Ejercicio: Dado $a>0$, defina inductivamente la sucesión (x_n) mediante $x_1=\sqrt{a}$ y $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$. Pruebe que (x_n) es convergente y calcule su límite:

$$L=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}$$

Demostración: La sucesión es estrictamente creciente, pues $x_1<x_2$ y suponiendo $x_{n-1}<x_n$, se tiene $x_n^2=a+x_{n-1}<a+x_n=x_{n+1}^2$, de donde $x_n<x_{n+1}$. Además, si c es la raíz positiva de la ecuación $x^2-x-a=0$, o sea $c^2=a+c$, se tiene que $x_n<c$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Esto es verdad si $n=1$, como $x_n<c$, resulta $x_{n+1}^2=a+x_n<a+c=c^2$, luego $x_{n+1}<c$. Por lo tanto, existe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Haciendo $n\to\infty$ en la igualdad $x_{n+1}^2=a+x_n$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=c$.

$\longrightarrow \mathbb{K} \quad a > 0 \quad$ entonces

Ejercicio: Sea $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$, pruebe que (x_n) es creciente y acotada.

Demostración:

(i) (x_n) Es creciente: Si $0 < a$, entonces $0 < a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (para $n = 1$, $a^n = a^1 = a > 0$. Suponemos cierto para un cierto $k \in \mathbb{N}$ que $a^k > 0$ como $a^{k+1} = a^k \cdot a$ y $a^k > 0$, $a > 0$, entonces $a^{k+1} > 0$)

Además:

$$\begin{aligned} 0 &< 1 \\ 0 &< a \\ 0 &< a^2 \\ &\vdots \\ 0 &< a^n \end{aligned}$$

sumando términos tenemos que $0 < 1 + a + a^2 + \dots a^n$, pero a su vez, $0 < 1 + a + a^2 + \dots + a^n < (1 + a + a^2 + \dots + a^n) + a^{n+1}$, entonces $x_n < x_{n+1}$.

$\therefore (x_n)$ es creciente.

(ii) (x_n) es acotada: Por (i) tenemos que $0 < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o sea, (x_n) es acotada inferiormente.

Por otro lado, $a^n < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (para $n = 1$, $a^n = a^1 = a < 1$. Suponemos cierto para un cierto $k \in \mathbb{N}$ que $a^k < 1$, como $0 < a < 1$ y $0 < a^k < 1$ entonces $0 < a^{k+1} < 1$. Por lo tanto, $a^n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$)

Además:

$$a^{n+1}-1=(a+a^2+a^3+\cdots a^n)-(a+a^2+a^3+\cdots+a^n)+(a^{n+1}-1)$$
$$=(a+a^2+a^3+\cdots+a^n+a^{n+1})-(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n)$$
$$=(a-1)(1+a+a^2+\cdots+a^n)$$

$$\frac{a^{n+1}-1}{a-1}=1+a+a^2+\cdots+a^n$$

Entonces: $1+a+a^2+\cdots+a^n=\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$;$(a\neq 1)$

pero $0<1-a^{n+1}\leq 1$

$$\Rightarrow \quad 1+a+a^2+\cdots+a^n\leq\frac{1}{1-a}$$

$$x_n\leq\frac{1}{1-a}\quad,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Por lo tanto: $0<x_n\leq\dfrac{1}{1-a}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada para todo $n\in\mathbb{N}$.

Nombre Alumno: Marco Godoy V.

Desarrollo Prueba 1
Cálculo II

Nombre:
Marco Godoy V.
Lic. en Matemáticas

Desarrollo problema 2

NOTA 6.3

1	1.0
2	1.0
3	1.0
4	0.3
5	1.0
6	1.0

$f:[-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a>0$ entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= -\int_{0}^{-a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \quad \text{(propiedad de integrales)}$$

$$= \int_{0}^{-a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \quad \text{(ya que } f \text{ es impar)}$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \quad \left(\text{propiedad } \int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(cx)dx\right.$$

OJ, con $c \in \mathbb{R}-\{0\}$

$$= 0$$

ejemplo

$\therefore$ Si $f:[-a,a] \to \mathbb{R}$ es impar, tenemos que $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

* Demostración de $\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(cx)dx$, con $c \in \mathbb{R}-\{0\}$ y f integrable

para $\int_{ca}^{cb} f(cx)dx$ tomamos la partición. un necesario

$$P = \{ t_{i-1} = ca + \frac{c(b-a)}{n}(i-1) : i \in \mathbb{N} \}$$

05

tomamos suma superior

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=1}^{n} f(ct_i)\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(c^2a + c^2\frac{(b-a)}{n}i\right)\frac{c}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = c\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n/c^2}i\right)\frac{1}{n} = c\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Problema 3

Por reducción al absurdo. Tenemos El conjunto $\{x \in [a,b] : f'(x) = 0\}$. Tenemos que f cumple $f'(x) \geq 0$. Como existe f' para todo $x \in [a,b]$ entonces f es continua en todo $[a,b]$.

Supongamos que existen $x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 < x_2$ entonces por el teorema de Rolle, existe $c \in [a,b]$ tal que $f'(c) = 0$. Como tenemos que f es no decreciente, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in [c-\delta, c+\delta]$ se tiene $f'(x) = 0$, pero tal conjunto no tiene medida nula. $(\Rightarrow\Leftarrow)$

Problema 4

Debemos integrar $\int x^n e^x \, dx = e^x p_n(x)$

integrando por partes tenemos

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - n e^x p_{n-1}(x)$$

$$\therefore \quad \int x^n e^x dx = e^x p_n(x) = x^n e^x - n e^x p_{n-1}(x)$$

$$\therefore \quad e^x p_n(x) = x^n e^x - n e^x p_{n-1}(x)$$

$$\therefore \quad p_n(x) = x^n - n p_{n-1}(x)$$

? y ?

Problema 5

Vemos que para $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\int_0^x e^{t^2}dt}{\int_0^x e^{t^2}\operatorname{sen}t\,dt}$ es una expresión de la forma $\frac{0}{0}$ (evaluando el cociente en $x=0$) entonces podemos ocupar regla de L'hôpital. Como la función exponencial es continua, ocupamos Teo. fund. del cálculo

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x e^{t^2}dt}{\int_0^x e^{t^2}\operatorname{sen}t\,dt} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt + xe^{x^2}}{e^{x^2}\operatorname{sen}x}$$

tenemos otra expresión del tipo $\frac{0}{0}$. Ocupamos nuevamente L'hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt + xe^{x^2}}{e^{x^2}\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+e^{x^2}+xe^{x^2}\cdot 2x}{2xe^{x^2}\operatorname{sen}x + e^{x^2}\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x e^{t^2}dt}{\int_0^x e^{t^2}\operatorname{sen}t\,dt} = 2$$

Problema 6

a) $\displaystyle\int \frac{2x^3-11x^2+17x-16}{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}\,dx$

Vemos que $x=2$ es raíz del polinomio $x^4-4x^3+5x^2-4x+4$, por ende podemos dividir tal polinomio por $x-2$ (Teorema de división de polinomios)

$$x^4-4x^3+5x^2-4x+4 : x-2 = x^3-2x^2+x-2$$

$$\begin{array}{l}
-)\ x^4-2x^3 \\
\hline
-2x^3+5x^2-4x+4 \\
-)\ -2x^3+4x^2 \\
\hline
x^2-4x+4 \\
-)\ x^2-2x \\
\hline
-2x+4 \\
-2x+4 \\
/0//
\end{array}$$

Entonces tenemos

$$\int \frac{2x^3-11x^2+17x-16}{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}\,dx = \int \frac{2x^3-11x^2+17x-16}{(x-2)(x^3-2x^2+x-2)}\,dx$$

Como $x=2$ es raíz de x^3-2x^2+x-2 procedemos de la misma manera:

$$\begin{array}{l} x^3-2x^2+x-2 : x-2 = x^2+1 \\ -)\ \underline{x^3-2x^2} \\ \qquad\qquad x-2 \\ \qquad -)\ \underline{x-2} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Por lo tanto procedemos mediante fracciones parciales:

$$\frac{2x^3-11x^2+17x-16}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$= \frac{Ax^2+A + B(x^3+x-2x^2-2) + (Cx+D)(x^2+4-4x)}{(x-2)^2(x^2+1)}$$

$$= \frac{x^3(B+C)+x^2(A-2B-4C+D)+x(B+4C-4D)+A-2B+4D}{(x-2)^2(x^2+1)}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} B+C = 2 & (i) \\ A-2B-4C+D = -11 & (ii) \\ B+4C-4D = 17 & (iii) \\ A-2B+4D = -16 & (iv) \end{cases}$$

de (iii)+(iv) tenemos $\quad A-B+4C = 1 \quad (v)$

de (ii)+(iii) tenemos $\quad A-B-3D = 6 \quad (vi)$

de (v)-(vi) tenemos $\quad 4C+3D = -5 \quad (vii)$

de (i)-(iii) tenemos $\quad -3C+4D = -15 \quad (viii)$

de 3(vii)+4(viii) tenemos $\quad 25D = -15-60 = -75$

$$D = -3$$

Scanned with CamScanner

de (ii)-(iv) tenemos $-4C-3D=5$

$$\therefore -4C-3D = -4C+9 = 5 \Rightarrow -4C=-4 \Rightarrow C=1$$

$$\therefore B=1$$

$$\therefore A-2B+4D = A-2-12=-16$$

$$A-14=-16 \Rightarrow A=-2$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\int \frac{2x^3-11x^2+17x-16}{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}dx = -\int \frac{2}{(x-2)^2}dx + \int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{x-3}{x^2+1}dx$$

$$\therefore$$

$$\int \frac{2x^3-11x^2+17x-16}{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}dx = \frac{2}{x-2} + \ln(x-2) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\arctan x + K$$

donde K es una constante real.

b) $\displaystyle\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$

usamos sustitución $e^x = u \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{u}$

$$\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,dx = \int u\sqrt{1-u^2}\,\frac{du}{u} = \int\sqrt{1-u^2}\,du$$

usamos sustitución $u = \operatorname{sen} w \Rightarrow du = \cos w\, dw \Rightarrow$

$$\int\sqrt{1-u^2}\,du = \int\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 w}\,\cos w\,dw = \int \cos^2 w\,dw$$

Usamos identidad trigonométrica $\cos^2 w = \dfrac{\cos 2w + 1}{2}$

$$\therefore \int \cos^2 w = \frac{1}{2}\int(\cos 2w + 1)\,dw = \frac{1}{2}\left[w + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2w\right] + K$$

$$\therefore \int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,dx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arcsen} e^x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arcsen} e^x\right)\right] + K$$

Desarrollo problema 1

Supongamos que $c_1 < c_2 < \dots < c_n$. Como el conjunto $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ es numerable entonces tiene medida nula (Teorema demostrado en clases), lo que implica que f es integrable en $[a,b]$. Supongamos que $c_1 = a$ y $c_n = b$.

Para el intervalo $[c_i, c_{i+1}]$ vemos que f es integable en $[c_i, c_{i+1}]$ ya que f solamente es discontinua en c_{i-1} y c_i (Teorema demostrado en clases). Además

$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} x\,dx = \frac{1}{2}(c_{i+1}^2 - c_i^2)$$

$$\frac{1}{2}x^2 \Big|_b^a \quad \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$$

Además como tenemos que $\bigcup_{i=1}^{n-1} [c_i, c_{i+1}] = [a,b]$ tenemos

$$\int_a^b x\,dx = \int_a^{c_2} x\,dx + \int_{c_2}^{c_3} x\,dx + \dots + \int_{c_{n-1}}^{b} x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left((c_2^2 - a^2) + (c_3^2 - c_2^2) + (c_4^2 - c_3^2) + \dots + (b^2 - c_{n-1}^2)\right)$$

suma telescópica

$$\therefore \int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

Nombre: Marco Godoy V.
Carrera: Licenciatura en Matemáticas

corregir PT5 ($\lim_{n\to\infty} x_n$, $\lim_{n\to\infty} y_n$ existen, por end existe en resta)

$\boxed{\text{PP } 6.0}$

$\boxed{\text{PT } 5.4}$

Universidad de Chile
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencia

Prueba 2
Primer Semestre 2010
Cálculo I
Prof. Verónica Poblete

PP		PT	
1	10	4	12
2	20	5	02
3	20	6	30

Parte Teórica

6. Sean $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no-decreciente, acotada y $a \in X'_+$.

   (a) Sea $L = inf\{f(x) \; : \; x \in X, x > a\}$. Indique porqué $L \in \mathbb{R}$.

   (b) Dado $\epsilon > 0$ arbitrario. Pruebe que $L + \epsilon$ no es cota inferior de $\{f(x) \; : \; x \in X, x > a\}$.

   (c) Pruebe que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

(3 puntos)

Demostración:

(a) Sabemos que $f(X)$ es un conjunto acotado y tenemos que $\{f(x) : x \in X, x > a\} \subset f(X)$, lo que quiere decir que $\{f(x) : x \in X, x > a\}$ también es acotado (en particular, ambos inferiormente). Ahora por el axioma del supremo existe $L = \inf\{f(x) : x \in X, x > a\}$

1.0

(b) Si $L = \inf\{f(x) : x \in X, x > a\}$ entonces tenemos

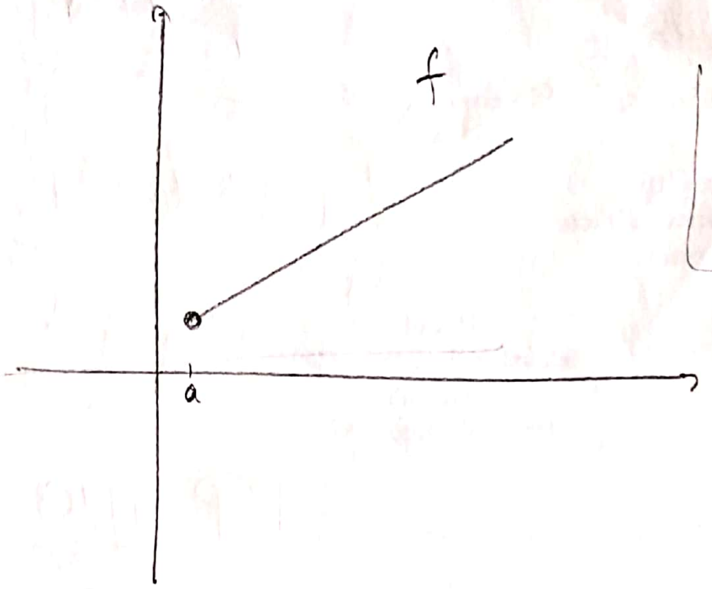
$$L \leq f(x) \quad ; \forall x \in X, \; x > a$$

ahora para $\epsilon > 0$ dado se tiene que $L \leq L + \epsilon$ pero $L + \epsilon$ no puede ser cota inferior de $\{f(x) : x \in X, x > a\}$ ya que si lo fuera contradice el hecho de que L es el ínfimo de $\{f(x) : x \in X, x > a\}$

1.0

Scanned with CamScanner

(c) tenemos



$x \in]a, a+\delta[$

$a < x < a+\delta$

$0 < x-a < \delta$

Recordatorio

Sea $\varepsilon > 0$, tenemos que $L+\varepsilon$ no es cota inferior de $\{f(x) : x \in X, x > a\}$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $a+\delta \in X$ y que

$L < f(a+\delta) < L+\varepsilon$. Ahora, para todo

$x \in X \cap]a, a+\delta[$ tenemos que $f(x) \leq f(a+\delta)$

(ya que f es no decreciente y $x \in X \cap]a, a+\delta[\implies a < a+\delta$)

Siguiendo con lo anterior

$$L < f(a+\delta) < L+\varepsilon \ \wedge \ f(x) \leq f(a+\delta)$$

$$\implies L < f(x) < L+\varepsilon \implies L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$$

$$\implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Por lo tanto se ha demostrado que: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $0 < x-a < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$

$$\therefore \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

10

Desarrollo Prueba 2

Calculo 1.

Nombre Alumno: Marco Godoy V.

Carrera: Licenciatura en Matemáticas.

Desarrollo parte práctica

(PP1) Sea (x_n) y $\frac{x_n}{|x_n-2|} \leq 1$.

(i) Si para n suficientemente grande, se tiene $x_n > 2$, entonces

$$\frac{x_n}{|x_n-2|} = \frac{x_n}{x_n-2} \leq 1 \Rightarrow x_n \leq x_n - 2 \Rightarrow 0 \leq -2 \quad (\text{Falso})$$

$\therefore (x_n)$ no es acotada

(ii) Si para n suficientemente grande, se tiene que $x_n < 2$ entonces

1.0

$$\frac{x_n}{|x_n-2|} = \frac{x_n}{2-x_n} \leq 1 \Rightarrow x_n \leq 2 - x_n \quad (\text{ya que } 2 - x_n > 0$$

$\Rightarrow 2x_n \leq 1 \Rightarrow x_n \leq 1$ $\therefore (x_n)$ es acotada cuando $x_n < 2$ para n suficientemente grande. Además, sea $A = \{x_i : i \in \mathbb{N}, i < N,$ para algún $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ se cumple $x_n < 2\}$ es un conjunto finito, luego existe supremo de A. Sea $\alpha = \sup(A)$, entonces podemos tomar $\sup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \max\{1, \alpha\}$

(PP2) (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}\ \operatorname{sen}(n^2)}{3^n}$

sabemos que $|\operatorname{sen}(n^2)| \leq 1$ entonces podemos acotar la sucesión $x_n = \dfrac{\sqrt{n}\ \operatorname{sen}(n^2)}{3^n}$ por:

$$\frac{-\sqrt[n]{n}}{3^n} \leq \frac{\sqrt{n}\operatorname{sen}(n^2)}{3^n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{3^n}$$

Ademas, sea $y_n = \dfrac{\sqrt{n}}{3^n}$:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{\sqrt{n}}{3^n}} = \frac{3^n\sqrt{n+1}}{3^{n+1}\sqrt{n}} = \frac{1}{3}\sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

cuando $n\to\infty$ se tiene que $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} \to \dfrac{1}{3} < 1$ por lo tanto $y_n \to 0$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0\right)$

para $z_n = \dfrac{-\sqrt{n}}{3^n}$ notemos que $z_n = -y_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$,

donde se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -0 = 0$

1.0

Se confundió con $\sqrt[8]{n}$ en lugar de $\sqrt[n]{n}$

Con todo lo anterior quedamos en que:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\ \operatorname{sen}(n^2)}{3^n} \leq 0$$

por teorema del sandwich se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}\ \operatorname{sen}(n^2)}{3^n} = 0$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{3n+1}\right)^n$

$$\left(1+\frac{2}{3n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\frac{3n+1}{2}}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\frac{3n+1}{2}}\right)^n = A_n$$

Sea $u = \dfrac{3n+1}{2} \Rightarrow 2u = 3n+1 \Rightarrow 2u-1 = 3n \Rightarrow n = \dfrac{2u-1}{3}$

1.0

$$\Rightarrow A_n = \left(1+\frac{1}{\frac{3n+1}{2}}\right)^{\frac{2u-1}{3}} = \left(1+\frac{1}{\frac{3n+1}{2}}\right)^{\frac{2u}{3}-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3n+1}{2}}\right)^{u}\right)^{2/3}}{\left(1+\frac{1}{\frac{3n+1}{2}}\right)^{1/3}} = \frac{\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3n+1}{2}}\right)^{\frac{3n+1}{2}}\right)^{2/3}}{\left(1+\frac{1}{\frac{3n+1}{2}}\right)^{1/3}}$$

cuando $n\to\infty$ se tiene que $\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3n+1}{2}}\right)^{\frac{3n+1}{2}}\right)^{2/3} \longrightarrow e^{2/3}$ y

$\left(1+\dfrac{1}{\frac{3n+1}{2}}\right)^{1/3} \longrightarrow 1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n-1}\right)^{n} = e^{2/3}$$

(PP3) para que $\lim_{x\to 2} f(x)$ exista se tiene que cumplir que

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

para $x<2$ tenemos $f(x) = \alpha \dfrac{tg\,(x\pi - 2\pi)}{x-2} = \alpha \dfrac{tg\,[\pi(x-2)]}{x-2}$

$$= \alpha \frac{\pi\, sen\,[\pi(x-2)]}{\pi\,(x-2)\,[\cos[(\pi(x-2))]]} \text{, entonces}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \alpha\, \frac{\pi\, sen\,[\pi(x-2)]}{\pi\,(x-2)} \cdot \frac{1}{\cos[\pi(x-2)]} = \pi\alpha\cdot 1\cdot 1 = \pi\alpha$$

para $x>2$ tenemos $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$, entonces

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4} = \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}\cdot\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3} = \frac{(x+7)-9}{(x^2-4)(\sqrt{x+7}+3)} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}$$

$$= \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)} \text{, entonces } \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)} = \frac{1}{4\cdot 6}$$

$= \frac{1}{24}$. Por la condición anterior: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+}$

$$\Rightarrow \pi\alpha = \frac{1}{24} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{24\pi}}$$

$$\boxed{\therefore\ \alpha = \frac{1}{24\pi}}$$

Scanned with CamScanner

Desarrollo parte Teorica.

(PT4) Se demostrará que (X_n) es sucesión de Cauchy

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m,n \in \mathbb{N})\left(m,n > N \Longrightarrow |x_n - x_m| \leq \varepsilon\right)$$

condición para que (X_n) sea sucesión de Cauchy.

tenemos que $|x_n - x_{n+1}| < \varepsilon$

~~Previamente $\varepsilon = \frac{1}{2^n} \Rightarrow 2^n = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \ln 2^n = \ln \frac{1}{\varepsilon}$~~

~~$n \ln 2 = \ln \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$ (donde ln es logaritmo natural~~

Ahora, por propiedad arquimediana, si $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\varepsilon}{2} < 2^N$. Ahora, para todo $n, n+1 > N$ tiene que $\varepsilon < 2^N < 2^n < 2^{n+1}$ y en particular $\frac{1}{2^n} < \varepsilon/2$ y $\frac{1}{2^{n+1}} < \varepsilon/2$

ahora, se tiene que

$$|x_n - x_{n+1}| = |x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\therefore$ (X_n) es una sucesión de Cauchy. 1.2

$\therefore$ (X_n) converge.

Debe verificar $|x_n - x_m| < \varepsilon$

(PT5) Por reducción al absurdo, supongamos que $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq a$ entonces tenemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b$$

Sin perder generalidad, supongamos que $b>a$, entonces de lo anterior queda que

no se sabe si existe

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n = a-b<0$$

contradicción ya que está en la hipótesis que

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

(PT6) $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función no decreciente y acotada superiormente

(a) Si f es decreciente entonces dados $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) \leq f(x_2)$. $\{f(x) : x \in X, x>a\}$ es acotado inferiormente, si no lo fuera, entonces, para todo $\mu \in \mathbb{R}$, existe $b \in X$ tal que $b>a$ "pero" $f(b)<\mu$

Sea $v, w \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) \leq w \leq v \leq f(x_2)$) "entonces existen $x_4, x_5 > a$ tales que $f(x_4) < w$ y $f(x_5) < v$

(b) Si $L+\varepsilon$ fuera cota inferior de $\{f(x) ; x \in X, x>a\}$ entonces $L+\varepsilon < f(x)$, para todo $x \in X \wedge x > a$ pero sabemos que $L < L+\varepsilon$ entonces, existe $\alpha \in X$, $\alpha > a$ tal que $f(\alpha) = L+\varepsilon$ ya que L es el supremo de $\{f(x) ; x \in X, x > a\}$

(c) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ es equivalente a decir que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(0 < x-a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Desarrollo parte teórica

Nombre: MARCO GODOY

P 6.0
T 7.0

Problema 1

$$\frac{|x-2|-4}{x^2-5x+4} \leq 0$$

$$\frac{|x-2|-4}{x^2-5x+4} = \frac{|x-2|-4}{(x-1)(x-4)} \leq 0 \quad \text{para} \quad \begin{matrix} x \neq 1 \\ x \neq 4 \end{matrix}$$

$x = 0$??

como $(x-1)^2(x-4) \geq 0$ entonces multiplicamos en la desigualdad anterior, quedando:

$$(x-1)(x-4)\left(|x-2|-4\right) \leq 0$$

$x-1=0 \iff x=1$

$x-4=0 \iff x=4$

$|x-2|-4=0 \iff$

Para

$$|x-2|-4=0$$
$$|x-2|=4$$
$$x-2=\pm 4 \implies x=6$$
$$x=-2$$

primero analizamos $|x-2|-4$

para $x<-2$ $\quad |x-2|-4 = -(x-2)-4 = -x-2$
$= -(x+2)$

como $x+2<0 \implies -(x+2)>0$

para $-2<x<2$: $\quad |x-2|-4 = -(x-2)-4 = -x-2$
$= -(x+2) > 0$

para $2<x<6$: $\quad |x-2|-4 = x-2-4 = x-6 < 0$

para $x>6$: $\quad |x-2|-4 = x-2-4 = x-6 > 0$

Por otro lado, analizamos $(x-1)(x-4)$

para $x<1$: $\quad x-1<0$, $\; x-4<0 \Rightarrow (x-1)(x-4)>0$

para $1<x<4$; $\quad x-1>0$, $\; x-4<0 \Rightarrow (x-1)(x-4)<0$

para $x>4$: $\quad x-1>0$, $\; x-4>0 \Rightarrow (x-1)(x-4)>0$

	$x<-2$	$-2<x<1$	$1<x<2$	$2<x<4$	$4<x<6$	$x>6$
$(x-1)(x-4)(\lvert x-2\rvert-4)$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Entonces el conjunto solución S de la ecuación es :

$$S =]1,2[\cup]4,6[\cup \{6\} \cup \{-2\}$$

$$S = \{-2\} \cup]1,2[\cup]4,6]$$

2.0

oblema 2

Nombre: MARCO GODOY

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\operatorname{sen}(n^2)}{n+\cos(n)}$$

como $|\operatorname{sen}(n^2)| \leq 1$

$|\cos(n)| \leq 1$

entonces

$$\frac{n-1}{n+1} \leq \frac{n+\operatorname{sen}(n^2)}{n+\cos(n)} \leq \frac{n+1}{n-1}$$

tenemos que $\dfrac{n-1}{n+1} = \dfrac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$

y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1$

por otro lado $\dfrac{n+1}{n-1} = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}$

y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = 1$

Por el teorema del sandwich se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\operatorname{sen}(n^2)}{n+\cos(n)} = 1$$

30

MARCO GODO

Problema 3.

$A = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$. Por demostrar que $\inf A =$

Por contradicción. Supongamos que $\inf A \neq 0$, entonces necesariamente se cumple $0 < \inf A$ (ya que para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 < \frac{1}{n}$). Por defini do ínfimo tenemos:

$$0 < \inf A \leq \frac{1}{n} \text{, para todo } n \in$$

pero por propiedad arquimediana, existe $N \in$ tal que $\frac{1}{N} \in A$ y:

$$0 < \frac{1}{N} < \inf A$$

y además $\frac{1}{N} \in A$. Lo que contradice la def de ínfimo para A.

$$\therefore \inf A = 0$$

20

tenemos ; $a_n = \frac{1}{2+3} + \frac{1}{2+3^2} + \dots + \frac{1}{2+3^n}$

sabemos que

$$a_{n+1} = \left(\frac{1}{2+3} + \frac{1}{2+3^2} + \dots + \frac{1}{2+3^n}\right) + \frac{1}{2+3^{n+1}}$$

$$= a_n + \frac{1}{2+3^{n+1}}$$

$\Rightarrow \quad a_{n+1} \geq a_n$

Por lo tanto a_n es creciente.

Como la cantidad de términos aumenta a medida que aumenta n entonces se tiene

$$a_1 \leq a_n$$

$$\frac{1}{5} \leq a_n$$

por otro lado ;

$$a_n = \frac{1}{2+3} + \frac{1}{2+3^2} + \dots + \frac{1}{2+3^n} \leq \frac{1}{2+2} + \frac{1}{2+2^2} + \dots + \frac{1}{2+2^n}$$

$$a_n \leq \frac{1}{2+2} + \frac{1}{2+2^2} + \frac{1}{2+2^3} + \frac{1}{2+2^4} + \dots + \frac{1}{2+2^n}$$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{1+2^{n-1}}$ Nombre: MARCO GODOY

también tenemos que

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{1+2^{n-1}} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

entonces

$$a_n \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

como $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$ es una suma geométrica de términos tenemos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

como $0 < \frac{1}{2^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$0 > -\frac{1}{2^n}$$

$$1 > 1 - \frac{1}{2^n}$$

con lo que queda $a_n \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1$

$$a_n \leq \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

o/ $\frac{1}{5} \leq a_n \leq \frac{5}{4}$ a_n acotada

∴ como a_n es acotada y monótona
a_n es convergente.

2.0

$k \in \mathbb{N}$ tales que $\alpha < x_n < nk$
...uficientemente grande

...e :

...ntonces $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$

la hizo la profesora el día de la
...), pero se dará una idea

resultado trivial
...ntonces $\sqrt[n]{\alpha} > 1$ y

$= 1 + b_n$, $b_n \in \mathbb{R}$ que depen... de n

$= 1 + b_n$

$\alpha = (1 + b_n)^n$

$(1+b_n)^n$ con binomio de Newton en don...

$(1+b_n)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2!} b_n^2$

$\frac{2(\alpha - 1)}{n(n-1)} \geq b_n^2$

$> 1 \Rightarrow 2\alpha > 21 \Rightarrow 2\alpha - 1 > 1$

$\frac{1}{n(n-1)}$? . Ahora , dado $\varepsilon > 0$, con lo que se demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$$

este lo podías asumir.

Por otro lado $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ también demostrado en clases de hoy. Por propiedad del producto

$$\underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)\cdots\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)}_{k\text{ - veces}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[m]{n}\right)^k = 1$$

7 Continuidad

1. Estudie la continuidad de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ no es continua en $x \neq 1$

(b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ discontinuidad removible

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & \text{si } x \neq -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$ d. r

(d) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ d. n. r

(e) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 6}{x-3} & , \ x < 3 \\ \dfrac{sen(5x-15)}{x-3} & , \ x > 3 \\ 5 & , \ x = 3 \end{cases}$ c

(f) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & , \ x \leq 5 \\ \dfrac{\sqrt{x-1} - \sqrt{9-x}}{x-5} & , \ 5 < x \leq 9 \\ \dfrac{x^2 - 11x + 18}{x-9} & , \ x > 9 \end{cases}$ d. n. r

2. Considere la función definida por $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq c \\ ax + b & \text{si } x > c \end{cases}$, donde a, b, y c son constantes. Si b, c están dados, determine todos los valores de a (si existe alguno) tales que la función f es continua.

$a = \dfrac{\operatorname{sen} c - b}{c}$

?? 3. Demuestre que no existe ningún valor de a para el que la función definida por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = a$ sea continua. (*Sugerencia:* Busque buenas sucesiones que tiendan a 0.)

→ basta que A no sea intervalo.

Sí 4. ¿ Existe una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ que sea biyectiva, continua pero que $f^{-1} : B \to A$ no sea continua? Tomar $f : X \to Y$, $f(x) = x^2$, con $X = [-1, 0] \cup]1, 2]$ e $Y = [0, 4]$

$\mathbb{R}$
$1, x \in \mathbb{Q}$
$0, x \in \mathbb{R} \cdot \mathbb{Q}$

5. Encuentre un ejemplo de una función definida para todos los reales que no sea continua en ningún punto.

6. Demuestre que si f es una función continua en un intervalo entonces la función $|f|$ también es continua en el intervalo.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua. Pruebe que si $f(x) = 0$ para todo $x \in X$ entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in \overline{X}$.

8. Pruebe que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si para todo $X \subset \mathbb{R}$ se tiene $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$. ⟹ ✓

9. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$ para todo $x, y \in X$, donde $0 \leq \lambda < 1$ es una constante. Pruebe que f es continua en X. Ilustre con ejemplos, dos al menos. Una función que satisface esta condiciones es llamada *función Lipschitz*.

10. Demuestre que cada una de las ecuaciones siguientes tiene al menos una solución real.

(a) $x^3 - 3x + 1 = 0$

(b) $x^2 = \sqrt{x+1}$

(c) $\cos x = x$

(d) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

11. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función monótona definida en un intervalo I. Si la imagen $f(I)$ es un intervalo entonces f es continua.

12. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función con la propiedad del valor intermedio. Si para cada $c \in \mathbb{R}$ existen como máximo un número finito de puntos $x \in I$ tales que $f(x) = c$, pruebe que f es continua.

$\operatorname{Int} [a, b] =]a, b[$

$\operatorname{Int}]a, b[=]a, b[$

13. Sean $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Si $f(1) = g(0)$ pruebe que la función $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \le x \le 1/2 \\ g(2x-1) & \text{si } 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

es continua. Pruebe también que la función $k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $k(x) = f(1-x)$ es continua.

14. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(0) = f(1)$. Pruebe que existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = f(x+1/2)$. Pruebe el mismo resultado con $1/3$ en vez de $1/2$. Generalice.

15. Sean $X \subset \mathbb{R}$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f tiene un punto fijo $x_f \in X$ si ocurre $f(x_f) = x_f$. Pruebe que si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que satisface $f([a,b]) \supset [a,b]$ o $f([a,b]) \subset [a,b]$, entonces f tiene un punto fijo en $[a,b]$. Pruebe que si f además satisface $|f(x) - f(y)| \le \lambda |x-y|$ para todo $x, y \in X$, con la constante λ tal que $0 \le \lambda < 1$, entonces el punto fijo es único.

16. Demuestre que la función continua $f(x) = sen(x^2)$ no es uniformemente continua.

17. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua. Pruebe que si existen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ entonces f es uniformemente continua. Verifique que la misma conclusión es válida si existen los límites $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - x]$.

18. Muestre que si f y g son funciones reales uniformemente continuas sobre $\mathbb{R}$ y si ambas son acotadas en $\mathbb{R}$, entonces el producto fg es una función uniformemente continua.

19. Si $f(x) = x$ y $g(x) = \text{sen}(x)$, muestre que ambas funciones son uniformemente continuas en $\mathbb{R}$, sin embargo, el producto fg no es uniformemente continuo en $\mathbb{R}$.

$[a,b]$

$\mathcal{F} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f \text{ función} \}$

$(\mathcal{F}, \langle\, , \rangle)$

$\langle\, , \rangle : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$

7 Continuidad

1. Estudie la continuidad de las siguientes funciones.

(a) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & \text{si } x\neq 1\\ 2 & \text{si } x=1\end{cases}$

(b) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$

(c) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x+1} & \text{si } x\neq -1\\ 6 & \text{si } x=-1\end{cases}$

(d) $f(x)=\begin{cases}1-x & \text{si } x\leq 2\\ x^2-2x & \text{si } x>2\end{cases}$

(e) $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x-3} & , \quad x<3\\[2mm] \dfrac{sen(5x-15)}{x-3} & , \quad x>3\\[2mm] 5 & , \quad x=3\end{cases}$

(f) $f(x)=\begin{cases}x^2-x+1 & , \quad x\leq 5\\[2mm] \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x}}{x-5} & , \quad 5<x\leq 9\\[2mm] \dfrac{x^2-11x+18}{x-9} & , \quad x>9\end{cases}$

2. Considere la función definida por $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen} x & \text{si } x\leq c\\ ax+b & \text{si } x>c\end{cases}$, donde a, b, y c son constantes. Si b, c están dados, determine todos los valores de a (si existe alguno) tales que la función f es continua.

3. Demuestre que no existe ningún valor de a para el que la función definida por $f(x)=\operatorname{sen}(1/x)$ si $x\neq 0$, $f(0)=a$ sea continua. (*Sugerencia:* Busque buenas sucesiones que tiendan a 0.)

4. ¿ Existe una función $f:A\subseteq\mathbb{R}\to B\subseteq\mathbb{R}$ que sea biyectiva, continua pero que $f^{-1}:B\to A$ no sea continua?

5. Encuentre un ejemplo de una función definida para todos los reales que no sea continua en ningún punto.

6. Demuestre que si f es una función continua en un intervalo entonces la función $|f|$ también es continua en el intervalo.

7. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ función continua. Pruebe que si $f(x)=0$ para todo $x\in X$ entonces $f(x)=0$ para todo $x\in\overline{X}$.

8. Pruebe que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua si y sólo si para todo $X\subset\mathbb{R}$ se tiene $f(\overline{X})\subset\overline{f(X)}$.

9. Sea $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ una función que satisface $|f(x)-f(y)|\leq\lambda|x-y|$ para todo $x,y\in X$, donde $0\leq\lambda<1$ es una constante. Pruebe que f es continua en X. Ilustre con ejemplos, dos al menos. Una función que satisface esta condiciones es llamada *función Lipschitz.*

10. Demuestre que cada una de las ecuaciones siguientes tiene al menos una solución real.

(a) $x^3-3x+1=0$

(b) $x^2=\sqrt{x+1}$

(c) $\cos x=x$

(d) $x^3+ax^2+bx+c=0$

11. Sea $f:I\to\mathbb{R}$ una función monótona definida en un intervalo I. Si la imagen $f(I)$ es un intervalo entonces f es continua.

12. Sea $f:I\to\mathbb{R}$ una función con la propiedad del valor intermedio. Si para cada $c\in\mathbb{R}$ existen como máximo un número finito de puntos $x\in I$ tales que $f(x)=c$, pruebe que f es continua.

13. Sean $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Si $f(1) = g((0)$ pruebe que la función $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ g(2x-1) & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

es continua. Pruebe también que la función $k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $k(x) = f(1-x)$ es continua.

14. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(0) = f(1)$. Pruebe que existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = f(x+1/2)$. Pruebe el mismo resultado con $1/3$ en vez de $1/2$. Generalice.

15. Sean $X \subset \mathbb{R}$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f tiene un punto fijo $x_f \in X$ si ocurre $f(x_f) = x_f$. Pruebe que si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que satisface $f([a,b]) \supset [a,b]$ o $f([a,b]) \subset [a,b]$, entonces f tiene un punto fijo en $[a,b]$. Pruebe que si f además satisface $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$ para todo $x, y \in X$, con la constante λ tal que $0 \leq \lambda < 1$, entonces el punto fijo es único.

16. Demuestre que la función continua $f(x) = sen(x^2)$ no es uniformemente continua.

17. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua. Pruebe que si existen $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ entonces f es uniformemente continua. Verifique que la misma conclusión es válida si existen los límites $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x]$.

18. Muestre que si f y g son funciones reales uniformemente continuas sobre $\mathbb{R}$ y si ambas son acotadas en $\mathbb{R}$, entonces el producto fg es una función uniformemente continua.

19. Si $f(x) = x$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, muestre que ambas funciones son uniformemente continuas en $\mathbb{R}$, sin embargo, el producto fg no es uniformemente continuo en $\mathbb{R}$.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Cálculo I

Primer Semestre, 2010
Prof. Verónica Poblete

Control 4

Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2\, sen(1/x) + \dfrac{x}{2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Demuestre que f es derivable en todo $x \in \mathbb{R}$ (**3 puntos parte teórica**) y calcule $f'(x)$ (**2 puntos parte práctica**).
2. Demuestre que f no es de clase C^1. (**3 puntos parte teórica**)
3. Obtener la recta tangente al gráfico de f en $(0,0)$ (**2 puntos parte práctica**).
4. Sea $g(x) = 3x + 1$. Calcular $(g \circ f)'(\frac{1}{2\pi})$ (**2 puntos parte práctica**).

Universidad de Chile
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencia

$x_n < |x_n - 2|$

$x_n < x_n - 2$

si $x_n < 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{x_n}{2 - x_n} \le 1$

$x_n \le 2 - x_n$

$2x_n \le 2$

$x_n \le 1$

Prueba 2
Primer Semestre 2010
Cálculo I
Prof. Verónica Poblete

Parte Práctica

1. Sea (x_n) una sucesión de números reales cuyos términos verifican la siguiente desigualdad

$$\frac{x_n}{|x_n - 2|} \le 1$$

¿es (x_n) una sucesión acotada? ¿existe $\sup\{x_n\}$? Justifique detalladamente sus respuestas. **(2 puntos)**

2. Calcular los siguientes límites de sucesiones **(2 puntos)**

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}\, sen(n^2)}{3^n}$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{3n+1}\right)^n$

3. Dada la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\,\dfrac{tg(x\pi - 2\pi)}{x-2} & \text{si } x < 2 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Encuentre el valor de α tal que $\lim_{x\to 2} f(x)$ exista. **(2 puntos)**

Parte Teórica

4. Sea (x_n) una sucesión de números reales cuyos términos verifican que $|x_n - x_{n+1}| \le \frac{1}{2^n}$. Demuestre que (x_n) converge. **(2 puntos)**

5. Si $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ y $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, demuestre que $\lim_{n\to\infty} y_n = a$. **(1 punto)**

6. Sean $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no-decreciente, acotada superiormente y $a \in X'_+$.

(a) Sea $L = inf\{f(x) \ : \ x \in X, x > a\}$. Indique porqué $L \in \mathbb{R}$.

(b) Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario. Pruebe que $L + \varepsilon$ no es cota inferior de $\{f(x) \ : \ x \in X, x > a\}$.

(c) Pruebe que $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

(3 puntos)

$n \Rightarrow \frac{3n+1}{2} = \frac{3n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{n}{2} = \frac{3n+1}{2} - \left(\frac{1+n}{2}\right) = \frac{3n+1-1-n}{2} = \frac{2n}{2} = n$

$\frac{3n}{2} - \frac{n}{2} = \frac{2n}{2} = n$

$\sqrt{9} + 3$

$3 + 3 = 6$

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Ejercicios Cálculo II
Segundo Semestre 2010
Prof. Verónica Poblete

1 Integral de Riemann

1. Calcular los siguientes límites:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(\left(\frac{2i}{n}\right)^3 + 5\left(\frac{2i}{n}\right)\right)$ 14

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\left(\frac{i}{n}\right)^3 + 1\right)$ 5/4

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\left(\left(1 + \frac{3i}{n}\right)^3 - 2\left(1 + \frac{3i}{n}\right)\right)$ 35/4

A 2. Utilizando 7 rectángulos encontrar dos aproximaciones al área de la región situada entre las gráficas de $f(x) = 3x^2 + 1$, el eje X y las rectas $x = 0, x = 2$.

3. Utilizar la suma superior e inferior para aproximar el área de la región dada con el número de rectángulos indicado.

   (a) $y = \sqrt{x} + 1$ para x entre 0 y 2, con 8 rectángulos.

   (b) $y = \frac{1}{x}$ para x entre 1 y 2, con 5 rectángulos.

   (c) $y = \frac{1}{x-2}$ para x entre 4 y 6, con 4 rectángulos.

   (d) $y = \sqrt{1 - x^2}$ para x entre 0 y 1, con 5 rectángulos.

   (e) $y = \sqrt{1 + x}$ para x entre 0 y 1, con 4 rectángulos.

4. Calcular las siguientes integrales definidas utilizando límite de sumas de Riemann:

   (a) $\int_{-1}^{5} 4dx$ 24

   (b) $\int_{0}^{4} xdx$ 8

   (c) $\int_{-2}^{4} 2xdx$ 12

   (d) $\int_{0}^{3} x^2dx$ 9

   (e) $\int_{1}^{5} 4x - 1dx$ 44

   (f) $\int_{2}^{4} x^3dx$ 60

   (g) $\int_{0}^{1} x^2 - xdx$ $-1/6$

   (h) $\int_{-1}^{1} 4x^2dx$ 8/3

   (i) $\int_{-3}^{-1} 6 - xdx$ 16

   (j) $\int_{5}^{6} x(3x - 1)dx$ 171/2

   (k) $\int_{2}^{4} 2x(x^2 - 1)dx$ 102

   (l) $\int_{4}^{7} -2x(x + x^2)dx$

5. Determinar la suma de Riemann para los siguientes casos:

   (a) $f(x) = 7 - 2x$; $[1, 5]$; $\{1, 1.6, 2.2, 3, 4.2, 5\}$; $x_i^* = \textit{punto medio}$

   (b) $f(x) = x^3$; $[-1, 1]$; $\{-1, -0.5; 0; 0.5; 1\}$; $x_1^* = -1; x_2^* = -0.4; x_3^* = 0.2; x_4^* = 1$

6. Demuestre usando la definición, que si $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = c(b - a)$.

$t_i - t_{i-1} = 2 + \frac{2}{n} i - \left(2 + \frac{2}{n}(i-1)\right)$

$= \frac{2}{n}$

7. A continuación se indican una función f, un intervalo, puntos de partición y el punto t_i^*.

- $f(x) = 16 - x^2$; $[0,4]$; $P = \{0,1,2,3,4\}$; $t_i^* =$ extremo izquierdo
- $f(x) = 16 - x^2$; $[0,4]$; $P = \{0,1,2,3,4\}$; $t_i^* =$ extremo derecho
- $f(x) = 16 - x^2$; $[0,4]$; $P = \{0,1,2,3,4\}$; $t_i^* =$ punto medio
- $f(x) = 2x + 1$; $[0,4]$; $P = \{0, 0.5, 1, 2, 4\}$; $t_i^* =$ extremo izquierdo
- $f(x) = x^3 + 2$; $[-1,2]$; $P = \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2\}$; $t_i^* =$ extremo derecho
- $f(x) = 2senx$; $[0,\pi]$; $P = \{0, \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi\}$; $t_1^* = \frac{\pi}{6}$; $t_2^* = \frac{\pi}{3}$; $t_3^* = \frac{2\pi}{3}$; $t_4^* = \frac{5\pi}{6}$.

Se pide encontrar:

(a) $\|P\|$

(b) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$

(c) Gráfica de f y de los rectángulos de aproximación.

(d) Área aproximada de la región encerrada por f, el eje X para x en el intervalo dado.

(e) Área real de la región encerrada por f, el eje X para x en el intervalo dado.

8. Sea $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Muestre que f es integrable en $[0,2]$ y calcule su integral.

9. (a) Pruebe que si $g(x) := 0$, para $0 \leq x \leq 1/2$ y $g(x) := 1$ para $1/2 < x \leq 1$, entonc integrable y $\int_0^1 g(x)\,dx = 1/2$.

(b) ¿Qué conclusión se puede obtener si cambia el valor de $g(1/2)$ de 0 a 7?

10. Sea $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 0$ para x irracional, y $h(x) = x$ para x racional. Calc integrales superior e inferior de h. Pruebe que h no es integrable.

11. Sea $f(x) = x^3$ para $0 \leq x \leq 1$ y considere la partición

$$P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}.$$

Calcule $s(f, P_n)$ y $S(f, P_n)$, y muestre que $\int_0^1 f(x)\,dx = 1/4$. [Ind.: Use la fórmula de la s los cubos de los primeros n números naturales.]

12. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función definida tal que $f(x) = 0$ excepto para $x \in \{c_1, \ldots, c_n\}$ (Pruebe que f es integrable y calcule su integral.

13. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Pruebe que $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

14. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, y sea $f(x) \geq 0$, para todo $x \in I$. Pruebe que si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ c $f(x) = 0$, para todo $x \in [a,b]$.

15. Sea $h : [0.1] \to \mathbb{R}$ una función definida por $h(x) = 0$ si x es irracional y $h(x) = 1/q$ si x donde $(p,q) = 1$. Demuestre que h es integrable y calcule su integral.

16. Sean $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas. Muestre que

$$\underline{\int_a^b} f_1(x)\,dx + \underline{\int_a^b} f_2(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} (f_1 + f_2)(x)\,dx.$$

Dé un ejemplo donde la desigualdad sea estricta.

17. Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $k > 0$.

(a) Muestre que

$$\underline{\int_a^b} kf(x)\,dx = k\underline{\int_a^b} f(x)\,dx, \qquad \text{y que,} \qquad \overline{\int_a^b} kf(x)\,dx = k\overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

(b) Muestre que si f es integrable en $[a,b]$ y $k > 0$, entonces kf es integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

preguntas

18. Sean f y g funciones acotadas en $[a,b]$ y con valores reales. Suponga que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Muestre que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} g(x)\,dx, \qquad \text{y que,} \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

19. Sean $f, g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas. Suponga que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Muestre que, si f y h son integrables y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx = A$$

entonces g es integrable en $[a,b]$ y $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = A$.

20. Sea $a > 0$ y sea $J = [-a,a]$. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ integrable en J.

(a) Si f es par entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

(b) Si f es impar, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

21. Muestre que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada y tiene a lo más un número finito de discontinuidades en [a,b], entonces f es integrable.

22. Dé un ejemplo de una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que no sea integrable en $[0,1]$ pero tal que $|f|$ si sea integrable en $[0,1]$.

23. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Pruebe que la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ es lipschitziana.

24. Una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que se anula fuera de un conjunto de medida nula puede ser no integrable. Indique un ejemplo. Si f se anula fuera de un conjunto de medida nula y es integrable pruebe que su integral es cero.

25. Sea $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable tal que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Pruebe que si $\displaystyle\int_a^b p(x)\,dx = 0$ entonces el conjunto $B = \{x \in [a,b] \ : \ p(x) = 0\}$ es denso en $[a,b]$. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable que se anula en un conjunto denso en $[a,b]$, pruebe que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

2 Teoremas clásicos del Cálculo Integral

26. Calcular la derivada de las siguientes funciones. Use el Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de la Cadena.

(a) $F(x) = \int_1^x \cos^2(t)dt$ (b) $G(x) = \int_0^{\operatorname{sen}(x)} \operatorname{arcsen}(t)dt$ (c) $H(x) = \frac{1}{2}\int_x^{2x} t^3 dt$

27. Calcular

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2}(e^{-t^2}-e^{-1})dt}{x\sqrt{x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$

28. Calcular el límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde

$$x_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

(Ind. expresar como suma de Riemann)

29. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable tal que f' es integrable. Pruebe que para cualesquiera $x, c \in [a, b]$ se tiene

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(x)dx.$$

30. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable tal que f' es integrable y $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Si el conjunto $\{x \in [a, b] \ : \ f'(x) = 0\}$ tiene contenido nulo, pruebe que f es estrictamente creciente.

31. Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y $\alpha, \beta : I \to [a, b]$ funciones derivables en el intervalo abierto I. Defina $\varphi : I \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt.$$

Pruebe que φ es derivable y que $\varphi'(x) = f(\beta(x))\,\beta'(x) - f(\alpha(x))\,\alpha'(x)$.

32. Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con derivada integrable, sea $m = (a + b)/2$. Pruebe que

$$f(a) + f(b) = \frac{2}{b-a}\int_a^b [f(x) + (x - m)f'(x)]\,dx.$$

33. Pruebe que la sucesión cuyo $n-$ésimo término es $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - log(n)$ es decreciente y acotada y por lo tanto converge.

34. Pruebe que $\lim\limits_{x\to 0} x\,log(x) = 0$.

35. Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

36. Suponga que f es una función que satisface $f''(x) + f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que existen constantes A y B tales que $f(x) = Acos(x) + Bsen(x)$.

37. Demuestre que $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx$, satisface la recurrencia:

$$(1 + 2n)I_n = (2x^n\ \sqrt{1+x}) - 2nI_{n-1}$$

$$\frac{1}{1+\frac{n-1}{m}K} = \frac{m}{m+(n-1)K}\cdot\frac{n-1}{m} = \frac{n-1}{m+(n-1)K} = \frac{n-1}{n-1}\cdot\frac{1}{\left(\frac{m}{n-1}+K\right)}$$

$$\int \arcsin t \, dt = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\operatorname{sen} x}{} \operatorname{sen} x$$

$$\int_1^1 x^\alpha dx$$

$P = \{ t_{i-1} = \frac{1}{n}(i-1) : i \in N \}$ $\quad f = x^\alpha$

$m_i = \inf \{ f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i] = f(t_{i-1}) = \frac{1}{n^\alpha}(i-1)^\alpha = \left(\frac{i-1}{n}\right)^\alpha$

$M_i = \sup \{ f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i] = f(t_i) = \frac{1}{n^\alpha} i^\alpha = \left(\frac{i}{n}\right)^\alpha$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} f(x^*) (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x^*) \left(\frac{1}{n}(i-1) - \frac{1}{n} i \right)$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x^*) \frac{1}{n}$$

"Soy un girasol de Vincent Van Gogh"

38. Para $n \in \mathbb{N}$, se define $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (senx)^n dx$.

(a) Calcular I_0, I_1 y demostrar que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, I_n$.

(b) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$.

39. Sabiendo que $\int\limits_0^{\pi} f(t)dt = 2\pi$, encuentre los puntos extremos de la función:

$$F(x) = \left[\int\limits_0^{\pi} (f(t) - x)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

40. Demuestre que si f es una función integrable entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$.

41. Demuestre que si f es integrable y:

(a) f es par entonces $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_0^{a} f(x)dx$

(b) f es impar entonces: $\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = -\int\limits_0^{a} f(x)dx$ y que $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

42. Calcule $\frac{dy}{dx}$ para cada una de las siguientes funciones:

(a) $y = \int\limits_1^{x} \sqrt{1+2t^2}dt$ (b) $y = \int\limits_x^{b} \dfrac{dt}{1+t^2+sen^2 t}$ (c) $y = \int\limits_a^{b} \dfrac{x\,dt}{\sqrt{1+\cos^2 t}}$

43. Dada una función g que cumple con $g(1) = 5$ y $\int_0^1 g(x)dx = 2$ y una función f definida por $f(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{x} (x-t)^2 g(t)dt$, calcular $f''(1)$ y $f'''(1)$.

44. La siguiente ecuación define implícitamente a y como función de x. Calcule $\frac{dy}{dx}$,

$$xsen(xy) + \int\limits_{\sqrt{y}}^{x^2 seny} \frac{sent}{t}\, dt = 1.$$

45. Determine las constantes a y b de manera que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{bx - senx} \int\limits_0^{x} \dfrac{t^2\, dt}{\sqrt{a+t}} = 1$.

46. Se definen $I = \int e^{ax} cos(bx)\, dx$ y $J = \int e^{ax} sen(bx)\, dx$, demuestre que

$$arctg\left(\frac{J}{I}\right) + arctg\left(\frac{b}{a}\right) = bx$$

47. Si f es una función continua e invertible tal que $\int f(x)dx = F(x)$, demuestre que:

$$\int f^{-1}(x)\, dx = x \cdot f^{-1}(x) - F\left(f^{-1}(x)\right)$$

24
22
22
16
107

3 Métodos de Integración

48. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_3^5 \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_2^8 (x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^2\,dx$

(d) $\displaystyle\int_4^9 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sen(x)}{cos^2(x)}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_3^9 \frac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (t^2 + sec^2(t))\,dt$

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2(y) + 1\,dx$

(j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{ln(x)}{x}\,dx$

(k) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{cos(x)}{sen(x)}\,dx$

(l) $\displaystyle\int_0^1 \frac{sen(2x)}{1+cos(2x)^2}\,dx$

(m) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{3x-1}\,dx$

(n) $\displaystyle\int_{-2}^3 (e^x+1)^2\,dx$

(o) $\displaystyle\int_4^9 \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

(p) $\displaystyle\int_{-2}^4 x^2 e^{x^3}\,dx$

(q) $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx$

(r) $\displaystyle\int_{-1}^{-1} \frac{dx}{e^{3x}+4}$

(s) $\displaystyle\int_0^{\pi} x sen(x^2)\,dx$

(t) $\displaystyle\int_0^1 sec(1-x)tg(1-x)\,dx$

(u) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{6x}{(1+x^2)^3}\,dx$

(v) $\displaystyle\int_{-3}^0 u^3 \cdot \sqrt{u^4+2}\,du$

(w) $\displaystyle\int_2^4 (1+\frac{1}{t})^3 \cdot \frac{1}{t^2}\,dt$

(x) $\displaystyle\int_3^8 \frac{x^3}{\sqrt[4]{1+x^4}}\,dx$

(y) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(x)}{sen^4(x)}\,dx$

(z) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} tg^4(x) \cdot sec^2(x)\,dx$

49. Calcular

(a) $\displaystyle\int xe^x\,dx$

(b) $\displaystyle\int ln(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int xsen(x)\,dx$

(d) $\displaystyle\int x^n ln(x)\,dx$

(e) $\displaystyle\int xcos^2(x)\,dx$

* (f) $\displaystyle\int sec^3(x)\,dx$ Hacer de nuevo

(g) $\displaystyle\int e^x cos(2x)\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$

(i) $\displaystyle\int x^2 sen(x)\,dx$

(j) $\displaystyle\int u\,ln(u+1)\,du$

(k) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}\,dx$

(l) $\displaystyle\int sec(x)\,dx$

(m) $\displaystyle\int 4u\,sec(u)\,tg(u)\,dt$

(n) $\displaystyle\int e^{2x} sen(x)\,dx$

(o) $\displaystyle\int \frac{ln(2u)}{u^2}\,du$

(p) $\displaystyle\int 1 + \frac{te^{2t}}{(2t+1)^2}\,dt$

(q) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2+3x}}\,dx$

* (r) $\displaystyle\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2}\,dx$ Terminar

(s) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^2+1}\,dx$

(t) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x}\,dx$

(u) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-e^x}\,dx$

(v) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$

(w) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+10x+16}\,dx$

(x) $\displaystyle\int \tan^3(x)\,dx$

50. Calcular las siguientes integrales de expresiones trigonométricas:

(a) $\displaystyle\int sen^5(x)\,cos(x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int sec^4(x)\,tg(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int sen^3(x)\,cos^4(x)\,dx$

(d) $\displaystyle\int sec^4(2x)\,dx$

(e) $\displaystyle\int sen^2(x)\,cos^5(x)\,dx$

(f) $\displaystyle\int tg^3(1-u)\,du$

$(1-\cos^2 x)^2$

$1-t^2$

(g) $\int \cos^3(\frac{x}{2})\,dx$

(h) $\int tg^5(\frac{x}{4})\,dx$

(i) $\int \frac{sen^3(4x)}{\sqrt{cos(4x)}}$

(j) $\int sec^2(\frac{\pi x}{2})\,tg^8(\frac{\pi x}{2})\,dx$

(k) $\int \frac{cos^3(x)}{sen^4(x)}\,dx$

(l) $\int \frac{1}{sec(x)\,tg(x)}\,dx$

(m) $\int sen^2(\pi x)cos^4(\pi x)\,dx$

(n) $\int sec^2(3x)\,tg^2(3x)\,dx$

(o) $\int \frac{sen^2(x)-cos^2(x)}{cos(x)}\,dx$

(p) $\int sec^2(u)\,\sqrt{tg(u)}\,du$

(q) $\int cos^7(x)\,dx$

(r) $\int tg^4(t) - sec^4(t)\,dt$

(s) $\int cos^3(x)\,\sqrt{sen^5(x)}$

(t) $\int cosec^4(x)\,dx$

51. Calcular las siguientes integrales utilizando sustitución trigonométrica:

(a) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

(b) $\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx$

(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{(25-x^2)^3}}$

(d) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

(e) $\int \sqrt{16-4x^2}\,dx$

(f) $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+16}}\,dx$

hiperbólica → (g) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$

(h) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

(i) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$

(j) $\int \frac{1}{4+4x^2+x^4}\,dx$

(k) $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$

(l) $\int (x+1)\,\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$

(m) $\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$

(n) $\int e^{2x}\,\sqrt{1+e^{2x}}$

(o) $\int \frac{x^2}{(4+x^2)^2}\,dx$

(p) $\int \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx$

(q) $\int \frac{x^3+x+1}{x^4+2x^2+1}\,dx$

(r) $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$

(s) $\int \frac{\sqrt{4x^2+9}}{x^4}\,dx$

(t) $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$

52. Calcule las siguientes integrales utilizando descomposición en fracciones parciales:

(a) $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$

(b) $\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x+x}\,dx$

(c) $\int \frac{3}{x^2+x-2}\,dx$

(d) $\int \frac{x+1}{x^2+4x+3}\,dx$

(e) $\int \frac{5-x}{2x^2+x-1}\,dx$

(f) $\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x}\,dx$

(g) $\int \frac{x^2+12x+12}{x^3-4x}\,dx$

(h) $\int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}\,dx$

(i) $\int \frac{x^2-4x+7}{x^3-x^2+x+3}\,dx$

(j) $\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+2)^2}\,dx$

(k) $\int \frac{2x^3-4x-8}{x(x-1)(x^2+4)}\,dx$

(l) $\int \frac{x^2+x+3}{x^4+6x^2+9}\,dx$

(m) $\int \frac{sen(x)}{cos(x)(cos(x)-1)}\,dx$

(n) $\int \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+4)}\,dx$

(o) $\int \frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2}\,dx$

(p) $\int \frac{x}{(a+bx)^2}\,dx$

$\int u^{-2} = -u^{-1}$

$\frac{1}{\cos} = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos^2 u} = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\cdot\frac{1}{\cos u}$

$= \tan u \sec u$

$\frac{\beta}{\alpha}$: $\beta \mid 3$, $\alpha \mid 1$

$-8-4-2+3$

$8-4+2+3$

$-1-1-1+3$ $x=-1$

$u^{-2} = -\frac{u^{-7}}{7} = \frac{3u^{-}}{3}$

144
$-$ 48
96

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(cx)\,dx$$

4 Integrales Impropias

53. Consideremos la siguiente integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}},$$

¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la integral converge? Calcule el valor de dicha integral.

54. Sean $I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$ e $I_2 = \displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Pruebe que las integrales convergen y calcule su valor.

55. Determine para qué valores de α la integral impropia $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}$ converge.

56. Estudiar la convergencia de las integrales impropias y calcular su valor cuando corresponda.

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} (1-x)\, e^{-x} dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{x} \cos x dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(2x-1)^3}$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$

(g) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx$

(h) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^x}{1+e^x} dx$

(i) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\cdot \ln x}$

(j) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2x\cdot\ln(x^2+1)}{x^2+1} dx$

(k) $\displaystyle\int_2^{4} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

(l) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$

(m) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{4-x^2}$

(n) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^3-5x^2}$

(o) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}} dx$

(p) $\displaystyle\int_{-2}^{4} \frac{dx}{x^2-4}$

(q) $\displaystyle\int_{-1}^{7} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$

(r) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\theta+1}{\sqrt{\theta^2+2\theta}} d\theta$

(s) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} x^{-2}\, e^{-1/x} dx$

(t) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$

(u) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{arctg x}{x} dx$

(v) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x+4e^{-x}}$

(w) $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} \frac{x}{\operatorname{sen} x} dx$

(x) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$

(y) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$

(z) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$

57. Una aplicación interesante de integrales impropias es el cálculo del *Potencial Electrostático de una esfera cargada uniformemente*. Si queremos calcular el potencial en un punto r que está fuera de la esfera, éste viene dado por

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} E_r dr,$$

dónde E_r es el campo eléctrico producido por la esfera, tal campo a partir de la *Ley de Gauss* es $E_r = k_e\dfrac{Q}{r^2}$, con Q la carga total de la esfera y k_e la Constante de Coulomb.

Con la definición anterior, obtenga el potencial eléctrico V_r en un punto fuera de la esfera con carga total Q y radio R.

58. Considere la función $f : (-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^3}$. Para los volumenes y áreas siguientes, se pide determinar si son finitos y en tal caso calcularlos.

(a) Área de la región: $R = \{(x,y) : 0 \le x, 0 \le y \le f(x)\}$

(b) Área de la región : $Q = \{(x,y) : -1 \le x \le 0, f(x) \le y \le 0\}$

(c) Volumen del sólido obtenido al rotar la región R de la parte (a), en torno al semi-eje OX.