones reales $z = \{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ para las cuales existe $r_z \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k - r_z|^{3/2} < \infty$. Defina

$$\|z\| = |r_z| + \|z - r_z\|_{3/2}\,.$$

   Demuestre que $\|\cdot\|$ es una norma para $\hat{c}$ (2 p) y que $(\hat{c}, \|\cdot\|)$ es separable (4 p)

4. Sea $PG = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists \lambda_a, a(n+1) = \lambda_a a(n)\}$. Dado $r \in (0,1)$ y $F \subset \mathbb{R}$, defina

$$G = \cancel{G_{2,F}} = \{a \in PG \mid |\lambda_a| \leq r \ \wedge \ a(1) \in F\}$$

(a) Demuestre que $G \subseteq \ell_p$, $p \in [1, \infty)$. (0.5 p)

(b) Demuestre que si F es cerrado entonces G es completo con la norma $\|\cdot\|_p$. (1.5 p) ¿lo sería si F no fuera cerrado? (0.5 p)

(c) Si suponemos que F es acotado, ¿ Es G totalmente acotado? demuestre su respuesta. (2.5 p) ¿vale el reciproco? (justifique) (1 p)

5. Sea $\hat{\ell}_\infty$ el espacio de las sucesiones reales acotadas, dotado de la métrica

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{i^5}$$

(a) Demuestre que $\hat{\ell}_\infty$ no es completo. (1 p)

(b) Demuestre que $\hat{\ell}_\infty$ es denso en

$$\mathfrak{L} = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid d(0, a) < \infty\}$$

(2,5 p)

(c) Demuestre que $\mathfrak{L}$ es completo. (2,5 p)

b) G completo.

sea a_n de Cauchy.

$a_m($[illegible]$) - a_n($[illegible]$)\|$

It is the inverse of T as may be seen from

$$T \cdot s\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (I-T)^n x = s\text{-}\lim_{k\to\infty} (I-(I-T))\left(\sum_{n=0}^{k}(I-T)^n x\right)$$
$$= x - s\text{-}\lim_{k\to\infty} (I-T)^{k+1} x = x,$$

and the similar equation $s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}(I-T)^n\right)Tx = x$.

2. The Vitali-Hahn-Saks Theorem

This theorem is concerned with a convergent sequence of measures, and makes use of the following

Proposition. Let $(S, \mathfrak{B}, m)$ be a measure space. Let $\mathfrak{B}_0$ be the set of all $B \in \mathfrak{B}$ such that $m(B) < \infty$. Then by the distance

$$d(B_1, B_2) = m(B_1 \ominus B_2), \text{ where } B_1 \ominus B_2 = B_1 \cup B_2 - B_1 \cap B_2, \tag{1}$$

$\mathfrak{B}_0$ gives rise to a metric space $(\mathfrak{B}_0)$ by identifying two sets B_1 and B_2 of $\mathfrak{B}_0$ when $m(B_1 \ominus B_2) = 0$. Thus a point $\overline{B}$ of $(\mathfrak{B}_0)$ is the class of sets $B_1 \in \mathfrak{B}_0$ such that $m(B \ominus B_1) = 0$. Under the above metric (1), $(\mathfrak{B}_0)$ is a complete metric space.

Proof. If we denote by $C_B(s)$ the defining function of the set B:

$$C_B(s) = 1 \text{ or } 0 \quad \text{according as} \quad s \in B \text{ or } s \notin B,$$

we have

$$d(B_1, B_2) = \int_S |C_{B_1}(s) - C_{B_2}(s)|\, m(ds). \tag{2}$$

Thus the metric space $(\mathfrak{B}_0)$ may be identified with a subset of the B-space $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$. Let a sequence $\{C_{B_n}(s)\}$ with $B_n \in \mathfrak{B}_0$ satisfy the condition

$$\lim_{n,k\to\infty} d(B_n, B_k) = \lim_{n,k\to\infty} \int_S |C_{B_n}(s) - C_{B_k}(s)|\, m(ds) = 0.$$

Then, as in the proof of the completeness of the space $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$, we can choose a subsequence $\{C_{B_{n'}}(s)\}$ such that $\lim_{n'\to\infty} C_{B_{n'}}(s) = C(s)$ exists m-a.e. and $\lim_{n'\to\infty} \int_S |C(s) - C_{B_{n'}}(s)|\, m(ds) = 0$. Clearly $C(s)$ is the defining function of a set $B_\infty \in \mathfrak{B}_0$, and hence $\lim_{n\to\infty} d(B_\infty, B_n) = 0$.

This proves that $(\mathfrak{B}_0)$ is a complete metric space.

Theorem (Vitali-Hahn-Saks). Let $(S, \mathfrak{B}, m)$ be a measure space, and $\{\lambda_n(B)\}$ a sequence of complex measures such that the total variations $|\lambda_n|(S)$ are finite for $n = 1, 2, \ldots$ Suppose that each $\lambda_n(B)$ is m-absolutely continuous and that a finite $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(B) = \lambda(B)$ exists for every $B \in \mathfrak{B}$. Then the m-absolute continuity of $\lambda_n(B)$ is uniform in n, that is, $\lim m(B) = 0$ implies $\lim \lambda_n(B) = 0$ uniformly in n. If $m(S) < \infty$, then $\lambda(B)$ is σ-additive on $\mathfrak{B}$.

Proof. Each λ_n defines a one-valued function $\bar{\lambda}_n(\bar{B})$ on $(\mathfrak{B}_0)$ by $\bar{\lambda}_n(\bar{B}) = \lambda_n(B)$, since the value $\lambda_n(B)$ is, by the m-absolute continuity of $\lambda_n(B)$, independent of the choice of the set B from the class $\bar{B}$. The continuity of $\bar{\lambda}_n(\bar{B})$ is implied by and implies the m-absolute continuity of $\lambda_n(B)$.

Hence, for any $\varepsilon > 0$, the set

$$F_k(\varepsilon) = \left\{\bar{B};\ \sup_{n\geq 1} |\bar{\lambda}_k(\bar{B}) - \bar{\lambda}_{k+n}(\bar{B})| \leqq \varepsilon\right\}$$

is closed in $(\mathfrak{B}_0)$ and, by the hypothesis $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(B) = \lambda(B)$, we have $(\mathfrak{B}_0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k(\varepsilon)$. The complete metric space $(\mathfrak{B}_0)$ being of the second category, at least one $F_{k_0}(\varepsilon)$ must contain a non-void open set of $(\mathfrak{B}_0)$. This means that there exist a $\bar{B}_0 \in (\mathfrak{B}_0)$ and an $\eta > 0$ such that

$$d(B, B_0) < \eta \quad \text{implies} \quad \sup_{n\geq 1} |\bar{\lambda}_{k_0}(\bar{B}) - \bar{\lambda}_{k_0+n}(\bar{B})| \leqq \varepsilon.$$

On the other hand, any $B \in \mathfrak{B}_0$ with $m(B) \leqq \eta$ can be represented as $B = B_1 - B_2$ with $d(B_1, B_0) \leqq \eta$, $d(B_2, B_0) \leqq \eta$. We may, for example, take $B_1 = B \cup B_0$, $B_2 = B_0 - B \cap B_0$. Thus, if $m(B) \leqq \eta$ and $k \geqq k_0$, we have

$$\begin{aligned} |\lambda_k(B)| &\leqq |\lambda_{k_0}(B)| + |\lambda_{k_0}(B) - \lambda_k(B)| \\ &\leqq |\lambda_{k_0}(B)| + |\lambda_{k_0}(B_1) - \lambda_k(B_1)| + |\lambda_{k_0}(B_2) - \lambda_k(B_2)| \\ &\leqq |\lambda_{k_0}(B)| + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Therefore, by the m-absolute continuity of λ_{k_0} and the arbitrariness of $\varepsilon > 0$, we see that $m(B) \to 0$ implies $\lambda_n(B) \to 0$ uniformly in n. Hence, in particular, $m(B) \to 0$ implies $\lambda(B) \to 0$. On the other hand, it is clear that λ is *finitely additive*, i.e., $\lambda\left(\sum_{j=1}^{n} B_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(B_j)$. Thus, by $\lim_{m(B)\to 0} \lambda(B) = 0$ proved above, we easily see that λ is σ-additive if $m(S) < \infty$.

Corollary 1. Let $\{\lambda_n(B)\}$ be a sequence of complex measures on S such that the total variation $|\lambda_n|(S)$ is finite for every n. If a finite $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(B)$ exists for every $B \in \mathfrak{B}$, then the σ-additivity of $\{\lambda_n(B)\}$ is uniform in n, in the sense that, $\lim_{k\to\infty} \lambda_n(B_k) = 0$ uniformly in n for any decreasing sequence $\{B_k\}$ of sets $\in \mathfrak{B}$ such that $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \emptyset$.

Proof. Let us consider

$$m(B) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \mu_j(B) \quad \text{where} \quad \mu_j(B) = \lambda_j(B)/|\lambda_j|(S).$$