Apuntes Topología General
Primer Semestre 2013

Apuntes basados en
'A FIRST COURSE IN algebraic topology' de Czea Kosniowski.
Cambridge University Press 1980.

1 Conjuntos

1.- El **Producto cartesiano** de una colección finita de conjuntos $X_1, X_2, \cdots, X_n$ es el conjunto:

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in X_i,\ 1 \leq i \leq n\}$$

Si $X_i = X$ para todo $1 \leq i \leq n$ anotamos $X^n = X \times X \times \cdots X$.

2.- Si $f : X \to Y$ se tiene las siguientes propiedadess:

$$f(\cup_{j\in J} A_j) = \cup_{j\in J} f(A_j); \quad f(\cap_{j\in J} A_j) \subseteq \cap_{j\in J} f(A_j)$$
$$f^{-1}(\cup_{j\in J} B_j) = \cup_{j\in J} f^{-1}(B_j); \quad f^{-1}(\cap_{j\in J} B_j) = \cap_{j\in J} f^{-1}(B_j);$$
$$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$$

3.- Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ son tales que $g \circ f = \text{ id } : X \to X$, entonces f es inyectiva y g es epiyectiva.

Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ son tales que $g \circ f = \text{ id }$ y $f \circ g = \text{ id }$ entonces f y g son biyectivas, $g = f^{-1}$ y $f = g^{-1}$.

4.- Una **relación** en un conjunto X es un subconjunto $\sim$ de $X \times X$.

Escribimos $x \sim y$ si $(x, y) \in \sim$.

Una relación $\sim$ en un conjunto X es una **relación de equivalencia** si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) Reflexividad: $x \sim x$ para todo $x \in X$.
(ii) Simetría: Si $x \sim y$ entonces $y \sim x$.
(iii) Transitividad: Si $x \sim y$ y $y \sim z$ entonces $x \sim z$.

La **clase de equivalencia** de $x \in X$ es el conjunto

$$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}.$$

Cada elemento de X pertenece a exactamente una clase de equivalencias. Las clases de equivalencia forman una partición de X. Reciprocamente, una partición de X define una relación de equivalencia en X.

Denotamos por $X/_\sim$ al conjunto de clases de equivalencias.

La función $p : X \to X/_\sim$ definida por $p(x) = [x]$ es epiyectiva y se denomina **proyección canónica** asociada a la relación de equivalencia $\sim$.

Lema 1.1. *Sea $p : X \to X/_\sim$ proyección canónica. Sea $f : X \to Y$ una función.*
Si $x \sim x' \Longrightarrow f(x) = f(x')$ entonces existe función $\varphi : X/_\sim \to Y$ talque $\varphi p = f$. (Basta definir $\varphi([x]) = f(x)$ y comprobar que está bien definido).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & X/_\sim \arrow[d, "\varphi"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Si $x \sim x' \Longleftrightarrow f(x) = f(x')$ entonces φ es inyectiva.
Si f es epiyectiva entonces φ es epiyectiva.

5.- Ejemplo $X = \mathbb{R}$, $\quad t \sim s \Longleftrightarrow t - s \in \mathbb{Z}$; $\quad Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 = 1\}$.
$f : X \to Y$, $\ f(t) = (\cos(2\pi t), \mathrm{sen}(2\pi t))$.
Entonces $\varphi : X/_\sim \to Y$, $\ \varphi([t]) = f(t)$
está bien definida, verifica $\varphi p = f$ (donde $pX \to X/_\sim$ es la proyección canónica), y es biyectiva.

2 Grupos

1.- Una **operación binaria** en un conjunto X es una función $f : X \times X \to X$.
Abreviamos $f(x, y)$ por xy (notación multiplicativa), o a veces por $x+y$ (notación aditiva).

2.- Un **grupo** es un conjunto G con una operación binaria que verifican las siguientes condiciones:
(i) Existe un elemento $1 \in G$, llamado **elemento identidad** de G, que verifica
$$1g = g1 = g \text{ para todo } g \in G.$$
(ii) Para todo $g \in G$ existe un elemento $g^{-1} \in G$, el **inverso de** g, tal que
$$gg^{-1} = g^{-1}g = 1.$$
(iii) Para todos g_1, g_2, g_3 en G se cumple la **asociatividad**:
$$(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3).$$
En notación aditiva el neutro se anota 0, y el inverso de g se anota $-g$.

3.- Un **subgrupo** H de un grupo G es un subconjunto H de G que es un grupo con la operación binaria de G.
El subgrupo $\{1\}$ (ó $\{0\}$) de G, formado sólo por el elemento neutro, se llama **subgrupo trivial** de G.

4.- Si H es un subgrupo de G, y $g \in G$, se llama **coseto izquierdo** al conjunto
$gH = \{gh \mid h \in H\}$. De la misma forma se define **coseto derecho**.
Dos cosetos izquierdos g_1H, g_2H, son iguales o disjuntos.

5.- El **producto directo** de dos grupos G y H es el grupo $G \times H$ con la operación binaria

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2).$$

Con notación aditiva se habla de **suma directa** y se anota por $G \oplus H$.

6.- Un **homomorfismo** de un grupo G en un grupo H es una función $f : G \to H$ que verifica

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) \text{ para todos } g_1, g_2 \in G.$$

Si un homomorfismo $f : G \to H$ es biyectivo, decimos que es un **isomorfismo** entre los grupos G y H. Se dice que G y H son **grupos isomorfos** y se escribe $G \cong H$.

El **núcleo** de un homomorfismo $f : G \to H$ es el conjunto

$$\ker f = \{g \in G \mid f(g) = 1_H\}.$$

7.- Un subgrupo K de un grupo G es **normal** si $gkg^{-1} \in K$ para todo $g \in G, k \in K$.

El núcleo $\ker f$ de un homomorfismo $f : G \to H$ es un subgrupo normal de G.

Se tiene que $\ker f = \{1_G\}$ si y sólo si f es inyectiva. En particular, si f es un isomorfismo entonces $\ker f = \{1_G\}$.

8.- Si K es un subgrupo normal de G, entonces el coseto izquierdo gK coincide con el coseto derecho Kg: $gK = Kg$ para todo $g \in G$.

Además, el conjunto G/K de todos los cosetos izquierdos es un grupo con la operación:

$$(g_1 K)(g_2 K) = (g_1 g_2)K.$$

Al grupo G/K lo llamamos **grupo cociente** de G por K.

9.- El **Primer teorema del isomorfismo** dice que si $f : G \to H$ es un homomorfismo epiyectivo, entonces $G/\ker f \cong H$.

10.- Si $g \in G$ el **subgrupo generado** por g es el subgrupo de las potencias de g:

$$\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

donde $g^n = \overbrace{gg\cdots g}^{n}$ si $n \geq 0$ y $g^n = \overbrace{g^{-1}g^{-1}g^{-1}\cdots g^{-1}}^{n}$ si $n \leq 0$.

En el caso de notación aditiva: $\langle g \rangle = \{ng \mid n \in \mathbb{Z}\}$ donde

$$ng = \overbrace{g + g + \cdots + g}^{n} \text{ si } n \geq 0 \text{ y } ng = \overbrace{-g + (-g) + \cdots + (-g)}^{n} \text{ si } n \leq 0.$$

Si $G = \langle g \rangle$ para algún elemento $g \in G$ decimos que G es el **grupo cíclico** generado por g.

Si $G = \langle g \rangle$ tiene n elementos ($g^n = 1$ para $n \in \mathbb{N}$) decimos que G es un **grupo cíclico de orden** n.

11.- En general un **conjunto de generadores** de un grupo G es un subconjunto S de G de modo que todo elemento de G se escribe como producto de potencias de elementos en S.

Escribimos $G = \langle S \rangle$.

Si S es finito, decimos que G es **finitamente generado**.

12.- Un grupo G es **abeliano** ó **commutativo** si

$g_1g_2 = g_2g_1$ para todos $g_1, g_2 \in G$.

Por ejemplo $\mathbb{Z}$ con la suma es un grupo cíclico abeliano generado por 1 ó -1.

13.- Un grupo **libre abeliano de rango** n es un grupo isomorfo a $\overbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{n}$.

14.- El **Teorema de descomposición para grupos abelianos finitamente generados** dice que todo grupo G abeliano finitamente generado es isomorfo a

$$H_0 \oplus H_1 \oplus \cdots \oplus H_m$$

donde H_0 es abeliano libre de rango finito, y los $H_i, i = 1, 2, \cdots, m$ son grupos cíclicos de orden un primo.

El rango de H_0 y el orden de los grupos cíclicos H_i están univocamente determinados.

15.- Un **commutador** de un grupo G es un elemento de la forma $ghg^{-1}h^{-1}$ con $g, h \in G$.

El **subgrupo commutador** de G es el subgrupo K formado por todos los productos finitos de commutadores de G.

El subgrupo commutador K de G es un subgrupo normal, y de hecho, es el menor subgrupo normal de G de modo que G/K es abeliano.

3 Espacios métricos

1.- Un **espacio métrico** es un par (M, d) donde M es un conjunto y $d : M \times M \to \mathbb{R}$ es una función que verifica las siguientes condiciones:

(i) $d(a, b) = 0$ si y sólo si $a = b$

(ii) Desigualdad triángular: $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ para todos $a, b, c \in M$.

2.- Si (M, d) es un espacio métrico, entonces $d(a, b) \geq 0$ para todos $a, b \in M$ y $d(a, b) = d(b, a)$ para todos $a, b \in M$.

Si no hay confusión posible, se dice que M es un espacio métrico.

3.- Ejemplos:

1. Si M es un conjunto cualquiera entonces
$$d(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a = b \\ 1 & \text{si} \quad a \neq b \end{cases}$$
se llama la **métrica discreta** en M

2. En la recta real se tiene la métrica $d(x, y) = |x - y|$ llamada la **métrica (o distancia) euclideana en** $\mathbb{R}$.

3. Más generalmente, la **métrica euclideana** en $\mathbb{R}^n$ está definida por
$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

4. En $\mathbb{R}^n$ se puede definir otras métricas, por ejemplo:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad \text{y} \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

4.- Sean (M, d_M) y (N, d_N) espacios métricos.
Una función $f : M \to N$ es **contínua en** $a \in M$ si y sólo si para todo $\varepsilon_a > 0$ existe $\delta_a > 0$ talque:

$$d_M(a, b) < \delta_a \Longrightarrow d_N(f(a), f(b)) < \varepsilon_a.$$

Se dice que f es **continua** si es continua en todo $a \in M$.

5.- Sea (M, d) un espacio métrico. Si $a \in M$ y $\varepsilon > 0$ es un número positivo se define la **bola abierta de centro** a **y radio** ε como el conjunto

$$B_\varepsilon(a) = \{b \in M \mid d(b, a) < \varepsilon\}.$$

6.- Un subconjunto U de un espacio métrico (M, d) se dice **abierto** si para todo $a \in U$ existe $\varepsilon_a > 0$ talque

$$B_{\varepsilon_a}(a) \subseteq U.$$

7.- Ejemplos:

1. Cualquier intervalo abierto $]a, b[$ en $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto en $(\mathbb{R}, |\ |)$.
2. Los conjuntos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ y $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$ son abiertos en $\mathbb{R}^2$.

8.- Cuando en $\mathbb{R}^n$ no se especifica la métrica, se subentiende que es la euclideana.

9.- Dos métricas d_1, d_2 en un conjunto M se dicen **equivalentes** si definen a los mismos conjuntos abiertos.

Por ejemplos la métrica euclideana y las métricas en el ejemplo 4 definidas en $\mathbb{R}^n$ son todas equivalentes, definen los mismos abiertos.

Teorema 3.1. *Una función $f : M \to N$ entre espacios métricos es continua si y sólo si para todo abierto B en N se tiene que $f^{-1}(B)$ es abierto en M.*

Este teorema muestra que la continuidad es un concepto que tiene que ver con conjuntos abiertos y no con las métricas (si son equivalentes).

4 Espacios topológicos

1.- Un **espacio topológico** es un par $(X, \mathcal{T})$ donde X es un conjunto y $\mathcal{T}$ es una colección de subconjuntos de X que verifican las siguientes propiedades:
(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$; $X \in \mathcal{T}$.
(ii) $A, B \in \mathcal{T} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$.
(iii) $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T} \Longrightarrow \cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

El conjunto $\mathcal{T}$ se llama una **topología** en X. Los elementos de $\mathcal{T}$ (que son subconjuntos de X) se dicen **abiertos** de X en esa topología.

2.- Ejemplos:

1. Si X es un conjunto cualquiera, entonces $\{\emptyset, X\}$ es una topología en X llamada la **topología concreta ó indiscreta** en X.
2. Si X es un conjunto cualquiera, entonces $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de todos los subconjuntos de X es una topología en X, llamada la **topología discreta** en X.
3. Si (M, d) es un espacio métrico, entonces el conjunto de abiertos en esa métrica forman una topología en M llamada la **topología métrica** asociada a dicha métrica. Métricas equivalentes definen la misma topología.
4. La métrica discreta en un conjunto M define a la topología discreta en ese conjunto.
5. **Topología del complemento finito**. Sea X un conjunto cualquiera. Definamos
$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ es finito}\}.$$
6. Si $X = \{a, b\}$ entonces X tiene cuatro posibles topologías, a saber:
$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}, \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$, $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ y $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$.
Las topologías $\mathcal{T}_2$ y $\mathcal{T}_3$ no son metrizables. (Ver definición a seguir).

3.- Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es **metrizable** si existe una métrica en X que define a dicha topología. No todos los espacios topológicos son metrizables.

4.- Dado un subconjunto A de un espacio topológico X, se define el **interior** de A, como el mayor abierto contenido en A. El interior de A se denota por $\overset{\circ}{A}$

Observamos que
$$\begin{aligned} \overset{\circ}{A} &= \cup_{i \in I} U_i \text{ donde } \{U_i \mid i \in I\} \text{ son todos los abiertos contenidos en } A \\ &= \{a \in A \mid \text{ existe un abierto } U \text{ con } a \in U \subseteq A\} \end{aligned}$$

5.- Ejemplo: Consideramos $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclideana. Esta es la topología standar en $\mathbb{R}^n$.

Sea $I^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x_i \leq 1, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{R}^n$.

Entonces: $\overset{\circ}{I^n} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} \mid 0 < x_i < 1, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\}$.

6.- Un subconjunto A de un espacio topológico es abierto si y sólo si $A = \overset{\circ}{A}$.

7.- Se dice que un subconjunto C de un espacio topológico X es **cerrado** si y sólo si su complemento $X \setminus C$ es un abierto.

Teorema 4.1. *(i) $\emptyset, X$ son cerrados.*
(ii) La unión de finitos cerrados es un cerrado.
(iii) Intersección arbitraria de cerrados es un cerrado

8.- Dado un subconjunto Y de un espacio topológico, se define su **clausura** $\overline{Y}$ como el menor cerrado que contiene a Y

Observamos que:

$$\begin{aligned} \overline{Y} &= \cap_{i\in I} C_i \text{ donde } \{C_i \mid i \in I\} \text{ son todos los cerrados que contienen a } Y \\ &= \{x \in X \mid \text{ para todo abierto } U \text{ con } x \in U \text{ se tiene que } U \cap Y \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

9.- Ejemplos: En $\mathbb{R}$ se tiene que

$$\overline{]a,b[} = \overline{[a,b[} = \overline{]a,b]} = \overline{[a,b]} = [a,b].$$

10.- Un subconjunto C de un espacio topológico X es cerrado si y sólo si $C = \overline{C}$.

11.- Los puntos en $Y' = \overline{Y} \setminus Y$ se llaman **puntos límites** de Y.

12.- La **frontera** ó **borde** de un subconjunto Y de un espacio topológico X es el conjunto

$$\partial Y = \overline{Y} \cap \overline{Y^c}$$

donde $Y^c = X \setminus Y$ es el complemento de Y con respecto a X.

13.- Sea X un espacio topológico. Un subconjunto N de X es una **vecindad** de un punto $x \in X$ si existe un abierto U talque $x \in U \subseteq N$.

Es decir, N es una vecindad de x si y sólo si $x \in \overset{\circ}{N}$.

14.- Una **base de topología** para un conjunto X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X que verifican la propiedad:

Si $x \in A \cap B$ para $A, B \in \mathcal{B}$, existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C \subset A \cap B$.

15.- Si $\mathcal{B}$ es base de topología entonces

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{\cup_{i\in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{B} \text{ para todo } i \in I, I \text{ conjunto de índices }\}$$

es una topología en X. Es la **topología generada por** $\mathcal{B}$.

16.- El conjunto de bolas abiertas de un espacio métrico M

$$\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(a) | a \in M, \ \ \varepsilon > 0\}$$

son una base para la topología métrica asociada.

5 Funciones continuas

1.- Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos.

Decimos que f el **continua** si

para todo abierto V de Y se tiene que $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

2.- Ejemplos:

1. La identidad $I_X : X \to X$ y las funciones constantes $X \to Y$ son funciones continuas.
2. Si X tiene la topología discreta, entonces toda función $f : X \to Y$ es continua.
3. Si Y tiene la topología concreta, entonces toda función $f : X \to Y$ es continua.

4. Sea $\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$ el espacio topológico dado por $\mathbb{R}$ con la topología

   $\mathcal{U} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, x[\mid x \in \mathbb{R}\}$. (verifique que esta es una topología en $\mathbb{R}$)

   La función $f : \mathbb{R}_{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{U}}$ dada por $f(x) = x^2$ no es continua, pues $]-\infty, y^2[$ es abierto, pero $f^{-1}(]-\infty, y^2[) =]-y, y[$ que no es abierto en la topología $\mathcal{U}$.

   La función $Id : \mathbb{R}_{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}$, $Id(x) = x$ no es continua.

   La función $Id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{U}}$, $Id(x) = x$ es continua.

Teorema 5.1. *Una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos X, Y es continua si y sólo si para cada cerrado C en Y se tiene que $f^{-1}(C)$ es cerrado en X.*

3.- Una función $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos X, Y es **abierta** si lleva abiertos de X en abiertos de Y.

Una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos X, Y es **cerrada** si lleva cerrados de X en cerrados de Y.

4.- Una función abierta no necesariamente es continua. Por ejemplo, sea $X = \{a, b\}$ con la topología discreta.

Entonces $f : \mathbb{R} \to X$ dada por $f(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad x \geq 0 \\ b & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ es abierta, pero no es continua pues $f^{-1}(\{a\})$ no es abierto en $\mathbb{R}$.

Esta misma función es un ejemplo de una función cerrada que no es continua.

Teorema 5.2. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas entre espacios topológicos. Entonces, la compuesta $g \circ f : X \to Z$ es continua.*

5.- Sean X, Y dos espacios topológicos.

Decimos que X e Y son espacios **homeomorfos** si existen $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ continuas tales que $gf = I_X$ y $fg = I_Y$. Es decir, una función es inversa de la otra. Las funciones f y g son **homeomorfismos**. Escribimos $X \cong Y$.

6.- Un homeomorfismo establece una correspondencia bi-unívoca entre puntos y entre abiertos.

7.- Ejemplos:

1. La identidad $Id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ es continua, biyectiva, pero no es un homeomorfismo.

2. Sean d_1, d_2 dos métricas en un conjunto M.

   Entonces $Id : (M, d_1) \to (M, d_2)$ es un homeomorfismo si y sólo si d_1 y d_2 son métricas equivalentes.

8.- Homeomorfismo es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los espacios topológicos.

La topología es el estudio de estas clases de equivalencia.

9.- Una **incrustación** es una función inyectiva $f : X \to Y$ de modo que $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo. En $f(X)$ se considera la topología del subespacio.

Esto significa que dentro de Y 'vive' una copia de X.

Por ejemplo, $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $i(x) = (x, 0)$ es una incrustación.

También lo es $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $j(x) = (x, x^2)$.

La función $k(t) = (\cos t, \sin t, t)$ es una incrustación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$.

6 Subespacios

1.- Sea X un espacio topológico, y sea S un subconjunto de X. Entonces, la topología de X induce naturalmente una topología en S.

La **topología inducida por X en S** es la familia de subconjuntos de S de la forma $U \cap S$, donde U es un abierto de X.

En otras palabras, si $\mathcal{U}$ es la topología de X, entonces $\mathcal{U}_S = \{U \cap S \mid U \in \mathcal{U}\}$ es la topología inducida en S.

A la topología inducida a veces se la llama la **topología relativa** de X en S.

Cuando un subconjunto S de X tiene la topología inducida, se dice que S es un **subespacio de X**.

2.- Ejemplos

1. Si al subconjunto $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ le damos la topología inducida de $\mathbb{R}$ (con la topología usual), entonces si $a \leq c < d \leq b$ los conjuntos $[a, d[;]c, b];]c, d[$ son abiertos del subespacio $[a, b]$.

2. Si al subconjunto S^1 de $\mathbb{R}^2$ le damos la topología inducida, entonces los abiertos de S^1 son uniones de 'arcos abiertos' (arcos sin los puntos extremos incluidos).

3. Al subconjunto S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$ le damos la topología inducida.

4. En $\mathbb{R}^{n+1}$ consideramos el subconjunto S definido por $x_{n+1} = 0$. Con la topología inducida este subespacio es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

5. Los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ son homeomorfos. Un homeomorfismo es
$$f(x) = c + (d - c)\frac{x - a}{b - a}.$$
Es fácil encontrar la inversa f^{-1}.

6. Si en $\mathbb{R}^2$ consideramos el cuadrado C de vértices $(1, 1); (-1, 1); (-1, -1); (1, -1)$ con la topología inducida por $\mathbb{R}^2$, entonces C es homeomorfo a S^1. Un homeomorfismo $f : C \to S^1$, con su inversa $f^{-1} : S^1 \to C$ son
$$f((x, y)) = \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|}; \qquad f^{-1}((x, y)) = \frac{(x, y)}{\max\ (|x|, |y|)}.$$
Cualquier otro cuadrado (ó rectágulo) es naturalmente homeomorfo a C. Por lo tanto, todo rectángulo es homeomorfo a S^1.

3.- Intuitivamente, dos subespacios de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$ (de $\mathbb{R}^n$) son homeomorfos, si podemos girar, doblar, estirar, encojer, deformar, uno en el otro, sin cortar ni pegar puntos.

Así por ejemplo, una pelota de futbol y una de rugbi son homeomorfas.

Una camara de neumático es homeomorfa a un tazón con una asa.

Lema 6.1. *Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, y $x \in X$ un punto cualquiera, entonces la restricción $f : X \setminus \{x\} \to Y \setminus \{f(x)\}$ es también un homeomorfismo.*

4.- Esto sirve para probar que algunos espacios no son homeomorfos. Por ejemplo, un intervalo $[a, b]$ no es homeomorfo al intervalo $]a, b[$. Y $]a, b[$ no es homeomorfo a S^1.

Aquí, aceptamos intuitivamente que un espacio con 'dos pedazos' no puede ser homeomorfo a un espacio con 'un sólo pedazo'.

Lema 6.2. *1. Si S es abierto en X, entonces los abiertos de S (en la topología inducida) son abiertos de X.*

2. Si C es cerrado en X, entonces los cerrados de C (en la topología inducida) son cerrados de X.

5.- Sea S un subespacio de un espacio X. Entonces, la inclusión $i : S \hookrightarrow X$ es continua. Más aún, es una incrustación.

La topología relativa en S es la topología más débil (menor cantidad de abiertos) de modo que la inclusión es continua.

Esta es otra forma de definir la topología relativa en S: la topología más débil de modo que la inclusión sea continua.

Lema 6.3. *Sea $f : X \to Y$ función continua. Sea $S \subseteq X$ un subespacio. Sea $f(X)$ la imagen de X por f. Entonces.*

(i) La restricción de f a S, $f|_S : S \to Y$, $f|_S(s) = f(s)$ es continua.

(ii) $f : X \to f(X)$, $x \mapsto f(x)$ es continua.

7 Topología cociente.

7.1 Definición

1.- Sea X un espacio topológico, y sea Y un conjunto. Sea $f : X \to Y$ una función epiyectiva.

Queremos poner una topología en Y de modo que f sea continua. Si ponemos en Y una topología con pocos abiertos, habrá muchas chances de que f sea continua.

La **topología cociente** en Y es el conjunto

$$\mathcal{U}_f = \{V \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \text{ es abierto en } X\}.$$

Es fácil probar que $\mathcal{U}_f$ es una topología en Y, y que con esta topología la función f es continua.

El conjunto Y con la topología cociente se llama **espacio cociente**.

2.- La topología cociente es la topología más fuerte (con mayor número de abiertos) que hace de f una función continua.

Esta es otra forma posible de definir la topología cociente: la topología más fuerte que hace de f una función continua.

3.- Si $f : X \to Y$ es epiyectiva e Y tiene la topología cociente, decimos que f es una **función cociente.**

Observamos que $f : X \to Y$ es función cociente si y sólo si f es epiyectiva y $V \subseteq Y$ es abierto en Y si y sólo si $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

4.- Una forma simple, y que usaremos extensivamente, de obtener funciones epiyectivas, es la proyección canónica de una relación de equivalencia en un conjunto.

Más precisamente, sea X un conjunto, y sea $\sim$ una relación de equivalencia en X. Entonces, naturalmente se tiene la proyección canónica $p : X \to X/_\sim$, $p(x) = [x]$.

5.- Si X es un espacio topológico, la topología cociente en $X/_\sim$, genera un nuevo espacio topológico, el espacio cociente asociado, y hace de la proyección canónica una función continua.

6.- Ejemplos

1. Consideramos S^n con la topología inducida por $\mathbb{R}^{n+1}$. En S^n definimos la relación de equivalencia $\mathrm{x} \sim \mathrm{x}' \iff \mathrm{x} = \pm\mathrm{x}'$. Entonces, $[\mathrm{x}] = \{\mathrm{x}, -\mathrm{x}\}$, y obtenemos el **n-espacio proyectivo real** que es el conjunto
$$\mathbb{RP}^n = S^n/_\sim = \{[\mathrm{x}] \mid \mathrm{x} \in S^n\}$$
con la topología cociente.

2. Sea $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$ con la topología relativa de $\mathbb{R}^3$. Geométricamente, C es un cilíndro.

   En C definimos la relación de equivalencia $\mathrm{p} \sim \mathrm{p}' \iff \mathrm{p} = \pm\mathrm{p}'$, donde $\mathrm{p} = (x, y, z)$ y $\mathrm{p}' = (x', y', z')$. Entonces, $[\mathrm{p}] = \{\mathrm{p}, -\mathrm{p}\}$, y obtenemos la **Banda de Möbius** que es el conjunto
$$\mathcal{M} = C/_\sim = \{[\mathrm{p}] \mid \mathrm{p} \in C\}$$
con la topología cociente definida por la proyección canónica $p : C \to C/_\sim$..

3. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$ subespacio de $\mathbb{R}^2$. En X definimos la relación de equivalencia
$$(0, y) \sim (1, y); (x, 0) \sim (x, 1)$$
Entonces, $X/_\sim$ con la topología cociente se denomina el **2-toro** (neumático).

   Más adelante redefiniremos el 2-toro y lo generalizaremos para definir los n-toros.

4. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$ subespacio de $\mathbb{R}^2$. En X definimos la relación de equivalencia
$$(0, y) \sim (1, y); (x, 0) \sim (1 - x, 1)$$
Entonces, $X/_\sim$ con la topología cociente se denomina la **Botella de Klein.**

Teorema 7.1. (Teorema de la propiedad universal de cocientes)

Sea $p : X \to Y$ y suponga que Y tiene la topología cociente (en particular p es epiyectiva).

Entonces, una función $\varphi : Y \to Z$ es continua si y sólo si φp es continua.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\varphi p"'] & Y \arrow[d, "\varphi"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

7.- Ejemplos:

1. Continuando con el ejemplo en 6.- de la Sección 1. Teniamos:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{R}/_{\sim} \arrow[d, "\varphi"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

   con φ biyectiva.

   Puesto que f es continua, con el teorema 7.1 ahora sabemos que φ es continua.

2. Sea $\mathcal{M}$ la Banda de Möbius definida más arriba. Sea $f : C \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(\mathrm{p}) = ((x^2 - y^2)(2 + xz), 2xy(2 + xz), yz)$ donde $\mathrm{p} = (x, y, z) \in C$.

   Puesto que $\mathrm{p} \sim \mathrm{p}' \Longrightarrow f(\mathrm{p}) = f(\mathrm{p}')$ se tiene que la función $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\varphi([\mathrm{p}]) = f(\mathrm{p})$ está bien definida.

   Tenemos

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

   Puesto que $\mathrm{p} \sim \mathrm{p}' \Longleftrightarrow f(\mathrm{p}) = f(\mathrm{p}')$ se tiene que φ es inyectiva.

   Como f es continua, por el teorema 7.1 sabemos que φ es continua.

Teorema 7.2. *Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Sean $\sim_X, \sim_Y$ relaciones de equivalencia en X e Y respectivamente. Suponga que $x \sim_X x'$ si y sólo si $f(x) \sim_Y f(x')$.*

Pruebe que $X/_{\sim_X}$ e $Y/_{\sim_Y}$ son homeomorfos.

8.- Más ejemplos.

1. Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$ y sea

   $(x, y) \sim_X (x', y') \Longleftrightarrow \{x, x'\} = \{0, 1\}$ e $y' = 1 - y$.

   Sea $Y = [-1, 1] \times [-1, 1]$ y sea

   $(x, y) \sim_Y (x', y') \Longleftrightarrow \{x, x'\} = \{-1, 1\}$ e $y' = -y$.

Sea $f : X \to Y$, $f(x,y) = (2x-1, 2y-1)$.

Entonces f es un homeomorfismo con inversa

$g : Y \to X$, $g(x,y) = ((x+1)/2, (y+1)/2)$.

Por el teorema 7.2 $X/_{\sim_X}$ e $Y/_{\sim_Y}$ son homeomorfos mediante el homeomorfismo $\bar{f} : X/_{\sim_X} \to Y/_{\sim_Y}$, $\bar{f}([\mathrm{x}]) = [f(\mathrm{x})]$.

Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ X/_{\sim_X} \arrow[r, "\bar{f}"] & Y/_{\sim_Y} \end{tikzcd}$$

7.2 Colapsando un subconjunto a un punto

1.- Sea X un espacio topológico y sea $A \subset X$ un subconjunto de X.
Definimos el espacio X/A como el espacio X cocientado por $x \sim y \Leftrightarrow x, y \in A$.
Es decir, en el cociente todo el conjunto A se reduce a un punto.

2.- Ejemplos:

1. Sea $I = [0,1]$ el intervalo unitario. Sea $A = \{0,1\} = \partial I$.

   Intuitivamente $I/A \cong S^1$. Veamos como probar esto.

   Sea $f : I \to S^1$, $f(t) = (\cos(2\pi t), \mathrm{sen}(2\pi t))$.

   Entonces, f es continua, epiyectiva y $t, s \in A \Leftrightarrow f(t) = f(s)$.

   Esto prueba que $\varphi : I/A \to S^1$, $\varphi([t]) = f(t)$ está bien definida, es biyectiva y es continua.

   Además, se puede probar fácilmente que φ es abierta.

   Luego, $\varphi : I/A \to S^1$ es un homeomorfismo.

   Puesto que $I \cong D^1 = [-1,1]$, usando el teorema 7.2 se puede probar que $I/\partial I \cong D^1/\partial D^1$.

   Así, $D^1/\partial D^1 \cong S^1$.

2. Generalizando el ejercicio anterior, sea $D^n = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathrm{x}\| \leq 1\}$ el disco unitario.

   Sea $S^{n-1} = \partial D^n = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathrm{x}\| = 1\}$ el borde del disco unitario.

   Entonces, $D^n/S^{n-1} \cong S^n$.

3. Denotamos $I = [0,1]$.

   Dado un espacio topológico X se define el **cono de** X, que denotamos por CX, como el espacio cociente $X \times I/_\sim$ donde $(x,1) \sim (y,1)\ \forall x, y \in X$.

   Observamos que $CX = (X \times I)/(X \times \{1\})$.

   Es decir, el borde $X \times \{1\}$ colapsa a un punto.

4. $J = [-1, 1]$. Se define la **suspensión de** X, que denotamos por ΣX, como el espacio cociente $X \times J / \sim$

   donde $(x, -1) \sim (y, -1)\ \forall x, y \in X$ y $(x, 1) \sim (y, 1)\ \forall x, y \in X$.

   Es decir, el borde $X \times \{-1\}$ colapsa a un punto, y el borde $X \times \{1\}$ colapsa a otro punto.

7.3 Suma topológica. Pegando un espacio a otro

1.- Sean X, Y dos espacios topológicos. La union disjuntas de ellos dos es un nuevo espacio topológico llamado la **suma topológica** de X e Y, que se anota por $X \sqcup Y$.

Por ejemplo $S^1 \sqcup S^1$ es un espacio topológico formado por dos círculos disjuntos.

2.- Sean X e Y dos espacios topológicos disjuntos. Sea $A \subset X$ y sea $f : A \to Y$ una función continua. Definimos el espacio topológico $X \sqcup_f Y$, llamado el **pegado del espacio** X **a** Y **mediante la función** f por:

$$X \sqcup_f Y = X \sqcup Y \ / \ x \sim f(x).$$

3.- Ejemplos:

1. Sean X, Y dos espacios topológicos. Sea $x_0 \in X$ y sea $y_0 \in Y$. Consideramos $A = \{x_0\}$ subconjunto de X y definimos $f : A \to Y$ por $f(x_0) = y_0$.

   Entonces, el espacio $X \sqcup_f Y$ se llama el **espacio cuña** entre X e Y.

   Consiste en pegar un punto de X con un punto de Y. Se anota $X \vee Y$.

   Tengase presente que $X \vee Y$ puede depender de los puntos x_0, y_0 elegidos.

   Observese que:

$$X \vee Y = X \sqcup Y /_{x_0 \sim y_0} = X \sqcup Y / \{x_0, y_0\}.$$

7.4 Acciones de grupos

1.- Sea X un conjunto y sea G un grupo. Decimos que G **actúa en** X, y que X es un **G-conjunto**, si existe una función $G \times X \to X$, denotada por $(g, x) \mapsto g \cdot x$, tal que:

(i) $1 \cdot x = x$ para todo $x \in X$, donde 1 es la identidad en G,
(ii) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ para todo $x \in X$ y todos $g, h \in G$.

2.- Ejemplos:

1. Si G es el grupo de homeomorfismos de un espacio topológico X, entonces G actúa en X en la forma $g \cdot x = g(x)$.

2. Sea $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ y sea $X = S^n$ la n-esfera.

   Entonces $\mathbb{Z}_2$ actúa en S^n en la forma $\pm 1 \cdot x = \pm x$.

3. $\mathbb{Z}$ actúa en $\mathbb{R}$ en la forma $n \cdot x = n + x$.

4. De la misma forma $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ actúa en $\mathbb{R}^2$ en la forma $(n, m) \cdot (x, y) = (n + x, m + y)$.

5. Los ejemplos anteriores se generalizan naturalmente a una acción de $\mathbb{Z}^k$ en $\mathbb{R}^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

6. Consideremos $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 \leq y \leq 1/2\}$, y definamos una acción de $\mathbb{Z}$ en X por:
$$m \cdot (x,y) = (m+x, (-1)^m y).$$

3.- Propiamente, lo que hemos definido es **acción por la izquierda de** G **en** X. También se puede definir **acción por la derecha** $X \times G \to X, \quad (x,g) \mapsto x \cdot g$ con las propiedades análogas (i), (ii).

Siempre nos referiremos a acciones por la izquierda, mientras no se explicite lo contrario.

Teorema 7.3. *Sea X un G-conjunto.*
Para cada $g \in G$ la función $\theta_g : X \to X, \theta_g(x) = g \cdot x$, es biyectiva.

4.- Si G actúa en X podemos definir una relación de equivalencia en X por
$$x \sim y \iff \text{existe } g \in G \text{ tal que } g \cdot x = y.$$
Equivalentemente,
$$x \sim y \iff y \in G \cdot x.$$

5.- Denotemos al conjunto de clases de equivalencia por X/G. Este es el conjunto cociente, con la proyección canónica $p : X \to X/G$ (epiyectiva).

6.- Si X es un espacio topológico ponemos en X/G la topología cociente, y con esta topología X/G se llama el **espacio cociente** de X por la acción de G.

7.- Ejemplos:
El grupo $\mathbb{Z}^2$ actúa en S^n por $\pm 1 \cdot x = \pm x$.
Se tiene que $S^n/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{RP}^2$.
El grupo $\mathbb{Z}$ actúa en $\mathbb{R}$ en la forma $n \cdot x = n + x$. Esta acción define la relación de equivalencia $t \sim s \iff t - s \in Z$.
Luego $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{R}/_\sim$, donde $\mathbb{R}/_\sim$ es el espacio del ejemplo en 8.- de la Sección 7.

8.- Si X es un espacio topológico y G es un grupo, decimos que X **es un** G**-espacio** si G actúa en X, y para cada $g \in G$ la función $\theta_g : X \to X, \theta_g(x) = g \cdot x$ es continua.

Teorema 7.4. *Suponga que X es un G-espacio. Entonces, la proyección canónica $\pi : X \to X/G$ es una función abierta.*

Demostración:
Sea U un abierto en X. Entonces,
$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(\pi(U)) &= \{x \in X \mid \pi(x) \in \pi(U)\} \\
&= \{x \in X \mid G \cdot x = G \cdot y \text{ para algún } y \in U\} \\
&= \{x \in X \mid x = g \cdot y \text{ para algún } y \in U, \text{ algún } g \in G\} \\
&= \{x \in X \mid x = g \cdot U, \text{ algún } g \in G\} \\
&= \cup_{g \in G} g \cdot U.
\end{aligned}$$
Como la acción de cada $g \in G$ es por homeomorfismos, se tiene que $\cup_{g \in G} g \cdot U$ es un abierto en X para U abierto.

Esto prueba que $\pi^{-1}(\pi(U))$ es abierto, y por tanto $\pi(U)$ es abierto en X/G. $\square$

8 Espacios producto

1.- Dados dos espacios topológicos X e Y, la topología producto en $X \times Y$ es aquella con base dada por los productos de abiertos.

Es decir, los abiertos del **espacio producto** son uniones de producto de abiertos. Un abierto típico de $X \times Y$ es de la forma: $\cup_{j \in J} U_j \times V_j$ donde J es un conjunto de índices, los U_j son abiertos en X, y los V_j son abiertos en Y.

2.- De la misma forma se define el **espacio producto** de un número finito de espacios topológicos.

3.- Ejemplos:

1. $T^2 = S^1 \times S^1$ es llamado el **2-toro**. Este espacio coincide (homeomorfo) al 2-toro definido anteriormente en la Sección 7.
2. En general $T^n = S^1 \times S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$, $n-$veces se llama el **n-toro**.
3. $S^1 \times R$ el **cilíndro abierto.**

4.- Sean X, Y espacios metrizables con métricas d_X y d_Y respectivamente. Pruebe que

$$d(x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max \{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

es una métrica en $X \times Y$ cuya topología asociada coincide con la topología producto en $X \times Y$.

Deduzca que la topología producto en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ($\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ con la topología usual) es la misma que la topología usual en $\mathbb{R}^{n+m}$.

Teorema 8.1. *Sean $X \times Y$ un espacio producto. Sea $W \subset X \times Y$ un subconjunto. Entonces:*

W es abierto en $X \times Y$ si y sólo si para cada $w \in W$ existen abiertos U_w, V_w de X e Y respectivamente tales que $w \in U_w \times V_w \subset W$.

5.- Dado un espacio producto $X \times Y$ se pueden definir las proyecciones canónicas

$$\pi_X : X \times Y \to X, \quad (x, y) \mapsto x$$
$$\pi_Y : X \times Y \to Y, \quad (x, y) \mapsto y.$$

Puesto que $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$ y $\pi_Y^{-1}(V) = X \times V$ queda claro que estas funciones son continuas.

Teorema 8.2. *Para cada $y \in Y$ el subespacio $X \times \{y\}$ es homeomorfo a X.*

6.- Sean $f : A \to X$ y $g : A \to Y$ función entre espacios topológicos.

Definamos $h : A \to X \times Y$ por $h(a) = (f(a), g(a))$.

Esta es la única función tal que $\pi_X h = f$ y $\pi_Y h = g$.

Teorema 8.3. *En la situación anterior, h es continua si y sólo si f y g son continuas.*

9 Espacios compactos

1.- La compacidad es una propiedad que un espacio topológico, o un subespacio, puede tener o no tener. Esta propiedad es preservada por homeomorfismos.

2.- Un **cubrimiento** de un subconjunto $S \subset X$ es una colección de subconjuntos $\{U_j\}_{j\in J}$ de X tales que $S \subseteq \cup_{j\in J} U_j$.

Si J es finito, hablamos de **cubrimiento finito**.

Por ejemplo, $\{]n, n+3[\ |n \in \mathbb{Z}\}$ es un cubrimiento de $\mathbb{R}$.

Y obviamente $\{\{x\} \ |x \in S\}$ es un cubrimiento de S.

3.- Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento de S. Si existe $J \subset I$ tal que $\{U_j\}_{j\in J}$ es también un cubrimiento de S decimos que $\{U_j\}_{j\in J}$ es un **subcubrimiento** del cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de S.

Por ejemplo: $\{]n, n+3[| \ n \in 2\mathbb{Z}\}$ es un subcubrimiento del cubrimiento $\{]n, n+3[| \ n \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathbb{R}$.

4.- Si X es un espacio topológico y S es un subconjunto de X. Decimos que un cubrimiento $\{U_j\}_{j\in J}$ de S es un **cubrimiento abierto** de S si cada U_j es un abierto de X.

5.- Un subconjunto S de un espacio topológico X es un **compacto** si todo cubrimiento abierto de S tiene un subcubrimiento finito.

En particular un espacio topológico X es compacto si todo cubrimiento abierto de X tiene subcubrimiento finito.

Teorema 9.1. *Un subconjunto S de X es compacto si y sólo si S es compacto como subespacio de X.*

6.- Ejemplos:

1. La recta real $\mathbb{R}$ no es compacta pues $\{]n, n+2[| \ n \in \mathbb{Z}\}$ es un cubrimiento abierto de $\mathbb{R}$ que no tiene subcubrimiento finito.
2. Un espacio topológico discreto es compacto si y sólo si es finito.
3. Todo espacio topológico finito (cualquier topología) es compacto.

Teorema 9.2. *El intervalo unitario $[0, 1]$ es compacto en $\mathbb{R}$.*

Demostración:

Sea $\{U_j\}_{j\in J}$ un cubrimiento abierto de $[0, 1]$ y suponga que no tiene cubrimiento finito.

Esto significa que unos de los intervalos $[0, 1/2]$ ó $[1/2, 1]$ no es cubierto por finitos de los $\{U_j\}_{j\in J}$.

Denotemos por $[a_1, b_1]$ a este intervalo que no es cubierto por finitos de los $\{U_j\}_{j\in J}$.

De nuevo, uno de los intervalos $[a_1, (a_1 + b_1)/2]$ ó $[(a_1 + b_1)/2, b_1]$ no es cubierto por finitos de los $\{U_j\}_{j\in J}$.

Denotemos por $[a_2, b_2]$ a este intervalo que no es cubierto por finitos de los $\{U_j\}_{j\in J}$.

Y así seguimos recursivamente obteniendo intervalos

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$$

tales que ninguno de ellos es cubierto por finitos de los $\{U_j\}_{j\in J}$.

Además, $b_n - a_n = 2^{-n}$.

Se tiene que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada. Por lo tanto existe $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Por otra parte $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada.

Por lo tanto existe $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Y puesto que $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$ necesariamente $a = b$.

Como $\{U_j\}_{j\in J}$ es un cubrimiento de $[0,1]$ y $a = b \in [0,1]$ existe $j_0 \in J$ tal que $a \in U_{j_0}$.

Como U_{j_0} es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subseteq U_{j_0}$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ talque $2^{-N} < \varepsilon$. Por lo tanto, $b_N - a_N < \varepsilon$.

Pero, $a \in [a_N, b_N]$ y $a - a_N < 2^{-N} < \varepsilon$ y $b - b_N < 2^{-N} < \varepsilon$.

Esto prueba que $[a_N, b_N] \subseteq]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subseteq U_{j_0}$ lo que contradice que $[a_N, b_N]$ no es cubierto por finitos de los $\{U_j\}_{j\in J}$.

□

7.- Este argumento se puede extender para probar que $I^n = I \times I \times \cdots \times I \subset \mathbb{R}^n$ es compacto. Aquí $I = [0,1]$.

Teorema 9.3. *Sea $f : X \to Y$ continua. Si $S \subseteq X$ es compacto, entonces $f(S) \subseteq Y$ también es compacto.*

Corolario 9.4.

1. *Todo intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ es compacto.*
2. *si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces X es compacto si y sólo si Y es compacto.*
3. *Si X es compacto y $p : X \to Y$ es función cociente, entonces Y es compacto.*
4. *S^1 es compacto.*

Teorema 9.5. *Un subconjunto cerrado de un compacto es compacto*

Teorema 9.6. *Sean X e Y espacios topológicos. Entonces, X e Y son compactos si y sólo si $X \times Y$ es compacto. Más generalmente, si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son compactos entonces $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ es compacto.*

Ejemplo: El cubo $I^n \subset \mathbb{R}^n$ es compacto.

Un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ es **acotado** si existe $K > 0$ tal que para cada $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in S$ se tiene que $|x_i| < K$ para todo $i = 1, 2, cdots, n$.

Teorema 9.7. (Heine-Borel)
Un subconjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$ es compacto. El recíproco también es verdadero.

8.- Con lo que hemos probado hasta ahora, los siguientes espacios son compactos:
S^n; $S^n \times S^n \times \cdots \times S^n$; $\mathbb{RP}^n$; la Banda de Möbius (cerrado acotado de $\mathbb{R}^3$)

9.- Sea X un espacio topológico con topología $\mathcal{U}$.
Definamos el conjunto $X^\infty = X \cup \{\infty\}$ donde $\infty \notin X$.
Definamos $\mathcal{U}^\infty = \mathcal{U} \cup \{V \cup \{\infty\} \mid V \subset X, X \setminus V$ es compacto y cerrado en $X\}$.
Entonces, $\mathcal{U}^\infty$ es una topología en X^∞.
Se tiene que X es un abierto de X y por tanto un subespacio.
Se tiene que X^∞ es compacto.
El espacio X^∞ se llama la **compactificación por un punto de** X.

10 Espacios Hausdorff

1.- Un espacio topológico X es **Hausdorff** si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos U_x, U_y tales que $x \in U_x, y \in U_y$ y $U_x \cap U_y = \emptyset$.

2,. Ejemplo: Todo espacio metrizable es Hausdorff. De hecho, dados dos puntos distintos x, y entonces $d(x, y) = \varepsilon > 0$ y por tanto $B_{\varepsilon/2}(x) \cap B_{\varepsilon/2}(y) = \emptyset$.
En particular $\mathbb{R}^n$ con la topología usual es Hausdorff.
Todo espacio discreto es Hausdorff.

3.- La condición Hausdorff es un ejemplo de **condición de separación**. Hay otras condiciones de separación. Aquí veremos una más.

Un espacio topológico X es un **espacio** T_1 si para cada par de puntos distintos existen dos abiertos U_x, U_y tales que $x \in U_x \cap U_y^c$ e $y \in U_y \cap U_x^c$.

Un espacio topológico X es un **espacio** T_2 si es Hausdorff.

Es claro que todo espacio Hausdorff es T_1.

Un espacio toplógico es **normal** si es T_1 y T_4 : dados dos cerrados disjuntos A, B existen abiertos disjuntos U_A, U_B tales que $A \subset U_A$ y $B \subset U_B$.

Teorema 10.1. *Un espacio X es T_1 si y sólo si cada punto es un cerrado de X.*

Corolario 10.2. *En un Hausdorff todo punto es un cerrado*

Teorema 10.3. *Un subconjunto compacto de un espacio Hausdorff es cerrado*

Teorema 10.4. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, con X compacto e Y Hausdorff. Entonces,*

f es un homeomorfismo si y sólo si f es biyectiva

4.- Este teorema tiene importantes consecuencias.
Ejemplos

1. En los ejemplos en 8.- de la Sección 7 teniamos:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{R}/_\sim \arrow[d, "\varphi"] \\
& S^1
\end{tikzcd}
$$

con φ biyectiva y continua.

Puesto que $\mathbb{R}/_\sim$ es compacto y S^1 es Hausdorff, por teorema 10.4 ahora sabemos que φ es un homeomorfismo. Es decir, el espacio cociente $\mathbb{R}/_\sim$ es homeomorfo a S^1.

2. En los mismos ejemplos en 8.- de la Sección 7 teniamos:

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "\varphi"] \\
& \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}
$$

con φ es inyectiva y continua.

Si ahora consideramos $f : C \to f(C)$ tendremos el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "\varphi"] \\
& f(C)
\end{tikzcd}
$$

con φ es biyectiva y continua.

Puesto que $\mathcal{M}$ es compacto y $f(C)$ es Hausdorff, por teorema 10.4 ahora sabemos que $\varphi : \mathcal{M} \to f(C)$ es un homeomorfismo.

Concluimos de aquí, que $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^3$ es una incrustación. La Banda de Möbius se realiza como un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Teorema 10.5. *Un subespacio S de un espacio Hausdorff es Hausdorff*

Teorema 10.6. *Sean X, Y espacios topológicos. Entonces:*
X e Y son Hausdorff si y sólo si $X \times Y$ es Hausdorff

Teorema 10.7. *Sea Y el espacio cociente del espacio X obtenido por la función epiyectiva $f : X \to Y$.*

Si X es Hausdorff y f es cerrada entonces Y es (compacta) Hausdorff
compacta

Corolario 10.8. *Si X es un G-espacio Hausdorff y compacto, entonces X/G es compacto y Hausdorff*

Demostración Basta probar que la proyección canónica $\pi : X \to X/G$ es cerrada.

Sea C un cerrado en X. Queremos probar que $\pi(C)$ es cerrado en X/G. Pero, $\pi(C)$ es cerrado en X/G si y sólo si $\pi^{-1}(\pi(C))$ es cerrado en X.

Como $\pi^{-1}(\pi(C)) = \cup_{g\in G} g \cdot C$ y como la acción de cada g en X es un homeomorfismo se tiene que $g \cdot C$ es un cerrado en X.

Luego, $\pi^{-1}(\pi(C))$ es cerrado, y por tanto $\pi(C)$ es cerrado, y π es cerrada. $\square$

5.- Por este Corolario $\mathbb{RP}^n$ es compacto Hausdorff.

Corolario 10.9. *Si X es compacto Hausdorff y A es subconjunto cerrado de X entonces X/A es compacto Hausdorff*

11 Espacios conexos

1.- Un espacio topológico X es **conexo** si los únicos subconjuntos que son abiertos y cerrados a la vez son X y $\emptyset$.

Teorema 11.1. *Un espacio topológico X es conexo si y sólo si X no es la union de dos abiertos disjuntos.*

2.- Ejemplos:

1. El subespacio $S^0 = \{-1, +1\}$ de $\mathbb{R}$ no es conexo pues $\{+1\}$ es abierto y cerrado en S^0.

2. Consideremos a los reales $\mathbb{R}$ con la topología
$$\mathcal{U} = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, x[\mid x \in \mathbb{R}\}.$$
Entonces, cualquier subconjunto S de $\mathbb{R}$ es conexo. Para probar esto, sea F subconjunto de S que es abierto y cerrado en S.

   Entonces, $F = U \cap S = C \cap S$ donde U es abierto en $\mathbb{R}$ y C es cerrado en $\mathbb{R}$.

   Necesariamente $U =]-\infty, b[$ para algún $b \in \mathbb{R}$ y $C = [a, \infty[$ para algún $a \in \mathbb{R}$.

   Si $a \geq b$ entonces $U \cap C = \emptyset$ y por tanto $F = \emptyset$.

   Si $a < b$ probemos que $S \subseteq [a, b[$. De hecho,sea $x \in S$.

   Si $x < a$ entonces $x \in U \cap S$ pero $x \notin C \cap S$ lo que no puede ser.

   Si $x \geq b$ entonces $x \notin U \cap S$ pero $x \in C \cap S$ lo que no puede ser.

   Así, $S \subseteq [a, b[$. Por lo tanto $F = U \cap S = C \cap S = S$.

   Esto prueba que $F = \emptyset$ ó $F = S$. Por lo tanto, S es conexo.

3. Consideremos a los reales $\mathbb{R}$ con la topología
$$\mathcal{U} = \{S \subseteq \mathbb{R} \mid s \in S, \text{ existe } t > s \text{ tal que } [s, t[\subset S\}.$$
Entonces, los únicos subespacios no vacíos conexos de $\mathbb{R}$ son los singletons $\{x\}$.

   Para probar esto, sea T un subespacio no vacío conexo de $\mathbb{R}$ y sea $x \in T$.

   El subconjunto $[x, x+\varepsilon[$ es abierto y cerrado en $\mathbb{R}$ para todo $\varepsilon > 0$. (Probar esto).

   Luego, $T \cap [x, x+\varepsilon[$ es abierto y cerrado en T para todo $\varepsilon > 0$.

Como T es conexo y $x \in T \cap [x, x+\varepsilon[\neq \emptyset$, necesariamente $T = T \cap [x, x+\varepsilon[$ para todo $\varepsilon > 0$.

Esto sólo es posible si $T = \{x\}$.

Teorema 11.2. *El intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ (con la topología standar) es conexo.*

Demostración

Supongamos que $[a,b]$ es la unión disjunta de dos abiertos U, V de $[a,b]$.

Notemos que U y V son también cerrados en $[a,b]$, y como $[a,b]$ es cerrado en $\mathbb{R}$, entonces U y V son también cerrados en $\mathbb{R}$.

Supongamos $a \in U$. Sea $h =$ sup $\{u \in U \mid u < v$ para todo $v \in V\}$.

Como U es cerrado, $h \in U$.

Si $h = b$ entonces $V = \emptyset$.

Si $h < b$ entonces $]h-\varepsilon, h+\varepsilon[\cap V \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$ (de lo contrario h no sería una cota superior).

Pero esto indica que $h \in \overline{V}$, y como V es cerrado, entonces $h \in V$.

Esto contradice el hecho que U y V son disjuntos. □

Teorema 11.3. *La imagen de un conexo por una función continua es un conexo.*

Corolario 11.4. *Si X e Y son espacios homeomorfos, entonces X es conexo si y sólo si Y es conexo.*

Teorema 11.5. *Supongamos que $\{S_j \mid j \in J\}$ es una colección de subespacios conexos de un espacio X.*

Si $\cap_{j \in J} S_j \neq \emptyset$, entonces $S = \cup_{j \in J} S_j$ es conexo.

Teorema 11.6. *Sean X, Y espacios topológicos. Entonces,*

X e Y son conexos si y sólo si $X \times Y$ es conexo.

3.- Si X es un espacio topológicos, todo abierto y cerrado minimal (no contiene propiamente a otro abierto y cerrado no trivial) de X se llama **componente conexa** de X.

Para un espacio conexo X la única componente conexa no trivial es el propio X.

4.- Más ejemplos:

1. Los subespacios $[a,b[,]a,b],]a,b[$ son conexos en $\mathbb{R}$.
   De hecho, $[a,b[= \cup_{n \in \mathbb{N}} [a, b-(b-a)/n]$.
2. $\mathbb{R}$ es conexo pues $]a,b[$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$.
3. $\mathbb{R}^n$ es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$.
4. S^1 es conexo pues $S^1 = \alpha(\mathbb{R})$ donde $\alpha : \mathbb{R} \to S^1$, $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

12 Espacios homeomorfos. Invariancia topológica

En esta Sección probaremos que algunos pares de espacios son homeomorfos, y que otros pares no son homeomorfos.

En esta Sección se aplica todos los resultados de las Secciones anteriores.

Esta Sección sirve como repaso de Topología General. Por esto, algunos ejercicios los hemos desarrollado con detalle.

1. Dado $n \in \mathbb{Z}$ y $t \in \mathbb{R}$ definimos una acción de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ por $n \cdot t = n + t$. Con esto, $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{Z}$-espacio.

   Pruebe que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

   Respuesta:

   Esta acción de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ define la relación de equivalencia $t \sim s \Longleftrightarrow t - s \in \mathbb{Z}$.

   Por lo tanto, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{R}/_\sim$.

   En 5.- de la Sección 10 concluimos que $\mathbb{R}/_\sim \cong S^1$.

   Repasemos la demostración. Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/_\sim$ la proyección canónica.

   Consideremos $f : \mathbb{R} \to S^1$ definida por $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

   – Sabemos que f es una función continua.

   – Obervamos que $t \sim s \Longrightarrow f(t) = f(s)$.

   Esto permite bien definir $\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ por $\varphi([t]) = f(t)$.

   Se obtiene el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{R}/_\sim \arrow[d, "\varphi"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

   – Por Teorema 7.1 se tiene que φ es continua.

   – Como $t \sim s \Longleftrightarrow f(t) = f(s)$, entonces φ es inyectiva.

   – Como f es epiyectiva, se tiene que φ es también epiyectiva.

   – Así, φ es continua y biyectiva por Lema 1.1.

   – Puesto que $p([0,1]) = \mathbb{R}/_\sim$ y $[0,1]$ es compacto, se tiene que $\mathbb{R}/_\sim$ es compacto.

   – Como $\mathbb{R}/_\sim$ es compacto y S^1 es Hausdorff, por Teorema 10.4 se tiene que φ es un homeomorfismo.

   – Esto prueba que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{R}/_\sim \cong S^1$.

2. Pruebe que $[0,1]/_{\sim^*}$ es homeomorfo a S^1, donde

$$t \sim^* s \text{ si y sólo si } t = s \text{ ó } 0 \sim^* 1.$$

   Respuesta

Sea $i : [0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}$ la inclusión. En $\mathbb{R}$ consideremos la relación de equivalencia $t \sim s$ si y sólo si $t - s \in \mathbb{Z}$ (ver ejercicio 1).

Probaremos que $[0,1]/_{\sim^*} \cong \mathbb{R}/_{\sim} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y como en el problema 1 ya probamos que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ tendremos que $[0,1]/_{\sim^*} \cong S^1$.

Sean $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/_{\sim}$ y $\pi^* : [0,1] \to [0,1]/_{\sim^*}$ las proyecciones canónicas.

Anotando $I = [0,1]$ consideremos el diagrama a la izquierda:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "\pi i"] & I/_{\sim^*} \\ \mathbb{R} \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{R}/_{\sim} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[dr, "\pi i"'] & I/_{\sim^*} \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R}/_{\sim} \end{tikzcd}$$

La función πi es continua (composición de funciones continuas) y además $t \sim^* s \Longrightarrow \pi i(t) = \pi i(s)$, por lo tanto, existe una función continua $\varphi : I/_{\sim^*} \to \mathbb{R}/_{\sim}$ tal que $\varphi\pi^* = \pi i$ (basta definir $\varphi([t]) = \pi(t)$ y ver que está bien definida).

Pero, además $t \sim^* s \Longleftrightarrow \pi i(t) = \pi i(s)$ por lo tanto φ es inyectiva.

(Lema 1.1).

La función πi es epiyectiva. De hecho, dado $[t] \in \mathbb{R}/_{\sim}$ entonces $[t] = \pi i(t - \lfloor t \rfloor)$ donde $\lfloor t \rfloor$ es la parte entera de t. Así, φ es epiyectiva.

Por lo tanto, φ es continua y beyectiva.

Como $I/_{\sim^*}$ es compacto y $\mathbb{R}/_{\sim}$ es Hausdorff (homeomorfo a S^1) entonces φ es un homeomorfismo (Teorema 10.4).

3. Pruebe que $S^1 \setminus \{z_0\}$ es homeomorfo a $]0,1[$ para cualquier $z_0 \in S^1$.

   Respuesta Por el problema 2 sabemos que existe un homeomorfismo $h : [0,1]/_{0\sim 1} \to S^1$.

   Por construcción el homeomorfismo h es tal que $h([0]) = (1,0)$.

   Luego, por Lema 6.1 se tiene que la restricción
   $$h : [0,1]/_{0\sim 1} \setminus \{[0]\} \to S^1 \setminus \{(1,0)\}$$
   es también un homeomorfismo.

   Pero $i :]0,1[\hookrightarrow [0,1]/_{0\sim 1}$ es una incrustación, luego $[0,1]/_{0\sim 1} \setminus \{[0]\} \cong]0,1[$.

   Además, $S^1 \setminus \{(1,0)\} \cong S^1 \setminus \{z_0\}$ mediante una rotación.

   Esto prueba que $]0,1[\cong S^1 \setminus \{z_0\}$.

4. Pruebe que S^1 y $I = [0,1]$ no son homeomorfos.

   Respuesta Suponga que $h : I \to S^1$ es un homeomorfismo.

   Entonces, la restricción $h : I \setminus \{1/2\} \to S^1 \setminus \{h(1/2)\}$ es también un homeomorfismo. (Lema 6.1).

   Pero esto no es posible pues $I \setminus \{1/2\}$ no es conexo, y $S^1 \setminus \{h(1/2)\}$ es conexo.

5. Pruebe que $D^n/_{S^{n-1}} \cong S^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (Recuerde que $S^{n-1} = \partial D^n$).

Respuesta Probemos primero para $n = 1$.

En este caso, $D^1 = [-1, 1]$ y $S^0 = \{-1, 1\}$.

Por lo tanto, $D^1/S^0 = [-1, 1]/_{-1\sim 1} \cong [0, 1]/_{0\sim 1} \cong S^1$.

Esta demostración utiliza los ejercicios anteriores.

Haremos una nueva demostración para $n = 1$ (siguiendo el mismo procedimiento) que nos servira para generalizar a todo $n \in \mathbb{N}$.

Definamos $f : [-1, 1] \to S^1$ por $f(t) = (\cos(\pi t - \pi/2), \sin(\pi t - \pi/2))$.

Entonces, f es continua, epiyectiva y $t \sim s \iff f(t) = f(s)$.

(Recordamos que $t \sim s \iff t = s$ ó $-1 \sim 1$).

Por lo tanto, como visto en los ejercicios anteriores, la función

$$\varphi : [-1, 1]/_{-1\sim 1} \to S^1, \quad \varphi([t]) = f(t)$$

es continua y biyectiva.

$$\begin{tikzcd}
[-1,1] \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & {[-1,1]/_\sim} \arrow[d, "\varphi"] \\
 & S^1
\end{tikzcd}$$

Y como $[-1, 1]/_{-1\sim 1}$ es compacto y S^1 es Hausdorff, se tiene que φ es un homeomorfismo.

Para generalizar a todo $n \in \mathbb{N}$ lo único que necesitamos generalizar la función $f : D^1 \to S^1$ a una función $f : D^n \to S^n$ que tenga las mismas propiedades.

Los argumentos serán exactamente los mismos a los dados en todos los ejercicios anteriores.

Para definir $f : D^n \to S^n$ anotemos $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$;

$$t = \|\mathbf{t}\| = \sqrt{(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2}$$

y definamos

$$f(\mathbf{t}) = \left(\cos(\pi t - \pi/2)\frac{\mathbf{t}}{t}, \sin(\pi t - \pi/2)\right); \quad f(0) = (0, -1)$$

Observamos que los vectores $(\mathbf{t}/t, 0)$ y $(0, 1)$ son ortonormales en $\mathbb{R}^{n+1}$ por lo tanto las curvas $s \mapsto (\cos(\alpha s + \beta)\mathbf{t}/t, \sin(\alpha s + \beta))$ describen círculos en $\mathbb{R}^{n+1}$ que pasan por $(0, -1)$, $(\mathbf{t}/t, 0)$ y $(0, 1)$.

Ahora sólo debemos verificar lo de siempre:

(a) f está bien definida y es continua.

(b) $\mathbf{t} \sim \mathbf{t}' \iff f(\mathbf{t}) = f(\mathbf{t}')$.

(c) f es epiyectiva.

(d) D^n/S^{n-1} es compacto.

(e) S^n es Hausdorff.

Verificando esto habremos probado que la función $\varphi : D^n/S^{n-1} \to S^n$, $\varphi([\mathbf{t}]) = f(\mathbf{t})$ es un homeomorfismo.

6. Demuestre que $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a $S^n \setminus \{(0,1)\}$.

Respuesta: Consideremos la proyección estereográfica $f : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{(0,1)\}$ dada por

$$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{1 + \|\mathrm{x}\|^2}(2\mathrm{x}, \|\mathrm{x}\|^2 - 1).$$

Por los cursos de cálculo sabemos que la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ definida arriba es continua. Luego, como $f(\mathbb{R}^n) = S^n \setminus \{(0,1)\}$, por Lema 6.3, se tiene que $f : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{(0,1)\}$ es continua.

Por otra parte, la función $g : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,1)\} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

es continua (cursos de cálculo).

Restringiendo el dominio de g se tiene que $g : S^n \setminus \{(0,1)\} \to \mathbb{R}^n$ es también continua. (Lema 6.3).

Se puede comprobar que $fg = \mathrm{Id}_{S^n \setminus \{(0,1)\}}$ y que $gf = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

Esto prueba que f y g son homeomorfismos inversos.

7. Pruebe que $(\mathbb{R}^n)^\infty$ la compactificación por un punto de $\mathbb{R}^n$ (Ver Sección 9) es homeomorfa a S^n.

Respuesta: Para construir un homeomorfismo $f : (\mathbb{R}^n)^\infty \to S^n$ utilizaremos la proyección estereográfica $f : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{(0,1)\}$ dada por

$$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{1 + \|\mathrm{x}\|^2}(2\mathrm{x}, \|\mathrm{x}\|^2 - 1)$$

Para extender esta función a la compactificación $(\mathbb{R}^n)^\infty$ definimos

$$f(\infty) = (0,1)$$

Esta función tiene inversa $g : S^n \to (\mathbb{R}^n)^\infty$ dada por

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, x_2, \ldots, x_n); \quad g(0,1) = \infty.$$

Sólo falta probar que f y g son continuas. O bien que f (ó g) es continua y abierta. O bien, que ambas son abiertas.

Los abiertos de $(\mathbb{R}^n)^\infty$ o bien contienen a ∞ o bien no lo contienen.

Los abiertos de S^n o bien contienen a $(0,1)$ o bien no lo contienen.

Puesto que por el ejercicio anterior $f : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{(0,1)\}$ es un homeomorfismo, se tiene que f establece una correspondencia uno a uno entre los abiertos de $(\mathbb{R}^n)^\infty$ que no contienen a ∞ (es decir $\mathbb{R}^n$) y los abiertos de S^n que no contienen a $(0,1)$.

Los abiertos de $(\mathbb{R}^n)^\infty$ que contienen a ∞ son los de la forma $\{\infty\} \cup K^c$ donde K es un compacto de $\mathbb{R}^n$ y $K^c = \mathbb{R}^n \setminus K$ es su complemento. (Como K es compacto de $\mathbb{R}^n$ entonces es cerrado y acotado).

Como la imagen de un compacto por una función continua es un compacto, dado $\{\infty\} \cup K^c$ un abierto de $(\mathbb{R}^n)^\infty$ entonces $f(K)$ es un compacto de S^n que no contiene a $(0,1)$.

Como S^n es Hausdorff el complemento de un compacto es abierto.

Así entonces, $f(\{\infty\} \cup K^c) = S^n \setminus f(K)$ es un abierto que contiene a $(0,1)$.

Recíprocamente, si V es un abierto de S^n que contiene a $(0,1)$ entonces $S^n \setminus V$ es cerrado en S^n. Como tambien es acotado, resulta que $S^n \setminus V$ es compacto en S^n.

Entonces, $g(S^n \setminus V) = K$ es compacto en $\mathbb{R}^n$.

De donde, $g(V) = \{\infty\} \cup K^c$ es un abierto de $(\mathbb{R}^n)^\infty$ (que contiene a ∞).

8. $S^1 \times S^1$ es homeomorfo al espacio $(I \times I)/_\sim$ donde

$$(t,s) \sim (t',s') \iff \begin{cases} (t,s) = (t',s') \\ \text{ó } (\{s,s'\} = \{0,1\} \text{ y } t = t') \\ \text{ó } (\{t,t'\} = \{0,1\} \text{ y } s = s') \end{cases}$$

Una representación gráfica del espacio $(I \times I)/_\sim$ es:

Respuesta:

Definamos $f : I \times I \to S^1 \times S^1$ por $f(t,s) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s})$.

Entonces:

f es continua.

$(t,s) \sim (t',s') \iff f(t,s) = f(t',s')$

f es epiyectiva

$I \times I/_\sim$ es compacto.

$S^1 \times S^1$ es Hausdorff.

Como ya hemos visto en los ejemplos anteriores, esto muestra que la función $\varphi : I \times I/_\sim \to S^1 \times S^1$ definida por $\varphi([t,s]) = f(t,s)$ está bien definida y es un homeomorfismo.

9. Pruebe que el toro es homeomorfo al subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$$

(Es decir, el toro se incrusta en $\mathbb{R}^3$.)

Respuesta:

En $\mathbb{R}^2$ tenemos la relación de equivalencia $(t,s) \sim (t',s') \iff (t,s)-(t',s') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$.

Esta relación de equivalencia corresponde a la acción de $\mathbb{Z}^2$ en $\mathbb{R}^2$ dada por $(n,m)\cdot(t,s) = (n+t, m+s)$.

Sabemos que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{R}^2/_\sim \cong S^1 \times S^1$.

Sea $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/_\sim$ la proyección canónica.

Definamos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ por

$$(t,s) \mapsto ((2+\cos(2\pi t))\cos(2\pi s), (2+\cos(2\pi t))\sin(2\pi s), \sin(2\pi t)).$$

Entonces:

- $(t,s) \sim (t',s') \Longrightarrow f(t,s) = f(t',s')$.

Esto implica que $\varphi : \mathbb{R}^2/_\sim \to \mathbb{R}^3$, $\quad \varphi([(t,s)]) = f(t,s)$ está bien definida.

Se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{R}^2/_\sim \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

– Como f es continua, se tiene que φ es continua.

– Como $(t,s) \sim (t',s') \iff f(t,s) = f(t',s')$ se tiene que φ es inyectiva.

– Como $f : \mathbb{R}^2 \to f(\mathbb{R}^2)$ es epiyectiva,

se tiene que $\varphi : \mathbb{R}^2/_\sim \to f(\mathbb{R}^2)$ es epiyectiva.

– Resumiendo: $\varphi : \mathbb{R}^2/_\sim \to f(\mathbb{R}^2)$ es continua y biyectiva.

– Como $\mathbb{R}^2/_\sim$ es compacto y $f(\mathbb{R}^2)$ es Hausdorff,

se tiene que φ es un homeomorfismo.

– Finalmente,se prueba fácilmente que $f(\mathbb{R}^2) = S$.

10. Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x, y \le 1\}$ subespacio de $\mathbb{R}^2$. En X definimos la relación de equivalencia

$$(x,y) \sim (x',y') \iff (x,y) = (x',y') \text{ ó } (\{x,x'\}\{0,1\} \text{ y } y = y'.$$

Entonces, $X/_\sim$ con la topología cociente es homeomorfa al cilíndro C.

11. $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x, y \le 1\}$ subespacio de $\mathbb{R}^2$. En X definimos la relación de equivalencia

$$(x,y) \sim (x',y') \iff (x,y) = (x',y') \text{ ó } (\{x,x'\}\{0,1\} \text{ y } y = 1-y'.$$

Entonces, $X/_\sim$ con la topología cociente es homeomorfa a la Banda de Möbius.

12. En $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$ definimos la relación de equivalencia

$$(x,y) \sim (x',y') \iff x^2+y^2 = x'^2+y'^2 = 1 \text{ y } (x,y) = \pm(x',y').$$

El espacio cociente es homeomorfo a $\mathbb{RP}^2$.

13 El problema de los panqueques

Lema 13.1. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(0)f(1) \leq 0$. Entonces, existe $t \in I$ tal que $f(t) = 0$.*

Demostración:
Si $f(0)f(1) = 0$ entonces $f(0) = 0$ ó $f(1) = 0$.
Si $f(t) \neq 0$ para todo $t\imath I$ definamos $g : I \to S^0 = \{-1, 1\}$ por $g(t) = \dfrac{f(t)}{|f(t)|}$.
Entonces, g es continua y epiyectiva (pues $f(0)f(1) < 0$).
Esto no puede ser pues I es conexo y S^0 no lo es. □

Corolario 13.2. *Sea $f : I \to I$ continua. Entonces, existe $t \in I$ talque $f(t) = t$.*

Demostración:
Considerar la función $h(t) = f(t) - t$ y aplicar el lema anterior. □

Corolario 13.3. *Para toda función $f : S^1 \to \mathbb{R}$ continua existe $\mathrm{x} \in S^1$ talque $f(\mathrm{x}) = f(-\mathrm{x})$.*

Demostración: Supongamos que $f(\mathrm{x}) \neq f(-\mathrm{x})$ para todo $\mathrm{x} \in S^1$.
Definamos $h : S^1 \to \mathbb{R}$ por $h(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}) - f(-\mathrm{x})$. Entonces, $h(-\mathrm{x}) = -h(\mathrm{x})$ para todo $\mathrm{x} \in S^1$.
Esto significa que si $h(\mathrm{x})$ y $h(-\mathrm{x})$ o son ambos nulos ó tienen signos distintos.
Por lo tanto, $h(S^1) = \{0\}$ ó $h(S^1)$ contiene reales positivos y negativos ($a \in h(S^1) \Leftrightarrow -a \in h(S^1)$).
Como $h(S^1)$ es conexo en $\mathbb{R}$ y los únicos conexos en $\mathbb{R}$ son los intervalos, concluimos que existe $\mathrm{x} \in S^1$ tal que $h(\mathrm{x}) = 0$.
Es decir, existe $\mathrm{x} \in S^1$ tal que $f(\mathrm{x}) = -f(\mathrm{x})$. □

Corolario 13.4. *En todo momento, sobre el ecuador de la tierra hay un par de puntos antipodales donde la temperatura es la misma.*

Teorema 13.5. *Sean A, B dos regiones acotadas del plano $\mathbb{R}^2$. Entonces, existe una recta en el plano que divide a ambas regiones exactamente por la mitad en áreas.*

Demostración:
Podemos suponer que ambas regiones están encerradas por el círculo S centrado en el origen y con diámetro igual a 1.
Para cada $\mathrm{x} \in S$ sea D_{x} el diámetro que pasa por x. Para cada $t \in I$ sea L_t la recta perpendicular a D_{x} que pasa a una distancia t de x. La recta L_t divide a la región A en dos partes A_1, A_2, donde A_1 es la parte más cercana a x.
Para $i = 1, 2$ sean $g_i : I \to \mathbb{R}$ dada por $g_i(t) =$ área(A_i). Las funciones g_1, g_2 son continuas y verifican $g_1(0) = g_2(1) = 0$. Además, g_2 es decreciente, y g_1 es creciente.
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = g_2(t) - g_1(t)$. Esta función es continua decreciente y verifica $f(0) = -f(1)$ (o sea, $f(0)f(1) \leq 0$).

Por el lema 13.1 existe $t \in I$ tal que $f(t) = 0$. Este valor no necesariamente es único. Como f es decreciente, bien podría ser un intervalo cerrado $[a, b]$.

Definamos $\alpha : S \to I$ por $\alpha(\mathbf{x}) = (a + b)/2$ el punto medio del intervalo donde f se anula, ó bien, igual al único punto donde f se anula.

Notemos que α es continua y $\alpha(-\mathbf{x}) = 1 - \alpha(\mathbf{x})$.

De la misma forma, encontramos una función continua $\beta : S \to I$ talque $L_{\beta(\mathbf{x})}$ es una recta perpendicular a $D_{\mathbf{x}}$ que divide a B en dos pedazos de la misma área. Además, $\beta(-\mathbf{x}) = 1 - \beta(\mathbf{x})$.

Sea $h : S \to \mathbb{R}$ dada por $h(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) - \beta(\mathbf{x})$.

Esta función es continua y verifica $h(-\mathbf{x}) = -h(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in S$.

Por el corolario 13.3 existe $\mathbf{y} \in S$ tal que $h(-\mathbf{y}) = h(\mathbf{y})$.

Necesariamente $h(\mathbf{y}) = 0$. Es decir, $\alpha(\mathbf{y}) = \beta(\mathbf{y})$.

La recta, $L_{\alpha(\mathbf{y})} = L_{\beta(\mathbf{y})}$ divide a A y B en partes iguales. □

Teorema 13.6. *Sea A una región acotada del plano. Entonces, existe un para de rectas perpendiculares que dividen a A en cuatro partes con misma área.*

Demostración:

Igual que en el teorema anterior podemos suponer que A está encerrado por S.

Sean, $D_{\mathbf{x}}$, $\alpha(\mathbf{x})$ y L_t como anteriormente.

Sea $i\mathbf{x}$ un punto en S que forma un ángulo $\pi/2$ con $\mathbf{x}$.

La recta $L_{\alpha(i\mathbf{x})}$ es perpendicular a $D_{i\mathbf{x}}$ y divide a la región A en dos partes iguales.

Sean $A_1(\mathbf{x}), A_2(\mathbf{x}), A_3(\mathbf{x}), A_4(\mathbf{x})$ las partes de A determinadas por las rectas perpendiculares $L_{\alpha(\mathbf{x})}$ y $L_{\alpha(i\mathbf{x})}$ y ordenadas como los cuadrantes.

Para cada $i = 1, 2, 3, 4$ sean $g_i(\mathbf{x}) =$ área$(A_i(\mathbf{x}))$.

Las funciones $g_i : S \to \mathbb{R}$ son continuas y verican

$$g_1(\mathbf{x}) + g_2(\mathbf{x}) = g_3(\mathbf{x}) + g_4(\mathbf{x}) \quad \text{y}$$
$$g_2(\mathbf{x}) + g_3(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x}) + g_4(\mathbf{x})$$

para todo $\mathbf{x} \in S$.

Necesariamente, $g_1(\mathbf{x}) = g_3(\mathbf{x})$ y $g_2(\mathbf{x}) = g_4(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in S$.

Sea $f : S \to \mathbb{R}$ dada por $f(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{x}) = g_3(\mathbf{x}) - g_4(\mathbf{x})$.

Notamos que

$$\begin{aligned} f(i\mathbf{x}) &= g_1(i\mathbf{x}) - g_2(i\mathbf{x}) \\ &= g_2(\mathbf{x}) - g_3(\mathbf{x}) \\ &= g_1(\mathbf{x}) - g_1(\mathbf{x}) \\ &= -f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Sea $g : I \to \mathbb{R}, g(t) = f\left(\frac{e^{\pi i t/2}}{2}\right)$.

Por lema 13.1 existe $t_0 \in I$ tal que $g(t_0) = 0$.

Tomando $\mathbf{x} = \dfrac{e^{\pi i t_0/2}}{2}$ se tiene que $f(\mathbf{x}) = 0$.

Esto prueba el teorema. □

14 Variedades topológicas

14.1 Definición

1.- Una **n-variedad (topológica)** es una espacio topológico Hausdorff X tal que para todo $x \in X$ existe una vecindad abierta U de x y existe un homeomorfismo $h : U \to \text{int}(D^n)$.

Es decir, X es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

2.- Una definición equivalente es que exista una colección

$$\mathcal{A} = \{(\mathcal{O}_i, \varphi_i) \mid \mathcal{O}_i \text{ abierto de } \mathbb{R}^n,\ \varphi_i : \mathcal{O}_i \hookrightarrow X \text{ incrustación, y } \cup_i \varphi_i(\mathcal{O}_i) = X\}.$$

Un par $(\mathcal{O}_i, \varphi_i)$ se llama una **carta, o parametrización** de $\varphi_i(\mathcal{O}_i)$.
A la colección de cartas que cubren a X se le llama Atlas de X.

3.- Un ejemplo trivial son los abiertos de $\mathbb{R}^n$. Todos ellos son una n-variedad.

4.- Ejemplos

1. El círculo S^1 es una 1-variedad. Consideremos $S^1 \subset \mathbb{C}$ el círculo unitario.
   Sea $z_0 = e^{2\pi i t_0} \in S^1$. Tenemos que $S^1 \setminus \{-z_0\}$ es una vecindad abierta de z_0.
   Veamos que es homeomorfa a $\text{int}(D^1)$.
   De hecho, $\varphi :] - 1/2, t1/2[\to S^1$ por $\varphi(t) = e^{2\pi i t_0 + t}$
   es un homeomorfismo entre $] - 1/2, 1/2[$ y $S^1 \setminus \{-z_0\}$.
   Y ya sabemos que $] - 1/2, 1/2[$ es homeomorfo a $\text{int}(D^1)$.
2. La esfera S^n es una n-variedad.
   Por el ejercicio 6 de la Sección 12 sabemos que $\mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{(0, 1)\}$.
   Sea $f : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{(0, 1)\}$ un homeomorfismo.
   Entonces, $-f : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{-(0, 1)\}$ es también un homeomorfismo.
   Luego, $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, f), (\mathbb{R}^n, -f)\}$ es un atlas para S^n.
   Esto prueba que S^n es una n-variedad.

   Otro atlas para S^n es el siguiente. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, sea
   $(S^n)_i^+ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i > 0\}$ y $(S^n)_i^- = -(S^n)_i^+$.
   Para cada $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, definimos $\varphi_i^\pm : \overset{\circ}{D^n} \to (S^n)_i^\pm$, por
   $\varphi_i^\pm(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \pm\sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2}, x_i, \ldots, x_n)$

   Entonces, $\mathcal{B} = \{(\overset{\circ}{D^n}, \varphi_i^\pm) \mid i = 1, 2, \ldots, n + 1\}$ es un atlas para S^n
   Porsupuesto, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es otro atlas.

3. $\mathbb{RP}^n$ es una n-variedad.

   De hecho,sea $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ la proyección canónica.

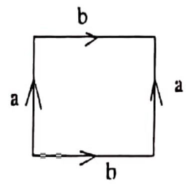
   Entonces, $\mathcal{C} = \{(\overset{\circ}{D^n}, \pi\varphi_i^+) \mid i = 1, 2, \ldots, n+1\}$ es un atlas para $\mathbb{RP}^n$.

4. $T^2 = S^1 \times S^1$ es una 2-variedad, que hemos llamado el **2-toro**.

   Hay varias formas de ver esto.

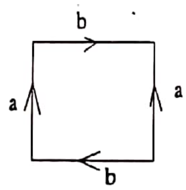
   La función f del ejercicio 8 de la Sección 12 tiene en rigor dominio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Se puede definir un atlas para $S^1 \times S^1$ restringiendo f a distintos dominios abiertos de modo que la retricción sea siempre una incrustación.

   Otra forma es considerando la representación gráfica de $S^1 \times S^1$ mediante un cuadrado con lados opuestos identificados. Del gráfico se observa que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a un 2-disco abierto.



   Y todavía otra forma es usando el hecho que producto de variedades es variedad (ver teorema mas abajo).

5. La **Botella de Klein** $\mathcal{K}$ definida en la Sección 7 es una 2-variedad que puede ser representada graficamente en la forma



Teorema 14.1. *Sea M una m-variedad topológica con atlas $\mathcal{A} = \{(\mathcal{O}_i, f_i),\ \ i \in I\}$. Sea N una n-variedad topológica con atlas $\mathcal{B} = \{(\mathcal{U}_j, g_j),\ \ j \in J\}$. Entonces, $M \times N$ es una $(m+n)$-variedad con atlas $\mathcal{C} = \{(\mathcal{O}_i \times \mathcal{U}_j, f_i \times g_j),\ \ i \in I, j \in J\}$.*

5.- Sea M un G-espacio topológico. Se dice que la acción de G es **propiamente discontinua** si para cada $x \in M$ existe una vecindad abierta V de x tal que $g \cdot V \cap g' \cdot V = \emptyset$ para todos $g, g' \in G$, $g \neq g'$.

Teorema 14.2. *Sea M es un G-espacio topológico donde la acción de G es propiamente discontinua.*

Si M es una n-variedad, entonces M/G es también una n-variedad.

6.- Por ejemplo, la acción de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ dada por $n \cdot x = n + x$ es propiamente discontinua. El espacio cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es el círculo S^1 que es una 1-variedad.

Una acción que no es propiamente discontinua es la acción $p \cdot x = p + x$ de $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{R}$. ¿Qué espacio es $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$?

14.2 Incrustación en $\mathbb{R}^N$

Probaremos a seguir que toda variedad compacta es de hecho un subespacio de algún $\mathbb{R}^N$. La demostración que damos es la que aparece en Munkres: Topology, A first course.

En los ejercicios aparece sugerida otra demostración, considerablemente más simple, que aparece en Kosniowsky.

Teorema 14.3. *Toda m-variedad compacta M se incrusta en algún $\mathbb{R}^N$, con N grande.*

Para probar este Teorema necesitamos una definición y dos Lemas.

Definición: Sea $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$ un cubrimiento abierto de un espacio topológico X. Una **Partición de la unidad subordinada a** $\mathcal{U}$ es una colección de funciones continuas $\varphi_i : X \to [0,1], ; i = 1, 2, \cdots, n$, tales que:
(a) $\text{Sop}(\varphi_i) \subset U_i$, $\forall i$, donde $\text{Sop}(\varphi_i) = \overline{\{x \in X \mid \varphi_i(x) \neq 0\}}$,
(b) $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1$, $\forall x \in X$.

Lema 14.4. *Sea $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$ un cubrimiento abierto de un espacio topológico normal X. Entonces existe un cubrimiento abierto $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$ tal que $\overline{V_i} \subset U_i$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$.*

Demostración Lema: Basta probar que para cualquier subíndice $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ existe un abierto V_i con $\overline{V_i} \subset U_i$ y tal que
$\{U_1, \cdots U_{i-1}, V_i, U_{i+1}, \cdots, U_n\}$ es un cubrimiento (abierto) de X.

Sin pérdida de generalidad tomemos $i = 1$. Sea $C_1 = (\cup_{i=2}^n U_i)^c$. Entonces C_1 es un cerrado y $C_1 \subset U_1$. De hecho, C_1 son los puntos de X que son cubiertos sólo por U_1.

Entonces C_1 y $(U_1)^c$ son cerrados disjuntos. Como X es normal, existen abiertos disjuntos V_1 y O_1 tales que $C_1 \subset V_1$ y $(U_1)^c \subset O_1$.

Se puede probar entonces que $\overline{V_1} \subset U_1$ y $\{V_1, U_2, \cdots, U_n\}$ es un cubrimiento de X. □

Lema 14.5. *Todo recubrimiento abierto finito de un espacio topológico normal, tiene una partición de la unidad asociada.*

Demostración Lema: Sea X un espacio normal, y sea
$\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$ un cubrimiento abierto de X.

Entonces, existen cubrimientos abiertos $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$ y $\mathcal{W} = \{W_1, W_2, \cdots, W_n\}$ tales que para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ se tiene $\overline{W_i} \subset V_i$ y $\overline{V_i} \subset U_i$.

Por Lema de Uryhson, para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ existe $\psi_i : X \to [0,1]$ continua con $\text{sop}(\psi_i) \subset V_i$ y $\psi_i \equiv 1$ sobre W_i.

Entonces $\psi(x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) \neq 0 \; \forall x \in X$.

Se puede probar entonces que $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ con $\varphi_i(x) = \psi_i(x)/\psi(x)$ es una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$. □

Demostración Teorema: Sea M una variedad compacta de dimensón m. Sea $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$ un cubrimiento abierto de X talque cada U_i se incrusta en $\mathbb{R}^m$ mediante $h_i : U_i \to \mathbb{R}^m$. Como toda variedad compacta es un espacio normal, existe una partici'on de la unidad $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ subordinada a $\mathcal{U}$.

Para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ sea $g_i : M \to \mathbb{R}^m$ definida por:

$$g_i(x) = \begin{cases} h_i(x)\varphi_i(x) & \text{si} \quad x \in U_i \\ 0 & \text{si} \quad x \notin V_i \end{cases}$$

Se puede probar entonces que $F : M \to \mathbb{R}^{n+nm}$ definida por

$$F(x) = (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x), g_1(x), \cdots, g_n(x))$$

es una incrustación. De hecho, basta probar que F es inyectiva. $\square$

14.3 Sumas conexa de variedades.

Sean X e Y dos n-variedades. En X y en Y sean D_X y D_Y respectivamente homeomorfos a la bola cerrada D^n.

En X quitamos $\overset{\circ}{D}_X$ y en Y quitamos $\overset{\circ}{D}_Y$.

Sea $\partial D_X = D_X \setminus \overset{\circ}{D}_X$ el borde de la bola quitada en X, y sea $\partial D_Y = D_Y \setminus \overset{\circ}{D}_Y$ el borde de la bola quitada en Y.

Observamos que ∂D_X y ∂D_Y son homeomorfos a S^{n-1}.

Sea $h : \partial D_X \to \partial D_Y$ un homeomorfismo.

Definimos la suma conexa de X con Y por

$$X\#Y = (X \setminus D_X) \sqcup_h (Y \setminus D_Y).$$

Lema 14.6. *Si X e Y son n-variedades, entonces $X\#Y$ es también una n-variedad.*

15 Superficies

1.- A toda 2-variedad la llamaremos **superficie**.

Hemos visto los siguientes ejemplos de superficies:

Cualquier abierto de $\mathbb{R}^2$; S^2; $\mathbb{RP}^2$; $S^1 \times S^1$; $\mathcal{K}$; $S^1 \times \mathbb{R}$.

2.- Tomando sumas conexas de estas superficies podemos obtener nuevas superficies.

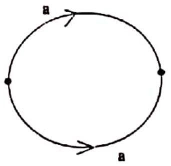
3.- Para estudiar superficies es necesario considerar el procedimiento de cortar y pegar. Con esto podemos ver graficamente la suma conexa de superficies $S_1\#S_2$.

15.1 Cortar y pegar

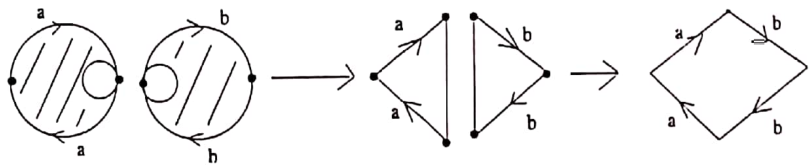
1.- Considere que la esfera S^2 la cortamos por el ecuador. Lo que queda entonces es el hemisferio superior y el hemisferio inferior separados. El ecuador queda en ambos hemisferios. Para recuperar la esfera, simplemente pegamos ambos hemisferios por el ecuador.

Los hemisferios separados de la misma esfera se pueden representar en la forma:

2.- Este ejemplo muestra que una superficie se puede separar en pedazos, y si se indica las identificaciones que se debe hacer entre los distintos pedazos para pegarlos, es posible obtener una representación grafica de la superficie.
3.- Más aún, si a la esfera S^2 le hacemos un corte a lo largo de medio ecuador, la podemos abrir y nos queda la siguiente figura (que es una presentación posible de S^2):



4.- A modo de ejemplificar, encontremos una representación gráfica para $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$.

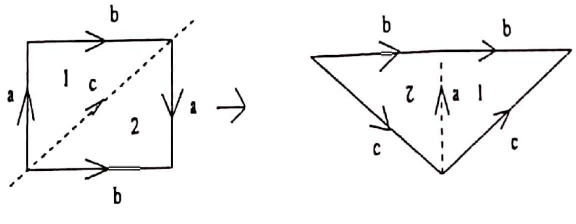


Utilizando el procedimiento de cortar y pegar es posible clasificar todas las superficies compactas.

Teorema 15.1. Clasificación de superficies compactas *Toda superficie compacta es homeomorfa a una de las siguientes superficies:*

$$S^2; \qquad T^2 \# T^2 \# \cdots \# T^2; \qquad \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2.$$

5.- La Botella de Klein $\mathcal{K}$ no aparece en esta lista. Debe ser homeomorfa a alguna de ellas. Probemos que $\mathcal{K} \cong \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$.



6.- Por el procedimiento de cortar y pegar, siguiendo los pasos en los ejemplos anteriores, se puede encontrar una representación gráfica para cada una de las superficies en la lista del teorema de clasificación de superficies compactas.

15.2 Demostración teorema de clasificación de superficies compactas

1.- Un Teorema de Radó de 1925 que demuestra que toda superficie compacta se puede triangulizar. Es decir, se puede cortar en un número finito de triángulos de modo los lados de triángulos distintos o bien coinciden, o bien se tocan en un vértice, o bien son disjuntos.

Usando este resultado vemos que toda superficie compacta se puede representar por un polígono de un número par de lados, los que se identifican dos a dos por homeomorfismos.

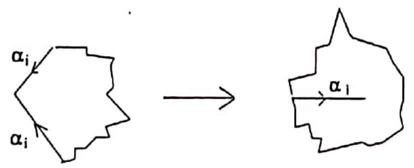
2.- Para demostrar el teorema de clasificación de superficies compactas debemos considerar un tal polígono con lados identificados dos a dos y siguiendo un algoritmo de corte y pegado llegar a una de las superficies en la lista.

3.- Supongamos que el polígono tiene $2n$ lados. Primero que nada nombramos por $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ un conjunto de lados que no se identifican. Estos lados están orientados sobre el borde. Los bautizamos de modo que estén orientados en el sentido positivo. Para cada α_i, al lado correspondiente que se identifica con el, los llamamos con el mismo nombre, y le damos la orientación que corresponde. Si recorremos el borde del polígono en sentido positivo, entonces encontraremos cada lado α_i dos veces, orientado positivamente, o negativamente.

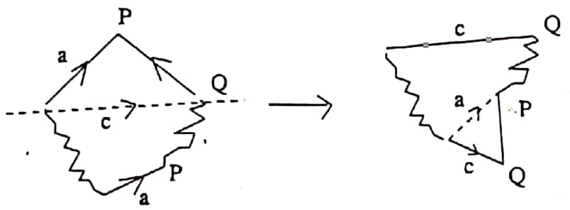
4.- Decimos que un par de lados que se identifican tiene orientación positiva si aparecen en sentido opuestos al recorrer el borde. Y que tienen orientación negativa si aparecen en el mismo sentido.

5.- El Teorema se prueba siguiendo los siguientes pasos.

I) Eliminación de lados adyacentes α_i, α_i^{-1}.



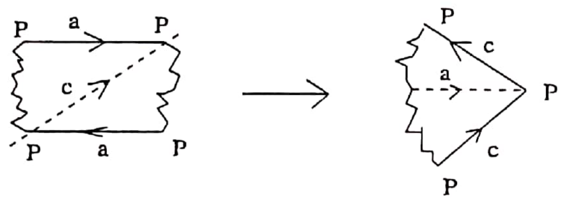
II) Si hay más de una clase de vértices equivalentes, cortar y pegar en la forma indicada por la figura.



Este corte y pegado aumenta en 1 el número de vértices equivalentes a Q y disminuye en 1 el número de vértices equivalentes a P.

Repitiendo este paso un número finito de veces, se consigue que todos los vértices sean equivalentes. Cada vez que se realiza este paso, se debe chequear el paso I. Si es posible, hacerlo cada vez.

III) Buscamos si hay pares de lados que se identifica que tengan orienatción negativa. Si son adyacentes no hacemos nada. Si no son adyacentes, hacemos el siguiente corte y pegado, de modo a dejar un par de lados adyacentes que se identifica y que tienen orientación negativa.

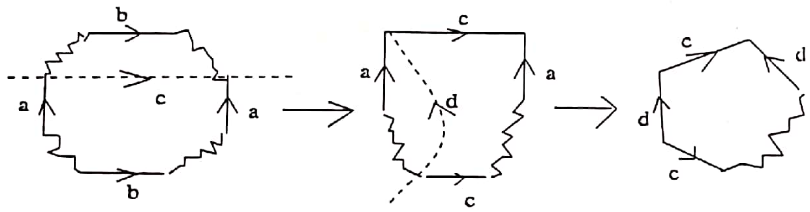


Este paso no aumenta el número de clases de vértices equivalentes. Ni es necesario chequear el paso I.

Se repite este paso hasta que todos los pares de lados que se identifican que tienen orientación negativa queden adyacentes.

IV) Ahora miramos pares de lados que se identifica y que tiene orientación positiva. Ellos no pueden ser adyacentes, pues ya fueron eliminados por el paso I.

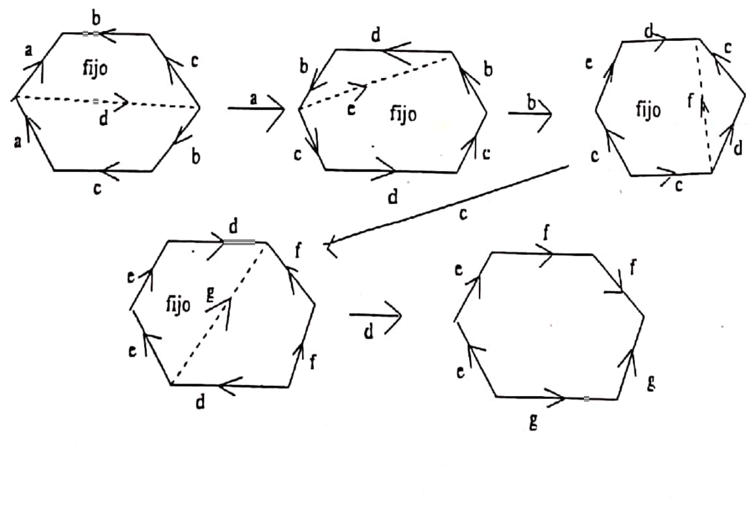
Si hay sólo un par de ellos, necesariamente se trata de la Botella de Klein, pues por el Paso II sólo hay una clase de Vértices equivalentes. Si hay mas de un par de ellos, necesariamente dos de esos pares están entrelazados en la forma de la figura a la izquierda.



De hecho, si no hay pares entrelazados quiere decir que hay mas de una clase de vértices equivalentes, lo que ya no es posible por el paso II. Siguiendo un número finito de veces el corte y pegado de la figura arriba, dejamos todos los pares de lados que se identifica que tienen orientación positiva alternados consecutivamente en la forma $\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}$.

Para terminar la demostración ya vimos que $\mathcal{K} \cong \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$.

Ahora veamos que $\mathbb{RP}^2 \# T^2 \cong \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$.



15.3 Orientación en superficies.

1.- Una superficie S se dice **orientable** si para toda curva cerrada simple en S, al recorrerla partiendo desde un punto de ella con una orientación cualquiera (una orientación en un punto de la curva se elige determinando cuál es el lado izquierdo y cual el derecho) se regresa con la misma orientación. En caso contrario se dice que es **no orientable**.

2.- Una definición equivalente, es que para toda curva cerrada simple γ en S existe una vecindad U de ella tal que $U \setminus \gamma$ tiene dos componentes conexas.

3.- Ejemplos

1. La banda de Möbius es no orientable.
2. $\mathbb{RP}^2$ es no orientable.

4.- En la clasificación de superficies compactas, ¿cuáles son orientables y cuales no orientables?

15.4 Triangulación en superficies, Característica de Euler.

1.- Un triángulo en una superficie S es un subconjunto $T = \alpha(\triangle)$, donde $\triangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ y $\alpha : \triangle \to S$ continua y α restringida al interior de $\triangle$ una incrustación. Definimos vértice, arista y cara de un triángulo $T \subset S$ de manera natural.

2.- Una triagulación de una superficie S es un conjunto de triángulos $\{T_1, T_2, \cdots, T_n\}$ tales que:
◇ $\bigcup_{i=1}^{n} T_i = S$,
◇ Dos triángulos o son disjuntos, o se tocan en vértices, o coinciden exactamente en aristas.

3.- Dada una triangulación de una superficie S sea v el número de vértices, a el número de aristas, y c el número de caras. Definimos la característica de Euler de S por

$$\chi(S) = v - a + c.$$

Teorema 15.2. *$\chi(S)$ no depende de la triangulación.*

Demostración: En vez de triangular una superficie la podemos 'poligonar'. Probaremos que contando vértices, aristas y caras de una poligonización de S, obtenemos el mismo número.

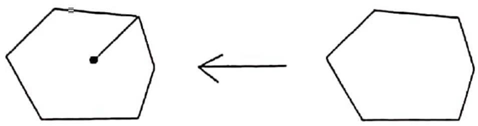
La suma $v - a + c$ es invariante por las siguientes operaciones:

(a) Subdividir una arista agregando un vértice en el punto interior de una arista. Y su proceso inverso, eliminar un vértice al cual sólo llegan dos aristas.

(b) Subdividir polígono por una arista que una dos vértices. Y su proceso inverso: eliminar una arista juntando dos polígonos.

(c) Introducir una arista y un vértice como indica la figura:

Usando estas operaciones, y un poco de combinatoria, se prueba el Teorema. □



Teorema 15.3. ⋄ $\chi(S_1\#S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$,

⋄ $\chi(S^2) = 2$,

⋄ $\chi(T^2\#\cdots\#T^2) = 2 - 2n$, *n copias de* T^2,

⋄ $\chi(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})\#\cdots\#\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = 2 - n$, *n copias de* $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Teorema 15.4. *Dos superficies son homeomorfas si y sólo si tiene la misma orientación y la misma característica de Euler.*

Apuntes Homología

1 Complejos de cadena

1.1 Definición, homología

Un **Complejo de cadenas** $\mathcal{C} = \{C_p, \partial_p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión

$$\cdots \longrightarrow C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \longrightarrow \cdots$$

de grupos abelianos C_p y homomorfismos ∂_p tales que $\partial_p\partial_{p+1} = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Si $C_p = 0$ para $p < 0$ hablamos de complejo de cadena **no negativo**. Este será casi siempre el caso que consideraremos.

Si C_p es un grupo abeliano libre para todo p, decimos que $\mathcal{C}$ es un complejo de cadena **libre**.

Notamos que $\mathrm{Im}\partial_{p+1} \lhd \mathrm{Ker}\partial_p$ (subgrupo normal) y por lo tanto, podemos definir el p-**grupo de homología** de $\mathcal{C}$ como el grupo cociente $H_p(\mathcal{C}) = \mathrm{Ker}\partial_p/\mathrm{Im}\partial_{p+1}$.

Los elementos de C_p se llaman p-**cadenas**. Cada homomorfismo ∂_p se llama **operador de borde**. Los elementos de $\mathrm{Ker}\partial_p$ se llaman p-**ciclos** de $\mathcal{C}$, y los elementos de $\mathrm{Im}\partial_{p+1}$ se llaman p-**bordes** de $\mathcal{C}$. Un elemento de $H_p(\mathcal{C})$ se llama una p-**clase de homología** del complejo de cadena $\mathcal{C}$.

Dos p-ciclos, c_p, c'_p que representan la misma clase de homología se dicen p-**ciclos homólogos**, lo que será denotado por $c_p \sim c'_p$. Notamos que $c_p \sim c'_p$ si y sólo si su diferencia es un p-borde. Una p-clase de homología es de la forma $c_p + \partial_{p+1}C_{p+1}$ con $\partial_p c_p = 0$, que a veces denotaremos por $\{c_p\}$.

Sea $\mathcal{C}$ un complejo de cadena no negativo. Definimos un **aumento** del complejo de cadena $\mathcal{C}$ a un epimorfismo $\varepsilon : C_0 \to \mathbb{Z}$ tal que $\varepsilon\partial_1 = 0$.

Dado un aumento $\varepsilon : C_0 \to \mathbb{Z}$ de un complejo de cadena $\mathcal{C}$ se define el complejo de cadena **aumentado** $\{\mathcal{C}, \varepsilon\}$por

$$\cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

La **homología reducida** de $\mathcal{C}$ es la homología del complejo de cadena aumentado. Los grupos de homología reducida de $\mathcal{C}$ se denotan por $\tilde{H}_p(\mathcal{C})$, $p \geq 0$. Es inmediato ver que $H_p(\mathcal{C}) = \tilde{H}_p(\mathcal{C})$ si $p > 0$.

Se puede probar que $H_0(\mathcal{C}) \cong \tilde{H}_0(\mathcal{C}) \oplus \mathbb{Z}$. De hecho, como $\varepsilon\partial_1 = 0$, ε se anula en $\mathrm{Im}\partial_1$ y por lo tanto induce un epimorfismo $H_0(\mathcal{C}) \to \mathbb{Z}$ cuyo núcleo es $\tilde{H}_0(\mathcal{C})$. Con el lema a seguir se demuestra lo afirmado.

Lema 1.1. *Sea $\varphi : G \to \mathbb{Z}$ un epimorfismo con G abeliano.*
Entonces, $\quad G \cong \mathrm{Ker}\varphi \oplus \mathbb{Z}$

1.2 Morfimos de cadena, functorialidad

Sean $\mathcal{C} = \{C_p, \partial_p\}$ y $\mathcal{C}' = \{C'_p, \partial'_p\}$ dos complejos de cadena. Un **morfismo de cadenas** $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es una familia de homomorfismos $\phi_p : C_p \to C'_p$ tales que $\partial'_p\phi_p = \phi_{p-1}\partial_p$ para todo p.

Un morfismo de cadenas $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ define un homomorfismo $(\phi_*)_p : H_p(\mathcal{C}) \to H_p(\mathcal{C}')$ con las siguientes propiedades:

Lema 1.2. *El operador $\mathcal{C} \mapsto H(\mathcal{C})$; $\phi \mapsto \phi_*$ es functorial. Es decir:*

1. *La identidad $i : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un morfismo de cadena tal que $(i_*)_p$ es la identidad en $H_p(\mathcal{C})$,*
2. *Si $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ y $\psi : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ son morfismos de cadena, entonces $\psi\phi$ es un morfismo de cadena y $(\psi\phi)_* = \psi_*\phi_*$.*

En otras palabras, para cada p, $\mathcal{C} \mapsto H_p(\mathcal{C})$; $\phi \mapsto (\phi_*)_p$ define un functor de la categoría de los complejos de cadena en la categoría de los grupos abelianos.

Si $\{\mathcal{C}, \varepsilon\}$ y $\{\mathcal{C}', \varepsilon'\}$ son dos complejos de cadena aumentados, se dice que un morfismo de cadena $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ **preserva el aumento**, si $\varepsilon'\phi_0 = \varepsilon$. En este caso, definiendo $\phi_{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ como la identidad, se define un **morfismo de cadena aumentada**. Un morfismo de cadena aumentada induce un homomorfismo de homología reducida $(\phi_*)_p : \tilde{H}_p(\mathcal{C}) \to \tilde{H}_p(\mathcal{C}')$, $p \geq 0$.

1.3 Homotopía de morfismos de cadenas

Sean $\phi, \psi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ dos morfismos de cadenas. Una **homotopía de cadenas** de ϕ a ψ es una familia $\mathcal{D}$ de homomorfismos

$$D_p : C_p \to C'_{p+1}$$

tales que

$$\partial'_1 D_0 = \psi_0 - \phi_0 \quad \text{y} \quad \partial'_{p+1} D_p + D_{p-1}\partial_p = \psi_p - \phi_p \text{ para todo } p \geq 1.$$

Si entre ϕ y ψ hay una homotopía de cadenas, decimos que ϕ y ψ son **morfismos homotópicos**. Escribimos $\mathcal{D} : \phi \sim \psi$ o simplemente $\phi \sim \psi$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[dl, "D_2"'] \arrow[d, shift right, "\psi_2"'] \arrow[d, shift left, "\phi_2"] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[dl, "D_1"'] \arrow[d, shift right, "\psi_1"'] \arrow[d, shift left, "\phi_1"] & C_0 \arrow[r] \arrow[dl, "D_0"'] \arrow[d, shift right, "\psi_0"'] \arrow[d, shift left, "\phi_0"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & C'_2 \arrow[r, "\partial'_2"'] & C'_1 \arrow[r, "\partial'_1"'] & C'_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Un morfismo de cadena $\phi : C \to C'$ se llama una **equivalencia de cadena** si existe un morfismo de cadena $\phi' : C' \to C$ tal que $\phi'\phi$ y $\phi\phi'$ son homotópicas por cadena a la identidad de C y C' respectivamente. Decimos que ϕ' es una **inversa homotópica de cadena** de ϕ.

El siguiente lema queda de ejercicio:

Lema 1.3. *1. La homotopía de cadena es una relación de equivalencia en el conjunto de morfismos de cadena de C a C'. La clase de homotopía de un morfismo de cadena $\phi : C \to C'$ será denotada por $\{\phi\}$.*

2. Composición de morfismos de cadena induce una composición bien definida de clases de homotopía de morfismos. Es decir, $\{\phi\}\{\psi\} = \{\phi\psi\}$ está bien definido. En otras palabras, $\phi \sim \psi$ y $\phi' \sim \psi' \Rightarrow (\phi'\phi) \sim (\psi'\psi)$.

Probemos esta propiedad. Supongamos que $\mathcal{D} : \phi \sim \psi$ y $\mathcal{D}' : \phi' \sim \psi'$. Entonces, $\partial'_{p+1}D_p + D_{p-1}\partial_p = \phi_p - \psi_p$ y $\partial''_{p+1}D'_p + D'_{p-1}\partial'_p = \phi'_p - \psi'_p$.

Componiendo la primera igualdad por ϕ'_p a la izquierda, componiendo la segunda la segunda igualdad por ψ_p a la derecha, y sumando, se obtiene:

$$\phi'_p\partial'_{p+1}D_p + \phi'_pD_{p-1}\partial_p + \partial''_{p+1}D'_p\psi_p + D'_{p-1}\partial'_p\psi_p = \phi'_p\phi_p - \psi'_p\psi_p.$$

Reordenando, y notando que $\phi'_p\partial'_{p+1} = \partial''_{p+1}\phi'_{p+1}$ y $\partial'_p\psi_p = \psi_{p-1}\partial_p$ obtenemos,

$$\partial''_{p+1}(\phi'_{p+1}D_p + D'_p\psi_p) + (\phi'_pD_{p-1} + D'_{p-1}\psi_{p-1})\partial_p = \phi'_p\phi_p - \psi'_p\psi_p.$$

Esto prueba que $\mathcal{D}''$ definido por $D''_p = \phi'_{p+1}D_p + D'_p\psi_p$ para cada p, es una homotopía entre $\phi'\phi$ y $\psi'\psi$.

3. Si ϕ y ψ son homotópicas por cadenas, entonces ellas inducen el mismo homomorfismo en homologías.

Es decir, $\phi \sim \psi \Rightarrow (\phi_*)_p = (\psi_*)_p$, para todo p.

4. Si ϕ' es una inversa homotópica de ϕ, entonces ϕ_* y ϕ'_* son isomorfismos en las homologías, uno inverso del otro,

5. Si $\phi : C \to C'$ y $\psi : C' \to C''$ son equivalencias de cadena, entonces $\psi\phi$ es una equivalencia de cadenas.

El siguiente lema muestra que la homotopía de cadena se extiende bien a complejos de cadena aumentados.

Lema 1.4. *Sean C y C' dos complejos de cadena no negativos. Sean $\phi, \psi : C \to C'$ dos morfismos de cadena, y sea D una homotopía de cadenas entre ellas. Suponga que C y C' son aumentadas por ε y ε' respectivamente. Entonces:*

1. *Si ϕ preserva el aumento, entonces ψ también lo preserva,*

2. *Si extendemos ϕ, y ψ como la identidad en dimensión -1, y si extendemos D como cero en dimensión -1, entonces D es una homotopía de cadenas de los morfismos de cadena extendidos.*

Demostración: Si $c_0 \in C_0$, tenemos que $\partial D c_0 = \phi(c_0) - \psi(c_0)$, pues $\partial c_0 = 0$.
Luego, $0 = \varepsilon'(\partial D c_0) = \varepsilon'\phi(c_0) - \varepsilon'\psi(c_0) = \varepsilon(c_0) - \varepsilon'\psi(c_0)$ como deseado.

Mas aún, en dimensión 0 tenemos la ecuación $D\varepsilon(c_0) + \partial D(c_0) = \phi(c_0) - \psi(c_0)$, pues $D\varepsilon(c_0) = 0$, y en dimensión -1 tenemos la ecuación $\varepsilon'(D(1)) = \phi(1) - \psi(1)$ porque ambos lados se anulan.

Esto prueba que D es una homotopía de los morfismos de cadena extendidos. □

El siguiente lema muestra que las equivalencias de cadena se extienden bien a complejos de cadena aumentados.

Lema 1.5. *Sean C y C' dos complejos de cadena no negativos. Sea $\phi : C \to C'$ una equivalencia de cadena con inversa ϕ'. Suponga que C y C' son aumentadas por ε y ε' respectivamente. Entonces:*

1. *Si ϕ preserva el aumento, entonces ϕ' también lo preserva,*
2. *ϕ y ϕ' son inversas homotópicas de cadenas como morfismos de los complejos de cadena aumentados,*
3. *ϕ y ϕ' inducen isomorfismos en la homología reducida.*

Demostración: Si D' es una homotopía de cadena entre $\phi\phi'$ y la identidad, entonces, en dimensión 0 se tiene $\partial' D' c_0' = \phi\phi'(c_0') - c_0'$, luego

$$0 = \varepsilon'(\partial' D' c_0') = \varepsilon'\phi\phi'(c_0') - \varepsilon' c_0' = \varepsilon\phi'(c_0') - \varepsilon'(c_0').$$

Es decir, ϕ' preserva el aumento. Lo que falta por demostrar es análogo al lema anterior. □

1.4 Sucesiones exactas

Una sucesión finita o infinita de grupos y homomorfismos de grupos

$$\cdots \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\phi_1} G_2 \xrightarrow{\phi_2} G_3 \longrightarrow \cdots$$

es **exacta en** G_2 si $\mathrm{Im}\phi_1 = \mathrm{Ker}\phi_2$. Si es exacta en todos los grupos de la sucesión, se dice que la sucesión es **exacta**. Una sucesión exacta es un complejo de cadena con homología trivial.

Si $0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\phi} G_2 \xrightarrow{\psi} G_3 \longrightarrow 0$ es exacta, decimos que es una **sucesión exacta corta.**

Una sucesión exacta corta $0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\phi} G_2 \xrightarrow{\psi} G_3 \longrightarrow 0$ tiene **splitting** si $\mathrm{Im}\phi$ tiene un sumando directo en G_2. Es decir, si $G_2 = \mathrm{Im}\phi \oplus H$ para algún subgrupo H de G_2.

Ejercicios: Las siguientes son propiedades de sucesiones exactas.

1. $G_1 \xrightarrow{\phi} G_2 \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si ϕ es un epimorfismo.
2. $0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\phi} G_2$ es exacta si y sólo si ϕ es un monomorfismo.

3. Si $0 \longrightarrow G \longrightarrow 0$ es exacta entonces $G = 0$.

4. $0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\phi} G_2 \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si ϕ es un isomorfismo.

5. Si $0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\phi} G_2 \xrightarrow{\psi} G_3 \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta, entonces $G_2/\mathrm{Im}\phi$ es isomorfo a G_3. Recíprocamente, si $\psi : G \Rightarrow H$ es un epimorfismo con núcleo K, entonces la sucesión $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\psi} H \longrightarrow 0$ es exacta.

6. Suponga que la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\phi} G_2 \xrightarrow{\psi} G_3 \longrightarrow 0$ tiene splitting. Entonces G_2 es isomorfo a $G_1 \oplus G_3$.

7. **Teorema:** *Sea $0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\phi} G_2 \xrightarrow{\psi} G_3 \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta. Son equivalentes:*

   (a) La sucesión tiene splitting.
   (b) Existe homomorfismo $p : G_2 \to G_1$ tal que $p \circ \phi = i_{G_1}$,
   (c) Existe homomorfismo $j : G_3 \to G_2$ tal que $\psi \circ j = i_{G_3}$,

8. Sea $0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\phi} G_2 \xrightarrow{\psi} G_3 \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta. Si G_3 es un grupo abeliano libre, entonces la sucesión tiene splitting.

9. Suponga que $G_1 \xrightarrow{\alpha} G_2 \xrightarrow{\phi} G_3 \xrightarrow{\beta} G_4$ es exacta. Entonces son equivalentes:

   (a) α es un epimorfismo.
   (b) β es un isomorfismo.
   (c) ϕ es el homomorfismo nulo.

10. Suponga que $G_1 \xrightarrow{\alpha} G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow G_4 \xrightarrow{\beta} G_5$ es exacta. Entonces la sucesión $0 \to \mathrm{Coker}\alpha \to G_3 \to \mathrm{Ker}\beta \longrightarrow 0$ es también exacta.

Un complejo de cadena $\mathcal{C}$ es **acíclico** si $H_q(\mathcal{C}) = 0$ para todo q. En particular, un complejo de cadena aumentado $\{\mathcal{C}, \varepsilon\}$ es acíclico si $H_q(\{\mathcal{C}, \varepsilon\}) = \tilde{H}_q(\mathcal{C}) = 0$ para todo $q \geq 0$. O equivalentemente, si $H_0(\mathcal{C}) \cong \mathbb{Z}$ y $H_q(\mathcal{C}) = 0$ si $q > 0$.

1.5 Sucesión exacta corta de complejos de cadena.

Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ tres complejos de cadena, y sea

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{j} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

una sucesión de homomorfismos de complejos de cadena.

Se dice que ésta es una **sucesión exacta corta de complejos de cadena** si en cada nivel estos homomorfismos definen una sucesión exacta corta de grupos abelianos. Es decir, si para todo q la sucesión $0 \longrightarrow A_q \xrightarrow{i_q} B_q \xrightarrow{j_q} C_q \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta.

Sea $0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{j} \mathcal{C} \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta de complejos de cadena.

Ya definimos homomorfismos $i_* : H_q(\mathcal{A}) \to H_q(\mathcal{B})$ y $j_* : H_q(\mathcal{B}) \to H_q(\mathcal{C})$. Definamos ahora un homomorfismo $\partial_* : H_q(\mathcal{C}) \to H_{q-1}(\mathcal{A})$ como sigue:

Los elementos de $H_q(\mathcal{C})$ son de la forma $c_q + \partial C_{q+1}$, donde $\partial c_q = 0$. Como j_q es un epimorfismo, existe $b_q \in B_q$ tal que $c_q = j_q(b_q)$.

De ahora en adelante olvidaremos algunos subíndices. Como $j(\partial b_q) = \partial(jb_q) = \partial c_q = 0$, y por la exactitud de la sucesión en el nivel q, existe $a_{q-1} \in A_{q-1}$ tal que $ia_{q-1} = \partial b_q$.

$$\begin{array}{ccc} & b_q & \to & c_q \\ & \downarrow & & \\ a_{q-1} & \to & \partial b_q & \end{array}$$

Definimos entonces $\partial_*(c_q + \partial C_{q+1}) = a_{q-1} + \partial A_q$. Observamos que a_{q-1} es un ciclo pues $i\partial a_{q-1} = \partial i a_{q-1} = \partial\partial b_q = 0$, y com i es un monomorfismo, entonces $\partial a_{q-1} = 0$.

Se debe probar que ∂_* es un homomorfismo bien definido. Probaremos que ∂_* está bien definido y queda como ejercicio probar que es un homomorfismo.

Sean c_q y c'_q dos ciclos homólogos en C_q.

Supongamos que $\partial_*(c_q + \partial C_{q+1}) = a_{q-1} + \partial A_q$ y $\partial_*(c'_q + \partial C_{q+1}) = a'_{q-1} + \partial A_q$.

Se debe probar que a_{q-1} y a'_{q-1} son homólogos en A_{q-1}.

Sabemos que existen b_q y b'_q tales que $jb_q = c_q$ y $jb_q = c_q$.

Por lo tanto, $j(b_q - b'_q) = c_q - c'_q$.

Por otra parte, $c_q \sim c'_q \Rightarrow c_q - c'_q = \partial c_{q+1}$ para alguna $q+1$ cadena c_{q+1}.

Como jSugerencia:

$\partial'_2(1) = (0,0)$; $\partial'_2(1) = (1,0)$; $\partial'_2(1) = (2,0)$; $\partial'_2(1) = (1,1)$. es epimorfismo, existe cadena b_{q+1} tal que $jb_{q+1} = c_{q+1}$. Sugerencia:

$\partial'_2(1) = (0,0)$; $\partial'_2(1) = (1,0)$; $\partial'_2(1) = (2,0)$; $\partial'_2(1) = (1,1)$. Entonces ∂b_{q+1} es tal que $j\partial b_{q+1} = \partial j b_{q+1} = \partial c_{q+1} = c_q - c'_q$.

Por lo tanto $j(b_q - b'_q - \partial b_{q+1}) = 0$.

Es decir, $b_q - b'_q - \partial b_{q+1} \in \mathrm{Ker} j = \mathrm{Im} i$.

De modo que existe cadena a_q tal que $ia_q = b_q - b'_q - \partial b_{q+1}$.

Afirmamos que $\partial a_q = a_{q-1} - a'_{q-1}$, lo que prueba que a_{q-1} y a'_{q-1} son homólogos, como deseado.

Como i es monomorfismo, basta probar que $i(\partial a_q) = i(a_{q-1} - a'_{q-1})$, lo que resulta por cálculo directo.

1.6 Sucesión exacta larga de homologías.

El siguiente Teorema será importante en todo lo que sigue del curso.

Teorema 1.6. *Sea $0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{j} \mathcal{C} \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta de complejos de cadena. Entonces la sucesión*

$$\cdots \longrightarrow H_q(\mathcal{A}) \xrightarrow{i_*} H_q(\mathcal{B}) \xrightarrow{j_*} H_q(\mathcal{C}) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(\mathcal{A}) \longrightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta.

Esta sucesión se llama la **sucesión exacta larga** de la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{j} \mathcal{C} \longrightarrow 0$.

Demostración:

Escribimos la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{j} \mathcal{C} \longrightarrow 0$ como el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "\partial_{q+2}"] & {} \arrow[d, "\partial'_{q+2}"] & {} \arrow[d, "\partial''_{q+2}"] & \\
0 \arrow[r] & A_{q+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & B_{q+1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial'_{q+1}"] & C_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{q+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_q \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial_q"] & B_q \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial'_q"] & C_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{q-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & B_{q-1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial'_{q-1}"] & C_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{q-1}"] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

Queremos probar que la siguiente sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_q(\mathcal{A}) \xrightarrow{i_*} H_q(\mathcal{B}) \xrightarrow{j_*} H_q(\mathcal{C}) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{i_*} H_{q-1}(\mathcal{B}) \longrightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta.

Hay tres igualdades que probar:

1. $\mathrm{Im} i_* = \mathrm{Ker} j_*$.

   Como $ji = 0$ se tiene $(ji)_* = j_* i_* = 0_* = 0$. Esto prueba que $\mathrm{Im} i_* \subset \mathrm{Ker} j_*$.

   Ahora probemos $\mathrm{Ker} j_* \subset \mathrm{Im} i_*$. Sea $b_q + \partial B_{q+1} \in \mathrm{Ker} j_*$. Entonces, $\partial b_q = 0$ y $jb_q = \partial c_{q+1}$ para alguna cadena $c_{q+1} \in C_{q+1}$.

   Debemos encontrar $a_q \in A_q$ con $\partial a_q = 0$ tal que $ia_q \sim b_q$. Es decir $ia_q - b_q \in \partial B_{q+1}$.

   Sea $b_{q+1} \in B_{q+1}$ tal que $jb_{q+1} = c_{q+1}$. Entonces, $j(b_q - \partial b_{q+1}) = jb_q - j\partial b_{q+1} = jb_q - \partial j b_{q+1} = jb_q - \partial c_{q+1} = jb_q - jb_q = 0$. Es decir, $b_q - \partial b_{q+1} \in \mathrm{Ker} j = \mathrm{Im} i$. Por lo tanto, existe $a_q \in A_q$ tal que $ia_q = b_q - \partial b_{q+1}$. Esto prueba que $ia_q - b_q \in \partial B_{q+1}$ como queríamos. Falta ver que $\partial a_q = 0$. Para ello basta probar que $i\partial a_q = 0$. Pero, $i\partial a_q = \partial i a_q = \partial(b_q - \partial b_{q+1}) = 0$.

2. $\mathrm{Im} j_* = \mathrm{Ker} \partial_*$.

   Vemos que $\partial_* j_*(\{b_q\}) = \partial_*(\{jb_q\}) = \{a_{q-1}\}$ donde a_{q-1} es tal que $ia_{q-1} = \partial b_q$. Como $\partial b_q = 0$, necesariamente $\partial_* j_*(\{b_q\}) = 0$. Esto prueba que $\mathrm{Im} j_* \subset \mathrm{Ker} \partial_*$.

   Ahora probemos $\mathrm{Ker} \partial_* \subset \mathrm{Im} j_*$.

Sea $c_q + \partial C_{q+1} \in \mathrm{Ker}\partial_*$. Entonces, $\partial c_q = 0$ y $\partial_*(\{c_q\}) = \{a_{q-1}\}$ donde $a_{q-1} = \partial a_q$ para algún $a_q \in A_q$. Además $ia_{q-1} = \partial b_q$ donde b_q es tal que $jb_q = c_q$.

Debemos encontrar $\tilde{b}_q$ con $\partial\tilde{b}_q = 0$ tal que $j\tilde{b}_q \sim c_q$. Basta tomar $\tilde{b}_q = b_q - ia_q$.

3. $\mathrm{Im}\partial_* = \mathrm{Ker}i_*$.

   Puesto que $i_*\partial_*(\{c_q\}) = i_*(\{a_{q-1}\}) = \{ia_{q-1}\} = \{\partial b_q\}$, vemos que $i_*\partial_* = 0$. Esto prueba que $\mathrm{Im}\partial_* \subset \mathrm{Ker}i_*$.

   Ahora probemos $\mathrm{Ker}i_* \subset \mathrm{Im}\partial_*$.

   Sea $\{a_{q-1}\} \in \mathrm{Ker}i_*$. Entonces, $ia_{q-1} = \partial b_q$ para alguna cadena $b_q \in B_q$. Sea $c_q = jb_q$. Veamos que c_q es un ciclo. De hecho, $\partial c_q = \partial jb_q = j\partial b_q = jia_{q-1} = 0$. Vemos entonces que $\{a_{q-1}\} = \partial_*(\{c_q\}) \in \mathrm{Im}\partial_*$.

Esto termina la demostración del teorema.