Representaciones de Algebras

- K cuerpo, A una K-álgebra

$\varphi : A \to \mathbb{M}_n(K)$ ← representaciones de algebra

$\varphi : A \to End_K(V)$ ← morfismo de algebras

V ev- sobre K.

- **Algebra de matrices.** R anillo. ← de preferencia unitario

$$\mathbb{M}_n(R) = \{(a_{ij})_{i,j=1}^{n} \mid a_{ij} \in R\}. \qquad \mathbb{M}_3(R) = \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\right\}$$

$\mathbb{M}_n(R)$ anillo.

por comodidad conservar subíndices

$$(a_{ij})_{ij}(b_{jk})_{j,k} = (c_{ik})_{i,k}, \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$ ← no olvidar

$$(a_{ij})(b_{rs}) = (c_{uv})$$
$$c_{uv} = \sum_{j=1}^{n} a_{uj} b_{jv}$$

$$(a_{ij})_{ij} + (b_{ij})_{i,j} = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$$ ✓

$$1_{\mathbb{M}_n(R)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$ cuando R es unitario.

$I \subseteq R$ ideal bilátero $\overset{def}{\Longrightarrow}$ $IR \subseteq I$ ($\{\sum_{i=1}^{n} a_i r_i \mid a_i \in I, r_i \in R \ \forall i, n \in \mathbb{N}\}$), $RI \subseteq I$

(ideal bilátero) $\Rightarrow$ (podemos cocientar).

$\mathbb{M}_n(I) = \{(y_{ij})_{i,j} \mid y_{i,j} \in I\}$

$\mathbb{M}_n(I) \subseteq \mathbb{M}_n(R)$ ideal bilátero. ✓

demostrar como ejercicio.

Af. $\mathbb{M}_n(R)/\mathbb{M}_n(I) \cong \mathbb{M}_n(R/I)$.

dem. $\pi : R \to \bar{R}$ $(\bar{R} = R/I)$ proy. canónica

$a \mapsto \bar{a}$

procedimiento usual.

$$\varphi : \mathbb{M}_n(R) \to \mathbb{M}_n(\bar{R})$$
$$(a_{ij}) \mapsto (\overline{a_{ij}})$$

$\ker \varphi = \mathbb{M}_n(I)$. ✓

1° teo de isomorfía: $\mathbb{M}_n(R)/\mathbb{M}_n(I) \cong \mathbb{M}_n(\bar{R})$ ← imagen de φ.

C anillo ~~conmutativo~~ → no necesariamente conmutativo. $C[x]$ anillo de polinomios

$$\parallel$$

$$\left\{ \sum_{i=0}^{N} a_i x^i \;\middle|\; a_i \in C,\ N \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$\left(\sum_{i=0}^{N} a_i x^i \right)\left(\sum_{j=0}^{M} b_j x^j \right) = \sum_{\ell=0}^{L} c_\ell x^\ell \qquad c_\ell = \sum_{i+j=\ell} a_i b_j = \sum_{i=0}^{\ell} a_i b_{\ell-i}.$$

Prop. $\mathbb{M}_n(C[x]) \cong \mathbb{M}_n(C)[x]$

ej. $\begin{pmatrix} 3+5x & 5+2x \\ 1+x^2 & x+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x^2$

$I \leq C$ ideal bilátero

$I[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{N} y_i x^i \,/\, y_i \in I \right\}$ ideal bilátero de $C[x]$ ✓

Además $C[x]/I[x] \cong (C/I)[x]$ ✓

dem. Misma idea caso anterior $\varphi : C[x] \longrightarrow \bar{C}[x]$

$\bar{C} = C/I$

R_1, R_2 anillos

$R_1 \times R_2 = \left\{ (r_1, r_2) \,/\, \begin{matrix} r_1 \in R_1 \\ r_2 \in R_2 \end{matrix} \right\}$

$(r_1, r_2) + (r_1', r_2') = (r_1 + r_1', r_2 + r_2')$

$(r_1, r_2)(r_1', r_2') = (r_1 r_1', r_2 r_2')$

$I_i \leq R_i$ ideal bilátero, $R_1/I_1 \times R_2/I_2 \cong R_1 \times R_2 / I_1 \times I_2$ (ejercicio).

$\mathbb{M}_n(R_1 \times R_2) \cong \mathbb{M}_n(R_1) \times \mathbb{M}_n(R_2)$. homo natural.

$((a_{ij}), (b_{ij})) \to ((a_{ij}), (b_{ij}))$

¿Como uno sabe, dado un anillo abstracto, si es o no isomorfo a un producto?

$\underset{= p_1}{(1,0)}, \underset{= p_2}{(0,1)} \in R_1 \times R_2$. $\quad p_1 + p_2 = 1_R = (1,1)$ (i)

$p_1 p_2 = 0_R$ (ii)

$p_i r = r p_i$ (iii) $\quad (1,0)(r_1,r_2) = (r_1,0)$

$(r_1,r_2)(1,0) = (r_1,0)$

Si R tiene elementos p_1, p_2 que satisfacen (i), (ii), (iii), entonces

$$R \cong R_1 \times R_2 \quad \text{con} \quad R_1 \cong p_1 R \cong R/p_2R \qquad R_2 \cong p_2 R \cong R/p_1 R$$

$$1_{R_1} \longmapsto (1_{R_1}, 0_{R_2}) \longmapsto \overline{1}_R$$

$$R \cong R_1 \times R_2 \cong p_1 R \times p_2 R \cong R/p_2R \times R/p_1R$$

$$1_R \longmapsto (p_1, p_2) \longmapsto (\overline{1}_R, \overline{1}_R)$$

Basta encontrar p_1 idempotente central: $p_1^2 = p_1 \quad p_1 r = r p_1 \ \forall r \in R$

$p_2 := 1 - p_1 \quad \Big| \quad p_1 + p_2 = 1$

$p_1 p_2 = p_1(1-p_1) = p_1 - p_1^2 = 0$.

$$\therefore R \cong R/(1-p)R \times R/pR$$

$R = R_1 \times R_2 \Rightarrow M_n(R)$ tiene idempotentes $\tilde{p}_1 = p_1 1_{M_n(R)} = \begin{pmatrix} p_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_1 \end{pmatrix}$

$\tilde{p}_1 = p_1, \quad \tilde{p}_2 := 1 - \tilde{p}_1$ cumple (i), (ii), (iii)

Cumple (iii) por ser matriz escalar con coeficientes centrales.

$$M_n(R) \cong M_n(R)/\tilde{p}_2 M_n(R) \times M_n(R)/\tilde{p}_1 M_n(R) \checkmark$$

ok.

$$\cong M_n(R)/M_n(p_2R) \times M_n(R)/M_n(p_1R)$$

Idempotentes en $R \Rightarrow$ Se traspasan a matrices

$C \cong C_1 \times C_2$

$C_1[x] \times C_2[x] \cong C[x]$

$\underbrace{C_1[x] \times C_2[y]}$ $= C[z]$

$\cancel{}\ (2+3x, 5+4y) = (2,5) + (3,4)(x,y)$ $= z$

En $\mathbb{M}_n(R)$ existen los siguientes elementos :

$\sum_{i=1}^{n} E_{ii} = 1$ (i)

$E_{ij} E_{\ell m} = \delta_{j\ell} E_{im}$?? (ii)

$\delta_{\ell m} = \begin{cases} 1 & \ell = m \\ 0 & \ell \neq m \end{cases}$

$rE_{ij} = E_{ij} r \ \forall r \in R$ (iii)

$E_{ij} \in \mathbb{M}_n(R)$, $E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} \\ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} & i \\ j & \end{array}$

· $R \hookrightarrow M_n(R)$ ¿Necesario que R tenga 1?

matrices escalares

$(a_{ij})_{i,j} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$ (único)

(iv) $\mathbb{M}_n(R) = \sum_{i,j=1}^{n} R E_{ij}$ R-módulo f.g

$\mathbb{M}_n(R)$ tiene subanillo R y elementos que cumplen (i), (ii), (iii), (iv)

importante ~(prop iii y iv).

Prop. Si $\tilde{R}$ es un anillo con un subanillo R y elementos E_{ij} que cumplen (i)-(iv), entonces $\tilde{R} \cong M_n(R)$

escribir demo

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}\right)\left(\sum_{\ell,m=1} b_{\ell m} E_{\ell m}\right) = \sum_{i,j,\ell,m} a_{ij} b_{\ell m} E_{ij} E_{\ell m}$$

$$= \sum_{i,j,\ell,m} a_{ij} b_{\ell m} \delta_{j\ell} E_{im}$$

$$= \sum_{i,j,m} a_{ij} b_{jm} E_{im} = \sum_{i,m} \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jm}}_{c_{im}}\Big) E_{im}$$

Isomorfismo φ

$\tilde{R} \ni \tilde{E}_{ij} \xrightarrow{\ \varphi\ } E_{ij} \in \mathbb{M}_n(R)$

$\varphi : 1_{\tilde{R}} \longmapsto 1_{\mathbb{M}_n(R)}$

Scanned with CamScanner

Teorema de las unidades matriciales

Si $\tilde{R}$ contiene elementos E_{ij} que satisfacen (i) y (ii), existe un subanillo R que cumple (iii) y (iv). En particular, $\tilde{R} = \mathbb{M}_n(R)$

$A = (a_{ij})_{i,j}$

$$E_{ur} A E_{lm} = E_{ur}\left(\sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}\right) E_{lm} = a_{rl} E_{um}$$ aplicar propiedades anteriores, fácil

Si $u=m$, multiplican bien

$$R \cong E_{ur} \tilde{R} E_{lu}$$

En general,

def. $R_{u,r,l} = E_{ur} \tilde{R} E_{lu}$

Af. ¿$R_{u,r,l} \cong R_{u',r',l'}$ de manera canónica?

Af. ¿$R = R_{u,r,l}$ sirve.?

$E_{vu} R_{u,r,l} E_{uv} = R_{v,r,l}$ es isomorfismo

$(E_{ur} a E_{lu})(E_{ur} b E_{lu}) = E_{ur}(a E_{lr} b) E_{lu}$ ✓ demostrado!

Supongamos que $r = l = 1$ $\quad (E_{u1} a E_{1u})(E_{u1} b E_{1u}) = E_{u1}(a E_{11} b) E_{1u}$

$= abE_{u1} E_{11} E_{1u}$

$= ab E_{u1} E_{1u} = E_{u1}\, ab\, E_{1u}$

$a \in \tilde{R}$ $\quad \hat{a} := \sum_{u=1}^{n} E_{u1} a E_{1u}$

$R := \{\hat{a} \mid a \in \tilde{R}\}$ $\quad \therefore (E_{u1} a E_{1u})(E_{u1} b E_{1u}) = E_{u1}\, ab\, E_{1u}$ ✓

Af. R anillo. ✓

$$\widehat{a+b} = \hat{a} + \hat{b} \qquad k \text{ subgrupo}$$

$$\hat{a}\hat{b} = \widehat{a E_{11} b}$$

$$\left(\sum_{u=1}^{n} E_{u1} a E_{1u}\right)\left(\sum_{v=1}^{n} E_{v1} b E_{1v}\right) = \sum_{u,v=1}^{n} (E_{u1} a \underbrace{E_{1u})(E_{v1}}_{\delta_{uv} E_{11}} b E_{1v})$$

$$= \sum_{u=1}^{n} E_{u1} a E_{11} b E_{1u}$$

$$= \sum_{u=1}^{n} E_{u1} ab E_{1u}.$$

$$E_{ij}\hat{a} = \sum_{u=1}^{n} E_{ij} E_{u1} a E_{1u} = E_{i1} a E_{1j}$$

$$\hat{a} E_{ij} = \sum_{u=1}^{n} E_{u1} a E_{1u} E_{1j} = E_{i1} a E_{1j} \quad \text{ok.}$$

$$E_{ij}\hat{a} = E_{ij}\left(\sum_{u=1}^{n} E_{u1} a E_{1u}\right) = \sum_{u=1}^{n} (E_{ij} E_{u1}) a E_{1u}.$$

$$= \sum_{u=1}^{n} \delta_{ju} E_{i1} a E_{1u} = E_{i1} a E_{ij}$$

Falta unicidad de la suma!

R anillo con propiedades (i) y (ii)

$R_{ij} = E_{ii} R E_{jj}$; $\sum_i E_{ii} = 1$, $E_{ij} E_{\ell k} = \delta_{j\ell} E_{ik}$ ✓

$a = 1 a 1$ R anillo unitario

$a = \sum_{i,j} E_{ii} a E_{jj}$ ✓ , $R_{ij} = \{ a \in R \mid E_{ii} a E_{jj} = a \} \overset{?}{=} E_{ii} R E_{jj}$

$$i \begin{pmatrix} \cdots & r & \cdots \end{pmatrix}$$
j

$a \in R_{ij} \cap R_{\ell m}$, $a = E_{ii} a E_{jj} = E_{ii} E_{\ell\ell} a E_{mm} E_{jj} = 0$ salvo si $i = \ell$, $m = j$. ✓

$R = \bigoplus_{i,j} R_{ij}$. R_{ii} anillo

$(E_{ii} a E_{ii})(E_{ii} b E_{ii}) = E_{ii}(a E_{ii} b) E_{ii}$, con unidad E_{ii}

$= E_{ii}(a E_{ii} E_{ii} b) E_{ii} =$ $\quad E_{ii} a E_{ii} \quad E_{ii} b E_{ii}$

$R_{ii} \xrightarrow{\varphi} R_{jj}$

$a \longmapsto E_{ji} a E_{ij}$ $\quad ab \longmapsto (E_{ji} a E_{ij})(E_{ji} b E_{ij}) = E_{ji} a E_{ii} b E_{ij}$

φ homomorfismo. $= E_{ji}\, ab\, E_{ij}$ se cancela.

$a \in R_{11}$ $\quad E_{11} a E_{11} = a$

$e(a) = \sum_i \underbrace{E_{i1} a E_{1i}}_{\in R_{ii}}$, e homomorfismo . $e(R_{11}) \subseteq R$

$E_{ii}(E_{i1} a E_{1i}) E_{ii} = (E_{ii} E_{i1}) a (E_{1i} E_{ii})$ ✓

$= E_{i1} a E_{1i}$

Pd: $e(ab) = e(a) e(b)$

$e(ab) = \sum_i E_{i1}\, ab\, E_{1i}$

$e(a)e(b) = \left(\sum_i E_{i1} a E_{1i} \right) \left(\sum_j E_{j1} b E_{1j} \right) = \sum_{i,j} E_{i1} a E_{1i} E_{j1} E_{1j}$

$= \sum_i E_{i1} a \cancel{E_{11}} b E_{1i} = e(ab)$ ✓

$e(E_{11}) = 1_R$ (ejercicio). | $e(E_{11}) = \sum_i E_{i1} E_{11} E_{1i} = \sum_i E_{i1} E_{1i} = \sum_i E_{ii} = 1$

Pd: e inyectiva . $e(a) = 0 \Rightarrow 0 = E_{11} a E_{11} = a \Rightarrow a = 0$. ✓

$\underline{\text{Af}}$. $R \cong \mathbb{M}_n(e(R_{11}))$

$$e(a)E_{ij} = \sum_l E_{l1}\, a\, E_{il}\, E_{ij} = E_{i1}\, a\, E_{1j}$$

$$E_{ij}\, e(a) = E_{ij} \sum_l E_{l1}\, a\, E_{1l} = E_{i1}\, a\, E_{1j}$$ ✓

$\underline{\text{Af}}$. $R_{ij} = e(R_{11}) E_{ij}$ Recordatorio: $R = \bigoplus_{i,j} R_{ij}$

$$E_{ii}(e(a) E_{ij}) E_{jj} = e(a) E_{ii} E_{ij} E_{jj} = e(a) E_{ij} \quad \therefore \quad R_{ij} \supseteq e(R_{11}) E_{ij}$$ ✓

$E_{ii}\, x\, E_{jj} = x$

$x \in R_{ij}$, $a = E_{1i}\, x\, E_{j1}$, $a \in R_{11}$ $\quad a = E_{11}\, a\, E_{11}$ $\quad \left(R_{ij} \subseteq e(R_{11}) E_{ij} \right.$

$$e(a) E_{ij} = \sum_l E_{l1}\, a\, E_{1l}\, E_{ij} = E_{i1}\, a\, E_{1j} = E_{i1} E_{1i}\, x\, E_{j1} E_{1j}$$

$$= E_{ii}\, x\, E_{jj} = x$$ ✓

$\underline{\text{Af}}$. $e(a) \longmapsto e(a) E_{ij}$ es biyección.

$e(a) E_{ij} = 0$

$$\sum_l E_{l1}\, a\, E_{1l}\, E_{ij} = 0 \Rightarrow E_{i1}\, a\, E_{1j} = 0$$

$$\Rightarrow E_{1i}(E_{i1}\, a\, E_{1j}) E_{j1} = 0$$

$$\Rightarrow E_{11}\, a\, E_{11} = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

$$R = \bigoplus_{i,j} R_{ij} \Rightarrow R = \bigoplus_{i,j} e(R_{11}) E_{i,j} \Rightarrow R \cong \mathbb{M}_n(e(R_{11}))$$ ✓

Falta demostrar que la suma es directa,

$a \in R$, $\quad a = \sum_{i,j} \underbrace{E_{ii}\, a\, E_{jj}}_{\in R_{ij}}$ $\quad \left(\begin{array}{l} a = 1\, a\, 1 \\ 1 = \sum_i E_{ii} \end{array} \right)$

$$\sum_{i,j} \underbrace{a_{ij}}_{\in R_{ij}} = 0 \qquad E_{ll}\left(\sum_{i,j} a_{ij}\right) E_{mm} = 0 \qquad a_{lm} = 0$$

$a \in R_{ij}$
$E_{uu} \, a \, E_{vv} = 0$
$u \neq j$
$v \neq j$

$i \neq l$, $E_{ll} a_{ij} E_{mm} = \cancel{E_{ll}} E_{ii} \, a \, E_{jj} E_{mm}$

En resumen:
R que cumple (i) y (ii)
def: $R_{ij} = \{a \in R / E_{ii} a E_{jj} = 0\}$
$a: R_{11} \to R$, $e(a) = \sum E_{i1} a E_{1i}$
$e(R_{11}) \subseteq R$ subanillo que cumple (iii) y iv
e homomorfismo

Ejemplo. $J \subseteq R$ ideal bilátero $\quad J \subsetneq R$

matrices escalares.

$R \cong \mathbb{M}_n(A)$, $A = e(R_{11})$

$\overline{R} = R/J \qquad \overline{E_{ij}} \in \overline{R}$ cumplen mismas propiedades mod I

se entiende todo

$\overline{R} \cong \mathbb{M}_n(\overline{A})$, $\overline{A} = \bar{e}(\overline{R}_{11})$ mod I

imagen de las matrices escalares.

$\overline{R}_{11} = \overline{E}_{11} \overline{R} \, \overline{E}_{11} = \overline{E_{11} R E_{11}} = \overline{A E_{11}} = \overline{A} \, \overline{E}_{11}$ $\quad e(a)E_{11} = E_{11} a E_{11}$

$e(a) = \sum E_{j1} a E_{1j}$

$\overline{A} \cong A/I$, $I = J \cap A$ ok $\quad R_{11} = A E_{11}$

revisar con detenimiento y cuidado.

$J = \ker(\underset{\overset{\wr\wr}{R}}{\mathbb{M}_n(A)} \to \underset{\overset{\wr\wr}{\overline{R}}}{\mathbb{M}_n(\overline{A})})$,

$\boxed{J = \mathbb{M}_n(I)}$ Estudiar bien los detalles

$R \to \mathbb{M}_n(A)$
$\downarrow$
R/I

Ejemplo. D álgebra de división, $\mathbb{M}_n(D)$ simple (no tiene ideales biláteros).
(aplicar lo anterior)

R, R^n (R anillo)

$\overline{R}_{11} = R_{11}/J$

$\varphi : R^n \to R^n$
$\varphi(rv) = r\varphi(v)$

Sea R^n como R-módulo derecho,

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} r = \begin{pmatrix} r_1 r \\ \vdots \\ r_n r \end{pmatrix}$$

$\mathbb{M}_n(R)$ actúa en R^n por multiplicación a la izquierda y todo homomorfismo R-lineal está dado por una matriz

$$\mathbb{M}_n(R) \cong \mathrm{End}_R(R^n)$$

$$(Mv)r = M(vr)$$

Ideales izquierdos

$$I \subseteq R' = M_n(R)$$

subgrupo abeliano y $r\,\underline{I} \subseteq \underline{I}$ para cada $r \in R'$. $R'M \subseteq R'$ ideal izquierdo. $M \in R$.

$R' E_{ij}$

$n=2$ $\qquad E_{12}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad R' E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & R \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus R\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & R \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}$$

$$R'\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} \middle/ a, c \in R \right\} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus R\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{R' E_{ij}}_{\text{ideal izq.}} \cong \underbrace{R^n}_{R' \text{ mod izq.}} \quad (\text{como módulos})$$

$$R^n = \begin{pmatrix} R \\ \vdots \\ R \end{pmatrix}$$

R^n es R' módulo izquierdo

$v \in R^n$. Sup que R anillo de división $\quad v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad a_i \in R, \; a_i \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

R anillo simple = R sin ideales bil. no triviales

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & & \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

M modulo irreducible = M no tiene submód no triviales

$\vdots$

etc. ..

Importante: R anillo de división $\Rightarrow R^n$ es $M_n(R)$-modulo izq. irreducible

ó, $R'v = R^n$

(*) R^n no tiene submódulos no triviales. Es un módulo irreducible.

R' anillo cualquiera. M módulo irreducible, $v \in M$, $v \neq 0$

$R'v = M$ = M módulo irred $\Leftrightarrow$ $M = \langle v \rangle$

Si M no es irreducible, $v \in N \subsetneq M$. $R'v \subseteq N$

$R'v \neq M$

Ejemplo. Sobre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (cuerpo), $\mathbb{Z}$-módulo irreducible $v \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $v \neq 0$ $\Rightarrow \exists w \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tq $vw = 1$

sobre $M_2(\mathbb{Z})$, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$, $M_2(\mathbb{Z})$-módulo irreducible.

Ejemplo. $T \in M_n(K)$ – ¿cualquiera?

K^n es $K[x]$-módulo, $f(x).v = f(T)(v)$

$$K[x]_o v = K^n \quad (*)$$

$\varphi : K[x] \longrightarrow K^n$

$p(x) \longmapsto p(T)$

epiyectiva

para cada w $\exists f \in K[x]$ con $f(T)(v) = w$

Si (*) se cumple, $K^n \cong K[x]/(m(x))$ polinomio = ker φ polinomio minimal de T

?? Escuchar registro de voz de Sudito.

Si $m(x) = m_1(x) m_2(x)$, $(m_1, m_2) = 1$

$$K^n \cong \frac{K[x]}{(m_1)} \times \frac{K[x]}{(m_2)} \qquad K^n = V_1 \oplus V_2$$

subespacios invariantes.

M un R' módulo simple, $v \in M$. $M = R'v$

$\varphi: R' \to M$ homomorfismo de módulos epiyectivo
$\varphi(r) = r.v$

$M \cong R'/_{\ker\varphi}$, $\ker\varphi$ ideal izquierdo.

Prop. Todo R' módulo simple M es isomorfo a un módulo del tipo $R'/_I$, donde I es un ideal izquierdo maximal de R'. ∎

Sup. $J \supsetneq I \Rightarrow J/_I \trianglelefteq R'/_I \cong M$

$J/_I$ es submodulo de M (R' submodulo)

$\Rightarrow J/_I = M = R'/_I \Rightarrow \underline{J = R}$

G grupo abeliano $\Leftrightarrow G$ $\mathbb{Z}$-módulo izq

Prop. Sea R un anillo, M un R módulo irreducible, entonces M^n es un $M_n(R)$-módulo irreducible.

dem. $v \in M$, $v \neq 0$ $\Rightarrow Rv = M$.. $M^n = \left\{ \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \middle| m_i \in M \right\}$

$(r_{ij})_{ij}(m_j)_j = \left(\sum_j r_{ij} m_j \right)_i$ ej chico: $\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} m_1 + r_{12} m_2 \\ r_{21} m_1 + r_{22} m_2 \end{pmatrix}$

Consideremos $w \in M^n$, $w \neq 0$, $w = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $\underset{M}{v_i} \neq 0$ | $w = \underbrace{\sum_i v_i \otimes e_i}$

¿ M tiene 1 ? no necesariamente

$w = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v$

la misma idea

Aquí multiplicar tensores tiene sentido

como $\mathbb{Z}$-módulo, ~~dejamos~~ no definido en M^n como R-módulo

$M^n \cong M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n$. Con lo anterior, $M_n(R) \cong R \otimes_{\mathbb{Z}} M_n(\mathbb{Z})$. Además

$E_{ij} e_l = \delta_{jl} e_i$.

$M \times \mathbb{Z}^n \to M^n$

$\varphi : (m, 1) \mapsto \begin{pmatrix} 1m \\ \vdots \\ 1m \end{pmatrix}$

$(m, (a_i)) \mapsto \begin{pmatrix} a_1 m \\ \vdots \\ a_n m \end{pmatrix}$ $\mathbb{Z}$-bilineal

$\Rightarrow \tilde{\varphi} : M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \to M^n$

$\tilde{\varphi}^{-1}$: $\begin{pmatrix} v \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto v \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n v_i \otimes e_i$

Obs. $\mathrm{End}_K(V) \cong V \otimes_K V^*$, $(v \otimes s)(w) = s(w) v$ $E_{ij} = e_i \otimes e_j^*$

Ocupamos productos tensoriales para terminar el calculo:

$(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd$

$$E_{ii} w = (1 \otimes E_{ii}) \left(\sum_j v_j \otimes e_j \right) = \sum_j v_j \otimes (E_{ii} e_j) = \sum \delta_{ij} v_j \otimes e_i$$

sobrevive $j = i$

$= v_i \otimes e_i \in R' w$

$\Rightarrow R' w \supseteq (R \otimes 1)(v_i \otimes e_i)$

$= R v_i \otimes e_i = M \otimes e_i$

$R' = M_n(R) \supseteq R 1_{R'}$

$= R \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z} 1_{M_n(\mathbb{Z})})$ queda claro

$\cong R \otimes 1$

le sacamos los escalares a $\begin{pmatrix} z & & \\ & \ddots & \\ & & z \end{pmatrix}$ $z \in \mathbb{Z}$ y se los pasamos a R

$\therefore$ $R' w \supseteq M \otimes e_i$

$R' w \supseteq E_{ji} (M \otimes e_i)$

$= (1 \otimes E_{ji})(M \otimes e_i)$

$= M \otimes e_j$

$R' w \supseteq M \otimes e_j \; \forall j$

$$R' w = \bigoplus_{j=1}^n M \otimes e_j = M \otimes \mathbb{Z}^n = M^n.$$

Recordatorio: M irreducible $\Rightarrow M \cong R/I$

$$\begin{aligned} R &\longrightarrow M \quad , \; v \neq 0 \\ r &\longmapsto rv \end{aligned}$$

Ejercicio: Para $w = v \otimes e_1 = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $R'/I' \cong M^n$. Encontrar I'.

K cuerpo, D álgebra de división sobre K de dimensión finita,

$$K \cong K 1_D \subseteq D$$ D asociativa?

Para $\lambda \in K$: $\lambda(ab) = a(\lambda b) = (\lambda a)b$

$\Rightarrow K \subseteq Z(D)$ (tomar $b = 1_D$)

$Z(R) = \{c \in R \,/\, cr = rc \;\; \forall r \in R\}$ $\quad Z(D) \leq D$ subespacio submódulo

D se dice central si $Z(D) = K$

$Z(D) \subseteq D$ es un dominio de integridad $\quad cr = rc \Rightarrow crc^{-1} = rcc^{-1}$

$rc^{-1} = c^{-1}r \therefore c^{-1} \in Z(D)$

$Z(D)$ es cuerpo.

De hecho todo DI de dimensión finita sobre un cuerpo es un cuerpo.

$a \in E$ dominio de integridad, $\dim_K E < \infty$.

$a \neq 0$

$1, a, a^2, \ldots \in E$

$\exists n \in \mathbb{N}: \; \alpha_n a^n + \alpha_{n-1} a^{n-1} + \cdots + \alpha_1 a + \alpha_0 = 0$

Si $\alpha_0 = 0$

$(\alpha_n a^{n-1} + \cdots + \alpha_1)a = 0$

$\Rightarrow \alpha_n a^{n-1} + \cdots + \alpha_1 = 0$ porque E DI

Podemos suponer que $\alpha_0 \neq 0$.

$$-\frac{1}{\alpha_0}(\alpha_n a^{n-1} + \cdots + \alpha_1)a = 1$$

$\therefore a \in E^*$

$Z(D)/_K$ extensión finita. D es $Z(D)$-álgebra.

Obs. Podemos generalizar el caso anterior para dominios artinianos.

Def. V es un espacio vectorial derecho sobre D es un grupo abeliano con una multiplicación $V \times D \to V$, $(v,d) \mapsto vd$ tal que:

$(v+w)d = vd + wd$

$v(d+c) = vd + vc$

$v(dc) = (vd)c$ $\qquad\qquad$ D^n es un $(M_n(D)-D)$-bimódulo.

$v(1) = v$

Ej: D^n es un e.v.d sobre D y simultáneamente un $M_n(D)$-módulo

$$D^n \doteq \left\{ \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \Big/ d_i \in D \right\} \cong D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n$$

$A \in M_n(D)$, $d \in D$, $v \in D^n$

$$(Av)d = A(vd)$$

ej: $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} h \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} fh \\ gh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} afh + bgh \\ cfh + dgh \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} af+bg \\ cf+dg \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} afh + bgh \\ cfh + dgh \end{pmatrix}$

Las matrices en $M_n(D)$ representan funciones D-lineales.

Dada $f: D^n \longrightarrow D^n$ D-lineal $\qquad$ D unitario $(1_D \in D)$

$$f(e_i) = \begin{pmatrix} d_{i1} \\ \vdots \\ d_{in} \end{pmatrix} \quad ✓$$

$$[f] = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{1n} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Además f es invertible ssi cada elemento de D^n se escribe de manera única como $v = \sum_i \beta_i w_i$, $w_i = \begin{pmatrix} d_{i1} \\ \vdots \\ d_{in} \end{pmatrix} = f(e_i)$

Mando Base en base

V e.v.d sobre D de dimensión finita sobre K

$v_1 \in V$ no nulo

$v_1 D \subseteq V$ subespacio

$\varphi_1 : D \to v_1 D$ isomorfismo (ejercicio).

$d \mapsto v_1 d$

Como espacios vectoriales derechos

$v_2 \notin v_1 D$

$\varphi_2 : D^2 \longrightarrow v_1 D + v_2 D$ epimorfismo

$(a,b) \mapsto v_1 a + v_2 b$

$v_1 a + v_2 b = 0$

$b = 0 \Rightarrow a = 0$

$b \neq 0 \Rightarrow -v_1 a b^{-1} = v_2$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$. $\therefore \varphi_2$ isomorfismo.

$v_3 \notin v_1 D + v_2 D = \langle v_1, v_2 \rangle$

$\varphi_3 : D^3 \longrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle + v_3 D$

$(a,b,c) \mapsto v_1 a + v_2 b + v_3 c$ epimorfismo.

$v_1 a + v_2 b + v_3 c = 0$

$c = 0 \Rightarrow a = b = 0$

$c \neq 0 \Rightarrow -v_1 a c^{-1} - v_2 b c^{-1} = v_3$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

$\therefore \varphi_3$ isomorfismo.

Quedan algunas dudas ¿cuáles?

Recordatorio: D es una K-álgebra de división

$0 \subseteq \langle v_1 \rangle \subseteq \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \cdots$

El proceso debe terminar pues la dimensión es finita (sobre K)

$\therefore V \cong D^n$ algún n

$\dim_K V = n \dim_K D$. $\boxed{D = K^m}$

V e.v.d sobre D. $W \subseteq V$ subespacio. Una base de W se completa a una base de V.

$$V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$$
$$W = \langle e_1, \dots, e_m \rangle \quad , \ m \leq n.$$

Sea $T \in M_n(D)$ tq $TW \subseteq W$ ← W es T-invariante

$$T(e_i) \in \langle e_1, \dots, e_m \rangle \quad \forall i \leq m$$

$$T = \begin{array}{c} m \\ n-m \end{array} \begin{pmatrix} T_1 & S \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} T_1 \in M_m(D) \quad m \times m \\ T_2 \in M_{n-m}(D) \quad (n-m)\times(n-m) \end{array}$$

→ T_1 representación matricial de $T|_W : W \to W$

¿unitario?

Def. Sea $\mathfrak{A}$ una K-álgebra. Una D-representación de $\mathfrak{A}$ de dimensión n es un homomorfismo de álgebras

$$\varphi : \mathfrak{A} \longrightarrow M_n(D)$$

o K-representación (no importa el prefijo).

La representación le da a D^n una estructura de $\mathfrak{A}$-módulo (¿izquierdo?)

$$a.v = \varphi(a)(v) \qquad (a+a').v = \varphi(a+a')(v) = \varphi(a)(v) + \varphi(a')(v) \quad \boxed{\text{ok}}$$

Esta definición convierte a D^n en un $(\mathfrak{A}-D)$-bimódulo:

$$(a.v)d = a.(vd) \leftarrow D^n \ D\text{-e.v.d}$$

Si $W \subseteq V$ ($\cong D^n$) es un subespacio y un $\mathfrak{A}$-submódulo, entonces si $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ y $W = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$, se tiene:

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} \varphi_1(a) & S(a) \\ 0 & \varphi_2(a) \end{pmatrix} \quad \text{para cada } a \in \mathfrak{A}$$

D^m es $\mathfrak{A}$-módulo izquierdo

y $\varphi_1 : \mathfrak{A} \to M_m(D)$
$\varphi_2 : \mathfrak{A} \to M_{n-m}(D)$

son representaciones cuyos módulos correspondientes son isomorfos a W y V/W.

D^{n-m} es $\mathfrak{A}$-módulo izq

Obs: Hablar de D-representaciones de $\mathfrak{A}$ es lo mismo que hablar de D^n como $(\mathfrak{A}-D)$-bimódulo

$\mathfrak{A}$ K-álgebra

$$\varphi(a)(e_{m+i}) = \sum_{j=1}^{m} d_j e_j + \sum_{l=1}^{n-m} c_l e_l$$ ✓

$$\varphi_2(a)(\overline{e_{m+i}}) = 0 + \sum_{l=1}^{n-m} c_l \overline{e}_l$$ ✓

una D-representación de $\mathfrak{A}$ es un par (M, Ψ) donde M es un D-módulo y $\Psi : \mathfrak{A} \longrightarrow End_D(M)$

$\mathfrak{A}$ - K-algebra

Ejemplo $D = K$. Para $\mathfrak{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} / a, b \in K \right\}$

$W = \langle e_1 \rangle$, $V = \langle e_1, e_2 \rangle$ $\boxed{V \cong D^2}$

$\varphi_1 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = a$ D-representación de $\mathfrak{A}$ $\equiv$ V como $\mathfrak{A}$-módulo

$\varphi_2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = b$ $\varphi_1 \neq \varphi_2$ módulos no isomorfos.

Para $\mathfrak{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} / a, b \in K \right\}$

$\varphi_1 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = a$

$\varphi_2 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = a$ $\varphi_1 = \varphi_2$ es la misma representación (módulos isomorfos).

$\varphi : \mathfrak{A} \longrightarrow M_2(D) = M_2(K)$

$a \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(a) & s(a) \\ & \varphi_2(a) \end{pmatrix}$ $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\underset{\uparrow}{\varphi(a)}$

φ_1 D-representación

módulo correspondiente $\cong W = \langle e_1 \rangle$

$\varphi \begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix} = a\, \varphi \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} + b\, \varphi \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ D es una $\mathfrak{A}$-módulo

$a.$

$\varphi_1 \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}(e_1) = d_1 e_1$

$\varphi \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}(e_2) = c_1 e_1 + c_2 e_2$ $\varphi_1 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}(e_1) = e_1$

$\varphi_1 \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}(e_1) = d_1 e_1$ | $\varphi \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} e_1 = e_1$ $\varphi \begin{pmatrix} a & \\ & 0 \end{pmatrix} e_1 + \varphi \begin{pmatrix} 0 & \\ & b \end{pmatrix} e_1$

$\varphi_1 \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}(e_1) = c_1 e_1$ | $= \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} e_1$ $\begin{pmatrix} a & \\ & 0 \end{pmatrix} e_1 + \begin{pmatrix} 0 & \\ & b \end{pmatrix} e_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$

$= e_1$

$\varphi_1 \begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix}(e_1) = a d_1 e_1 + b c_1 e_1$

$= (a d_1 + b c_1) e_1$

M D-e.v dim n. $M \cong D^n$ $\qquad$ (M, φ_M) una D-representación de A $\equiv M$ un A-módulo.

$$\varphi_M : A \to \boxed{End_D(M) \cong \mathbb{M}_n(D)}$$

$$\varphi_M : A \to \mathbb{M}_n(D)$$

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de M, $\quad \varphi_M(a) = (\alpha_{ij})$

$$a.e_i = \sum_{i,j} \alpha_{ij} e_j \quad ✓$$

$M' \cong D^n$, $\quad \varphi_M : A \to \mathbb{M}_n(D) \cong End_D(M')$

$\{e_1', \ldots, e_n'\}$ base de M'

$$\varphi_M(a) = (\alpha_{ij})$$

$$a.e_i' = \sum_j{}' \alpha_{ij} e_j'$$

$\lambda : e_i \mapsto e_i'$ es homomorfismo de módulos.

λ homo de D-módulos

$$a.(\lambda(e_i)) = \lambda(a.e_i)$$

$$a.e_i' = \sum_j{}' \alpha_{ij} e_j' = \sum{}' \alpha_{ij} \lambda(e_j)$$
$$= \lambda\left(\sum{}' \alpha_{ij} e_j\right)$$
$$= \lambda(a.e_i)$$

<u>Observación</u>. Si D es K-álgebra de división de dim finita (K cuerpo),

$D \cong K^d$

$$D^n \cong K^{dn}$$

Toda D-representación induce una K-representación

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{M}_n(D) \cong D^{n^2} \cong K^{(dn)^2} \arrow[d, "\cong \text{ isomorfismo?}"] \\
& \mathbb{M}_{nd}(K) \cong K^{(nd)^2}
\end{tikzcd}$$

ok.

D tiene base $\delta_1, \ldots, \delta_d$ $\quad ✓$

$\{\delta_i e_j\} \leftarrow$ base de M sobre K

Ejemplo. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ← multiplicar por bloques.

$B(q) = bq$

$A(q) = aq$

trans K-lineal

Verificar después

$K = \mathbb{R}$, $D = \mathbb{H} = \{ i, j \mid i^2 = j^2 = -1, \ ij = -ji \}$

$\begin{pmatrix} i & j \\ ij & j \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} Y & J \\ YJ & J \end{pmatrix}$ $\quad Yq = iq \quad a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 ij$

$i \cdot 1 \mapsto i$
$i \cdot i \mapsto -1$
$i \cdot j \mapsto ij$
$i \cdot (ij) \mapsto -j$

$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$J(q) = jq$

$j \cdot 1 \mapsto j$
$j \cdot i \mapsto -ij$
$j \cdot j \mapsto -1$
$j \cdot (ij) \mapsto i$

Ej $A = K$, $M = D$ $\quad M = \boxed{\dim_{\mathbb{H}} M = 1}$

$\boxed{\lambda . d = \lambda d}$

$K \longrightarrow M_n(D) = D$, $K \to M_{n d}(K) = M_d(K) = (K^{d^2}) = D^2$ no irreducible

$\lambda \in K$, $\varphi(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$ $\quad \varphi : K \longrightarrow M_1(D) = D^{\ell}$, $d \mapsto d$

$K \leq D$

Lema. Sea M un módulo, A, B, B' submódulos con $B \subseteq B'$. Entonces

$$B + (A \cap B') = (B + A) \cap B'$$ (ley modular)

$= (B + A) \cap (B + B') = (B + A) \cap B'$

dem. $\boxed{\subseteq}$

$b + a \in B + A$ ✓

$b \in B \subseteq B'$, $a \in A \cap B' \subseteq A$

$b + a \in B'$ ✓

$\therefore b + a \in (B + A) \cap B'$ ✓

$\varphi : K \longrightarrow M_\ell(K)$

$D \to M_\ell(K)$, D^ℓ

$d \mapsto \begin{pmatrix} d & & \\ & \ddots & \\ & & d \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 & -6 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ \hline -9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 B_1 + A_2 B_3 & \\ & \end{pmatrix}$

$\boxed{\supseteq}$ $c \in (B + A) \cap B'$

$c = b + a$, $b \in B$, $a \in A$

pd: $a \in B'$ ✓

$a = c - b$, $c \in B'$, $b \in B \subseteq B'$ ∎

π ✓✓✓

Lema. Si M es un módulo, A, B, A', B' son submódulos con $B \subseteq B'$, $A \subseteq A'$, entonces

$$\frac{A+(B'\cap A')}{A+(B\cap A')} \cong \frac{(B'\cap A')}{(B\cap A)+(B\cap A')}$$

dem. $\varphi : B'\cap A' \to \dfrac{A+(B'\cap A')}{A+(B\cap A')}$

$c \longmapsto \bar{c}$

$\ker\varphi = ??$

$B\cap A' \subseteq \ker\varphi$ ✓

$B'\cap A \subseteq \ker\varphi$

$c \in B'\cap A$, $c \in A$

$\varphi(c) = \bar{c} = \bar{0}$ ✓

$\therefore (B\cap A') + (B'\cap A) \subseteq \ker\varphi$ (condición ultra importante)

$\bar{\varphi} : \dfrac{B'\cap A'}{(B\cap A')+(B'\cap A)}$ (I) $\longrightarrow \dfrac{A+(B'\cap A')}{A+(B\cap A')}$ bien definida ✓

$\bar{c} \longmapsto \bar{c}$

$\bar{c} \in A+(B'\cap A')/A+(B\cap A')$

$\Leftrightarrow c \in A+(B'\cap A')$

$c = a + b$

$\therefore b \in B'\cap A'$

$\therefore \bar{b} \in B'\cap A'/(B\cap A')+(B'\cap A)$

$\bar{\varphi}$ epi : $c \in A+(B'\cap A')$

$c = a + b$

$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = \bar{0} + \bar{b} = \bar{\varphi}(\bar{b})$

porque $a \in A \subset A+(B\cap A')$

$\ker\bar{\varphi} = ??$

$c \in \ker\varphi \Rightarrow (\bar{c} \in \ker\bar{\varphi}$ ssi $\bar{c} = \bar{b}$ en (I) $)$

detalles!

$b \in [A+(B\cap A')] \cap (B'\cap A')$

$\ker\varphi = (A+(B\cap A'))\cap(B'\cap A') + (B\cap A') + (B'\cap A)$

$= [A\cap(B'\cap \cancel{A'})] + \cancel{(B\cap A')} + (B\cap A') + (B'\cap A) = \cancel{(A\cap B')} + (B\cap A') + (B'\cap A)$

$= (B\cap A') + (B'\cap A)$ ■

Corolario. $\dfrac{A+(B'\cap A')}{A+(B\cap A')} \cong \dfrac{B+(B'\cap A')}{B+(B'\cap A)}$ ok

Prop. (Teorema de Jordan-Holder). (Se requiere el lema anterior).

Sea M un A-módulo (B,A-bimódulo).

Sean $\{0\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_r = M$ con $\tilde{M}_i \doteq M_i/M_{i-1}$ irreducible

y $\{0\} = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_s = M$ | $\{M_i\}, \{N_i\}$ cadenas ascendentes de submódulos

con $\tilde{N}_i = N_i/N_{i-1}$ irreducible

entonces $r = s$ y $\underbrace{\tilde{N}_i \cong \tilde{M}_{\sigma(i)}}_{\text{importante}}$ (σ permutación) | Jordan-Holder: genera unicidad de los cocientes $\hat{M}_i = M_i/M_{i-1}$

dem. $N_i = K_0 \le K_1 \le \dots \le K_r \le N_{i+1}$

$K_j = N_i + (M_j \cap N_{i+1})$

$K_0 = N_i + (\overset{\{0\}}{\cancel{M_0}} \cap N_{i-1}) = N_i$

$K_r = N_i + (\overset{=M}{M_r} \cap N_{i+1}) = N_i + N_{i+1} = N_{i+1}$

$\therefore$ Como N_{i+1}/N_i irreducible, entonces $K_j = K_{j+1} = \dots = K_r = N_{i+1}$

$K_{j-1} = K_{j-2} = \dots = K_0 = N_i$

existe un único j tq $K_{j+1}/K_j \cong \tilde{N}_{i+1}$

$$K_{j+1}/K_j \cong \frac{N_i + (M_{j+1}\cap N_{i+1})}{N_i + (M_j \cap N_{i+1})} \cong \frac{(M_{j+1}\cap N_{i+1})}{(M_{j+1}\cap N_i) + (M_j \cap N_{i+1})}$$

$$\cong \frac{M_j + (M_{j+1}\cap N_{i+1})}{M_j + (M_{j+1}\cap N_i)}$$

$M_j \le L_0 \subseteq \dots \subseteq L_s \le M_{j+1}$, $L_i = M_j + (M_{j+1}\cap N_i)$

$$M_{j+1}/M_j \cong L_{i+1}/L_i \cong K_{j+1}/K_j \cong \tilde{N}_{i+1}$$

$$\cong \tilde{M}_{j+1} \qquad \tilde{M}_{j+1} \cong \tilde{N}_{i+1}$$

demostración del teo de Jordan-Holder omitida

$i \to j$

Ejemplo. $A = \mathbb{M}_n(D)$, $M = A$ $\qquad \mathbb{M}_n(D)$ como $\mathbb{M}_n(D)$-módulo.

A como A-módulo

$$M_i = \begin{pmatrix} D & \cdots & D & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ D & & D & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{i+1}/M_i \cong D^n$$

D^n es $\mathbb{M}_n(D)$-módulo irreducible
D anillo de división

$$\{0\} = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N_r = M \qquad r = n$$

$$N_{i+1}/N_i \cong D^n$$

D^n no reducible $\Rightarrow \exists\, \tilde{N} \subsetneq M$ tq $N_{r-1} \subsetneq \tilde{N}$ dc.

$M/N_{r-1} \cong D^n$ ✓

cualquier submódulo maximal.

Corolario. Todo submódulo irreducible de $\mathbb{M}_n(D)$ es isomorfo a D^n. ✓

$N \leq \mathbb{M}_n(D)$, $\mathbb{M}_n(D)$-submódulo.
$N/\{0\} \cong N$ irreducible

$A = A_1 \times A_2$, M A-módulo

$P_1, P_2 \in A$ idempotentes centrales complementarios.

$M_1 = P_1 M$
$M_2 = P_2 M$

$m \in P_1 M$
$m = P_1 n$
$P_1 m = P_1^2 n = P_1 n = m$

$$m = 1 \cdot m = (P_1 + P_2)m = P_1 m + P_2 m$$

$\therefore M$ A-módulo $\Rightarrow M = M_1 \oplus M_2$
$A = A_1 \times A_2$

$m \in M_1 \cap M_2$

$P_1 m = m$, $\quad P_2 m = (1 - P_1)m = 0$

$m \in M_2 \Rightarrow P_2 m = m \qquad \therefore m = 0$.

$m = P_1 m + P_2 m$

$M = M_1 \oplus M_2$

$M \leq M_2(\mathbb{R})$ irreducible $\Rightarrow M \cong \mathbb{R}^2$

$M \leq M_3(\mathbb{C})$ irreducible $\Rightarrow M = \mathbb{C}^3$

Ej. $A \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_3(\mathbb{C})$

Pregunta: El profe definió representación irred ??

$\mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{C}^3 \leftarrow$ representaciones irreducibles de A. ✓

Ej. $\mathbb{M}_n(K)$ tiene idempotentes no centrales; pues $Z(\mathbb{M}_n(K)) = \{\lambda I_{n\times n} \mid \lambda \in K\}$ ninguno es idempotente.

ok

D puede ser K-álgebra de división
$\mathfrak{A}$ puede ser K-álgebra.

Corrección. Si M es un $\mathfrak{A}$-módulo izquierdo y D-módulo derecho, tenemos dos multiplicaciones:

$$(a,m) \mapsto am$$
$$(m,d) \mapsto md$$

Consideremos el anillo $D^{op} = (D, *)$ donde $d * c = cd$. Un D-módulo derecho es un D^{op}-módulo izquierdo. $(d*c).m = m(d*c) = m(cd)$
$= (mc)d = d.(mc) = d.(c.m)$

Con $\boxed{d.m = md}$. Entonces $(d*c)m = m(d*c) = m(cd) = (mc)d = d(cm)$.

Ahora si M es un bi-módulo, o sea un $\mathfrak{A}$-módulo izquierdo y D-módulo derecho, con $(am)d = a(md)$

M tiene dos estructuras de módulo izquierdo, por $\boxed{\mathfrak{A} \text{ y } D^{op}}$.

Prop. M es un $\mathfrak{A} \otimes_K D^{op}$-módulo izquierdo. $(a \otimes d).m = amd$

$(a\otimes d).(m_1+m_2) = a(m_1+m_2)d$
$= (am_1 + am_2)d = amd_1 + am_2d$
$= (a\otimes d).m_1 + (a\otimes d).m_2$

$((a\otimes d) + (a'\otimes d'))m$

Producto tensorial

V, W e.v's de dimensión finita. V tiene base $\{e_1, \dots, e_n\}$, W tiene base $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$. $V \otimes_K W$ tiene base $\{e_i \otimes \varepsilon_j\}_{i,j=1}^{n,m}$. En particular, $\dim(V \otimes_K W) = (\dim V)(\dim W)$.

Ejemplo. $End_K(V) \cong V \otimes_K V^*$

Ejemplo. $\mathbb{M}_n(K) \cong K^n \otimes (K^n)^*$, donde $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \otimes (b_1, \dots, b_n) \cong \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, \dots, b_n)$

Recordemos que $t \in V \otimes W$, $t = \sum_{i,j} \alpha_{ij}(e_i \otimes \varepsilon_j) = \sum v_i \otimes \varepsilon_j = \sum e_i \otimes w_j$

$v_i \in V$, $w_j \in W$.

$\mathfrak{A}$, $\mathcal{B}$ son álgebras, definimos el producto en el p.t por

$$(a\otimes b)(a'\otimes b') = aa'\otimes bb'$$

Luego $\mathfrak{A}\otimes\mathcal{B}$ es una álgebra.

- Propiedad universal: $B : V\times W \to Z$ bilineal y $\theta : V\times W \to V\otimes W$, $(v,w)\mapsto v\otimes w$

entonces $\exists!\ \overline{B} : V\otimes W \to Z$ lineal tal que $\overline{B}\circ\theta = B$.

obs. En $A\otimes B$: $(a\otimes 1)(1\otimes b) = (1\otimes b)(a\otimes 1)$

Si tenemos $\varphi : A\to Z$, $\varphi' : B\to Z$ tales que $\varphi(a)\varphi'(b) = \varphi'(b)\varphi(a)$ (*)

$\forall a,b$. Entonces sea $\tilde{\varphi} : A\times B\to Z$, $\tilde{\varphi}(a,b) = \varphi(a)\varphi'(b)$ bilineal.

Luego $\Psi : A\otimes B\to Z$ tal que $\Psi(a\otimes b) = \varphi(a)\varphi'(b)$ lineal. De hecho;

$$\Psi((a\otimes b)(a'\otimes b')) = \Psi(aa'\otimes bb') = \varphi(aa')\varphi'(bb')$$
$$= \varphi(a)\varphi(a')\varphi'(b)\varphi'(b), \quad \text{por } (*)$$
$$= \Psi(a\otimes b)\Psi(a'\otimes b').$$

$\therefore$ Ψ es un homo de álgebras.

obs. Si definimos $\tilde{\Psi}_0(x,y) = \Psi((x\otimes y)(a_2\otimes b_2))$, $\tilde{\Psi}_1(x,y) = \Psi(x\otimes y)\Psi(a_2\otimes b_2)$

Por lo anterior, $\tilde{\Psi}_0 = \tilde{\Psi}_1$. Así, $\exists!\ \Psi_0, \Psi$ lineales

$$\Psi_0(x\otimes y) = \Psi((x\otimes y)(a_2\otimes b_2))$$

Luego $\quad \Psi_0(t) = \Psi(t(a_2\otimes b_2))$ (unicidad)

analogamente $\quad \tilde{\Psi}_2(x,y) = \Psi(t(x\otimes y))$, $\Psi_2(s) = \Psi_2(t(s))$

definimos Ψ_3 analogamente.

M $(\mathfrak{A}-\mathfrak{D})$ - bimódulo, tenemos $\varphi: \mathfrak{A} \to End_K(M)$, $\varphi': D^{op} \to End_K(M)$
$a \mapsto am$ $\qquad d \mapsto md$

tq $\varphi(a)\varphi'(d) = \varphi'(d)\varphi(a)$, pués $\forall a \in \mathfrak{A}, m \in M, d \in D^{op}$:

$\varphi(a)\varphi'(d)m$
$\varphi(a)(\varphi'(d)m) = \varphi(a)(md) \underset{=a(md)}{=} (am)d = a(md)$ $\quad \varphi'(d)\varphi(a)m = \varphi'(d)(\varphi(a)m)$
$= \varphi'(d)(a.m) = (am)d$

$\Rightarrow \exists!\ \psi: \mathfrak{A}\otimes_K D^{op} \to End_K(M)$ morfismo de álgebras con

$$\psi(a\otimes d)(m) = a(md)$$

i.e, podemos estudiar las representaciones de $\mathfrak{A}\otimes_K D^{op}$ ($\equiv$ M es $\mathfrak{A}\otimes D^{op}$-módulo)

pendiente

obs. Considere $D^{op} \to \mathfrak{A}\otimes_K D^{op}$ $\Rightarrow$ M es un D^{op}- módulo izquierdo
$d \mapsto (1,d)$ $\qquad$ D es un $\mathfrak{A}$- módulo derecho. (??)

Ejemplo. V un $(\mathbb{C}-\mathbb{C})$ - bimódulo, $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$- álgebra,

ed: $(z,v) \mapsto zv$, $(v,z') \mapsto vz'$. Si $r \in \mathbb{R}$: $rv = vr$

V es una $\boxed{\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}}$ - $\boxed{\text{álgebra}}$ Observe que V es sobre $\mathbb{C}$ con la multiplicación izquierda.

$\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$-módulo!!! $\quad z_1z_2 = z_2z_1 \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow \mathbb{C}^{op} = \mathbb{C}$

$T = \varphi'(i)$ = multiplicación derecha por i. Es función $\mathbb{C}$-lineal.

$T^2 + I(v) = (v(i))i + v = 0$. Por ello, $T^2 + I = 0$.

$m_T(x) = x^2+1 = (x-i)(x+i)$

subespacios invariantes.

$\Rightarrow V = V_i \oplus V_{-i}$, con $Tv_i = iv_i$, $Tv_{-i} = (-i)v_{-i}$

$v_i \in V_i$, $v_{-i} \in V_{-i}$.

$v \in V_i \cap V_{-i} \Rightarrow T(v) = iv = -iv \Rightarrow \boxed{v=0}$

Obs. $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \cong \dfrac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+1)}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$

V es una $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$-módulo, pero $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\cong\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ $\Rightarrow V$ es un $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$-módulo.

Prop: $V/V' \otimes_K W/W' \cong \dfrac{V\otimes_K W}{V\otimes_K W' + V'\otimes_K W}$ (importante)

pregunta a claudio.

Luego, $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\cong\dfrac{\mathbb{C}[x]}{(x^2+1)}\cong\dfrac{\mathbb{C}[x]}{(x-i)}\times\dfrac{\mathbb{C}[x]}{(x+i)}\cong\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ ✓

i y $-i$

idempotentes? $(1,0)$ y $(0,1)$

Luego, para $v\in V$: $\boxed{vi=\bar{x}v}$. Así, por lo de la clase pasada:

$V=V_1\oplus V_2$, donde $T(v)=v_2 i=\bar{x}v_2=-iv_2$, $T(v)=v_1 i=\bar{x}v_1=iv_1$.

$V_1=(1,0)V$

Ejemplo. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\dfrac{\mathbb{Q}[x]}{(x^2-2)}\otimes\mathbb{Q}(\sqrt{2})\cong\dfrac{\mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]}{(x^2-2)}\cong\mathbb{Q}(\sqrt{2})\times\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

Ejemplo. $F=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $F\otimes_{\mathbb{Q}}F=\dfrac{\mathbb{Q}[x]}{(x^3-2)}\otimes_{\mathbb{Q}}F=\dfrac{F[x]}{(x^3-2)}\cong\dfrac{F[x]}{(x-\sqrt[3]{2})}\times\dfrac{F[x]}{(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})}$

$\cong\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\times E$, con $[E:F]=2$.

Ejemplo. $L,F/K$ separable y finita, entonces $F\otimes_K L\cong\prod_{i=1}^n E_i$, E_i cuerpo. (debe demostrarse por inducción).

Ejemplo. $F\cong_\varphi\bar{F}$, $L\cong_\psi\bar{L}$, entonces
$$F\times L\to\bar{F}\bar{L}$$
$$(f,\ell)\mapsto\varphi(f)\psi(\ell)$$
define un homo de

$F\otimes_K L\to\bar{F}\bar{L}$ uno de los E_i's, pues $\varphi(\cdot)\psi(\cdot)$ es doble.

$F\otimes L \twoheadrightarrow E$, entonces $\varphi: F \to E$, $\psi: L \to E$

$\Rightarrow E = \varphi(F)\psi(L)$

Por lo tanto en la expresión $F\otimes_K L \cong \prod_{i=1}^n E_i$

Los cuerpos que aparecen son exactamente los cuerpos de la forma $\bar{F}\bar{L}$, con $F\cong\bar{F}$, $L=\bar{L}$ conjugados. Salvo isomorfía.

Si F, L son galoisianas de K, entonces

$$F\otimes_K L \cong \prod_{i=1}^n E_i$$

con cada E_i isomorfo a FL.

Ej. D como (K,D)-bimódulo es un $\overbrace{K\otimes_K D^{op}}^{\cong D^{op}}$-módulo irreducible ✓.

D como (D,D)-bimódulo es un $D\otimes_K D^{op}$-módulo.

¿Quién es $D\otimes_K D^{op}$?

Af. D central $\Rightarrow D\otimes_K D^{op} \cong M_n(K)$, $n=\dim_K D$.

—o—

· D (K,D)-bimódulo, D es $K\otimes_K D^{op}$-módulo irreducible.

$d\in D\setminus\{0\}$, $\{d_1,\dots,d_n\}$ base de D^{op}

$\{1\otimes d_1,\dots,1\otimes d_n\}$ base de $K\otimes_K D^{op}$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(1\otimes d_i).d = \sum_{i=1}^n \alpha_i(1\otimes d_i).d = \sum_{i=1}^n \alpha_i d d_i$$

$$\left(d=\sum_{j=1}^n \beta_j d_j\right) \quad = \sum_{i,j}\alpha_i\beta_j d_j d_i$$

—o—

$d\neq 0$. $\exists d'\in D$: $dd' = 1_D = d'd$

$d'.d = 1_D \Rightarrow \forall v\in D^{op}$: $v(d'.d) = v.1_D$

$(v.d')d = v$

A anillo. V un A-módulo (izquierdo).

V es completamente reducible si es suma directa (finita) de submódulos simples.

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$$

Prop. Sea V un A-módulo completamente reducible, $W \subseteq V$ submódulo, entonces existen $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ tales que $V = W \oplus \bigoplus_{l=1}^{k} V_{i_l}$

dem. $\Omega = \{ Z \subseteq V \mid Z = W \oplus \bigoplus_{i \in T} V_i ,\ T \subseteq \{1, \dots, n\}\}$

obs. $W \in \Omega$

Sea $Z \in \Omega$ maximal (hay que ocupar lema de Zorn)

$Z = W \oplus \bigoplus_{i \in T} V_i$. Si $Z \neq V$, existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $V_{i_0} \not\subseteq Z$

$Z \cap V_{i_0} \subseteq V_{i_0}$ | si $V_i \subseteq Z$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$Z \cap V_{i_0} \neq V_{i_0}$ | $\Rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} V_i \subseteq Z \Rightarrow V = Z$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

$\therefore Z \cap V_{i_0} = \{0\}$, porque V_{i_0} irreducible

$$\therefore Z' = \underbrace{W \oplus \bigoplus_{i \in T} V_i}_{Z} \oplus V_{i_0} \in \Omega \quad (\Rightarrow\Leftarrow)$$

$$\therefore Z = V$$

Corolario 1. Todo submódulo de un módulo c.r es c.r.

dem. $W \cong \underline{V / \bigoplus_{i \in T} V_i}_{\text{poco riguroso}} \cong \bigoplus_{i \in T} V_i$ | $\bigoplus_{i=1}^{n} V_i = W \oplus \bigoplus_{l=1}^{k} V_{i_l}$

$W \cong V / \bigoplus_{l=1}^{k} V_{i_l} \cong \bigoplus_{i \in T} V_i$

Scanned with CamScanner

Corolario 2. Todo cociente de un módulo c.r es c.r.

dem. $V/W \cong \bigoplus_{i\in T} V_i$. ok ✓ | V_i irreducible $\Leftrightarrow$ I_i maximal.

$\tilde{V}_k = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i$ $\quad \tilde{V}_{k+1}/\tilde{V}_k \cong V_{k+1}$, $\quad V_i = A/I_i \mid I_i \subseteq \bigoplus_{i=1}^{n} I_i \subseteq A \Rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} I_i = A$

$A = \bigoplus_{i=1}^{n} J_i \leftarrow$ ideal izquierdo irreducible (maximal).
definición de anillo completamente reducible.

Prop. Si A es c.r , todo A-módulo f.g es c.r. ok

dem. Sea V un A-módulo f.g.

$$V = \sum_{i=1}^{n} A v_i \checkmark$$

$\Rightarrow V$ es un cociente de $W = \prod_{i=1}^{n} A v_i$ ✓ . Dentro del cociente

$A v_i \cong \overline{A v_i} = \{0\} \times \{0\} \times A v_i \times \dots \times \{0\} \subseteq W$

$$W = \bigoplus_{i=1}^{n} \overline{A v_i} \checkmark$$

$A v_i \cong A/_{\operatorname{ann} v_i}$ ✓ , $\quad \operatorname{ann}(v_i) = \{a \in A / a v_i = 0\} = \ker(b \mapsto b v_i)$

$A v_i$ es cociente de A , luego es c.r ✓

$\therefore W$ es c.r ✓ $\rightarrow$ la suma directa de c.r es c.r

$\therefore V$ es c.r ✓

obs. $\varphi : W \twoheadrightarrow V \quad \varphi((a_i v_i)_{i=1}^{n}) = \sum_i a_i v_i$, $\quad V \cong W/_{\ker \varphi}$ ✓ ■

Ejemplo. $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,/\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$. $V = \mathbb{R}^2$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ (pendiente)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$y \neq 0 \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ ay \end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix} 0 & y^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

A anillo. V A-módulo.

$$\operatorname{Ann} V := \{ a \in A \mid aV = 0 \}$$

$\varphi : A \to \operatorname{End}_A(V) \Rightarrow \operatorname{Ann} V = \ker \varphi$ $\quad (\varphi(a)(v) = a.v)$.

$\therefore \operatorname{Ann} V$ ideal bilátero de A.

Obs. $\operatorname{Ann} V = \bigcap_{v \in V} \operatorname{ann} v$

El radical de A, es $\mathcal{R}(A) = \bigcap_{V \text{ A-mod irred}} \operatorname{Ann} V$

A se dice semisimple si $\mathcal{R}(A) = \{0\}$

A K-álgebra $\Rightarrow$ A A-módulo

Prop. Si A es K-álgebra de dimensión finita, A es semisimple ssi es completamente reducible (como A-módulo)

J_i A-módulos irreducibles

dem. ($\Leftarrow$) $A = \bigoplus_{i=1}^{n} J_i$ (J_i son A-módulos), $a \in \mathcal{R}(A)$ $\overset{a \in \operatorname{Ann} J_i}{\Rightarrow}$ $aJ_i = \{0\}$ (J_i irreducible, $\forall i$)

luego $aA = \{0\}$, pero $1_A \in A$ $\therefore a 1_A = 0 \Rightarrow a = 0$

No va!

($\Rightarrow$) $A = \bigoplus_{i=1}^{n} K a_i$. $\forall a_i \; \exists V_i$ irred : $a_i \notin \operatorname{Ann} V_i$ (estamos suponiendo $\mathcal{R}(A) = 0$)

$\mathcal{R}(A) = \{0\}$. Pd: $\exists V$ c.r y $\varphi : A \to V$ inyectiva.

$A \cong \varphi(A) \subseteq V$ c.r

$\Rightarrow \varphi(A)$ c.r

$\Rightarrow A$ c.r

Sea $\Omega = \{ J \subseteq A$ ideal izquierdo con $J = \ker \varphi$, $\varphi : A \to V$ hom. V c.r $\}$

$\Omega \neq \emptyset$, $A \in \Omega$

Sea $J_0 \in \Omega$ minimal (por ej. de dimensión finita)

$a \in J_0$, $a \neq 0$ $(a \notin \mathcal{R}(A))$

$\exists V_a$ irreducible con $a \notin \operatorname{Ann} V_a$. $a \notin \operatorname{ann} v_a$, algún $v_a \in V_a$

$$\psi : A \to W, \quad W = V \times V_a \text{ c.r.}$$
$$\psi(b) = (\varphi(b), b v_a), \quad \psi(a) \neq 0$$

omitido (por ahora)

$\Rightarrow \underset{\not\ni a}{\ker \psi} \subsetneq \underset{\ni a}{J_0 = \ker \varphi}$ $\therefore J_0 = \{0\}$

Ejercicio. Ver dónde falla cuando $A = \mathbb{Z}_4$. (omitido por ahora)
(no queda muy claro. Preguntar a Claudio Bravo)

$A = K^n$ | semisimple $\overset{\shortparallel}{}$ completamente reducible

Corolario. Una K-álgebra A de dimensión finita es semi-simple ssi cada A-módulo f.g es $\boxed{\text{semi simple}}$ completamente reducible

dem. ($\Rightarrow$) A es c.r $\Rightarrow$ V A-módulo f.g es c.r
($\Leftarrow$) A es A-módulo finitamente generado, c.r $\Rightarrow$ A K-álgebra semi-simple.

Ejemplo. Si A es simple (no tiene ideales bi-láteros no triviales), entonces A es semisimple. En particular, $\mathbb{M}_n(D)$ es semisimple.

$$A = \mathbb{M}_2(D), \quad A \cong \overbrace{A\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix}a&0\\c&0\end{pmatrix}} \oplus \overbrace{A\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix}0&b\\0&d\end{pmatrix}} \cong D^2$$

$M_2(D)$ es $M_2(D)$-módulo f.g
$\therefore M_2(D)$ es c.r

A simple $\Rightarrow$ A A-módulo irred.
$\Rightarrow \operatorname{Ann} A = A \Rightarrow aA = 0$
$\Rightarrow a = 1$, $1A = 0$ ($\to\leftarrow$)
$\therefore \operatorname{Ann} A = \{0\}$.
$\mathcal{R}(A) \subseteq \operatorname{Ann} A = \{0\} \Rightarrow \mathcal{R}(A) = 0$.
$\therefore A$ semisimple.

D K-álgebra de división $\Rightarrow$ $\mathbb{M}_n(D)$ simple (ya demostrado) $\Rightarrow$ $\mathbb{M}_n(D)$ semisimple.

Lema. Sea A anillo; V, V' módulos irred, $\varphi : V \to V'$ un homomorfismo de A-módulos, entonces $\varphi = 0$ ó φ es un isomorfismo. ✓

dem. sup $\varphi \neq 0$, $\ker \varphi \subseteq V$ $\therefore \ker \varphi = 0$
$\operatorname{Im} \varphi \subseteq V'$ $\therefore \operatorname{Im} \varphi = V'$
$\therefore \varphi$ isom.

Cor. $\operatorname{End}_A(V)$ es un anillo de división, si V es A-módulo irred. ✓

Cor. Si V y V' son A-módulos irred no isomorfos, $\varphi : V \to V'$ homo ✓
$\Rightarrow \varphi = 0$

$A = \bigoplus_{i=1}^{n} J_i$ $\quad I \subseteq A$ ideal izquierdo irred (como A-módulo izq).

A A-módulo completamente reducible.

$\pi_i : A \to J_i$, $\pi_i(I) \subseteq J_i$, $\underset{\pi_i|_I \neq 0}{\pi_i|_I : I \to J_i} \Rightarrow I/_{\ker \pi_i|_I} \cong J_i \Rightarrow \ker \pi_i|_I = 0$

$\pi_i(I) = 0$ ó $\pi_i(I) = J_i$, En cuyo caso, $I \cong J_i$ | Hasta acá!

Todo ideal $I \subseteq A$ es isomorfo a una de las componentes $\{J_i\}_{i=1}^{n}$

Lo último puede pasar sólo en una clase de isomorfía.

Ejemplo: $A = K \times K$. $A \cong (\underbrace{K \times \{0\}}_{I_1}) \times (\underbrace{\{0\} \times K}_{I_2})$ ✓

$\underset{(A\text{-mod})}{I_1 \not\cong I_2}$, ya que $\operatorname{Ann} I_1 = I_2$, $\operatorname{Ann} I_2 = I_1$ ✓

$I \subseteq A$ ideal , $\pi_1(I) = \{0\} \Rightarrow \pi_2(I) = \{0\}$

$a \in \pi_2(I)$
$\Rightarrow a = (0, w) = \pi_2(x, 0, 0, w)$
$(x, 0, 0, w) \in I$
$\Rightarrow \pi_1(x, 0, 0, w) = (x, 0) = (0, 0)$
$\therefore x = 0$

$\therefore I = I_1$

I_1, I_2 son los únicos ideales izquierdos minimales ¡no queda claro! Preguntar a Claudio.

Ejemplo

$A \cong M_2(\mathbb{R})$, $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$

submódulo $\quad I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ c & b \end{pmatrix} \right\}$

$I \cong I_1 \cong I_2$. ok

En general , $I \subseteq \bigoplus_{I \cong J_i} J_i = \tilde{I}$ (??)

$A = \bigoplus_{\substack{I \text{ salvo} \\ \text{isomorfía}}} \tilde{I} \quad \left(= \bigoplus_{\tilde{I}} \tilde{I} \right)$

obs. $\tilde{I}$ es un ideal bilátero.

(pendiente !!!)

$\tilde{I}a \subseteq \tilde{I}$

basta ver que $J_i a \subseteq \tilde{I}$. $\quad \varphi : A \to A$, $b \mapsto ba$

$$J_i a = \varphi(J_i) \cong J_i / J_i \cap \ker \varphi .$$

$\therefore J_i a = 0$ ó $J_i a \cong J_i \cong I$

En cualquier caso, $J_i a \subseteq \tilde{I}$

$$1 = \sum_{\tilde{I}}' P_{\tilde{I}} \quad , \text{ donde } \quad P_{\tilde{I}} P_{\tilde{J}} = 0 \; , \quad \tilde{I} \neq \tilde{J}$$

$$1 = 1^2 = \sum_{\tilde{I}}' P_{\tilde{I}}^2 \quad \Rightarrow \quad P_{\tilde{I}}^2 = P_{\tilde{I}}$$

$$a = \sum_{\tilde{I}}' a_{\tilde{I}} \quad \Rightarrow \quad a = 1 \cdot a = \sum_{\tilde{I}}' P_{\tilde{I}} a_{\tilde{I}}$$

$$P_{\tilde{I}} a_{\tilde{I}} = a_{\tilde{I}} = a_{\tilde{I}} P_{\tilde{I}}$$

$$P_{\tilde{I}} a_{\tilde{J}} = P_{\tilde{I}} P_{\tilde{J}} a = 0 = a_{\tilde{J}} P_{\tilde{I}}$$

$P_{\tilde{I}}$ idempotentes centrales

$$\Rightarrow \quad A = \bigoplus_{\tilde{I}} P_{\tilde{I}} A$$

$$A \cong \prod_{\tilde{I}} A / P_{\tilde{I}}^c A \quad , \quad P_{\tilde{I}}^c = 1 - P_{\tilde{I}}$$

$$A_{\tilde{I}} := A / P_{\tilde{I}}^c A \quad , \quad A \cong \prod_{\tilde{I}} A_{\tilde{I}}$$

$$A_{\tilde{I}} \cong P_{\tilde{I}} A = \tilde{I}$$

$$A_{\tilde{I}} = \bigoplus_{J \text{ minimal}} J \leftarrow \text{todos isomorfos.}$$

A K-álgebra de dimensión finita.

Prop. A es semi-simple con una única representación ssi A es simple.

Cor. Toda álgebra de dimensión finita semisimple es producto de álgebras simples.

dem. A K-álgebra de dimensión finita semisimple

$\Leftrightarrow$ A es A-módulo completamente reducible.

$A = \bigoplus_{i=1}^{n} I_i$, I_i A-módulo irreducible

$I_i \trianglelefteq A$ simple.

I_i K-álgebra simple.

Scanned with CamScanner

...eo: Todo álgebra semi-simple es producto de álgebras simples.

A semi-simple. $A = \bigoplus A_J$, A_J semi-simple con representación única.

A_J A-módulos irreducible $\Leftrightarrow$ A_J álgebra simple.

Prop. Una K-álgebra es simple ssi es semi-simple y tiene una única representación irreducible.

dem. A simple $\Rightarrow$ A semi-simple $(R(A) = \{0\})$ ✓

Si hay más de una representación

$$A = \bigoplus_J A_J \qquad A_J \text{ es } A\text{-módulo}$$

Cada A_J es ideal bilátero $(\overset{A_J \trianglelefteq A.}{\rightarrow\leftarrow})$. $\therefore$ la representación es única.

Sup. que A semi-simple con representación única. Sea $I \subseteq A$ ideal bilátero. $A' := A/I$ $\quad J'$ A'-módulo (representación)

J' es la única. J' puede verse como A-módulo: $aJ' = (a+I)J'$

$I \subseteq \text{Aun } J'$ (como representación de A) $\quad a \in I: \; aJ' = (a+I)J' = IJ' = 0$

$$\therefore I \subseteq R(A) = \text{Aun } J' \qquad R(A) = \bigcap_{V\ A\text{-mod irred}} \text{Aun } V$$

$$\therefore I = \{0\} \checkmark$$

$\square$

Corolario. Un álgebra semisimple es suma directa (producto) de álgebras simples. (pendiente)

Prop. Sea A una K-álgebra simple. Entonces $A \cong \mathbb{M}_n(D)$, donde D es un álgebra de división.

$\varphi: M \to M$ homo de A-módulos.

Si M es un A-módulo y $B = \mathrm{End}_A(M)$, entonces $\mathrm{End}_A(M^n) = \mathbb{M}_n(B)$

Dem. $M^n \cong K^n \otimes_K M$ es $K \otimes_K A$-módulo ($K \otimes_K A \cong A$) ✓

$\mathbb{M}_n(B)$ actúa en M^n por $T \otimes b$, ($T \in \mathbb{M}_n(K)$, $b \in B$)

$$(T \otimes b)(\vec{v} \otimes m) = T\vec{v} \otimes b(m)$$

$\mathbb{M}_n(\mathrm{End}_A(M)) = \mathbb{M}_n(K) \otimes_K \mathrm{End}_A(M)$
A K-álgebra?

$\mathbb{M}_n(B) \subseteq \mathrm{End}_A(M^n)$ ✓ ok.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}(m_1) + \cdots + b_{1n}(m_n) \\ b_{n1}(m_1) + \cdots + b_{nn}(m_n) \end{pmatrix}$$ $b_{ij} \in \mathrm{End}_A(M)$ ok.

$\varphi \in \mathrm{End}_A(M^n)$ $\quad \varphi: M^n \to M^n \Rightarrow \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $\varphi_j : M^n \to M$

$$\varphi\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} m_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ m_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots, \quad \varphi\begin{pmatrix} m_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}(m_1) \\ \vdots \\ b_{n1}(m_n) \end{pmatrix}$$

lo mismo en cada coordenada.

$$\therefore \varphi = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \checkmark \text{ ok.}$$

$\ulcorner$ A simple $\Leftrightarrow$ A semisimple y tiene una única representación irreducible

$\boxed{A \cong J^n}$ como A-módulo (J es A-módulo)

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ homomorfismo de cuerpos.

$\mathrm{End}_A(A) \cong \mathrm{End}_A(J^n) \cong \mathbb{M}_n(D)$ $\qquad \mathrm{End}_A(J^n) = \mathbb{M}_n(\mathrm{End}_A(J))$

$$D \cong \mathrm{End}_A(J)$$

D es álgebra de división, pues J es irreducible. ✓

$$\mathrm{End}_A(A) \cong A^{op}$$

Sea $\varphi: A \to A$. A-lineal.

$\varphi(a) = a\,\underbrace{\varphi(1_A)}_{=x}$, $\varphi = \varphi_x$ tq $\varphi_x(a) = ax$ $(\varphi_x(1_A) = x)$

$\varphi_y \varphi_x(a) = \varphi_y(\varphi_x(a)) = \varphi_y(ax) = (ax)y = axy = \varphi_{xy}(a)$

$(\varphi_y + \varphi_x)(a) = ay + ax = a(x+y) = \varphi_{y+x}(a)$ ☒

$$A^{op} \cong \mathbb{M}_n(D)$$

$$A \cong \mathbb{M}_n(D^{op}) \checkmark$$

<u>obs</u>. $A \cong A^{op}$ ssi A tiene anti-isomorfismo $\overset{A^{op} = \mathrm{End}_A(A)}{}$ ($\varphi: A \to A$ A-lineal tq $\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$). (hecho importante)

<u>Recordatorio</u>. Para $A \otimes_K B$, $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$

<u>Def</u>. A es K-álgebra central si $K \cong Z(A)$

$(Z(A) = \{z \in A \mid za = az \ \forall a \in A\}$ ✓

[<u>Prop</u>. Si A es central, A es simple ssi $A \otimes_K A^{op} \cong \mathbb{M}_n(K)$,] (Importante)

$\boxed{n = \dim_K A}$.

<u>Lema</u>. Sea A una K-álgebra, A es simple ssi tiene un módulo irreducible fiel M ($\mathrm{Ann}_A(M) = \{0\}$)
A-módulo M.

$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ etc $e_i \in D^n$, $i = 1, \dots, n$.

<u>dem</u>. A simple $\Rightarrow A \cong \mathbb{M}_n(D)$. Luego D^n es A-módulo irreducible fiel.

Recordatorio: $\mathrm{Ann}_A(M) = \{a \in A \mid aM = \{0\}\}$. $\mathrm{Ann}_A M = \bigcap_{m \in M} \mathrm{ann}_A\, a$

Scanned with CamScanner

$\boxed{A \quad K\text{-álgebra de dimensión } n}$

M A-módulo irreducible fiel.

$R(A) \subseteq Ann(M) = \{0\}$ ✓ $\quad R(A) = \bigcap_{M\ A\text{-mod irred}} Ann\, M$

$\therefore$ A semi simple. ✓

$A \cong \bigoplus_{J} A_J$ $\quad (J \neq J' \Rightarrow A_J$ anula a $J')$ $\quad$ (M es algún J)

$\Rightarrow$ Hay un único J ✓ (porque $Ann(M) = 0$)

$\therefore$ A es simple ✓ □

dem de la proposición. Sea $M = A$ como $A \otimes_K A^{op}$-módulo $\overbrace{\text{izquierdo}}$ con

$$(c \otimes b)(a) = cab$$

(Ejercicio: Ver que es un módulo) → (pendiente!)

$I \subseteq A$ submódulo,

$$cI \subseteq I \ , \ Ib \subseteq I \ ✓$$

I es ideal bilátero ✓

$\Rightarrow$ $I = 0$, $I = A$. ✓ — M es $A \otimes_K A^{op}$-módulo irreducible

· Pd: M es fiel (Pendiente)

Asumimos que M es fiel.

$\Rightarrow$ $B = A \otimes_K A^{op}$ simple. ✓

A es B-módulo nos dá un homomorfismo $\underset{\underset{\text{dim} = (\dim A)^2}{\uparrow}}{\overset{A \otimes_K A^{op}}{\overset{\shortparallel}{B}}} \xrightarrow{\varphi \neq 0} End_K(A) = \underset{\underset{(\dim A)^2}{\uparrow}}{M_{\dim A}(K)}$

B simple $\Rightarrow$ φ inyectivo ✓

$\therefore$ φ isomorfismo. (por argumento de dimensión)

Corolario. Si C es simple y A es central simple, entonces $A \otimes_K C$ es simple.

dem. (*) $\underbrace{A^{op} \otimes_K A}_{M_n(K)} \otimes_K C \cong M_n(C)$ ($n = \dim_K A$)

$I \subseteq A \otimes_K C$ ideal (no trivial) $\qquad$ C simple $\overset{?}{\Rightarrow} M_n(C)$ simple

$\tilde{I} \trianglelefteq M_n(C) \Rightarrow \tilde{I} = M_n(I)$, $I \trianglelefteq C$

$A^{op} \otimes_K I$ ideal de $(*) \cong \boxed{M_n(C)}$ ($\rightarrow\leftarrow$)

Corolario. A central simple, C central simple $\Rightarrow A \otimes_K C$ central simple.

dem. Sea $a = \sum_i a_i \otimes c_i$ ($\{a_i\}$, $\{c_i\}$ l.i ... cuando la escritura es minimal podemos asumir $\{a_i\}$, $\{c_i\}$ l.i, en caso contrario, puedo achicar la suma) central.

$\forall b \in A$, $\bar{b} = b \otimes 1$

$\bar{b}a - a\bar{b} = 0$

$\sum_i (ba_i - a_i b) \otimes c_i = 0 \Rightarrow ba_i - a_i b = 0$, por ello,

$a_i \in K$

del mismo modo, $c_i \in K$, luego $a \in K \otimes_K K = K$

pendiente. preguntar a Claudio

Sea $Br(K)$ el conjunto de clases de isomorfía de K-álgebras de división centrales. obs. Las álgebras de división son simples.

Definimos producto: $[D][D'] = [D'']$ si $D \otimes_K D' \cong M_n(D'')$ algún n.

$\begin{cases} [K] = \text{neutro} \\ [D^{op}] = \text{inverso} \end{cases}$

Define una estructura de grupo en $Br(K)$. Llamado el grupo de Brauer de K. ($Br(K)$ grupo abeliano).

$\hookrightarrow \otimes$ conmutativo módulo isomorfía.

Las extensiones de escalares de álgebras centrales simples, son centrales simples.

Ejemplo. $Br(\mathbb{R}) \cong C_2$ ya que $Br(\mathbb{R}) = \{[\mathbb{R}], [\mathbb{H}]\}$

¿$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} : M_n(\mathbb{R})$?

Corolario. Si A es $cs/_K$, $A \otimes_K L$ es $s/_L$ $\forall L/_K$ extensión.

A c.s, L simple — extensión de escalares

Prop. Si A es $cs/_K$, entonces $A_L \cong A \otimes_K L$ es $cs/_L$ $(\dagger)$

dem. $Z(A_L) \cong Z(A \otimes_K L) \cong Z(A) \otimes_K Z(L) \cong K \otimes_K L = L$

Prop. No hay álgebra de división no triviales sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

dem. D algebra de división (sobre K de dimensión finita)

$d \in D$, $K[d]/_K$ ext. finita

$\Rightarrow d \in K$, $K = D$

$Br(K) = \{[K]\}$ ok.

obs. $(\dagger)$ es cierto aún si $L/_K$ no es finita.

$n = \dim_{\bar{K}} D_{\bar{K}}$

$D_{\bar{K}} = D \otimes_K \bar{K}$. $D_{\bar{K}} \cong M_n(\bar{K})$

álgebra de división central. (simple)

c.s

$\dim_K D = \dim_{\bar{K}} D_{\bar{K}} = n^2$ entiende.

$(\dim_K D)(\dim_K \bar{K}) = \dim_K D_{\bar{K}}$

Corolario. La dimensión de un álgebra central simple es un cuadrado perfecto. ok.

obs. $\{s_1, \dots, s_n\}$ base de $A/_K$, $\{s_1 \otimes 1, \dots, s_n \otimes 1\}$ base de $A \otimes_K B/_B$. $\boxed{\text{eso explica } \dim_K D = \dim_{\bar{K}} D_{\bar{K}}}$

Extensión de escalares

• $A_L = A \otimes_K L$, L/K extensión de cuerpos

$$\left.\begin{array}{l} L/K \text{ finita} \\ A = A_K \text{ c.s} \end{array}\right\} \Rightarrow A_L \text{ c.s.}$$

Prop. Si L/K extensión cualquiera, $A = A_K$ c.s $\Rightarrow$ A_L c.s. ✓ ok

dem. Caso I : L/K finita ✓

Caso II : L/K algebraica

$$A_L = A \otimes_K L \quad , \quad A = \langle a_i \rangle_{i=1}^{n}$$

$I \subseteq A_L$ ideal bilátero ($\neq \{0\}$)

$b \in I$, $b \neq 0$

$$A_L b A_L \subseteq I$$

$$A_K \subset A_L$$

$b \in A_F$ F/K finita

$$b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i \quad , \quad F = K[\beta_1, \dots, \beta_n]$$

A_F simple

$J = A_F b A_F$ ideal bilátero $\Rightarrow J = A_F$. Luego $A_F = A_F b A_F \subseteq A_L b A_L \subseteq I$

$\therefore \quad A_L = A_F L \subseteq I$

$\therefore A_L$ simple.

Caso III : $L = K(x)$

$I \subseteq A_L$ ideal bilátero

$b \in I \quad , \; b = \sum_{i=1}^{n}{}' f_i(x) a_i \quad , \; f_i$ polinomios sin factor común.

$I \subsetneq A_L$ subespacio propio, $\exists\, T : A_L \to L$ no trivial tal que $T(I) = \{0\}$.

$a_j b a_\ell \in I \quad , \; \forall j, \ell \in \{1, \dots, n\}$

$$a_j a_i a_\ell = \sum_t \beta^t_{ji\ell} a_t \quad , \quad \beta^t_{ji\ell} \in K .$$

$$T\Big(\sum_i{}' \gamma_i a_i\Big) = \sum_i \gamma_i \, \underset{\gamma_i(x) \in L}{T(a_i)}$$

polinomio sin divisor común.

$$a_j b a_\ell = \sum_i f_i(x) a_j a_i a_\ell = \sum_i{}' f_i(x) \sum_t{}' \beta^t_{ji\ell} a_t = \sum_t{}' \Big(\sum_i f_i(x) \beta^t_{ji\ell} \Big) a_t$$

$$\sum_t{}' \gamma_t(x) \Big(\sum_i f_i(x) \beta^t_{ji\ell} \Big) = 0 \quad , \quad \gamma \in \overline{K} .$$

$$\sum_t{}' \gamma_t(\gamma) \Big(\sum_i f_i(\gamma) \beta^t_{ji\ell} \Big) = 0 .$$

$$b(\gamma) = \sum_i f_i(\gamma) a_i$$

$$b(\gamma) \in A_{\overline{K}}$$

$$T_\gamma\Big(\sum_i \gamma_i a_i\Big) = \sum_i \gamma_i \tau_i(\gamma)$$

escogemos γ con algún $\tau_i(\gamma) \neq 0$ $\forall i$

$$\ker T_\gamma \subsetneq A_{\bar{K}}$$

$$T_\gamma(a_j\, b(\gamma)\, a_\ell) = 0 \quad \forall j, \ell .$$

$$\therefore A_{\bar{K}}\, b(\gamma)\, A_{\bar{K}} \subseteq \ker T_\gamma$$

subespacio propio.

$b(\gamma) \neq 0$, $A_{\bar{K}}\, b(\gamma)\, A_{\bar{K}} = A_{\bar{K}}$.

Caso IV : L/K es finitamente generada

$\exists F$, $K \subseteq F \subseteq L$

F/K puramente trascendente ✓

$(F = K(x_1, \dots, x_n))$

L/F algebraico

Caso V : L/K cualquiera (similar al caso II).

obs. $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$

$\lambda \in L$. $\lambda = h(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$. h función racional.

$\beta_1, \dots, \beta_r \in L$ son algebraicamente dependientes sobre K si

$f(\beta_1, \dots, \beta_r) = 0$, algún polinomio f.

L/K puramente trascendente ssi $L = K(\beta_1, \dots, \beta_r)$; $\beta_1, \dots, \beta_r$ alg. indep sobre K.

$$K[x_1, \dots, x_r] \to L$$
$$x_i \mapsto \beta_i \qquad \text{etc.}$$

Lema. Si A es central simple y $M = A$ como $B = A \otimes_K A^{op}$-módulo, entonces M es fiel.

dem. M B-módulo irreducible. $R \subseteq B$ radical, $R = \mathcal{R}(B) = \bigcap_{M \text{ B-mod ired}} \operatorname{Ann} M$

M es B/R-módulo: $(b+R).m = b.m$, $[(b+r)+R].m = (b+r).m = b.m + \cancel{r.m} = b.m$ (no depende del representante)

B/R semisimple: $B/R \cong \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$, A_i simple.

$A_i \cong M_{r_i}(D_i)$, D_i anillo de división.

- M_i módulo irreducible correspondiente es $D_i^{r_i}$ ($\dim M_i = r_i \dim D_i$) por teo de Jordan-Hölder.

A_i-módulo.

$D_i = \operatorname{End}_{A_i}(M_i)$

$\operatorname{End}_B(M) = \operatorname{End}_B(D_i^{r}) = M$

¿Por qué pasa esto?

$M = M_i$, $M \cong K^{\dim_K A_i}$ como e.v. ¿$\operatorname{End}_B(M) = $?

$\varphi : M \to M$ endomorfismo de B-módulos

φ isomorfismo.

$\varphi(axb) = a\varphi(x)b$.

$\varphi(1_A)a = \varphi(a) = a\varphi(1_A)$

$\varphi(1_A) \in Z(A) = K$

A central

A anillo, $R = \mathcal{R}(A)$

$\Rightarrow A/\mathcal{R}(A)$ semisimple.

M $A/\mathcal{R}(A)$-módulo irreducible

$(a+\mathcal{R}(A))M = aM$

$(a+\mathcal{R}(A))M = 0 \Leftrightarrow a \in \mathcal{R}(A)$

$a + \mathcal{R}(A) \in \mathcal{R}(A/\mathcal{R}(A))$

$\Rightarrow (a+\mathcal{R}(A)) \in \operatorname{Ann}(M)$, M $A/\mathcal{R}(A)$-mod ired

$\Rightarrow (a+\mathcal{R}(A))m = 0 \quad \forall m \in M$

$\Rightarrow am = 0 \quad \forall m \in M$

$\forall M$ A-mod ired

$\Rightarrow a \in \operatorname{Ann}(M) \ \forall M$-A mod ired

$\Rightarrow a \in \mathcal{R}(A)$

$\therefore \mathcal{R}(A/\mathcal{R}(A)) = \{0\}$

$A_i \cong M_{\dim A}(K)$

$B/R \cong M_{\dim A} \oplus \dots$

$\dim B = (\dim A)^2$

$\Rightarrow$ (1) No hay más sumandos

(2) $R = \{0\}$.

$\therefore$ (1) La representación es fiel.

(2) $B \cong M_{\dim A}(K)$

Algebra de cuaterniones

A c.s. $\dim_K(A)=4$. A de división.

$Z(A)=K$

$\alpha\in A$, $\alpha\notin K$ $\Rightarrow L=K(\alpha)\subseteq A$ subcuerpo

A es L-espacio vectorial.

$\Rightarrow \dim L \mid \dim A$ $\therefore \dim L = 2$.

Hecho (Teorema de Skolem-Noether) $L\subseteq A$ $\varphi: L\to A \Rightarrow \varphi(a)=bab^{-1}$, algún $b \in A$

cuerpo — algebra c.s (¿de división?)

Si $\varphi: L\to A$ homomorfismo, existe $b\in A$ tal que $bab^{-1}=\varphi(a)$ $\forall a\in A$. $\forall a\in L$

Supongamos L/K separable (en particular galoisiana) (porque $\dim_K L = 2$.)

$Gal(L/K)=\{id,\sigma\}$ $b\sigma(a)b^{-1}=\sigma^2(a)=a$ $\varphi\in Gal(L/K)=\{id,\sigma\}$

$\varphi: L\to L \hookrightarrow A$

Existe $b\in A$ tal que $bab^{-1}=\sigma(a)$ $\forall a\in L$.

$A=K[L,b]$

b^2 conmuta con b y b — debe ser L

A central

$\therefore b^2\in Z(A) = K$

$ab^2a^{-1}b^{-2}=abba^{-1}b^{-1}b^{-1}$
$=ab\,\sigma(a^{-1})\,b^{-1}$
$=a\,\sigma^2(a^{-1}) = aa^{-1} = 1_A$

$b^2\neq 0$

A algebra de división sobre K

$\Rightarrow \varphi: A\to A$
$a\mapsto bab^{-1}$ es un isomorfismo

$\varphi(a+\tilde a)=b(a+\tilde a)b^{-1}=\varphi(a)+\varphi(\tilde a)$

$\varphi(a\tilde a)=b(a\tilde a)b^{-1}=(bab^{-1})(b\tilde a b^{-1})$
$=\varphi(a)\varphi(\tilde a)$

$\varphi(ka)=b(ka)b^{-1}=k(bab^{-1})=k\varphi(a)$
$k\in Z(A)$

$\varphi(a)=0 \Rightarrow bab^{-1}=0 \Rightarrow a=0$

Si $\operatorname{char} K\neq 2$

$L=K(a)$, $a^2\in K^*$ $\sigma: L\to L$, $\sigma(a)=-a$

$\Rightarrow \sigma(a)=bab^{-1}=-a$

$\Rightarrow ab=-ba$

dos opciones dependiendo del automorfismo

$A=\langle a,b \mid a^2=\alpha\in K^*, b^2=\beta\in K^*, \boxed{ba=ab}\rangle$

$-ba=-ab$

$A=\langle a,b\mid a^2=\alpha\in K^*, b^2=\beta\in K^*, bab^{-1}=a\rangle$

char $K=2$

$L=K(a)$, $a^2+a=\alpha\in K^*$

$(x-a)(x-(a+1)) = x^2-(a+1)x-ax+a^2-a$
$= x^2-x+a^2+a$
$= x^2-x+\alpha$

$$A=\left\langle a,b \;\middle|\; \begin{matrix} a^2+a=\alpha\in K^* & bab^{-1}=a+1 \\ b^2=\beta\in K^* & ba=ab \end{matrix}\right\rangle$$

$\underline{bab=a}$.

<u>def</u>. char $K\neq 2$

$$A=\left(\frac{\alpha,\beta}{K}\right)$$ (símbolo de Hilbert).

si $b^2=\beta\in K^*$

$T: A\longrightarrow A$, $T(x)=bxb^{-1}$

$T(x+y)=T(x)+T(y)$ T K-lineal
$T(kx)=k\,T(x)$

$T^2(x)=x$ $T(T(x))=b\,T(x)b^{-1}=b(bxb^{-1})b^{-1}$
$=b^2xb^{-2}=x$.

$\Rightarrow T$ tiene valores propios 1 y -1. ✓

$V_1=C_A(b)=K(b)$ ✓ , $V_{-1}=aK(b)$ ✓ $T(x)=x=bxb^{-1}$

$L=K(b)=\{p+qb \mid p,q\in K\}$

$bab^{-1}=-a$

$T(pa+qab)=b(pa+qab)b^{-1}=bpab^{-1}+bqabb^{-1}$
$=-pa+qba=-pa-qab=-(pa+qab)$ ✓

$A\cong K(a)\oplus bK(a)$
$\cong K(b)\oplus aK(b)$

descomposición en espacios propios.

Más generalmente, sea A una K-álgebra c.s de dim n^2, y L/K una extensión de grado n cíclica que se incrusta en A.

$\mathrm{Gal}(L/K)=\langle\sigma\rangle$ $[L:K]=n$

Skolem-Noether $\Rightarrow \exists b$ tal que $bab^{-1}=\sigma(a)$, $\forall a\in L$.

$b^ra=\sigma^r(a)b^r$, $\sigma^2(a)=\sigma(\sigma(a))=b\sigma(a)b^{-1}=b^2ab^{-1}$

A L-espacio vectorial de dimensión n $(a.x=ax)$

rk.

$A\cong L^n$ por multiplicación a la izquierda

$A = L^r$ $\qquad \dim_K A = nr$

$\qquad\qquad \dim_K A = n^2$

A_L es $L\otimes_K L$-módulo. $B = L\otimes_K L \cong \underbrace{L\times\cdots\times L}_{n\text{-veces}}$

$A_L = A\otimes_K L$, $\dim_L A_L = \dim_K A$

$\dim_K A_L = \dim_K A \dim_K L$

$a\otimes 1 \longmapsto (a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{n-1}(a))$

A central simple $\Rightarrow$ A_L central simple.

$A_L \cong \mathbb{M}_r(D)$ ✓

$\Rightarrow$ $r = n$ (ejercicio).

$\therefore$ $D = K$

$B \subseteq A$, $a\otimes 1 \longmapsto \begin{pmatrix} a & & & \\ & \sigma(a) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma^{n-1}(a) \end{pmatrix}$

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda, \quad \Lambda \in L\otimes_K L$$

$b e_i = e_{i+1}$

$b a b^{-1} = \sigma(a)$

$A = L \oplus bL \oplus b^2 L \oplus \cdots \oplus b^{n-1} L$

Espacios propios de T_a (si a es generador).

$x \in b^r L$, $\quad xa = \sigma^r(a) x$.

Este tipo de álgebras se llaman álgebras cíclicas. (pendiente)

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{M}_{r_i}(\overset{?_i}{\overset{\cap}{D_i}})$$ → averiguar cuáles son los ideales de este anillo.

→ $\mathbb{M}_n(D)$ es simple (no tiene ideales biláteros)

→ corresponden a las representaciones irreducibles de $\mathcal{A}$.

Prop. Si $\operatorname{char} F \nmid |G|$, $F[G]$ es semisimple. Dem.

$$F[G] = \bigoplus_{g\in G} F_g \quad , \quad \Big(\sum_g{}' a_g g\Big)\Big(\sum_h{}' b_h h\Big) = \sum_f{}' c_f f$$

$$c_f = \sum_{gh=f}{}' a_g b_h.$$

Ejemplo $(1+f+g)(3-h) = 3+3f+3g-h-fh-gh$

$(1+g)(1-g) = 1-g^2$

$(1+2g)(1+3g) = 1+5g+6g^2$

$(1+g)(1+g^{-1}) = 2+g+g^{-1}$

Para $G = \mathbb{Z}^n$, $F[G] \cong F[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$??

Este ejemplo hay que preguntarlo al profesor.

Para $G = \{1, g\}$, $\boxed{g^2 = 1}$ $\quad \mathcal{Z}(F[G]) = F[G]$

$$F[G] = F \oplus Fg \cong \frac{F[x]}{(x^2-1)} \cong \frac{F[x]}{(x-1)} \times \frac{F[x]}{(x+1)} \cong F\times F \quad (\operatorname{char} F \neq 2)$$

¿ $F \cong Fe$ como F-mod ?

¿ se identifica $G \ni 1 \longleftrightarrow 1 \in F$?

Si $\operatorname{char} F = 2$

$$F[G] \cong \frac{F[x]}{(x-1)^2} \cong \frac{F[y]}{(y^2)} \quad \text{no es semisimple.}$$

$\bar{y}$ está en cada ideal bilátero maximal $(\bar{y}^2 = 0)$

Obs. $$\bigcap_{\wp \text{ primo}} \wp = \mathcal{N}(R) = \{a\in R \mid a^n = 0\}.$$

Ejemplo. $F=\mathbb{R}$, $G=\mathbb{Q}_8$. $\dim_F F[G]=|G|$ $\quad Q_8=\{1,-1,i,j,ij,-i,-j,ji\}$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[\mathbb{Q}_8]=8$, $\quad \mathbb{Q}_8=\langle i,j \mid \begin{smallmatrix} i^2=j^2=-1 \\ ij=-ji \end{smallmatrix} \rangle$

Existe morfismo $\varphi: \mathbb{R}[\mathbb{Q}_8] \twoheadrightarrow \mathbb{H}$ ✓ $\quad \mathbb{H}=\mathbb{R}(i)\oplus j\,\mathbb{R}(i)$

$\therefore \mathbb{R}[\mathbb{Q}_8] \cong \mathbb{H}\oplus \dots$

¿Cuáles son los otros factores de $\mathbb{R}[\mathbb{Q}_8]$?

obs. No existe $\mathbb{R}[\mathbb{Q}_8] \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\quad \begin{array}{l} i \mapsto i \\ -1 \mapsto -1 \\ j \mapsto ? \end{array}$

homo de grupo: $\begin{array}{l} \mathbb{R}[\mathbb{Q}_8] \to \mathbb{R} \\ 1, i, -i, \dots \mapsto 1 \end{array}$ $\quad$ ¿no será $\begin{array}{l} \mathbb{R}[\mathbb{Q}_8] \to \mathbb{R} \\ a \mapsto 0 \end{array}$?

$\varphi: F[G] \to A$

$g \mapsto \varphi(g)$ homo de grupos

$\bar{\varphi}: G \to A^*$

$\therefore \mathbb{R}[\mathbb{Q}_8] \cong \mathbb{H}\oplus\mathbb{R}\oplus \dots$

obs. en $\mathbb{R}[\mathbb{Q}_8]$, $\underset{\mathbb{Q}_8}{(-1)} \neq \underset{-1\in\mathbb{R}}{-}\overset{\mathbb{Q}_8}{(1)}$ $\quad$ $-(1) = -1\cdot(1)$ $\qquad ((-1)+(1)\neq 0)$.

Pequeño truco: $\mathbb{Q}_8/\{\pm 1\} \cong C_2\times C_2$ ✓ $\to$ $Z(\mathbb{Q}_8)=\{\pm 1\}=A$

existe $\mathbb{Q}_8 \twoheadrightarrow C_2\times C_2$ $\qquad \mathbb{Q}_8/A=\{A, iA, jA, ijA\}$

$\begin{array}{l} iA=-iA \\ jA=-jA \\ ij=jiA \end{array}$

se levanta a un homo de $\mathbb{R}$-álgebras $\quad \mathbb{R}[\mathbb{Q}_8] \twoheadrightarrow \mathbb{R}[C_2\times C_2]$ ok.

$Q_8 \twoheadrightarrow C_2\times C_2$ epimorfismo de grupos, $(iA)(jA)=ijA=jiA$
$=(jA)(iA)$

$\begin{array}{lcl} -1, 1 & \longmapsto & (0,0) \\ -i, i & \longmapsto & (1,0) \\ -j, j & \longmapsto & (0,1) \\ ji, ij & \longmapsto & (1,1) \end{array}$

$(iA)^2=A \qquad (ij)^2A=A$

$(jA)^2=A$

Scanned with CamScanner

$$\frac{V}{W}\otimes\frac{V'}{W'} \cong \frac{V\otimes V'}{V\otimes W' + V\otimes W}$$

$(a+bx)(c+dx) = ac + adx + bcx + bdx^2$
$= ac + (ad+bc)x$

$$\mathbb{R}[C_2\times C_2] \cong \frac{\mathbb{R}[x,y]}{(x^2,y^2)} \cong \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2)} \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{R}[y]}{(y^2)} \cong (\mathbb{R}\times\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$$

$\{a+bx+cy+dxy\}$ "

$$\cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

$\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2)}\cong\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ isomorfismo de $\mathbb{R}$-módulo.

Por lo tanto: $\mathbb{R}[Q_8]\cong \mathbb{H}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$

(existen $\boxed{4 \text{ representaciones irreducibles}}$ reales, y una cuaterniónica)

¿cuáles son?

$-1 \longmapsto 1$
$i \longmapsto 1$ ó -1
$j \longmapsto 1$ ó -1

Si ahora extendemos escalares $\mathbb{C}[Q_8]\cong\mathbb{R}[Q_8]\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$

$$\mathbb{C}[Q_8]\cong(\mathbb{H}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$$
$$\cong(\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})\oplus(\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})\oplus(\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})\oplus(\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})\oplus(\mathbb{R}\otimes\mathbb{C})$$
$$\cong(\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}.$$

$i \longmapsto \begin{pmatrix} i & \\ & -i\end{pmatrix}$ ¿qué es esto? ~~Averiguar~~ (una posibilidad)

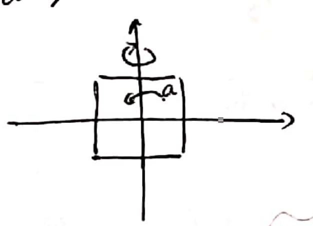
$j \longmapsto \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$

obs. $\frac{\mathbb{R}[x,y]}{(x^2,y^2)} \cong \frac{\mathbb{R}[x,y]}{(x^2)+(y^2)} \cong \frac{\mathbb{R}[x,y]}{(x^2)\otimes\mathbb{R}[y]+\mathbb{R}[x]\otimes(y^2)}$ $\qquad \mathbb{R}[x,y]\cong\mathbb{R}[x]\otimes\mathbb{R}[y]$

Ejemplo. $D_4 = \left\langle a,b \;\middle|\; \begin{matrix} a^4=b^2=e \\ ab=ba^{-1}\end{matrix}\right\rangle$

$\mathbb{H} = \mathbb{R}(i)\oplus j\,\mathbb{R}(i)$
$= \mathbb{C}\oplus j\,\mathbb{C}$
$\cong \mathbb{C}\times\mathbb{C}$

$$D_4/\langle a^2\rangle \cong C_2\times C_2$$



$a \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ genera representación

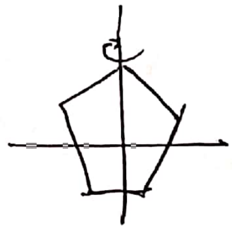
$b \longmapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad \mathbb{R}[D_4]\to M_2(\mathbb{R})$

$$\mathbb{R}[D_4]\cong M_2(\mathbb{R})\oplus\overbrace{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}}^{\mathbb{R}[C_2\times C_2]}$$

$$\mathbb{R}[D_3]\cong M_2(\mathbb{R})\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$$

$\mathbb{R}[D_6] \cong M_2(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

$$\varphi \qquad a \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi/6 & -\operatorname{sen} 2\pi/6 \\ \operatorname{sen} 2\pi/6 & \cos 2\pi/6 \end{pmatrix}$$



$$b \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \qquad a \mapsto -1$$
$$b \mapsto 1$$

$$\psi \qquad a \mapsto \begin{pmatrix} -\cos 2\pi/6 & \operatorname{sen} 2\pi/6 \\ -\operatorname{sen} 2\pi/6 & -\cos 2\pi/6 \end{pmatrix}$$

$$b \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\psi(x) = \lambda(x)\varphi(x)$

$\psi(xy) = \lambda(xy)\varphi(xy) = (\lambda(x)\varphi(x))(\lambda(y)\varphi(y))$

¿Son φ y ψ la misma representación?

equiv. $\Leftrightarrow$ $\exists A$ tq : $\psi(x) = A\varphi(x)A^{-1} \quad \forall x \in D_6$?

Resp: No, porque $tr\, \varphi(a) = 2\cos \pi/3$

$tr\, \psi(a) = -2\cos \pi/3$

$\therefore \quad \mathbb{R}[D_6] \cong M_2(\mathbb{R}) \oplus M_2(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

obs. Para $F = \overline{F}$ (alg. cerrado), char $F \nmid |G|$, $F[G] = \bigoplus_{i=1}^{n} M_{r_i}(F)$

$$|G| = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 .$$

para F cualquiera, $|G| = \sum_{i=0}^{n} r_i^2 \dim_F D_i$.

Sea M $F[G]$- módulo. $N \subseteq M$ submódulo, basta probar que $M = N \oplus N'$, N' submódulo. Sea $M = N \oplus W$, W e.v

tenemos $P: M \to M$, $P|_N = id$, $P|_W = 0$

$P(n,w) = (n,0)$, $P^2 = P$

- W submódulo ssi P es homomorfismo de módulos,

$$W = \ker P .$$

W submódulo $\Rightarrow g.(n,w) = (g.n, g.w)$

$$P(g.(n,w)) = (g.n,0) = g.(n,0) = gP(n,0)$$

Queremos construir $\tilde{P}$ proyector que sí sea homomorfismo de módulos.

obs $\varphi : F[G] \to \mathrm{End}_F(M)$, $\varphi(g)(m) = g.m$

$\tilde{P}(g.m) = g\tilde{P}(m) \Leftrightarrow \tilde{P} \circ \varphi(g) = \varphi(g) \circ \tilde{P}$.

Consideremos $\tilde{P} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G}' \varphi(g) P \varphi(g)^{-1}$. $\tilde{P}$ es proyector y homomorfismo.

$$\tilde{P}\varphi(h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g} \varphi(g) P \varphi(g)^{-1} \varphi(h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g}' \varphi(g) P \varphi(h^{-1}g)^{-1}$$ $f = h^{-1}g$, $g = hf$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G}' \varphi(hf) P \varphi(f)^{-1} = \varphi(h) \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G}' \varphi(f) P \varphi(f)^{-1} = \varphi(h)\tilde{P}$$

$P\tilde{P} = \tilde{P}$, $\mathrm{Im}\, \tilde{P} \subseteq N$, $\underset{\overset{\cap}{N}}{\tilde{P}(m)} = \frac{1}{|G|} \underbrace{\sum_{g \in G}' \varphi(g) P \underbrace{\varphi(g)^{-1}(m)}_{\in N}}_{N \text{ submódulo}}$

$$\underbrace{P\tilde{P}(m)}_{\in N} = \tilde{P}(m)$$

$$\therefore \; P\tilde{P} = \tilde{P}$$

$$\tilde{P}^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G}{}' \varphi(g) P \varphi(g)^{-1} \tilde{P} = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G}{}' \varphi(g) \tilde{P} \varphi(g)^{-1}$$

$$= \tilde{P} \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \varphi(gg^{-1}) = \frac{\tilde{P}}{|G|} \sum_{g\in G}{}' 1_{End(M)} = \tilde{P}$$

Ahora, $\operatorname{Im} \tilde{P} \subseteq N$

$$n \in N, \quad \tilde{P}(n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G}{}' \varphi(g) P \underbrace{\varphi(g)^{-1}(n)}_{\in N}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G}{}' \varphi(g) \varphi(g)^{-1} n = n$$

$$\therefore \; \operatorname{Im} \tilde{P} = N$$

$$\therefore \; \ker \tilde{P} = N', \quad M = N \oplus N' \quad \blacksquare$$

Producto tensorial de representaciones.

G grupo, M, N $F[G]$-módulos.

$M \otimes_K N$ es $F[G]$-módulo.

$$End_F(M) \otimes_F End_F(N) \longrightarrow End_F(M \otimes N)$$

$$(T \otimes S)(m \otimes n) = T(m) \otimes S(n)$$

$$(T \otimes S)(T' \otimes S') = (TT') \otimes (SS')$$

$$\varphi : G \to \mathrm{Aut}_F(M) \qquad , \qquad \varphi \otimes \psi : G \to \mathrm{Aut}_F(M \otimes N)$$
$$\psi : G \to \mathrm{Aut}_F(N) \qquad \qquad g \mapsto \varphi(g) \otimes \psi(g)$$

En D_6 , debemos estudiar $\Psi = \varphi \otimes \lambda$.

Representaciones de Grupos

$K[G]$ álgebra de Grupo.

Af. $\operatorname{char} K \nmid |G| \Rightarrow K[G]$ semi-simple

obs. $\operatorname{char} K = 0 \Rightarrow K[G]$ semi simple. Lo que importa es que $\frac{1}{|G|} \in K^*$.

Def $K = \overline{K}$. $\varphi : G \to \mathbb{M}_n(K)^*$

$\varphi : K[G] \to \mathbb{M}_n(K)$

$\chi_\varphi : G \to K$ el caracter de φ. $\chi_\varphi(g) = tr(\varphi(g))$

Prop. si $\forall g \in G : \psi(g) = b\varphi(g)b^{-1} \Rightarrow \chi_\psi = \chi_\varphi$

* si $\chi_\psi \neq \chi_\varphi$, entonces φ, ψ no definen la misma representación del grupo.

$K[G] \cong \bigoplus \mathbb{M}_{n_i}(K)$ ¿por qué?

Ejemplo Sea G grupo abeliano. $K[G] \cong \prod_{i=1}^{n} K$ (porque $K = \overline{K}$).

Las representaciones irreducibles son $\pi_1, \ldots, \pi_n$. $\pi_i : K[G] \to K$ proyección i-ésima coordenada.

$\tilde{\pi}_i : G \to \mathbb{M}_1(K) \cong K$. Más generalmente, cuando

$$\psi : G \to \mathbb{M}_m(K)^*, \quad \psi(g) = \begin{pmatrix} \chi_1(g) & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_m(g) \end{pmatrix}$$

$\chi_1, \ldots, \chi_n$ representaciones de dimensión 1.

$$\chi_\psi = \sum_{i=1}^{n} \chi_i$$

En dimensión 1, el caracter y la rep. "coinciden."

- $n = \dim_K K[G] = |G|$. Hay tantas representaciones irreducibles como elementos de G.

Scanned with CamScanner

$C = \{ f : G \to K \}$, $\dim_K C = |G|$ (Hay tantos caracteres como $|G|$)

$\chi_i \in C$,

¿ los caracteres son linealmente independientes ?

$$\sum_{\chi} \alpha_\chi \chi = 0 \iff \forall g : \sum_{\chi} \alpha_\chi \chi(g) = 0 . \quad (*)$$

Si $G = \{ g_1, \dots, g_n \}$, representaciones $\chi_1, \dots, \chi_n$

$$(*) \iff \begin{pmatrix} \chi_1(g_1) & \dots & \chi_n(g_1) \\ \vdots & & \\ \chi_1(g_n) & \dots & \chi_n(g_n) \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{\chi_1} \\ \vdots \\ \alpha_{\chi_n} \end{pmatrix}}_{= \vec{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\exists \vec{\alpha} \neq 0$ ssi

$$\begin{vmatrix} \chi_1(g_1) & \dots & \chi_n(g_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \chi_1(g_n) & \dots & \chi_n(g_n) \end{vmatrix} = 0$$

ssi $\vec{\beta} \neq 0$ tq

$$\begin{pmatrix} \chi_1(g_1) & \dots & \chi_1(g_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \chi_n(g_1) & \dots & \chi_n(g_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi(g_i) = 0 \quad \forall \chi$$

Sea $\hat{G} := \{ \chi : G \to K \text{ caracter irred} \}$

$\hat{G}$ grupo con la multiplicación : $\chi \cdot \psi(g) = \chi(g)\psi(g)$

$\chi^{-1}(g) = \chi(g)^{-1}$

$$\chi^{-1}(g)\chi^{-1}(h) = \chi(g)^{-1}\chi(h)^{-1} = (\chi(g)\chi(h))^{-1} = \chi(gh)^{-1} = \chi^{-1}(gh)$$

obs. $tr(AB) \neq tr(A)tr(B)$ salvo en dimensión 1.

Sea $b : C \times C \to K$ forma bilineal.

$$b(f,h) = \sum_{g\in G}{}' f(g)h(g^{-1})$$

$$b(f,h) = \sum_{g}{}' f(g)h(g^{-1}) = \sum_{g}{}' h(g^{-1})f(g) = \sum_{g^{-1}}{}' h(g)f(g^{-1}) = \sum_{g}{}' h(g)f(g^{-1})$$

b es una forma bilineal simétrica ($b(f,h) = b(h,f)$) (ejercicio)

Sea $\psi \neq \chi$. $\exists g_0 \in G : \psi(g_0) \neq \chi(g_0) \iff \psi(g_0)\chi(g_0^{-1}) \neq 1$

$\iff \chi(g_0)\psi(g_0^{-1}) \neq 1$

$$\sum_{g\in G}{}' \chi(g)\psi(g^{-1}) \underset{g=hg_0}{=} \sum_{h\in G}{}' \chi(hg_0)\psi(g_0^{-1}h^{-1}) = \chi(g_0)\psi(g_0^{-1})\sum_{h\in G}{}' \chi(h)\psi(h^{-1})$$

$\Rightarrow b(\chi,\psi) = \chi(g_0)\psi(g_0^{-1})\, b(\chi,\psi) \quad \Rightarrow (1 - \chi(g_0)\psi(g_0^{-1}))\, b(\chi,\psi) = 0$

$\therefore b(\chi,\psi) = 0$ (son ortogonales 2 a 2)

$$b(\chi,\chi) = \sum_{g}{}' \chi(g)\chi(g^{-1}) = |G| \neq 0.$$

La forma bilineal es no degenerada.

Luego tenemos las matrices:

$$\Xi = \begin{pmatrix} \chi_1(g_1) & \dots & \chi_1(g_n) \\ \vdots & & \\ \chi_n(g_1) & \dots & \chi_n(g_n) \end{pmatrix}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_1(g_1^{-1}) & \dots & \chi_1(g_n^{-1}) \\ \vdots & & \\ \chi_n(g_1^{-1}) & \dots & \chi_n(g_n^{-1}) \end{pmatrix}$$

Matriz de Gramm de b :

$$\underbrace{(b_{ij})_{ij}}_{\substack{\shortparallel \\ \text{Gramm}(b)}} = \begin{pmatrix} b(x_1,x_1) & \dots & b(x_n,x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ b(x_1,x_n) & \dots & b(x_n,x_n) \end{pmatrix}$$

$b \sim b' \Leftrightarrow \text{Gramm}(b) = P^t \, \text{Gramm}(b) \, P$

Si $\det(\text{Gramm}(b)) \neq 0$, b se dice no degenerada; esto es equivalente a que $b(v,w) = 0 \ \forall w \to v = 0$.

Af. Si char $K \neq 2$, b tiene base ortogonal (Gramm-Schmidt)

Obs. $b(x,y) = x^t \underset{\uparrow \, \text{Gramm}(b)}{A} y$. $y = Py'$, $x = Px'$

$$b'(x',y') = b(x,y)$$

$$b'(x',y') = (Px')^t A (Py') = x'^t \underbrace{P^t A P}_{= \text{Gramm}(b')} y'$$

Obs. $\det(\text{Gramm}(b))$ es el discriminante de la forma b.

Operando lo anterior, $\text{Gramm}(b) = \Xi \, \Psi^t$

$$\det(\text{Gramm}(b)) = \det(\Xi) \det(\Psi)$$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\overset{\shortparallel}{\text{disc}(b)}} \iff \overset{\shortparallel}{0}$$

Como $\chi_{i+1} \in \langle \chi_1, \dots \chi_i \rangle$

$$\mathrm{Gramm}(b) = \begin{pmatrix} |G| & & \\ & \ddots & \\ & & |G| \end{pmatrix}$$

Así, $\chi_1, \dots, \chi_n$ es una base ortogonal. En particular,

$$\hat{b}(\chi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_g{}' \chi(g)\psi(g^{-1})$$

Def $E : G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$, $g \longmapsto E_g$, donde $E_g(\chi) = \chi(g)$.

Tenemos $|\hat{\hat{G}}| = |\hat{G}| = |G|$

$\det(\Xi^t) \neq 0$, $\{E_g \mid g \in G\}$ base de $\hat{C} = \{f : \hat{G} \longrightarrow k\}$,

para ello, basta considerar:

$$\Xi^t = \begin{pmatrix} \chi_1(g_1) & \dots & \chi_n(g_1) \\ \vdots & & \\ \chi_1(g_n) & \dots & \chi_n(g_n) \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \chi_1^{-1}(g_1) & \dots & \chi_n^{-1}(g_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \chi_1^{-1}(g_n) & \dots & \chi_n^{-1}(g_n) \end{pmatrix}$$

Luego hay que hacer el mismo procedimiento anterior.

obs. $\hat{G}$ se llama el dual de Pontriagyn de G (Averiguar)

obs. Rep. irred dim 1 son caracteres multiplicativos.

Para G grupo abeliano, $\varphi : G \longrightarrow M_n(K)$ cualquiera

$$\varphi(g) = \begin{pmatrix} \chi_{i_1}(g) & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_{i_m}(g) \end{pmatrix}$$

$$\chi_\varphi = \sum_{l=1}^{m} \chi_{i_l} = \chi_{i_1} + \dots + \chi_{i_l}$$

$b(f,h) = \sum_g f(g)h(g^{-1})$

$$\chi_\varphi = \sum_{i=1}^{n} n_i \chi_i \quad , \quad b(\chi_\varphi, \chi_i) = |G|\, n_i \quad , \text{donde}$$

$$\boxed{n_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \chi_\varphi(g)\chi_i(g^{-1})}$$

Ahora, para G grupo cualquiera, K algebraicamente cerrado,

$M_{n_i}(K)$ simple. $Z(M_n(A)) = \{cI \,/\, c \in Z(A)\}$

$$K[G] = \prod_{i=1}^{n} M_{n_i}(K) \quad , \quad Z(K[G]) = Z\Big(\prod_{i=1}^{n} M_{n_i}(K)\Big) = \prod_{i=1}^{n} Z(M_{n_i}(K)) = \prod_{i=1}^{n} \{cI / c\in Z(K)\} = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\{cI / c \in K\}}_{\cong K} = \prod_{i=1}^{n} K$$

$$Z := Z(K[G]) = \prod_{i=1}^{n} K \quad , \quad \dim_K Z = n$$

$\mu = \sum_g \alpha_g g \in K[G]$, tenemos $\mu \in Z \iff g\mu g^{-1} = \mu \quad \forall g \in G$.

$h\mu h^{-1} = h\Big(\sum_g \alpha_g g\Big)h^{-1} \overset{ok}{=} \sum_g \alpha_g hgh^{-1}$

$$h\mu h^{-1} = \sum_g \alpha_g hgh^{-1} = \sum_g \alpha_{h^{-1}gh}\, g \quad , \quad \mu = \sum_g \alpha_g g = \sum_{h^{-1}gh} \alpha_{h^{-1}gh}\, \hat{g} = \sum_{\hat{g}} \alpha_{h^{-1}\hat{g}h}\, \hat{g}$$

$\mu = h\mu h^{-1} \ \forall h$ ssi $\boxed{\alpha_{h^{-1}gh} = \alpha_g} \ \forall h$ $\quad \forall h: h\mu h^{-1} = \mu \iff \sum_g \alpha_g g = \sum_g \alpha_{h^{-1}gh}\, g \Rightarrow \boxed{\alpha_g = \alpha_{h^{-1}gh}}$

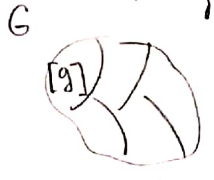
$\Rightarrow \mu \in Z : \alpha_g = \alpha_{[g]}$

En tal caso, $\alpha_g = \alpha_{[g]}$ ok. ($[g]$ clase de conjugación).

$$\boxed{\mu = \sum_{[g]} \alpha_{[g]} \Big(\sum_{g\in[g]} g\Big)}$$

¡sólo cuando $\mu \in Z$! ok

Cuando $\mu = \sum_g \alpha_g g \in Z(K[G])$, $\mu = \sum_g \alpha_{h^{-1}gh}\, g \quad \forall h \in G$



$\boxed{\alpha_{[g]} \in K}$

$$\left\{ \sum_{g\in[g]}' g \;\middle|\; [g] \text{ clase de conjugación} \right\} \quad Z \ni \mu = \sum_{[g]}' \alpha_{[g]} \left(\sum_{g\in[g]}' g \right)$$ de manera única!

base de Z.

dim Z = nº de clases de conjugación. ok.

(*) Conclusión. # representaciones irreducibles = # clases de conjugación. (importante!)
(para un grupo cualquiera)
— o —
asumido por el momento hasta que pueda demostrarlo.

Sea V un G-módulo,

$$\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(V) \text{ homomorfismo de } G\text{-módulos.}$$
$\varphi(g) : V \longrightarrow V$ invertible

$$g.v = \varphi(g)(v)$$

$V^G \subseteq V$ donde $V^G = \{ v \in V \mid g.v = v \quad \forall g \in G \}$

$g.v = v \iff \varphi(g)v = v$

def. $\pi := \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G}' \varphi(g)$ $\quad \pi : V \longrightarrow V$

Prop. (0) π es transformación lineal ✓

(1) $\pi : V \longrightarrow V^G$ ✓

(2) $\pi^2 = \pi$ ✓

(3) $\pi(V) = V^G$ ✓

$\pi(x) = x \quad \forall x \in V^G$ (prop. de las proyecciones).

$x \in V^G \Rightarrow \exists y \in V$ tq $\pi(y) = x \Rightarrow \pi^2(y) = \pi(x)$

$\therefore \pi(x) = \pi^2(y) = \pi(y) = x$

$\therefore \forall x \in V^G : \pi^2(x) = x$

dem. (0) ejercicio

(1) $$\varphi(h)\pi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G}' \varphi(h)\varphi(g)(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G}' \varphi(hg)(v) = \pi(v)$$

V^G

$\therefore \pi(v) \in V^G$ ✓

$\varphi(g)(\pi(v)) = \pi(v)$

$g\,\pi(v)$

(2) $$\pi(\pi(v)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \varphi(g)(\pi(v)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G}' \pi(v) = \pi(v)$$

(3) $v \in V^G$, $\varphi(g)(v) = v$

$$\Rightarrow \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G}' \varphi(g)(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} v = v \quad \therefore \pi(v) = v. ✓$$

→ Así $\pi : V \to V^G$ es una proyección. En particular, $\boxed{\operatorname{tr}\pi = \dim_K V^G}$

Por otro lado: $\operatorname{tr}(\pi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \chi_\varphi(g)$ $[\pi] = \left(\begin{array}{c|c} V^G & \\ \hline & 0 \end{array}\right)$ → identidad por $\pi(x)=x$ $x\in V^G$

Relación entre los caracteres de las representaciones de un grupo finito y la dimensión de su subespacio invariante. $\boxed{\dim_K V^G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\varphi(g)}$

En síntesis: φ representación → χ_φ carácter → $\dim_K V^G$ subespacio G-invariante

$C = \{ f : G \to K$ cte en clases de conjugación $\}$; $b : C \times C \to K$

$(f, f') \mapsto \sum_{g\in G} f(g) f'(g^{-1})$

Sean χ, ψ caracteres irreducibles. M, N módulos correspondientes,

$L = \operatorname{Hom}_K(M,N)$.

Es una acción válida.

Af. L es un G-módulo. $T\in L$, $T : M\to N$, donde $\boxed{g.T(m) = g.T(g^{-1}m)}$

En particular, para $\chi = \operatorname{tr}\varphi$, $\psi = \operatorname{tr}\omega$

$$\boxed{g.T = \omega(g)\circ T\circ \varphi(g)^{-1}}$$ obvio.

$(gh).T(m) = (gh)T((gh)^{-1}m)$
$= gh\,T(h^{-1}g^{-1}m)$
$= g(h.T(g^{-1}m))$
$= g.(h.T(m))$

obs. $L^G = \operatorname{Hom}_{K[G]}(M,N)$ debe cumplir $T(g.m) = gT(m)$ $e.T(m) = e.T(e^{-1}m) = T(m)$

Tenemos que $\dim_K L^G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_L(g)$. (Ahora busquemos χ_L).

Recordar que $\operatorname{Hom}_K(M,N) = M^*\otimes_K N$.

$\varphi^* : G \to M^*$
$g \mapsto \varphi^*(g) : M\to K$
$\varphi^*(g)m = \varphi(g^{-1})m$?

Con $g.s(m) = s(g^{-1}m)$, M^* pasa a ser G-módulo

$M^* = \{\varphi : M\to K \mid \varphi$ K-lineal$\}$

$(g.s)(x) = s(g^{-1}x)$

$gh.s(m) = s((gh)^{-1}m) = s((h^{-1}g^{-1})m)$
$= s(h^{-1}(g^{-1}m)) = h.s(g^{-1}m)$
$= g.(h.s(m))$
$e.s(m) = s(e^{-1}m) = s(m)$

$\Rightarrow (s.\varphi^*(g)^t)x = s(\varphi(g^{-1})x)$ no queda muy claro este paso

$\Rightarrow \varphi^*(g) = \varphi(g^{-1})^t$

$\therefore \chi_{M^*}(g) = \chi_\varphi(g^{-1})$.

Así, $\chi_L(g) = \chi(g^{-1})\psi(g)$

$\therefore \dim_K L^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})\psi(g)$

Por otro lado, $\mathrm{Hom}_K(M,M) \cong D \overset{\overline{K}=K}{=} K$,

$\therefore \dim_K L^G = \begin{cases} 0 & \text{si } M \ncong N \\ 1 & \text{si } M \cong N \end{cases}$

En particular, $\dim V = \chi(e)$
$\dim L = \chi(e)\psi(e)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})\psi(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } \psi \neq \chi \\ 1 & \text{si } \psi = \chi . \end{cases}}$ (relación de ortogonalidad)

Scanned with CamScanner

caracteres irreducibles = # representaciones irreducibles = # clases de conjugación.

__Corolario__. $\{\chi_i\}_{i=1}^{r}$, $r =$ # clases de conjugación. Es base de C.

$\rho_i(g) = A\rho_j(g)A^{-1}$

__Observación__. Sabemos que $\rho_i \cong \rho_j \Rightarrow \chi_i = \chi_j$, pero $\rho_i \not\cong \rho_j$ entonces en el teorema previo, como $M_i \not\cong M_j$, entonces

caracteres irreducibles

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g\in G}' \chi_i(g^{-1})\chi_j(g) = 0 \checkmark$$

pero como $\chi_i = \chi_j$: $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}' \chi_i(g^{-1})\chi_j(g) = 1$. Por ello, $\rho_i \cong \rho_j$.

Luego # caracteres irred = # rep. irreducibles. | ¿representaciones equivalentes producen módulos adyacentes isomorfos?

obs. $\varphi : G \to M_n(K)^*$, $\chi_\varphi : G \to K$, $\boxed{\chi_\varphi = \sum_{i=1}^{n}{}' \alpha_i \chi_i}$, χ_i = caracter irreducible.

{Caracteres irred} forman una base en $\{\varphi : G \to K \mid \varphi$ de clase$\}$

Sea M_φ módulo asociado : $M_\varphi = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i^{n_i}$, tomando trazas y comparando:

Si car $K = 0$, los n_i están completamente determinados por la representación (y por χ_φ).

Asumimos que $K = \mathbb{C}$. Consideramos G grupo

$eae^{-1} = a$
$a^2aa^{-2} = a$
$bab = a^2$
$(ab)a(ab)^{-1} = (ab)ab^{-1}a^{-1}$
$= aa^2a^{-1} = a^2$
$(a^2b)a(a^2b)^{-1} = a^2bab^{-1}a^{-2}$
$= aa^2a^{-2} = a$

$bab^{-1} = a^2$
$ba = a^2b$

Ejemplo. $G = D_3$, las representaciones irreducibles son :

$ebe^{-1} = b$
$aba^{-1} = abaa = aa^2ba = a^3a^2b = a^2b$
$a^2ba^{-2} = a^2ba = a^4b = ab$
$bbb^{-1} = b$
$(ab)b(ab)^{-1} = ab^2b^{-1}a^{-1} = aba$
$= aa^2b = b$
$(a^2b)b(a^2b)^{-1} = a^2bbb^{-1}a = a^2ba$
$= a^2a^2b = a^4b = ab$

¿Cuales son las clases de conj. de D_3?

$D_3 = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$

$[e] = \{e\}$
$[a] = \{a, a^2\}$
$[a^2] = [a]$
$[b] = \{b, a^2b, ab\}$
$[ab] = [b]$
$[a^2b] = [b]$

φ

$a \longmapsto 1 \quad 1 \qquad R_{120} = \begin{pmatrix} \cos 120 & -\operatorname{sen} 120 \\ \operatorname{sen} 120 & \cos 120 \end{pmatrix}$

$b \longmapsto 1 \quad -1 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Luego para la última representación : $\chi_\varphi(b) = 0$, $\chi_\varphi(a) = 2\cos 120 = -1$

| Clases de conjugación de D_3
$[e], [a], [b]$

Las clases de conjugación : $[e]$, $[a]$, $[b]$ cumplen

$$\chi_\varphi(e) = tr\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} = 2 \quad (\text{Siempre } \chi_M(e) = \dim_K M)$$

En este caso, $\vec{\chi} = (\chi(a), \chi(b), \chi(b))$, entonces:

$$B(\vec{\chi}, \vec{\chi}') = \frac{1}{|G|}\left(\chi(e)\chi(e) + 2\chi(a)\chi'(a) + 3\,\chi(b)\chi'(b)\right)$$

$b^{-1} = b$, a^{-1} en la misma clase de a.

observe que: $\vec{\chi}_1 = (1,1,1) \leftarrow$ asociado a la representación 1,

$\vec{\chi}_2 = (1,1,-1)$

Si $\vec{\chi}_3 = (2, x, y)$. Luego

$$B(\vec{\chi}_3, \vec{\chi}_1) = \frac{1}{6}(2\cdot 1 + 2x + 3y) = 0 \qquad \text{e.d.:} \quad \begin{aligned} 2x+3y &= -2 \\ 2x-3y &= -2 \end{aligned}$$

$$B(\vec{\chi}_3, \vec{\chi}_2) = \frac{1}{6}(2 + 2x - 3y) = 0$$

$\Rightarrow x = -1$, $y = 0$. Observar

$$B(\vec{\chi}_3, \vec{\chi}_3) = \frac{1}{6}\left(2\cdot 2 + 2(-1)(-1) + 2\cdot 0\cdot 0\right) = 1$$

$$= \dim_{\mathbb{C}[G]}\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(M_3, M_3)\right).$$

Representación regular: $\mathbb{C}[G]$ como $\mathbb{C}[G]$-módulo, con acción $g\cdot h = gh$, $\forall g, h \in G$ y extender linealmente.

Recordemos que $M = \langle h \mid h \in G \rangle_{\mathbb{C}}$. En este caso:

$$\chi_\varphi(g) = tr(\varphi(g)) = \begin{cases} |G|, & g = e \\ 0, & g \neq e. \end{cases}$$

Luego $\vec{\chi_\varphi} = (3,0,1)$,

$$B(\chi_\varphi, \chi_1) = \frac{1}{6}(3\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1) = \frac{1}{6}(3+3) = 1$$

$$B(\chi_\varphi, \chi_2) = \frac{1}{6}(3\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 1 + 3(1)(-1)) = 0$$

$$B(\chi_\varphi, \chi_3) = \frac{1}{6}(3\cdot 2 + 2\cdot 0\cdot(-1) + 3\cdot 1\cdot 0) = 2$$

Luego $\chi_\varphi = \chi_1 + \chi_3$. Así, $M = M_1 \oplus M_2$, donde $\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$ genera a M_1 por dimensión.

Sea $M \cong M_\varphi / \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle \cong M_3$ (pués $M_1 = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$, $M_\varphi \cong M_1 \oplus M_2$)

Ejemplo. Sea M módulo de permutación ed :

$$\varphi(g)(e_i) = e_{\lambda(g)(i)}$$

con $\lambda : G \longrightarrow S_n$

Así,
$$\chi_\varphi(g) = \# \mathrm{Fig}(g)$$

Luego $M \cong M_1 \oplus \dots$, donde $\chi_\varphi = m\chi_1 + \dots$ y donde :

$$m = B(\chi_\varphi, \chi_1) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \chi_\varphi(g)\, \chi_1(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \# \mathrm{Fix}(g)$$

χ_1 = caracter trivial.

Por otro lado : $m = \dim I$, donde $M_1^m = I \leq M_\varphi$

$$I = \{ v \in V \mid \varphi(g)(v) = v \}$$

pd : I tiene base $\{ \sum_{i\in\sigma} \vec{e_i} \}$ σ órbita

Ejemplo. Si $G = D_3$: $\vec{\chi}_\varphi = (6,0,0)$. Tenemos los vectores de la base:

$$\vec{\chi}_1 = (1,1,1)$$
$$\vec{\chi}_2 = (1,1,-1)$$
$$\vec{\chi}_3 = (2,-1,0)$$

observe que :

$$B(\chi_\varphi, \chi_1) = \frac{1}{6}(6\cdot 1) = 1$$

$$B(\chi_\varphi, \chi_2) = 1$$

$$B(\chi_\varphi, \chi_3) = \frac{1}{6}(6\cdot 2) = 2$$

Luego $\vec{\chi}_\varphi = \vec{\chi}_1 + \vec{\chi}_2 + 2\vec{\chi}_3$ ed : $\chi_\varphi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3$

Luego : $\varphi \cong \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \varphi \oplus \varphi$, a nivel de módulos

$$M_\varphi \cong M_1 \oplus M_2 \oplus M_\varphi \oplus M_\varphi$$ ← más fácil de calcular (ver en general).

obs Como $\mathbb{C}[G]$-módulo : $\mathbb{C}[G] \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times M_2(\mathbb{C})$

$\mathbb{C}^2$ $\mathbb{C}^2$: módulos sobre $\mathbb{C}[G]$.

Ejemplo. G actúa en $\{1,2,3\}$, pues $G \cong S_3$ donde $e \overset{?}{\mapsto} id$, $a \overset{?}{\mapsto} (123)$, $b \overset{?}{\mapsto} (12)$. Sea $M = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, definimos la acción

$$\varphi(g)(e_i) = e_{\lambda(g)(i)}$$

$$\chi_\varphi(g) = \# \operatorname{Fix}(g)$$

dem. $\varphi(g) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_{\lambda(g)(i)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\lambda(g)^{-1}(i)} \vec{e}_i$

Por ello, $\alpha_i = \alpha_{\lambda(g)^{-1}(i)}$, si $\varphi(g)v = v$ ed: α constante en cada órbita

$$\therefore \quad v = \sum \alpha_i e_i = \sum_{\sigma} \alpha_\sigma \left(\sum_{i\in\sigma} e_i \right)$$

Luego $\{ \sum_{i\in\sigma} \vec{e}_i \}$ σ órbita es base.

corolario. $\# \text{órbitas} = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \# \operatorname{Fix}(g)$

Ejemplo. $D_5 = \langle a, b \mid a^5 = b^2 = e,\ ab = b^{-1}a \rangle$

Tenemos las clases de conjugación e, a, b, a^2

Teníamos las representaciones cuyos caracteres son

			χ_1	φ	
(1)	e	1	1	2	2
(2)	a	1	1	$2\cos 72 = s$	x
(5)	b	1	-1	0	y
(2)	a^2	1	1	$2\cos 144 = r$	z

Tenemos la representación $b \mapsto \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$

$$a \mapsto \begin{pmatrix} \cos 72 & -\operatorname{sen} 72 \\ \operatorname{sen} 72 & \cos 72 \end{pmatrix}$$

Por la ortogonalidad: $\begin{cases} 2\cdot 1 + 2x + 5y + 2z = 0 \\ 2\cdot 1 + 2x - 5y + 2z = 0 \end{cases} \quad \therefore y = 0$

$$\begin{cases} x + z = -1 \\ 4 + 4xs + 4zr = 0 \end{cases}$$

$$z = \frac{s-1}{r-s} \quad , \quad x = \frac{r-1}{s-r}$$

obs. Si $\eta^5 = 1$, $\eta = e^{2\pi i/5} = \cos 72^\circ + i \operatorname{sen} 72^\circ$

Luego $2\cos 72^\circ = \eta + \bar{\eta}$, pero

$$(\eta + \bar{\eta})^2 = (\eta + \eta^4)^2 = \eta^2 + \eta^3 + 2$$

Luego $\mu = \eta + \bar{\eta}$

$$u + u^2 = \eta + \eta^4 + \eta^2 + \eta^3 + 2 = 1$$

$$\therefore \quad u = \frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0 \quad \text{(el negativo no nos sirve)}$$

Luego $s = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $r = s^2 - 2 = -1 - \sqrt{5}/2$

Por lo tanto, $z = \frac{3-\sqrt{5}}{1+2\sqrt{5}}$, $x = \frac{-4-\sqrt{5}}{1+2\sqrt{5}}$

ed: $\vec{\chi}_4 = \left(2, \frac{-4-\sqrt{5}}{1+2\sqrt{5}}, 0, \frac{3-\sqrt{5}}{1+2\sqrt{5}}\right)$

obs. $\chi_1 \otimes \Psi = \Psi$.

Busquemos representaciones de $G = S_5$.

Para $X = \{1,2,3,4,5\}$, $G \times X \longrightarrow X$, $\sigma . e_i = e_{\sigma(i)}$. Se extiende a una representación de G en $M_5(K)^*$.

Supongamos que $K = \mathbb{C}$. Calculamos χ_ρ para las clases de conjugación $[g]$.

$[g] \Rightarrow$ id, (12), (123), (1234), (12345), $(12)(34)$, $(12)(345)$

$$\rho(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a posteriori (primero hacer cálculo).

Así,

	$[g]$	χ_ρ	χ_4 (*)	Sgn	Sgn χ_4	$[\varphi(g)]$
$1 \longleftarrow$	id	5	4	1	4	id
$10 \longleftarrow$	(12)	3	2	-1	-2	$(12)(34)(56)$
$20 \longleftarrow$	(123)	2	1	1	1	$(123)(456)$
$30 \longleftarrow$	(1234)	1	0	-1	0	(1234)
$24 \longleftarrow$	(12345)	0	-1	1	-1	(12345)
$15 \longleftarrow$	$(12)(34)$	1	0	1	0	$(12)(34)$
$20 \longleftarrow$	$(12)(345)$	0	-1	-1	1	(123456)

$\underbrace{\qquad}_{\chi_\rho(g)^2}$

χ_ρ irreducible? : $b(\chi_\rho, \chi_\rho) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \chi_\rho(g^{-1})$

$$= \frac{1}{120}(25 + 90 + 80 + 30 + 15) = 2$$

$\chi_\rho = \sum_i n_i \chi_i \longrightarrow$ caracteres irreducibles.

$$b(\chi_\rho, \chi_\rho) = \sum_i n_i^2 .$$

Scanned with CamScanner

$$\chi_{\rho} = \chi_{0} - \chi_{\psi}$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} e_i \quad , \quad g \cdot v = v$$

$$\chi_{\psi} = \chi_{\rho} - \chi_{0} . \quad (*)$$

Busquemos ψ: $\quad M = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle / \langle e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 \rangle$.

$$M = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4 \rangle \quad , \quad \bar{e}_5 = -\bar{e}_1 - (-\bar{e}_4)$$

$$\psi(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \psi(45) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Y = Syl_5(G)$$

$$\varphi : G \to S_6$$

$[\varphi(g)]$	$\chi_{\rho'}$	$\chi_{\psi'}$	$Sgn\, \chi_{\psi'}$	χ
id	6	5	5	
$(12)(34)(56)$	0	-1	1	
$(123)(456)$	0	-1	-1	
(1234)	2	1	-1	
(12345)	1	0	0	$1 + tr(\eta_5)$
$(12)(34)$	2	1	1	
(123456)	0	-1	1	

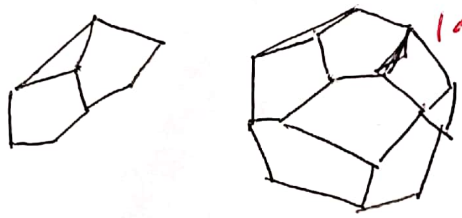
$$|\psi| + 4^2 + 4^2 + 5^2 + 5^2 = 120 - 36$$

$$b(\chi_{\psi'}, \chi_{\psi'}) = \frac{1}{120}(25 + 60 + 35) = 1 .$$

$\chi_{\psi'}$ irreducible .

Hay más representaciones?

Y'' = simetrías del dodecaedro



¡dibujar bien!

$|\tilde{G}| = \#\text{ vértices} \cdot |stab_{\tilde{G}}(v)| = 20 \cdot 6 = 120 \rightsquigarrow$ representaciones irreducibles de dimensión 3.

grupo de simetrías del icosaedro.

El dodecaedro tiene 5 grupos de 3 pares de aristas mutuamente ortogonales y actúa fielmente en ellos.

Módulos no completamente reducibles

Supongamos por el momento que $\bar{K} = K$.

Un A-módulo se dice indescomponible si $M = M_1 \oplus M_2$; $M_1, M_2 \subseteq M$ submódulos no triviales.

Prop. Supongamos $\dim_K A < \infty$, $\dim_K M < \infty$

$$M = V_1 \oplus \dots \oplus V_n = V_1' \oplus \dots \oplus V_m' \quad , \quad V_i, V_j' \text{ indescomponibles.}$$

Entonces $n = m$ y $V_i \cong V_{\sigma(i)}$ para alguna permutación.

Bajo la proposición anterior, V_i se dicen constituyentes indescomponibles de M.

Lema. Sea A una K-álgebra de dimensión finita, M A-mód de dimensión finito indescomponible. $\theta : M \to M$ endomorfismo de A-módulos. Entonces θ es invertible o nilpotente.

dem. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los valores propios de θ.

bloques de Jordan.

$$\theta \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_n & \\ 0 & & & & & & & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Sea $f(x) \equiv 1 \mod (x-\lambda_1)^N$

$f(x) \equiv 0 \mod (x-\lambda_i)^N \quad i = 2, \dots, n.$

$$f(\theta) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$M \cong f(\theta)M \oplus (1 - f(\theta))M$ como módulos $(\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore$ Hay un sólo valor propio.

$\lambda = 0 \to \theta$ nilpotente

$\lambda \neq 0 \to \theta$ invertible.

Lema. $\theta_1, \theta_2 : M \to M$ nilpotentes $\Rightarrow$ $\theta_1 + \theta_2$ nilpotente.

dem. $\theta = \theta_1 + \theta_2$, supongamos que θ invertible

$$\theta^{-1} \in \operatorname{End}_A(M)$$

$$1 = \theta^{-1}\theta = \theta^{-1}\theta_1 + \theta^{-1}\theta_2$$

$$\underbrace{1 - \theta^{-1}\theta_1}_{\text{invertible}} = \underbrace{\theta^{-1}\theta_2}_{\text{no invertible.}}$$

$(\theta^{-1}\theta_2)^{-1}$ existe $\Rightarrow$ $[(\theta^{-1}\theta_2)^{-1}\theta^{-1}]\theta_2 = 1$ $(\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore$ θ nilpotente.

Corolario. El conjunto de elementos nilpotentes es un ideal bilátero de $\operatorname{End}_A(M)$ (el único maximal).

Prop. (Teorema de Krull-Schmidt) Si $M = V_1 \oplus \dots \oplus V_n = V_1' \oplus \dots \oplus V_n'$ son iguales salvo orden.

dem. $M = V_1 \oplus B$, $\quad \rho_1 : M \to V_1$ proyección

$i_1 : V_1 \to M$ inclusión

$a \mapsto (a, 0)$

$\rho_1 \circ i_1 = id$

$\rho_j' : M \to V_j'$

$i_j' : V_j \to M$

$$\sum_j i_j' \rho_j' = 1 \quad : M \to M$$

$$1 = \rho_1 \circ i_1 = \sum_j \underbrace{\rho_1 i_j' \rho_j' i_1}_{\text{nilpotente o invertible}} : V_1 \longrightarrow V_1$$

$\exists_j$ tal que $\quad \mu = \rho_1 i_j' \rho_j' i_1$ invertible.

$\rho_1 i_j' : V_j' \to V_1$

$\rho_j' i_1 \mu^{-1} : V_1 \to V_j'$

son inversas por un lado.

$$q = \rho_j' i_1 \mu^{-1} \rho_1 i_j' : V_j' \longrightarrow V_j'$$

$$q^2 = \rho_j' i_1 \mu^{-1} \rho_1 i_j' \rho_j' i_1 \mu^{-1} \rho_1 i_j' = q$$

$$V_j' = q(V_j') \oplus \ker q \quad (\hookrightarrow \leftarrow)$$

V_j' indescomponible

$\therefore \quad q(V_j') = V_j'$

$\therefore \quad q = id$

$$M \cong V_1 \oplus B \cong V_j' \oplus B'$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & M \arrow[r, two heads, "g"] & B' \end{tikzcd}$$

$v \in B$

$hv = 0$

$v \in V_j'$

$v \in B$

$p_1 i_j' (v) = 0 \Rightarrow v = 0$ pués $p_1 i_j'$ isomorfismo.

$\therefore$ h inyectiva

$\therefore$ h invertible por dimensión.

<u>Ejemplo</u>. El resultado anterior no funciona en dimensión infinita.

$$A := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; \begin{array}{l} f \text{ continua} \\ f(x+1) = f(x) \end{array} \right\}$$

A como A-módulo es indescomponible.

$$\begin{array}{ccccc} A & \cong & I_1 & \oplus & I_2 \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ 1 & = & a_1 & + & a_2 \end{array}$$

, $a_1 = a_1 + 0$

$a_1 = 1 \cdot a_1 = a_1 a_1 + a_1 a_2$
$\qquad\qquad\qquad\;\; \in I_1 \qquad \in I_2$

$a_1 a_2 = 0$

$a_1^2 = a$

$a_1(x) \in \{0, 1\}$

$\Rightarrow$ por continuidad, $a_1 \in \{0, 1\}$

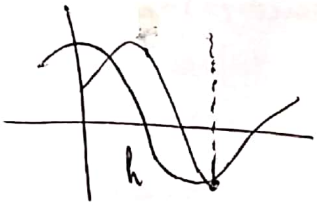
A es indescomponible.

Scanned with CamScanner

$M = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid$ continua, $f(x+1) = -f(x) \}$. M es un A-módulo.

<u>Afirmación</u>. (1) $M \not\cong A$

(2) $M \oplus M \cong A \oplus A$.



$M \neq Af \quad \forall f \in M$

$f \in M \to \exists x \in \mathbb{R} \, . \, f(x) = 0$

$g(x) = 0 \quad \forall g \in Af$ pero $\exists h \in M$ con $h(x) \neq 0$

$\therefore \; M \not\cong A$

$\exists f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22} \in M$ tales que $\begin{pmatrix} M \\ M \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{pmatrix} \oplus A\begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix}$

Es decir, $\forall h_1, h_2 \in M \;\; \exists!\, g_1, g_2 \in A$ tal que

$$g_1 \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{pmatrix} + g_2 \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} f_{22} & -f_{12} \\ -f_{21} & f_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$\in M \qquad \in M$

$\Delta(x) \neq 0 \quad \forall x$

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi x & \operatorname{sen} \pi x \\ -\operatorname{sen} \pi x & \cos \pi x \end{pmatrix}$$

Prosiguiendo con el cálculo anterior:

* $G = S_5$

$H =$ grupo de simetrías del icosaedro $\cong A_5 \times C_2$

$A_5 \trianglelefteq H$, $C_2 < H$, $C_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

En particular, $H \cong A_5 \times C_5$.

Tabla de Caracteres de S_5:

		χ_0	Sgn	ψ	ψsgn	$\tilde{\psi}$	$\tilde{\psi}$sgn	λ
1	id	1	1	4	4	5	5	6
10	(12)	1	-1	2	-2	-1	1	0
20	(123)	1	1	1	1	-1	-1	x
30	(1234)	1	-1	0	0	1	-1	0
24	(12345)	1	1	-1	-1	0	0	y
15	(12)(34)	1	1	0	0	1	1	z
20	(12)(345)	1	-1	-1	1	0	0	0

donde
$$\begin{aligned} 20x - 24y + 24 &= 0 \\ 15z - 20x + 30 &= 0 \\ 20x + 24y + 15z + 6 &= 0 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -1 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow 40x + 15z + 30 = 0$

Ejemplo. Calcular la tabla de caracteres de S_3.

		χ
	id	2
3	(12)	0
2	(123)	-1

Sea $\varphi : \langle (123) \rangle \to \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$

$\varphi(123) = \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix}$

$\alpha, \beta \in \{1, \omega, \omega^2\}$ ω raíz cúbica de la unidad.

$\omega^3 - 1 = 0$, $\omega \neq 1$

$\omega^2 + \omega + 1 = 0 \iff \omega^2 + \omega = -1$

Luego : $\varphi(123) = \begin{pmatrix} \omega & \\ & \omega^2 \end{pmatrix}$

$(12)(123)(12) = (123)^{-1}$

$A \begin{pmatrix} \omega & \\ & \omega^2 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} \omega^2 & \\ & \omega \end{pmatrix}$ donde $A^2 = id$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} ab & \\ & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ $ab = 1$

$b = a^{-1}$, $A = \begin{pmatrix} & a^{-1} \\ a & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \\ & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \\ & 1 \end{pmatrix}$

—— o ——

Volviendo a los módulos en general...

M semisimple : $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ en dimensión finita.

Supongamos que $A = \frac{k[x]}{(f)}$ Adgebra de dimensión finita.

M es un A-módulo, en particular, M $k[x]$-módulo f.g (porque estamos en dimensión finita).

Por el teo de descomposición primaria: $M = \bigoplus_{i=1}^{n} \frac{k[x]}{(p_i^{\alpha_i})}$ p_i primo

$p_i^{\alpha_i} \mid f$.

Suponiendo momentáneamente que A es conmutativa, $A \cong \frac{k[x_1, \dots, x_n]}{I}$.

$A/R \cong \prod_{i=1}^{n} L_i$

semisimple conmutativa. L_i cuerpo. R radical.

Prop. $R^n = 0$ para algún n.

Lema. M A-módulo finitamente generado. $RM = M \Rightarrow M = 0$
(Nakayama)

dem. $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$, $m_i = r_1 m_1 + \dots + r_n m_n$

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

$\vec{m} = T_r \vec{m} \Rightarrow (I - T_r)\vec{m} = 0$

Como $\exists S^*$: $S^* S = \det(S)$

$$\underbrace{\det(I - T_r)}_{= g} m = 0 \qquad . \qquad gM = 0.$$

$g \equiv 1 + S$, $R = \bigcap_{\substack{\wp \subseteq A \\ \text{primo}}} \wp$. $\wp \subseteq A$ primo , $R \subseteq \wp$

$g \equiv 1 \pmod{\wp}$

$\therefore (g) = A$

g invertible.

$\therefore M = \{0\}$ ∎

Corolario. $M \neq 0 \Rightarrow RM \subsetneq M$

Corolario. $\dim M < \infty \Rightarrow R^n M = 0$ algún n

Corolario. $R^n = 0$ algún n $(M = A)$

obs. $f \in A[x]$, $a \in A$, $r \in R$

$$f(a+r) = f_0(a) + r f_1(a) + r^2 f_2(a) + \dots$$

Se puede generalizar al caso en dos variables: $f(x+y) = \overset{f(x)}{\widehat{f_0(x)}} + y f_1(x) + \dots$
donde $f'(x) := f_1(x)$

$f(a+r) = f(a) + r f'(a) \pmod{R^2}$

<u>Prop (Lema de Hensel)</u>. Sea $f \in A[X]$, $I \subseteq A$ ideal, $I^n = 0$, y sea $a \in A$ tal que:

(1) $f(a) \in I$

(2) $f'(a) \in (A/I)^*$

entonces existe $b \in A$ tal que $b - a \in I$ y $f(b) = 0$.

dem. Aplicamos aproximaciones sucesivas.

$a_0 = a$

$a_1 = a + \varepsilon, \quad \varepsilon \in I$

$f(a_1) = f(a) + \varepsilon f'(a) \pmod{I^2}$

$f'(a)\underset{\cap_I}{\varepsilon} \equiv f(a) \pmod{I^2}$

$\overline{f'(a)}\,\overline{\varepsilon} = \overline{f(a)}$ en I/I^2 $\;A/I$ -módulo.

$\eta f'(a) \equiv 1 \pmod I$

$\varepsilon \equiv \eta f'(a) \equiv \eta f(a) \pmod{I^2}$

Escogemos $\varepsilon \equiv \eta f(a) \pmod{I^2}$

$f(a_1) \equiv 0 \pmod{I^2}$

$f'(a_1) \equiv f'(a) \pmod I$

$a_2 = a_1 + \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 \in I^2$

$f(a_2) \equiv f(a_1) + \varepsilon_1 f'(a_1) \pmod{I^3}$

$\varepsilon_1 \equiv \eta f_1(a_1) \pmod{I^2}$

$f(a_2) \equiv 0 \pmod{I^3}$

etc

$\vdots$

El proceso eventualmente debiera terminar cuando llegamos a $(\mathrm{mod}\ I^n)$ (Hay que verificar esto).

Teorema del levantamiento de idempotentes.

Si $\bar{P} \in A/_I$ con $I^n = \{0\}$ es un idempotente, existe $P \in A$ idempotente cuya imagen en $A/_I$ es $\bar{P}$.

$f(x) = x^2 - x$

$f'(x) = 1 - 2x$

a levantamiento cualquiera $\bar{a} = \bar{P}$

char $K = 2$: $f'(\bar{a}) = f'(\bar{P}) = 1$

$f(\bar{a}) = f'(\bar{P}) = 0$

char $K \neq 2$ $f(\bar{a}) = f(\bar{P}) = \bar{0}$

$f'(\bar{a}) = f'(\bar{P}) = 2(\frac{1}{2} - \bar{P})$

$\frac{1}{2}$ no es v.p

Corolario. $A/R \cong \prod_{i=1}^{n} L_i \Rightarrow A \cong \prod_{i=1}^{n} A_i$

buscar idempotentes.

$R_i \subseteq A_i$ $A_i/R_i \cong L_i$

A es producto de álgebras con una única representación irreducible.

Ejemplo: $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \,/\, a,b,c \in K \right\} = \begin{pmatrix} K & K \\ & K \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A/R \cong K \times K$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

A conmutativo , $M \cong \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ con M_i A_i-módulo.

A conmutativa $\Rightarrow A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$, donde A_i es única representación irreducible

Se tiene que $A_i/R_i \cong L_i \to$ cuerpo.

radical

Supongamos que K es perfecto, $L_i \cong K[x]/(f_i)$

$\Rightarrow f_i$ separable, $f_i' \neq 0$. $\exists \bar{a} \in L_i$ con $f(\bar{a}) = 0 \in A_i/R_i$

$$f'(\bar{a}) \neq 0 \text{ en } A_i/R_i$$

Se tiene : (1) $f(a) \in R_i$

(2) $f'(\bar{a})$ invertible en A_i/R_i

$\therefore$ Por lema de Hensel, $\exists b \in A_i$, $f_i(b) = 0$

Dicho lo anterior, $L_i \hookrightarrow A_i$. Así, A_i es L_i - álgebra (por ser A_i conmutativo)

Para M un A-módulo, $A \cong \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$, donde $A_i = P_i A$,

$$P_1 + \dots + P_n = 1$$

$$P_i P_1 + P_i P_2 + \dots + P_i P_n = P_i$$

$$P_i^2 = P_i$$

$$P_i P_j = 0$$

Luego, $A \cong \bigoplus_{i=1}^{n} P_i A$, $M = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i M$ $(M_i = P_i M)$

$P_i M = \{ m \in M \mid P_i m = m \}$. M_i es A_i - módulo. En particular M_i es L_i - espacio vectorial.

Un hecho aparte es que $M_i/_{R_iM}$ e.v $|_{L_i}$.

Prop. Si $m_1,\dots,m_n \in M_i$ tal que $\{\bar{m}_1,\dots,\bar{m}_n\}$ es L_i-base de M_i/RM_i, entonces $m_1,\dots,m_n$ generan M_i como A_i-módulo.

dem. Sea $N_i = \sum_{j=1}^{n} A_i m_j$, $\tilde{M} = M_i/_{N_i}$. Queremos calcular $R_i\tilde{M}_i$, para ello, $\tilde{M}_i = \{\bar{a} / a \in M_i\}$, $R_i\tilde{M}_i = \{\sum_j r_j\bar{a}_j / a_j \in M_i\}$

$$\therefore R_i\tilde{M}_i = (R_iM_i + N_i)/_{N_i}$$

$$\overline{(N_i + R_iM_i)/_{R_iM_i}} = \left\{ \sum_{l=1}^{n} \lambda_l m_l \,/\, \lambda_l \in L_i \right\} = M_i/_{R_iM_i}$$

$$\therefore R_iM_i + N_i = M_i$$

$$\therefore R_i\tilde{M}_i = \tilde{M}_i$$

Por el lema de Nakayama, $\tilde{M} = \{0\}$.

$$\therefore M_i = N_i$$

■

El caso más sencillo, es $A_i = K[x]/_{(x^n)}$. Como A_i es DIP, M se puede escribir de la forma $M = \bigoplus_j M_j$, donde $M_j = K[x]/_{(x^{n_j})}$ $n_j \leq n$

¿Ocurre esto en el caso general?

Contraejemplo. $A = K[x,y]/_{(x^2,y^2)}$. Como e.v, $A = \langle 1, x, y, xy\rangle$, $R = \langle x, y, xy\rangle$. Para $M \subseteq R$

$$M = Ax + Ay$$

Sea $N \subseteq M$ submódulo no nulo. $ax+by \in N$, $y(ax+by) = axy$

$\therefore Kxy \subseteq N$ para todo módulo $N \neq \{0\}$

M no es suma directa de cocientes de A.

<u>Ejemplos</u> (1) $A = \begin{pmatrix} K & K \\ & K \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,/\, a,b,c,d \in K \right\}$, $R = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A/R = K \times K$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $A = \begin{pmatrix} K & V \\ & B \end{pmatrix}$, $B \cong \mathbb{M}_2(K)$, $V = K^2$

$A = \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & K & K \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} K & K & K \\ K & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$ ¿Queme $A \cong A'$?

Tenemos $R = \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A/R \cong K \times \mathbb{M}_2(K)$, $A'/R' \cong K \times \mathbb{M}_2(K)$

$I = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \right\rangle$. $P \in I$ es un idempotente, $I \leq A'$ ideal y

$I^2 = I$. $\bar{P}$ es central en A/R. $I = AP$ $(I = KP)$

$$\begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & K & K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\varphi : A \to A'$, $P_1 = \varphi(P)$ idempotente

$\bar{P_1} = (1,0) \in A'/R' \cong K \times \mathbb{M}_2(K)$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A'P_1 = \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & K & K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix} \neq KP_1 \quad (\rightarrow\leftarrow).$$

Extensiones de módulos

Para A no semisimple, $\left(\begin{array}{c|cc} \varphi(A) & * & * \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{g(A)} \end{array}\right)$ puede ir cualquier cosa.

Si M, N son A-módulos, una extensión de N por M es una sucesión exacta corta de A-módulos

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

E se dice una extensión de M por N. Dos extensiones E y E' son isomorfas si existe $\lambda : E \to E'$ tal que

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f'"'] & E' \arrow[r, "g'"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

El conjunto de clases de equivalencia se denota por $E(M,N)$.
Para calcular $E(M,N)$, se le da una estructura de grupo

$$E'' = E \hat{+} E'$$

$$\Gamma = \{ (e,e') \in E \oplus E' \,/\, g(e) = g'(e') \}$$

$$E'' = \Gamma / \langle (f(b),0) - (0,f'(b)) \mid b \in N \rangle$$

$$0 \to N \to E'' \to M \to 0$$

$$b \mapsto \overline{(f(b),0)}$$

$$\overline{(f(b),0)} = \overline{(0, f'(b))}$$

$$\overline{(e, e')} \mapsto g(e) = g'(e')$$

Con esta estructura, $E(M,N) \cong \mathrm{Ext}^1_A(M,N)$

$$0 \to K \to P \to M \to 0 \qquad P \text{ módulo proyectivo}$$

$$\mathrm{Ext}^1_A(M,N) \cong \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}(P,N) \to \mathrm{Hom}(K,N))$$

P proyectivo significa que

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, dashed, "\exists ! \tilde{f}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[r, two heads, "g"'] & X \arrow[ul, phantom, "\circlearrowleft"] \end{tikzcd}$$

Obs. los módulos libres son proyectivos.

P proyectivo $\Rightarrow E(P,N) = \{0\}$.

Def. I se dice un módulo inyectivo, si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, dashed, "\exists ! \tilde{f}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & I \end{tikzcd}$$

Para todo módulo N, $\quad 0 \to N \to I \to J \to 0$. Se tiene

$$\mathrm{Ext}_A(M,N) \cong \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}(M,I) \to \mathrm{Hom}(M,J))$$

$$\mathrm{Ext}^1_A(M,I) \cong \{0\}.$$

Skolem - Noether

Prop. Sea A un álgebra simple, B álgebra central simple, $f, g : A \to B$. Entonces existe $b \in B$ tal que $f(a) = b g(a) b^{-1}$ $\forall a \in A$.

dem. Caso $B = \mathbb{M}_n(k)$.

$M_f = k^n$ como A-módulo

$M_g = k^n$ como A-módulo

por simplicidad (semisimplicidad)

$$\left.\begin{array}{l} M_f \cong M_A^r \\ M_g \cong M_A^s \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{dimensión}} r = s.$$

$$\therefore M_f \cong M_g$$

Así, f, g conjugadas.

Caso general: $B \otimes_k B^{op} \cong \mathbb{M}_n(k)$. Consideremos los morfismos

$$\tilde{f}, \tilde{g} : A \otimes_k B^{op} \longrightarrow B \otimes_k B^{op}$$

donde $\tilde{f}(a \otimes z) = f(a) \otimes z$, $\tilde{g}(a \otimes z) = g(a) \otimes z$.

$$g(a) \otimes z = b(f(a) \otimes z) b^{-1} \quad \forall z \in B^{op}.$$

Para $a = 1$, $1 \otimes z = b(1 \otimes z) b^{-1}$, $b \in$

$$b \in C_{B \otimes B^{op}}(k \otimes B^{op}) = C_B(k) \otimes C_{B^{op}}(B^{op}) = B \otimes k$$

luego b se identifica con $b' \otimes 1$.

$g(a) = b' f(a) b'^{-1}$.

Prop. B álgebra CS $\dim_k B = n^2$. $A \subseteq B$ conmutativa semisimple de dim n. $f, g : A \to B$ inyectivas. Entonces existe $b \in B$ tal que $f(a) = b g(a) b^{-1}$ $\forall a \in A$.

dem. Caso 1. $B = M_n(k)$. M_f, M_g A-módulos.

$$A = \prod_i L_i \quad , \quad \dim M_f = \dim M_g = n = \dim A.$$

$$M_f = \prod_j M_{i_j} \quad , \quad M_g = \prod_j M_{i_j}$$

M_i representación de L_i.

Todas las representaciones aparecen o f, g no serían inyectivas.

$\Rightarrow$ está una vez cada una

$\Rightarrow M_f \cong M_g$ //

Caso general: $B_{\bar{K}} \cong B \otimes_K \bar{K} \cong M_n(\bar{K})$. Consideremos $\tilde{f}, \tilde{g} : A_{\bar{K}} \longrightarrow B_{\bar{K}}$.

$\exists \tilde{b} \in B_{\bar{K}}$ tal que $\tilde{f}(\tilde{a}) = \tilde{b} \tilde{g}(\tilde{a}) \tilde{b}^{-1}$ $\forall \tilde{a} \in A_{\bar{K}}$.

Si $A = K[a_1, \dots, a_r]$, entonces

$$\tilde{f}(a_i) = \tilde{b} \tilde{g}(a_i) \tilde{b}^{-1}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(a_i) \tilde{b} = \tilde{b} \tilde{g}(a_i)$$

Principio importante: Si $V_L = V_K \otimes_K L$ y $X_L \subseteq V_L$ es el conjunto solución de un sistema de ecuaciones con coeficientes en K. Entonces $X_L = X_K \otimes_K L$. (Álgebra lineal).

Luego el espacio X_K de vectores $b \in B$ tal que $f(a_i) b = b g(a_i)$ es no nulo.

Para $N(b) = \det(m_b)$, Si $N(b) = 0$ $\forall b \in X_K$, entonces $N(\tilde{b}) = 0$ $\forall \tilde{b} \in X_{\bar{K}}$ por el siguiente hecho:

Hecho. X_K es denso en $X_{\bar{K}}$ en la topología de Zariski (la topología donde los puntos son cerrados y las funciones algebraicas son continuas). $\square$

Ejemplo (La dimensión es importante...) $A = K\times K$, $B \cong M_3(K)$, podemos considerar las representaciones

$$(a,b) \longmapsto \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & b \end{pmatrix}$$

$$(a,b) \longmapsto \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & b \end{pmatrix}$$

$B^*/K^* \cong \mathrm{Aut}(B)$.

— • —

def. Un cuerpo de descomposición de un álgebra central simple B es un cuerpo $L \supseteq K$ tal que $L\otimes_K B \cong M_n(L)$.

Si $L \subseteq B$ y $[L:K]=n \Rightarrow L$ es un cuerpo de descomposición.

Lema. Si L es un cuerpo de descomposición de B y $[L:K]=n$, entonces $L \hookrightarrow B$.

dem. $B\otimes_K B^{op} \cong M_{n^2}(K)$, $B\otimes_K L \cong M_n(L)$

$M_{n^2}(K) \cong M_n(M_n(K))$

Se tiene que $L \hookrightarrow M_n(K)$ (representación regular)

$$M_n(L) \hookrightarrow M_{n^2}(K)$$

$$B\otimes_K L \overset{\varphi}{\hookrightarrow} B\otimes_K B^{op}$$

Luego se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} B\otimes_K K \arrow[r, hook, "\rho"'] \arrow[rr, bend right, "\lambda"'] & B\otimes_K L \arrow[r, hook, "\varphi"'] & B\otimes_K B^{op} \end{tikzcd}$$

En primera instancia, no se puede asegurar que $\lambda = \varphi\circ\rho$, pero por Skolem-Noether,

$$\varphi(\rho(b)) = c\,\lambda(b)\,c^{-1}, \text{ algún } c.$$

conjugando φ por c, podemos suponer que el diagrama conmuta.

Luego, $\varphi(b\otimes 1) = b\otimes 1$

$$\varphi(1\otimes \lambda) \in C_{B\otimes B^{op}}(B\otimes K) = K\otimes B^{op}$$

$$\varphi|_{K\otimes L} : K\otimes_K L \longrightarrow K\otimes_K B^{op}$$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi} : L \longrightarrow B^{op}$$

$$\Rightarrow \hat{\varphi} : L^{op} \longrightarrow B \quad (\text{donde } L^{op} \cong L)$$

Prop (Albert) Si D_1, D_2 son álgebras de cuaterniones de división, tales que ninguna extensión cuadrática se incrusta simultáneamente en ambos, entonces $D_1\otimes D_2$ es álgebra de división.

dem. $D_1 \cong K[i,j \mid i^2=a,\ j^2=b,\ ij=-ji]$. $L=K[i]$. $L \not\hookrightarrow D_2$

$\therefore D_3 = D_2\otimes L$ algebra de división.

Sea $\sigma: L\to L$ automorfismo no trivial,

$$\tilde{\sigma} : D_3 \longrightarrow D_3 \quad , \text{donde } \hat{\sigma}(\ell\otimes c) = \sigma(\ell)\otimes c.$$

Para $0\neq d\in D = D_1\otimes D_2$, $d = q_1 + jq_2$, $q_1, q_2\in D_3$.

Se tiene que $qj = j\tilde{\sigma}(q)$.

Pd: d es invertible.

Caso 1: $q_1=0$.

$d = jq_2$ invertible, $j^{-1} = j/b$. $q_2\in D_3$.

Caso 2: $q_1\neq 0$

$$d = q_1(1 + j\tilde{\sigma}(q_1^{-1})q_2) = (1+jq_2q_1^{-1})q_1$$

$d_1 d_2 = 0$

$d_1 d_2 = q_3(1+jq_4)(1+jq_5)q_6$, donde q_3, q_6 son invertibles.

Basta ver que $(1+jq)(1+jq') = 0$ no tiene soluciones (porque estamos en dimensión finita).

Luego se tiene:

$$(1+jq)(1+jq') = 1 + jq + jq' + j^2\tilde{\sigma}(q)q'$$
$$= (1 + b\tilde{\sigma}(q)q') + j(q+q') = 0$$
$$\therefore q' = -q.$$

$(q \in D_3)$ $\quad b\tilde{\sigma}(q)q = 1 \Rightarrow \tilde{\sigma}(q) = q^{-1}/b$

$$\therefore L(\tilde{\sigma}(q)) = L(q)$$

Si $X_L = L(q) \Rightarrow \tilde{\sigma}(X_L) = X_L$.

Definición. Si $Gal(L/K)$ actúa en un espacio V_L sobre L de modo que $\sigma(lv) = \sigma(l)\sigma(v)$. Entonces existe un subespacio invariante V_K tal que $V_L \cong L \otimes_K V_K$ como e.v con acción de $Gal(L/K)$.

Luego se tiene que $L(q) = L \otimes_K K(p)$, con $p \in D_2$, $\tilde{\sigma}(p) = p$.

$q \in L(q) = L \otimes_K K(p)$,

se tiene $1 + jq \in D_1 \otimes K(p)$ no invertible.

$\therefore D_1 \otimes K(p)$ no es álgebra de división $(\cong M_2(K(p)))$

$\therefore K(p) \hookrightarrow D_1$.

$\square$.

Ejemplo. Para $K = \mathbb{Q}(x,y,z,w)$, $\left(\frac{x,y}{K}\right) \otimes \left(\frac{z,w}{K}\right)$ es algebra de división.