Problema 1. Sea K un cuerpo ordenado. Pruebe que $a^2+b^2=0$ si y sólo si $a=b=0$. Ilustre con un ejemplo que ocurrir $a^2+b^2=0$ en un cuerpo no ordenado sin que necesariamente se tenga $a=b=0$.

Problema 2. Sea K un cuerpo ordenado. Dados $n \in \mathbb{N}$ y $x \in K$, con $x<1$. Pruebe que $(1-x)^n \geq 1-nx$.

Problema 3. En un cuerpo ordenado, si a y $a+x$ son positivos, probar que $(a+x)^n \geq a^n + na^{n-1}x$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 4. Probar que en un cuerpo ordenado K, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) K es arquimediano.

(ii) $\mathbb{Z}$ no está acotado superior ni inferiormente.

(iii) $\mathbb{Q}$ no está acotado superior ni inferiormente.

Problema 5. Demuestre que un cuerpo ordenado K es arquimediano si y sólo si para cada $\varepsilon>0$ dado, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $1/2^n < \varepsilon$.

Problema 6. Sean $a \in \mathbb{Q}$, con $a \neq 0$, y $x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Pruebe que $ax, a+x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Ilustre con ejemplos que existen números irracionales x e y tales que $x+y$ y xy son racionales.

Problema 7. Sean a, b, c y d números racionales. Pruebe que $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$ si y sólo si $a=c$ y $b=d$.

Problema 8. Pruebe que $\inf(\{1/n \ : \ n \in \mathbb{N}\})=0$.

Problema 9. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, conjuntos no vacíos. Suponga que $x \leq y$ para cada $x \in A$ y cada $y \in B$. Suponga que existen $\sup(A)$ e $\inf(B)$. Pruebe que $\sup(A) \leq \inf(B)$. Además, pruebe que $\sup(A)=\inf(B)$ si y sólo si para cada $\varepsilon>0$, existen $x \in A$ e $y \in B$, tales que $y-x<\varepsilon$.

Problema 10. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Suponga que A está acotado. Pruebe que si $B \subset A$ entonces $\inf(A) \leq \inf(B) \leq \sup(B) \leq \sup(A)$.

Problema 11. Dados conjuntos no vacíos $A, B \subset \mathbb{R}$, se define su suma como $A+B=\{a+b \ : \ a \in A, \ b \in B\}$.

Suponga que A y B están acotados. Pruebe

1. $A+B$ está acotado
2. $\sup(A+B) = sup(A) + \sup(B)$
3. $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.

Problema 12. Dados conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ y un número real λ, se define el conjunto $\lambda A = \{\lambda a \ : \ a \in A\}$.

Probar

1. Si A está acotado, entonces λA también está acotado.
2. Suponga que A está acotado y que $\lambda > 0$, entonces $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$ e $\inf(\lambda A) = \lambda \inf(A)$.
3. Suponga que A está acotado y que $\lambda < 0$, entonces $\sup(\lambda A) = \lambda \inf(A)$ e $\inf(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

Problema 13. Dados conjuntos de números reales A y B, se define el conjunto producto de A y B por $A \cdot B = \{a \cdot b \ : \ a \in A, , b \in B\}$.

Si A y B están acotados, pruebe que $A \cdot B$ está acotado.

Pruebe además, que si A y B están formado de números reales positivos, entonces $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$ e $\inf(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B)$.

Problema 14. Decimos que una función $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es *acotada* si su conjunto imagen $f(X) = \{f(x) \ : \ x \in X\}$ es acotado.

Si f es acotado, definimos $\sup(f) = \sup(f(X))$ e $\inf(f) = \inf(f(X))$.

Ahora, dadas funciones $f, g : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos las funciones $f+g$, $f \cdot g$ y f/g, caso $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ y $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, para todo $x \in X$.

Pruebe

1. Si f y g están acotadas, entonces $g + f$ está acotada.
2. $(f+g)(X) \subset f(X) + g(X)$.
3. $\sup(f+g) \leq \sup(f) + \sup(g)$.
4. $\inf(f+g) \geq \inf(f) + \inf(g)$.
5. Ilustre con ejemplos que las desigualdades estrictas pueden ocurrir en los items (3) y (4).

6. Pruebe que $(f\cdot g)(X)\subset f(X)\cdot g(X)$. Suponga que f y g están acotadas deduzca que $f\cdot g$ está acotada y pruebe que si f y , g son positiva, entonces $\sup(f\cdot g)\leq \sup(f)\cdot\sup(g)$ e $\inf(f\cdot g)\geq \inf(f)\cdot\inf(g)$. Ilustre con un ejemplo que las desigualdades pueden ser esctrictas.

7. Si f es positiva y acotada, se tiene $\sup(f^2)=\sup(f)^2$, donde $f^2(x)=f(x)\cdot f(x)$, para todo $x\in X$.

Problema 15. Demuestre que la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow]-1,1[$ es una biyección continua, y que su función inversa también es continua.

Observación. Si $f:X\longrightarrow Y$ es una función biyectiva, tal que f y f^{-1} son continua, decimos entonces que f es un ***homeomorfismo***.

Problema 16. Sea $a>0$ un número real dado. Pruebe que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida por

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right),\qquad n\geq 1$$

donde $x_1=c>0$ es arbitrario, es convergente. Muestre además, que $L=\lim_{n\to\infty}x_n$ satisface $L^2=a$.

Problema 17. Suponga que $\lim_{n\to\infty}x_n=0$. Defina $y_n=\max\{|x_j|\ :1\leq j\leq n\}$. Pruebe que $\lim_{n\to\infty}y_n=0$ ¿Vale un resultado análogo si $\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha\neq 0$?

Problema 18. Pruebe que si $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ y $\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$, entonces existe $\lim_{n\to\infty}y_n$ y es igual a a,.

Problema 19. Pruebe que si $\lim_{n\to\infty}x_n=a\neq$ y $\lim_{n\to\infty}x_ny_n=b$, entonces $\lim_{n\to\infty}y_n=\frac{b}{a}$.

Problema 20. Sabiendo que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$. Pruebe que $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)n=e^{-1}$. (Ind. Demuestre primero que si $y_n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, entonces $\lim_{n\to\infty}y_n(1+\frac{1}{n})^n=1$.)

Problema 21. Sean $a,b\in\mathbb{R}$, números no negativos. Pruebe que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max\{a,b\}$.

Problema 22. Sea $x_1=1$ y defina $x_n=1+\sqrt{x_n}$. Pruebe que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada.

Problema 23. Si $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales positivos, con $\lim_{n\to infty}(t_1+t_2+\cdots+t_n)=+\infty$,. Pruebe que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n}{t_1+t_2+\cdots+t_n}=a.$$

Deduzca que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a\,.$$

Problema 24. Demostar que si $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = a$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = a$. Use esto para probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. (ind. Pruebe que $\lim_{n\to\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) = 0$)

Problema 25. Sea $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos abiertos. Pruebe que

1. $y + A = \{x + y \ : \ x \in A\}$,
2. $y \cdot A = \{y \cdot x \ \ x \in A\}$, siempre que $y \neq 0$,
3. $A + B$,
4. $A \cdot B = \{x \cdot y \ : \ x \in A\,,\, y \in B\}$,

son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$.

Problema 26. Pruebe que: $\text{interior}(X \cap Y) = \text{interior}(X) \cap \text{interior}(Y)$, $\text{interior}(X \cup Y) \supset \text{interior}(X) \cup \text{interior}(Y)$, $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$, $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$, $(X \cup Y)' = X' \cup Y'$.

Problema 27. Sea $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$$

Probar que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe. Si extendemos f a una nueva función $\tilde{f}$, definida por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿Es la nueva función $\tilde{f}$ continua en $x = 0$? Si no, que tipo de discontinuidad tiene $\tilde{f}$ en $x = 0$.

Problema 28. Defina $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(1/x)}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿Es f continua en $x = 0$? Si no, que tipo de discontinuidad tiene en ese punto.

Problema 29. Pruebe que $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ es un homeomorfismo.

Problema 30. Sean $X \subset \mathbb{R}$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f tiene un punto fijo $x_f \in X$ si ocurre $f(x_f) = x_f$. Pruebe que si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que satisface $f([a,b]) \supset [a,b]$ o $f([a,b]) \subset [a,b]$, entonces f tiene un punto fijo en $[a,b]$. Pruebe que si f además satisface $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$ para todo $x, y \in X$, con la constante λ tal que $0 \leq \lambda < 1$, entonces el punto fijo es único.

Problema 31. Sea k una constante. Sea $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una afunción continua. Pruebe que

(a) El conjunto $O = \{x \in X \ : \ f(x) < k\}$ es abierto en X.

(b) El conjunto $F = \{\{x \in X \ : \ f(x) \leq k\}$ es cerrado en X.

Problema 32. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Pruebe que

1. el conjunto $Z_f = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) = 0\}$ es cerrado.
2. el conjunto $I_{f,g} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) = g(x)$ es cerrado.

Problema 33. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones. Se definen las nuevas funciones $f \vee g$, $f \wedge g, f^+, f^- : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ y $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$.

Suponga que f y g son continuas. Pruebe que $f \vee g$, $f \wedge g$, f^+ y f^- son continuas. Si las funciones f, g son uniformemente continuas, pruebe que $f \vee g$, $f \wedge g$, f^+ y f^- son uniformemente continuas.

Graficar las funciones $f \vee g$, $f \wedge g$, f^+ y f^- para f y g arbitrarias.

Problema 34. Sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Si $\overline{Y} \subset X$ y $f(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$. Pruebe que $f(y) = g(y)$ para todo $y \in \overline{Y}$. Usando lo anterior, pruebe que si $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $f(r) = g(r)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Pruebe que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 35. Sean $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continaus. Si $f(1) = g((0)$ pruebe que la función $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ g(2x-1) & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

es continua. Pruebe también que la función $k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $k(x) = f(1-x)$ es continua.

Problema 36. Construya una biyección $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea discontinua en cada punto.

Problema 37. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$ para todo $x, y \in X$, donde $0 \leq \lambda < 1$ es una constante. Pruebe que f es continua en X. Ilustre con ejemplos, dos al menos. Una función que satisface esta condiciones es llamada *función Lipschitz*.

Problema 38. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^{\alpha}$ para todo $x, y \in X$, donde $\alpha > 0$ es una constante. Pruebe que f es continua en X. Ilustre con ejemplos, dos al menos. Una función que satisface esta condiciones es llamada *función Hölder*.

Problema 39. Pruebe que $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es uniformemente continua, pero que $g(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ es continua pero no uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

/**Problema 40.** Sea $c \in \mathbb{R}$ y sea f definida para $x \in (c, \infty)$ y $f(x) > 0$ para todo $x > c$. Muestre que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$ si, y sólo si $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Problema 41. Suponga que f y g tienen límites en $\mathbb{R}$ cuando $x \to \infty$ y que $f(x) \leq g(x)$ para $x \in (a, \infty)$. Pruebe que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \leq \lim\limits_{x \to \infty} g(x)$.

/**Problema 42.** Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Pruebe que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ si, y sólo si, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(1/x) = L$.

Problema 43. Muestre que si $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ es tal que $\lim\limits_{x \to \infty} xf(x) = L$ donde $L \in \mathbb{R}$, entonces $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Problema 44. Suponga que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ donde $L > 0$, y que $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \infty$. Muestre que $\lim\limits_{x \to c} f(x)g(x) = \infty$. Si $L = 0$, muestre por un ejemplo que esta conclusión puede fallar.

Problema 45. Encuentre funciones f, $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ con $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$ y que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - g(x) = 0$. ¿Se pueden encontrar funciones con las características anteriores, con $g(x) > 0$ para $x > 0$ y tales que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$?

Problema 46. Sean f, $g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ y supongamos que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$. Pruebe que $\lim\limits_{x \to \infty} f \circ g(x) = L$.

Problema 47. Sobre el conjunto de las funciones con valores reales definidas sobre el intervalo (a, ∞) se define la siguiente relación: $f \sim g$ si, y sólo si, $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - g(x)] = 0$. Muestre que esta es una relación de equivalencia.

Problema 48. Sobre el conjunto de las funciones con valores reales definidas sobre el intervalo (a, ∞) se define la siguiente relación: $f \approx g$ si, y sólo si, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Muestre que esta es una relación de equivalencia.

Problema 49. Encuentre las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de la función racional:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{2x + 1}.$$

Grafique las asíntotas y deduzca como se ubica el gráfico de f con respecto a estas asíntotas.

Problema 50. Encuentre las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de la función racional:

$$f(x) = \frac{(x-3)^2(2x+3)}{3(x^2-1)}.$$

Grafique las asíntotas y deduzca como se ubica el gráfico de f con respecto a estas asíntotas.

Problema 51. Evalúe los siguientes límites si es que existen, o bien muestre cuales de ellos no existen.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1}$ $x \neq 1$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}$ $x \neq 1$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{\sqrt{x}}$ $x > 0$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x+2}{\sqrt{x}}$ $x > 0$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ $x > -1$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ $x > 0$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} + 3$ $x > 0$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}$ $x > 0$

Problema 52. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona. Pruebe que el conjunto de los puntos $a \in A'$ para los cuales no se tiene que $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$ es numerable.

Problema 53. Dado $a > 1$, definamos $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ poniendo para cada $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $f(p/q) = a^{p/q}$. Pruebe que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Concluya que para cada $b \in \mathbb{R}$ existe $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, siendo este límite igual a $f(b)$ si $b \in \mathbb{Q}$. Llamemos a este límite a^b. Pruebe que $a^b \cdot a^{b'} = a^{b+b'}$ y que $b < b'$ implica $a^b < a^{b'}$.

Problema 54. Dado $a > 1$, definamos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = a^x$. Pruebe que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ y que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

Problema 55. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)$ si x es irracional y por $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = q$ si p/q es una fracción irreducible con $p > 0$, $f(0) = 0$. Muestre que f es no acotada en cualquier intervalo no degenerado.

Problema 56. Sean $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$, con $f(X) \subseteq Y$. Si para $a \in X'$ y $b \in Y'$ se tiene $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$ y además, $f(x) \neq b$ para todo $x \in X - \{a\}$, entonces $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$. Muestre que la condición $b \in Y'$ se deduce de tener que $f(x) \neq b$ para $x \neq a$.

Problema 57. Para todo número real definimos la función parte entera, denotada por $[x]$, que indica el mayor de los enteros menores o iguales a x. Muestre que si a y b son números positivos, entonces :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] = \frac{b}{a} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right] = 0.$$

Pruebe también que, en el primer caso, el límite a la izquierda es el mismo, sin embargo, en el segundo caso el límite es $+\infty$ cuando $x \to 0^-$.

Problema 58. Dadas $f, g : X \to \mathbb{R}$. Definamos $h : X \to \mathbb{R}$ por $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Sea $a \in X'$. Pruebe que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, entonces $\lim\limits_{x\to a} h(x) = N$, donde N es el mayor de los dos números L y M.

Problema 59. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función acotada en cada intervalo acotado. Si
$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = L$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = L$.

Problema 60. Sea $a < b < c$. Suponga que f es continua en $[a, b]$, que g es continua en $[b, c]$, y que $f(b) = g(b)$. Defina,os h en $[a, c]$ por $h(x) := f(x)$ para $x \in [a, b]$, y $h(x) := g(x)$ para $x \in (b, c]$. Pruebe que h es continua en $[a, c]$.

Problema 61. Determine los puntos donde las siguientes funciones son continuas:

(a) $f(x) = [x]\, x \in \mathbb{R}$

(b) $g(x) = x[x],\ x \in \mathbb{R}$

(c) $h(x) = [\operatorname{sen} x]\, x \in \mathbb{R}$

(d) $k(x) = [1/x],\ x \neq 0$

donde [ ] indica a la función parte entera.

Problema 62. Sea $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$. ¿Puede f ser definida continuamente en $x = 2$?

Problema 63. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$ continua en $c \in A$. Muestre que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una vecindad U de c tal que si $x, y \in A \bigcap U$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Problema 64. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en c y sea $f(c) > 0$. Muestre que existe una vecindad U de c tal que si $x \in U$, entonces $f(x) > 0$.

Problema 65. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ y sea $S = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$, el conjunto de los ceros de f. Pruebe que el conjunto S es cerrado en $\mathbb{R}$.

Problema 66. Sea $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, sea $f : B \to \mathbb{R}$ y sea g la restricción de f a A.

1. Muestre que si f es continua en $c \in A$ entonces g es continua en c.
2. Muestre por medio de un ejemplo que si g es continua en c, no necesariamente se tiene que f es continua en c.

Problema 67. Pruebe, usando la definición, que la función valor absoluto $f(x) := |x|$ es continua en todo punto $c \in \mathbb{R}$.

Problema 68. Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}$ y que $f(r) = 0$ para todo número racional r. Pruebe que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 69. Defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} 2x & x \in \mathbb{Q} \\ x + 3 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Encuentre todos los puntos donde f es continua.

Problema 70. Sea $A = (0, \infty)$ y sea $k : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$k(x) = \begin{cases} n & x = \dfrac{m}{n} \in A \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in A \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

donde en el primer caso la fracción es irreducible. Pruebe que f no es acotada en ningún intervalo abierto en $(0, \infty)$. Concluya que k no es continua en ningún punto de A.

Problema 71. Sea $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ acotada pero tal que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ no exista. Pruebe que existen dos sucesiones (x_n) e (y_n) en $(0, 1)$ con $\lim x_n = 0$ y $\lim y_n = 0$ pero tales que $\lim f(x_n)$ y $\lim f(y_n)$ existen pero no son iguales.

Problema 72. Determine los puntos donde las siguientes funciones son continuas. Justifique cuidadosamente en cada caso usando los teoremas demostrados en clases.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$, $\quad x \in \mathbb{R}$

(b) $g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, $\quad x \geq 0$

(c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{1 + |\mathrm{sen} x|}}{x}$, $\quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(d) $k(x) = \cos \sqrt{1 + x^2}$, $\quad x \neq 0$

Problema 73. Muestre que si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en $A \subseteq \mathbb{R}$ y si $n \in \mathbb{N}$, entonces la función $f^n(x) = (f(x))^n$, $x \in A$, es continua en A.

Problema 74. De un ejemplo de funciones $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que f sea discontinua en todo punto de A, g sea continua en A y sin embargo $g \circ f$ sea continua en A.

Problema 75. Sea $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $\mathbb{R}$ tales que $f(r) = g(r)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Pruebe que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 76. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ tal que $h\left(\dfrac{m}{2^n}\right) = 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $h(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 77. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}$, muestre que el conjunto $P = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ es un conjunto abierto.

Problema 78. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas en $\mathbb{R}$. Muestre que el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > g(x)\}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$.

Problema 79. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **aditiva** si $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Pruebe que si f es aditiva y continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces es continua en todo punto $x \in \mathbb{R}$.

Problema 80. Suponga que f es una función continua y aditiva en $\mathbb{R}$. Muestre que $f(x) = f(1)x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (Indicación: Pruebe primero para $x \in \mathbb{Q}$).

Problema 81. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface la relación $g(x+y) = g(x)g(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Muestre que si g es continua en $x = 0$, entonces g es continua en todo punto de $\mathbb{R}$. Pruebe además, que si $g(a) = 0$ para algún $a \in \mathbb{R}$, entonces $g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Problema 82. Pruebe que la función $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ es continua en todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 83. Sea $I := [a, b]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para cada $x \in I$. Pruebe que existe un número $\alpha > 0$ tal que $f(x) \geq \alpha$ para todo $x \in I$.

Problema 84. Sea $I := [a, b]$ y sean $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas sobre I. Muestre que el conjunto $\{x \in I \, : \, f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

Problema 85. Sea $I := [a, b]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I tal que para cada $x \in I$, existe $y \in I$ tal que $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$. Pruebe que existe un punto $c \in I$ tal que $f(c) = 0$.

Problema 86. Muestre que todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real.

Muestre que el polinomio $p(x) = x^4 + 7x^3 - 9$ tiene al menos dos raíces reales. Calcule con dos decimales de exactitud.

Problema 87.

Problema 88. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(0) = f(1)$. Pruebe que existe un punto $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tal que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$. Concluya que en todo tiempo t, existen puntos antipodales sobre el eje del ecuador que tiene la misma temperatura.

Problema 89. Muestre que la ecuación $x = \cos x$ tiene una solución en el intervalo $[0, 2\pi]$. Calcule este punto con tres decimales de exactitud.

Problema 90. Sea $I := [a, b]$, sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua, y sea $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Sea $W = \{x \in I \, : \, f(x) < 0\}$, y sea $w := \sup W$. Pruebe que $f(w) = 0$.

Problema 91. Sea $I := [0, \pi/2]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sup\{x^2, \cos x\}$ para $x \in I$. Muestre que f tiene un mínimo absoluto $x_0 \in I$. Muestre que x_0 es la solución de la ecuación $\cos(x) = x^2$.

Problema 92. Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y que además $\lim\limits_{x \to -\infty} f = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f = 0$. Pruebe que f es acotada en $\mathbb{R}$ y que además debe tener o un máximo o un mínimo en $\mathbb{R}$. Muestre mediante ejemplos que no es necesario, sin embargo, que tenga máximo y mínimo a la vez.

Problema 93. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $\mathbb{R}$ y sea $\beta \in \mathbb{R}$. Muestre que si $x_0 \in \mathbb{R}$ es tal que $f(x_0) < \beta$, entonces existe una vecindad U de x_0 tal que $f(x) < \beta$ para todo $x \in U$.

Problema 94. De un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\}$ no es ni abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$.

Problema 95. Si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es continua y su imagen tiene sólo valores racionales, ¿Debe ser f una función constante?, ¿Y si su imagen toma sólo valores irracionales?

Problema 96. Sea $I := [a, b]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función, no necesariamente continua, talque para cada $x \in I$, la función es acotada en una vecindad U_x de x. Pruebe que f es acotada en I.

Problema 97. Sea $J := (a, b)$ y sea $g : J \to \mathbb{R}$ una función continua con la propiedad que para todo $x \in J$, la función g es acotada en una vecindad V_x de x. Muestre que g no necesariamente es acotada sobre J

Problema 98. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f([0, 1]) \subseteq [0, 1]$. Muestre que f tiene un punto fijo $x_0 \in [0, 1]$, vale decir, $f(x_0) = x_0$.

Problema 99. Un monje budista vive en una cabaña al pie de una montaña. Cada noche, al ponerse el sol, deja la cabaña, sube a la montaña por un sendero muy hollado, medita en varios puntos a lo largo del trayecto, y a la mañana siguiente, exactamente al alba, está de regreso en su cabaña. Los lugareños próximos observaban variaciones considerables en este ritual, siendo virtualmente imposible predecir, por ejemplo, donde estaría el monje a media noche. Sin embargo, uno de los lugareños conjeturó lo siguiente: de disponerse de los horarios detallados de dos de esas excursiones nocturnas, podría hallarse un punto de coincidencia, al menos, entre ambos, es decir, de una muestra, como mínimo, de que el monje había estado en el mismo punto del camino a la misma hora ambas noches. Los otros lugareños rechazaron esta conjetura como improbable. ¿Qué tiene que decir al respecto?

udo

Problema 100. ¿Existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que sea biyectiva discontinua en todos los puntos?

Problema 101. ¿ Existe una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ que sea biyectiva, continua pero que $f^{-1} : B \to A$ no sea continua?

Problema 102. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función arbitraria. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto C_n, formado por los punto $a \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: existe un intervalo abierto I, que contiene a a, tal que $x, y \in I$ implica $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$. Pruebe que cada C_n es un conjunto abierto y que f es continua en un punto a si, y solamente si, $a \in C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluya que el conjunto de puntos donde cualquier función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua es la intersección numerable de conjuntos abiertos.

Problema 103. Demuestre usando el problema anterior que no existe una función que sea continua sólo en los números racionales y discontinua en los irracionales.

Problema 104. Sea $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x - \pi}$ para $x \in \mathbb{Q}$. Demuestre que f es continua en $\mathbb{Q}$. ¿Qué pasa en $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$?, ¿Contradice esto el ejercicio anterior?

Problema 105. Muestre que no existe una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que transforme todo número racional en un irracional y viceversa.

Problema 106. Pruebe que la función $f(x) = 1/x$, $x \geq 1$, es uniformemente continua en el intervalo $[1, \infty)$.

Problema 107. Muestre que las siguientes funciones no son uniformemente continuas en los dominios que se señalan:

1. $f(x) = 1/x, \qquad D(f) = (0, 1);$
2. $g(x) = x^2, \qquad D(g) = \mathbb{R};$
3. $h(x) = 1/x^2, \qquad D(h) = (0, \infty);$
4. $k(x) = \operatorname{sen}(1/x), \qquad D(k) = (0, \infty).$

Problema 108. Muestre que la función $f(x) = 1/(1 + x^2)$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Problema 109. Muestre que si f,g son funciones uniformemente continuas de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, entonces $f + g$ es una función uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Problema 110. Muestre que si f y g son funciones reales uniformemente continuas sobre $\mathbb{R}$ y si ambas son acotadas en $\mathbb{R}$, entonces el producto fg es una función uniformemente continua.

Problema 111. Si $f(x) = x$ y $g(x) = \text{sen}(x)$, muestre que ambas funciones son uniformemente continuas en $\mathbb{R}$, sin embargo, el producto fg no es unformemente continuo en $\mathbb{R}$.

Problema 112. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua en A. Pruebe que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en A, entonces $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Problema 113. Sea $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua en $(0,1]$, y sea $L = \lim f(1/n)$. Pruebe que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cualquier sucesión tal que $\lim x_n = 0$ entonces $\lim f(x_n) = L$. Pruebe usando este resultado que la función $\text{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0,1]$.

Problema 114. Suponga que f es uniformemente continua en (a,b). Muestre que f puede ser definida sobre a y b de manera que la extensión sea continua en $[a,b]$.

Problema 115. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua en A. Muestre que si A es un conjunto acotado, entonces $f(A)$ es un conjunto acotado.

Problema 116. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y suponga que $f : A \to \mathbb{R}$ tiene lasiguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$, existe una función $g_\varepsilon : A \to \mathbb{R}$, tal que g_ε es uniformemente continua en A y $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$. Pruebe que f es uniformemente continua en A.

Problema 117. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **periódica** de período p si $f(x+p) = f(p)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Muestre que si f es una función continua y periódica en $\mathbb{R}$ es acotada y uniformemente continua.

Problema 118. Calcular los siguientes límites y demuestre su resultado.

(a) $\lim\limits_{x\to 2} 3x + 2$ (b) $\lim\limits_{x\to -3} 2x + 5$ (c) $\lim\limits_{x\to 1} 3x^2 + 2x - 5$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x}$ (e) $\lim\limits_{x\to 3} |x - 3|$ (f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - 2}{x^2 + 2}$

Problema 119. Calcular los siguientes límites si existen

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^2-3x-10}{x^2-25}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(e) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

(q) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

(r) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

(s) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x-1}$

(t) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

(u) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \sqrt{x+a}-\sqrt{x}$

(v) $\displaystyle\lim_{u\to -2} \frac{u^3+4u^2+4u}{u^2-u-6}$

(w) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$

(x) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

(y) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

(z) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$

Problema 120. Si $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$, calcule los siguientes límites

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(3x)}{x}$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x^2)}{x}$

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x}$

(d) $\lim_{x \to \infty} x \,\text{sen}(\frac{1}{x})$

(e) $\lim_{x \to \alpha} \frac{\text{sen}(x-\alpha)}{x^2-\alpha^2}$

(f) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$

(g) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(\alpha x)}{\beta x}$

(h) $\lim_{x \to 1} \frac{\text{sen}(2x-2)}{x^3-1}$

(i) $\lim_{x \to 2} \frac{\tan(\pi\, x)}{x-2}$

(j) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\text{cotan}(x)} - \frac{\pi}{2\cos(x)}$

(k) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\text{sen}(2x-1)}{4x-2}$

(l) $\lim_{x \to 0} \frac{2\text{sen}(x-2)}{x^2-4}$

(m) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(\pi^2 x)}{x}$

(n) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{x^2}$

(o) $\lim_{x \to a} \frac{\text{sen}(x-a)}{x^2-a^2}$

(p) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{\cos(x)}}{x^2}$

(q) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{sen}(x)-\cos(x)}{1-\tan(x)}$

(r) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(a+x)+\text{sen}(a-x)-2\text{sen}(a)}{x^2}$

Problema 121. Dado que $\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, determine:

(a) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

(b) $\lim_{x \to \infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x$

(c) $\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x-2}$

✓(d) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1}\right)^{x^2+2x+1}$

(e) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{x}$ (f) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$

(g) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ (h) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$

(i) $\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}$ (j) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+9}\right)^{x+1}$

Problema 122. Discuta la existencia en $\mathbb{R}$, de los siguientes límites

(a) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-|x-7|-49}{|x-7|}$

(b) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{|x-1|+4}-2}{x^2-1}$

(c) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ donde (i) $f(x)=2x^2$ (ii) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

(iii) $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ (iv) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

Problema 123. Sea

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-3|}{x-3} & x\neq 3\\[2ex] 0 & x=3\end{cases}$$

Determinar (a) $\lim_{x\to 3^+}f(x)$, (b) $\lim_{x\to 3^-}f(x)$, (c) ¿ Existe $\lim_{x\to 3}f(x)$?

Problema 124. Sea

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & x<1\\[2ex] 2x & x=1\\[2ex] x^3+1 & x>1\end{cases}$$

Determinar (a) $\lim_{x\to 1^+}f(x)$, (b) $\lim_{x\to 1^-}f(x)$, (c) ¿ Existe $\lim_{x\to 1}f(x)$?

Problema 125. Sea

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(2x)} & x\neq 0\\[2ex] \frac{x^2-x+1}{2} & x=0\end{cases}$$

Determinar (a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, (b) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, (c) ¿Existe $\lim_{x\to 0} f(x)$?

Problema 126. Calcular

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2}{x+1}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{3x-1}$

(c) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{1+x}-\sqrt{x}$

(d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(3x+1)^3-(3x-1)^3}{3x^2+1}$

(e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2^x-3^x}{3^x+4^x}$

(f) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n\cos(n)}{n^2+24}$

(g) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$

(h) $\lim_{x\to\infty} 3-\dfrac{1}{2^x}$

Problema 127. Analice la continuidad de las siguientes funciones

(a) $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & , \quad x\leq 2 \\ x-1 & , \quad x>2 \end{cases}$

(b) $g(x)=\begin{cases} -2x+4 & , \quad x<1 \\ x^2+1 & , \quad x\geq 1 \end{cases}$

(c) $h(x)=\begin{cases} 2 & , \quad 0\leq x\leq 3 \\ \dfrac{1}{x-3} & , \quad 3<x<5 \\ \dfrac{1}{2} & , \quad x\geq 5 \end{cases}$

(d) $t(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad 0\leq x<3 \\ 6 & , \quad x=3 \\ 9 & , \quad x>3 \end{cases}$

(e) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$

(f) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & , \quad x\neq 0 \\ 1 & , \quad x=0 \end{cases}$

(g) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x^2-4} & , \quad x \neq 2 \\ 3 & , \quad x = 2 \end{cases}$ (h) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3} & , \quad x \neq -3 \\ -6 & , \quad x = -3 \end{cases}$

(i) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi x) & , \quad 0 < x \leq 1 \\ \ln(x) & , \quad 1 < x < 2 \end{cases}$ (j) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x-3} & , \quad x \neq 3 \\ 5 & , \quad x = 3 \end{cases}$

(k) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2-2x^3}{x-2} & , \quad x \neq 2 \\ 8 & , \quad x = 2 \end{cases}$

Problema 128. Determine los valores de a, b y $c$para que las siguientes funciones sean continuas en todos los reales

(a) $f(x) = \begin{cases} ax^3+3 \ , & x \leq 3 \\ 3x^2+2ax+7b \ , & 3 < x \leq 4 \\ 8bx+7 \ , & x > 4 \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} -2\operatorname{sen}(x) \ , & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\operatorname{sen}(x)+b \ , & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos(x) \ , & \frac{\pi}{2} \leq x \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} x^2 \ , & -1 \leq x < 1 \\ ax+b \ , & 1 \leq x < 2 \\ c(1-x) \ , & \text{para otro valor real} \end{cases}$

Problema 129. Dadas las sucesiones

$$s_n = \frac{\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2}+\pi)}{\cos(n\pi)} \quad \text{y} \quad x_n = 2n-1 \ .$$

Determinar $(s \circ x)_n$ y sus tres primeros términos.

Problema 130. Determine si las siguientes sucesiones son monótonas crecientes o decrecientes.

(i) $a_n = n^2$

(j) $x_n = \frac{1}{n}$

(k) $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

(l) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

(m) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}\,,\quad a > 0\,,\ b > 0$

(n) $y_n = 2^{\frac{2^n - 1}{2^n}}$

Problema 131. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión dada por $a_n = 1 - \frac{1}{n}$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \quad ,$$

determine n_0 si $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

Problema 132. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión definida por $a_n = \frac{n}{2n+1}$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \quad ,$$

determine n_0 si $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Problema 133. Estudie la convergencia de las siguientes sucesiones:

(k) $a_n = \frac{1}{4+1} + \frac{1}{4^2+1} + \cdots + \frac{1}{4^n+1}$

(l) $x_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

(m) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$

(n) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

Problema 134. Dada la funcin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+9} - 3}{x^2} & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{6x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¿Existe $\lim_{x\to 0} f(x)$?

Problema 135. Pruebe que la funcin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5\sqrt{3}}\,\dfrac{3x^2 - x - 2}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3}}{x - 1} & \text{si } x > 1 \\[2ex] 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$ y discontinua en $x = 1$.

Problema 136. Aplique el método de bisección para determinar c_3, para $f(x) = \sqrt{x} - \cos(x)$ en $[0,1]$.

Problema 137. Aplique en los siguientes intervalos el método de bisección para determinar las aproxiamciones a las soluciones de $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ con una exactitud de 10^{-2}.

1. $[0,1]$
2. $\left[1, \frac{16}{5}\right]$
3. $\left[\frac{16}{5}, 4\right]$

Problema 138. Aplique el método de bisección para determinar una aproximación a la solución de $\tan(x) = x$ con una exactitud de 10^{-3} en el intervalo $\left[4, \frac{9}{2}\right]$.

Problema 139. Aplique el método de bisección para determinar una aproximación a la solución de $2 + \cos(e^x - 2) - e^x = 0$ con una exactitud de 10^{-3} en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

Problema 140. En cada caso aplique el método de bisección para determinar una aproximación a la solución con una exactitud de 10^{-5}.

1. $x - 2^{-x} = 0$ para $x \in [0,1]$.
2. $e^{-x} - x^2 + 3x - 2 = 0$ para $x \in [0,1]$.
3. $2x\cos(2x) - (x+1)^2 = 0$ para $x \in [-3,-2]$ y para $x \in [-1,0]$.
4. $x\cos(x) - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ para $x \in \left[\frac{1}{5}, \frac{3}{10}\right]$ y para $x \in \left[\frac{6}{5}, \frac{13}{10}\right]$.

Observación. Si el proceso de bisección se detiene en la iteración n, entonces f posee una raíz en el intervalo $[a_n, b_n]$ y

$$|r - a_n| \leq 2^{-n}(b_0 - a_0) \text{ y } |r - b_n| \leq 2^{-n}(b_0 - a_0).$$

Por otra parte, una mejor aproximación para la raíz r de $f(x) = 0$ es $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, pues

$$|r - c_n| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0).$$

Resumiendo lo anterior, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1. *Sean* $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... *los intervalos obtenidos en el método de bisección, entonces* $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = r$ *y* r *es una raíz de* $f(x) = 0$. *Además, se tiene que* $|r - a_n| \leq 2^{-n}(b_0 - a_0)$ *y* $|r - b_n| \leq 2^{-n}(b_0 - a_0)$. *Por otra parte, si* $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ *entonces* $r = \lim_{n\to\infty} c_n$ *y* $|r - c_n| \leq 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)$.

El número $|x_n - r|$, donde x_n es una aproximación al valor exacto r, es llamado el *error absoluto* de la aproximación .

Problema 141. Pruebe que la función $f(x) = 1/x$, $x \geq 1$, es uniformemente continua en el intervalo $[1, \infty)$.

Problema 142. Muestre que las siguientes funciones no son uniformemente continuas en los dominios que se señalan:

1. $f(x) = 1/x$, $\quad D(f) = (0, 1)$;
2. $g(x) = x^2$, $\quad D(g) = \mathbb{R}$;
3. $h(x) = 1/x^2$, $\quad D(h) = (0, \infty)$;
4. $k(x) = \text{sen}(1/x)$, $D(k) = (0, \infty)$.

Problema 143. Muestre que la función $f(x) = 1/(1 + x^2)$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Problema 144. Muestre que si f,g son funciones uniformemente continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, entonces $f + g$ es una función uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Problema 145. Muestre que si f y g son funciones reales uniformemente continuas sobre $\mathbb{R}$ y si ambas son acotadas en $\mathbb{R}$, entonces el producto fg es una función uniformemente continua.

Problema 146. Si $f(x) = x$ y $g(x) = \text{sen}(x)$, muestre que ambas funciones son uniformemente continuas en $\mathbb{R}$, sin embargo, el producto fg no es unformemente continuo en $\mathbb{R}$.

Problema 147. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua en A. Pruebe que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en A, entonces $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Problema 148. Sea $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua en $(0, 1]$, y sea $L = \lim_{n\to\infty} f(1/n)$. Pruebe que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cualquier sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$. Pruebe usando este resultado que la función $\text{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1]$.

Problema 149. Suponga que f es uniformemente continua en (a, b). Muestre que f puede ser definida sobre a y b de manera que la extensión sea continua en $[a, b]$.

Problema 150. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua en A. Muestre que si A es un conjunto acotado, entonces $f(A)$ es un conjunto acotado.

Problema 151. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y suponga que $f : A \to \mathbb{R}$ tiene lasiguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$, existe una función $g_\varepsilon : A \to \mathbb{R}$, tal que g_ε es uniformemente continua en A y $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$. Pruebe que f es uniformemente continua en A.

Problema 152. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **periódica** de período p si $f(x + p) = f(p)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Muestre que si f es una función continua y periódica en $\mathbb{R}$ es acotada y uniformemente continua.

Problema 153. Si $I := [a, b]$ es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función creciente, entonces el punto a es el mínimo absoluto de f y b es el máximo absoluto de f. Si f es una función estrictamente creciente, entonces a es el único mínimo absoluto de f en I.

Problema 154. Si f y g son funciones crecientes sobre un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, muestre que $f + g$ es una función creciente en I. Muestre además que si f o g es estrictamente creciente en I entonces $f + g$ es estrictamente creciente.

Problema 155. Muestre que $f(x) = x$ y $g(x) = x - 1$ son funciones crecientes sobre $[0, 1]$, sin embargo, la función producto fg no lo es.

Problema 156. Muestre que si f y g son positivas y crecientes en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, entonces fg es una función positiva y creciente en I.

Problema 157. Muestre que si $I = [a, b]$ y $f : I \to \mathbb{R}$ es creciente en I, entonces f es continua en a si, y sólo si, $f(a) = \inf\{f(x) : x \in (a, b]\}$.

Problema 158. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f : I \to \mathbb{R}$ creciente sobre I. Suponga que $c \in I$ no es un punto extremo de I. Muestre que f es continua en c si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en I tal que $x_n < c$ para n impar y $x_n > c$ para n par, y tal que $c = \lim_{n\to\infty} x_n$ y $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Problema 159. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f : I \to \mathbb{R}$ creciente sobre I. Si c no es un punto extremo de I, muestre que el salto $j_f(c)$ de f en c está dado por $\inf\{f(y) - f(x) : x < c < y,\ x, y \in I\}$.

Problema 160. Sean f, g crecientes sobre un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f(x) > g(x)$ para todo $x \in I$. Si $y \in f(I) \cap g(I)$, muestre que $f^{-1}(y) = g^{-1}(y)$. [Hint: Interprete la situación geométrica primero.]

Problema 161. Sea $I := [0,1]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ para x racional y por $f(x) = 1 - x$ si x es un número irracional. Muestre que f es inyectiva en I y que $f(f(x)) = x$ para todo $x \in I$, de esta forma f es su misma función inversa. Muestre que f es continua sólo en $x = 1/2$. ¿Contradice este ejemplo el teorema de la inversa continua?

Problema 162. Sea $I := [a,b]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua en I. Si f tiene un máximo absoluto (respectivamente un mínimo absoluto) en un punto interior c de I, muestre que f no es inyectiva en I.

Problema 163. Sea $f(x) := x$ para $x \in [0,1]$, y sea $f(x) := 1+x$ para $x \in (1,2]$. Muestre que f y f^{-1} son estrictamente crecientes. ¿Son f y f^{-1} continuas en todos los puntos?

Problema 164. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que no toma ninguno de sus valores dos veces. Muestre que f debe ser estrictamente monótona.

Problema 165. Sea $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función que toma cada uno de sus valores exactamente dos veces. Muestre que f no puede ser continua en todos los puntos. [Hint: Si $c_1 < c_2$ son puntos de h donde alcanza su supremo, muestre que $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. Ahora examine los puntos donde h alcanza su ínfimo.]

Problema 166. Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones

a) $\cos 2x$ b) $\sqrt{1+3x}$ c) $(1+2x+x^3)^8$ d) $(1+\sqrt{x})^4$

e) $x\sqrt{1-x^2}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ g) $5x\tan(x/3+x^2)$ h) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$

i) $\sqrt[3]{1+\tan(1+\sqrt{x})}$ j) $(\mathrm{sen}x^2+\cos 5x^3)^5$ k) $\mathrm{sen}^2(7x-\tan(\cos x))$ l) $\sqrt{1+3\mathrm{sen}^2 x}$

m) $\cos(\mathrm{sen}3x)$ n) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ o) $\cos(x\sqrt{1+\tan^5(3x\mathrm{sen}x)})$ p) $(\ln x)^2$

q) $x\ln x - x$ r) $\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ s) $\ln(\sec x+\tan x)$ t) $\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$

u) $\tan^{-1}(e^x)$ v) $e^{\mathrm{sen}x}$ w) $\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$ x) 2^{-x}

y) $x^\pi \pi^x$ z) $\log_{10}(\mathrm{sen}^{-1}x^2)$

Problema 167. las siguientes funciones

a) $x^4 - 3x^2 + 5x$ b) $x + 1/x$ c) $\sqrt{x} + \sqrt{3}$ d) $3\text{sen}x + 1/\sqrt{x}$

e) $2\sqrt[3]{x} + \sqrt{2}\tan x - 11$ f) $x^4 \tan x$ g) $\sqrt{x}\text{sen}x - 4\sqrt[5]{x^2}$ h) $(2x+1)\sec x$

i) $\text{sen}^2 x$ j) $\text{sen}^3 x$ k) $\text{sen}^4 x$ l) $\sqrt{x}(1 + 7x^2 \cos x)$

m) $\text{sen}2x$ n) $\cos 4x$ o) $\cos(x + \pi/3)$ p) $\dfrac{\text{sen}x}{x+2}$

q) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+x^2+x^4}$ r) $\dfrac{x+\text{sen}x}{x-\cos x}$ s) $x^5 \sec x \tan x$ t) $\sqrt{x}\cos^2 x\,\text{sen}x$

u) $\dfrac{x\,\text{sen}x}{1+x^2}$ v) $\dfrac{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x}}$ w) $\dfrac{x^7\text{sen}x\tan x}{1+\sqrt{x}\cos^2 x}$ x) $\tan 2x$

Problema 168. Derive las siguientes funciones.

a) 2^{x^2} b) e^{e^x} c) $x^{\sqrt{x}}$ d) $x\tan^{-1}x - \ln\sqrt{1+x^2}$

e) x^{x^x} f) $\log_x e$ g) $(\text{sen})^{\cos x} + (\cos x)^{\text{sen}x}$ h) x^{a^x}

i) $\dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$ j) $\sqrt[3]{\dfrac{\cos x}{\ln x}}\,x^{\tan x}$

Problema 169. Muestre que $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$ no es diferenciable en $x = 0$.

Problema 170. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Muestre que f es diferenciable en $x = 0$ y encuentre la derivada $f'(0)$.

Problema 171. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x) = \begin{cases} x^m & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

¿Para qué valores de n, f' es continua en 0? ¿Para qué valores de n, f es diferenciable en 0?

Problema 172. Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en c y que $f(c) = 0$. Muestre que $g(x) = |f(x)|$ es diferenciable en c si, y sólo si , $f'(c) = 0$.

Problema 173. Determine cuáles de las siguinetes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ son diferenciables y encuentre sus derivadas.

(a) $f(x) = |x| + |x+1|$; (b) $g(x) = 2x + |x|$;

(c) $h(x) = x|x|$; (d) $k(x) = |\text{sen} x|$.

Problema 174. Pruebe que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función par, vale decir $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y es diferenciable en $\mathbb{R}$, entonces la derivada f' es una función impar, est es $f(-x) = -f(x)$. Pruebe además que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función impar, entonces g' es una función par.

Problema 175. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \text{sen} \dfrac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Muestre que g es diferenciable en todo $\mathbb{R}$. Pruebe también que la función g' no es acotada en el intervalo $[-1, 1]$.

Problema 176. Si $r > 0$ es un número racional, sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^r \text{sen} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Determine los valores de r para los cuáles $f'(0)$ existe.

Problema 177. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $c \in \mathbb{R}$, muestre que

$$f'(c) = \lim_{n\to\infty} n[f(c+\frac{1}{n}) - f(c)].$$

Muestre mediante un ejemplo que la existencia de este límite no garantiza la diferenciabilidad de f en c.

Problema 178. Muestre que la función $h(x) = x^3 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, tiene inversa h^{-1} definida sobre $\mathbb{R}$. Calcule $h^{-1}(y)$ en los puntos correspondientes a $x = 0, 1, -1$.

Problema 179. Muestre que la restricción de la función coseno cos a $I = [0, \pi]$ es estrictamente decreciente. Sea arccos : $[-1, 1] \to \mathbb{R}$. Muestre que arccos es una función diferenciable en $(-1, 1)$ y que

$$(\arccos y)' = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}; \qquad y \in (-1, 1).$$

Muestre que $\arccos y$ no es diferenciable en -1 ni en 1.

Problema 180. Muestre que la restricción de la función tangente tan es estrictamente creciente en $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y que $\tan(I) = \mathbb{R}$. Muestre que, si arctan : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función inversa de la restricción de la función tangente, entonces arctan es diferenciable en $\mathbb{R}$ y

$$(\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2}, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Problema 181. Para cada una de las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, encuentre los puntos extremos relativos, los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento.

(a) $f(x) = x^2 - 3x + 5$; (b) $g(x) = 3x - 4x^2$;

(c) $h(x) = x^3 - 3x - 4$; (d) $k(x) = x^4 + 2x - 4$.

Problema 182. Encuentre los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0;$ (b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R};$

(c) $h(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}, \quad x > 0;$ (d) $k(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}, \quad x \neq 0.$

Problema 183. Encuentre los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones, en los dominios señalados.

(a) $f(x) = |x^2 - 1|, \quad -4 \leq x \leq 4;$ (b) $g(x) = 1 - (x-1)^{\frac{2}{3}}, \quad 0 \leq x \leq 2;$

(c) $h(x) = x|x^2 - 12|, \quad -2 \leq x \leq 3;$ (d) $k(x) = x(x-8)^{\frac{1}{3}}, \quad 0 \leq x \leq 9.$

Problema 184. Sea $a > b > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pruebe que $a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}} < (a-b)^{\frac{1}{n}}$. [Hint. Muestre que $f(x) = x^{\frac{1}{n}} - (x-1)^{\frac{1}{n}}$ es decreciente para $x \geq 1$ y evalúe f en 1 y en a/b.]

Problema 185. Pruebe usando el Teorema del Valor Medio que

$$|\text{sen}x - \text{sen}y| \leq |x - y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Use el Teorema del valor Medio para probar que

$$\frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1, \qquad x > 1.$$

Problema 186. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Muestre que si $\lim_{x \to a} f'(x) = A$, entonces $f'(a)$ existe y es igual a A. [Hint: Use la definición de $f'(a)$ y el Teorema del Valor Medio.]

Problema 187. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^4 + x^4 \text{sen}\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Muestre que f tiene un mínimo absoluto en $x = 0$, pero que su derivada tiene valores estrictamente positivos y estrictamente negativos en una vecindad de 0.

Problema 188. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x + x^2 \text{sen}\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Muestre que $g'(0) = 1$, pero en toda vecindad de 0, la derivada $g(x)$ toma valores estrictamente positivos y estrictamente negativos. Muestre que g no es monótona en ninguna vecindad de 0.

Problema 189. De un ejemplo de una función uniformemente continua en $[0, 1]$ que sea diferenciable en $(0, 1)$ pero cuya derivada no sea acotada en $(0, 1)$.

Sea $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}$$

Muestre que no existe una función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = g(x)$, $x \in [-1, 1]$. [Hint: Use el Teorema de Darboux.]

Problema 190. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Pruebe que no existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$. De dos ejemplos de funciones que no difieran por una constante y tales que sus derivada sean iguales a $h(x)$ para $x \neq 0$.

Problema 191. Sea I un intervalo y sea $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciable sobre I. Muestre que si f' es estrictamente positiva sobre I, entonces f es estrictamente creciente en I.

Problema 192. Sea I un intervalo y sea $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciable en I. Muestre que si la derivada f' no seanula sobre I, entonces $f'(x) < 0$,para todo $x \in I$ o $f'(x) > 0$, para todo $x \in I$.

Problema 193. Sea I un intervalo. Pruebe que si f es diferenciable en I y si su derivada f' es acotada en I, entonces f es una función Lipschitziana.

Problema 194. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ diferenciable en $(0, \infty)$ y suponga que $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = b$. Pruebe que:

1. Para todo $h > 0$, se tiene que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = b$.

2. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, entonces $b = 0$.

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = b$.

Problema 195. Sean f, g diferenciables sobre $\mathbb{R}$ y suponga que $f(0) = g(0)$ y que $f'(x) \leq g'(x)$ para $x \geq 0$. Muestre que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq 0$.

Problema 196. Sea $I = [a, b]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciable en $c \in I$. Muestre que para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - y| < \delta$ y $a \leq x \leq c \leq y \leq b$, entonces

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(c) \right| < \varepsilon.$$

Problema 197. Suponga que $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ es continua en $[0, 2]$ y diferenciable en $(0, 2)$, y que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$.

1. Muestre que existe $c_1 \in (0, 1)$ tal que $f'(c_1) = 1$.

2. Muestre que existe $c_2 \in (1, 2)$ tal que $f'(c_2) = 0$.

3. Muestre que existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 1/3$.

Problema 198. Determinar el número de raíces reales de la ecuación

$$3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 5 = 0.$$

Problema 199. Pruebe que la ecuación

$$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} = 0$$

tiene una raíz real si n es impar y ninguna si n es par.

Problema 200. Dibuje los gráficas de las siguientes funciones.

(a) $x^3 - 3x^2 + 2$	(b) $x^3 - 3x^2 + 2x + 2$	(c) $(1 - x^2)^2$
(d) $x + \lvert x\rvert$	(e) $\mathrm{sen}x(1 + \cos x)$	(f) $x\sqrt{4x - x^2}$
(g) $x + \dfrac{1}{x}$	(h) $x + \lvert\mathrm{sen}x\rvert$	(i) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$
(j) $\mathrm{sen}x \cos x$	(k) $x - 2\mathrm{sen}x$	(l) $\dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$
(m) $x - [x]$	(n) $\mathrm{sen}x - 3\cos\dfrac{x}{3}$	(o) $\dfrac{x^3}{1 + x^4}$

Problema 201. Suponga que el desplazamiento de una partícula en el instante t viene dado por una ecuación de la forma

$$s = f(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0,$$

donde a, v_0, y s_0 son constantes.

1. Pruebe que la partícula tiene una aceleración constante a y que su despazamiento y velocidad en $t = 0$ son s_0 y v_0, respectivamente.
2. Probar que, recíprocamente, la función f queda completamente determinada por la información dada en a).

Problema 202. Sean

$$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!};$$

$$C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n + 1\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}.$$

1. Probar por inducción que

$$S_{2n}(x) \leq \mathrm{sen}x \leq S_{2n-1}(x) \qquad \text{y} \qquad C_{2n}(x) \leq \cos x \leq C_{2n-1}(x).$$

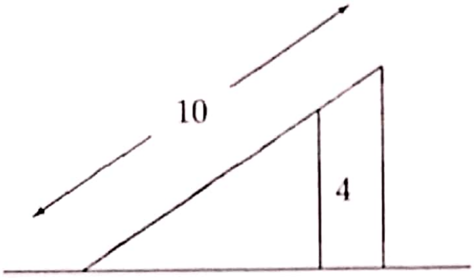
2. Grafique S_2, S_3, C_2, C_3.
3. Hallar un polinomio que permita calcular $\mathrm{sen}x$ y $\cos x$ con una precisión de siete decimales para $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

4. Mediante las desigualdades probadas en a) y el Teorema del Sandwich, calcule los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x - x}{x^3}$ (b) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}$ (c) $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \operatorname{sen}x}{x\operatorname{sen}^2 x}$.

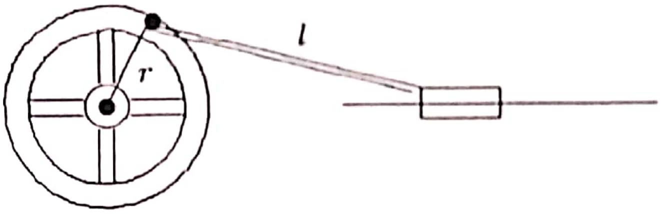
Problema 203. Pruebe que $\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\operatorname{sen}x}$, si $0 < x < \pi/2$.

Problema 204. Una escalera de 10 pies de longitud se apoya verticalmente contra una valla de 4 pies de altura, como lo ilustra la siguiente figura:



Se retira de la valla el pie de la escalera a razón de 1 pie/seg. Considere la proyección sobre el suelo de la punta de la escalera. ¿A qué velocidad se mueve esa proyección cuando el pie de la valla dista 3 pies de la valla?

Problema 205. Un pistón que puede moverse libremente sobre una recta está unido por una barra a un punto fijo del borde de una rueda como lo muestra la siguiente figura.



La longitud de la barra es l y r es el radio de la rueda. relacionar la velocidad del pistón con la velocidad angular dela rueda. Si esta es constante e igual a ω rad/seg, calcular la velocidad del pistón cuando el punto del borde de la rueda al que está unida la barra alcanza su posición más alta.

Problema 206. Un torno situado al final de un muelle está a 6 pies sobre el agua y tira de una soga a razón de 2 pies/seg. Determinar a qué velocidad tira hacia el muelle de un bote unido a la soga cuando quedan fuera 10 pies de esta.

Problema 207. Una farola de la calle está a una altura de H pies. Un peatón de h pies de altura se aleja de la luz a razón de F pies/seg. Calcular la razón a la que se mueve el extremo de su sombra cuando el peatón está a x pies de distancia del pie de la farola.

Problema 208. Sobre la cima de un montón de arena en forma cónica, cae arena a razón de 2 pies cúbicos/seg. Suponiendo que el montón mantiene constantemente la forma de cono circular recto con altura igual al radio de la base, determinar a qué velocidad crece su altura cuando este es de 6 pies. ¿Qué altura debe tener el montón para que ésta crezca a un ritmo inferior a 10^{-3} pies/min.?

Problema 209. Una partícula se mueve sobre la elipse $16x^2 + 9y^2 = 400$ en sentido positivo, vale decir, contrario al sentido del movimiento de las agujas del reloj. ¿En qué punto(s) de la elipse decrece la ordenada al mismo tiempo que la absisa crece?

Problema 210. Una avión A vuela en linea recta a velocidad constante v. Inicialmente el avión se halla justamente sobre un cañón antiaŕeo colocado en el origen. Calcular velocidad angular del cañón si este apunta constantemente sobre el avión.

Problema 211. Por un agujero en el vértice de un depósito cónico de agua, esta escapa a razón de 72 pies cúbicos/seg. Si el depósito tiene 20 pies de profundidad y 30 pies de diámetro, hallar a qué ritmo desciende el nivel del agua cuando la altura de la misma es de 12 pies.

Problema 212. Suponga que f y g son continuas en $[a, b]$, diferenciables en (a, b) tal que $c \in [a, b]$ y que $g(x) \neq 0$, para $x \neq c$. Sea $A := \lim_{x \to c} f$ y $B := \lim_{x \to c} g$. Si $B = 0$ y si $\lim_{x \to c} f(x)/g(x)$ existe en $\mathbb{R}$, muestre que se debe tener $A = 0$.[Hint: $f(x) = f(x)g(x)/g(x)$.]

Problema 213. En las condiciones del problema anterior, suponga además que $g(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$, $x \neq c$. Si $A > 0$ y $B = 0$, pruebe que se debe tener $\lim_{x \to c} f(x)/g(x) = \infty$. Si $A < 0$ y $B = 0$, pruebe que se debe tener $\lim_{x \to c} f(x)/g(x) = -\infty$.

Problema 214. Sea $f(x) := x^2 \text{sen}(1/x)$ para $0 < x \leq 1$ y $f(0) := 0$, y sea $g(x) := x^2$ para $x \in [0, 1]$. Entonces ambas funciones f y g son diferenciables en $[0, 1]$, y $g(x) > 0$ para $x \neq 0$. Muestre que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0} g(x)$ pero que no existe $\lim_{x \to 0} f(x)/g(x)$.

Problema 215. Sea $f(x) := x^2$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) := 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$, y sea $g(x) := \text{sen}x$ para $x \in \mathbb{R}$. Muestre que $\lim_{x \to 0} f(x)/g(x) = 0$. Explique por qué no se puede aplicar la regla de L'Hopital para el caso ∞/∞.

Problema 216. Sea $f(x) := x^2\text{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, y sea $g(x) = \text{sen}x$ para $x \in \mathbb{R}$. Muestre que $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0$ pero que $\lim_{x\to 0} f'(x)/g'(x)$ no existe.

Problema 217. Evalúe los siguientes límites, donde el dominio del cuociente es el indicado.

a) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x+1)}{\text{sen}x}$ $(0,\pi/2)$; b) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\tan x}{x}$ $(0,\pi/2)$;

c) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\cos x}{x}$ $(0,\pi/2)$; d) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$ $(0,\pi/2)$.

Problema 218. Evalúe los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x}$ $(-\infty,\infty)$; b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ $(0,1)$;

c) $\lim_{x\to 0^+} x^3\ln x$ $(0,\infty)$; d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$ $(0,\infty)$.

Problema 219. Evalúe los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$ $(0,\infty)$; b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ $(0,\infty)$;

c) $\lim_{x\to 0} x\ln\sin x$ $(0,\pi)$; d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+\ln x}{x\ln x}$ $(0,\infty)$.

Problema 220. Evalúe los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0^+} x^{2x}$ $(0,\infty)$; b) $\lim_{x\to 0} (1+3/x)^x$ $(0,\infty)$;

c) $\lim_{x\to\infty} (1+3/x)^x$ $(0,\infty)$; d) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\arctan x - x}{x\arctan x}$ $(0,\infty)$.

Problema 221. Evalúe los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$ $(0,\infty)$; b) $\lim_{x\to 0^+} (\text{sen}x)^x$ $(0,\pi)$;

c) $\lim_{x\to 0^+} x^{\text{sen}x}$ $(0,\infty)$; d) $\lim_{x\to\pi/2-} \sec x - \tan x$ $(0,\pi/2)$.

Problema 222. Sea f diferenciable en $(0,\infty)$ y suponga que $\lim_{x\to\infty}(f(x)+f'(x)) = L$. Muestre que
$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. [Hint: $f(x) = e^x f(x)/e^x$.]

Problema 223. Sea $f(x) := \cos ax$ para $x \in \mathbb{R}$ donde $a \neq 0$. Encuentre $f^{(n)}(x)$ para $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Problema 224. Sea $g(x) := |x^3|$ para $x \in \mathbb{R}$. Encuentre $g'(x)$ y $g''(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, y $g'''(x)$ para $x \neq 0$. Muestre que $g'''(0)$ no existe.

Problema 225. Usando inducción pruebe la regla de Leibniz para la n-ésima derivada del producto

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}.$$

Problema 226. Muestre que si $x > 0$, entonces

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

Problema 227. Usando el problema anterior, aproxime $\sqrt{1.2}$ y $\sqrt{2}$. ¿Cuál es la mejor aproximación que usted puede asegurar usando la desigualdad anterior?

Problema 228. Use el Teorema de Taylor con $n = 2$ para obtener más aproximaciones para $\sqrt{1.2}$ y $\sqrt{2}$.

Problema 229. Si $x > 0$ muestre que

$$\left| \sqrt[3]{1+x} - \left(1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}\right) \right| \leq \frac{5x^3}{81}.$$

Use esta desigualdad para aproximar $\sqrt[3]{1.2}$ y $\sqrt[3]{2}$.

Problema 230. Si $f(x) := e^x$, muestre que le resto de Taylor converge a cero cuando $n \to \infty$, para cada x_0 y x.

Problema 231. Si $g(x) := \operatorname{sen} x$, muestre que el resto de Taylor converge a cero cuando $n \to \infty$.

Problema 232. Sea $h(x) := e^{-1/x^2}$ para $x \neq 0$ y $h(0) := 0$. Muestre que $h^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluya que el resto de Taylor para $x_0 = 0$ no converge a cero cuando $n \to \infty$ para $x \neq 0$. [Hint: Por la regla de L'Hopital $\lim_{x \to 0} h(x)/x^k = 0$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Use el problema 14 para calcular $f^{(n)}(x)$ para $x \neq 0$.]

Problema 233. Si $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$, muestre que

$$\left|\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n}\right)\right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Use esta desigualdad para aproximar $\ln 1.5$ con un error menor que 0.001 y con un error menor que 0.0001.

Problema 234. Aproxime la función $\operatorname{sen} x$ por un polinomio en el intervalo $[-1,1]$ con un error menor que 0.001. Muestre que se tiene

$$\left|\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\right| < \frac{1}{5040} \qquad \text{para} \quad |x| \leq 1.$$

Problema 235. Determine si $x = 0$ es o no un extremo relativo de las siguientes funciones:

a) $f(x) := x^3 + 2$; b) $g(x) := \operatorname{sen} x - x$;

c) $h(x) := \operatorname{sen} x + \frac{1}{6}x^3$; d) $k(x) := \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$.

Problema 236. Sea f continua en $[a,b]$ y supongamos que la segunda derivada f'' existe en (a,b). Supongamos que el gráfico de f y el segmento de recta que une los puntos $(a, f(a)$ y $(b, f(b))$ se intersectan en el punto $(x_0, f(x_0))$ donde $a < x_0 < b$. Muestre que existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f''(c) = 0$.

Problema 237. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, sea $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciable en I, y suponga $f''(a)$ existe en $a \in I$. Muestre que

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

Dé un ejemplo donde este límite exista, pero la función no tenga segunda derivada en a.

Problema 238. Suponga que $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto y que $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Si $c \in I$, muestre que la parte del gráfico de f en I nunca está por debajo de la recta tangente al gráfico en el punto $(c, f(c))$.

Problema 239. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $c \in I$. Suponga que f y g están definidas sobre I y que las derivadas $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ existen y son continuas en I. Si $f^{(k)}(c) = 0$ y $g^{(k)}(c) = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$,pero $g^{(n)}(c) \neq 0$, muestre que

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}.$$

Problema 240. Localizar los máximos y mínimos de la función $f(x) = x^3 - 12x$.

Problema 241. Pruebe que $1 - |x|$ tiene un máximo relativo en $x = 0$.

Problema 242. Localizar todos los extremos relativos de las siguientes funciones.

a) $8x^3 - 9x^2 + 1$; b) $\sqrt{x(a-x)}$, $a > 0$; c) $x^2 + 16/x$;

d) $(\mathrm{sen}x)(1 + cosx)$; e) $\tan x - 8\mathrm{sen}x$; f) $x^{3/2}(x-18)^{-1/2}$.

Problema 243. Determinar los valores máximo y mínimo de $x^3 - 3x + 2$ en el intervalo $[-3, 1.5]$.

Problema 244. Pruebe que de todos los rectágulos de perimetro dado el cuadrado es el de mayor área.

Problema 245. Un granjero decide cercar una dehesa rectangular que linda con un río recto. Como sólo dispone de 1000 pies de valla y piensa que las vacas no escaparán por el río, precinde de cercar a lo largo del río. En esas circunstancias, ¿Cómo conseguira el grangero cercar la mayor area de dehesa?

Problema 246. Hay que cortar un hilo delongitud L en dos trozos. Uno de estos se doblará luego para formar un círculo, y el otro dándole forma de un cuadrado ¿Cómo habrá de cortar para que la suma de las áreas de estas figuras sea máxima?, ¿mínima?

Problema 247. Las dimensiones de un piscina rectangular son a y b. Un caballero de pie en una esquina de la piscina divisa una chica con bikini en la esquina diagonalmente opuesta. Suponiendo que la velocidad del caballero, caminando, sea v_w, y nadando, v_s, ¿Cuál será el tiempo mas corto que necesitará él para llegar hasta la chica (suponiendo, por supuesto, que ésta no se mueva)? Considerar todos los casos posibles.

Problema 248. Determinar los máximos y mínimos de $x^3 + 3px + q$. Discutir la naturaleza de las raíces de la ecuación $x^3 + px + q = 0$.

Problema 249. Dados n números $a_1, \dots, a_n$, calcular el x que hace mínimo a

$$(a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \cdots + (a_n - x)^2.$$

Problema 250.

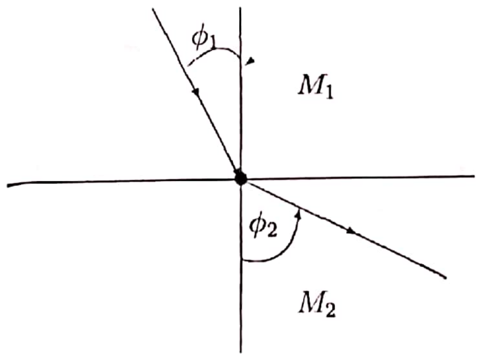
1. Sea f un función continua sobre toda la recta real, y sea P_0 cualquier punto del plano. Pruebe que hay un punto P^* sobre la grfica de f que dista lo mínimo de P_0. Muestre mediante un ejemplo que P^* no necesariamente es único.

2. Suponga ahora que f es diferenciable en todo punto y que P_0 no está sobre la gráfica de f. Pruebe que la recta que une P_0 a un punto P^* con la propiedad anterior es normal a gráfica de f en P^*.

Problema 251. Considérese un rayo deluz que va desde un punto A_1 en un medio M_1 (digamos aire) hasta un punto A_2 en un M_2 (por ejemplo, agua). Supongamos que la superficie de separación de ambos medios es plana, y denotemos por c_k la velocidad de la luz en el medio M_k, $k = 1, 2$. Sea P el punto donde el rayo de luz atraviesa la superficie de separación. Mediante el principio de Fermat, probar la *ley de la refracción*

$$\frac{\text{sen}\phi_1}{\text{sen}\phi_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son, respectivamente, los ángulos formados por la normal en P a la superficie y los rayos incidente y refractado,como lo muestra la siguiente figura:



Problema 252. 1. Hallar el punto (o los puntos) de la parábola $y = x^2$ más próximos al punto $(2, 1)$.

2. Lo mismo para los puntos $(0, -4)$ y $(0, 5)$.

Problema 253. De entre los cilindros circulares rectos de volumen dado, hallar el de menor área lateral.

Problema 254. Probar que el cilindro circular recto inscrito en una esfera dada y de volumen máximo es aquel cuya altura es $\sqrt{2}$ veces el radio de su base.

Problema 255. Hay que inscribir un cilindro circular recto en un cono dado,también circular y recto. Determinar las dimensiones que producen volumen máximo y las que producen área total máxima.

Problema 256. Pruebe que de entre los triángulos de base y perímetro dados, el isósceles tiene área máxima.

Problema 257. Una escalera de 27 pies está apoyada contra una cerca de 8 pies de altura. Determinar la proyección horizontal máxima del saliente de la escalera al desplazar de la cerca el pie de la misma. Tomar como variable independiente el ángulo que forma la escalera con el suelo.

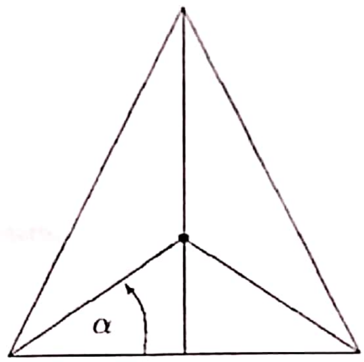
Problema 258. Dado los números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, hallar el valor mínimo de

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + x}{n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} x}}$$

para $x > 0$. Usar este resultado para probar por inducción que

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Problema 259. Hallar un punto sobre la altura de un triángulo isósceles (e interior al triángulo)para que la suma de distancias del punto a los vértices sea mínima. Para resolver este problema, tome como variable el ángulo α como en la siguiente figura:



Probar que el mínimo se alcanza cuando $\alpha = \pi/6$. ¿Qué ocurre si el ángulo de la base es menor que $\pi/6$?

Problema 260. Determinar los sentidos de curvatura y los puntos de inflexión de las siguientes funciones. Esbozar los gráficos.

a) x^3; b) $\sqrt{x}$; c) $x^3 - 3x + 1$;

d) $\dfrac{2x}{1+x^2}$; e) $\tan x$; f) $\sqrt{1+x^2}$;

g) $x\sqrt{2-x}$; h) $\dfrac{x^2-4}{x^2-9}$.

Problema 261. Suponga que f es una función diferenciable en $\mathbb{R}$ que satisface la siguiente ecuación diferencial

$$f'(x) = f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y que $f(0) = 1$.

1. Pruebe que $f(x)f(-x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Deduzca que f es positiva en todo $\mathbb{R}$. ¿Qué puede afirmarse sobre el comportamiento cualitativo de f (crecimiento, decrecimiento, máximos mínimos,etc.)?
2. Pruebe que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ y que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
3. Dibujar el gráfico de f. ¿A qué función se parece?

Problema 262. Trazar el gráfico de una función f que satisfaga todas estas propiedades:

1. f está definida y es continua en todos los puntos salvo el $+1$; $f(-1) = -3$, $f(0) = 0$, $f(3) = 2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.
2. f' existe y es continua en todos los puntos salvo ± 1; $\lim\limits_{x\to-1+} f'(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-1-} f'(x) = -\infty$, y el signo de f' esta dado por la siguiente tabla.

f'	$(-)$		$(+)$		$(-)$		$(+)$
		-1		1		2	

3. f'' existe y es continua en todos los puntos salvo ± 1, y sus signo está dado por el diagrama siguiente.

f''	$(-)$	-1	$(-)$	0	$(+)$	1	$(+)$	3	$(-)$

Problema 263. Trazar el gráfico de una función f que satisfaga todas estas propiedades:

1. f está definida y es continua en todos los puntos salvo el -2; $f(-3) = -2$, $f(-1) = -2$, $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = 5/2$, $\lim_{x \to -2-} f(x) = 0+$ y $\lim_{x \to -2+} f(x) = +\infty$.
2. Para $x \to +\infty$, el gráfico de f es asintótico a la recta $y = x$.
3. f' existe y es continua en todos los puntos salvo -2 y 0; $\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty$, y el signo de f' esta dado por la siguiente tabla.

f'	$(-)$	-2	$(-)$	-1	$(+)$	0	$(+)$	1	$(-)$	2	$(+)$

4. f'' existe y es continua en todos los puntos salvo -2 y 0, y sus signo está dado por el diagrama siguiente.

f''	$(-)$	-3	$(+)$	-2	$(+)$	0	$(-)$	$\frac{3}{2}$	$(+)$	3	$(-)$

Problema 264. Demuestre en detalle, usando la definición, que si $f(x) := c$ para $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\, dx = c(b - a)$.

Problema 265. Sea $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := 1$ si $x \neq 1$, y $f(1) := 0$. Muestre que f es integrable en $[0, 2]$ y calcule su integral.

Problema 266.

1. Pruebe que si $g(x) := 0$, para $0 \leq x \leq 1/2$ y $g(x) := 1$ para $1/2 < x \leq 1$, entonces g es integrable y $\int_0^1 g(x)\, dx = 1/2$.
2. ¿Qué conclusión se puede obtener si cambia el valor de g en $1/2$ de 0 a 7?

Problema 267. Sea $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) := 0$ para x irracional, y $h(x) := x$ para x racional. Calcule las integrales superior e inferior de h. Pruebe que h no es integrable.

Problema 268. Sea $f(x) := x^3$ para $0 \leq x \leq 1$ y considere la partición

$$P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}.$$

Calcule $s(f, P_n)$ y $S(f, P_n)$, y muestre que $\int_0^1 f(x)\, dx = 1/4$. [Ind.: Use la fórmula de la suma de los cubos de los primeros n números naturales.]

Problema 269. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función definida tal que $f(x) = 0$ excepto para $x \in \{c_1, \ldots, c_n\} \subset [a,b]$. Pruebe que f es integrable y calcule su integral.

Problema 270. Suponga que f es una función acotada en $[a,b]$ y que, para cualquier número $c \in (a,b)$ se tiene que la restricción de f a $[c,b]$ es integrable. Muestre que f es integrable en $[a,b]$ y que

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx.$$

Problema 271. Sea $I := [a,b]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ acotada tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Pruebe que $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$.

Problema 272. Sea $I := [a,b]$, sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua, y sea $f(x) \geq 0$, para todo $x \in I$. Pruebe que si $\int_a^b f(x)\, dx = 0$, entonces $f(x) = 0$, para todo $x \in I$.

Problema 273. Sea $I := [0,1]$ y sea h la función definida sobre I por $h(x) = 0$ si x es irracional y $h(x) = 1/q$ si $x = p/q$, donde $(p,q) = 1$. Demuestre que h es integrable y calcule su integral.

Problema 274. Sea $I := [a,b]$ y sean $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ funciones acotadas. Muestre que

$$\underline{\int_a^b} f_1(x)\, dx + \underline{\int_a^b} f_2(x)\, dx \leq \underline{\int_a^b} (f_1 + f_2)(x)\, dx.$$

Dé un ejemplo donde la desigualdad sea estricta.

Problema 275. Sea $I := [a,b]$, sea $f : I \to \mathbb{R}$ acotada y sea $k > 0$.

1. Muestre que

$$\underline{\int_a^b} kf(x)\,dx = k\underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

y que

$$\overline{\int_a^b} kf(x)\,dx = k\overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

2. Muestre que si f es integrable en I y $k > 0$, entonces kf es integrable en I y que

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Problema 276. Sea $I := [a,b]$, y sea f y g funciones acotadas en I y con valores reales. Suponga que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I$. Muestre que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} g(x)\,dx,$$

y que

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

Problema 277. Sea $I := [a,b]$, si $f : I \to \mathbb{R}$ es acotada en I y $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in I$, entonces muestre que

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Sea $I := [a,b]$, y sean $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ funciones acotadas. Suponga que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo $x \in I$. Muestre que, si f y h son integrables y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx = A,$$

entonces g es integrable en I y $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = A.$

Problema 278. Sea $I := [a, b]$ y sea $c \in (a, b)$.Denotemos por $\mathcal{P}$ al conjunto de todas las particiones de I y sea $\mathcal{P}_c$ el conjunto de todas las particiones que contienen el punto c. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función acotada en I, muestre que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\{s(f, P) \quad : P \in \mathcal{P}_c\}.$$

Problema 279. Sea $I := [a, b]$ y sea $c \in (a, b)$. Sean $I_1 = [a, c]$ y $I_2 = [c, b]$. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada. Muestre que

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^c} f(x)\, dx + \overline{\int_c^b} f(x)\, dx.$$

Problema 280. Sea $a > 0$ y sea $J = [-a, a]$. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ acotada y sea $\mathcal{P}^*$ el conjunto de todas las particiones P de J que continen al 0 y que son simétricas (esto es $x \in P$ si, y sólo si, $-x \in P$). Muestre que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\{s(f, P) \quad : P \in \mathcal{P}^*\}.$$

Problema 281. Sea $a > 0$ y sea $J = [-a, a]$. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ integrable en J.

1. Si f es par entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$.

2. Si f es impar, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.

Problema 282. Sea $I := [a, b]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ creciente en I. Si P_n es una partición de I enn partes iguales, muestre que

$$0 \leq S(f, P_n) - \int_a^b f(x)\, dx \leq \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)).$$

Problema 283. Muestre que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada y tiene a lo más un número finito de discontinuidades en [a,b], entonces f es integrable.

Problema 284. Dé un ejemplo de una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ que no sea integrable en $[0, 1]$ pero tal que $|f|$ si sea integrable en $[0, 1]$.

Problema 285. Sea $I := [a, b]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ integrable en I, muestre usando la desigualdad

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$$

para $x, y \in I$, que $|f|$ es también una función integrable. en I.

Problema 286. Sea $I := [a, b]$, sea $f : I \to \mathbb{R}$ integrable en I, muestre usando la desigualdad

$$|(f(x))^2 - (f(y))^2| \leq 2K|f(x) - f(y)|$$

para $x, y \in I$, que f^2 es también una función integrable.

Problema 287. Si $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo. Dé un ejemplo de una función integrable f definida sobre I y una función no integrable g tal que fg sea integrable en I.

Problema 288. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y sea $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$H(x) := \int_x^b f(t)\, dt \qquad x \in [a, b].$$

Encuentre $H'(x)$, para $x \in [a, b]$.

Problema 289. Sea $I := [a, b]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua sobre I. Sea $J := [c, d]$ y sea $v : J \to \mathbb{R}$ diferenciable sobre J y que satisface $v(J) \subseteq I$. Muestre que si $G : J \to \mathbb{R}$ está definido por

$$G(x) := \int_a^{v(x)} f(t)\, dt$$

para $x \in J$, entonces G es diferenciable en J. Calcule $g'(x)$, $x \in J$.

Problema 290. Encuentre F', donde $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida como:

$$\text{(a)} F(x) := \int_0^x \operatorname{sen} t^2\, dt; \qquad \text{(b)} F(x) := \int_0^{x^2} \frac{1}{1+t^3}\, dt;$$

$$\text{(c)} F(x) := \int_{x^2}^x \sqrt{1+t^2}\, dt; \qquad \text{(d)} F(x) := \int_0^{\operatorname{sen} x} \cos t\, dt.$$

Problema 291. Sea $F : [0, 3] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x$ para $0 \leq x < 1$, $f(x) := 1$ para $1 \leq x < 2$, y $f(x) := x$ para $2 \leq x \leq 3$. Obtenga una expresión explícita para $F(x) := \int_0^x f(t)\, dt$ como una función de x. ¿Dónde es F diferenciable? Evalúe $F'(x)$ en todos los puntos donde F es diferenciable.

Problema 292. Se define la función $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\ln x := \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

para $x > 0$. Demuestre que:

1. $\ln'(x) = 1/x$ para $x > 0$.
2. $\ln xy = \ln x + \ln y$, para $x, y > 0$.
3. $\ln x^n = n \ln x$, para $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$.
4. $\ln 1/y = -\ln y$, para todo $y > 0$.

Problema 293. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y sea $\alpha > 0$. Se define $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) := \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f(t)\, dt$$

para $x \in \mathbb{R}$. Muestre que g es diferenciable y encuentre g'.

Problema 294. Sea $I := [0, 1]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Suponga que

$$\int_0^x f(t)\, dt = \int_x^1 f(t)\, dt$$

para todo $x \in I$. Muestre que $f(x) = 0$ para todo $x \in I$.

Problema 295. Suponga que $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es continua y que $f(x) \neq 0$ para todo $x \geq 0$. Si tenemos que

$$(f(x))^2 = 2 \int_0^x f(t)\, dt$$

para $x > 0$, muestre que $f(x) = x$ para $x \geq 0$.

Sea $I := [a, b]$ y suponga que $f : I \to \mathbb{R}$ es continua y que $f(x) \geq 0$ para $x \in \mathbb{R}$. Si $M := \sup\{f(x) \ : \ x \in I\}$, muestre que la sucesión

$$\left(\left[\int_a^b f(x)^n\, dx \right]^{\frac{1}{n}} \right)$$

converge a M.

Problema 296. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y sean $g_n(x) := f(x^n)$ para $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que la sucesión $\int_0^1 g_n(x)\, dx)$ converge a $f(0)$.

Problema 297. Sea $I := [a,b]$ y sea $g : I \to \mathbb{R}$ continua en I. Suponga que existe $K > 0$ tal que

$$|g(x)| \leq K \int_a^x |g(t)|\, dt$$

para todo $x \in I$. Muestre que $g(x) = 0$ para $x \in I$.

Problema 298. Sea $I := [a,b]$ y sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

Muestre que existe $c \in I$ tal que $f(c) = g(c)$.

Muestre que, en las hipótesis del teorema de Taylor, el resto puede ser expresado por

$$R_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(a + \theta(b-a))$$

para algún número $\theta \in [0,1]$.