Antes de seguir, demostraremos el siguiente

Lema: Si M es una transformación de Moebius tal que $\forall n \geq 2$, existe $\tilde{M}$ de Moebius tal que $\tilde{M}^n = M$, entonces los puntos fijos de $\tilde{M}$ son puntos fijos de M.

dem. Sea $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ punto fijo de $\tilde{M}$, $\tilde{M}(z_0) = z_0$

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}$, $\tilde{M}^m(z_0) = z_0$. En particular, cuando $m = n$,

$$M(z_0) = \tilde{M}^n(z_0) = z_0$$

$$\therefore M(z_0) = z_0$$

Así, z_0 es punto fijo de M.

Obs. El recíproco no siempre se cumple. Para ello basta tomar $I(z) = z$ y $S(z) = \frac{1}{z}$. $S^2 = I$, I fija a todo $\overline{\mathbb{C}}$ mientras que S sólo fija a 1 y -1.

Consideremos una traslación no trivial $M(z) = az + b$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. En el caso de que existiera $\tilde{M}$ tal que $\tilde{M}^n = M$, entonces $\tilde{M}$ sólo debe fijar a ∞ (ya que M sólo fija a ∞)

$$\therefore \tilde{M}(z) = a'z + b', \quad a', b' \in \mathbb{C}.$$

Inductivamente: $\tilde{M}^n(z) = a'^n z + (a'^{n-1} + a'^{n-2} + \dots + a' + 1)b'$

$$\tilde{M}^n(z) = M(z) \ \forall z \in \overline{\mathbb{C}} \iff a'^n z + (a'^{n-1} + a'^{n-2} + \dots + a' + 1)b' = az + b \ \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$$

$$\iff \begin{cases} a'^n = a \\ (a'^{n-1} + a'^{n-2} + \dots + a' + 1)b' = b \end{cases}$$

Para el caso de que $a = 1$, podemos tomar $a' = 1$, luego:

$$b = (a'^{n-1} + a'^{n-2} + \dots + a' + 1)b' = nb'$$

$$\therefore b' = \frac{b}{n}$$

Así, para $M(z) = z+b$ $(a=1)$ tenemos $\tilde{M}(z) = z + \frac{b}{n}$, la cual satisface $\tilde{M}^n = M$.

Para el caso $a \neq 1$, tomamos $a' = |a|^{1/n} e^{i\theta/n}$, donde $a = |a| e^{i\theta}$

$$\therefore \quad b = (a'^{n-1} + a'^{n-2} + \dots + a' + 1)\, b' = \frac{a'^n - 1}{a' - 1}\, b'$$

$$b' = \frac{a' - 1}{a'^n - 1}\, b = \frac{|a|^{1/n} e^{i\theta/n} - 1}{a - 1}\, b$$

$$\therefore \quad \tilde{M}(z) = |a|^{1/n} e^{i\theta/n} z + \frac{|a|^{1/n} e^{i\theta/n} - 1}{a - 1}\, b$$ es tal que $\tilde{M}^n = M$.

Ahora, sea $D(z) = \alpha z$ una dilatación no trivial $(\alpha \neq 1)$. Acá es más fácil encontrar $\tilde{D}$ tal que $\tilde{D}^n = D$. Para ello basta tomar $\alpha' = |\alpha|^{1/n} e^{i\varphi/n}$, donde $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$. Se tiene que si $\tilde{D}(z) = \alpha' z$ $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$,

$$\tilde{D}^n(z) = \alpha'^n z = \left(|\alpha|^{1/n} e^{i\varphi/n}\right)^n z = |\alpha| e^{i\varphi} z = \alpha z = D(z).$$

Parte 2. Sea M una transformación de Moebius tal que para todo $n \geq 2$, existe $\tilde{M}$ tal que $\tilde{M}^n = M$. Entonces $\forall H$ transformación de Moebius, HMH^{-1} es el conjugado de M y se cumple

$$HMH^{-1} = H\tilde{M}^n H^{-1} = (H\tilde{M}H^{-1})^n$$

Luego, tomando $\tilde{K} = H\tilde{M}H$, se cumple que $HMH^{-1} = \tilde{K}^n$

Parte 3. Sabemos que toda transformación de Moebius M fija a lo más 2 puntos de $\overline{\mathbb{C}}$. Luego encontraremos su conjugado viendo si tiene 1 o 2 puntos fijos.

Supongamos que tiene un único punto fijo z_0 : $M(z_0)=z_0$.
Mediante la relación cruzada, podemos construir una transformación de Moebius G tal que $G(z_0)=\infty$,

$$G\circ M\circ G^{-1}(\infty)=G(M(G^{-1}(\infty)))=G(M(z_0))$$
$$=G(z_0)=\infty$$

$$\therefore\ G\circ M\circ G^{-1}(\infty)=\infty$$

y como $G\circ M\circ G^{-1}(w_0)=w_0 \Rightarrow G(M(G^{-1}(w_0)))=w_0$

$\Rightarrow M(G^{-1}(w_0))=G^{-1}(w_0)$

$\Rightarrow G^{-1}(w_0)$ es punto fijo de M

$\Rightarrow G^{-1}(w_0)=z_0=G^{-1}(\infty)$

$\Rightarrow w_0=\infty$

$\therefore\ G\circ M\circ G^{-1}$ solo fija a ∞.

De lo anterior, se tiene que $G\circ M\circ G^{-1}$ es una traslación, i.e., existen $a,b\in\mathbb{C}, b\neq 0$: $G\circ M\circ G^{-1}(z)=az+b \quad \forall z\in\overline{\mathbb{C}}$.

Tomando $H(z)=\dfrac{az}{b} \Rightarrow H^{-1}(z)=\dfrac{b}{a}z$

$$\Rightarrow H\circ G\circ M\circ G^{-1}\circ H^{-1}(z)=H(G\circ M\circ G^{-1}(H^{-1}(z)))$$
$$=H\left(G\circ M\circ G^{-1}\left(\frac{bz}{a}\right)\right)$$
$$=H(bz+b)$$
$$=\frac{a}{b}(bz+b)=az+a$$

$\therefore \quad (H \circ G) \circ M \circ (H \circ G)^{-1} = \tilde{M}$, donde $\tilde{M}(z) = az + a$

Así M es conjugada a una traslación particular.

Ahora supongamos que M tiene dos puntos fijos, z_1, z_2.

$$M(z_1) = z_1$$
$$M(z_2) = z_2$$

Por la relación cruzada, podemos conseguir una transformación de Moebius G tal que $G(z_1) = 0$, $G(z_2) = \infty$. Bajo el mismo razonamiento anterior

$$G \circ M \circ G^{-1} \text{ fija a } 0 \text{ y } \infty \text{ únicamente.}$$

$\therefore$ $G \circ M \circ G^{-1}$ es una dilatación, es decir, existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 1, 0$, tal que $G \circ M \circ G^{-1}(z) = \lambda z \quad \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$

Así M es conjugada a una dilatación.

Parte 4: Dada una transformación de Moebius M, existen $\tilde{M}$ y H transformaciones de Moebius tales que

$$M = H \tilde{M} H^{-1}$$

donde $\tilde{M}$ es una traslación del tipo $\tilde{M}(z) = az + a$, $a \neq 0$ si M tiene sólo un punto fijo, o es una dilatación $\tilde{M}(z) = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1, 0\}$ si M tiene dos puntos fijos. En ambos casos, dado $n \geq 2$, existe $\hat{M}$ transformación de Moebius tal que

$$\tilde{M} = \hat{M}^n$$

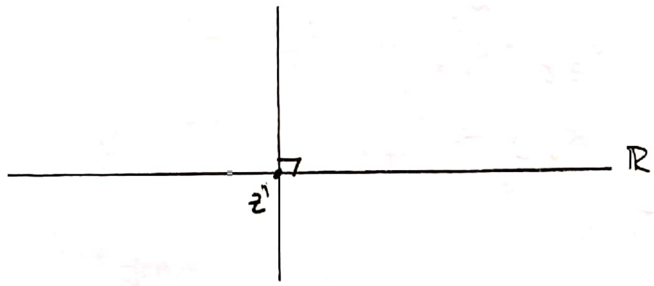
Luego $M = H \tilde{M} H^{-1} = H \hat{M}^n H^{-1} = (H \hat{M} H^{-1})^n$. Tomando $K = H \hat{M} H^{-1}$, concluimos que $M = K^n$

■

Problema B

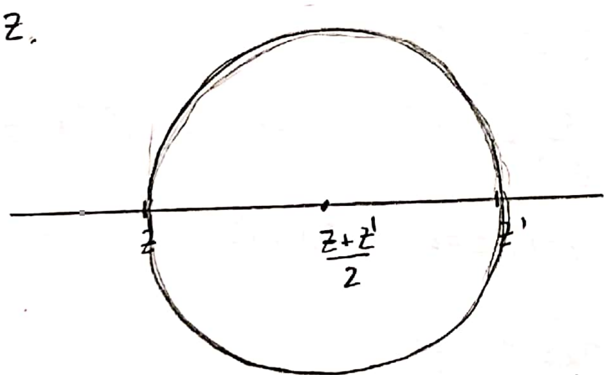
(1) Dados dos puntos distintos de z y z' de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, demuestre que existe un único círculo $C_{z,z'}$ en $\overline{\mathbb{C}}$ que contiene a z y a z', y que es ortogonal al círculo $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Demuestre además que existe un único homeomorfismo conforme $R_{z,z'}$ de $\overline{\mathbb{C}}$ que invierte la orientación y que fija cada punto de $C_{z,z'}$.

dem. Sean $z, z' \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Supongamos $z = \infty$, entonces existe una única recta que pasa por z' y que es perpendicular a $\mathbb{R}$:



Llamemos $C_{z',\infty}$ a esta recta. En particular, es un círculo en $\overline{\mathbb{C}}$ ya que también pasa por ∞.

Supongamos ahora que $z, z' \in \mathbb{R}$. Esto implica $\frac{z+z'}{2}$ también se encuentra sobre $\mathbb{R}$. Por lo que sabemos de geometría euclideana en $\mathbb{R}^2$, dado el punto z y el radio $\left| z - \frac{z+z'}{2} \right|$ existe una única circunferencia cuyo centro es $\frac{z+z'}{2}$ y que pasa por z.



$z < z'$

Llamamos a $C_{z,z'}$ a esta circunferencia. Notar que z' también pertenece a $C_{z,z'}$, ya que

$$\left| z - \frac{z+z'}{2} \right| = \left| z' - \frac{z+z'}{2} \right|$$

Pd: Existe un único homeomorfismo conforme $R_{z,z'}$ de $\overline{\mathbb{C}}$ que invierte la orientación y que fija cada punto de $C_{z,z'}$

Dem. Primero resolveremos la unicidad. Sean $R_{z,z'}$, $\tilde{R}_{z,z'}$ dos homeomorfismos conformes de $\overline{\mathbb{C}}$ que invierten la orientación y que fijan cada punto de $C_{z,z'}$. Si ese fuera el caso, entonces $R_{z,z'} \circ \tilde{R}_{z,z'}^{-1}$ es un homeomorfismo conforme que preserva la orientación, en particular es una transformación de Moebius.

Ahora, $R_{z,z'} \circ \tilde{R}_{z,z'}^{-1}$ es una transformación de Moebius que fija a todos los puntos de una circunferencia.

$$\Rightarrow R_{z,z'} \circ \tilde{R}_{z,z'}^{-1} = Id_{\overline{\mathbb{C}}}$$

$$\therefore R_{z,z'} = \tilde{R}_{z,z'}.$$

Ahora probaremos la existencia.

Sean $z, z' \in \mathbb{R}$. Para $z=-1$, $z'=1$ tenemos $R_{-1,1}(z) = \frac{1}{\overline{z}}$.

$R_{-1,1}$ es conforme e invierte la orientación, ya que $R_{-1,1} = k \circ S$, donde $S(z) = \frac{1}{z}$ (transf. de Moebius), $k(z) = \overline{z}$ (Conjugación compleja)

(Una transformación conforme que invierte la orientación es una transformación conforme compuesta con la conjugación).

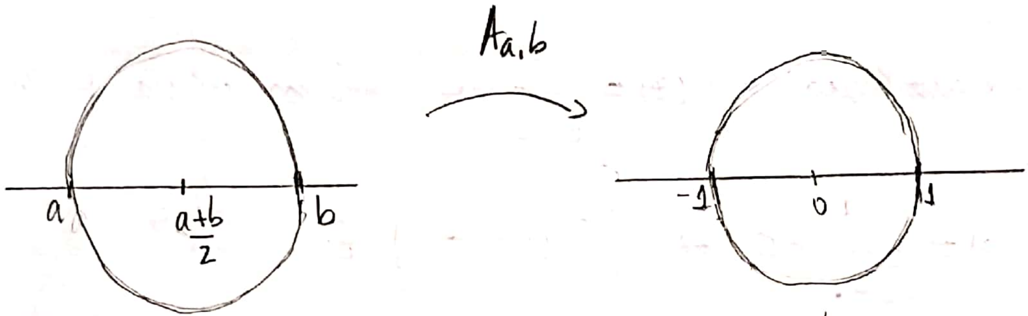
$z \in C_{-1,1} \Leftrightarrow z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$,

$$R_{-1,1}(e^{i\theta}) = \frac{1}{\overline{e^{i\theta}}} = \frac{1}{e^{-i\theta}} = e^{i\theta} \quad \Rightarrow R_{-1,1}(e^{i\theta}) = e^{i\theta}.$$

Ahora, para el caso general. $z=a$, $z'=b$ $(a,b \in \mathbb{R})$, construimos $R_{a,b}$ mediante

$$R_{a,b} = A_{a,b}^{-1} \circ \frac{1}{\overline{A_{a,b}}}.$$

donde $A_{a,b}$ es la transformación que mapea $C_{a,b}$ a $C_{-1,1}$



$\boxed{b>a}$

$z \in \overline{\mathbb{C}}$:

$$A_{a,b}(z) = \frac{1}{r}(z-c), \text{ donde } r = \frac{b-a}{2}, \; c = \frac{a+b}{2} \quad (r, c \in \mathbb{R})$$

Luego, $A_{a,b}^{-1}(z) = rz + c$ y con ello podemos tener una expresión para $R_{a,b}$, a saber:

$$R_{a,b}(z) = A_{a,b}^{-1} \circ \left(\frac{1}{\overline{A_{a,b}}} \right)(z) = A_{a,b}^{-1}\left(\frac{1}{\overline{A_{a,b}(z)}} \right) = A_{a,b}^{-1}\left(\frac{r}{\overline{z}-c} \right)$$

$$= R_{a,b}\left(\frac{r}{\overline{z}-c} \right) = \frac{r^2}{\overline{z}-c} + c$$

$$\therefore \forall z \in \overline{\mathbb{C}} : R_{a,b}(z) = \frac{r^2}{\overline{z}-c} + c$$

Pd: $R_{a,b}(z) = z \quad \forall z \in C_{a,b}$

En efecto, $z \in C_{a,b} \Rightarrow z = c + re^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$

$$R_{a,b}(c+re^{i\theta}) = \frac{r^2}{\overline{c+re^{i\theta}} - c} + c = \frac{r^2}{c+re^{-i\theta}-c} + c = \frac{r^2}{re^{i\theta}} + c = r\frac{1}{e^{-i\theta}} + c$$

$$= re^{i\theta} + c = c + re^{i\theta}$$

$$\therefore R_{a,b}(c+re^{i\theta}) = c + re^{i\theta}$$

$R_{a,b}$ es conforme e invierte la orientación ya que $R_{a,b}(z) = \frac{r^2}{\overline{z}-c} + c = \overline{\left(\frac{r^2}{z-c} + c \right)}$.

$R_{a,b}$ es un homeomorfismo cuya inversa es $R_{a,b}^{-1}(z) = \frac{r^2}{\overline{z}-c} + c$.

Observación: Del homeomorfismo $R_{a,b}(z) = \frac{r^2}{\bar{z}-c} + c$ podemos inferir las siguientes propiedades:

$\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$: $R_{a,b}(z) = \frac{r^2}{\bar{z}-c} + c \Rightarrow (R_{a,b}(z)-c)(\bar{z}-c) = r^2$

Dado $z = c + \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$; se tiene $R_{a,b}(z) = c + \rho' e^{i\theta'}$, $\rho' > 0$, $\theta' \in [0, 2\pi)$

y además,

$$(R_{a,b}(z)-c)(\bar{z}-c) = r^2 \Leftrightarrow (c+\rho' e^{i\theta'} - c)(c + \rho e^{-i\theta} - c) = r^2$$
$$\Leftrightarrow (\rho' e^{i\theta'})(\rho e^{-i\theta}) = r^2$$
$$\Leftrightarrow \rho\rho' e^{i(\theta'-\theta)} = r^2$$

$\rho, \rho' > 0 \Rightarrow \rho\rho' > 0$, y $r^2 > 0$. Luego $e^{i(\theta'-\theta)} = 1$

$$\therefore \theta' - \theta = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pero como $\theta, \theta' \in [0, 2\pi)$, la única posibilidad es que $\theta = \theta'$.

Así, z, $R_{a,b}(z)$ se encuentran en la misma recta que pasa por el centro de $C_{a,b}$.

Además, $e^{i(\theta'-\theta)} = 1 \Rightarrow \rho\rho' = r^2 \Rightarrow \left(\frac{\rho}{r}\right)\left(\frac{\rho'}{r}\right) = 1$

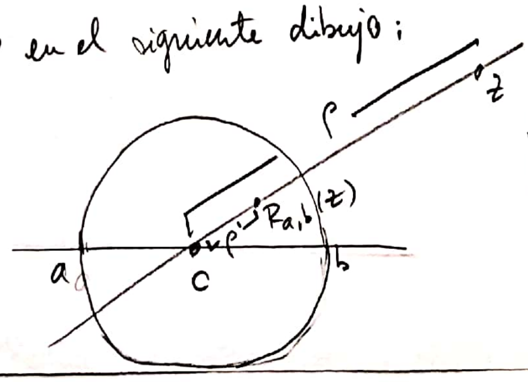
Esto quiere decir que si z se encuentra fuera de $C_{a,b} \Rightarrow \rho > r$

$$\therefore \rho' = \frac{r}{\rho} r < 1 \cdot r = r$$

$\therefore R_{a,b}(z)$ se encuentra dentro de $C_{a,b}$

Vice-versa: Si z se encuentra dentro de $C_{a,b}$, $R_{a,b}(z)$ se encuentra fuera de $C_{a,b}$.

Resumimos el fenómeno en el siguiente dibujo:



$$\boxed{\rho' = \frac{r^2}{\rho}}$$

Para el caso en que $a=\infty$, consideramos el homeomorfismo conforme

$R_{\infty,b}(z) = b - (\overline{z} - b) = 2b - \overline{z}$

Si $z \in C_{\infty,b} \Rightarrow z = b + \rho i$, $\rho \in \mathbb{R}$. Luego:

$R(b+\rho i) = 2b - (\overline{b+\rho i}) = 2b - (b - \rho i) = 2b - b + \rho i = b + \rho i$

$R_{\infty,b}$ invierte la orientación ya que $R'_{\infty,b}(z) = \overline{2b - z} \quad \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$.

(2) Sea Γ el grupo de homeomorfismos conformes de $\overline{\mathbb{C}}$ generado por $R_{0,1}$, $R_{1,\infty}$, $R_{0,\infty}$. Determine el conjunto $\{\gamma(\infty) \mid \gamma \in \Gamma\}$.

Desarrollo.

Por lo desarrollado en la parte (1), $R_{0,1}(z) = \dfrac{\overline{z}}{2\overline{z}-1}$, $R_{0,\infty}(z) = -\overline{z}$, $R_{1,\infty}(z) = 2-\overline{z}$. Primero veamos que

$$R_{1,\infty} \circ R_{1,\infty}(z) = 2 - (\overline{R_{1,\infty}(z)}) = 2 - (\overline{2-\overline{z}}) = 2-(2-z) = z$$

$$R_{0,\infty} \circ R_{0,\infty}(z) = -(\overline{R_{0,\infty}(z)}) = -(\overline{-(\overline{z})}) = -(-z) = z$$

$$R_{0,1} \circ R_{0,1}(z) = \frac{\overline{R_{0,1}(z)}}{2\overline{R_{0,1}(z)}-1} = \frac{\overline{\left(\frac{\overline{z}}{2\overline{z}-1}\right)}}{2\overline{\left(\frac{\overline{z}}{2\overline{z}-1}\right)}-1} = \frac{\frac{z}{2z-1}}{2\left(\frac{z}{2z-1}\right)-1} = \frac{\frac{z}{2z-1}}{\frac{2z-2z+1}{2z-1}} = z$$

$$\therefore \; R_{1,\infty}^2 = R_{0,\infty}^2 = R_{0,1}^2 = id_{\overline{\mathbb{C}}}$$

Para conocer un poco los elementos de Γ, vamos a componer $R_{1,\infty}$ y $R_{1,\infty}$.

Definimos recursivamente:

$$M_0(z) = R_{1,\infty}(z) = 2-\overline{z}$$

$$M_1(z) = R_{0,\infty} \circ R_{1,\infty}(z) = -(\overline{2-\overline{z}}) = -2+z$$

$$M_2(z) = R_{1,\infty} \circ M_1(z) = 2-(\overline{-2+z}) = 4-\overline{z}$$

$$M_3(z) = R_{0,\infty} \circ M_2(z) = -(\overline{4-\overline{z}}) = -4+z$$

$$M_4(z) = R_{1,\infty} \circ M_3(z) = 2-(\overline{-4+z}) = 6-\overline{z}$$

$$M_5(z) = R_{0,\infty} \circ M_4(z) = -(\overline{6-\overline{z}}) = -6+z$$

$$M_6(z) = R_{1,\infty} \circ M_5(z) = 2-(\overline{-6+z}) = 8-\overline{z}$$

$$M_7(z) = R_{0,\infty} \circ M_6(z) = -(\overline{8-\overline{z}}) = -8+z$$

Generalizando por inducción: $M_{2k-1}(z) = -2k+z$, $M_{2k}(z) = 2k+2-\overline{z}$ $(k \in \mathbb{N})$

$M_0(z) = 2-\overline{z}$

$P_0(z) := R_{0,\infty}(z) = -\overline{z}$

$P_1(z) = R_{1,\infty} \circ R_{0,\infty}(z) = 2 - (-\overline{\overline{z}}) = 2 + z$

$P_2(z) = R_{0,\infty} \circ P_1(z) = -(\overline{2+z}) = -2 - \overline{z}$

$P_3(z) = R_{1,\infty} \circ P_2(z) = 2 - (\overline{-2-\overline{z}}) = 4 + z$

$P_4(z) = R_{0,\infty} \circ P_3(z) = -(\overline{4+z}) = -4 - \overline{z}$

$P_5(z) = R_{1,\infty} \circ P_4(z) = 2 - (\overline{-4-\overline{z}}) = 6 + z$

$P_6(z) = R_{0,\infty} \circ P_5(z) = -(\overline{6+z}) = -6 - \overline{z}$

$P_7(z) = R_{1,\infty} \circ P_6(z) = 2 - (\overline{-6-\overline{z}}) = 8 + z$

$P_8(z) = R_{0,\infty} \circ P_7(z) = -(\overline{8+z}) = -8 - \overline{z}$

Generalizando: $P_{2k-1}(z) = 2k + z$, $P_{2k}(z) = -2k - \overline{z}$ $(k \in \mathbb{N})$

$P_0(z) = -\overline{z}$

Dicho esto, tenemos lo siguiente:

Afirmación: $\mathbb{Z} \cap \{\gamma(\infty) / \gamma \in \Gamma\} = \phi$.

Supongamos $\exists n \in \mathbb{Z}$ tal que $\gamma(\infty) = n$, para algún $\gamma \in \Gamma$ no trivial. $(\gamma \neq 1)$.

Sea $\gamma = \gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_r$, donde $\gamma_j \in \{R_{0,1}, R_{1,\infty}, R_{0,\infty}\}$ $\forall j = 1, \dots, r$. Como $R_{1,\infty}$, $R_{0,\infty}$ fijan ∞, debe existir $j_0 \in \{1, \dots, r\}$, $\gamma_{j_0} = R_{0,1}$.

Sin perder generalidad, podemos asumir j_0 como el mayor índice:

$$\gamma(\infty) = \gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_{j_0-1} \circ \gamma_{j_0}(\infty)$$
$$= \gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_{j_0-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Como j_0 es el mayor índice, $\gamma_{j_0-1} \in \{R_{0,\infty}, R_{1,\infty}\}$

$$\Rightarrow \gamma(\infty) = \gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_{j_0-2}\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)$$, donde $n_1 \in \{-1, 1\}$

Si $\gamma_1, \dots, \gamma_{j_0-2} \in \{R_{0,\infty}, R_{1,\infty}\} \rightarrow \gamma \in \{P_\ell, M_\ell\}$ algún $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

y en tal caso $\gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_{j_0-2}\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) = n_2 + \frac{1}{2}$, $n_2 \in \mathbb{Z}$, lo cual no puede ser.

Así $\exists j_1 \in \{1, \dots, j_0 - 2\}$ tal que $\gamma_{j_1} = R_{0,1}$

Podemos asumir tal j_1 como mayor índice

$\Rightarrow \gamma(\infty) = \gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_{j_1}\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)$, $n_2 \in \mathbb{Z}$

En caso de que $n_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma_{j_1}\left(n_2 + \frac{1}{2}\right) = \infty$, pero eso obligaría a que $\gamma_{j_1 - 1} \in \{R_{1,\infty}, R_{0,\infty}\}$ y que $\gamma_{j_2} = R_{0,1}$, para algún $j_2 \in \{1, \dots, j_1 - 2\}$ $\Rightarrow \gamma(\infty) = \gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_{j_2}(\infty) = \gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_{j_2 - 1}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Si $n_2 + \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma_{j_1}\left(n_2 + \frac{1}{2}\right) = n_3 + \frac{p}{q}$, donde $n_3 \in \mathbb{Z}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p<q)$ tales que $(p,q) = 1$ y $q \neq 0$, y $n_3 + \frac{p}{q} \neq \frac{1}{2}$. Como no podemos seguir este procedimiento indefinidamente, llegamos a la conclusión de que No existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(\infty) = n$.

$$\therefore \{\gamma(\infty) / \gamma \in \Gamma\} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$$

Para poder calcular $\{\gamma(\infty) / \gamma \in \Gamma\}$, notemos que $R_{0,1}(\infty) = \frac{1}{2}$, $R_{0,\infty}(\infty) = \infty$, $R_{1,\infty}(\infty) = \infty$. También:

$$M_0(1/2) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$M_{2k-1}\left(\frac{1}{2}\right) = -2k + \frac{1}{2} = \frac{-4k+1}{2}$$

$$M_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = 2k + 2 - \frac{1}{2} = \frac{4k+4-1}{2} = \frac{4k+3}{2}$$

$$P_0\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$P_{2k-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 2k + \frac{1}{2} = \frac{4k+1}{2}$$

$$P_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = -2k - \frac{1}{2} = \frac{-4k-1}{2}$$

También, para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $((p,q) = 1)$, $R_{0,1}\left(\frac{p}{q}\right) = \dfrac{p/q}{2p/q - 1} = \dfrac{p/q}{\frac{2p-q}{q}} = \dfrac{p}{2p-q}$

$$R_{0,1}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3/2}{2(3/2)-1}=\frac{3/2}{3-1}=\frac{3}{4}$$

$$R_{0,1}\left(-\frac{4k+1}{2}\right)=\frac{-\frac{4k+1}{2}}{2\left(-\frac{4k+1}{2}\right)-1}=\frac{-\frac{4k+1}{2}}{-4k+1-1}=\frac{4k+1}{8k}$$

$$R_{0,1}\left(\frac{4k+3}{2}\right)=\frac{\frac{4k+3}{2}}{2\left(\frac{4k+3}{2}\right)-1}=\frac{\frac{4k+3}{2}}{4k+3-1}=\frac{4k+3}{8k+4}$$

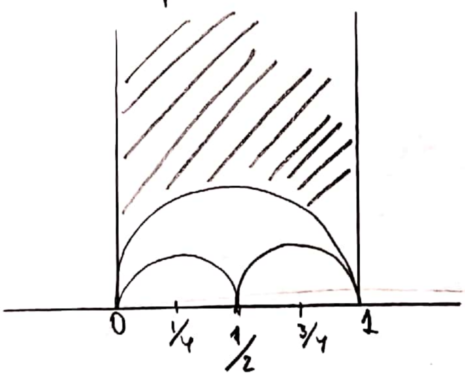
$$R_{0,1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-\frac{1}{2}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)-1}=\frac{-\frac{1}{2}}{-1-1}=\frac{1}{4}$$

$$R_{0,1}\left(\frac{4k+1}{2}\right)=\frac{\frac{4k+1}{2}}{2\left(\frac{4k+1}{2}\right)-1}=\frac{\frac{4k+1}{2}}{4k+1-1}=\frac{4k+1}{8k}$$

$$R_{0,1}\left(\frac{-4k-1}{2}\right)=\frac{\frac{-4k-1}{2}}{2\left(\frac{-4k-1}{2}\right)-1}=\frac{\frac{-4k-1}{2}}{(-4k-1)-1}=\frac{-4k-1}{-4k-2}=\frac{4k+1}{4k+2}$$

Nótese que todos los denominadores son pares.

Continuando con nuestro análisis, podemos ir calculando sucesivamente las imágenes de ∞.



Recordar por la figura que $\frac{1}{2}=R_{0,1}(\infty)$

$$R_{0,1}\circ R_{0,\infty}\circ R_{0,1}(\infty)=R_{0,1}\circ R_{0,\infty}(1/2)=R_{0,1}(-1/2)=\frac{-\frac{1}{2}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)-1}=\frac{-\frac{1}{2}}{-1-1}=\frac{1}{4},$$

donde $1/4$ es el centro de la circunferencia de la izquierda. También,

$$R_{0,1}\circ R_{0,\infty}\circ R_{0,1}(1)=R_{0,1}\circ R_{0,\infty}(1)=R_{0,1}(-1)=\frac{-1}{2(-1)-1}=\frac{-1}{-2-1}=\frac{1}{3}$$

Scanned with CamScanner

donde $\frac{2}{3} = R_{1/2,1}(0)$, siendo $R_{1/2,1} = R_{0,1} \circ R_{1,\infty} \circ R_{0,1}$.

En efecto:

$$R_{0,1}\circ R_{1,\infty}\circ R_{0,1}(z) = R_{0,1}\circ R_{1,\infty}\left(\frac{\bar z}{2\bar z-1}\right) = R_{0,1}\left(\overline{2-\left(\frac{\bar z}{2\bar z-1}\right)}\right)$$

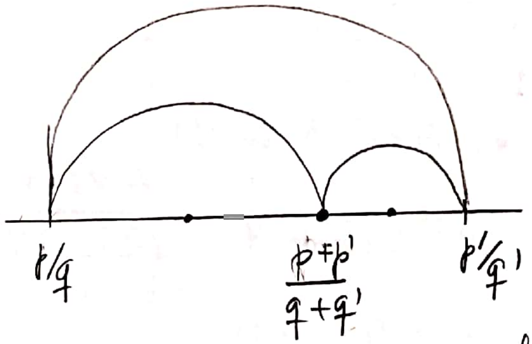
$$= R_{0,1}\left(2-\left(\frac{z}{2\bar z-1}\right)\right) = R_{0,1}\left(\frac{4z-2-z}{2z-1}\right) = R_{0,1}\left(\frac{3z-2}{2z-1}\right)$$

$$= \frac{\overline{\left(\frac{3z-2}{2z-1}\right)}}{2\overline{\left(\frac{3z-2}{2z-1}\right)}-1} = \frac{\frac{3\bar z-2}{2\bar z-1}}{2\left(\frac{3\bar z-2}{2\bar z-1}\right)-1} = \frac{\frac{3\bar z-2}{2\bar z-1}}{\frac{6\bar z-4-2\bar z+1}{2\bar z-1}} = \frac{3\bar z-2}{4\bar z-3}$$

y $R_{1/2,1}(z) = \dfrac{1/16}{\bar z-\frac{3}{4}} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{1/16}{\frac{4\bar z-3}{4}} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4(4\bar z-3)} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{1+12\bar z-9}{4(4\bar z-3)}$

$$= \frac{12\bar z-8}{4(4\bar z-3)} = \frac{3\bar z-2}{4\bar z-3}$$

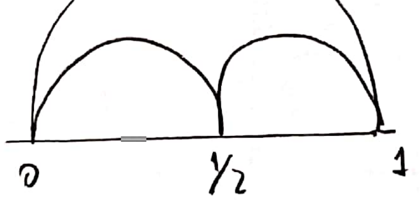
En el primer caso, $R_{0,1/2}(\infty) = 1/4$, $R_{1/2,1}(\infty) = \frac{3}{4}$. La forma de construir estas semi-circunferencias viene dada por la ayuda que el profesor entregó en clases, a saber:



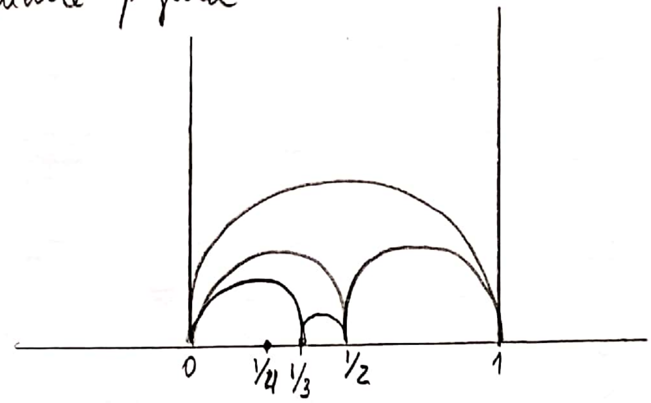
dem. Al principio demostramos el caso para la circunferencia $R_{0,1}$

$0 = \frac{0}{1}$, $1 = \frac{1}{1}$

$\frac{1}{2} = \frac{0+1}{1+1}$



Como estamos trabajando con transformaciones conformes, entonces deberíamos conseguir la siguiente figura



La circunferencia más pequeña es la imagen de la semirecta perpendicular que pasa por 1 bajo la transformación $R_{0,1}\circ R_{0,\infty}\circ R_{0,1} = R_{0,1/2}$

Pd: $R_{0,1}\circ R_{0,\infty}\circ R_{0,1} = R_{0,1/2}$

dem: $R_{0,1}\circ R_{0,\infty}\circ R_{0,1}(z) = R_{0,1}\circ R_{0,\infty}\left(\frac{\bar z}{2\bar z-1}\right) = R_{0,1}\left(\overline{-\left(\frac{\bar z}{2\bar z-1}\right)}\right)$

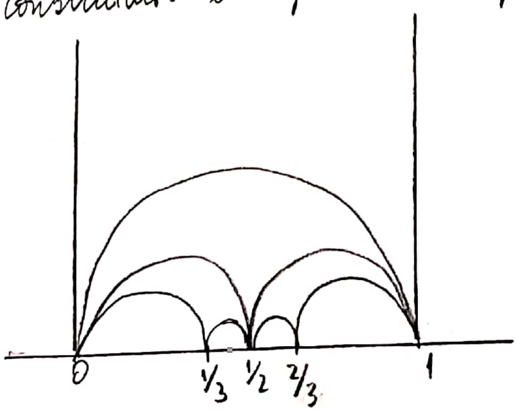
$$= R_{0,1}\left(-\left(\frac{z}{2z-1}\right)\right) = \frac{\overline{\left(-\frac{z}{2z-1}\right)}}{2\overline{\left(-\frac{z}{2z-1}\right)}-1} = \frac{-\frac{\bar z}{2\bar z-1}}{2\left(-\frac{\bar z}{2\bar z-1}\right)-1} = \frac{-\frac{\bar z}{2\bar z-1}}{\frac{-2\bar z-2\bar z+1}{2\bar z-1}} = \frac{-\bar z}{-4\bar z+1}$$

$$= \frac{\bar z}{4\bar z-1}$$

Por otro lado, ocupando la expresión encontrada en (1),

$$R_{0,1/2}(z) = \frac{1/16}{\bar z-1/4}+\frac{1}{4} = \frac{1/16}{\frac{4\bar z-1}{4}}+\frac{1}{4} = \frac{1}{4(4\bar z-1)}+\frac{1}{4} = \frac{1+4\bar z-1}{(4\bar z-1)4} = \frac{4\bar z}{(4\bar z-1)4} = \frac{\bar z}{4\bar z-1}$$

De manera análoga construimos el siguiente dibujo

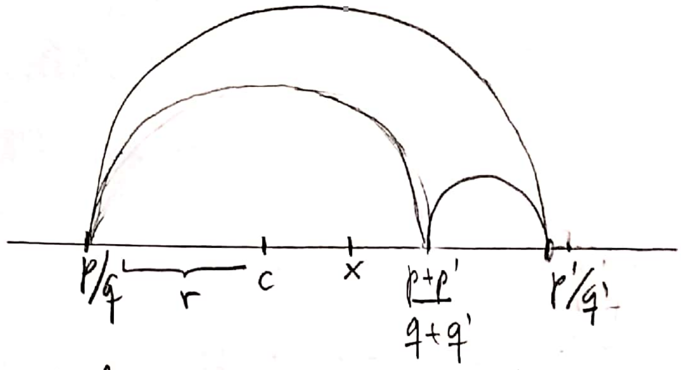


$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{6+2}{12}=\frac{8}{12}=\frac{4\cdot 2}{4\cdot 3}=\frac{2}{3}$

$\frac{3+1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

Asumida la hipótesis de inducción, demostramos para el paso siguiente:



c es el centro de la semicircunferencia interior mayor, r es su radio:

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} + \frac{p+p'}{q+q'}\right)$$

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{p+p'}{q+q'} - \frac{p}{q}\right)$$

Ocupando la expresión de $R_{a,b}$ encontrada en (1)

$$x = c + \frac{r^2}{\frac{p'}{q'} - c} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} + \frac{p+p'}{q+q'}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\left(\frac{p+p'}{q+q'} - \frac{p}{q}\right)^2}{\frac{p'}{q'} - \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} - \frac{p+p'}{q+q'}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} + \frac{p+p'}{q+q'} + \frac{\frac{1}{(q+q')^2q^2}}{\frac{p'}{q'} + \frac{1}{qq'} - \frac{p+p'}{q+q'}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} + \frac{p+p'}{q+q'} + \frac{\frac{1}{(q+q')^2q^2}}{\frac{1}{qq'} + \frac{1}{q'(q+q')}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} + \frac{p+p'}{q+q'} + \frac{q'}{q(q+q')}\cdot\frac{1}{2q+q'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q}\left(1 - \frac{q}{2q+q'}\right) + \frac{p+p'}{q+q'}\left(1 + \frac{q'}{2q+q'}\right)\right)$$

$$= \frac{p}{2q+q'} + \frac{p+p'}{2q+q'} = \frac{2p+p'}{2q+q'} \quad //$$

Obs. $\frac{q'}{q(q+q')}\cdot\frac{1}{2q+q'} = \frac{1}{q(q+q')}\cdot\frac{q'}{2q+q'}$, $\frac{1}{q(q+q')} = \frac{p+p'}{q+q'} - \frac{p}{q}$.

Así, módulo traslación horizontal, $\{\gamma(\infty) \,/\, \gamma \in \Gamma\}$ corresponde a todos los centros de estas semi-circunferencias.

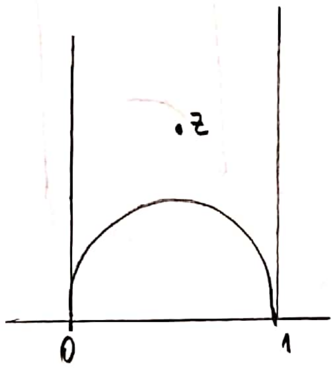
(3) Considere el conjunto $T := \{ z \in \mathbb{C} \,/\, I(z) > 0,\ 0 \le R(z) \le 1,\ |z - \frac{1}{2}| \ge \frac{1}{2} \}$.
Demuestre que $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(T) = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, I(z) > 0 \}$, y que para cada par de elementos distintos γ y $\tilde{\gamma}$ de Γ, los interiores de los conjuntos $\gamma(T)$, $\tilde{\gamma}(T)$ son disjuntos.

dem. La contención más fácil es $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(T) \subseteq \{ z \in \mathbb{C} \,/\, I(z) > 0 \}$ ya que $R_{0,\infty}(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{H}$, $R_{1,\infty}(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{H}$, donde $\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, I(z) > 0 \}$.
Para el caso $R_{0,1}(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{H}$ se cumple por la propiedad

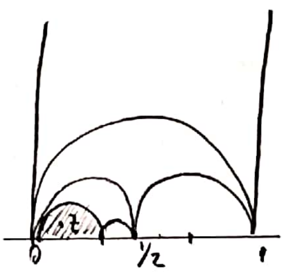
$$\left(R_{0,1}(z) - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

descrita en la observación de la parte (1).

Ahora supongamos $z \in \mathbb{H}$. Basta tomar z en la región fundamental $[0,1) \times (0,\infty) \subset \mathbb{C}$, ya que las demás se consiguen por traslación y reflexión (gracias a los M_n, P_n). Si $|z - \frac{1}{2}| \ge \frac{1}{2}$, o sea



Entonces tomamos $\gamma = id_{\mathbb{C}}$, $z \in id_{\mathbb{C}}(T)$. Si $|z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$, entonces z se encuentra en alguna de las semicircunferencia construidas anteriormente (o en $C_{0,1}$)



En ese caso, la región achurada corresponde a algún $\gamma(T)$, $\gamma \in \Gamma$.

Problema D: Sea U abierto simplemente conexo. de $\mathbb{C}$.

1.- Demuestre que todo par de puntos distintos de U se pueden unir por un camino poligonal contenido en U.

2.- Demuestre que si $f: U \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa y γ es un camino poligonal en U que es cerrado, pero no necesariamente simple, entonces

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

3.- Sea $f: U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y z_0 un punto de U. Para cada $z \in U$ sea γ_z un camino poligonal en U que comienza en z_0 y termina en z. Demuestre que la función $F: U \to \mathbb{C}$ definida por

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)dw$$

es holomorfa y que $F'(z) = f(z)$.

Solución:

1.- Si U es un disco entonces para cualquier par de puntos z_1, z_2 existe una recta $r: [a,b] \to U$ tal que

$$r(t) = \frac{(b-t)z_1 + (t-a)z_2}{b-a}$$

que los une.

Ahora, como U es simplemente conexo y $U \subset \mathbb{C}$, se tiene que U es arcoconexo.

Luego, dados z_1 y z_2 en U existe γ curva continua que comienza en z_1 y termina en z_2.

Así $Im(\gamma) \subset U$; $\gamma: [a,b] \longrightarrow U$

y como $Im(\gamma)$ es compacta

$\Rightarrow \exists\, r > 0$ tal que $0 < r < d(Im(\gamma), \partial U)$

Por otro lado, como γ es continua $\exists\, \delta > 0$ tal que si

$|t-s| < \delta \Rightarrow |\gamma(t) - \gamma(s)| < r$ con $t, s \in [a,b]$

Considerando P una partición de $[a,b]$

$$P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$$

y $\|P\| < \delta$

Así, $|t_{i+1} - t_i| < \delta \quad \forall \; 0 \leq i \leq n$

$\Rightarrow |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| < r$

$\Rightarrow \gamma(t_{i+1}) \subset B(\gamma(t_i), r)$

Luego para cualquier par de puntos $\gamma(z_1), \gamma(z_2) \in B(\gamma(t_i), r)$ existe una recta $\gamma_i : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow B(\gamma(t_i), r)$

$$t \longmapsto \frac{(t_{i+1} - t)\gamma(z_1) - (t - t_i)\gamma(z_2)}{t_{i+1} - t_i}$$

Otra forma de verlo:

__Lema:__ Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y convexo, $\phi \neq A \subset \Omega$

si A verifica: $a \in A$, $D(a,r) \subset \Omega \Rightarrow D(a,r) \subset A$

Entonces $A = \Omega$

__Demostración:__ Basta probar que A es cerrado respecto a Ω

Sea $z \in \Omega \cap \bar{A}$ tal que

$$D(z,r) \subset \Omega \quad \text{y} \quad D(z, \tfrac{r}{2}) \cap A \neq \phi$$

Luego existe $a \in A$ tal que $|z - a| < \frac{r}{2}$

Así, si $w \in D(a, r/2)$

$$|w - z| \leq |w - a| + |z - a| < r$$

Luego $w \in \Omega$ de donde $D(a, r/2) \subset \Omega$ y $D(a, r/2) \subset A$

$\Rightarrow z \in A$ y con esto A es abierto y cerrado, luego

$A \neq \phi \Rightarrow A = \Omega$.

Ahora sea U abierto conexo, $U \subset \mathbb{C}$

sea $\alpha \in U$, se define

$$A = \{ z \in U : z \text{ se une a } \alpha \text{ por una poligonal} \}$$

$A \neq \emptyset$

sea $a \in A$ y $r > 0$ tal que $D(a, r) \subset U$

si $z \in D(a, r) \Rightarrow z \in A$

Luego, por lema anterior $A = U$

Así, todo par de puntos distintos en U se pueden unir por una poligonal

2.- sea $z_0 \in U$, η_1 la poligonal contenida en U que une z_0 con otro punto z arbitrario de U. y sea η_2 otra curva poligonal que une al mismo z_0 con el mismo punto arbitrario de z en U.

Entonces

$$\int_{\eta_1} f(z)\,dz = \int_{\eta_2} f(z)\,dz.$$

Ahora sea $\eta_1 - \eta_2$ una curva poligonal cerrada no necesariamente simple que recorre de z_0 a z y luego de z a z_0

Notemos $\eta_1 - \eta_2$ está formada por cierto número de segmentos recorridos en sentido opuesto y por cierto número de polígonos cerrados simples orientados positivamente.

Luego

$$\int_{seg} f(z)\,dz = 0 \quad \text{y} \quad \int_{\Delta} f(z)\,dz = 0$$

Pues dado S_1 y S_2 segmentos tal que $S_2 = -S_1$,

$$\int_{S_2} f(z)\,dz + \int_{S_1} f(z)\,dz = 0$$

y la integral sobre un polígono cerrado, por teorema de Cauchy Goursat se tiene que es igual a cero.

Luego

$$\int_{\gamma_1 - \gamma_2} f(z)dz = 0$$

3.- Por lo anterior, tenemos que F es independiente de la elección de la curva poligonal que una z_0 con z.

Luego para h, con $|h|$ suficientemente pequeño.

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(w)dw$$

si $h \neq 0$

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(w) - f(z))dw$$

Como f es holomorfa, si $|w - z| < \delta$ se tiene que $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$

Luego si $|h| < \delta$ se tiene que.

$$\left| \int_z^{z+h} (f(w) - f(z))dw \right| < \varepsilon |h|$$

Así

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| < \varepsilon$$

y tomando $h \to 0$, se tiene que

$$F'(z) = f(z).$$

Problema F: Dado un polinomio complejo f, el método de Halley para encontrar las raíces de f se basa en la iteración de la función racional

$$H_f(z) = z - \frac{2f(z)f'(z)}{2f'(z)^2 - f(z)f''(z)}$$

1.- Demuestre que todo cero de f es un punto fijo de H_f. Además, demuestre que si z_0 es un cero de f, entonces $\operatorname{ord}(H_f(z) - z, z_0) = 3$. si z_0 es simple y calcule $H_f'(z_0)$ si z_0 es un cero de orden por lo menos 2 de f.

2.- Existe algún polinomio f tal que H_f tenga un punto fijo z_0 que no es un cero de f y tal que $H_f'(z_0) = 0$?

Solución:

1.- Sea z_0 un cero de f, es decir: $f(z) = (z-z_0)^k f_1(z)$ $\to \left\{\begin{array}{l}\text{con } f_1 \text{ holomorfa} \\ \text{y } f_1(z_0) \neq 0.\end{array}\right.$

Derivando para construir la expresión de H_f:

$$f'(z) = (z-z_0)^{k-1}\left[k f_1(z) + (z-z_0) f_1'(z)\right]$$

$$f''(z) = (k-1)(z-z_0)^{k-2}\left[k f_1(z) + (z-z_0) f_1'(z)\right] + (z-z_0)^{k-1}\left[(k+1) f_1'(z) + (z-z_0) f_1''(z)\right]$$

$$2f'(z)^2 = 2(z-z_0)^{2k-2}\left[k^2 f_1^2(z) + 2k(z-z_0) f_1(z) f_1'(z) + (z-z_0)^2 f_1'^2(z)\right]$$

$$f(z)f''(z) = k(k-1)(z-z_0)^{2k-2} f_1^2(z) + (k-1)(z-z_0)^{2k-1} f_1(z) f_1'(z) + (k+1)(z-z_0)^{2k-1} f_1(z) f_1'(z) + (z-z_0)^{2k} f_1(z) f_1''(z).$$

$$2f'(z)^2 - f(z)f''(z) = (z-z_0)^{2k-2}\left[k^2 f_1^2(z) + k f_1^2(z) + 2k(z-z_0) f_1(z) f_1'(z) + (z-z_0)^2 (2 f_1'^2(z) - f_1(z) f''(z))\right]$$

$$2f(z)f'(z) = (z-c)^{2k-1}\left(2k f_1^2(z) + 2(z-z_0) f_1(z) f_1'(z)\right)$$

Entonces

$$H_f(z) = z - \frac{2f(z)f'(z)}{2f'(z)^2 - f(z)f''(z)}$$

$$H_f(z) = z - \frac{(z-z_0)^{2k-1}\left[2k f_1^2(z) + 2(z-z_0) f_1(z) f_1'(z)\right]}{(z-z_0)^{2k-2}\left[k^2 f_1^2(z) + k f_1^2(z) + 2k(z-z_0) f_1(z) f_1'(z) + (z-z_0)^2 (2 f_1'^2(z) - f_1(z) f_1''(z))\right]}$$

En resumen.

$$H_f(z) = z - (z-z_0)\frac{g_1(z)}{g_2(z)} \quad \text{donde } \begin{array}{l} g_1(z_0) \neq 0 \\ g_2(z_0) \neq 0. \end{array}$$

Así

$$H_f(z_0) = z_0$$

y con esto z_0 es un punto fijo de H_f.

Ahora, veremos que $\text{ord}(H_f(z), z_0) = 3$, z_0 cero simple.

Simplificando la notación se tiene:

$$H' = \frac{d}{dz}\left(z - \frac{2ff'}{2f'^2 - ff''}\right),$$

$$H' = 1 - \frac{d}{dz}\left(\frac{2ff'}{2f'^2 - ff''}\right).$$

Si tomamos $u = 2ff'$ y $v = 2f'^2 - ff''$:

$$H' = 1 - \frac{d}{dz}\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$H' = 1 - \left(\frac{u'v - v'u}{v^2}\right)$$

$u' = (2ff')' = 2f'^2 + 2ff''$

$v' = (2f'^2 - ff'')' = 3f'f'' - ff'''$

Evaluando en z_0: $u'(z_0) = 2f'^2(z_0)$, $v'(z_0) = 3f'(z_0)f''(z_0)$

$u(z_0) = 0$, $v(z_0) = 2f'^2(z_0)$

Entonces

$$H_f'(z_0) = 1 - \frac{2f'^2(z_0)\cdot 2f'^2(z_0) - 3f'(z_0)f''(z_0)\cdot 0}{4f'^4(z_0)}$$

$$H_f'(z_0) = 1 - \frac{4f'^4(z_0)}{4f'^4(z_0)} = 0$$

Ahora calculamos la segunda derivada:

$$H'' = \left(1 - \frac{\mu' v - v'\mu}{v^2}\right)'$$

$$H'' = \left(\frac{v'\mu - \mu' v}{v^2}\right)'$$

Sea $z = v'\mu - \mu' v$

$w = v^2$

$$H'' = \left(\frac{z}{w}\right)' = \frac{z'w - w'z}{w^2}$$

$z' = \mu v'' - \mu'' v$

$w' = 2 v v'$

Luego: $z'w - w'z = (\mu v'' - \mu'' v)v^2 - 2vv'(v'\mu - \mu' v)$

evaluando en z_0, tomando en cuenta que $\mu(z_0) = 0$

$$z'w - w'z = -\mu'' v^3 + 2v^2 v'\mu'$$

pero $\mu''(z_0) = 6f'f''$, $v(z_0) = 2f'^2$, $v'(z_0) = 3ff'' - ff'''$ y $\mu'(z_0) = 2f'^2(z_0)$

$$z'w - w'z = -6f'f''.8f'^6 + 2.4f'^4.3f'f''.2f'^2$$

$$z'w - w'z = -48f'^7 f'' + 48f'^7 f'' = 0$$

Así $H''_f(z) = 0$

Ahora veamos que $H'''_f(z) \neq 0$.

$$H''' = \left(\frac{v'\mu - \mu' v}{v^2}\right)'',$$

$$= \left(\frac{v''\mu}{v^2} - \frac{\mu''}{v} - \frac{2v'^2\mu}{v^3} + \frac{2\mu' v'}{v^2}\right)',$$

$$H''' = \left(\frac{v''\mu + 2\mu' v'}{v^2}\right)' - \left(\frac{\mu'' v^2 + 2v'^2\mu}{v^3}\right)'$$

Desarrollando lo anterior

i) $\left(\frac{v''\mu - 2\mu'v}{v^2}\right)' = \frac{(v''\mu - 2\mu'v)'v^2 - 2vv'(v''\mu - 2\mu'v)}{v^4},$

$$= \frac{v'''\mu v^2 + v''\mu'v^2 + 2\mu''v^3 + 2\mu'v'v^2 - 2vv'v''\mu - 4v^2v'\mu'}{v^4}$$

evaluando en z_0:

$\mu(z_0) = 0$ | $\mu'(z_0) = 2f'^2$ | $v''(z_0) = 3f''^2 + 2f'f'''$ | $\mu'''(z_0) = 6f''^2 + 4f'f'''$

$v(z_0) = 2f'^2$ | $v'(z_0) = 3f'f''$ | $\mu''(z_0) = 6f'f''$

$$\left(\frac{v''\mu - 2\mu'v}{v^2}\right)' = (3f''^2 + 2ff''')\cdot 8f'^6 + 96f'^7f'' - 48f'^7f'',$$

$$= \frac{24f'^6f''^2 + 16f'^7f''' + 48f'^7f''}{16f'^8}.$$

ii) $\left(\frac{\mu'v^2 + 2v'^2\mu}{v^3}\right)' = \frac{(\mu'v^2 + 2v'^2\mu)'v^3 - 3v^2v'(\mu'v^2 + 2v'^2\mu)}{v^6}$

$$= \frac{\mu'''v^5 + 2\mu''v'v^4 + 4v'v''\mu v^3 + 2v'^2\mu'v^3 - 3v^4v'\mu'' - 6vv^2v'^3\mu}{v^6}$$

evaluando en z_0:

$$\left(\frac{\mu'v^2 + 2v'^2\mu}{v^3}\right)' = \frac{192f'^{10}f''^2 + 128f'^{11}f''' + 576f'^{10}f''^2 + 288f'^{10}f''^2 - 864f'^{10}f''^2}{64f'^{12}}$$

$$= \frac{128f'^{11}f''' + 192f'^{10}f''^2}{64f'^{12}}.$$

Entonces H''' en z_0 es de la forma:

$$H''' = \left(\frac{v''\mu - 2\mu'v}{v^2}\right)' - \left(\frac{\mu''v^2 + 2v'^2\mu}{v^3}\right)'$$

$$H''' = \frac{1}{16f'^8}\left[48f'^7f'' - 24f'^6f''^2 - 16f'^7f'''\right] \neq 0$$

Así $H_f(z)$ tiene orden 3

Ahora, calculamos $H_f'(z_0)$:

$$H_f'(z) = 1 - \left(\frac{2ff'}{2f'^2 - ff''}\right)' = 1 - \left[\frac{(2ff')'(2f'^2 - ff'') - (2f'^2 - ff'')'2ff'}{(2f'^2 - ff'')^2}\right]$$

$$= \frac{1}{(2f'^2 - ff'')^2}\left[(2f'^2 - ff'')^2 - (2ff')'(2f'^2 - ff'') + (2f'^2 - ff'')'2ff'\right]$$

$$H_f'(z) = \frac{3f^2f''^2 - 2f^2f'f'''}{(2f'^2 - ff'')^2}$$

pero f tiene un cero en z_0 de orden a lo menos 2, entonces

$f(z) = (z - z_0)^k f_1(z)$ con f_1 holomorfa y $f_1(z_0) \neq 0$

$f^2(z) = (z - z_0)^{2k} f_1^2(z)$

$$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} f_1(z) + (z - z_0)^k f_1'(z) = (z - z_0)^{k-1}\left[k f_1(z) + (z - z_0) f_1'(z)\right]$$

$$f''(z) = k(k-1)(z - z_0)^{k-2} f_1(z) + k(z - z_0)^{k-1} f_1'(z) + k(z - z_0)^{k-1} f_1'(z) + (z - z_0)^k f_1''(z)$$

$$f''(z) = k(k-1)(z - z_0)^{k-2} f_1(z) + 2k(z - z_0)^{k-1} f_1'(z) + (z - z_0)^k f_1''(z)$$

$$f'''(z) = k(k-1)(k-2)(z - z_0)^{k-3} f_1(z) + k(k-1)(z - z_0)^{k-2} f_1'(z) + 2k(k-1)(z - z_0)^{k-2} f_1'(z)$$
$$+ 2k(z - z_0)^{k-1} f_1''(z) + k(z - z_0)^{k-1} f_1''(z) + (z - z_0)^k f_1'''(z).$$

Entonces

$$H_f'(z) = \frac{f^2\left[3f''^2 - 2f'f'''\right]}{(2f'^2 - ff'')^2}$$

Evaluando en z_0 y considerando las expresiones para las derivadas, se obtiene que $H_f'(z_0) = \frac{1}{(2k - k(k-1))^2}\left[3k^2(k-1)^2 f_1^2 - 2k^2(k-1)(k-2) f_1^2\right]$

2.- Supongamos que sí existe tal polinomio f

$$H_f(z) = z - \frac{2f(z)f'(z)}{2f'(z)^2 - f(z)f''(z)}$$

y si

$$H_f(z_0) = z_0 - \frac{2f(z_0)f'(z_0)}{2f'(z_0)^2 - f(z_0)f''(z_0)} = z_0$$

, donde z_0 es punto fijo de H_f pero $f(z_0) \neq 0$

$$\Rightarrow \quad 2f(z_0)f'(z_0) = 0$$

pero busco que $f(z_0) \neq 0$, por ende. $f'(z_0) = 0$

Así $\quad f(z) = (z-z_0)^k f_1(z) + f_2(z) \quad$ con $f_2(z_0) \neq 0$ y $f_1(z_0) \neq 0$

Luego $\quad f'(z) = k(z-z_0)^{k-1} f_1(z) + (z-z_0)^k f_1'(z) + f_2'(z)$

evaluando en z_0

$$f'(z_0) = f_2'(z_0) = 0$$

$\Rightarrow f_2(z_0) = c \quad$ cte distinta de cero pues

$$f(z) = (z-z_0)^k f_1(z) + f_2(z)$$

$$f(z_0) = f_2(z_0) \neq 0.$$

Luego, necesito que $H_f'(z_0) = 0$, así $f_1(z_0) = 0$ $\times$

Por lo que no existe tal polinomio.

Problema 6

Para cada $n \geq 0$ entero, definimos el polinomio complejo P_n definido inductivamente por $P_0(c) := c$, y para $n \geq 1$, $P_n(c) := P_{n-1}(c)^2 + c$.
Sea N el conjunto de todos los puntos en $\mathbb{C}$ que tienen una vecindad V tal que la familia $(P_n|_V)_{n=0}^{\infty}$ es normal

1) Demostrar que 0 y -1 están en N, y que -2 y $1/4$ no están en N.

dem. Para el caso 0 tenemos lo siguiente.
Queremos aplicar el teorema de Montel a una vecindad de 0, es decir, (P_n) es uniformemente acotada en la bola abierta $B(0,r)$

$|P_0(c)| = |c| < r$
$|P_1(c)| = |c^2+c| \leq |c|^2 + |c| < r^2 + r$
$|P_2(c)| = |P_1(c)^2 + c| \leq |P_1(c)|^2 + |c| < (r^2+r) + r$

Definimos la sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ como sigue:

$$a_0 = r$$
$$a_n = a_{n-1}^2 + a_0$$

Se tiene que $|P_n(c)| \leq a_n \quad \forall c \in B(0,r)$. Supongamos $r < 1/2$
Se puede demostrar por inducción que $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ está acotado superiormente.
Supongamos que $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ es convergente y $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \alpha^2 + r$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha^2 - \alpha + r = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1-4r}}{2}$$

Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha \geq \frac{1}{4}$ y $1 - 4r \geq 0 \Leftrightarrow r \leq \frac{1}{4}$.

Scanned with CamScanner

Así, basta tomar la bola $B(0, \frac{1}{4})$ y $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: $|P_n(c)| \leq \frac{1}{4}$ $\forall c \in B(0, 1/4)$. Luego por teo. de Montel, $(P_n|_{B(0,1/4)})_{n \in \mathbb{N}}$ es normal.

Problema H: Sea $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa e inyectiva tal que $f(0) = 0$. Demuestre que para cada entero $k \geq 1$ existe una función holomorfa e inyectiva $f_k: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tal que $f_k(z)^k = f(z^k)$.

Solución: Sea f holomorfa e inyectiva, de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad , \text{ con } z \in \mathbb{D}.$$

Tomamos $a_1 = 1$

Consideremos $f(z) = z\phi(z)$ con $\phi(z)$ analítica y $\phi(0) = 1$ en $\mathbb{D}$.

Así
$$\phi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & , z \in \mathbb{D} \setminus \{0\} \\ 1 & , z = 0 \end{cases} ; \quad \phi(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1} \quad , z \in \mathbb{D}.$$

Observación: ϕ no se anula en $\mathbb{D}$, luego existe una rama h de $\sqrt[k]{\phi}$ en $\mathbb{D}$ donde $h(0) = \sqrt[k]{\phi(0)} = \sqrt[k]{1} = 1$ y h analítica en $\mathbb{D}$.

Como $h(0) = 1$ y $h(z)^k = \phi(z)$ $\forall z \in \mathbb{D}$, se tiene que:

$$f(z^k) = z^k \phi(z^k),$$

$$f(z^k) = z^k h(z^k)^k,$$

$$f(z^k) = (z h(z^k))^k. \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Luego sea $f_k(z) = z h(z^k)$ $z \in \mathbb{D}$; f_k es una rama de $\sqrt[k]{f(z^k)}$ y $f_k(0) = 0$, $f_k(z) \neq 0$ para $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, $f_k'(0) = 1 = h(0)$

¿inyectividad?

Problema I: Demuestre que para todo $z \in \mathbb{D}$ el número complejo $\frac{1+iz}{1-iz}$ está en el dominio de la rama principal ln del logaritmo y que

$$\tan\left(\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)\right) = z$$

Solución: Sabemos que el dominio de la rama principal del logaritmo es $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Sea $z = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{D}$, $|z|<1$, ie, $\sqrt{a^2+b^2} < 1$

$\Rightarrow a^2+b^2 < 1$

Entonces

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1+i(a+bi)}{1-i(a+bi)} = \frac{1+ai-b}{1-ai+b}$$

$$\Rightarrow \frac{(1-b)+ai}{(1+b)-ai} \cdot \frac{(1+b)+ai}{(1+b)+ai} = \frac{[(1+ai)-b][(1+ai)+b]}{(1+b)^2+a^2},$$

$$= \frac{(1+ai)^2-b^2}{(1+b)^2+a^2},$$

$$= \frac{1-(a^2+b^2)}{(1+b)^2+a^2} + i\,\frac{2a}{(1+b)^2+a^2}.$$

Notemos que $\operatorname{Re}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) = \frac{1-(a^2+b^2)}{(1+b)^2+a^2}$; esta es siempre mayor que cero pues $a^2+b^2<1$. Por lo tanto $\frac{1+iz}{1-iz} \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$.

otra forma de verlo es que si

$\frac{1+iz}{1-iz} \in (-\infty, 0] \Rightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) = \frac{2a}{(1+b)^2+a^2} = 0$

$\Rightarrow a=0$, luego $\operatorname{Re}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) = \frac{1-b^2}{(1+b)^2} \leq 0$

$\Rightarrow 1-b^2 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq b^2$, pero $b = \operatorname{Im}(z)$, luego

$|z| = |0+ib| = |b| < 1$ $\rightarrow\leftarrow$.

Por otro lado, tenemos que

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad ; \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\tan(z) = \frac{1}{i}\left[\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}\right] = \frac{1}{i}\left[\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}\right]$$

Luego:

$$\tan\left(\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)\right) = \frac{1}{i}\left[\frac{e^{2i\cdot\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)} - 1}{e^{2i\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)} + 1}\right],$$

$$= \frac{1}{i}\left[\frac{\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) - 1}{\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) + 1}\right],$$

$$\tan\left(\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)\right) = \frac{1}{i}\left[\frac{2iz}{2}\right] = z.$$

5

VARIABLE COMPLEJA

Tarea Delith

Javiera Pizarro M.
Marco Godoy V.

Problema A:

1.- Dados $a>0$, $b>0$, defina

$$E = \{ z \in \mathbb{C} : a\,\mathbb{R}(z)^2 + b\,\mathbb{I}(z)^2 < 1 \}.$$

Encuentre explícitamente un biholomorfismo $\varphi : \mathbb{D} \to E$

2.- Sea

$$Q := \{ z \in \mathbb{D} : \mathbb{R}(z) > 0 \ \text{ y } \ \mathbb{I}(z) > 0 \},$$

y encuentre explícitamente un biholomorfismo $\psi : \mathbb{D} \to Q$.

Solución:

2.- Buscamos $\psi : \mathbb{D} \to Q$ biholomorfismo, para esto consideremos los siguientes biholomorfismos.

$$f : Q \longrightarrow \mathbb{H}_D, \quad z \longmapsto z^2$$, con $\mathbb{H}_D$ la mitad superior del disco unitario

$$g : C_1 \longrightarrow \mathbb{H}_D, \quad z \longmapsto \frac{z-1}{z+1}$$, con C_1 el primer cuadrante del plano $(\{z : 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}\})$

$$h : C_1 \longrightarrow \mathbb{D}, \quad z \longmapsto \frac{iz^2+1}{iz^2-1}$$, donde $\mathbb{D}$ es el disco unitario.

Entonces, tenemos:

$$\mathbb{D} \xrightarrow{h^{-1}} C_1 \xrightarrow{g} \mathbb{H}_D \xrightarrow{f^{-1}} Q$$

si consideramos la composición:

$$\psi = h^{-1} \circ g \circ f^{-1}$$

tenemos un biholomorfismo $\psi : \mathbb{D} \to Q$.

con $f^{-1}: \mathbb{H}_D \longrightarrow Q$

$$z \longmapsto \sqrt{z}$$

$$h^{-1}: \mathbb{D} \longrightarrow G$$

$$z \longmapsto \sqrt{\frac{i\,(1+z)}{(1-z)}}.$$

Ambas holomorfas.

Scanned with CamScanner

Problema B

B1/ Sean S, S' superficies de Riemann y $f: S \to S'$ una función holomorfa que no es constante.

Demuestre que para cada punto $p \in S$ existe una vecindad V de $f(p)$ en S', tal que para p' en $V \setminus \{f(p)\}$ el número

$$\deg_f(p) := \# f^{-1}(p')$$

es independiente de p'.

dem. Como S, S' son superficies de Riemann y $f: S \to S'$ es holomorfa, dado $p \in S$, existen abiertos $U \subset S$, $U' \subset S'$, $V, V' \subset \mathbb{C}$ y homeomorfismos $\varphi: U \to V$, $\psi: U' \to V'$ tales que $p \in U$, $f(p) \in U'$ y hacen conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} p \in U & \xrightarrow{f|_{U,U'}} & U' \ni f(p) \\ \varphi^{-1} \uparrow & \circlearrowright & \downarrow \psi \\ \varphi(p) \in V & \xrightarrow{F} & V' \end{array}$$

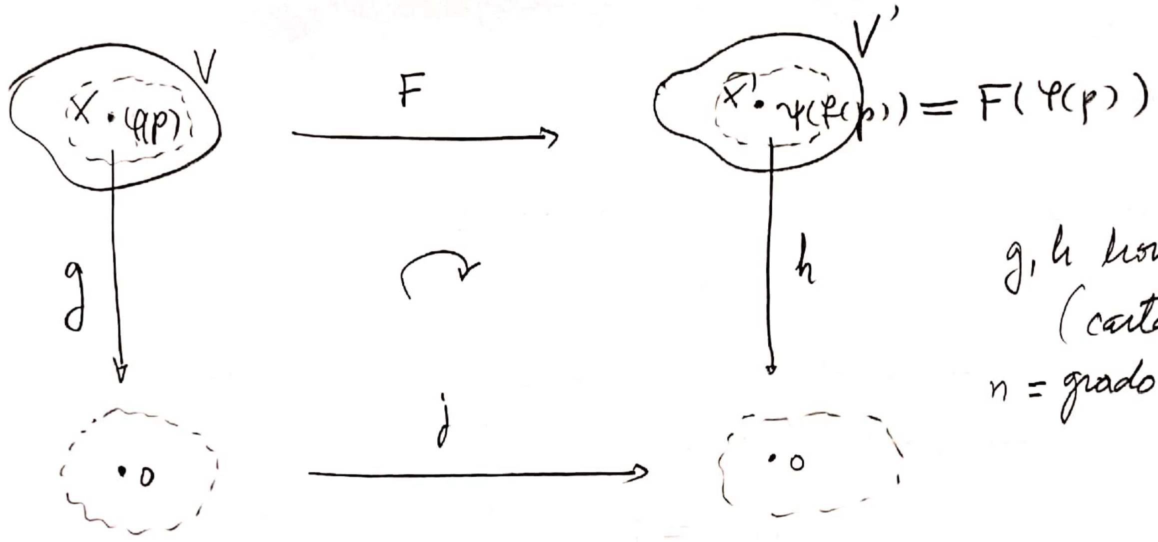
; $f|_{U,U'}$ restricción de f a U y U'.

$F := \psi \circ f|_{U,U'} \circ \varphi^{-1}$, F holomorfa en V.

Como F es holomorfa y $\varphi(p) \in V$, $\underset{\psi(f(p))}{\underset{\shortparallel}{F(\varphi(p))}} \in V'$, existen cartas holomorfas $g: X \to W$, $h: X' \to W'$, donde $\varphi(p) \in X \subset \mathbb{C}$, $F(\varphi(p)) \in X'$; $0 \in W \cap W' \subset \mathbb{C}$ ($W, W' \subset \mathbb{C}$) tales que

$j := h \circ F \circ g^{-1}$ y $j(z) = z^n$ $\forall z \in X$, $n = \mathrm{ord}(F - F(\varphi(p)), \varphi(p))$;

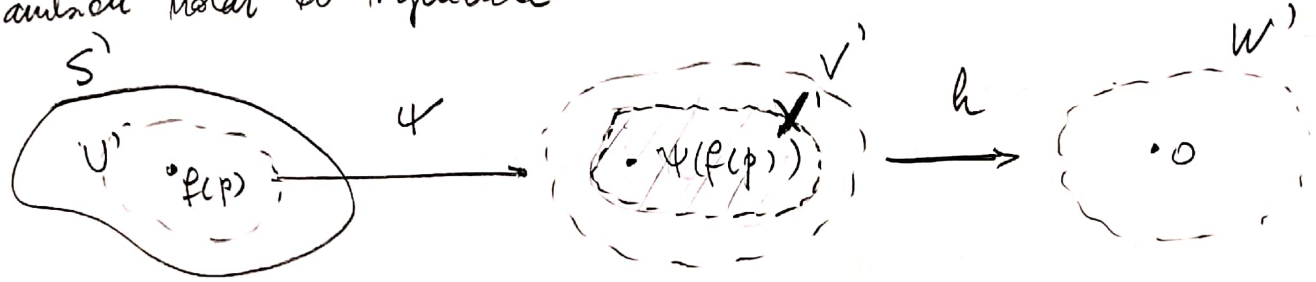
$g(\varphi(p)) = h(\psi(f(p))) = 0$. Para mayor detalle ver la siguiente figura:



g, h homeomorfismos (cartas locales)
n = grado local.

$$g(\varphi(p)) = h(\psi(f(p))) = 0$$

También notar lo siguiente



Dado $p' \in U'$, $p' \neq f(p)$ existe la posibilidad de que $\psi(p') \in V' \setminus X$. En ese caso no es posible calcular $h(\psi(p'))$. Para que esto no ocurra, podemos considerar el abierto $j(W) \subset W'$ ($j(W)$ es abierto ya que W es abierto en $\mathbb{C}$ y j es holomorfa) y levantarlo vía preimágenes hasta S'. O sea:

$O' := j(W) \Rightarrow \psi^{-1}(h^{-1}(O')) \subset U'$ abierto tal que $f(p) \in \psi^{-1}(h^{-1}(O'))$

Afirmación. $U'' := \psi^{-1}(h^{-1}(O'))$ es abierto en S' tal que para todo $p' \in U'' \setminus \{f(p)\}$, $f^{-1}(p)$ tiene n elementos.

dem. Sea $p' \in U'' \setminus \{f(p)\}$; Como ya demostramos, $h(\Psi(p')) \in O'$, además $h(\Psi(p')) \neq 0$, luego $j^{-1}(h(\Psi(p'))) = \{p_1, \dots, p_n\} \subset W$ (distintos dos a dos). Como g, φ son homeomorfismos, calculando preimágenes se conserva la cardinalidad, es decir:

$$\varphi^{-1}(g^{-1}(j^{-1}(h(\Psi(p'))))) = f^{-1}(p')$$ (Los diagramas son conmutativos)

y $$\# \varphi^{-1}(g^{-1}(j^{-1}(h(\Psi(p'))))) = n$$

$\therefore \forall p' \in U'' \setminus \{f(p)\}, \# f^{-1}(p') = n.$

B2) Demuestre que si f es propia, entonces para cada p' en S', la suma

$$\deg(f) := \sum_{p\in f^{-1}(p')} \deg_f(p).$$

es finita e independiente de p'.

dem Pimero demostraremos que la suma es finita.

Afirmación. $\forall p'\in S$, $f^{-1}(p')=\emptyset$ o $f^{-1}(p')$ es un conjunto finito.

Dem Sea $p'\in S$. Si $f^{-1}(p')=\emptyset$ entonces no hay nada qué decir.

Supongamos $f^{-1}(p')\neq\emptyset$. Sea $p\in f^{-1}(p') \Rightarrow \exists p\in S$ tq $f(p)=p'$

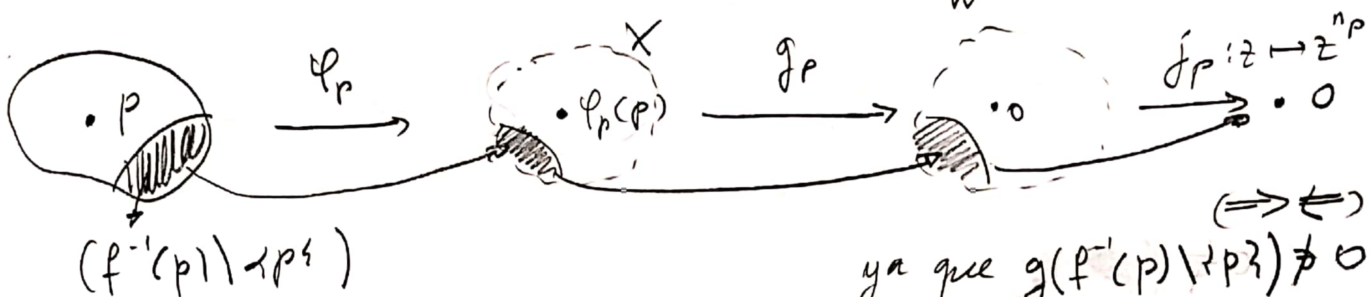
- $f: S\to S'$ propia $\Rightarrow f^{-1}(p')$ compacto en S.
- Para tal p construimos cartas y su grado local n_p:

$$\begin{tikzcd}
S \supset U \ni p \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & p' \in U' \subset S' \arrow[d, "\psi_p"] \\
V \ni \varphi_p(p) \arrow[r, "F_p"] \arrow[d, "g_p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \psi_p(p') \in V' \arrow[d, "h_p"] \\
W \ni 0 \arrow[r, "j_p : z \mapsto z^{n_p}"] & 0 \in W'
\end{tikzcd}$$

$\varphi_p : U \to V$, $\psi_p : U' \to V'$, $g_p : X \to W$, $h_p : X' \to W'$ cartas locales.

<u>Afirmación</u>: p es un punto aislado de $f^{-1}(p')$

<u>dem</u>: Supongamos que para todo abierto $\tilde{U} \subset S$ se tiene que $(f^{-1}(p') \setminus \{p\}) \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ (Como f es no constante, $\# f(S) \geq 2$). Veamos que ocurre lo siguiente



y $h(\psi_p(p')) = 0$.

Generalizando este proceso, demostramos que todos los puntos $f^{-1}(p')$ son aislados (En caso de haber un punto de acumulación $q \in f^{-1}(p')$, construimos las cartas locales y el grado local n_q y repetimos el argumento anterior)

$\therefore \forall p \in f^{-1}(p')$, $\exists\, O_p$ abierto en S : $p \in O_p \wedge q \notin O_p$ cuando $q \in f^{-1}(p') \setminus \{p\}$.

$\therefore \{O_p\}_{p \in f^{-1}(p')}$ es un cubrimiento abierto de $f^{-1}(p')$. Al ser $f^{-1}(p')$ compacto, se tiene $f^{-1}(p') \subset \bigcup_{i=1}^{r} O_{p_i}$

$\therefore f^{-1}(p')$ es un conjunto finito.

Se concluye que $\deg(f) = \sum_{p\in f^{-1}(p')}' \deg_f(p)$ es finito

(ya que $\deg_f(p) < \infty \ \forall p \in f^{-1}(p')$).

Pd: $\deg(f)$ es independiente de la elección de p'.

dem. Primero demostraremos que $L: S' \longrightarrow \mathbb{N}$, $L(p') := \sum_{p\in f^{-1}(p')}' \deg_f(p)$ es una función continua.

En efecto, sea $O \subset \mathbb{N}$ un abierto. Si $L^{-1}(O) = \phi$, entonces $L^{-1}(O)$ es abierto de S'. En caso de que $L^{-1}(O) \neq \phi$, existe $p' \in S'$ tal que $L(p') = n$, para algún $n \in O$.

Como $f^{-1}(p') = \{p_1, \dots, p_r\}$, existen vecindades $V_1, \dots, V_r$ de p' tal que $\forall q' \in V_j \setminus \{p'\}$, $f^{-1}(q) = n_j$, donde n_j son los grados locales de p_j $\forall j = 1, \dots r$. Si tomamos $V = \bigcap V_j$

$\Rightarrow \forall q' \in V \setminus \{p'\} : f^{-1}(q) = n_1 + \dots + n_r = n$

$$\therefore L^{-1}(n) = V \text{ abierto}$$

Como $O = \bigcup_{n\in O} \{n\} \Rightarrow L^{-1}(O) = \bigcup_{n\in O} L^{-1}(n) = \bigcup_{n\in O} V_n$

es abierto.

$$\therefore L \text{ es continua.}$$

Ahora, como L es continua y S' es conexo $\Rightarrow L(S') \subseteq \mathbb{N}$ es conexo. Luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $L(S') = \{m\}$

$$\therefore \forall p' \in S': \sum_{p\in f^{-1}(p')}' \deg_f(p) = m.$$