# Espacios de Sobolev con pesos y EDO's singulares

**Motivación.** Queremos estudiar

$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad \text{en } (0,1) \qquad (\star)$$
$$u(0) = u(1) = 1$$

$f$ continua.

Encontrar solución.

Homogénea: $-u''(x) + u(x) = 0 \quad (u''(x) = u(x))$

$$u_h(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$$

Solución particular:

Ej: $f = 1 \Rightarrow u_p(x) = 1 \Rightarrow u(x) = u_h(x) + u_p(x)$

$f = x \Rightarrow u_p(x) = x \Rightarrow u(x) = \ldots$

$f = x^2 \Rightarrow u_p(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3 \Rightarrow u_p(x) = x^2 + 2$

· Variación de parámetros:

$$u_p(x) = Ae^{x} + Be^{-x}, \quad A = A(x), \; B = B(x)$$

$$\Rightarrow \quad u_p = \left(-\int_0^x f(s)e^{-s}ds\right)e^{x} + \left(\frac{1}{2}\int_0^x f(s)e^{s}ds\right)e^{-x}$$

Método tedioso cuando la EDO se complica. Para evitar esto, utilizaremos análisis funcional.

**Def.** (Solución clásica)

Es una función $u$ que resuelve $(*)$, y que es $C^2$.

Arreglemos la idea que entendemos por solución.

Multiplicar $(*)$ por $v \in C^1[0,1]$ tq $v(0) = v(1) = 0$

$$-u''(x)v(x) + u(x)v(x) = f(x)v(x) \quad \Big/ \int_0^1$$

$$-\int_0^1 u''(x)v(x) + \int_0^1 u(x)v(x) = \int_0^1 f(x)v(x)$$

Integrando por partes

$$-\underbrace{\cancel{u'(x)v(x)\Big|_0^1}}_{=0} + \int_0^1 u'(x)v'(x) + \int_0^1 u(x)v(x) = \int_0^1 f(x)v(x)$$

En resumen, hemos probado que la solución clásica satisface:

$$(1) \qquad \int_0^1 u'(x)v'(x) + \int_0^1 u(x)v(x) = \int_0^1 v(x)f(x) \qquad \forall v \in C^1[0,1] : v(0) = v(1) = 0$$

Def. (Solución Débil 1)

función de clase $C^1$ que es solución de (1)

Idea. 1) Definir concepto de solución débil (multiplicar por $v$ e integrar por partes)

2) Encontrar la solución débil.

3) Solución débil $\Rightarrow$ Solución clásica.

Herramientas básicas de análisis funcional

Def (Espacio vectorial): ✓✓ (sobre $\mathbb{R}$)

Def. (Norma) ✓

Def. (Producto interno) $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ {bilineal definida positiva}

Teorema. ~~$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$~~ $\forall u,v \in V$.

$$|(u,v)| \leq (u,u)^{1/2}(v,v)^{1/2}$$

Espacio de Hilbert: Espacio vectorial $H$, equipado con producto interno y completo por norma inducida $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$

Ej. $H = \mathbb{R}^n$, $\langle u,v\rangle = \sum u_i v_i$

$$H = \ell^2 = \{(u_n)_{n\geq 1} \ / \ \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < \infty\}$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{1}^{\infty} u_n v_n$$

<u>Completitud</u>. $(u^n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy en $\ell^2$

$u^1 = u_1^1, u_2^1, u_3^1, \dots, u_k^1, \dots$

$u^2 =$

$\vdots$

$u^n = u_1^n, u_2^n, u_3^n, \dots, u_k^n, \dots$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 1 : \quad \sum_{k=1}^{\infty} | u_n^k - u_m^k | < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$

$\Rightarrow$ $(u_k)$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$.

$\exists v_k$ tq $u_k^n \longrightarrow u_k$

Demostrar que $u^n \longrightarrow v = (v_1, \dots)$

3) $L^2(I)$ donde $I$ es un intervalo en $\mathbb{R}$ (o abierto en $\mathbb{R}^n$)

$L^2(I) = \{$ funciones medibles tales que $\int_I |f|^2 < \infty \}$

con producto interno $\langle f, g \rangle = \int_I f g$

Este espacio es de Hilbert.

Cohomología Galoisiana

Literatura: P. Gille, T. Szamuely
Central Simple algebras and Galois Cohomology.

J.P. Serre.
Cohomologie Galoisienne (Springer)

J. Tate: Galois Cohomology IAS / Park City Math Series.

---

1) $\overline{\mathbb{Q}}$ = clausura algebraica de $\mathbb{Q}$.

$\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ ext. Galoisiana

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \overline{\mathbb{Q}}^* \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$$
$$(\sigma, a) \longmapsto \sigma(a)$$

$$H^n(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \overline{\mathbb{Q}}^*) \quad \forall n \geq 0.$$

Def. $G$ grupo, $A$ grupo abeliano. $A$ es un $G$-módulo si se tiene una operación

$$G \times A \longrightarrow A$$
$$(g, a) \longmapsto g.a$$

propiedad: $1.a = a$

$g.(a+b) = g.a + g.b$

$(gh).a = g(h.a)$

$$G \rightsquigarrow \mathbb{Z}[G] = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z}.g$$

$$\left(\sum{}' n_g g\right)\left(\sum{}' m_\tau \tau\right) = \sum{}' n_g m_\tau g\tau$$

$G$-modulo $A \Rightarrow \mathbb{Z}[G]$-módulo $A$

$$\left(\sum{}' n_g g\right).a = \sum{}' n_g (g.a)$$

$G$-morfismos: $A, B$ $G$-módulos, un $G$-homo $A \xrightarrow{f} B$ es un homo de grupos abelianos tq

$$f(g.a) = g.f(a)$$

Ej. (1) $G$-módulos triviales: $A$ grupo abeliano

$$G \times A \to A$$

$$g.a = a \quad \forall g \in G,\ a \in A$$

En particular, $A = \mathbb{Z}$ lo consideramos como $G$-modulo trivial

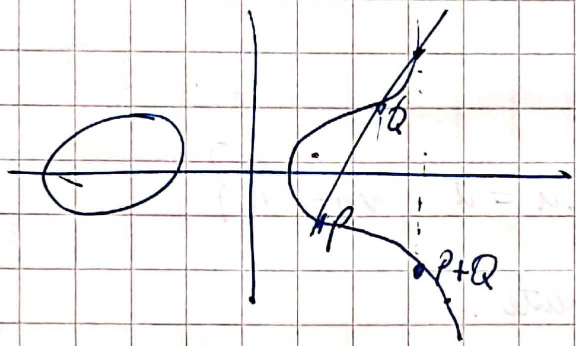
(2) sea $E/F$ extensión galoisiana (finita)

$$G(E/F) \times E \to E$$

$$G(E/F) \times E^* \to E^*, \quad \sigma.a = \sigma(a).$$

(3) $\mathcal{E} : y^2 = x^3 + px + q \quad , p, q \in F \subset E$

$\mathcal{E}(E) = \{(x,y) \in E \,/\, y^2 = x^3 + px + q\} \cup \{\infty\}$




$\forall \sigma \in Gal(E/F) \quad , \quad \sigma.(x,y) = (\sigma x, \sigma y)$

$$Gal(E/F) \times \mathcal{E}(E) \longrightarrow \mathcal{E}(E)$$

$\mathcal{E}(E)$ es un $Gal(E/F)$-módulo.

(4) $H \leq G$. Sea $A$ un $H$-módulo. Definamos

$$M_H^G := Hom_H(\mathbb{Z}[G], A)$$

($\mathbb{Z}[G]$ es un $H$-módulo)

Es un $G$-módulo vía

$$\forall g \in G \quad , \phi : \mathbb{Z}[G] \to A$$

$$(g.\phi)(x) = \phi(x.g)$$

Af. (Ejercicio) $M_H^G(A)$ es un $G$-módulo.

3) $G$ - módulo $A$

$$A^G = \{a \in A \,/\, g.a = a \quad \forall g \in G\}$$

$G$ opera sobre $A^G$ trivialmente.

Observación. Si $f: A \to B$ $G$-homomorfismo $(f(g.a) = g.(f(a)))$,

$ker(f) \subset A$ es un $G$-submódulo de $A$.

$Im(f) \subset B$ $G$-submódulo de $B$

$Coker(f) = B/Im(f)$ $G$-módulo, $g.\overline{b} = \overline{g.b}$

$G$-Mod es una categoría abeliana.

Ej. $A, B, C$ $G$-módulos

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

$G$-morfismos

es una sucesión exacta si:

1) $\alpha$ es inyectiva
2) $\beta$ epiyectiva
3) $Im\,\alpha = ker\,\beta$.

Supongamos que la sucesión es exacta.

Apliquemos la operación $(\ )^G$ a esta sucesión.

$$0 \to A^G \xrightarrow{\alpha} B^G \xrightarrow{\beta} C^G \to 0$$

¿es exacta? NO!

Ejercicio. demostrar que $0 \to A^G \xrightarrow{\alpha} B^G \xrightarrow{\beta} C^G$ es exacta

¿Podemos prolongar esta sucesión a la derecha en una sucesión exacta?

~~Prolonguemos~~

## Prolongación de esta sucesión.

Sea $A$ un $G$-módulo

$$H^0(G,A) := A^G$$

Con esta notación, $H^0(\alpha) := \alpha$, $H^0(\beta) := \beta$

$A$ $G$-módulo. Definimos $H^1(G,A)$:

Definición: Un 1-cociclo de $G$ con valores en $A$ es una aplicación

$$a_\bullet : G \to A$$

con $a_\bullet(gh) = a_\bullet(g) + g.a_\bullet(h)$.

**Ejemplo.** Si $A$ $G$-módulo trivial

$$a_\bullet(gh) = a_\bullet(g) + a_\bullet(h) \qquad (a_\bullet \text{ homo})$$

$Z^1(G,A)$ = grupo de 1-cociclos

**Ejemplo.** (Ejercicio) $a \in A$, definimos
$$G \to A$$
$$g \mapsto g.a - a$$

**Ejercicio.** es 1-cociclo.

Estos 1-cociclos se llaman 1-cobordes y forman un subgrupo
$$B^1(G,A) \leq Z^1(G,A)$$

**Def.** $$H^1(G,A) := Z^1(G,A) \big/ B^1(G,A) \qquad \text{(grupo)}$$

**Ejemplo.** Si $A$ es $G$-módulo trivial
$$H^1(G,A) = \mathrm{Hom}(G,A)$$

**Ejercicio** Si $\alpha : A \to B$ es $G$-homomorfismo, $\alpha$ induce un homomorfismo

$$H^1(\alpha): H^1(G,A) \longrightarrow H^1(G,B)$$
$$[a_\circ] \longmapsto [\alpha \circ a_\circ]$$

Ejercicio. Sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ sucesión exacta de $G$-módulos

$$H^1(G,A) \xrightarrow{H^1(\alpha)} H^1(G,B) \xrightarrow{H^1(\beta)} H^1(G,C)$$

Ejercicio. $\mathrm{Im}\, H^1(\alpha) = \ker H^1(\beta)$

La sucesión $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} 0$

$\Rightarrow$

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} 0 \longrightarrow H^0(G,A) \longrightarrow H^0(G,B) \longrightarrow H^0(G,C) \\ \xrightarrow{\delta} H^1(G,A) \longrightarrow H^1(G,B) \longrightarrow H^1(G,C) \end{array} \right. \quad \text{(exacta)}$$

Debemos construir $\delta$.

Construcción de $\delta$.

$$\delta: H^0(G,C) \longrightarrow H^1(G,A)$$

Sea $c \in C^G$, $g.c = c$ $\forall g \in G$

$\beta$ epi $\Rightarrow \exists b \in B$, $\beta(b) = c$.

Sea $g \in G$, $\beta(g.b) = g\,\beta(b) = g.c = c$

$$\beta(g.b) = \beta(b) \quad \forall g \in G$$

$\forall g \in G$ : $\beta(g.b - b) = 0$

$\Rightarrow g.b - b \in A \quad \forall g \in G$

Definimos $f : G \longrightarrow A$

$$f_b(g) = g.b - b$$

Ejercicio. $f$ es un 1-cociclo de $G$ con valores en $A$

La clase $[f_b] \in H^1(G, A)$

Sea $b' \in B$ con $\beta(b') = c$, $\beta(b) = \beta(b')$

$$\beta(b - b') = 0 \Rightarrow a := b - b'$$

$a \in A$.

$$f_b(g) = f_{b'}(g) + \underbrace{g.a - a}_{\text{1-coborde}}$$

$\forall g \in G$

$$\Rightarrow [f_b] = [f_{b'}]$$

<u>Definición</u>. $\delta(c) := [f_b] \in H^1(G,A)$

<u>Ejercicio</u>. Demostrar que $(*)$ es una sucesión exacta.

Construir $\forall$ $G$-módulo $A$, una familia de grupos

$$\{H^n(G,A),\ n \geq 0\}$$

tq:

1) $H^0(G,A) = A^G$

2) $f : A \xrightarrow{f} B$ $G$-hom $\Rightarrow \forall n$

$$H^n(f) : H^n(G,A) \longrightarrow H^n(G,B)$$

3) $\forall$ sucesión exacta $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ de $G$ módulos, $\forall n \geq 0$

$\exists$ homo: $\delta^n : H^n(G,C) \longrightarrow H^{n+1}(G,A)$

(natural)

tq la sucesión larga de grupos

$$0 \to H^0(G,A) \to H^0(G,B) \to H^0(G,C) \xrightarrow{\delta^0} H^1(G,A) \to H^1(G,B) \to H^1(G,C) \to H^2(G,A) \to \cdots$$

es exacta

Scanned with CamScanner

4) $\forall$ grupo $G$

$$H^n(G, M_{\{e\}}^G(A)) = 0 \qquad \forall n \geq 1$$

o más generalmente

Si $A$ es un $G$-módulo inyectivo

$$H^n(G,A) = 0 \qquad \forall n \geq 1$$

inyectivo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[dl, "\exists \bar{\alpha}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

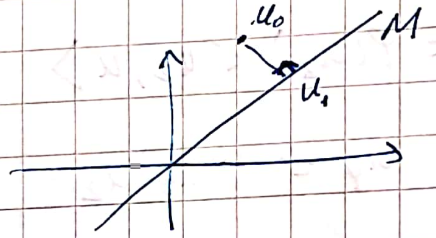
Sea $H$ esp. de Hilbert y $\varphi: H \longrightarrow \mathbb{K}$ un funcional ...
$( |\varphi(v)| \leq C\|v\|)$, entonces existe único $u_\varphi \in H$ tq

$$\varphi(v) = \langle u_\varphi, v\rangle$$

Dem. $\varphi \equiv 0 \Rightarrow u_\varphi = 0$

$M = \varphi^{-1}(\{0\})$ es un subespacio cerrado, tq $M \neq H$.

$\exists\, u_0 \in H \setminus M$




$u_1 = P_M u_0$

obs. $\langle u_0 - P_M u_0, v\rangle = 0 \quad \forall v \in M$

Sea $u_2 = \dfrac{u_0 - u_1}{\|u_0 - u_1\|}$

Para construir $u_\varphi$:

Notemos que para cualquier $u \in H$

$$v = u - \frac{\varphi(u)}{\varphi(u_2)} u_2$$

está bien definido: $\varphi(u_2) \neq 0$

Notemos que $v \in M$

$$\varphi(v) = \varphi(u) - \frac{\varphi(u)\,\varphi(u_2)}{\varphi(u_2)} = 0$$

y además $u_2 \perp M$, luego

$$(u_2, v) = 0$$

$$0 = \left\langle u_2, u - \frac{\varphi(u)}{\varphi(u_2)} u_2 \right\rangle = \langle u_2, u \rangle - \frac{\varphi(u)}{\varphi(u_2)} \langle u_2, u \rangle$$

$$\therefore \varphi(u) = \varphi(u_2) \langle u_2, u \rangle$$

o sea $u_\varphi = \varphi(u_2) u_2$

Obs. Demuestre unicidad.

Ejemplo: $H = L^2(I)$, entonces el teo. de R-F

$$\varphi(v) = \int_I f(x) v(x)\, dx \quad , \quad f \in L^2(I)$$

son todos los funcionales lineales sobre $L^2$.

Generalización de R-F:

Teorema de Lax-Milgram:

Sea $H$ Hilbert, y consideremos función bilineal $a: H^2 \to \mathbb{R}$ que cumple

(i) $|a(u,v)| \leq C \|u\| \|v\|$ (Continuidad)

(ii) $|a(u,v)| \geq \alpha \|u\|^2$, $\alpha > 0$ (coercividad)

Scanned with CamScanner

Entonces $\forall \varphi : H \to \mathbb{R}$ lineal continua, $\exists! \, u_\varphi \in H$ tal que

$$\varphi(v) = a(u_\varphi, v) \qquad \forall v \in H.$$

<u>Dem.</u>

1) $\exists! \, f \in H$ tq $\varphi(v) = \langle f, v \rangle$

2) Para $u$ fijo, la función $\psi_u(v) = a(u,v) : H \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal continua. Luego $\exists! \, \tilde{u} \in H$ tq

$$\psi_u(v) = \langle \tilde{u}, v \rangle$$

3) Notar que $A : H \to H$, $u \mapsto \tilde{u}$ es lineal y continua

En resumen tenemos que

$$\varphi(v) = \langle f, v \rangle = a(u_\varphi, v) = \langle Au, v \rangle \quad , \forall v \in H$$

Encontrar $u \in H$ tq $\langle f - Au, v \rangle = 0$, luego queremos encontrar $u \in H$ tq $Au = f$.

• Teorema del punto fijo de Banach. $T : X \to \mathbb{R}$, $X$ banach tq

$$\| Tx - Ty \| \leq \delta \| x - y \| \quad , \quad 0 < \delta < 1 \text{ ; entonces } T \text{ tiene}$$

un punto fijo.

Para nuestro teorema, definamos

$$Tu = u - \rho(Au - f)$$

Punto fijo: $Tu = u \underset{\rho \neq 0}{\Rightarrow} \boxed{Au = f}$ (queremos solucionar $Au = f$)

Veamos que $T$ es una contracción

$$\| Tu_1 - Tu_2 \|^2 = \| u_1 - \rho(Au_1 - f) - (u_2 - \rho(Au_2 - f)) \|^2$$

$$= \| u_1 - u_2 - \rho(Au_1 - Au_2) \|^2$$

$$= \| u_1 - u_2 - \rho A(u_1 - u_2) \|^2$$

$$\overset{0}{\neq}$$

Sea $v = u_1 - u_2$ $= \| v - \rho A v \|^2$

$$= \| v \|^2 - 2\rho \langle v, Av \rangle + \rho^2 \| Av \|^2$$

$$\overset{?}{\leq} c \| v \|^2, \quad c < 1$$

• $\| Av \|^2 = \langle Av, Av \rangle$
$= a(v, Av)$
$\leq c \| v \| \, \| Av \|$ (continuidad)

$$\| Av \| \leq c \| v \|$$

• $\langle v, Av \rangle = \langle Av, v \rangle = a(v,v) \geq \alpha \| v \|^2$ (coercividad)

$$\therefore \| Tu_1 - Tu_2 \| \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 c^2) \| v \|^2$$

Terminamos si $\exists \rho > 0$ tal que $-2\alpha\rho + \rho^2 c^2 < 0$

$$\rho(\rho c^2 - 2\alpha) < 0$$

$$0 < \rho < \frac{2\alpha}{c^2}.$$

Ejemplo. $H = L^2(I)$

$$a(u,v) = \int_I b(x)\,u(x)\,v(x)\,dx$$

es bilineal, continuo $(\text{si } \|b\|_\infty < \infty)$

y coercivo cuando $b(x) \geq b_0 > 0$

$$a(u,u) = \int_I b(x)\,u(x)^2\,dx \geq b_0 \int_I u^2 = b_0 \|u\|_{L^2}^2$$

satisface Lax-Milgram.

---

[3] Espacios de Sobolev.

Noción de derivada débil.

Sea $u, v \in C_c^1(0,1)$

$$\int_0^1 u'(x)\,v(x)\,dx = -\int_0^1 u(x)\,v'(x)\,dx$$

Notemos que el lado derecho NO usa derivadas de $u$, es más, hace sentido si $u$ es integrable.

Def. (Derivada débil)

Para $u$ integrable, decimos que tiene una derivada débil $g\ (= u')$ integrable, si satisface

$$\int_I u(x)\, v'(x)\, dx = -\int_I g(x)\, v(x)\, dx \quad , \forall v \in C_c^1(I)$$

Sistemas Integrables

Pratrick Desrosiers

1) Mecánica ~~Newtoniana~~ Hamiltoniana

2) Mecánica clasica : Newton $\to$ Inercia; $F=ma$; acción reacción

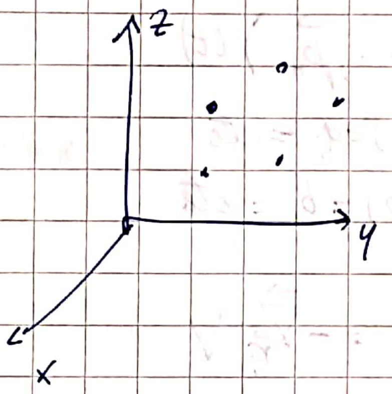
Newton

$\downarrow$

Lagrange

$\downarrow$

Hamilton




N partículas masa $m_i$

Posición de $i$ $\vec{r}_i \in \mathbb{R}^3$

Trayectoria : $\phi_t : \mathbb{R}^3 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{array}{l} \phi_t : \mathbb{R}^3 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \phi(x,y,z,t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{array}\right\} C^\infty$$

Velocidad $\vec{v}_i(t) = \dfrac{dr(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}_i$

Momento lineal : $\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i$

Aceleración : $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}_i = \dfrac{1}{m_i} \dot{\vec{p}}_i$

Ecuación de movimiento : $\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i$

$$\boxed{I = \forall_z \forall}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_i &= \frac{\vec{p}_i}{m_i} \\ \dot{\vec{p}}_i &= \vec{F}_i \end{aligned}\right\} \text{ Sistema de EDO de orden } 6N$$

$$\downarrow$$

$\exists$ única solución $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)(t)$

tal que $\vec{r}_i(0) = a_i = cte$

$\vec{p}_i(0) = b_i = cte$

Caso fundamental: $\vec{F}_i$ son conservadoras $\Leftrightarrow$ $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V$

donde $V : \mathbb{R}^{mN} \to \mathbb{R}$ $(C^\infty)$

$V$: Energía potencial

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{m_i} \vec{p}_i \\ \dot{\vec{p}}_i = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V \end{cases}$$

Para simplificar notación: $(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) = (q_1, \dots q_n)$

$n = mN$ # grados de libertad

$(\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n) = (p_1 \dots p_n)$

Scanned with CamScanner

Ecuaciones de movimiento

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{1}{m_i} p_i \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial V}{\partial q_i} \end{aligned}\right\} \quad , \quad i=1,\dots,n$$

Hamiltoniano = Función de energía : $H : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (C^\infty)$

$$H = T + V \quad ; \quad T = \sum_i \frac{1}{2m_i} p_i^2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad V = V(q_1, \dots q_n) \text{ potencial}$$

Ahora, $\dfrac{p_i}{m_i} = \dfrac{\partial H}{\partial q_i} \Rightarrow \dfrac{\partial V}{\partial q_i} = \dfrac{\partial H}{\partial q_i}$

Entonces $F = ma \Rightarrow \underbrace{\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \, , \, \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}}_{\text{Ec. de Hamilton.}}$

[2] Corchetes de Poisson y estructura simpléctica

Definición. $\Omega = \{(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)\} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$

= espacio de fases = espacio de los estados

= variedad suave de dimensión $2n$.

$C^\infty(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,/\, f \in C^\infty \}$ espacio de los observables.

(espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$)

[ ' ]

Por ejemplo, $T \in C^\infty(\Omega)$

$V \in C^\infty(\Omega)$

$H \in C^\infty(\Omega)$

Momento total $\sum_i p_i \in C^\infty(\Omega)$

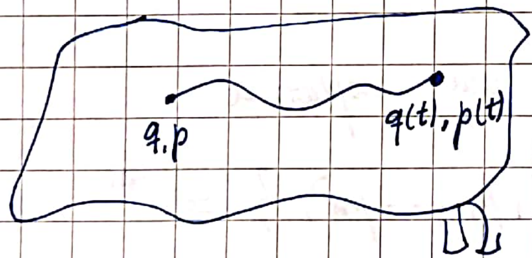
Sistema Hamiltoniano (general) : par $(\Omega, H)$ donde $H \in C^\infty(\Omega)$

induce la dinámica sobre $\Omega$ por medio de $\Phi_t : \Omega \times [0,1] \longrightarrow \Omega$

$$(q,p,t) \longmapsto (q(t), p(t))$$

tal que

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$




Corchete de Poisson : $\{\,,\,\} : C^\infty(\Omega) \times C^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$

$$(f,g) \longmapsto \{f,g\} = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} \right)$$

**Lema.** Ecuaciones de Hamilton $\iff$ $\dot{q}_i = \{q_i, H\}$
$\dot{p}_i = \{p_i, H\}$

Además, $\forall f \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow \frac{df}{dt} = \{f, H\}$

**Lema.** El corchete de Poisson satisface, $\forall f, g, h \in C^\infty(\Omega)$

i) $\{f, ag+bh\} = a\{f,g\} + b\{f,h\}$ (lineal)

ii) $\{f,g\} = -\{g,f\}$ (antisimetría)

iii) $\{f, \{g,h\}\} + \{h, \{f,g\}\} + \{g, \{h,f\}\} = 0$
(identidad de Jacobi)

Además, iv) $\{f, gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$
(Identidad de Leibniz)

Consecuencia: $C^\infty(\Omega)$ es un algebra de Lie, con corchete $\{,\}$.

Algebra de Lie: Espacio vectorial con producto que satisface i), ii), iii).

**Ejemplo.** $\mathbb{R}^3$ con producto cruz.

Otro punto de vista: $J = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}$, $I_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$

$$\eta = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \in \Omega, \quad \nabla_\eta = \begin{pmatrix} \partial/\partial q_1 \\ \vdots \\ \partial/\partial q_n \\ \partial/\partial p_1 \\ \vdots \\ \partial/\partial p_n \end{pmatrix}$$

$$\dot{\eta} = \{\eta, H\} \iff \dot{\eta} = J \nabla_{\eta} H$$

## C. Galoisiana

G grupo.

Si $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$

es suc. exacta de G-mod

$\Rightarrow$ se obtiene suc. exacta de grupos

$$0 \to H^0(G,A) \xrightarrow{H^0(\alpha)} H^0(G,B) \xrightarrow{H^0(\beta)} H^0(G,C) \xrightarrow{\rho} H^1(G,A) \to H^1(G,B)$$

$$\to H^1(G,C)$$

Ejemplo. Sea $k$ cuerpo, $V, E, W$ $k$-esp. vectoriales y además son $G$-módulos, de modo que

$$\forall \underset{k}{\alpha} \in, \underset{G}{g} \in, \underset{V}{x} \in, \quad \alpha(g.x) = g(\alpha.x)$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{g.} & V \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & g.x \end{array}$$ es $k$-lineal (automorfismo)

$$G \longrightarrow GL(V) = Aut_k(V)$$
$$g \longmapsto g.$$

es un homomorfismo de grupos

ed, es una representación lineal de G.

Consideremos suc exactas de $k$-$G$-esp. vectoriales

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0$$

$i, p$ son $k$-$G$-homo.

" esta sucesión se expresa:

$E$ es una extensión de la representación $V$ por la representación $W$

Ejemplo. $\begin{cases} E = V \oplus W \\ i : V \hookrightarrow E \\ p : V \oplus W \xrightarrow[\text{proy}]{} W \end{cases}$ como $k$-$G$-módulos

Problema. Encontrar todas las extensiones de $V$ por $W$.

Sea $0 \to V \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0$ una extensión

$\mathrm{Hom}(W, -)$

$$(*) \quad 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(W, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(W, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(W, W) \longrightarrow 0$$

es suc. exacta de $k$-esp. vect.

Obs. Si $A, B$ son $k$-$G$-espacios como $V, E, W$

$$Hom_k(A,B)$$

es un $G$-módulo vía la acción $f: A \to B$ en $Hom_k(A,B)$

$x \in A$, $g \in G$

por def. $g.f \in Hom_k(A,B)$

- $$g.f(x) := g.f(g^{-1}.x)$$

Ejercicio. $Hom_k(A,B)$ es $G$-módulo

y la suc. $k$-$G$-operación conmuta!

Ejercicio. $i, p$ son $k$-$G$-homom...

(*) es sucesión de $G$-módulos

- Ejercicio. $Hom_k(A,B)^G = \{ f / g.f = f \ \forall g \in G \}$

Af. $Hom_k(A,B)^G = Hom_G(A,B) = H^0(G, Hom_k(A,B))$

Apliquemos la suc. exacta de cohomologías

$$0 \to H^0(G, Hom_k(W,V)) \to H^0(G, Hom(W,E)) \to H^0(G, Hom(W,W))$$

$$\xrightarrow{\delta} H^1(G, Hom_k(W,V)) \to \cdots$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(W,V) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(W,E) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(W,W) \arrow[r, "\delta"] & H^1(G, \mathrm{Hom}_k(W,V)) \\
 & & & I_W \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] \arrow[r, mapsto, "\delta"] & \delta(I_W) \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90]
\end{tikzcd}$$

<u>Def</u>. $ch(E) := \delta(I_W) \in H^1(G, \mathrm{Hom}_k(W,V))$

se llama la clase característica de la extensión $E$ de $V$ por $W$.

<u>Ejercicio</u>. $E \cong V \oplus W \Leftrightarrow ch(E) = 0$

<u>Resultado</u>. $\left\{ \begin{array}{l} \text{clases de extensiones} \\ \text{de } V \text{ por } W \end{array} \right\} \xhookrightarrow{ch} H^1(G, \mathrm{Hom}_k(W,V))$

<u>Construcción</u> de los grupos $H^n(G, A)$ $\forall n \geq 0$ $\forall G$-módulo $A$

<u>Definición</u>. $\left\{ \begin{array}{l} G\text{-módulo proyectivo} \\ \mathbb{Z}[G]\text{-} \quad \text{''} \end{array} \right.$ $P$, si se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, dashed, "\exists \beta"'] \\
N \arrow[r, two heads, "p"] & M
\end{tikzcd} \quad G\text{-mod epimorfismo}$$

tq $p \circ \beta = \alpha$

Ejemplo. G-módulos libres $\mathbb{Z}[G]^n$.

Def. Una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ es una sucesión de G-módulos proyectivos y g-homo

$$(*) \quad \dots P_{i+1} \xrightarrow{d_i} P_i \xrightarrow{d_{i-1}} P_{i-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_1} P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \xrightarrow{d_{-1}} \mathbb{Z} \to 0$$

tq es exacta en todas partes

$$\mathrm{Im}(d_i) = \ker(d_{i-1}) \quad \forall i \geq 0$$

Ejemplo. $\mathbb{Z}$ admite G-resoluciones libres

Sea $P_0 = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G].\bar{n}$, $\mathbb{Z}[G]$-módulo libre

$$d_{-1} : P_0 \to \mathbb{Z} \qquad ; \qquad \sum' a_n \bar{n} + \sum' b_n \bar{n}$$
$$g.\bar{n} \longmapsto 1 \qquad\qquad = \sum' (a_n + b_n)\bar{n}$$

$$\underbrace{P_i \xrightarrow{d_{i-1}} \dots \longrightarrow P_0}_{\text{sup. construida}} \xrightarrow{d_{-1}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

sup. construida
con $P_i$ $\mathbb{Z}[G]$-libre
y exacta

$$P_{i+1} = \bigoplus_{x \in \ker(d_{i-1})} \mathbb{Z}[G].\bar{x}$$

$P_{i+1} \xrightarrow{d_i} P_i$ se define como $d_{-1}$

---

Tomemos una resolución proyectiva (*) de $\mathbb{Z}$ arbitraria (*), $A$ $G$-mod

Sea $\forall i \geq 0$ : $K^i := \mathrm{Hom}_G(P_i, A)$ grupo

$P_{i+1} \xrightarrow{d_i} P_i \Rightarrow \delta^i = d_i^* : K^i \longrightarrow K^{i+1}$

$\delta^i(f) = d_i \circ f \in K^{i+1} \quad \forall f \in K^i$

Obtenemos una sucesión de grupos abelianos y homomorfismos

$$(\text{✡}) \quad K^0 \xrightarrow{\delta^0} K^1 \xrightarrow{\delta^1} K^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow K^{i-1} \xrightarrow[\delta^{i-1}]{} K^i \xrightarrow[\delta^i]{} K^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

Ejercicio: $\delta^i \circ \delta^{i-1} = 0$

$\mathrm{Im}\, \delta^{i-1} \subseteq \ker \delta^i$

(✡) es 0-sucesión.

Def. $H^i(G,A) := \dfrac{\ker(\delta^i)}{\mathrm{Im}(\delta^{i-1})} \ni [f]$

$i$-ésimo grupo de cohomología de $G$ con valores en el $G$-mod $A$.

Th. Estos grupos NO dependen de la resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ elegida

Ejercicio. $H^0(G,A) = A^G$

Teorema. Los grupos $H^n(G,A)$, $A \in G$-mod, satisfacen

1) Si $\alpha : A \to B$ es $G$-hom, entonces $\alpha$ induce un hom

$$H^i(\alpha) : H^i(G,A) \to H^i(G,B)$$
$$H^i(\alpha)([f]) = [\alpha \circ f]$$

$\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$ $G$-hom $\Rightarrow H^i(\beta \circ \alpha) = H^i(\beta) \circ H^i(\alpha)$

2) $H^0(G,A) = A^G$

3) Si $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ es suc exacta de $G$-módulos

$\Rightarrow \forall i \geq 0$
$\exists$ homo de conexión $H^i(G,C) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(G,A)$

Scanned with CamScanner

tq la sucesión

$$0 \to H^0(G,A) \xrightarrow{H^0(\alpha)} H^0(G,B) \xrightarrow{H^0(\beta)} H^0(G,C) \xrightarrow{\delta} H^1(G,A) \xrightarrow{H^1(\alpha)} H^1(G,B)$$

$$\xrightarrow{H^1(\beta)} H^1(G,C) \xrightarrow{\delta^2} H^2(G,A) \longrightarrow H^2(G,B) \longrightarrow \cdots$$

es exacta

4) Si $A$ es un $G$- módulo inyectivo

$$H^i(G,A)=0 \quad \forall i \geq 1$$

4)' Si $A$ es grupo abeliano

$$H^i(G, M^G_{\{e\}}(A)) = 0 \qquad \forall i \geq 1$$

Ejemplo. 1) $H^1(\mathbb{Z},A)$ , $G=\mathbb{Z}=\langle\sigma\rangle$ cíclico infinito

Tenemos que construir una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$

$$\cdots \to 0 \longrightarrow 0 \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \xrightarrow{d_{-1}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$\mathbb{Z}=\langle\sigma\rangle, \quad \mathbb{Z}[\langle\sigma\rangle] = \left\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}} n_m \sigma^m \,/\, n_m \in \mathbb{Z} \right\}$$

$d_{-1}(\sigma)=1$

$d_0 = (\sigma-1)\cdot$ mult. por $\sigma-1$

$d_0 : \mathbb{Z}[\langle\sigma\rangle] \longrightarrow \mathbb{Z}[\langle\sigma\rangle]$ , $d_0(x) = (\sigma-1).x$

$K^i = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}=\langle\sigma\rangle}(P_i, A)$

$$H^0(\mathbb{Z}, A) = A^{\langle\sigma\rangle} = A^{\sigma}$$

<u>demostrar</u> : $H^1(\mathbb{Z}, A) = \dfrac{\operatorname{Ker}\delta^1}{\operatorname{Im}\delta^0} = A/(\sigma-1).A$

<u>Ejercicio</u>. La suc anterior es exacta.

$$H^i(\mathbb{Z}, A) = 0 \quad \forall i \geq 2$$

$G = \langle a \rangle$ grupo cíclico finito de orden $n$

(Queremos calcular $H^i(G, A)$)

Scanned with CamScanner

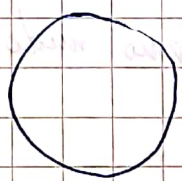
## Nudos y Trenzas

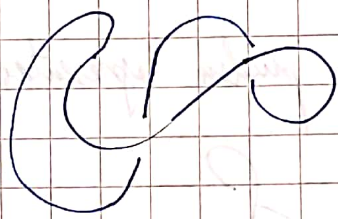
Kassel y Turaev
Farmer y Stanford

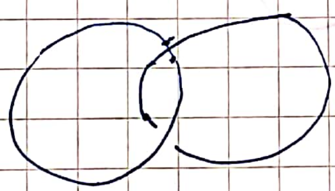
**Def.** Un nudo es una incrustación de una cuerda $(= S^1)$ en $\mathbb{R}^3$

Un link es una incrustación de $S_1 \dot\cup S_2 \dot\cup \dots \dot\cup S_k$ en $\mathbb{R}^3$ donde $S_i \cong S^1$.

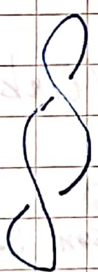
**Ejemplos.**



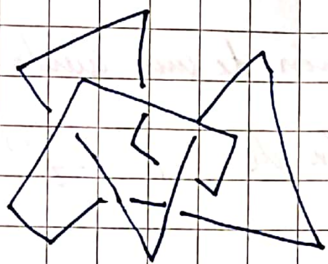




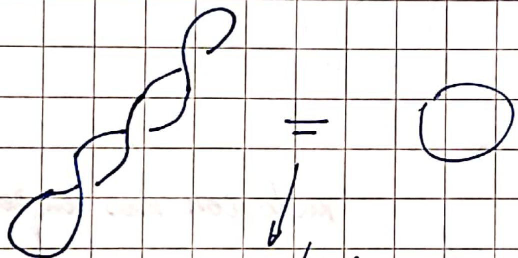
(nudo con dos componentes (links))

 "$\cong$" 

A veces, para evitar cualquier cosa patológica, se definen nudos/links como curvas cerradas de $\mathbb{R}^3$, lineales por partes



Diagramas distintos pueden representar el mismo nudo / link

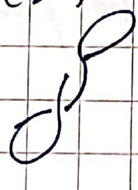
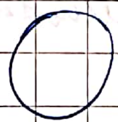


isotopía

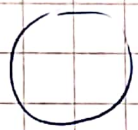
Meta fundamental: Encontrar todos los nudos / links salvo isotopías.

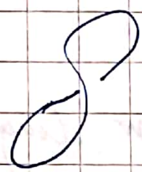
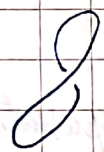
Los diagramas sólo representan los nudos / links, no son los nudos / links

Dado un diagrama $D$ que representa $L$ link, se le asocia el número de cruces $c(D)$

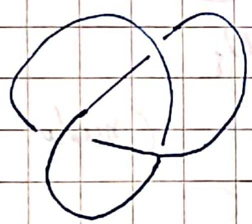
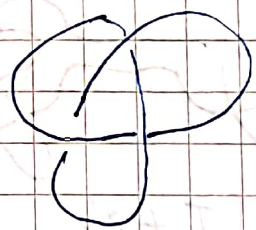
 $c = 2$ ,  $c = 0$

$c(D)$ no es un invariante del nudo / link $L$

$c=0$ :  = nonudo (unknot)
= nudo trivial

$c=1$ :  

$c=2$ : 

$c=3$ :   (Tréboles)

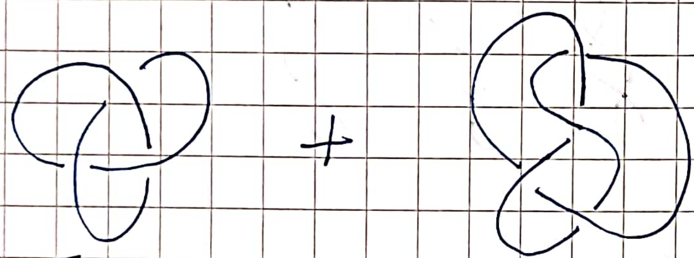
$T_+$ $\qquad$ $T_-$

Preguntas: 1) Es cierto que $T_+$ son diferentes?

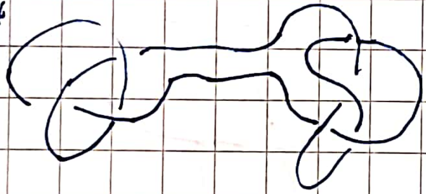
2) Es cierto que $T_+$ y $T_-$ no son triviales?

## Operaciones sobre nudos

(1) Suma. Sean $N_1, N_2$ nudos representados por diagramas $D_1$ y $D_2$. Se puede formar la suma $N_1+N_2$ de la manera siguiente



$T_+$ $\qquad$ $N_8$

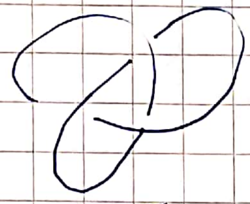


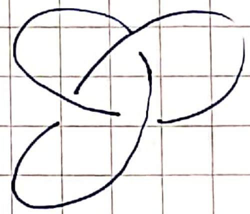
(nudo compuesto)

$T_+ + N_8$

Un nudo $N$ que tiene forma $N=N_1+N_2$, donde $N_i$ es no trivial ($i=1,2$) se dice compuesto. En caso contrario se dice primitivo.

(2) Reflexion. Sea $D$ un diagrama de link. Se obtiene el diagrama $\bar{D}$ al cambiar la info de arriba (abajo) de cada cruce. Se dice $\bar{D}$ el diagrama reflejado de $D$.



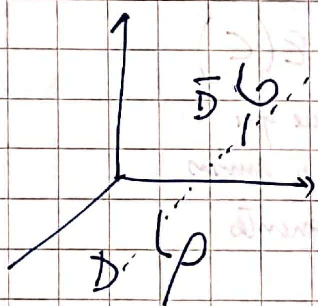


$\overline{T_+} = T_-$

- La notación se debe al siguiente hecho: Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineal

$$T : (x,y,z) \longmapsto (-x,y,z)$$

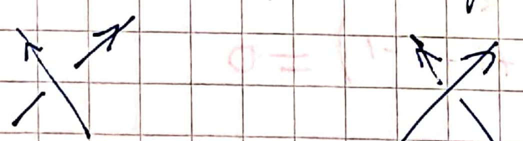
Entonces es una reflexión.




- Sea D diagrama de nudos/links. Sea C un cruce. Se le asocia a C un signo $\varepsilon(C)$ de manera siguiente.

Se elige orientación de los tramos de D, después se usa necesito

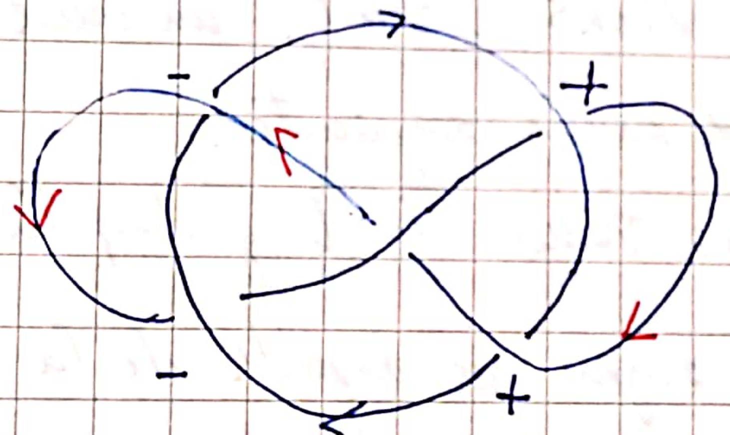
En el caso de un nudo, el signo no depende de la orientación



$\varepsilon(c) = -1$ $\qquad\qquad$ $\varepsilon(c) = 1$

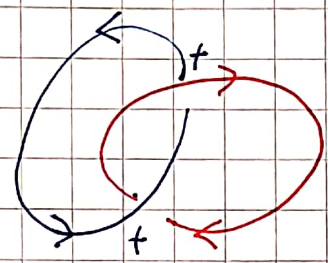
$$\ell(L) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{C \text{ cruce que} \\ \text{involucra ambas} \\ \text{componentes}}} \varepsilon(C)$$

Ejemplo.

$W =$ 

$$\ell(W) = \frac{1}{2}(1+1-1-1) = 0$$

Ejemplo.

$H =$ 

$\ell(H) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$

Teorema.
(a) $\ell(L) \in \mathbb{Z}$ (ejercicio)

(b) $\ell(L)$ no depende del diagrama del link orientado. Es un invariante de links orientados de dos componentes.

(c) Si $\ell(L) = 0$ entonces se puede descomponer $L$ en dos nudos disjuntos después de cambiar cruces del mismo componente.

- Grupos de matrices : $GL_n(\mathbb{R}) = \{$ matrices invertibles $\}$

$$O_n(\mathbb{R}) = \{ M \in GL_n(\mathbb{R}) \,/\, M^t M = I \}$$

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{ M \in O_n(\mathbb{R}) \,/\, \det M = 1 \}$$

$SO_n(\mathbb{R})^* = \{ M \in O_n(\mathbb{R}) \,/\, \det M = -1 \}$ (no es grupo)

$Sp_{2n}(\mathbb{R}) = \{ M \in GL_{2n}(\mathbb{R}) \,/\, M J M^T = J \}$ grupo simpléctico

$GL_n, O_n, Sp_{2n}$ son grupos de Lie = grupos que son variedades

$\hookrightarrow M = (\;)$ $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos independientes

$\Rightarrow O_n$ variedad de dim $\frac{n(n+1)}{2}$

$O_n$ no es conexa pués $O_n = \underbrace{SO_n}_{\text{abierto}} \cup \underbrace{SO_n^*}_{\text{abierto}}$

La parte conexa de un grupo de Lie contiene la identidad ($I$). Cada elemento de la parte conexa puede escribirse como

$$g = e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots$$

$\in$ álgebra de Lie de grupo de Lie.

Ejemplo. $g \in O_n$

$$g = e^A, \quad g^T = e^{A^T} = g^{-1} = e^{-A}$$

$\Rightarrow$ el álgebra de Lie de $O_n$ es $o_n = \{ A \text{ } n\times n \,/\, A^T = -A \}$

[3] Campos vectoriales y simetrías

Sea $f \in C^\infty(\Omega)$. Entonces

$$X_f : C^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$$
$$g \longmapsto X_f(g) = \{f, g\}$$

es un operador diferencial de orden 1 sobre $C^\infty(\Omega)$

$$X_f = \sum_i \left[ \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)\frac{\partial}{\partial p_i} - \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)\frac{\partial}{\partial q_i} \right]$$ (campo vectorial inducido por $f$)

A cada $X_f$ corresponde una transformación sobre $\Omega$.

En particular,
$$X_H(f) = \{H, f\} = -\dot{f} = -\frac{df}{dt}$$

Entonces, $X_H$ es el generador de evolución temporal. Si $\eta = \eta(t)$

$$\eta(t+\varepsilon) = \eta(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t) + \frac{\varepsilon}{2}\ddot{\eta}(t) + \frac{\varepsilon^2}{6}\dddot{\eta}(t) + \cdots$$
$$= \eta(t) - \varepsilon X_H(\eta) + \frac{\varepsilon^2}{2} X_H(X_H(\eta))$$
$$- \frac{\varepsilon^3}{6} X_H(X_H(X_H\eta)) + \cdots$$

$$= e^{-\varepsilon X_H}(\eta)$$

$$\therefore \quad \phi_\varepsilon = e^{-\varepsilon X_H}$$

Consecuencias:

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta(\eta) = e^{-\alpha X_H} e^{-\beta X_H}(\eta) = e^{-(\alpha+\beta) X_H}(\eta)$$
$$= \phi_{\alpha+\beta}(\eta)$$

$$\phi_\alpha \circ \phi_{-\alpha}(\eta) = \phi_0(\eta) = \eta$$

$\therefore$ $\{\phi_\alpha \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}$ es un grupo (de Lie 1-dimensional) con 1 parámetro.

Traslación. $\quad f = p_i$ = momento lineal

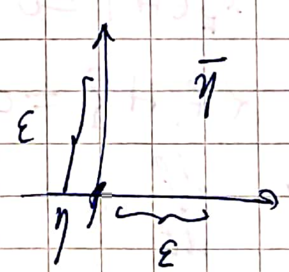
$$X_f = X_{p_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}$$ : generador de traslación en dirección $q_i$

$$e^{\varepsilon X_{p_i}}(q_i) = q_i + \varepsilon$$

$$e^{\varepsilon X_{p_i}}(q_j) = q_j \qquad \forall j \neq i$$

Del mismo modo $\quad f = \sum_i' p_i$ : momento lineal total

$$e^{\varepsilon X_f}(q_j) = q_j + \varepsilon$$



Si $\cancel{A}f = q_j p_k - q_k p_j$, entonces $X_f$ genera rotación en el plano $q_j q_k$, es decir

$$e^{\varepsilon X_f} \begin{pmatrix} q_j \\ q_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & \pm \operatorname{sen}\varepsilon \\ \mp \operatorname{sen}\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_j \\ q_k \end{pmatrix}$$

$$e^{\varepsilon X_f} \begin{pmatrix} p_j \\ p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & \mp \operatorname{sen}\varepsilon \\ \pm \operatorname{sen}\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_j \\ p_k \end{pmatrix}$$

Grupo de Simetrías (continuas) = Grupo de Lie que actúa sobre el $\omega\Omega$ y tal que $H(g\eta) = H(\eta)$ $\forall g \in$ Grupo

En particular, $e^{\varepsilon X_f} H = H$ $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$

$$\Longleftrightarrow X_f(H) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \{f, H\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{df}{dt} = 0$$ (f es una cantidad conservada)

Por ejemplo.

(1) $\sum_i p_i$ induce una simetría en el sistema tal que $H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \mathcal{V}$

$\mathcal{V} = V(q_1 - q_2, q_1 - q_3, \cdots, q_2 - q_3, q_2 - q_4, \cdots, q_{N-1} - q_N)$

Ejemplo. $V = \sum_{i<j} \frac{c_{ij}}{(q_i - q_j)^m}$

(2) $p_1 q_2 - p_2 q_1$ es simetría del sistema tal que

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V\left(\sqrt{q_1 + q_2}\right)$$

$\therefore$ Constantes del movimiento y las simetrías del sistema.

[4] Transformaciones canónicas

Sea $(\Omega, H)$ sistema Hamiltoniano $\}$

Una función $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ biyectiva

$$\eta = (q, p) \longmapsto \bar{\eta} = (Q, P) = \bar{\eta}(\eta) \qquad C^\infty$$

es una trans. canónica ssi

$$\dot{\bar{\eta}} = J \nabla_{\bar{\eta}} \bar{H} \quad , \quad \bar{H}(\bar{\eta}) = H(\eta(\bar{\eta}))$$

Teorema $f: \eta \to \bar{\eta}$ es una T.C

$$\Leftrightarrow \{\bar{\eta}_i, \bar{\eta}_j\}_\eta = J_{ij} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \eta}\right) J \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \eta}\right)^T = J$$

donde

$$\{f, g\}_{\eta=(q,p)} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$$

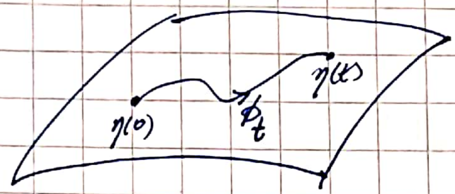
$$\{f, g\}_{\bar{\eta}=(Q,P)} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial Q_i}\frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial g}{\partial Q_i}\right)$$

$$\{\bar{\eta}, \bar{\eta}\}_\eta = J \Leftrightarrow \begin{array}{l} \{Q_i, Q_j\}_\eta = 0 \\ \{Q_i, P_j\}_\eta = \delta_{ij} \\ \{P_i, P_j\}_\eta = 0 \end{array}$$

Teorema : $f$ T.C $\Leftrightarrow \sum_i p_i dq_i = \sum_i P_i dQ_i + dS(p,q)$

$\forall S: \Omega_S \to \Omega$ ($C^\infty$)

Sistema Hamiltoniano




$$\left\{ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} \right\}$$

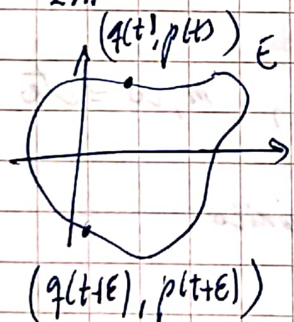
$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\eta} = J \nabla_{\eta} H \\ \dot{\eta} = \{\eta, H\} \end{array} \right\}$$

$\Omega = 2n-$ variedad suave

Si $n=1$: $\quad \dfrac{p(t)^2}{2m} + V(q(t)) = E \quad \Rightarrow \quad p(t) = \pm\sqrt{2m\left(E - V(q(t))\right)}$

$\Omega$




$\therefore$ Si se conserva una cantidad ($\dot{f} = 0$) las soluciones tales que $f = cte$ pertenecen a una variedad $2n-1$.