Definamos

$$\ell : \underbrace{G\times \cdots \times G}_{i-1} \longrightarrow A$$

$x_i \in G$: $\ell(x_1,\dots,x_{i-1}) = \sum_{x_i\in G} f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i)$ $\quad$ i-1 cocadena

Ejercicio. $\quad (*) \Longleftrightarrow (-1)^i \delta^{i-1}(\ell) = n\cdot f$

$$n\cdot f = \delta^{i-1}((-1)^i \ell)$$

$\Rightarrow [nf] = 0$ en $H^i(G,A)$

$\quad\ \ \|$

$n.[f] = 0$

Prop. Si G es grupo finito de orden n $\Rightarrow$

$$n.H^i(G,A) = 0 \quad \forall i \geq 0$$

Todo grupo de cohomología (≥ 1)
de un grupo finito de orden n tiene torsión que divide a n

[3] Cohomología Galoisiana

E/F sea extensión galoisiana finita

$G_{E/F} = Gal(E/F)$, $|G_{E/F}| = [E:F]$

Ejemplo de $G_{E/F}$ - módulos

1) $G_{E/F} \times E \longrightarrow E$ $\quad$ E grupo aditivo

$\sigma, x \longmapsto \sigma(x)$

2) $G_{E/F} \times E^* \longrightarrow E^*$

$\sigma, x \longmapsto \sigma(x)$; E^* grupo fundamental $= E \setminus \{0\}$

$G_{E|F}$ - módulos

¿ $H^i(G_{E/F}, E) = 0$ $\quad \forall i \geq 1$

$H^i(G_{E/F}, E^*) = ?$

Th. $H^i(G_{E/F}, E) = \begin{cases} F, & i=0 \\ 0, & \forall i \geq 1 \end{cases}$

Th. $H^1(G_{E/F}, E^*) = \begin{cases} F^*, & i=0 \\ 0, & i=0 \end{cases}$ Th. 90 de Hilbert

Th. $H^2(G_{E/F}, E^*) \cong Br(E/F)$

$H^2(G_{E/F}, F_s^*) \cong Br(F)$

$\underbrace{F \subset F_s}_{gal} \subset \overline{F}$ $\longrightarrow$ absoluta

$G_F = Gal(F_s/F)$

Gringo.

$$D_1 = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \beta \frac{z_2}{z_1 - z_2}(1 - k_{12})$$

$$D_2 = z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - \beta \frac{1}{z_1 - z_2}(1 - k_{12}) z_1$$

Ejercicio: $[D_1, D_2] = 0$

$$z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} k_{12} = k_{12}\, z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}$$

Ayuda: Demostrar que

$$D_1 D_2 = D_2 D_1 = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \beta \frac{z_1 z_2}{(z_1 - z_2)^2}(1 - k_{12})$$

$$- \beta \frac{1}{z_1 - z_2}\left(z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2^2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)$$

$N=2$,

$$H = \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\right)^2 + \left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 + \beta \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)$$

Si $f(z_1, z_2) = f(z_2, z_1)$, entonces

$$Hf = [D_1^2 + D_2^2 + \beta(D_1 + D_2)] f$$

$$D_1^2 f = D_1 \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \beta \frac{z_2}{z_1 - z_2}(1 - k_{12})\right) f$$

$$= D_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} f$$

$$= \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \beta \frac{z_2}{z_1 - z_2}(1 - K_{12})\right) z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} f$$

$$= \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\right)^2 f + \beta \frac{z_2}{z_1 - z_2}\left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) f$$

$$D_2^2 f = D_2 \left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - \beta \frac{1}{z_1 - z_2}(z_1 - z_2)\right) f$$

$$= D_2 \left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - \beta\right) f$$

$$= \left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\beta}{z_1 - z_2}(1 - K_{12}) z_1\right)\left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - \beta\right) f$$

$$= \left[\left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 - \beta z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - \beta \frac{1}{z_1 - z_2}(z_1 - z_2 K_{12})\left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - \beta\right)\right] f$$

$$= \left[\left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 - \beta z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - \beta \frac{1}{z_1 - z_2}\left(z_1\left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - \beta\right) - \left(z_2 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - \beta z_2\right)\right)\right] f$$

$$= \left[\left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 - \beta z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - \beta \frac{1}{z_1 - z_2}\left(z_2 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) - \beta\right] f$$

$$\Rightarrow \left(D_1^2 + D_2^2\right) f = \left[\left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\right)^2 + \left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 + \beta \frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) - \beta z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - \beta z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \beta^2\right] f$$

$$= \left(H - \beta z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - \beta z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \beta^2\right) f$$

$$= \left[H - \beta(D_1 + D_2)\right] f$$

$$Hf = \left(D_1^2 + D_2^2 + \beta(D_1 + D_2)\right) f$$

Polinomios de Jack

$J_\lambda^{(\beta)}$

$\lambda \hookrightarrow$ partición $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{Z}^N$

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$

Ejemplo. $\lambda = (3,1,0) \longleftrightarrow$   

Base simple de $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_N]^{S_N}$

Base monomial

$m_\lambda = z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \cdots z_N^{\lambda_N}$ + permutaciones distintas de $z_1, \dots, z_N$

$(6,0,0,0,0,0)$

$$m_{310} = z_1^3 z_2^1 z_3^0 + z_1^3 z_3^1 z_2^0 + z_2^3 z_1^1 z_3^0 + z_2^3 z_3^1 z_1^0 + z_3^3 z_1^1 z_2^0 + z_3^3 z_2^1 z_1^0$$

$$= z_1^3 z_3 + z_1 z_3^3 + z_1^3 z_2 + z_1 z_2^3 + z_2^3 z_3 + z_2 z_3^3$$

$$m_{111} = z_1^1 z_2^1 z_3^1 + \cancel{z_2^1 z_1^1 z_3^1} = z_1 z_2 z_3$$

Orden de dominancia sobre las particiones

$\lambda \leq \mu$ ssi I) $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_N$

II) $\lambda_1 + \dots + \lambda_i \leq \mu_1 + \dots + \mu_i \quad \forall i$

Ejercicio. $(4,1,1)$ no es comparable con $(3,3,0)$

Ejercicio. Verificar que las particiones de 6 (diagrama de Hesse)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (6,0,0,0,0,0) \arrow[d, dash] & \\
 & (5,1,0,0,0,0) \arrow[d, dash] & \\
 & (4,2,0,0,0,0) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(4,1,1,0,0,0) \arrow[dr, dash] & & (3,3,0,0,0,0) \arrow[dl, dash] \\
 & (3,2,1,0,0,0) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(3,1,1,1,0,0) \arrow[dr, dash] & & (2,2,2,0,0,0) \arrow[dl, dash] \\
 & (2,2,1,1,1,0) \arrow[d, dash] & \\
 & (1,1,1,1,1,1) &
\end{tikzcd}
$$

Definición (1)

Los $J_\lambda^{(\beta)}$ son los únicos polinomios simétricos tales que

$$H_1 J_\lambda^{(\beta)} = E_{1,\lambda} J_\lambda^{(\beta)}$$
$$H_2 J_\lambda^{(\beta)} = E_{2,\lambda} J_\lambda^{(\beta)}$$
$$\vdots$$
$$H_N J_\lambda^{(\beta)} = E_{N,\lambda} J_\lambda^{(\beta)}$$

Definición (2)

El polinomio de Jack $J_\lambda^{(\beta)}$ es el ~~otro~~ único polinomio simétrico tal que

$$\text{I)}\quad J_\lambda^{(\beta)} = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} V_{\lambda\mu}(\beta)\, m_\mu$$

$$\text{II)}\quad H J_\lambda^{(\beta)} = \varepsilon_\lambda J_\lambda^{(\beta)}$$

$N=2$

$$H = \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\right)^2 + \left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 + \beta \frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)$$

Queremos $J_{11}^{(\beta)}$ y $J_{20}^{(\beta)}$

Por triangularidad (propiedad I) : $\begin{pmatrix} (2,0) \\ | \\ (1,1) \end{pmatrix}$

$m_{11} = z_1 z_2 + \cancel{z_2 z_1}$, $J_{11}^{(\beta)} = m_{11}$

no es distinto

$m_{11} = z_1 z_2$

$$H z_1 z_2 = z_1 z_2 + z_1 z_2 + \beta \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} (\cancel{z_1 z_2 - z_1 z_2})$$

$$= 2 z_1 z_2$$

$$\Rightarrow \quad H m_{11} = 2 m_{11}$$

Vamos a calcular a $J^{(\beta)}_{2,0}$

triangularidad $\Rightarrow$ $J^{(\beta)}_{(2,0)} = m_{20} + A\, m_{1,1}$ $\rightarrow$ por determinar

$$m_{20} = z_1^2 z_2^0 + z_2^2 z_1^0 = z_1^2 + z_2^2$$

$$H J^{(\beta)}_{20} = \varepsilon J^{(\beta)}_{2,0}$$

Vimos ayer que

$$H(\underbrace{z_1^2 + z_2^2}_{m_{20}}) = (4 + 2\beta)\, m_{20} + 4\beta\, m_{11}$$

$$H(m_{20} + A m_{11}) = H m_{20} + A H m_{11}$$

$$= (4 + 2\beta)\, m_{20} + 4\beta m_{11} + 2A m_{11}$$

$$= (4 + 2\beta)\, m_{20} + (4\beta + 2A)\, m_{11}$$

$$= \varepsilon (m_{20} + A m_{11})$$

$$\varepsilon = (4+2\beta)$$

$$\varepsilon A = (4\beta + 2A)$$

$$\Rightarrow (4+2\beta)A = 4\beta + 2A$$

$$4A + 2\beta A = 4\beta + 2A$$

$$2A + 2\beta A = 4\beta + 2A$$

$$\Rightarrow 2A + 2\beta A = 4\beta$$

$$\Rightarrow A(2+2\beta) = 4\beta$$

$$\Rightarrow A = \frac{2\beta}{1+\beta}$$

$$J_{20}^{(\beta)} = m_{20} + \frac{2\beta}{1+\beta} m_{11}$$

$$H J_{2,0}^{(\beta)} = (4+2\beta) J_{2,0}^{(\beta)}$$

Para $N=3$ y grado 3, se tiene que

$$J_{111}^{(\beta)} = m_{111}$$

$$J_{210}^{(\beta)} = m_{210} + \frac{6\beta}{1+2\beta} m_{111}$$

$$J_{300}^{(\beta)} = m_{300} + \frac{3\beta}{2+\beta} m_{210} + \frac{6\beta^2}{(2+\beta)(\beta+1)} m_{111}$$

$\beta = 1$

$$S_{111} = J^{(1)}_{111} = m_{111}$$

$$S_{210} = J^{(1)}_{210} = m_{210} + 2m_{111}$$

$$S_3 = J^{(1)}_{300} = m_{300} + m_{210} - m_{111}$$

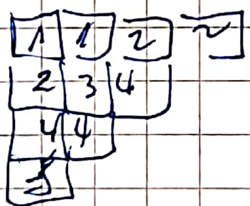
Teorema.

$$S_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} K_{\lambda\mu} \, m_\mu$$

$K_{\lambda\mu}$ → # de Kostka, con $K_{\lambda\mu} \in \mathbb{N}$

$K_{\lambda\mu}$ = # de tableaux de forma λ y contenido μ

Tableaux: Relleno del diagrama de λ con enteros



$m_{21} \longleftrightarrow$  contenido en $(2,1,0)$

$2m_{111} \longleftarrow$   contenido en $(1,1,1)$

$0\, m_3$  contenido en $(3,0,0)$

Ej : $S_{221} = m_{221} + 2m_{2111} + 5m_{11111}$

$S_{32} = m_{32} + m_{311} + 2m_{221} + 3m_{2111} + 5m_{11111}$

Scanned with CamScanner

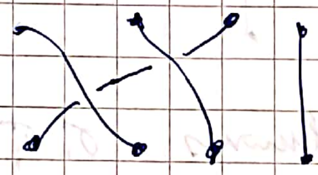
Grupos de Trenzas

Sea B_n el grupo de trenzas en n puntos

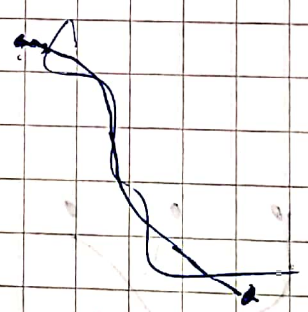
Por definición, B_n es grupo abstracto dado por la siguiente presentación

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, & |i-j|>1 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j, & |i-j|=1 \end{array} \right\rangle$$

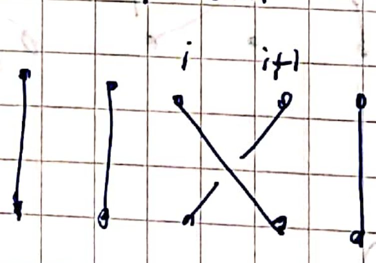
Hay una realización geométrica de B_n como trenzas



La multiplicación en B_n corresponde a la concatenación de trenzas

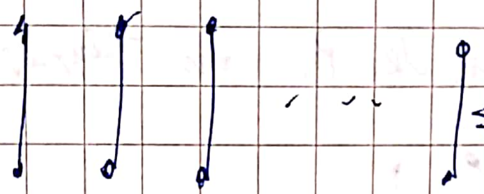


Los generadores σ_i tienen la siguiente interpretación

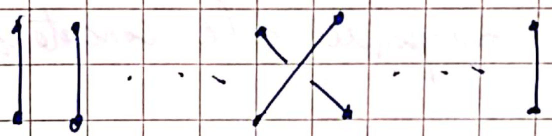


$$= \sigma_i \in B_5$$

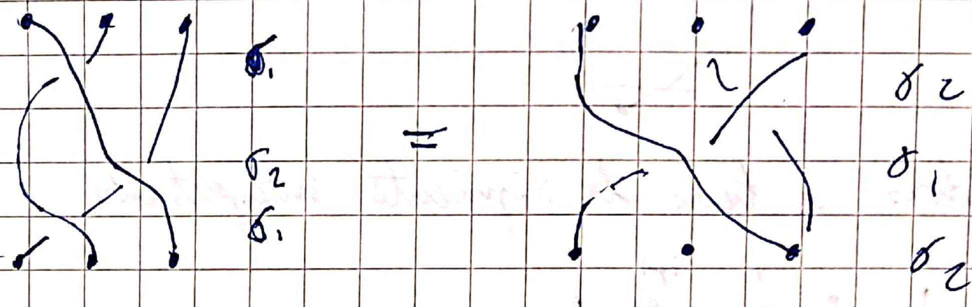
Elemento neutro

 $= 1 \in B_n$

Geométricamente se tienen las relaciones $\sigma_i \sigma_i^{-1} = 1$

 $= \sigma_i^{-1} \in B_n$

$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \in B_3$

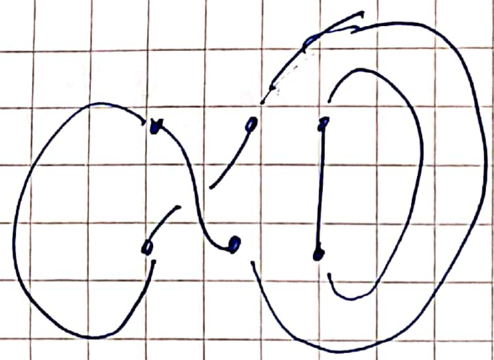


etc

Existe $\varphi : B_n \to S_n$

$\varphi(\sigma_i) = (i, i+1)$

Dado $b \in B_n$ se obtiene de forma natural un link orientado $\hat{b}$ al formar la clausura



Ec. Diferenciales

http://goo.gl/KFeJKa ← "apuntes del curso".

Baeza,

Cohomología Galoisiana

E/F Ext. Galoisiana finita, $[E:F]=n$

$$G_{E/F} := Gal(E/F) \times E \to E$$

$$G_{E/F} \times E^* \to E$$

$$\sigma . x = \sigma(x)$$

$$H^0(G_{E/F}, E) = E^{G_{E/F}} = F$$

$$H^0(G_{E/F}, E^*) = E^{*G_{E/F}} = F^*$$

Th. $H^i(G_{E/F}, E) = 0 \quad \forall i \geq 1$

Dem. $G_{E/F} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \Rightarrow \exists a \in E$ tal que

$\{\sigma_1(a), \dots, \sigma_n(a)\}$ es una F-base de E

(Th. de la base normal)

$$E = \bigoplus F . \sigma_i(a)$$

$$E = \bigoplus F . \sigma_i . a = \bigoplus \sigma_i(F.a) \quad ; \quad F.a = \{x.a / x \in F\} \leq E$$

subgrupo

$\Rightarrow$ ejercicio $E \cong \mathbb{Z}[G_{E/F}] \otimes_{\mathbb{Z}} F.a$ ism. de $G_{E/F}$-mod

$$\Rightarrow H^i(G_{E/F}, E) = H^i(G_{E/F}, \mathbb{Z}[G_{E/F}] \otimes_{\mathbb{Z}} F.a) = 0 \quad \forall i \geq 1$$

$H^i(G_{E/F}, E^*) = ?$ $\quad i \geq 1$

Teorema. $H^1(G_{E/F}, E^*) = \{1\}$ (Teo 90 de Hilbert)

Dem. $H^1(G_{E/F}, E^*) = \dfrac{Z^1(G_{E/F}, E^*)}{B^1(G_{E/F}, E^*)}$

$f \in Z^1(G_{E/F}, E^*)$

$$\begin{aligned} f : G_{E/F} &\longrightarrow E^* \\ g &\longmapsto a_g \end{aligned} \qquad f(g) = a_g \quad \forall g \in G$$

$$a_{st} = a_s \cdot s(a_t) \qquad \forall s,t \in G_{E/F}$$

Pd. $\{a_s\}_{s \in G_{E/F}}$ es un 1-coborde

Definamos $b := \sum_{s \in G_{E/F}} a_s \cdot s(c) \in E$, $c \in E$, c^* fijo

Af. Se puede elegir $c \in E^*$ tq $b \neq 0$

$$s(b) = s\left(\sum_{t \in G_{E/F}} a_t \cdot t(c)\right) = \sum_{t \in G_{E/F}} a_s^{-1} \cdot a_{st} \cdot st(c) = a_s^{-1} \sum_{t \in G_{E/F}} a_{st}\, st(c)$$

$$\therefore s(b) = a_s^{-1} b$$

$$a_s = s(b^{-1}) \cdot (b^{-1})^{-1} = s(d)\, d^{-1} \qquad d := b^{-1}$$

$\Rightarrow \{a_s\}$ es 1-coborde

$\forall \varepsilon !$ $\quad i = \{ * \exists \; ' \forall y \}. H$

Corolario. Sea E/F cíclica, $G_{E/F} = \langle \sigma \rangle$ y sea $N_{E/F} : E \to F$ norma, y sea $x \in E^*$

$$N_{E/F}(x) = 1 \iff \exists y \in E^* \text{ tq } x = \frac{y}{\sigma(y)}$$

Dem. $H^1(\langle \sigma \rangle, E^*) = \{1\}$

$$\frac{\overset{\shortparallel}{\ker}(N_{E/F})}{\{\sigma(y) y^{-1} / y \in E^*\}} = \frac{\{x \in E^* / N(x) = 1\}}{\{\sigma(y) \cdot y^{-1} / y \in E^*\}} = \{1\}$$

Generalización (ejercicio)

E/F Gal finita, $n \geq 1$.

$GL(n, E)$ es $G_{E/F}$ - modulo

$$\sigma . (a_{ij}) = (\sigma(a_{ij})) \qquad (\text{En particular, } GL(1, E) = E^*)$$

$$G_{E/F} \times GL(n, E) \longrightarrow GL(n, E)$$

Th. $H^1(G_{E/F}, GL(n, E)) = \{1\}$

$$b = \sum_{t \in G_{E/F}} a_t . t(c) \quad , \quad c \in GL(n, E)$$

F infinito: $\exists c \in GL(n, E)$ tq $b \in GL(n, E)$, ed $\det b \neq 0$

(Sug: elementos del Grupo de Galois son alg. independientes)

Scanned with CamScanner

Ejercicio

$$SL(n,E) = \{ C \in GL(n,E) \mid \det C = 1 \}$$

$\{1\} \longrightarrow SL(n,E) \longrightarrow GL(n,E) \xrightarrow{\det} E^* \longrightarrow \{1\}$ es exacta

Aplicando la sucesión larga de cohomología de $H^1(G_{E/F}, \dots)$ a esta sucesión

demostrar que : $\underbrace{}_{\text{Th. 90 de Hilbert}}$ $H^1(G_{E/F}, SL(n,E)) = \{1\}$

$$H^2(G_{E/F}, E^*) = ?$$

$$H^2(G_{E/F}, E^*) = \frac{Z^2(G_{E/F}, E^*)}{B^2(G_{E/F}, E^*)}$$

2-cociclo : $\left\{ \begin{array}{l} f : G_{E/F} \times G_{E/F} \longrightarrow E^* \\ \rho^2(f) = 0 \end{array} \right.$

$$f(s,t) := c_{s,t} \in E^*$$

$$f \longleftrightarrow \{ c_{\sigma,\tau} \mid \sigma,\tau \in G_{E/F} \}$$

2-cociclo significa

$$\boxed{c_{\sigma,\tau}^{\rho} \cdot c_{\sigma\tau,\rho} = c_{\sigma,\tau\rho} \cdot c_{\tau,\rho}} \to \text{(sistema de factores)} \qquad x^{\rho} := \rho(x)$$

2-coborde:

$$G_{E/F} \times G_{E/F} \to E^*$$
$$(\sigma,\tau) \mapsto b_{\sigma\tau}^{-1} b_{\sigma}^{\tau} b_{\tau}$$

$\{b_\sigma\}$ es un 1-coborde

$$f : G_{E/F} \to E^*$$
$$\sigma \mapsto b_\sigma$$

<u>F-algebras centrales simples de dim$<\infty$</u>

A es F-espacio vectorial de dimensión finita que hay un producto asociativo y distributivo

$$A \times A \xrightarrow{*} A$$
$$a,b \longmapsto a \cdot b$$

y tiene elemento unidad $1_A = 1$, $F.1 := F \subset A$

$$\alpha \cdot (a.b) = (\alpha \cdot a)\, b = a(\alpha b) \qquad \forall \alpha \in F$$

arreglar puntos

$$\dim_F A = n < \infty$$

$A = M(n, F)$ es álgebra $/_F$, $\dim_F M(n,F) = n^2$

Def. A es central si $Z(A) = F$
centro

Def. A es simple si A no tiene ideales biláteros no triviales

Ejercicio (ejemplo). $M(n,F)$ es un álgebra central y simple

$$Z(M(n,F)) = \{ a \cdot I_n / a \in F \} \cong F$$
identificación

ejemplo 2. $a, b \in F^*$, $2 \neq 0$ (char $F \neq 2$)

$$(a,b)_F = Q = F.1 \oplus Fi \oplus Fj \oplus Fk$$
$$i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad ij = -ji \qquad (k := ij)$$

Hamilton $F = \mathbb{R}$, $a = b = -1$

$$\mathcal{H} = (-1,-1)_{\mathbb{R}}$$ es un cuerpo no es conmutativo

$(a,b)_F$ se llaman cuaterniones generalizados

- $(a,b)_F$ es un álgebra central simple
- $(a,b)_F$ es un cuerpo no conmutativo ssi $x_0^2 - a x_1^2 - b x_2^2 + ab\, x_3^2 = 0$ no tiene soluciones no triviales en F → forma cuadrática

- Si no es un cuerpo $\Rightarrow (a,b)_F \cong M(2,F)$

Resultados

(1) A una F-álgebra. Son equivalentes

1) A c.s $/F$
2) $A \otimes_F \bar{F} \cong M(n, \bar{F})$
3) $\exists$ ext. finita, galoisiana tq $A \otimes_F E \cong M(m, E)$

Corolario. $\dim_F A = m^2$

Prop. A, B son c.s$/F$ $\Rightarrow$ $A \otimes_F B$ es también c.s$/F$

Corolario. A c.s, A^{op} = álgebra opuesta
(como F-esp vect. $A = A^{op}$
pero el producto $\forall a, b \in A^{op}$ $a \bullet b = ba$ en A)

Af1. A^{op} es c.s.
Af2. $A \otimes A^{op} = M(n, F)$

Dem. Se define

$$A \otimes A^{op} \longrightarrow \operatorname{End}_F(A)$$

esp vect.

$$a \otimes b \longmapsto \varphi(a\otimes b)(x) = axb$$

es un homo de F-álgebras

$$1 \longmapsto Id_A$$

$\ker(\varphi)$ es ideal bilateral $! \Rightarrow \ker \varphi = 0$

$\Rightarrow \varphi$ iso.

Def. Equivalencia de ~~Brauer~~ Brauer

A, B c.s $/F$

$$A \sim B \Leftrightarrow A \otimes M(r,F) \cong B \otimes M(s,F)$$

para $r,s \geq 1$ entero

ejercicio: Dem que $\sim$ es rel de equivalencia

Ejercicio: $M(n,F) \sim M(s,F) \sim F \quad \forall n,s \geq 1$

Ej. $A \otimes A^{op} \sim F$

Consideremos $\left\{ [A] \;/\; \begin{array}{l} \text{clases de equivalencia} \\ \text{de alg c.s.} /F \end{array} \right\}$

$$\mathbb{1} = [F] = [M(n,F)]$$

Def. $[A],[B]$: $[A]\cdot[B] := [A \otimes_F B]$

Ejercicio. El producto es asociativo

* es asociativo, ya que

$$(A\otimes B)\otimes C \cong A\otimes(B\otimes C)$$

* $\mathbb{1}[A] = [A]\cdot\mathbb{1} = [A]$
* $[A][B] = [B][A]$
* $[A][A^{op}] = \mathbb{1}$

$\Rightarrow Br(F)$ es un grupo

Def. $Br(F)$ se llama grupo de Brauer de F

Ejemplo. $Br(\mathbb{C}) = \{\mathbb{1}\}$ (alg. cerrado)

$Br(\mathbb{R}) = \{\mathbb{1}, [\mathcal{H}]\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$Br(\mathbb{F}_q) = \{\mathbb{1}\}$ (Wedderburn)

$Br(\mathbb{C}(t)) = \{\mathbb{1}\}$ (Tsen)

$Br(\mathbb{Q}) = \bigoplus_{p \text{ primo}} Br(\mathbb{Q}_p) \oplus \mathbb{Z}$

$$F \xhookrightarrow{i_{E/F}} E$$

$$\begin{array}{ccc} Br(F) & \xrightarrow{i^*_{E/F}} & Br(E) \\ \Psi & & \Psi \\ [A] & \longmapsto & [A\otimes E] \end{array}$$

$$Br(E/F) = \ker(i^*_{E/F}) = \{[A]\in Br(F) \mid A\otimes E \sim E\}$$

Teorema. $\exists$ isomorfismo natural, E/F Gal finita

$$Br(E/F) \cong H^2(G_{E/F}, E^*)$$

FIN!

UNIVERSIDAD DE TALCA
INSTITUTO DE MATEMATICA Y FISICA
Teoría de nudos

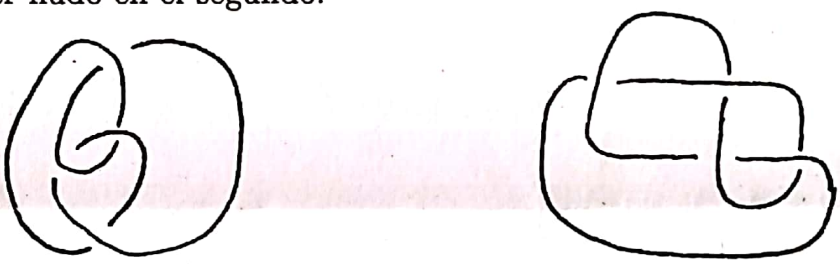
Guia 1

(1) Dibuje el trebol positivo, el trebol negativo y su suma.

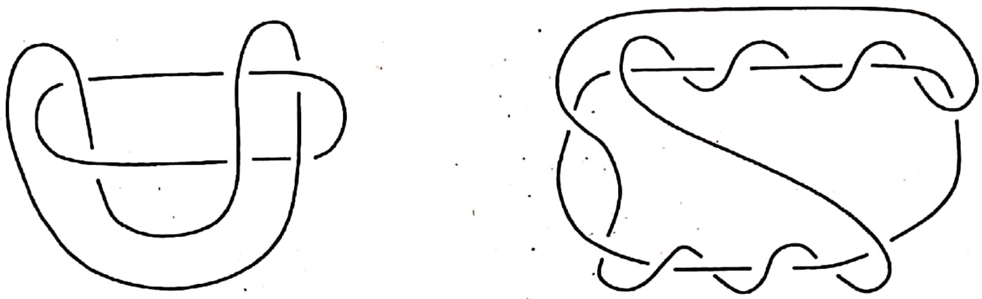
(2) Demuestre que el nudo N_8 (el nudo 'ocho') es equivalente a su imagen bajo reflexión.

(3) Usando un proyector de transparencias se muestra en la pantalla el diagrama de un nudo orientado. ¿Cuál es el nudo que aparece en la pantalla después de dar vuelta a la transparencia?

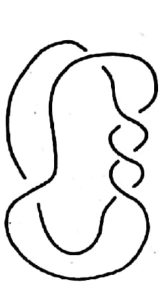
(4) Encuentre una serie de movimientos de Reidemeister que transformen el primer nudo en el segundo.



(5) Calcule el número link de los siguientes links. Demuestre que se puede descomponerlos cambiando solamente cruces de una sola componente a la vez.

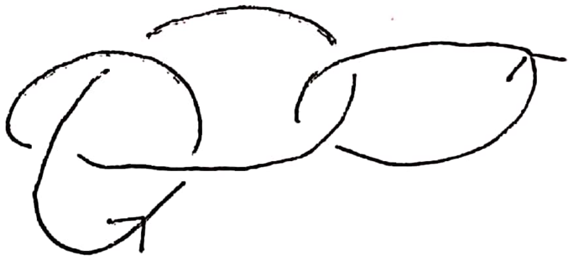


(6) Encuentre el invariante de tres coloraciones del siguiente nudo.



UNIVERSIDAD DE TALCA
INSTITUTO DE MATEMATICA Y FISICA
Teoría de nudos
Guia 2

(1) Calcule el polinomio de Jones $V_{\hat{L}}$ del siguiente link orientado.



(2) Muestre que el polinomio de Jones $V_{\hat{N}}$ de un nudo orientado no depende de la orientación.

(3) Demuestre que para el polynomio de Jones se tiene $V_N \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ si N es un nudo.

(4) Sea $N_1 + N_2$ la suma de los nudos N_1 y N_2 obtenido al cortar cada uno de ellos y pegar. Sea $N_1 \cup N_2$ la unión disjunta de ellos. Demuestre que para los polinomios de Jones se tienen las siguientes reglas

$$V_{N_1 \cup N_2} = -(t^{1/2} + t^{-1/2}) V_{N_1} V_{N_2}$$

$$V_{N_1 + N_2} = V_{N_1} V_{N_2}$$