Universidad de Chile
Topología Algebraica I
Marzo 29, 2018.

Sea Λ conjunto dirigido (Λ discreto).
Definimos el conjunto dirigido:

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \{\infty\}, \quad \lambda \leq \infty \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

A continuación:

$$\tau = \mathcal{P}(\Lambda) \cup \left\{ A \cup [\lambda, \infty] \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda \in \Lambda \\ A \subset \Lambda \end{array} \right\}$$

es una topología en $\tilde{\Lambda}$.

Con la propiedad de que $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda = \infty$.

$\forall V \in \mathcal{V}(\infty)$, $\exists \lambda_0 \in \Lambda$ tq $\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow \lambda \in V$

Proposición. $\{x_\lambda\}_\lambda$ red en X, se tiene que $x_\lambda \to x$ ssi $f: \tilde{\Lambda} \to X$, con $f(\lambda) = x_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, $f(\infty) = x$, es continua en $\tilde{\Lambda}$.

Demostración. ($\Rightarrow$)

$$f \text{ continua} \Rightarrow x_\lambda = f(\lambda) \to f(\infty) = x.$$

($\Leftarrow$) supongamos que $x_\lambda \to x$

Observación. $\{\lambda\}$ abierto $\Rightarrow$ f continua en λ, $\{\lambda\}_{\psi \in \Psi}$

$\lambda_\psi \to \lambda \Rightarrow \exists \lambda_0$ tq $\lambda_\psi = \lambda \quad \forall \psi \geq \psi_0$

Supongamos $x_\psi \to \infty$

Por demostrar $f(\lambda_\psi) = x_{\lambda_\psi} \to x = f(\infty)$

$\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists \lambda_0 \in \Lambda$ tq $\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in V$

$[\lambda_0, \infty] \in \mathcal{V}_{\tilde{\Lambda}}(\infty) \Rightarrow \exists \psi_0 \in \Psi$ tal que $\psi \geq \psi_0$.

Luego: $\lambda_\psi \geq \lambda_0$, $\lambda_\psi \in [\lambda_0, \infty] \Rightarrow x_{\lambda_\psi} \in V$.

f es continua en a

$A \subseteq X$ subespacio topológico.

$$a_\lambda \to a \text{ en } A$$

implica: $a_\lambda \to a$ en X, $\tilde{\Lambda} \xrightarrow{f} A \xhookrightarrow{i} X$

Definición. $X = \prod_{i \in I} X_i$ espacio producto con la topología producto (topología de Tichonoff). Es la topología con sub-base:

$$\{ U_{i_0} \times \prod_{i \neq i_0} X_i \ : \ i_0 \in I,\ U_{i_0} \subseteq X_{i_0} \text{ abierto} \}$$

O bien la topología con base:

$$\{ \prod_{i \in T} U_i \times \prod_{i \in I - T} X_i \ \big| \ T \subseteq I \text{ finito},\ U_i \subseteq X_i \text{ abierto} \}.$$

Equivalentemente, es la topología inducida por la familia de proyecciones:

$$\pi_{i_0} : X \longrightarrow X_{i_0}$$

[la menor topología que hace a las proyecciones continuas]

Proposición. $f: Y \longrightarrow X$ continua ssi $f_i = \pi_i \circ f$ es continua.

Proposición. $f: \tilde{\Lambda} \to X$, $f(\lambda) = (f_i(\lambda))_{i\in I} = (x_{i_\lambda})_{i\in I}$

$$(x_{i_\lambda}) \longrightarrow (x_i)_{i\in I} \iff x_{i_\lambda} \longrightarrow x_i \quad \forall i.$$

Proposición. $X = \prod X_i$, $x_i = \pi_i(x)$. Para $\mathcal{F}$ filtro en X tal que $\mathcal{F} \to x \in X$ siempre y cuando $\pi_i(\mathcal{F}) \longrightarrow x_i \quad \forall i$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X, $x \in X$.

(a) $\mathcal{F} \longrightarrow x \iff$ (b) $\forall$ red $\{x_F\}_{F\in\mathcal{F}}$ asociado al filtro, $x_F \longrightarrow x$

$\iff$ (c) $\forall$ red $\{x_F\}_F$ asociada a $\mathcal{F}$, $\underset{\pi_i(x_F)}{\overset{\shortparallel}{x_{i_F}}} \longrightarrow \underset{\pi_i(x)}{\overset{\shortparallel}{x_i}}$

$\iff$ (d) $\pi_i(\mathcal{F}) \longrightarrow \pi_i(x) = x_i$
(*)

demostración de (*):

(a) $\Rightarrow$ (d). $V \in \mathcal{V}(x_i)$

Por demostrar: $V \in \pi_i(\mathcal{F})$, $\pi_i^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}$ (por (a))

Por lo tanto: $V \in \pi_i(\mathcal{F})$

(d) $\Rightarrow$ (a).

Supongamos que $\pi_i(\mathcal{F}) \to x_i \ \forall i$, sean $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \supseteq \prod_{i\in T} U_i \times \prod_{i\notin T} X_i$

$i_0 \in T$, $U_{i_0} \times \prod_{i\neq i_0} X_i = \pi_{i_0}^{-1}(U_{i_0})$

$U_{i_0} \in \mathcal{V}(x_{i_0}) \subseteq \pi_{i_0}(\tilde{\mathcal{F}})$

$\Rightarrow \pi_{i_0}^{-1}(U_{i_0}) \in \tilde{\mathcal{F}}$

Se tiene : $V \supseteq \prod_{i\in T} U_i \times \prod_{i\notin T} X_i = \bigcap_{i\in T} \pi_i^{-1}(U_i) \in \tilde{\mathcal{F}}$

$\square$

Definición. Puntos de acumulación.

a. x es pto de acumulación de un filtro $\mathcal{F}$ si $\exists\, \mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}' \to x$.

b. x es punto de acumulación, si $\forall F \in \mathcal{F}, \forall V \in \mathcal{V}(x)$: $F \cap V \neq \phi$.

Proposición. a. $\Leftrightarrow$ b.

dem. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}'$, $\begin{array}{l} F\in\mathcal{F} \\ F\cap V \in \mathcal{F}' \end{array} \Rightarrow F \cap V \neq \phi$. (a. $\Rightarrow$ b.)

b. $\Rightarrow$ a.

(b) $\Rightarrow \{F \cap V \mid F \in \mathcal{F}, V \in \mathcal{V}(x)\}$ es base de filtro.

Ejemplo. $B_n = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 1 + \frac{1}{n}\}$

$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots\}$

Se tiene que $\{z \mid |z| = 1\} \to$ puntos de acumulación.

Observación. Si tomo un x afuera no se cumple $\cap \neq \phi$, es válido también para circunferencias abiertas o cerradas.

$U_n = B(x, \frac{1}{n})$, $\{B_n \cap U_n\}$ es base de filtro.

Proposición. Un ultrafiltro tiene un punto de acumulación ssi converge a ese punto.

Demostración. $\mathcal{F}$ ultrafiltro, x punto de acumulación

$\Leftrightarrow \exists\, \mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ con $\mathcal{F}' \to x$

$\mathcal{F}$ ultrafiltro, $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

Definición. Un espacio topológico se dice cuasicompacto si todo recubrimiento abierto tiene un subrecubrimiento finito.

Definición. Un espacio topológico se dice compacto si es Hausdorff y cuasicompacto.

Proposición. Un espacio topológico es cuasicompacto ssi cada ultrafiltro tiene un punto de acumulación.

Corolario. Un espacio topológico X es cuasicompacto ssi cada ultrafiltro tiene al menos un límite.

2. Un espacio topológico es Hausdorff ssi cada ultrafiltro tiene a lo más un límite.

3. Un espacio topológico es compacto ssi cada ultrafiltro tiene exactamente un límite.

$X = \prod_{i \in I} X_i$, X_i cuasicompacto. $\mathcal{F}$ ultrafiltro en X

Entonces: $\mathcal{F}_i = \pi_i(\mathcal{F})$ ultrafiltro en X_i.

Entonces: $\exists x_i$ tq $\mathcal{F}_i \longrightarrow x$,

Por lo tanto: $\mathcal{F} \longrightarrow (x_i)_{i \in I}$.

De lo anterior, concluimos el siguiente teorema.

Teorema (Tichonoff). Un producto de espacios cuasicompactos, es cuasicompacto.

Universidad de Chile
Topología algebraica I
02 Abril, 2019.

Compacidad.

Definición. X espacio topologico cuasicompacto si

$$X \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists\, i_1, \dots, i_r \text{ tal que } X \subseteq \bigcup_{r=1}^{n} U_{i_r}$$

La cuasicompacidad también se puede caracterizar con cerrados.

Definición. X tiene la propiedad de la intersección finita si toda familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de conjuntos cerrados, en la que cada intersección finita es no vacía, tiene intersección no vacía.

Teorema. Las definiciones anteriores son equivalentes.

Demostración. Basta notar que $\bigcap_{i \in I} A_i = \phi \iff \bigcup_{i \in I} A_i^c = X$. □

Observación. Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X, $x \in X$ es un punto límite del filtro ssi:

$$x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}.$$

Demostración. $(\Rightarrow)$ Caracterización de punto límite:

$$\forall F \in \mathcal{F},\ \forall V \in \mathcal{V}(x) :\ V \cap F \neq \phi.$$

pero $x \in \overline{F}$ ssi $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap F \neq \phi$.

Ahora aplicamos:

$$x \notin F \Rightarrow \overline{F}^c \in \mathcal{V}(x), \quad \overline{F}^c \cap F = \phi.$$

$$V \cap F = \phi \Rightarrow F \subseteq V^c \Rightarrow \overline{F} \subseteq V^c \Rightarrow x \notin \overline{F}$$

Por lo tanto: $\displaystyle x \in \bigcap_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \overline{F}$

($\Leftarrow$) $\displaystyle x \in \bigcap_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \overline{F} \Rightarrow V \cap F \neq \phi \quad \forall V \in \mathcal{V}(x) \ \forall F \in \tilde{\mathcal{F}}$

Por lo tanto: x es punto límite. □

punto de acumulación

Proposición. X es cuasicompacto ssi todo filtro en X tiene un límite.

($\Rightarrow$) Supongamos: X cuasicompacto, $\tilde{\mathcal{F}}$ filtro en X.

Sean $F_1, \dots, F_n \in \tilde{\mathcal{F}}$, por definición:

$$F_1 \cap \dots \cap F_n \in \tilde{\mathcal{F}},$$

en particular: $F_1 \cap \dots \cap F_1 \neq \phi$

Luego: $\overline{F}_1 \cap \dots \cap \overline{F}_n \neq \phi$

Propiedad de la intersección finita: $\displaystyle \bigcap_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \overline{F} \neq \phi$.

Cada $\displaystyle x \in \bigcap_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \overline{F} \neq \phi$ es un punto límite de $\tilde{\mathcal{F}}$.

(Cambiar punto límite por punto de acumulación)

($\Leftarrow$) Supongamos que cada filtro en X tiene un punto de acumulación.

Objetivo: Demostrar que X cumple propiedad de intersección finita.

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ familia de cerrados tq:

$$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} \neq \phi \quad \forall i_1, \dots, i_n \in I$$

Se define el filtro: $\mathcal{F} = \{ F \subseteq X \mid F \supseteq A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} \text{, algunos } i_1, \dots, i_n \in I \}$.

$$\exists \; x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{A_i} = \bigcap_{i\in I} A_i \quad (A_i \text{ cerrado } \forall i)$$

Por lo tanto: $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \phi$. $\square$

Pregunta: ¿Se puede caracterizar la compacidad usando redes?

Definición. Un elemento $x\in X$ es un punto de acumulación de una red $\{x_\lambda\}_\lambda$, si,

$$\forall \lambda_0 \in \Lambda, \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists \lambda > \lambda_0 : \; x_\lambda \in V$$

Proposición. x es un punto de acumulación de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ssi existe una subred que converge a x.

Demostración. ($\Leftarrow$) Sea $\varrho : M \to \Lambda$ cofinal tal que $x_{\varrho(\mu)} \to x$

Por propiedad: $\forall \lambda_0 \in \Lambda, \exists \mu_0 \in M$ tq $\varrho(\mu_0) \geq \lambda_0$

Luego: $\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists \mu > \mu_0 : \; x_{\varrho(\mu)} \in V$

($\Rightarrow$) Ocupamos el siguiente truco:

$$\hat{\Lambda} = \Lambda \times \mathcal{V}(x) \quad \text{conjunto dirigido.}$$

$$\tilde{\Lambda} = \{(\lambda, V) \mid x_\lambda \in V\} \subseteq \hat{\Lambda}$$

La función $\rho : \tilde{\Lambda} \longrightarrow \Lambda$, $\rho(\lambda, V) = \lambda$ es cofinal.

Se define a continuación: $y_{(\lambda,V)} = x_\lambda = x_{\rho(\lambda,V)}$, una sub-red.

afirmamos que: $y_{(\lambda,V)} \longrightarrow x$.

En efecto: $\forall V_0 \in \mathcal{V}(x)$, $\exists \lambda_0$ con $x_{\lambda_0} \in V_0$.

Luego: $(\lambda_0, V_0) \in \tilde{\Lambda}$.

$\forall (\lambda, V) \geq (\lambda_0, V_0)$, $(\lambda, V) \in \tilde{\Lambda}$,

se tiene: $y_{(\lambda,V)} = x_\lambda \in V \subseteq V_0$

Por lo tanto: $y(\lambda, V) \longrightarrow x$. □

Proposición. x es punto de acumulación de la red ssi es punto de acumulación del filtro asociado.

Recordatorio. $\tilde{\mathcal{F}}$ filtro asociado a $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$,

$$\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) \quad , \quad \mathcal{B} = \{B_{\lambda_0}\}_{\lambda_0 \in \Lambda}$$

$$B_{\lambda_0} = \{x_\lambda \mid \lambda \geq \lambda_0\}.$$

($\Rightarrow$) x punto de acumulación.

$\Rightarrow$ $\exists$ subred $\{x_{g(\mu)}\}_{\mu\in M}$ que converge a x

$\Rightarrow$ Su filtro asociado converge a x (filtro asociado $\mathcal{G}$)

Se tiene lo siguiente (ejercicio): $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$

Luego: x punto de acumulación de $\mathcal{F}$

($\Leftarrow$) Supongamos x punto de acumulación de $\mathcal{F}$.

Por definición: $\forall V \in \mathcal{V}(x)\ \forall F \in \mathcal{F} : V \cap F \neq \phi$.

$\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\forall \lambda_0 \in \Lambda$: $B_{\lambda_0} \cap V \neq \phi$.

Luego: $\exists \lambda \geq \lambda_0$ tal que $x_\lambda \in V$.

$\square$

~~Proposición. x es un punto de acumulación de $\mathcal{F}$ ssi existe una red asociada a $\mathcal{F}$ que tiene a x como punto de acumulación.~~

Proposición. X es cuasicompacto ssi cada red en X tiene un punto de acumulación.

Demostración.

($\Rightarrow$) $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ red y $\mathcal{F}$ su filtro asociado.

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ tiene punto de acumulación.

$\Rightarrow$ $\{x_\lambda\}_\lambda$ tiene punto de acumulación.

($\Leftarrow$) Supongamos que cada red tiene punto de acumulación.

Sea $\mathcal{F}$ filtro en X, $\{a_F\}_{F\in\mathcal{F}}$ red asociada a $\mathcal{F}$.

Se tiene: $\exists a\in X$ punto de acumulación de $\{a_F\}$

Por demostrar: a punto de acumulación de $\mathcal{F}$.

Para demostrar la última parte, necesitamos el siguiente Lema:

Lema. Sea $\mathcal{F}$ filtro y $\{a_F\}_{F\in\mathcal{F}}$ su red asociada. Todo punto de acumulación de la red es punto de acumulación del filtro.

Demostración. Sea $\mathcal{G}$ filtro asociado a $\{a_F\}_F$

$$B_F \subseteq F$$

$$\Rightarrow \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$$

a punto de acumulación $\Rightarrow$ a punto de acumulación de $\mathcal{G}$

$\Rightarrow \exists\, \mathcal{G}_0 \supseteq \mathcal{G}$, con $\mathcal{G}_0 \longrightarrow a$.

Además: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_0$

Por lo tanto: a punto de acumulación de $\mathcal{F}$.

Universidad de Chile
Topología Algebraica I
Abril 09, 2019.

Pregunta. Dado X espacio topológico, ¿existe $\bar{X}$ compacto tal que $X \subseteq \bar{X}$?

Ejemplo. Compactificación de Alexandroff:

$$\bar{X} = X \cup \{\infty\}$$

Caso particular: Esfera de Riemann.
Condición necesaria es que X sea localmente compacto.

Ejemplo. Compactificación de Stone - Cech

$$\beta X = \prod_{f : X \to [0,1]} [0,1]$$

$$X \ni x \longmapsto (x_f)_f \ , \quad x_f = f(x)$$

Propiedad: $X \to Y$ continua, se puede levantar a $\beta X \to \beta Y$.
Propiedad: X discreto $\Rightarrow$ $\beta X \cong \{$ ultrafiltros de $X \}$.

Espacios regulares.

Definición. X es regular si X es Hausdorff y

$$\forall C \subseteq X \text{ cerrado}, \; x \in X, \; \exists U, V \text{ abiertos tales que} \quad (x \notin C)$$

$$C \subseteq U, \quad x \in V, \quad U \cap V = \phi.$$

Proposición. X es regular ssi $\forall x \in X$, $W \in \mathcal{V}(x)$ $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ tq

$$x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq W$$

Demostración ($\Rightarrow$) Basta suponer W abierto. Tomamos $C = W^c$

Aplicando regularidad: $U \cap V = \phi$

equivalente a que: $V \subseteq U^c$ (cerrado) $(C \subseteq U)$

Luego se tiene: $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U^c \subseteq C^c = W$

($\Leftarrow$) Tomamos $W = C^c$

W es vecindad abierta de x

$\exists V$ abierto, $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq W$.

Luego se tiene $\phi = V \cap \bar{V}^c$, donde $U = \bar{V}^c$ es un abierto que contiene a $W^c = C$.

$\square$

Definición. Un espacio se dice normal si $\forall C, D \subseteq X$ cerrados tq $C \cap D = \phi$, existen abiertos U, V tales que:

$$C \subseteq U \quad , \quad D \subseteq V \quad , \quad U \cap V = \phi .$$

Ejercicio. X es normal sii $\forall C \subseteq X$ cerrado y todo abierto W con $C \subseteq W$, existe V abierto con $C \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq W$.

Proposición (Lema de Urysohn). Si X es normal y $C, D \subseteq X$ son cerrados disjuntos, entonces existe

$$f : X \longrightarrow [0,1] \quad \text{continua}$$

tal que $f(c) = 0 \quad \forall c \in C \quad , \quad f(d) = 1 \quad \forall d \in D$.

Demostración. Primero definimos el conjunto

$$R = \left\{ \frac{a}{2^t} \;\middle|\; t > 0, \; \underset{\text{impar}}{0 < a < 2^t} \right\} .$$

Definimos $U_r = f^{-1}([0,r))$. Con la propiedad:

$$r < r' \implies \bar{U}_r \subseteq U_{r'}$$

Además, $C \subseteq U_r \quad \forall r \in (0,1) \;;\; U_r \subseteq D^c$.

Comenzamos con $U_{1/2}$:

$$C \subseteq U_{1/2} \subseteq \bar{U}_{1/2} \subseteq D^c$$

$$C \subseteq U_{1/4} \subseteq \bar{U}_{1/4} \subseteq U_{1/2} \subseteq \bar{U}_{1/2} \subseteq U_{3/4} \subseteq \bar{U}_{3/4} \subseteq D^c$$

$$U_{1/8} \qquad\qquad U_{3/8} \qquad\qquad U_{5/8} \qquad\qquad U_{7/8}$$

$\forall r, r' \in R \ : \ r < r' \Rightarrow \overline{U}_r \subseteq U_{r'}$

Definimos $f : X \to [0,1]$ por $f(x) = \inf\{ r \in R \mid x \in U_r \}$.

Si $\{ r \in R \mid x \in U_r \} = \phi$, definimos $f(x) = 1$.

Observación. $f(x) \in [0,1]$.

$\forall c \in C$, $c \in U_r \quad \forall r \in R$

$f(c) \leq r \quad \forall r \in R$.

Además $f(c) \leq 0$, luego $f(c) = 0$

Como $\forall d \in D$, $d \notin U_r \quad \forall r \in R$. Se cumple $f(d) = 1$.

Ahora demostramos que f es continua:

Sea $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red tal que $x_\lambda \to x$.

$\forall r \in R$: $f(x) > r$. Ocupando densidad

$\exists r' > r$ tal que $f(x) > r'$

luego $x \notin U_{r'} \supseteq \overline{U}_r$.

Por lo tanto: $x \in \overline{U}_r^{\,c}$ (abierto)

Luego se tiene: $x_\lambda \in \overline{U}_r^{\,c} \quad \lambda \gg 1$

$\therefore \ f(x_\lambda) > r \quad , \lambda \gg 1$.

Ahora, si $f(x) < r_1$

$\exists\, r_1' \leq r_1$ tal que $U_{r_1'} \subseteq U_{r_1}$

Luego $f(x) < r_1 \Rightarrow x \in U_{r_1} \Rightarrow x_\lambda \in U_{r_1}$, $\lambda \gg 1$.

$\Rightarrow \quad f(x_\lambda) < r_1$, $\lambda \gg 1$.

De $f(x) \in (r, r_1) \Rightarrow f(x_\lambda) \in (r, r')$, $\lambda \gg 1$.

Por lo tanto: $\quad f(x_\lambda) \longrightarrow f(x)$

En resumen: $\quad f$ continua.

$\square$

Lema. X normal, $E \bar{\subset} X$ (subconjunto cerrado). $h: E \longrightarrow [0,1]$ continua, entonces existe $g: X \to [0, \frac{a}{3}]$ continua tal que:

$$0 \leq |h(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}a \qquad \forall x \in E.$$

Demostración. Basta suponer $a = 1$. Consideramos

$$C = h^{-1}([0, \tfrac{1}{3}]), \quad D = h^{-1}([\tfrac{2}{3}, 1])$$

X normal, implica:

$$\exists f: X \longrightarrow [0,1] \quad \text{tal que,}$$

$$f|_C = 0 \quad , \quad f|_D = 1$$

Ahora se define $g = \frac{1}{3} f$.

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera

Por demostrar: $\quad f(x) - \varepsilon < f(x_\lambda) < f(x) + \varepsilon \quad \forall \lambda >> 1$

$\exists N >> 1$ tal que $\displaystyle\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < \frac{\varepsilon}{3} \cdot (*)$

$f_N(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} g_i(x)$ continua,

$$f_N(x) - \frac{\varepsilon}{3} < f_N(x_\lambda) < f_N(x) + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|f(y) - f_N(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (*)$$

Finalmente:

$$|f(x_\lambda) - f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_\lambda)| + |f_N(x_\lambda) - f(x_\lambda)|$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$\square$