$$a\theta_2 - a\sin\theta_2 = 2\pi$$

$$\sin\theta = \frac{a\theta_2 - 2\pi}{a}$$

Problema (Calculus, Spivak)

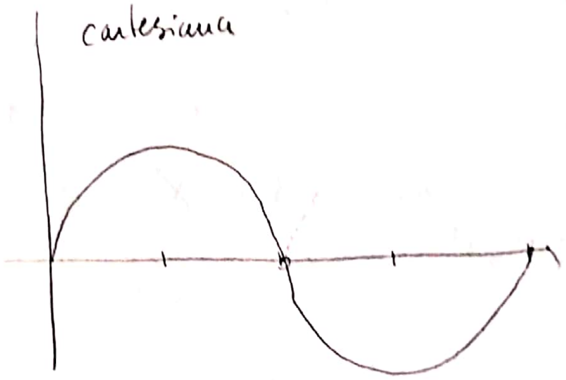
Para cada una de las funciones que siguen, hallar el área limitada por la gráfica en coordenadas polares. (Es preciso poner atención al adecuado recorrido de θ so pena de obtener resultados absurdos.)

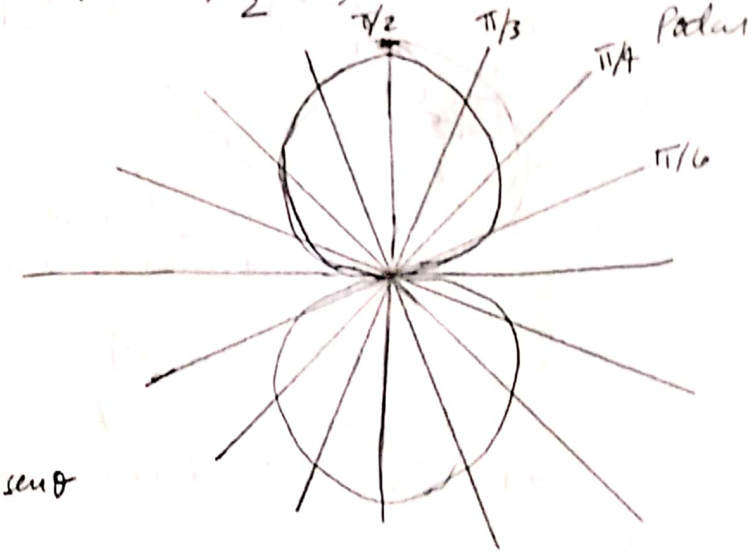
i) $f(\theta) = a\,\text{sen}\,\theta$

Sabemos que: la función seno tiene período 2π

$$\text{sen}(\theta) = 0 \iff \theta = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{sen}(\theta) = 1 \iff \theta = (2k-1)\frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$$

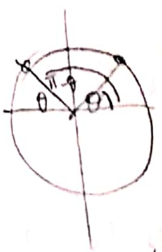




$$\text{sen}(\pi+\theta) = \text{sen}\,\pi\cos\theta + \cos\pi\,\text{sen}\,\theta = -\text{sen}\,\theta$$

$$\text{sen}(\pi-\theta) = \text{sen}\,\pi\cos\theta - \cos\pi\,\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,\theta$$

$$A = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta = 2\int_0^{\pi/2} a^2\,\text{sen}^2\theta\, d\theta$$



$$A = 2a^2 \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\theta\, d\theta$$

$$\therefore A = 2a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$$

$$\text{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$A = a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$A = a^2\left(\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = a^2\left(\left[\pi/2 - \frac{\operatorname{sen}\cancel{\pi}}{\cancel{2}}\right] - \left[0 - \frac{\operatorname{sen} 0}{2}\right]\right)$$

$$A = a^2\left(\pi/2 + \frac{1}{2}\right) = a^2\left(\frac{\pi+1}{2}\right)$$

ii) $f(\theta) = 2 + \cos\theta$

$f(\theta) = 2 \iff \theta = \frac{(2k-1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

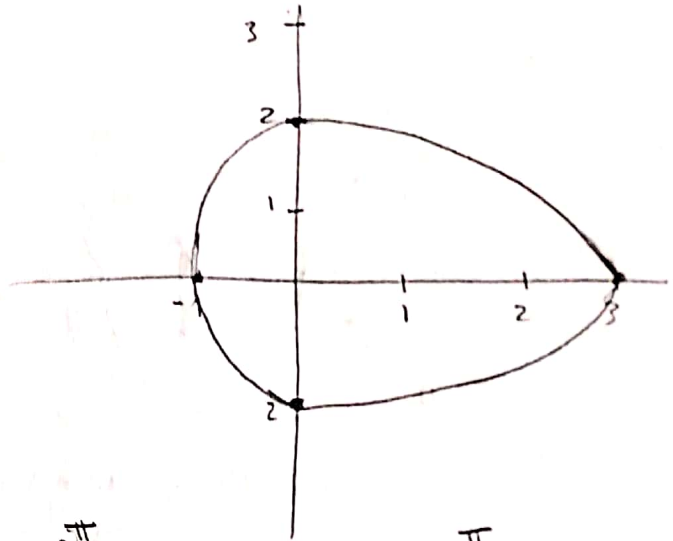
$f(\theta) = 1 \iff \theta = \pi$

$f(\theta) = 3 \iff \theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

, $f(-\theta) = 2 + \cos(-\theta) =$

$2 + \cos(\theta) = f(\theta)$

$\therefore f(-\theta) = f(\theta)$



$$\therefore A = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(f(\theta))^2 d\theta = \int_0^{\pi} (2+\cos\theta)^2 d\theta = \int_0^{\pi} (4 + \cos^2\theta + 4\cos\theta) d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi} \left(4 + \frac{1+2\cos 2\theta}{2} + 4\cos\theta\right) d\theta = \left(4\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} + 4\operatorname{sen}\theta\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$A = 4\pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{8\pi + \pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

Scanned with CamScanner

iii) $f(\theta)^2 = 2a^2 \cos 2\theta$

$f_1(\theta) = \sqrt{2}\, a \sqrt{\cos 2\theta}$

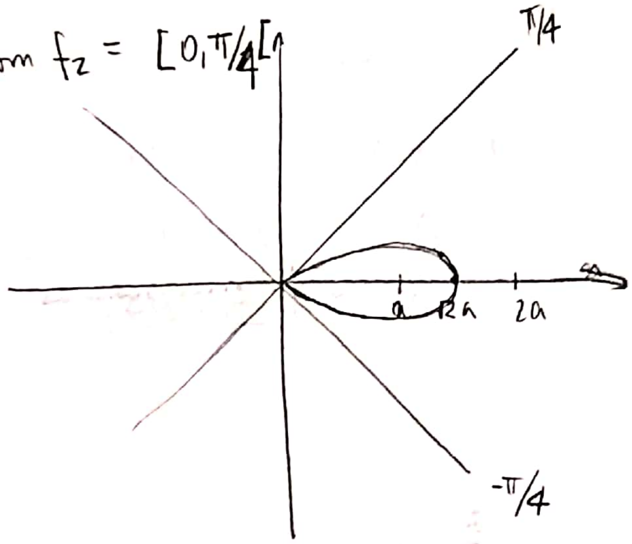
$f_2(\theta) = -\sqrt{2}\, a \sqrt{\cos 2\theta}$

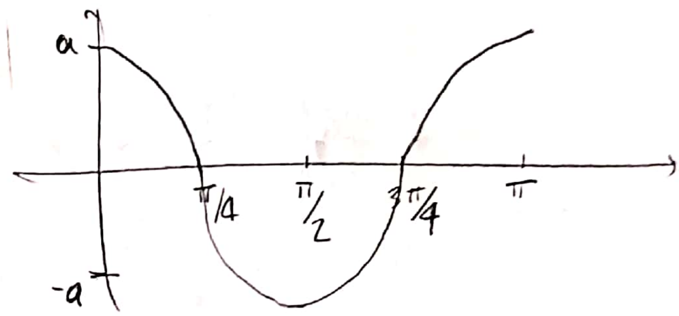
$\theta = \pi/4$

$(-r, \theta) \Longleftrightarrow (r, \pi + \theta),\ r > 0$

dom $f_1 = [0, \pi/4[$

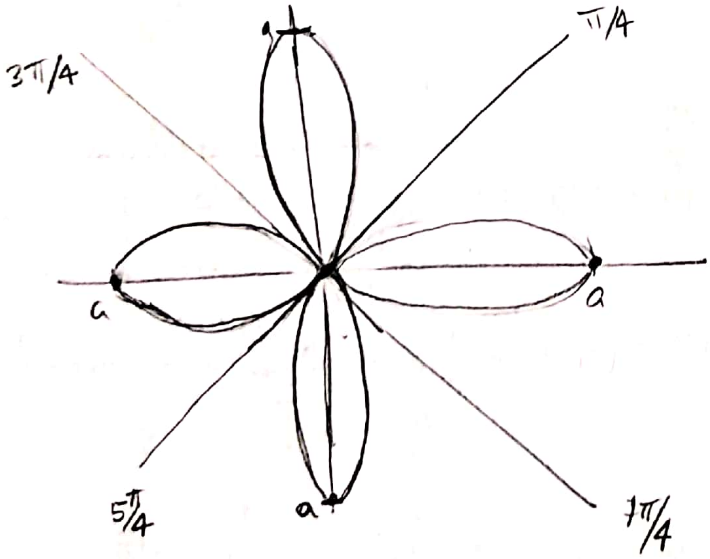
dom $f_2 = [0, \pi/4[$





iv) $f(\theta) = a \cos 2\theta$

dom $f = [0, \pi]$



Intercepto con el eje polar

$2\theta = k\pi \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

Intercepto con el eje de 90°

$2\theta = (2k-1)\frac{\pi}{2}$

$\theta = (2k-1)\frac{\pi}{4}$

Simetrías

$f(-\theta) = f(\theta)$ (Simetría con eje polar

$f(\pi - \theta) = a\cos(2\pi - 2\theta) = a\cos(-2\theta) = a\cos(2\theta)$

(Simetría eje 90)

$f(\theta + \pi) = a\cos(2\pi + 2\theta) = a\cos(2\pi) = f(\theta)$ (Simetría polo)

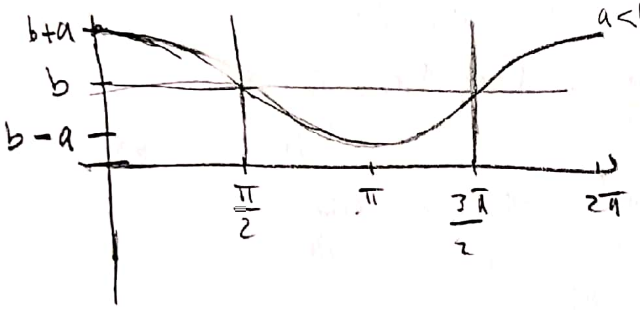
$$\therefore \quad A = 8\int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}(f(\theta))^2\, d\theta = 4\int_0^{\pi/4} a^2 \cos^2 2\theta \, d\theta$$

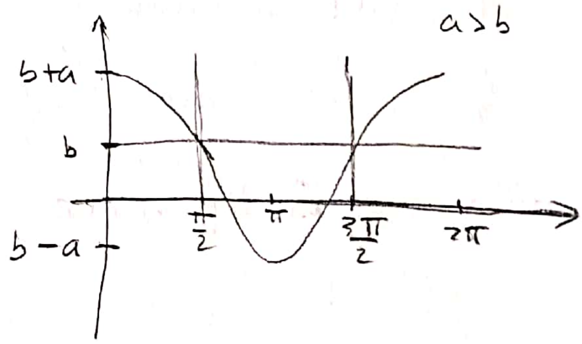
$$A = 4a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos 4\theta}{2}\, d\theta = 4a^2\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{8}\right)\Bigg|_0^{\pi/4}$$

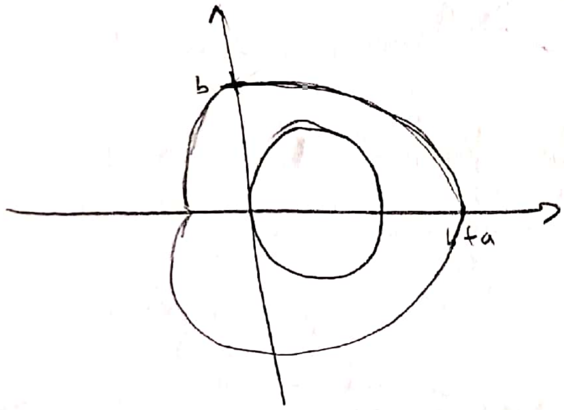
$$A = 4a^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{a^2\pi}{2}$$

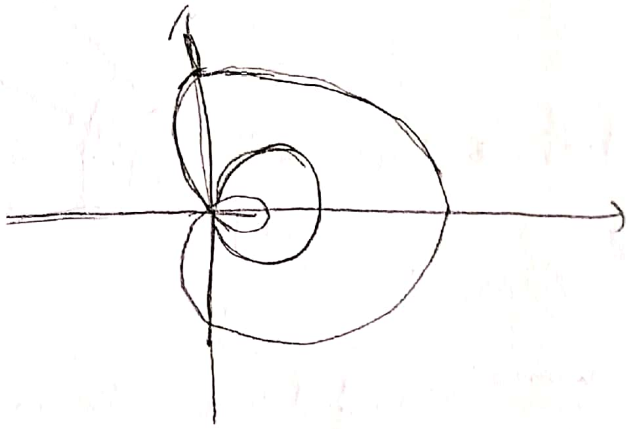
$b - a$

Graficar la curva $r = b + a\cos(\theta)$









Cálculo de curvas (Longitud)

Curvas en coordenadas polares

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

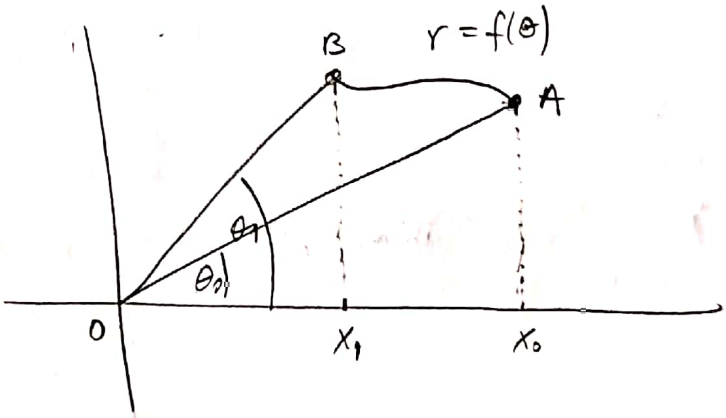
Ejercicio: Encuentre la longitud de arco de la curva $r = 3e^{2\theta}$, $\theta \in [0, \pi/6]$ en el plano (x,y)

$$s = \int_0^{\pi/6} \sqrt{9e^{4\theta} + 36e^{4\theta}}\, d\theta = \frac{3}{2}\sqrt{5}\left(e^{\pi/3} - 1\right)$$

27) En la figura se ve la gráfica de f en coordenadas polares; así pues, la región OAB tiene area $\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)^2\, d\theta$. Supongamos ahora que también es la gráfica ordinaria de una cierta función g. Entonces el área de OAB es también

$$\text{área } \Delta O x_1 B + \int_{x_1}^{x_0} g - \text{Área } \Delta O x_0 A$$

Demostrar que analíticamente estos dos números coinciden



Tenemos:

$x = f(\theta)\cos\theta$

$$A\,\Delta O x_0 A = \frac{1}{2}\int_0^{\theta_0} x^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\theta_0} f(\theta)^2 \cos^2\theta\, d\theta$$

$$A\,\Delta O x_1 B = \frac{1}{2}\int_0^{\theta_1} f(\theta)$$

$$A_g = \int_{x_1}^{x_0} g(x)\, dx = \int_{f(\theta_1)\cos\theta_1}^{f(\theta_2)\cos\theta_2} (f(\theta)\, \cancel{\operatorname{sen}\theta})(+f'(\theta)\operatorname{sen}\theta)\, d\theta$$

$x = f(\theta)\cos\theta$

$dx = -f'(\theta)\operatorname{sen}\theta$

$$A_g = \int_{f(\theta_1)\cos\theta_1}^{f(\theta_2)\cos\theta_2} -f(\theta)f'(\theta)\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$$

5) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos, y asuma que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

Muestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

Demostración :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow a_{n+1} \geq 1 - \frac{a_n}{n}$$

$$a_{n+1} \geq a_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad , \text{como} \quad 1 - \frac{1}{n} > 1 \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\therefore \ a_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) > a_n$$

$$\therefore \ a_{n+1} \geq a_n \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

$\therefore \{a_n\}$ es creciente

$\therefore$ Como a_n es creciente entonces está acotada inferiormente por su primer término, o sea:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(a_n \geq a_1\right)$$

Sabemos que $\sum_{n=1}^{n} a_1$ diverge, entonces, por el criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{n} a_n$ diverge.

99) Determine si la serie $\sum \left(\frac{\log n}{n}\right)^n$ es convergente usando los criterios de d'Alambert y Cauchy.

Demostración:

Sea $a_n = \left(\frac{\log n}{n}\right)^n$

Criterio de ~~d'Alambert~~ Cauchy:

$$\rho = \sqrt[n]{a_n} = \frac{\log n}{n} \to 0, \text{ cuando } n \to \infty \quad \therefore \sum a_n \text{ converge}$$

Criterio de d'Alambert:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{\log(n+1)}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{\log n}{n}\right)^n} = \left(\frac{\frac{\log n+1}{n+1}}{\frac{\log n}{n}}\right)^n \frac{\log n+1}{n+1}$$

$$= \left(\frac{n\log(n+1)}{(n+1)\log n}\right)^n \frac{\log n+1}{n+1} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{\log n}{\log n+1}\right)^n} \cdot \frac{\log n+1}{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\log(n+1))^{n+1} n^n}{(\log n)^n (n+1)^{n+1}} = \frac{1}{\frac{(\log n)^n}{(\log n+1)^{n+1}} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n n+1}$$

$$\frac{\log n+1}{\log n} = \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot$$

$$\log(n+1) = \log n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{\log n}{\log n+1} = \frac{1}{\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right)^n}$$

Scanned with CamScanner

98) Si $0<a<b<1$, la serie $a+b+a^2+b^2+a^3+b^3+\ldots$ es convergente. Demuestre que el criterio de Cauchy nos lleva a este resultado y que, sin embargo, el criterio de d'Alambert nada nos permite concluir.

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}(a^n+b^n)$$

$\sqrt[n]{a^n+b^n}=\rho$, como $a<1 \Rightarrow a^n<1$ y $b^n<1 \Rightarrow$

para n suficientemente grande tenemos que

$$a^n+b^n<c<1$$

$$\therefore \sqrt[n]{a^n+b^n}<c$$

$\frac{9}{10}=\frac{81}{100}=\frac{729}{1000}$

$\frac{6561}{10000}$

Estudiar la siguiente serie : $\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\frac{1}{n}$

Sea $a_n = \text{sen}\frac{1}{n}$

$b_n = \cos\frac{1}{n}$

$\text{sen}\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$

$\text{sen}\frac{1}{n} = \left|\text{sen}\frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$

$\text{sen}\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

$\text{sen}\frac{1}{n} < \cos\frac{1}{n}$

$\text{sen}\frac{1}{n} \leq n\,\text{sen}\frac{1}{n} = \frac{\text{sen}1/n}{1/n}$

¿ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}1/n}{1/n}$ converge

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}1/n$ converge

$\int_1^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x}\,dx$

haciendo

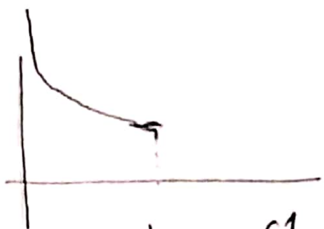
$\frac{1}{2} < \text{sen}\frac{1}{n} = \sqrt{1-\cos^2\frac{1}{n}}$

$\int \text{sen}\frac{1}{x}\,dx$

$\frac{1}{x} = u \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2}\,dx$

$\int_1^0 (\text{sen}\,u)\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = -\int_1^0 \frac{\text{sen}\,u}{u^2}\,du = \int_{0^+}^1 \frac{\text{sen}\,u}{u^2}\,du$

$y = \cos u \Rightarrow dy = -\text{sen}\,u\,du \Rightarrow du = -\frac{dy}{\text{sen}\,u}$



$\frac{\frac{\text{sen}\,u}{u^2}}{\frac{1}{u^2}} = \text{sen}\,u \xrightarrow[u\to 0^+]{} 0$

$\int_{0^+}^1 \frac{\text{sen}\,u}{u^2}\,du = -\frac{\cos u}{u^2}\Big|_{0^+}^1 - 2\int_{0^+}^1 \frac{\cos u}{u^3}\,du$

$\text{sen}\frac{1}{n} = \sqrt{\left(\text{sen}\frac{1}{n}\right)^2}$

$\int_{0^+}^1 \frac{\cos u}{u^3}\,du = -\frac{\cos u}{2u^2}\Big|_{0^+}^1 - \frac{1}{2}\int_{0^+}^1 \frac{\text{sen}\,u}{u^2}\,du$

$\text{sen}\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = f(x)$

$f'(x) = 2\frac{1}{x^{-3}} + \cos\frac{1}{x}$

8 Derivadas

1. Usando directamente la definición encuentre $f'(a)$ para el f y a dado.

   (a) $f(x) = 3x$, $a = 2$.
   (b) $f(x) = x^3$, $a = -1$.
   (c) $f(x) = x^3$, a arbitrario.
   (d) $f(x) = 1/x$, $a = \frac{1}{2}$.

2. Demuestre, trabajando directamente con la definición, que si $f : \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = 1/x$, entonces $f'(a) = -1/a^2$ (para $a \neq 0$). Muestre además que la tangente al gráfico de f en el punto $(a, 1/a)$ no intersecta el gráfico de f en ningún otro punto. Ilustre gráficamente.

3. Demuestre, trabajando directamente con la definición, que si $f : \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = 1/x^2$, entonces $f'(a) = -2/a^3$, para $a \neq 0$. Muestre además que la tangente al gráfico de f en el punto $(a, 1/a^2)$ intersecta el gráfico de f en un punto adicional. Ilustre gráficamente.

4. Calcule las derivadas en un punto a de las siguientes funciones usando la definición. ¿ Para qué valores de a es válido su cálculo? ¿ Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$?

   a) $f(x) = \sqrt{x}$ *b)* $f(x) = x^2$ *c)* $f(x) = x^3$ *d)* $f(x) = \frac{1}{2x+1}$
   e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ *f)* $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *g)* $f(x) = x^n$ *h)* $f(x) = x^{1/n}$

5. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$. Encuentre su derivada $f'(x)$ para $x \neq 0$.

6. Calcular la primera y segunda derivada de cada función dada.

   (a) $f(x) = 3x^{14}$
   (b) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$
   (c) $f(x) = x\cos(x)$
   (d) $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^3+x}$
   (e) $f(x) = sen(2x)$
   (f) $f(x) = sen(x + x^2)$
   (g) $f(x) = x/\cos(x)$
   (h) $f(x) = (sen(x))^2$
   (i) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$
   (j) $f(x) = \tan(x)$
   (k) $y = x\ e^{3x^2}$
   (l) $g(x) = (2x-1)^2 - 6\sin(5x)$
   (m) $h(x) = \left(\sqrt{x^3+5}\right)^{\frac{5}{2}}$
   (n) $l(x) = 2\ln(\cos(2x))$
   (o) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{(2x+1)}}$
   (p) $s(x) = \dfrac{x^2 \cdot \ln(4x)}{e^{2x}}$
   (q) $g(x) = \sin^2(2x) + \cos^2(2x)$
   (r) $g(x) = \dfrac{\ln(\sin(x^2+1))}{x}$

7. $y = x\sin x$, satisface la ecuación $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$.

8. Sea $f(x) = x^2 + ax + b$. Hallar los valores de a y b tales que la recta $y = 2x$ sea tangente a la gráfica de f en el punto de coordenadas $(2, 4)$.

9. Calcular el área del triángulo formado por el eje OY, la tangente y la normal a la curva $y = \sqrt{9-x}$ en el punto de coordenadas $(5, 2)$.

10. De un ejemplo de una función uniformemente continua en $[0, 1]$ que sea diferenciable en $(0, 1)$ pero cuya derivada no sea acotada en $(0, 1)$.

11. Muestre que $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$ no es diferenciable en $x = 0$.

12. Sea $g(x) := |x^3|$ para $x \in \mathbb{R}$. Encuentre $g'(x)$ y $g''(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, y $g'''(x)$ para $x \neq 0$. Muestre que $g'''(0)$ no existe.

13. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Muestre que f es diferenciable en $x = 0$ y encuentre la derivada $f'(0)$.

14. Demuestre que $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es derivable en $x = 0$.

15. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x) = \begin{cases} x^m & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

¿Para qué valores de n, f' es continua en 0? ¿Para qué valores de n, f es diferenciable en 0?

16. Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en c y que $f(c) = 0$. Muestre que $g(x) = |f(x)|$ es diferenciable en c si, y sólo si , $f'(c) = 0$.

17. Pruebe que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función par, vale decir $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y es diferenciable en $\mathbb{R}$, entonces la derivada f' es una función impar, est es $f(-x) = -f(x)$. Pruebe además que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función impar, entonces g' es una función par.

18. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función derivable tal que $f(tx) = tf(x)$ para cualesquiera $t \in \mathbb{R}$. Pruebe que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En general, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es k veces derivable y $f(tx) = t^k f(x)$ para cualesquiera $t \in \mathbb{R}$, pruebe que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx^k$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

19. Muestre que la función $h(x) = x^3 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, tiene inversa h^{-1} definida sobre $\mathbb{R}$. Calcule $h^{-1}(y)$ en los puntos correspondientes a $x = 0, 1, -1$.

20. Muestre que la restricción de la función coseno cos a $I = [0, \pi]$ es estrictamente decreciente. Sea arccos : $[-1, 1] \to \mathbb{R}$. Muestre que arccos es una función diferenciable en $(-1, 1)$ y que

$$(\arccos y)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}; \quad y \in (-1, 1).$$

Muestre que $\arccos y$ no es diferenciable en -1 ni en 1.

21. Muestre que la restricción de la función tangente tan es estrictamente creciente en $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y que $\tan(I) = \mathbb{R}$. Muestre que, si arctan : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función inversa de la restricción de la función tangente, entonces arctan es diferenciable en $\mathbb{R}$ y

$$(\arctan y)' = \frac{1}{1 + y^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

9 Funciones derivables en un intervalo, Teorema del Valor Medio

1. Sea $g : I \to \mathbb{R}$ continua en el intervalo I, excepto en el punto $c \in I$. Pruebe que si existen los límites laterales $\lim_{x\to c^-} g(x) = A$ y $\lim_{x\to c^+} g(x) = B$, con $A \neq B$, entonces no existe ninguna función derivable $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $f' = g$.

2. Sea $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}$$

Muestre que no existe una función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = g(x)$, $x \in [-1, 1]$. [Hint: Use el Teorema de Darboux.]

3. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Pruebe que no existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$. De dos ejemplos de funciones que no difieran por una constante y tales que sus derivada sean iguales a $h(x)$ para $x \neq 0$.

4. Suponga que $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ es continua en $[0, 2]$ y diferenciable en $(0, 2)$, y que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$.

   (a) Muestre que existe $c_1 \in (0, 1)$ tal que $f'(c_1) = 1$.

   (b) Muestre que existe $c_2 \in (1, 2)$ tal que $f'(c_2) = 0$.

   (c) Muestre que existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 1/3$.

5. Determinar el número de raíces reales de la ecuación

$$3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 5 = 0.$$

6. Pruebe que la ecuación

$$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} = 0$$

tiene una raíz real si n es impar y ninguna si n es par.

7. Pruebe usando el Teorema del Valor Medio que

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

8. Use el Teorema del valor Medio para probar que

$$\frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1, \quad x > 1.$$

10 Funciones Monótonas, Extremos de Funciones

1. Para cada una de las siguientes funciones, encuentre extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

   (a) $f(x) = x^2 - 3x + 5$;
   (b) $g(x) = 3x - 4x^2$;
   (c) $h(x) = x^3 - 3x - 4$;
   (d) $k(x) = x^4 + 2x - 4$;
   (e) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;
   (f) $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$;
   (g) $h(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$;
   (h) $k(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$.

6

2. Encuentre los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones, en los dominios señalados.

   (a) $f(x) = |x^2 - 1|, \quad -4 \leq x \leq 4$;
   (b) $g(x) = 1 - (x-1)^{2/3}, \quad 0 \leq x \leq 2$;
   (c) $h(x) = x|x^2 - 12|, \quad -2 \leq x \leq 3$;
   (d) $k(x) = x(x-8)^{1/3}, \quad 0 \leq x \leq 9$.

3. Sea $a > b > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pruebe que $a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}} < (a-b)^{\frac{1}{n}}$. [Hint. Muestre que $f(x) = x^{\frac{1}{n}} - (x-1)^{\frac{1}{n}}$ es decreciente para $x \geq 1$ y evalúe f en 1 y en a/b.]

4. Determinar los máximos y mínimos de $x^3 + 3px + q$. Discutir la naturaleza de las raíces de la ecuación $x^3 + px + q = 0$.

5. Trazar el gráfico de una función f que satisfaga todas estas propiedades:

   (a) f está definida y es continua en todos los puntos salvo el $+1$; $f(-1) = -3$, $f(0) = 0$, $f(3) = 2$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$.
   (b) f' existe y es continua en todos los puntos salvo ± 1; $\lim_{x\to-1+} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1-} f'(x) = -\infty$, con $f' > 0$ en $(-1,1) \cup (2,+\infty)$ y $f' < 0$ en $(-\infty,-1) \cup (1,2)$.
   (c) f'' existe y es continua en todos los puntos salvo ± 1, con $f'' > 0$ en $(0,1) \cup (1,3)$ y $f'' < 0$ en $(-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (3,+\infty)$.

6. Trazar el gráfico de una función f que satisfaga todas estas propiedades:

   - f está definida y es continua en todos los puntos salvo el -2; $f(-3) = -2$, $f(-1) = -2$, $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = 5/2$, $\lim_{x\to-2-} f(x) = 0+$ y $\lim_{x\to-2+} f(x) = +\infty$.
   - Para $x \to +\infty$, el gráfico de f es asintótico a la recta $y = x$.
   - f' existe y es continua en todos los puntos salvo -2 y 0; $\lim_{x\to0} f'(x) = +\infty$, con $f' > 0$ en $(-1,0) \cup (0,1) \cup (2,+\infty)$ y $f' < 0$ en $(-\infty,-2) \cup (-2,-1) \cup (1,2)$.
   - f'' existe y es continua en todos los puntos salvo -2 y 0, con $f'' > 0$ en $(-3,-2) \cup (-2,0) \cup (3/2,3)$ y $f'' < 0$ en $(-\infty,-3) \cup (0,3/2) \cup (3,+\infty)$.

7. Hallar el punto (o los puntos) de la parábola $y = x^2$ más próximos al punto $(2,1)$.

8. Entre los cilindros circulares rectos de volumen dado, hallar el de menor área lateral.

9. Probar que el cilindro circular recto inscrito en una esfera dada y de volumen máximo es aquel cuya altura es $\sqrt{2}$ veces el radio de su base.

10. Pruebe que de entre los triángulos de base y perímetro dados, el isósceles tiene área máxima.

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx$

11. Una escalera de 27 pies está apoyada contra una cerca de 8 pies de altura. Determinar la proyección horizontal máxima del saliente de la escalera al desplazar de la cerca el pie de la misma. Tomar como variable independiente el ángulo que forma la escalera con el suelo.

12. Dado los números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, hallar el valor mínimo de

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + x}{n \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} x}}$$

para $x > 0$. Usar este resultado para probar por inducción que

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

13. Pruebe que el conjunto de los puntos máximo o mínimo local estricto de cualquier función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es numerable.

14. Pruebe que si un punto crítico c de una función f es el límite de una sucesión de puntos críticos $c_n \neq c$ entonces $f''(c) = 0$.

11 Razón de Cambio, Regla de L'Hopital

1. Cuando un plato circular de metal se calienta en un horno, su radio aumenta a razón de 0,01cm/min. ¿Cuál es la razón de cambio del área cuando el radio mide 50cm?

   Sol: $\pi cm^2/min$

2. El lado "l" de un rectángulo disminuye a razón de 2 cm/s, mientras que el ancho "w" aumenta a razón de 2 cm/s. Cuando $l = 12$ cm y $w = 5$ cm , hallar las razones de cambio de:

   (a) El área. Sol: 14 $\frac{cm^2}{s}$.

   obs: Hay que considerar signo

   (b) El perímetro. Sol: 0.

   (c) La diagonal.Sol: $-\frac{14}{13}\frac{cm}{seg}$

3. Una escalera de 4 metros se apoya contra una casa y su base comienza a resbalar. Cuando la base está a 3,7 metros de la casa, la base se aleja a razón de 1,5 m/s.

   (a) ¿Cuál es la razón de cambio del área del triángulo formado. Por la escalera, la pared y el suelo en ese instante?

   (b) ¿Cuál es la razón de cambio del ángulo θ entre la escalera y el suelo en ese instante?
   Sol: a) Disminuye a razón de 5.61 m^2/s b) 0.986 rad/s

4. Un bloque de hielo cúbico se funde de modo que su arista disminuye con regularidad 2 cm/hr, ¿a qué razón disminuye su volumen cuando su arista mide 10 cm?

   Sol:600cm^3 por hora.

5. Un punto se desplaza sobre la curva $y = x^3$ de forma que su ordenada varía en función del tiempo t según la ley $y = at^3$. Hallar la velocidad de variación de la abscisa en función del tiempo.

   Sol:$a^{\frac{1}{3}}$

6. La Ley de Boyle establece que cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión P y el volumen V satisfacen la ecuación $PV = c$, donde c es una constante. En determinado instante el volumen del gas es 600 cm^3, la presión es 150 KPa y crece a una razón de 20 KPa/ min.¿ Con qué velocidad disminuye el volumen en este momento?.

   Sol: Disminuye a razón de 80 $\frac{cm^3}{min}$

7. Evalúe los siguientes límites.

   (a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\operatorname{sen} x}$

   (b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos x)}{x}$

   (c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(x) - x}{x^3}$

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x}$

   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x(\ln x)^2}$

   (f) $\lim_{x\to 0^+} x^3 \ln x$

   (g) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3}{e^x}$

   (h) $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^2}$

   (i) $\lim_{x\to \infty} \frac{x + \ln x}{x \ln x}$

   (j) $\lim_{x\to 0^+} x^{2x}$

   (k) $\lim_{x\to 0}(1 + 3/x)^x$

   (l) $\lim_{x\to \infty} (1 + 3/x)^x$

   (m) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x) - x}{x \arctan x}$

   (n) $\lim_{x\to \infty} x^{1/x}$

   (o) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$

   (p) $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

   (q) $\lim_{x\to \pi/2^-} \sec(x) - \tan(x)$

8. Suponga que f y g son continuas en $[a, b]$, diferenciables en (a, b) tal que $c \in [a, b]$ y que $g(x) \neq 0$, para $x \neq c$. Sea $A := \lim_{x\to c} f$ y $B := \lim_{x\to c} g$. Si $B = 0$ y si $\lim_{x\to c} f(x)/g(x)$ existe en $\mathbb{R}$, muestre que se debe tener $A = 0$.[Hint: $f(x) = f(x)g(x)/g(x)$.]

9. En las condiciones del problema anterior, suponga además que $g(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$, $x \neq c$. Si $A > 0$ y $B = 0$, pruebe que se debe tener $\lim_{x \to c} f(x)/g(x) = \infty$. Si $A < 0$ y $B = 0$, pruebe que se debe tener $\lim_{x \to c} f(x)/g(x) = -\infty$.

10. Sea $f(x) := x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ para $0 < x \leq 1$ y $f(0) := 0$, y sea $g(x) := x^2$ para $x \in [0, 1]$. Entonces ambas funciones f y g son diferenciables en $[0, 1]$, y $g(x) > 0$ para $x \neq 0$. Muestre que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0} g(x)$ pero que no existe $\lim_{x \to 0} f(x)/g(x)$.

11. Sea $f(x) := x^2$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) := 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$, y sea $g(x) := \operatorname{sen} x$ para $x \in \mathbb{R}$. Muestre que $\lim_{x \to 0} f(x)/g(x) = 0$. Explique por qué no se puede aplicar la regla de L'Hopital para el caso ∞/∞.

12. Sea $f(x) := x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, y sea $g(x) = \operatorname{sen} x$ para $x \in \mathbb{R}$. Muestre que $\lim_{x \to 0} f(x)/g(x) = 0$ pero que $\lim_{x \to 0} f'(x)/g'(x)$ no existe.

12 Fórmula de Taylor

1. Muestre que si $x > 0$, entonces

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

2. Usando el problema anterior, aproxime $\sqrt{1.2}$ y $\sqrt{2}$.

3. Use el Teorema de Taylor con $n = 2$ para obtener más aproximaciones para $\sqrt{1.2}$ y $\sqrt{2}$.

4. Si $x > 0$ muestre que

$$\left|\sqrt[3]{1+x} - \left(1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}\right)\right| \leq \frac{5x^3}{81}.$$

Use esta desigualdad para aproximar $\sqrt[3]{1.2}$ y $\sqrt[3]{2}$.

5. Si $f(x) := e^x$, muestre que le resto de Taylor converge a cero cuando $n \to \infty$, para cada x_0 y x.

6. Si $g(x) := \operatorname{sen} x$, muestre que el resto de Taylor converge a cero cuando $n \to \infty$.

7. Sea $h(x) := e^{-1/x^2}$ para $x \neq 0$ y $h(0) := 0$. Muestre que $h^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluya que el resto de Taylor para $x_0 = 0$ no converge a cero cuando $n \to \infty$ para $x \neq 0$. [Hint: Por la regla de L'Hopital $\lim_{x\to 0} h(x)/x^k = 0$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Use el problema 14 para calcular $f^{(n)}(x)$ para $x \neq 0$.]

8. Si $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$, muestre que

$$\left|\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n}\right)\right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Use esta desigualdad para aproximar $\ln 1.5$ con un error menor que 0.001 y con un error menor que 0.0001.

9. Aproxime la función $\operatorname{sen} x$ por un polinomio en el intervalo $[-1,1]$ con un error menor que 0.001. Muestre que se tiene

$$\left|\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\right| < \frac{1}{5040} \quad \text{para } |x| \leq 1.$$

10. Use la igualdad

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

y la fórmula de Taylor infinitesimal para calcular las derivadas de todos los ordenes, en $x = 0$, de la función $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

11. Considere la función real $f(x) = \dfrac{x^5}{1+x^6}$. Calcule las derivadas de orden 2001 y 2003 de f en $x = 0$.

12. Usando la fórmula de Taylor con resto de Lagrange demuestre que si $f'' > 0$ entonces f es convexa.

Nombre: Marco Godoy
Carrera: Licenciatura en Matemática

$V = \pi \int f^2 dx - \pi \int g^2$

$y =$

6.1

Universidad de Chile
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencia

Control 2
Segundo Semestre 2010
Cálculo II
Prof. Verónica Poblete

1. Considere la región plana limitada por las rectas $x = 0$, $y = 1$ y por la curva $x = -y^2 + 4y$.

   (a) Encontrar el área de la región.

   (b) Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la región anterior alrededor de $x = -1$.

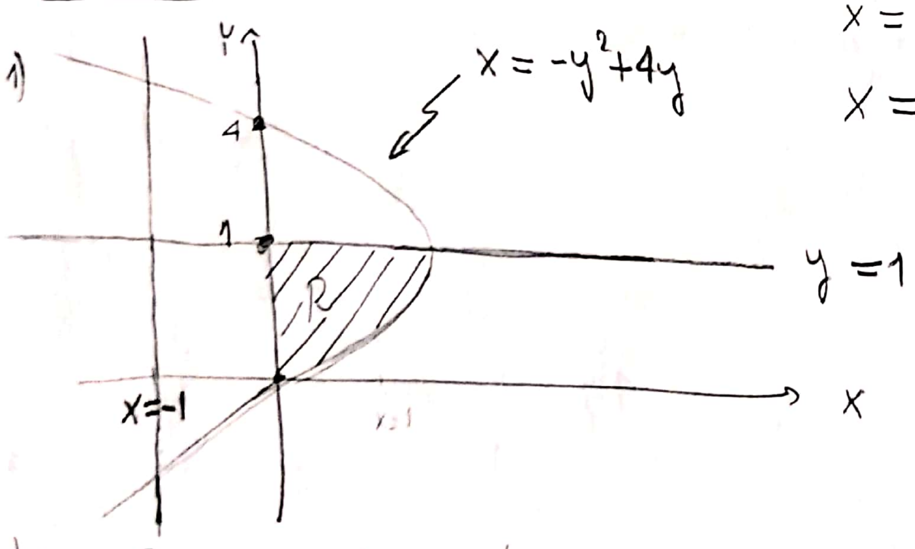
   (c) Hallar la longitud de la curva $x = -y^2 + 4y$ para $1 \leq y \leq 4$.

2. Sea $I_n = \int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}} dx$, $n \geq 1$. Pruebe que $I_{n+1} = \frac{n}{n+3} I_n$. Además, calcular

$$\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^4} dx$$

Desarrollo

1)



$x = -y^2 + 4y = -(y^2 - 4y)$

$x = -y(y-4)$

Vemos a la curva como x en función de

a) Sea R la región limitada por las curvas anteriores

$$\therefore R = \int_0^1 x\,dy = \int_0^1 (-y^2+4y)\,dy = \left(-\frac{y^3}{3} + 2y^2\right)\Big|_0^1$$

$$\therefore R = 2 - \frac{1}{3} = \frac{6-1}{3} = \frac{5}{3}$$

2

b) Sea $V_{x=-1}$ el volumen que se obtiene al girar la región R en a $x=-1$, entonces:

$$V_{x=-1} = \int_0^1 \pi x^2\,dy \cancel{- \int_0^1 \pi(-1)\,dy} = \pi\left[\int_0^1 (x^2+1)\,dy\right]$$

$$V_{x=-1} = \pi \int_0^1 (y^4+4y^2-8y^3+1)\,dy$$

0.3

$$V_{x=-1} = \pi\left[\left(\frac{y^5}{5}+\frac{4}{3}y^3-2y^4+y\right)\Big|_0^1\right] = \pi\left[\frac{1}{5}+\frac{4}{3}-2+1\right]$$

$$V_{x=-1} = \pi\left[\frac{3+20-15}{15}\right] = \cancel{\frac{8}{15}\pi}$$

c) Sea L_x la longitud de la curva $x=-y^2+4y$ en $1\leq y\leq 4$ entonces

$$L_x = \int_1^4 \sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy$$

donde $x'(y) = -2y+4 \Rightarrow (x'(y))^2 = 4y^2+16-16y$

$$\therefore\ L_x = \int_1^4 \sqrt{4y^2-16y+17}\,dy$$

Completamos el cuadrado de binomio

$$\begin{aligned} 4y^2-16y+17 &= 4(y^2-4y)+17 \\ &= 4(y^2-4y+4)+17-16 \\ &= 4(y^2-4y+4)+1 \\ &= 4(y-2)^2+1 \end{aligned}$$

$\sqrt{4y^2-16y+17}\, dy = \int_1^4 \sqrt{4(y-2)^2+1}\, dy$

(4)

$\sqrt{\tan^2 u+1} \cdot \frac{1}{2} \sec^2 u$

$2)$

(4)

$\sec^3 u \, du$

(-2)

itución $\quad \sin u = w \Rightarrow dw = \cos u \, du$

$(\arctan(4))$

$\frac{dw}{\,}$

Nombre : Marco Godoy V

∴ Integrando por partes tenemos

$$L_x = \frac{1}{2}\left[\tan u \sec u \Big|_{\arctan(-2)}^{\arctan(4)} - \int_{\arctan(-2)}^{\arctan(4)} \tan^2 u \sec u \, du \right]$$

$$L_x = \frac{1}{2}\left[\tan u \sec u \Big|_{\arctan(-2)}^{\arctan(4)} - \left(\int_{\arctan(-2)}^{\arctan(4)} \sec^3 u \, du - \int_{\arctan(-2)}^{\arctan(4)} \sec u \, du \right) \right]$$

$$\therefore L_x = \frac{1}{2}\left[\tan u \sec u \Big|_{\arctan(-2)}^{\arctan(4)} + \int_{\arctan(-2)}^{\arctan(4)} \sec u \, du \right]$$

0.8

Scanned with CamScanner

$$\int_0 (x^2+1)^{n+3}$$

Integrando por partes tenemos que

$$I_n = \frac{x^{2n}}{2n(x^2+1)^{n+3}}\Bigg|_0^\infty - \frac{1}{2n}\int_0^\infty x^{2n}(-n-3)(x^2+1)^{-n-4}(2x)\,dx$$

$$I_n = \frac{x^{2n}}{2n(x^2+1)^{n+3}}\Bigg|_0^\infty + \frac{n+3}{n}\int_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{(x^2+1)^{n+4}}\,dx$$

$$\therefore\ I_n = \frac{x^{2n}}{2n(x^2+1)^{n+3}}\Bigg|_0^\infty + \frac{n+3}{n} I_{n+1}$$

Ademas tenemos $\frac{x^{2n}}{2n(x^2+1)^{n+3}}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{2n(x^2+1)^{\cancel{n+3}}x^{-2n}}\Bigg|_0^\infty$

pero el grado del polinomio $(x^2+1)^{n+3}$ es mayor que el de x^{2n}, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\therefore\ \frac{x^{2n}}{2n(x^2+1)^{n+3}}\Bigg|_0^\infty = 0$$

1

$$\therefore\ I_n = \frac{n+3}{n} I_{n+1}$$

$$-\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^4}\,dx = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^3}\Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{6}(0-1)$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^4}\,dx = \frac{1}{6}$$

1

Control 1
Primer Semestre 2010
Cálculo I
Prof. Verónica Poblete

T | 7.0

Parte Práctica

1. Negar la siguiente proposición

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ con } 0 < x - a < \delta \Longrightarrow 0 < f(x) - f(a) < \varepsilon.$$

2. Considere la función $f(x) = \dfrac{1-x}{2+x}$. Determine
   (a) Dominio y recorrido.
   (b) Esboce la gráfica de f.
   (c) $\dfrac{4f(0) + (f \circ f)(1)}{f^{-1}(4) + 3}$.

Parte Teórica

3. Pruebe que $A \subseteq B$ si y sólo si $(A \cap B^c) = \emptyset$
4. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Demuestre:
   (a) Si f y g son inyectivas, entonces la composición $g \circ f$ es inyectiva.
   (b) Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
   (c) Concluya que si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva. Defina $(g \circ f)^{-1}$.

Parte practica

$\Big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ con $\underbrace{0 < x - a < \delta}_{P} \Rightarrow \underbrace{0 < f(x) - f(a) < \varepsilon}_{q} \Big)$

(2) $f(x) = \dfrac{1-x}{2+x}$

(a) dominio de f : Por propiedad de las fracciones sabemos que si $\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$, entonces $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R} - \{0\}$,

entonces :

$$2+x \neq 0$$
$$x \neq -2$$

Por lo tanto $dom(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

recorrido de f : sea $f(x) = y = \dfrac{1-x}{2+x}$, entonces

$$y = \frac{1-x}{2+x}$$
$$(2+x)y = 1-x$$
$$2y + xy = 1-x$$
$$x + xy = 1-2y$$
$$x(1+y) = 1-2y$$
$$x = \frac{1-2y}{1+y}$$

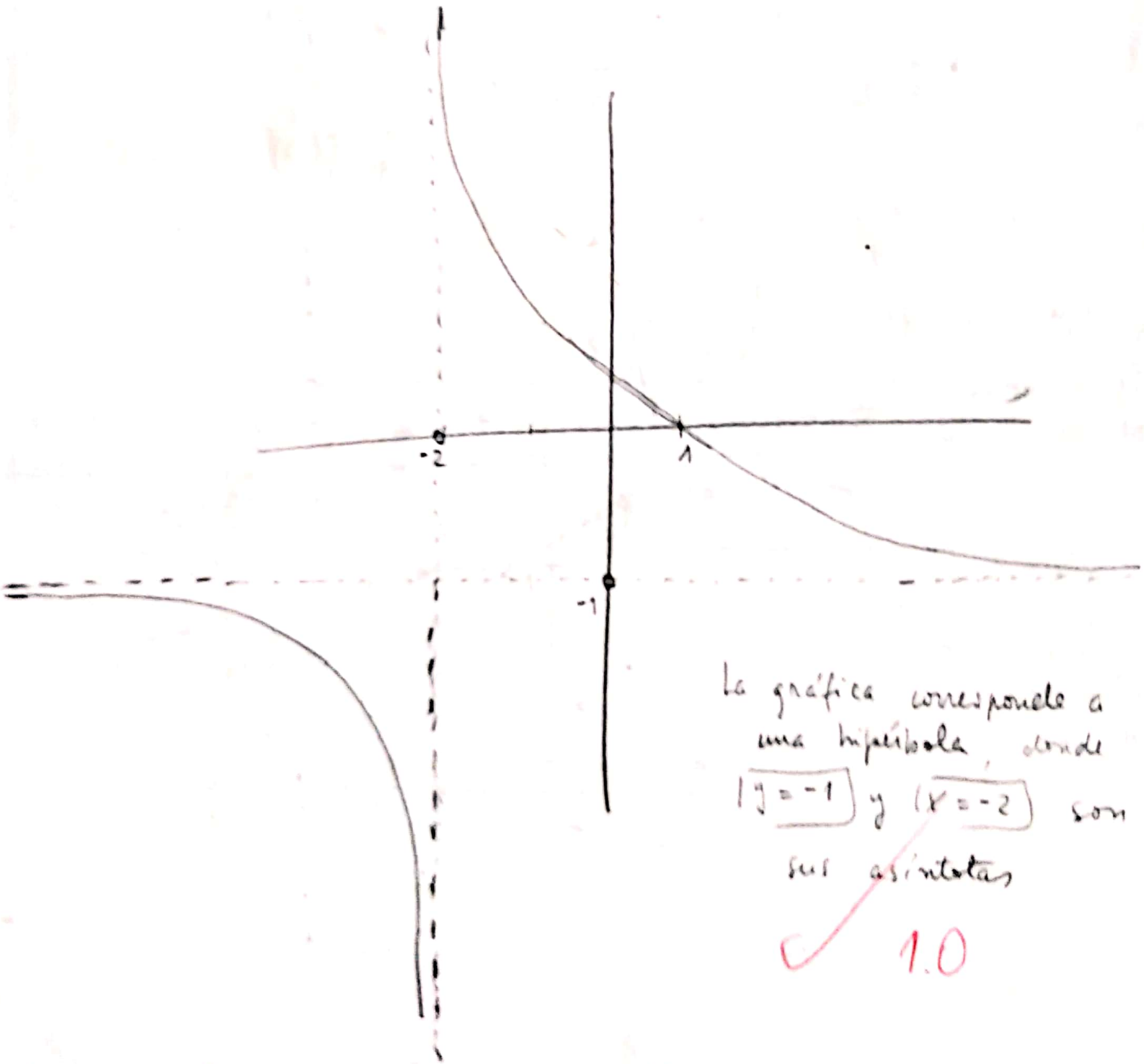
como $y \in$ (codominio de f) y por lo dicho en (a), $y \neq -1$, entonces, para ~~todo~~ $y \in \mathbb{R} - \{-1\}$, existe $x \in dom(f)$ dado por $x = \dfrac{1-2y}{1+y}$ tal que $f(x) = f\left(\dfrac{1-2y}{1+y}\right) = \dfrac{1 - \frac{1-2y}{1+y}}{2 + \frac{1-2y}{1+y}}$

$$f(x) = \frac{\frac{1+y+2y-1}{1+y}}{\frac{2+2y+1-2y}{1+y}} = \frac{3y}{3} = y.$$

$\therefore Rec(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

7.0

$1-x$	+	+	−
$x+2$	−	+	+
$f(x)$	−	+	−



La gráfica corresponde a una hipérbola, donde $\boxed{y=-1}$ y $\boxed{x=-2}$ son sus asíntotas

1.0

(c) $\dfrac{4\,f(0) + (f \circ f)(1)}{f^{-1}(4) + 3}$

como vimos en (a) $x = \dfrac{1-2y}{1+y}$, $y \neq -1$ por lo tanto $f^{-1}: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-2\}$ $\quad f^{-1}(x) = \dfrac{1-2x}{1+x}$

$$f^{-1}(4) = \frac{1-2\cdot 4}{1+4} = \frac{1-8}{5} = \frac{-7}{5}$$

por otro lado : $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\dfrac{1-x}{2+x}\right) = \dfrac{1 - \dfrac{1-x}{2+x}}{2 + \dfrac{1-x}{2+x}}$

$$(f \circ f)(x) = \frac{\dfrac{2+x+x-1}{\cancel{2+x}}}{\dfrac{4+2x+1-x}{\cancel{2+x}}} = \frac{2x-1}{x+5}$$

$f \circ f(1) = f(f(1))$
$= f(0)$

$$(f \circ f)(1) = \frac{2\cdot 1 - 1}{1+5} = \frac{2-1}{6} = \cancel{\frac{1}{6}} \quad \frac{1}{2}$$

además : $f(0) = \dfrac{1-0}{2+0} = \dfrac{1}{2}$

Por lo tanto : $\dfrac{4\,f(0) + (f \circ f)(1)}{f^{-1}(4) + 3} = \dfrac{4 \cdot \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{6}}}{\frac{-7}{5} + 3} = \dfrac{2 + \frac{1}{6}}{\frac{-7+15}{5}} = \dfrac{\frac{12+1}{6}}{\frac{8}{5}}$

$$= \frac{\frac{13}{6}}{\frac{8}{5}} = \frac{13 \cdot 5}{6 \cdot 8} = \frac{65}{48}$$

$$\therefore \frac{4\,f(0) + (f \circ f)(1)}{f^{-1}(4)+3} = \cancel{\frac{65}{48}}$$

0.7

Parte teorica

NOMBRE: MARCO GODOY

(3) Si $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

$(\Rightarrow)$

$$(A \cap B) \cap B^c = A \cap B^c$$

$$A \cap (B \cap B^c) = A \cap B^c$$

$$A \cap \phi = A \cap B^c$$

$$\phi = A \cap B^c$$

Si $A \cap B^c = \phi \Rightarrow (A \cap B^c) \cup B = \phi \cup B$

$(\Leftarrow)$

$$(A \cup B) \cap (B^c \cup B) = B$$

$$(A \cup B) \cap E = B \quad (E \text{ conjunto universo})$$

$$A \cup B = B$$

$\Rightarrow A \subseteq B$ (por propiedad vista en clases)

2.0

(4)

(a) Sea $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$$f(x_1) = f(x_2) \quad (\text{ya que } g \text{ es inyectiva})$$

$$x_1 = x_2 \quad (\text{ya que } f \text{ es inyectiva})$$

por lo tanto $(g \circ f)$ inyectiva

1.5

(b) Sea $z \in C$, como g es sobre, tenemos que existe $y \in B$ tal que $g(y) = z$, y como f es sobre tenemos que existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$, entonces, dado $z \in C$, existe $x \in A$ tal que

$$g(y) = g(f(x)) = z$$

, Por lo tanto $(g \circ f)$ es sobreyectiva.

1.5

(c) Por propiedad vista en clases, sabemos que:

(i) $g \circ f$ es inyectiva

(ii) $g \circ f$ es sobreyectiva

$\Rightarrow (g \circ f)$ es biyectiva.

Sea $(g \circ f)^{-1} : C \longrightarrow A$ tal que $[(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1}] = Id_C$

y $[(g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f)] = Id_A$

Afirmamos que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, en efecto $f^{-1} \circ g^{-1} : C \longrightarrow A$ y:

$$\begin{aligned}[(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})] &= [[g \circ (f \circ f^{-1})] \circ g^{-1}] \\ &= [[g \circ Id_B] \circ g^{-1}] \\ &= [g \circ g^{-1}] = Id_C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)] &= [[[f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g]] \circ f] \\ &= [[f^{-1} \circ Id_B] \circ f] \\ &= [f^{-1} \circ f] \\ &= Id_A\end{aligned}$$

1.0

por lo tanto $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

PERFECT

6 Límite de Funciones reales de Variable real

1. Calcular los siguientes límites y usando la definición probar su resultado.

(a) $\lim_{x\to 2} 3x+2$ (c) $\lim_{x\to 1} 3x^2+2x-5$ (e) $\lim_{x\to 3} |x-3|$

(b) $\lim_{x\to -3} 2x+5$ (d) $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}$ (f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{3x^2-2}{x^2+2}$

2. Calcule los siguientes límites si es que existen, justificando todos los pasos con los teoremas apropiados. Si el límite no existe, demuéstrelo.

(a) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^2-x-6}$ (c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$ (f) $\lim_{x\to 7} \dfrac{x^2-|x-7|-49}{|x-7|}$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$ (g) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{|x-1|+4}-2}{x^2-1}$

(b) $\lim_{t\to 9} \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$ (e) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x+1}{|x+1|}$

3. Demuestre o encuentre contraejemplos para las siguientes proposiciones:

F (a) Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ no existen, entonces $\lim_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$ no existe.

f (b) Si $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big)$ y $\lim_{x\to a} f(x)$ existen, entonces $\lim_{x\to a} g(x)$ existe.

(c) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$

(d) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^2)$

?? V (e) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 0} f(a-x)$ preguntar milton

(f) Si $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big)$ y $\lim_{x\to a} f(x)$ existen, y además $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$, entonces $\lim_{x\to a} g(x)$ existe.

f (g) Si $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big)$ y $\lim_{x\to a} f(x)$ existen, y además $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big) \neq 0$, entonces $\lim_{x\to a} g(x)$ existe.

4. Calcular los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$ 0

(b) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2-3x-10}{x^2-25}$ 7/10

(c) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ -2

(d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ 1/2

(e) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$ $3x^2$

(f) $\lim_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ $-1/56$

(g) $\lim_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ $-1/3$

(h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 1

(i) $\lim_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

(j) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ 4/3

(k) $\lim_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ 12

(l) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$ 2

(m) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$ 4

(n) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ 3/2

(o) $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$ -1

(p) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ 1/4

$$\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\cdot\frac{2+\sqrt{x-3}}{2+\sqrt{x-3}} = \frac{4-(x-3)}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})} = \frac{7-x}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})}$$

$$= -\frac{\cancel{x-7}}{(\cancel{x-7})(x+7)(2+\sqrt{x-3})} = \frac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})} = -\frac{1}{14\cdot 4} = -\frac{1}{56}$$

(q) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$ 1/6

(r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$ 3/2

(s) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x - 1}$ m

(t) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$ 1/3

(u) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+a} - \sqrt{x}$ 0

(v) $\lim\limits_{u\to -2} \dfrac{u^3 + 4u^2 + 4u}{u^2 - u - 6}$ 0

(w) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$

(x) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ 5

(y) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$ 1

(z) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3 + 10}}$ 1

5. Considerando que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(x)}{x} = 1$, calcular los siguientes límites.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(3x)}{x}$ 3

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(x^2)}{x}$ 1

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$ 1

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} x\, sen(\frac{1}{x})$ 1

(e) $\lim\limits_{x\to \alpha} \dfrac{sen(x-\alpha)}{x^2 - \alpha^2}$ $\frac{1}{2\alpha}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x}$ 0

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(\alpha x)}{\beta x}$ α/β

(h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{sen(2x-2)}{x^3 - 1}$ 2/3

(i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\tan(\pi x)}{x - 2}$ π

(j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{x}{cotg(x)} - \dfrac{\pi}{2\cos(x)}$ ← ????

(k) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{sen(2x-1)}{4x - 2}$ 1/2

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2sen(x-2)}{x^2 - 4}$ 1

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(\pi^2 x)}{x}$ π^2

(n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(\pi x)}{x^2}$ $\pi/2$

(o) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{sen(x-a)}{x^2 - a^2}$ 1/2a

(p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\cos(x)}}{x^2}$ 1/4

(q) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{sen(x) - \cos(x)}{1 - \tan(x)}$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(a+x) + sen(a-x) - 2sen(a)}{x^2}$ $-\operatorname{sen} a$

6. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$, determine

Preguntar a Milton

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$ e^{-1}

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$ e^{-1}

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{3x}\right)^{3x-2}$ e

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 1}\right)^{x^2+2x+1}$ e

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^x$ e

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$ e^2

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ e

(h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)^x$ $\sqrt{e}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + kx)^{\frac{1}{x}}$

(j) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+9}\right)^{x+1}$ e^3

Se recomienda usar transformación

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} (1 + f(x) - 1)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)[f(x) - 1]}$$

7. Encuentre $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0}$, donde $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ analizando los distintos casos de orden entre n y m.

8. Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Encuentre $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$. ¿Existe $\lim\limits_{x\to1} f(x)$? Grafique la función f.

9. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = sen(1/x)$ no posee límite cuando x tiende a cero.

10. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Dado cualquier $a \in \mathbb{R}$, demuestre que no existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

11. Sea la función $f : X \to \mathbb{R}$ y $a \in X'$. Pruebe que para que exista $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ es suficiente que, para toda sucesión $x_n \in X \setminus \{a\}$ tal que $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$, la sucesión $(f(x_n))$ sea convergente.

lton a milton →

12. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por ???

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ sen(1/x) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Demuestre que para todo $c \in [-1, 1]$ existe una sucesión de puntos $x_n \neq 0$ tales que $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) = c$.

13. Dada $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \dfrac{sen(1/x)}{1 + 2^{1/x}}$, determine el conjunto de los números L tales que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) = L$ con $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$. $[-1,1]$

14. Sobre el conjunto de las funciones con valores reales definidas sobre el intervalo (a, ∞) se define la siguiente relación: $f \sim g$ si, y sólo si, $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - g(x)] = 0$. Muestre que esta es una relación de equivalencia.

15. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona. Pruebe que el conjunto de los puntos $a \in A'$ para los cuales no se tiene que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ es numerable.

16. Sean $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$, con $f(X) \subseteq Y$. Si para $a \in X'$ y $b \in Y'$ se tiene $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$ y además, $f(x) \neq b$ para todo $x \in X - \{a\}$, entonces $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$. Muestre que la condición $b \in Y'$ se deduce de tener que $f(x) \neq b$ para $x \neq a$.

17. Para todo número real definimos la función parte entera, denotada por $[x]$, que indica el mayor de los enteros menores o iguales a x. Muestre que si a y b son números positivos, entonces :

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] = \frac{b}{a} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to0^+} \frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right] = 0.$$

Pruebe también que, en el primer caso, el límite a la izquierda es el mismo, sin embargo, en el segundo caso el límite es $+\infty$ cuando $x \to 0^-$.

Prueba "Extra" Ecuaciones Diferenciales | Nombre: Marco Godoy V.

$\boxed{7}$

Problema 1. Escriba en forma implícita la solución de la ecuación diferencial

$$x' = -\frac{8t^3x}{3+2t^4+9x^2} \quad , \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad t^2+x^2<100$$

Problema 2. Resuelva el problema de Cauchy

$$x' = 2y+4z \quad , \quad y' = 3z \quad , \quad z' = 5z$$
$$x(0)=2 \qquad y(0)=3 \qquad z(1)=5$$

Problema 3. Sea la ecuación de Bernoulli $x' = f(t)x + g(t)x^{\alpha}$

$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas, $\alpha \in \mathbb{R}$

Se sabe que existe una solución

$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$ tal que 2φ es también una solución. ¿Qué se puede decir de f, g, α?

Desarrollo.

2p

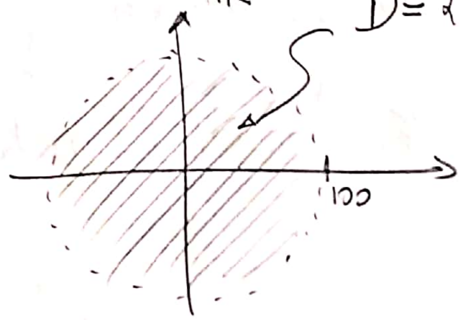
Problema 1.

Sea $A(t,x) = 8t^3x$, $B(t,x) = 3+2t^4+9x^2$

$$\left.\begin{aligned} \partial_t B &= 8t^3 \\ \partial_x A &= 8t^3 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \partial_t B = \partial_x A$$

lo anterior dice que la ecuación es cerrada. Además, sea D el dominio de la ecuación dado por la región $t^2+x^2<100$, que determina una región limitada por una circunferencia

$\mathbb{R}^2$ $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 / t^2 + x^2 < 100\}$



Como D es un conjunto convexo (un círculo es convexo) entonces D es estrellado. Luego la ecuación es exacta, es decir,

$\exists\ F: D \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = A \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial x} = B$$

$$\partial_t F = A \Rightarrow \partial_t F = 8t^3 x \Rightarrow F = \int 8t^3 x\, dt + \varphi(x)$$

$$F = 2t^4 x + \varphi(x)$$

Además, $\dfrac{\partial F}{\partial x} = B \Rightarrow 2t^4 + \varphi'(x) = 3 + 2t^4 + 9x^2$

$$\varphi'(x) = 3 + 9x^2$$

$$\varphi(x) = 3x + 3x^3 + r \quad , \quad r \in \mathbb{R}$$

Sea $\psi: I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable ($I \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto), donde $Gr(\psi) \subset D$ solución de la ecuación diferencial, entonces

$$2t^4\psi(t) + 3\psi(t) + 3(\psi(t))^3 = \tilde{r} \quad , \tilde{r} \in \mathbb{R}$$

Desarollo problema 2.

(2p)

$$x' = 2y + 4z \qquad y' = 3z \qquad z' = 5z$$
$$x(0) = 2 \qquad y(0) = 3 \qquad z(1) = 5$$

Resolvemos $z' = 5z$
$z(1) = 5$

inmediatamente la solución es $z = ke^{5t}$, $k \in \mathbb{R}$.
Evaluando en $t=1$

$$z(1) = ke^5 = 5 \qquad \therefore\ k = \frac{5}{e^5}$$

Luego la solución de $z' = 5z$, $z(1) = 5$ es $z = \frac{5}{e^5} e^{5t}$

Reemplazando en $y' = 3z$ tenemos:

$$y' = \frac{15}{e^5} e^{5t}$$
$$y(0) = 3$$

$$y' = \frac{15}{e^5} e^{5t} \Longrightarrow y(t) = \int \frac{15}{e^5} e^{5t}\,dt + \tilde{k} \quad ; \quad \tilde{k} \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = \frac{3}{e^5} e^{5t} + \tilde{k}$$

Por el valor inicial, $y(0) = \frac{3}{e^5} + \tilde{k} = 3 \quad \therefore\ \tilde{k} = 3 - \frac{3}{e^5}$

$\tilde{k} = \frac{3e^5 - 3}{e^5}$. Luego la solución es $y(t) = \frac{3}{e^5} e^{5t} + \frac{3e^5 - 3}{e^5}$

Reemplazando las soluciones anteriores en $x' = 2y + 4z$ tenemos

$$x' = \frac{6}{e^5} e^{5t} + \frac{6e^5 - 6}{e^5} + \frac{20}{e^5} e^{5t}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{6}{5e^5} e^{5t} + \frac{6e^5 - 6}{e^5} t + \frac{4}{e^5} e^{5t} + \hat{k} \quad ; \quad \hat{k} \in \mathbb{R}$$

Por el valor inicial

$$x(0) = \frac{6}{5e^5} + \frac{4}{e^5} + \hat{k} = 2$$

$$\therefore \hat{k} = 2 - \frac{6}{5e^5} - \frac{4}{e^5}$$

Por lo tanto, la solución es

$$x(t) = \frac{6}{5e^5} e^{5t} + \frac{6e^5 - 6}{e^5} t + \frac{4}{e^5} e^{5t} + 2 - \frac{6}{5e^5} - \frac{4}{e^5}$$

Desarrollo Problema 3. 2p

Se sabe que existe $\varphi : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ solución de $x' = f(t)x + g(t)x^{\alpha}$, entonces

$$\varphi'(t) = f(t)\varphi(t) + g(t)(\varphi(t))^{\alpha} \qquad (1)$$

Y además 2φ es también solución, o sea

$$2\varphi'(t) = 2f(t)\varphi(t) + 2^{\alpha} g(t)(\varphi(t))^{\alpha} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(t) = f(t)\varphi(t) + 2^{\alpha-1} g(t)(\varphi(t))^{\alpha}$$

Igualando (1), (2)

$$f(t)\varphi(t) + g(t)(\varphi(t))^{\alpha} = f(t)\varphi(t) + 2^{\alpha-1} g(t)(\varphi(t))^{\alpha}$$

$$g(t)(\varphi(t))^{\alpha} = 2^{\alpha-1} g(t)(\varphi(t))^{\alpha}$$

$$\therefore (1 - 2^{\alpha-1}) g(t)(\varphi(t))^{\alpha} = 0$$

Si $g(t) \neq 0$, $\varphi(t) \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, entonces $1 - 2^{\alpha-1} = 0$

$\therefore \alpha = 1$

Si $\alpha \neq 1$, entonces $g(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ o $\varphi(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

Dada la forma de la ecuación de Bernoulli, $x' = f(t)x + g(t)x^{\alpha}$ vemos que la función "cero" $0 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $0(t) = 0$ es solución. De lo anterior, si tenemos una solución φ (no trivial), donde 2φ es también solución, se sigue que, o $g(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, o $\alpha = 1$.