1) Continuidad en $\mathbb{R}^m$

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ continua $\Leftrightarrow$ $f \underbrace{\text{continua en } u \in \mathbb{R}^m}_{(*)}$, $\forall u \in \mathbb{R}^m$

(*) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall v \in \mathbb{R}^m$ tq

$$d_m(u,v) < \delta \Longrightarrow d_n(f(u), f(v)) < \varepsilon$$

donde $d_n(u,v) = \|u-v\|_n$ — (norma euclidea)

(X,d) donde X conjunto, d métrica en X $\to$ (X,d) espacio métrico.

Def. Continuidad en X

(X,d), (X',d') espacios métricos

$$\left.\begin{array}{l} f: X \to X' \text{ continua en } x_0 \in X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X \\ \qquad d(x_0, x) < \delta \Rightarrow d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon \end{array}\right\} (2)$$

Def. f continua $\Leftrightarrow$ f continua en x_0, $\forall x_0 \in X$.

---

d-Bolas $\quad B_d(x_0, r) = \{x \in X / d(x_0, x) < r\}$

$\quad B_d[x_0, r] = \{x \in X / d(x_0, x) \leq r\}$

Def. (2) se reformula de la siguiente manera

$f: X \to X'$ continua en $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X$

$$x \in B_d(x_0, \delta) \Longrightarrow f(x) \in B_{d'}(x, \varepsilon)$$

Af. (a) $1_X : (X,d) \to (X,d) : x \mapsto x$ contínua

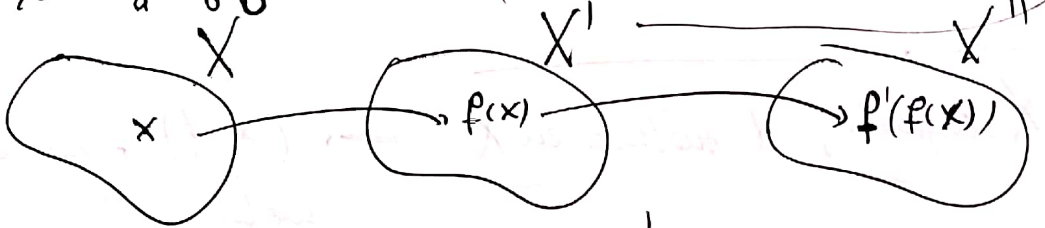
Dem. Dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta > 0$ como $\delta = \varepsilon$ ...

(b) $f : (X,d) \to (X',d')$, $f' : (X',d') \to (X'',d'')$ contínuas,

$\Rightarrow f' \circ f : (X,d) \to (X'',d'') : x \mapsto f'(f(x))$ contínua.

Dem. $x \mapsto f'(f(x))$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in X$

$x \in B_d(x_0, \delta) \Rightarrow B_{d'}(f(x_0), \varepsilon) \ni f(x)$



Dado $\tilde{\varepsilon}$, $\exists \tilde{\delta} > 0$ tq $\forall x' \in X'$: $x' \in B_{d'}(x_0', \tilde{\delta}) \Rightarrow f'(x') \in B_{d''}(f'(x_0'), \tilde{\varepsilon})$

$\cancel{B_d(f(x), f(x_0))}$

$B_d(f(x_0), \varepsilon) \ni f(x)$ | $f' \circ f$ existe $\iff f_*(X) \subset X'$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $f(x) \in B_{d'}(f(x_0), \delta) \Rightarrow f'(f(x)) \in B_{d''}(f'(f(x_0)), \varepsilon)$

$f : X \to X'$ contínua $\iff \exists \delta' > 0$: $x \in B_d(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B_{d'}(f(x_0), \delta)$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0 : \forall x \in X$,

$x \in B_d(x_0, \delta') \Rightarrow f'(f(x)) \in B_{d''}(f'(f(x_0)), \varepsilon)$ ∎

Ejemplos de espacios métricos (pág 4).

(a) $d_t: X \times X \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \longmapsto \begin{cases} 0 & x_1 = x_2 \\ 1 & x_1 \neq x_2 \end{cases}$

(métrica discreta).

Af. $B_{d_t}(x,r) = \begin{cases} \{x\} & , r<1 \\ X & , r \geq 1 \end{cases}$

Dem. obvio, ya que $d_t(x,y) < r < 1 \Longrightarrow d_t(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

Si $r \geq 1 \Longrightarrow B_{d_t}(x,r) = X$.

Af. (X', d') esp. métrico $\Longrightarrow f: (X, d_t) \longrightarrow (X', d')$ es continua.

Dem. $d_t(x, x_0) \in \{0, 1\}$, Dado $\varepsilon > 0$, tomar $\delta = \frac{1}{2}$

$x \in B_{d_t}(x_0, 1/2) = \{x_0\} \Longrightarrow x = x_0 \Longrightarrow f(x) = f(x_0)$

$\therefore$ ~~$B_{d'}(f(x), \varepsilon$~~

$f(x) \in B_d(f(x_0), \varepsilon)$. ∎

(b) (métrica inducida). (X, d) esp. métrico, $X_0 \subset X$,

$d_0 = d|_{X_0 \times X_0} : X_0 \times X_0 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, x') \longmapsto d(x, x')$

d_0 es la métrica inducida ((X_0, d_0) esp. métrico)

Af. $B_{d_0}(x_0, r) = B_d(x_0, r) \cap X_0$

Dem. $x \in B_{d_0}(x_0, r) \Longleftrightarrow d_0(x, x_0) < r$ ~~$\not\Rightarrow (x \in B_d(x_0, x_0))$~~

pero $x \in B_{d_0}(x_0, r) \Longleftrightarrow x \in X_0 \wedge d_0(x, x_0) = d(x, x_0) < r$

$\Longleftrightarrow x \in X_0 \wedge x \in B_d(x_0, r)$ ∎

Además $i:(X_0,d_0) \longrightarrow (X,d) : x \longmapsto x$ es continua

Dem. Sea $x_0 \in X_0$, $\forall \varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$ tq

$$x \in B_{d_0}(x_0,\delta) \Longrightarrow \underset{\underset{d(x_0,x)}{\|}}{d_0(x_0,x)} < \delta = \varepsilon$$

(c) V espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), definimos norma N en V

$N(v)=0 \iff v=0$

$N(rv)=|r|N(v) \quad \forall v \in V, \forall r \in \mathbb{R}$:

$N(v_1+v_2) \leq N(v_1)+N(v_2) \quad \forall v_1,v_2 \in V$

Af. $d_N : V\times V \longrightarrow \mathbb{R} : (v,v') \longmapsto N(v-v')$ es una métrica en V (Trivial).

Ejemplos de normas (en $\mathbb{R}^m$)

(i) (Norma Euclideana): $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_m^2}$

$d \leftarrow$ métrica euclideana (asociada)

(ii) (Norma producto): $\|v\|_\infty = \max\{|v_i| \,/\, i=1,\dots,m\}$

Af. (X,d) espacio métrico, entonces

$$f=(f_1,\dots,f_m) : (X,d) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, d_\infty) : x \mapsto (f_1(x),\dots,f_m(x))$$

f es continua $\iff$ f_i continua, $\forall i$.

$(d_\infty(u,v) = \|u-v\|_\infty)$

Dem. Pd: f continua $\Longleftrightarrow$ f_i continua

($\Rightarrow$) Sup que f continua. Dado $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$ tq

$$x\in B_d(x_0,\delta) \Longrightarrow f(x)\in B_{d_\infty}(f(x_0),\varepsilon)$$

$$f(x)\in B_{d_\infty}(f(x_0),\varepsilon) \Longleftrightarrow \underbrace{d_\infty(f(x),f(x_0))}_{=\max\{|f_i(x)-f_i(x_0)|\ /\ i=1,\dots,m\}} < \varepsilon$$

$$\therefore\ |f_i(x)-f_i(x_0)|<\varepsilon \quad \forall i=1,\dots,m$$

$\therefore$ f_i continua (no olvidar que $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$)

($\Leftarrow$) Sup que f_i continua. Dado $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta_i>0$ tq

$$x\in B_d(x_0,\delta_i) \Rightarrow |f_i(x)-f_i(x_0)|<\varepsilon$$

Sea $\delta=\min\{\delta_1,\dots,\delta_m\}$

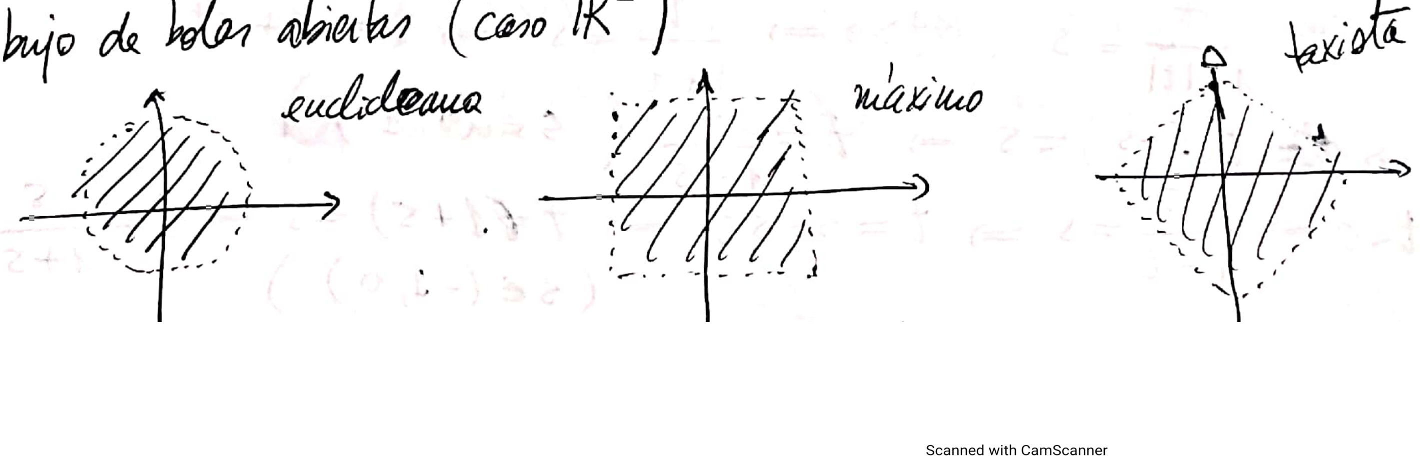
$$x\in B_d(x_0,\delta) \Longrightarrow |f_i(x)-f_i(x_0)|<\varepsilon$$

en particular $\|f(x)-f(x_0)\|_\infty = \max\{|f_i(x)-f_i(x_0)|\ /\ i=1,\dots,m\} < \varepsilon$

$\therefore$ f continua!

(iii) (Norma del taxista): $\|v\|_T=\sum_{i=1}^{m}|v_i|$

Dibujo de bolas abiertas (caso $\mathbb{R}^2$)



(d) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow [-1, 1] : x \longmapsto \begin{cases} \frac{t}{1+|t|} & , t \in \mathbb{R} \\ 1 & , t = \infty \\ -1 & , t = -\infty \end{cases}$$

entonces $d^* : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} : (t, t') \longmapsto |f(t) - f(t')|$

es una métrica tal que $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow [-1, 1]$ es continua.

Dem. Pd que d^* es una métrica en $\mathbb{R}^*$:

- $d^*(t, t') \geq 0 \quad \forall t, t'$ ✓
- $t = t' \Rightarrow f(t) = f(t') \Rightarrow |f(t) - f'(t)| = 0 = d^*(t, t')$
- $d^*(t, t') = 0 \Rightarrow f(t) = f(t') \Rightarrow t = t'$ (f biyección!)
- $d^*(t, t') = |f(t) - f(t')| = |f(t) - f(t'') + f(t'') - f(t')|$

$$\leq |f(t) - f(t'')| + |f(t'') - f(t')|$$

$$= d^*(t, t'') + d^*(t'', t')$$

Pd que $f : (\mathbb{R}^*, d^*) \longrightarrow ([-1, 1], |\cdot|)$ es continua.

Dem. Pd $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : d^*(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$d^*(x, x_0) = |f(x) - f(x_0)| < \delta$

Basta tomar $\delta = \varepsilon$ ...

Af. $\exists g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^*$ continua tal que $g \circ f = 1_{\mathbb{R}^*}$, $f \circ g = 1_{[-1,1]}$

Dem. $\frac{t}{1+|t|} = s$. $t > 0 \Rightarrow \frac{t}{1+t} = s \Rightarrow t = s + st$

$\rightarrow t(1-s) = s \rightarrow t = \frac{s}{1-s}$ ($s \in (0, 1)$))

$t < 0 \Rightarrow \frac{t}{1-t} = s \Rightarrow t = s - st \rightarrow t(1+s) = s \rightarrow t = \frac{s}{1+s}$
($s \in (-1, 0)$))

Por lo tanto $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^*$ queda definida por

$$g(s) = \begin{cases} \dfrac{s}{1-|s|} & , \quad s \in (-1,1) \\ \infty & , \quad s = 1 \\ -\infty & , \quad s = -1 \end{cases}$$

Se tiene $g \circ f = 1_{\mathbb{R}^*}$, $f \circ g = 1_{[-1,1]}$

Pd: g es continua

Dem. $d^*(g(s), g(s_0)) = |f(g(s)) - f(g(s_0))| = |s - s_0|$

Luego basta tomar $\delta = \varepsilon$.

Subconjuntos, Imágenes y preimágenes

X conjunto. $\mathcal{P}(X)$ conjunto potencia

$$A \subset X \iff A \in \mathcal{P}(X)$$

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$,

$$\bigcap \mathcal{A} = \{ x \in X \,/\, x \in A, \text{ para todo } A \in \mathcal{A} \}$$
$$\bigcup \mathcal{A} = \{ x \in X \,/\, x \in A, \text{ algún } A \in \mathcal{A} \}$$

Af. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) \iff \mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ (obvio). Lo anterior induce las funciones

$$\bigcap : \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \longrightarrow \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \longmapsto \bigcap \mathcal{A}$$
$$\bigcup : \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \longrightarrow \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \longmapsto \bigcup \mathcal{A}$$

Ejemplo a. Si $\emptyset \neq \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, entonces

$$\bigcap \mathcal{A} \subset \bigcap \mathcal{B}, \quad \bigcup \mathcal{B} \subset \bigcup \mathcal{A}$$

Dem. Pd $\bigcap \mathcal{A} \subset \bigcap \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} x \in \bigcap \mathcal{A} &\Rightarrow x \in A, \text{ para todo } A \in \mathcal{A} \\ &\Rightarrow x \in B, \text{ para todo } B \in \mathcal{B} \text{ (ya que } \mathcal{B} \subset \mathcal{A}) \\ &\Rightarrow x \in \bigcap \mathcal{B} \end{aligned}$$

Pd: $\bigcup \mathcal{B} \subset \bigcup \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} x \in \bigcup \mathcal{B} &\Rightarrow x \in B, \text{ algún } B \in \mathcal{B} \\ &\Rightarrow x \in B, \text{ algún } B \in \mathcal{A} \text{ (ya que } \mathcal{B} \subset \mathcal{A}) \\ &\Rightarrow x \in \bigcup \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Ejemplo b. $P(A)$ propiedad tq $A \subset X$

$\exists (A \in \emptyset)\ P(A)$ es falsa

$\forall (A \in \emptyset)\ P(A)$ es verdadera

$$\Rightarrow \bigcup \emptyset = \{x \in X / \exists (A \in \emptyset)\ x \in A\} = \emptyset$$

$$\bigcap \emptyset = \{x \in X / \forall (A \in \emptyset)\ x \in A\} = X$$

Ejemplo c. $X \neq Y$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$, then

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x \in X / \exists (A \in \mathcal{A})\ x \in A\} = \{x \in Y / \exists (A \in \mathcal{A})\ x \in A\}$$

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x \in X / \forall (A \in \mathcal{A})\ x \in A\} = \{x \in Y / \forall (A \in \mathcal{A})\ x \in A\}$$

(Salvo en caso $\mathcal{A} = \emptyset$).

X conjunto, definimos

$$C_X : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X) : A \mapsto X \setminus A = \{x \in X / x \notin A\}$$

Scanned with CamScanner

Obs. Si $X \neq Y$, $A \subset X \cap Y$, puede pasar que $c_X(A) \neq c_Y(A)$

Ej: $X = \{1\}$, $Y = \{1, 2\}$: ~~A=~~ Tomar $A = \{1\}$,

$c_X(A) = \phi$, $c_Y(A) = \{2\}$.

• $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{A}^c = \{A^c / A \in \mathcal{A}\}$

Obs. $\mathcal{A}^c \neq c_{\mathcal{P}(X)}(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{A}$

Teorema. $\bigcap \mathcal{A}^c = (\bigcup \mathcal{A})^c$, $\bigcup \mathcal{A}^c = (\bigcap \mathcal{A})^c$

Definidos ya f^*, f_*, podemos considerar

$$f_* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y) : A \longmapsto f_*(A)$$

$$f^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y) : A \longmapsto f^*(A)$$

Teorema. X conjunto

(i) $1_X : X \to X : x \mapsto x$ cumple $(1_X)_* = 1_{\mathcal{P}(X)}$

$(1_X)^* = 1_{\mathcal{P}(X)}$

(ii) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$,

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*, \quad (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

Corolario. $f : X \to Y$ biyección $\Rightarrow (f^{-1})_* = (f_*)^{-1}, (f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$

Dem. $(1_X)_* = (f^{-1} \circ f)_* = (f^{-1})_* \circ f_*$
$(1_Y)_* = (f \circ f^{-1})_* = f_* \circ (f^{-1})_*$ $\Big\}$ $\therefore (f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$

$$\left.\begin{array}{l}(1_X)^* = (f^{-1}\circ f)^*_t = f^* \circ (f^{-1})^* \\ (1_Y)^* = (f\circ f^{-1})^* = (f^{-1})^* \circ f^*\end{array}\right\} \therefore (f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$$

Tenemos el siguiente resultado:

(i) $f^*(\bigcup \mathcal{B}) = \bigcup f^*\mathcal{B}$, $f^*(\bigcap \mathcal{B}) = \bigcap f^*\mathcal{B}$

(ii) $f_*(\bigcup \mathcal{A}) = \bigcup f_*\mathcal{A}$, $f_*(\bigcap \mathcal{A}) \subseteq \bigcap f_*\mathcal{A}$.

Además,

(i) $A \in \mathcal{P}(X) \Longrightarrow A \subset f^*(f_*(A))$

(ii) $B \in \mathcal{P}(Y) \Longrightarrow f_*(f^*(B)) \subset B$

De lo anterior surge el siguiente corolario:

- Si $f: X \longrightarrow Y$ función, $A \subset X, B \subset Y$

$$f_*(A) \subset B \iff A \subset f^*(B)$$

Subconjuntos Abiertos de un espacio métrico. (pag 12)

Teorema a. Sean (X,d), (X',d') esp. métricos, $x_0 \in X$, $f: X \to X'$. Son equivalentes

(i) f continua en x_0

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$: $f_*(B_d(x_0,\delta)) \subset B_{d'}(f(x_0),\varepsilon)$

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: $B_d(x_0,\delta) \subset f^*(B_{d'}(f(x_0),\varepsilon))$

Dem. Pd (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

($\Rightarrow$) Sea $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq: $(\forall x \in X)\ d(x,x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$

pero $x \in B_d(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in f_*(B_d(x_0,\delta))$

$$\therefore f_*(B_d(x_0,\delta)) \subset B_{d'}(f(x_0),\varepsilon)$$

($\Leftarrow$) Sup que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: $f_*(B_d(x_0,\delta)) \subset B_{d'}(f(x_0),\varepsilon)$

Ahora, $(\forall x \in X)\ d(x_0,x) < \delta \to x \in B_d(x_0,\delta)$

$$\therefore f(x) \in \cancel{B}\, f_*(B_d(x_0,\delta))$$

$$\therefore d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon.$$

Pd (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) (trivial).

Def. $\mathcal{O}_d = \{ O \subset X \,/\, O \text{ es } d\text{-abierto} \}$

Af. Las bolas d-abiertas son conjuntos d-abiertos

Resultado importante:

Teorema C. Si (X,d), (X',d') esp. métricos, entonces $f: X \longrightarrow X'$ es continua ssi $f^*(O') \in \mathcal{O}_d$ $\forall O' \in \mathcal{O}_{d'}$

Dem. ~~So~~:

$(\Rightarrow)$ Sea $O' \in \mathcal{O}_{d'}$. ~~Por~~

Pd que $f^*(O') \in \mathcal{O}_d$

Si $x \in f^*(O') \Longleftrightarrow f(x) \in O'$. Podemos elegir $\varepsilon > 0$ tal que $B_{d'}(f(x), \varepsilon) \subset O'$. Como f es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$f_*(B_d(x,\delta)) \subset B_{d'}(f(x), \varepsilon) \subset O'$$

$$\therefore B_d(x,\delta) \subset f^*(O')$$

$$\therefore f^*(O') \in \mathcal{O}_d.$$

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como $B_{d'}(f(x), \varepsilon) \in \mathcal{O}_{d'}$, ~~existe $\delta > 0$ tal que $f_*(B_d(x,\delta)) \subseteq B_{d'}(f(x),\varepsilon)$~~

$f^*(B_{d'}(f(x), \varepsilon)) \in \mathcal{O}_d$, en particular, ~~existe~~ $x \in f^*(B_{d'}(f(x), \varepsilon))$ y existe $\delta > 0$ tal que $B_d(x,\delta) \subseteq f^*(B_{d'}(f(x), \varepsilon))$.

Obs. Como consecuencia del teorema anterior,

Sean d, d' métricas en X tq $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}_{d'} \Longrightarrow (X,d)$ y (X,d') definen las mismas funciones continuas!

Propiedades importantes (pág 14).

Teorema d. (i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}_d$

(ii) $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_d$ finito $\Rightarrow \bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{O}_d$

(iii) $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_d \rightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{O}_d$

(Noción de espacio topológico)

Ejemplo a. Si d_t es la métrica discreta en $X \Rightarrow \mathcal{O}_{d_t} = X$.

Si $(X_0, d_0) \leq (X, d) \Rightarrow \mathcal{O}_{d_0} = \{ O \cap X_0 / O \in \mathcal{O}_d \}$.

Ejemplo $O \subset \mathbb{R}^2$ abierto con métrica euclídea ssi $\forall (x,y) \in O$ existen $\varepsilon, \delta > 0$ tq

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\delta, y+\delta) \subset O.$$

Dem. Basta hacer un dibujo

Def. $\mathcal{B}_d = \{ B_d(x,r) / x \in X, r > 0 \}$ conjunto de d-bolas abiertas.

Importante

Prop a. (X,d) esp. métrico, $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_d$, $x \in B_1 \cap B_2$

$\Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}_d : x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Dem. Hacer dibujo!

<u>Prop 6.</u> (X,d) esp. métrico. $O \in \mathcal{O}_d \iff \exists \mathcal{A} \subset \mathcal{B}_d : O = \bigcup \mathcal{A}$

<u>Dem</u>. $(\Rightarrow)$ Sea $O \in \mathcal{O}_d$. $\forall x \in O$, $\exists \varepsilon_x > 0 : B_d(x, \varepsilon_x) \subset O$.
Tomando $\mathcal{A} = \{ B_d(x, \varepsilon_x) / x \in O \}$

$$\therefore \bigcup \mathcal{A} = O$$

$(\Leftarrow)$ Sea $O \subset X$, $x \in O$. Como $O = \bigcup \mathcal{A}$ para algún $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_d$
$\exists \varepsilon' > 0$, $x' \in X$: $x \in B_d(x', \varepsilon') \subset O$.

$$\therefore \exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \subset B_d(x', \varepsilon') \subset O.$$

$$\therefore O \in \mathcal{O}_d.$$

<u>Ejemplo d.</u> (X,d) esp. métrico, $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_d$. No necesariamente $\bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{O}_d$.
Ej: $\mathcal{A} = \{ [-1/n, 1/n] / n \in \mathbb{N} \}$.

<u>Ejemplo e.</u> $f : X \to X'$ continua $\iff f^*(B') \in \mathcal{O}_d \quad \forall B' \in \mathcal{B}_{d'}$.
<u>Dem</u>. $(\Rightarrow)$ (trivial)
$(\Leftarrow)$ $O \in \mathcal{O}_{d'}$: $O = \bigcup \mathcal{A}$, algún $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_d$
$\Rightarrow f^*(O) = \bigcup f^* \mathcal{A}$. Como $f^*(B') \in \mathcal{O}_d \; \forall B' \in \mathcal{B}_{d'}$
$\Rightarrow \bigcup f^* \mathcal{A} \in \mathcal{O}_d$.

$$\therefore f \text{ continua}$$

MISCELANEA. (pág 16)

P1. Omitido

P2. Omitido

P3. Omitido.

P4. (X,d) esp. métrico, ~~f(X)~~ $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ que cumple

(i) $f(0)=0$

(ii) $f(t+t')\leq f(t)+f(t')$

(iii) $f(t)<f(t')$ $\forall t<t'$

$\Rightarrow f\circ d$ es una métrica en X.

Dem. $f\circ d: X^2\to[0,\infty)$. Automáticamente $(f\circ d)(x,y)\geq 0$.

Ahora, $(f\circ d)(x,y)=0 \iff f(d(x,y))=0$

$\iff d(x,y)=0$ (f inyectiva).

$\iff x=y$.

$$(f\circ d)(x,y)=f(d(x,y))\leq f(d(x,z)+d(z,y))$$
$$\leq f(d(x,z))+f(d(y,z))$$
$$=(f\circ d)(x,z)+(f\circ d)(y,z).$$

$\therefore$ $f\circ d$ es una métrica.

P5. (X,d) esp. métrico $\Rightarrow \left(O \in \mathcal{O}_d \Leftrightarrow \forall x \in O, \exists n \in \mathbb{N} : B_d(x, 1/n) \subset O \right)$

Dem. Obvia!

P6. X conjunto, $d : X \times X \to [0, \infty)$.

$$d \text{ métrica en } X \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \ d(x,x') = 0 \Leftrightarrow x = x' \\ (ii) \ d(x,x') \leq d(x,x'') + d(x',x'') \quad \forall x,x',x'' \in X. \end{cases}$$

Dem. $(\Rightarrow)$ Obvio.

$(\Leftarrow)$. $d(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in X \times X$. Falta ver que se cumple la simetría.

$$d(x,y) \leq d(x,x) + d(y,x)$$

$$d(x,y) \leq 0 + d(y,x) = d(y,x).$$

$$d(y,x) \leq d(y,y) + d(x,y) = 0 + d(x,y)$$

$$\therefore \quad d(x,y) = d(y,x).$$

P7. • Obvio que $0 < r \leq r' \Rightarrow B_d(x_0, r) \subset B_d(x_0, r')$

• $\exists X \subseteq \mathbb{R}^2$ y $x \in X$: $B(x,1) = B(x,2)$

Dem. Basta que $X = \{0\}$. (?).

P8 Cuando d, d' son métricas equivalentes en $X \Rightarrow \mathcal{O}_d = \mathcal{O}_{d'}$.

d, d' equivalentes $\Leftrightarrow \exists m, M > 0 : m\, d(x,x') \leq d'(x,x') \leq M\, d(x,x')$ (Fácil)

Af. Si $d_1 \sim d_2$ en X y $d_1' \sim d_2'$ en X' entonces

$f : (X, d_1) \to (X', d_1')$ continua $\Leftrightarrow f : (X, d_2) \to (X', d_2')$ continua

Dem.

Dem. ($\Rightarrow$) Sea $O' \in \mathcal{O}_{d_2'}$. Como $d_1' \sim d_2'$ $\Rightarrow$ $O' \in \mathcal{O}_{d_1'}$.

$f:(X,d_1) \to (X', d_1')$ continuo $\Rightarrow$ $f^{-1}(O') \in \mathcal{O}_{d_1}$.

Pero $\mathcal{O}_{d_1} = \mathcal{O}_{d_2}$ ya que $d_1 \sim d_2$ $\therefore$ $f^{-1}(O') \in \mathcal{O}_{d_2}$

$$\therefore f:(X,d_2) \longrightarrow (X', d_2') \text{ continua}$$

($\Leftarrow$) Análogo.

Af. $f = (f_1, \dots, f_m) : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua ssi $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas.

Hecho (Muy importante): En $\mathbb{R}^m$ todas las normas son equivalentes.

Consideramos $\mathbb{R}^m$ con métrica producto (del máximo)

$$D(x,y) = \|x-y\|_\infty = \max\{|x_i - y_i| \,/\, i = 1, \dots, m\}$$

($\Rightarrow$) $B(x,\varepsilon) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$, $y \in B(x,\varepsilon) \Leftrightarrow |x-y| < \varepsilon$

Dado $x \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $d(x,y) < \delta \Rightarrow D(f(x), f(y)) < \varepsilon$

$$\text{pero } |f_i(x) - f_i(y)| \leq D(f(x), f(y)) \quad \forall i$$

$$\therefore |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$$

$$\therefore f_i \text{ continua}$$

($\Leftarrow$) Sea $x \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_i > 0$: $d(x,y) < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$

Tomando $\delta = \min\{\delta_i \,/\, i = 1, \dots, m\}$: $d(x,y) < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$

$$\therefore D(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

$$\therefore f : X \to \mathbb{R}^m \text{ continua.}$$

Af. La métrica euclídea no es equivalente a la métrica discreta.

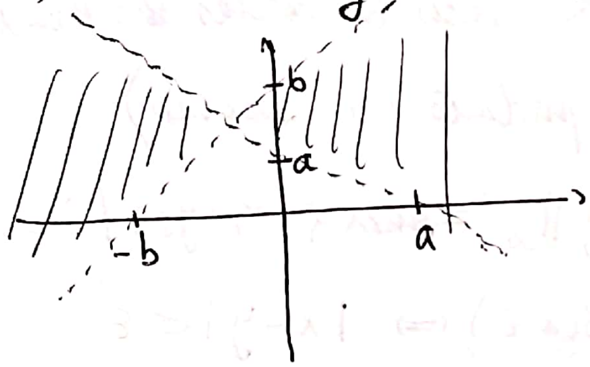
Dem. Basta ver que $[0,1] \in \mathcal{O}_{d_t}$, pero $[0,1] \notin \mathcal{O}_{d_2}$ (Caso $\mathbb{R}$)
En la situación general, $\{x\} \in \mathcal{O}_{d_t}$, pero $\{x\} \notin \mathcal{O}_{d_2}$.

P9. Las funciones $\sigma, \mu : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sigma(x,y) = x+y$, $\mu(x,y) = xy$ son continuas.

Dem 1. ~~Si $\sigma(x,y)=x$~~ $\sigma = \pi_1 + \pi_2$, $\mu = \pi_1 \pi_2$, donde π_1, π_2 son continuas...

Dem 2. $\sigma^*(a,b) = \{(x,y) / x+y \in (a,b)\}$

$x+y \in (a,b) \iff a < x+y < b \iff a-x < y < b+x$



Región sombreada es un conjunto abierto.

Análogo para μ.

P10. (X,d) es un espacio pseudométrico ssi

- $d(x,x') \geq 0 \quad \forall x, x' \in X$
- $d(x,x) \geq 0 \quad \forall x$
- $d(x,x') = d(x',x) \quad \forall x, x'$
- $d(x,x'') \leq d(x,x') + d(x',x'') \quad \forall x, x', x''$

$\tilde{d}$ pseudométrica trivial $\Leftrightarrow$ $\tilde{d}(x,y)=0 \quad \forall x,y\in X$.

Af. $B_{\tilde{d}}(x,r)=X \quad \forall x\in X, \forall r>0$

Conclusión: $\mathcal{O}_{\tilde{d}}=\{\phi, X\}$

Consecuencia: $(X',d') \longrightarrow (X,\tilde{d})$ continua, $\forall (X',d')$

Af. $(X,\tilde{d}) \to (X',d')$ continua $\Rightarrow (X,\tilde{d}) \to (X',d')$ constante.

Dem. Sea $f:(X,\tilde{d}) \longrightarrow (X',d')$ continua, i.e, ~~$X = f^*(O')$~~ v ~~[illegible]~~ ~~$\phi = f^*(O') \; \forall O' \in \mathcal{O}_{d'}$~~

Sean $x\in X$. Dado $\varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ tq

$$\tilde{d}(x,y)<\delta \Rightarrow d'(f(x),f(y))<\varepsilon$$

pero $\tilde{d}(x,y)=0 \quad \forall y\in X \quad \therefore \forall \varepsilon>0: \quad d'(f(x),f(y))<\varepsilon$.

Luego $d'(f(x),f(y))=0$

$$\therefore f(x)=f(y) \qquad \square$$

Af. $d(f,g)=\int_a^b|f-g|$ es una pseudométrica $\forall f,g$ Riemann integrables en $[a,b]$.

P11. (~~X,d) espacio~~ Sea d una métrica en X, las funciones

$d': X\times X \to \mathbb{R}: (x,y)\mapsto \min\{d(x,y),1\}$

$d'': X\times X \to \mathbb{R}: (x,y)\mapsto \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$

son métricas en X, equivalentes a d.

Dem. Pd que d', d'' son métricas (omitido)

Pd que $d_1 \sim d_2 \sim d$

$\forall (x,y) \in X \times X$, $d'(x,y) \leq d(x,y)$, $d''(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq d(x,y)$

Lo anterior quiere decir que d es más fina que d_1, d_2. Dicho de otra manera $\mathcal{O}_{d_1}, \mathcal{O}_{d_2} \subseteq \mathcal{O}_d$. Ahora dado $a \in X$, $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta_1 = \min\{1, \varepsilon\}$, $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Entonces

$d'(x,a) < \delta_1 \Rightarrow d'(x,a) < 1 \Rightarrow d'(x,a) = d(x,a) \Rightarrow d(x,a) < \delta_1$

$\Rightarrow d(x,a) < \varepsilon \quad \therefore \ 1' : (X, d') \longrightarrow (X, d)$ continua

$\Leftrightarrow \mathcal{O}_d \subseteq \mathcal{O}_{d'}$.

Además, $d''(x,a) < \delta_2 \Rightarrow \dfrac{d(x,a)}{1+d(x,a)} < \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$

$\Rightarrow (1+\varepsilon)\, d(x,a) < \varepsilon + \varepsilon d(x,a) \Rightarrow d(x,a) + \varepsilon d(x,a) < \varepsilon + \varepsilon d(x,a)$

$\therefore \ d(x,a) < \varepsilon$

$\therefore \ 1'' : (X, d'') \longrightarrow (X, d)$ continua

$\Leftrightarrow \mathcal{O}_d = \mathcal{O}_{d''}$

$\therefore \ \mathcal{O}_d = \mathcal{O}_{d''} = \mathcal{O}_{d'}$

Se concluye así que $d_1 \sim d' \sim d''$.

Espacios topológicos y funciones continuas (pág. 19)

Def. $(X, \mathcal{O})$ esp. topológico $(\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)) \iff$

O1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

O2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

O3) $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{O}$.

Observaciones. Si $\mathcal{O}$ satisface O2) $\xrightarrow[\text{inducción}]{} \left(\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{O} \text{ finito} \Rightarrow \bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{O}\right)$

Def (función continua). $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ esp. topológicos

$$f : X \to Y \text{ continua} \iff f^*(O) \in \mathcal{O}_X, \ \forall O \in \mathcal{O}_Y.$$

Obs. Se usarán las notaciones

$$F(X,Y) = \{\text{funciones } X \to Y\}$$
$$C(X,Y) = \{\text{funciones continuas } X \to Y\}$$

Teorema. Sean X, Y, Z esp. topológicos. Se cumple

(i) $1_X : X \to X$ continua

(ii) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ continuas $\Rightarrow g \circ f : X \to Z$ continua

(Esp. top's y fns continuas forman una categoría).

Dem. Fácil

Obs. por (ii) tenemos

$$c : C(X,Y) \times C(Y,Z) \longrightarrow C(X,Z) : \cancel{(g,f)}$$
$$: (f,g) \longmapsto g\circ f$$

Af. $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ topología en X

$\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O} \iff id : (X,\mathcal{O}) \longrightarrow (X,\mathcal{O}')$ continua.

(Obs. $id = 1_X \iff \mathcal{O} = \mathcal{O}'$.)

Ejemplos (pág 22)

Ejemplo a. Topología en $\emptyset$ (sólo una). $(\emptyset, \{\emptyset\})$

En los apuntes se define Función:

- $f : X \longrightarrow Y$ función es un triple (X, Y, Z)
  - i) X dominio de f ($\operatorname{dom} f$)
  - ii) Y codominio de f ($\operatorname{codom} f$)
  - iii) Z ~~g~~ $\subset X \times Y$ es el gráfico de f ($\operatorname{graf}(f)$ o Γf)

  tal que $\forall x \in X \ \exists! y \in Y : (x,y) \in Z$ (notación: $y = f(x)$)

Obs. $f = g \iff (\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g$, $\operatorname{codom} f = \operatorname{codom} g$, $\Gamma f = \Gamma g$

<u>Ejemplo b</u>. $X = \{*\} \Rightarrow \mathcal{O}_X = \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{*\}\}$

$\overline{P} = (P, \{\emptyset, P\})$ esp. topológico puntual.

<u>Af</u>. S conjunto, $c : S \longrightarrow \{*\} : x \longmapsto *$

$\Rightarrow F(S, P) = \{c\}$

<u>Af</u>. X esp. topológico $\Rightarrow c : X \to P$ continua (i.e. $C(X, \overline{P}) = \{c\}$)

<u>Af</u>. $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ esp. topológico. $\forall x \in |X|$:

$x : \overline{P} \longrightarrow X : * \longmapsto x$ continua.

<u>Conclusión</u>: $|X| \cong C(\overline{P}, X)$

<u>Def</u>. $f : X \to Y$ constante $\Leftrightarrow \exists y \in Y : f(x) = y \;\; \forall x \in X$

Notar que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "f"'] & \overline{P} \arrow[d, "y"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad y \circ c = f$$

c, y continuas $\Rightarrow f$ continua.

<u>Ejemplo c</u>. $\overline{S} = (\{0,1\}, \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\})$ esp. de Sierpinski.

Podemos identificar subconjuntos de X con funciones $X \longrightarrow \{0,1\}$

<u>Prop. a</u>. $\Phi : \mathcal{P}(X) \to F(X, \{0,1\}) : A \longmapsto \chi_A$

<u>biyección</u> con inversa

$\Phi^{-1} : F(X, \{0,1\}) \longrightarrow \mathcal{P}(X) : \varphi \longmapsto \varphi^*(\{1\})$

Dem. $A \in \mathcal{P}(X)$:

$$\Phi^{-1}(\Phi(A)) = \Phi^{-1}(\chi_A) = \chi_A^*(\{1\}) = A$$

Si $\varphi : X \to \{0,1\}$:

$$\Phi(\Phi^{-1}(\varphi)) = \Phi(\varphi^*(\{1\})) = \chi_{\varphi^*(\{1\})} = \varphi$$

$$\chi_{\varphi^*(\{1\})}(t) = \begin{cases} 1, & t \in \varphi^*(\{1\}) \\ 0, & t \notin \varphi^*(\{1\}) \end{cases} = \begin{cases} 1, & \varphi(t) = 1 \\ 0, & \varphi(t) \neq 1 \end{cases}$$

Con lo anterior, podemos identificar los abiertos de X con funciones continuas $X \to \bar{S}$

Prop. 6 (i) $O \in \mathcal{O}_X \Leftrightarrow \chi_O : X \to \bar{S}$ continua

(ii) $\alpha_X : \mathcal{O}_X \to C(X, \bar{S}) : O \mapsto \chi_O$

es una biyección.

Dem (i) ($\Rightarrow$) Supongamos $O \in \mathcal{O}_X$

$$\chi_O^*(\phi) = \phi, \quad \chi_O^*(\{1\}) = O, \quad \chi_O^*(\{0,1\}) = X$$

$\therefore \chi_O^*$ continua

($\Leftarrow$) Supongamos $\chi_O : X \to \bar{S}$ continua $\Rightarrow \chi_O^*(\{1\}) = O \in \mathcal{O}_X$

$\therefore O \in \mathcal{O}_X$

(ii) Candidato: $\alpha_X^{-1} : C(X, \bar{S}) \to \mathcal{O}_X : f \mapsto f^*(\{1\})$

Es el mismo desarrollo que en el anterior. ∎

~~Conclusión: $|X| \simeq$~~

Conclusión: X espacio topológico, $\overline{P}$ espacio puntual,

$$|X| \simeq C(P, X) \quad , \quad \mathcal{O}_X \simeq C(X, \overline{S})$$ } Importante

---

Ejemplo d. (X,d) esp. métrico $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_d$ topología métrica.

Def. X metrizable $\Leftrightarrow$ $\exists d$ métrica : $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_d$

obs. $f:(X,d) \to (X',d')$ continua $\Leftrightarrow$ $f:(X,\mathcal{O}_d) \to (X',\mathcal{O}_{d'})$ continua.

Ejemplo e. $(X,\mathcal{O})$ con $\mathcal{O}=\{\phi, X\}$ (topología indiscreta)

Af. $\mathcal{O}=\{\phi,X\}$ definida por pseudométrica trivial.

Prop. X indiscreto $\Leftrightarrow$ $\forall Y$: $Y \to X$ continuas

Dem. ($\Rightarrow$) trivial

($\Leftarrow$) Si X no es indiscreto $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_X \supsetneq \{\phi, X\}$

$$\therefore \ id : (X, \{\phi, X\}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X) \ : x \mapsto x$$

no es continua (trivial).

Corolario. X indiscreto $\Leftrightarrow$ $C(Y,X) = F(Y,X)$. $\forall Y$.

$\boxtimes$

Ejemplo f. Si $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X) \Rightarrow X$ se llama espacio discreto.

Af. $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ está definido por la métrica discreta.

Prop. X discreto $\Leftrightarrow \forall Y : X \to Y$ continua

Dem. Trivial!

Corolario. X discreto $\Leftrightarrow C(X,Y) = F(X,Y)$, $\forall Y$.

Consecuencia: X esp. métrico finito $\Rightarrow X$ discreto.

Ejemplo g. X conjunto. $\mathcal{O} = \{\phi\} \cup \{O \subset X / O^c$ finito$\}$

Af. $\mathcal{O}$ topología en X (topología cofinita)

Dem. $X^c = \phi \quad \therefore \phi, X \in \mathcal{O}$

Sean $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1^c, O_2^c$ finitos $\Rightarrow O_1^c \cup O_2^c$ finito

pero $(O_1 \cap O_2)^c = O_1^c \cup O_2^c \quad \therefore O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

Sea $\phi \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{O}$. $(\cup \mathcal{A})^c = \cap \mathcal{A}^c$, $\mathcal{A}^c = \{A^c / A \in \mathcal{A}\}$

$\cap \mathcal{A}^c$ finito. $\therefore \cup \mathcal{A} \in \mathcal{O}$

$\therefore \mathcal{O}$ topología en X

Af. $\mathcal{O}_X$ cofinita $\Rightarrow f : X \to X$ biyección, es continua

Dem. Sea $\mathcal{O}_X$ cofinita, $O \in \mathcal{O}_X$.

Pd: $f^*(O) \in \mathcal{O}_X$

$(f^*(O))^c = f^*(O^c)$. Como f biyección, $\# f^*(O^c) = \# \underset{\text{finito.}}{O^c}$

$\therefore f^*(O) \in \mathcal{O}_X$.

Ejemplo h. $\hat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, y la topología

$$\mathcal{O} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \{O \subset \hat{\mathbb{N}} \,/\, \infty \in O,\ O^c \text{ finito}\}$$

Af. $f: \hat{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ continua $\iff$ $f(\infty)$ es límite de $(f(n) \mid n \in \mathbb{N})$

Dem. Usaremos el siguiente hecho:

- $f: X \to Y$; $A \subset X$, $B \subset Y \Rightarrow f_*(A \cap f^*(B)) = f_*(A) \cap B$

Dem. ($\Rightarrow$) Pd: $f: \hat{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow f(\infty) = \lim f(n)$

$$f(\infty) = \lim f(n) \iff \forall \varepsilon > 0: \underset{\text{finito}}{\{f(n) \in f_*(\mathbb{N}) \,/\, f(n) \notin (f(\infty)-\varepsilon, f(\infty)+\varepsilon)\}}$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0: (f(\infty)-\varepsilon, f(\infty)+\varepsilon)^c \cap f_*(\mathbb{N}) \text{ finito.}$$

$f^*(f(\infty)-\varepsilon, f(\infty)+\varepsilon) \in \mathcal{O} \ \wedge \ \infty \in f^*(f(\infty)-\varepsilon, f(\infty)+\varepsilon)$

$\therefore (f^*(f(\infty)-\varepsilon, f(\infty)+\varepsilon))^c$ finito.

pero $(f^*(f(\infty)-\varepsilon, f(\infty)+\varepsilon))^c = f^*((f(\infty)-\varepsilon, f(\infty)+\varepsilon)^c)$

hay cantidad finita de naturales $= f^*((f(\infty)-\varepsilon, f(\infty)+\varepsilon)^c) \cap \mathbb{N}$

$\therefore$ ~~$f_*((f(\infty)-\varepsilon, f(\infty)+\varepsilon)^c$~~

$$\therefore f_*\Big(f^*\big(\underbrace{(f(\infty)-\varepsilon, f(\infty)+\varepsilon)^c}_{\text{finito}}\big)\Big) = f_*\big(f^*((f(\infty)-\varepsilon, f(\infty)+\varepsilon)^c) \cap \mathbb{N}\big)$$

$$= (f(\infty)-\varepsilon, f(\infty)+\varepsilon)^c \cap f_*(\mathbb{N}).$$

$$\therefore \quad f(\infty) = \lim f(n).$$

($\Leftarrow$) Pd: $f(\infty) = \lim f(n) \Rightarrow f: \hat{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

Dem. Sea $O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$. Tenemos dos opciones

$$\begin{cases} f(\infty) \in O \\ f(\infty) \notin O \end{cases}$$

Si $f(\infty) \notin O \Rightarrow f^*(O) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (Recordar que $f^*(O) \in \mathcal{G}(\hat{\mathbb{N}})$)

Si $f(\infty) \in O$ ($\Leftrightarrow \infty \in f^*(O)$). Debemos demostrar que $(f^*(O))^c$ finito. ~~Se sabe que~~

$$f(\infty) = \lim f(n) \Rightarrow f_*(\mathbb{N}) \cap O^c \text{ finito.}$$

$$\therefore f^*(f_*(\mathbb{N}) \cap O^c) \text{ finito.}$$

Además:

$$f^*(f_*(\mathbb{N}) \cap O^c) = f^*(f_*(\mathbb{N})) \cap f^*(O^c)$$
$$= \mathbb{N} \cap f^*(O^c)$$
$$= f^*(O^c)$$
$$= (f^*(O))^c$$

$$\therefore f: \hat{\mathbb{N}} \to \mathbb{R} \text{ continua.}$$

Ejemplo: (Omitido por el momento. No se entiende bien las condiciones del problema).

Ejemplo: $(X, \mathcal{O}_X)$ espacio topológico, $p \notin X$.

Af. $\mathcal{O}^\diamond = \{\emptyset\} \cup \{O \cup \{p\} / O \in \mathcal{O}_X\}$

es una topología para $X^\diamond = X \cup \{p\}$

Dem. Como $X \in \mathcal{O}_X \Rightarrow \emptyset, X^\diamond \in \mathcal{O}^\diamond$.

Sean $O_1^\diamond, O_2^\diamond \in \mathcal{O}^\diamond$.

Si $O_1^\diamond = \emptyset \Rightarrow O_1^\diamond \cap O_2^\diamond = \emptyset \in \mathcal{O}^\diamond$ (análogo para $O_2^\diamond = \emptyset$)

Si $O_1^\diamond = O_1 \cup \{p\}$, $O_2^\diamond = O_2 \cup \{p\}$

$$O_1^\diamond \cap O_2^\diamond = (O_1 \cup \{p\}) \cap (O_2 \cup \{p\}) = \underbrace{(O_1 \cap O_2)}_{\in \mathcal{O}_X} \cup \{p\} \in \mathcal{O}^\diamond$$

Sea $\emptyset \neq \mathcal{A}^\diamond \subset \mathcal{O}^\diamond$,

$\mathcal{A}^\diamond = \mathcal{A} \cup \{p\} = \{O \cup \{p\} / O \in \mathcal{O}_X\}$

$\bigcup \mathcal{A}^\diamond = (\bigcup \mathcal{A}) \cup \{p\}$. Como $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup \mathcal{A}^\diamond \in \mathcal{O}^\diamond$.

Af. $\forall f : [0,1] \to X^\diamond$, $f(t) = p$ $\forall t \in (0,1) \Rightarrow f$ continua.

Dem. Sea $O^\diamond \in \mathcal{O}^\diamond$

(i) $p \notin O^\diamond \Rightarrow f^*(O^\diamond) = \emptyset$

(ii) $p \in O^\diamond \Rightarrow O^\diamond = O \cup \{p\}$, $O \in \mathcal{O}_X$

$$f^*(O^\diamond) = f^*(O \cup \{p\}) = f^*(O) \cup f^*(\{p\}) = f^*(O) \cup (0,1)$$

pero $p \notin O \Rightarrow f^*(O) \in \{0,1\}$

$\therefore f^*(O^\diamond) \in \mathcal{O}_{[0,1]}$

Af. $\forall x_0, x_1 \in X^\diamond$, $\exists f:[0,1]\longrightarrow X^\diamond$ continua tal que $f(i)=x_i$, $i=0,1$.

Dem. Sean $x_0, x_1 \in X^\diamond$.

- Si $x_0 = x_1 = p$, consideramos $f_1:[0,1]\longrightarrow X^\diamond : x \longmapsto p$

  Evidente que f_1 es continua.

- Si $x_0 \in X$, $x_1 = p$, consideramos

$$f_2:[0,1]\longrightarrow X^\diamond : x \longmapsto \begin{cases} x_0 & , x=0 \\ p & , x\in(0,1] \end{cases}$$

Sea $O^\diamond \in \mathcal{O}^\diamond$:
(i) $x_0, x_1 \notin O^\diamond \Rightarrow f^*(O) = \phi$
(ii) $x_0, x_1 \in O^\diamond \Rightarrow f^*(O) = [0,1]$; todos en $\mathcal{O}_{[0,1]}$
(iii) $x_0 \in O^\diamond \Rightarrow f^*(O) = [0,1]$
(iv) $x_1 \in O^\diamond \Rightarrow f^*(O) = (0,1]$

- Si $x_0, x_1 \in X$, consideramos $f_3:[0,1]\longrightarrow X^\diamond$ ~~: $x \longmapsto p$~~

$$f_3(x) = \begin{cases} x_0 & , x=0 \\ p & , x\in(0,1) \\ x_1 & , x=1 \end{cases}$$

f_3 es continua!

Secciones, retracciones, homeomorfismos (pág 27)

Def. $f: X \to Y$ función

- f inyectiva $\iff \forall y \in Y : \# f^*(\{y\}) \leq 1$
- f epiyectiva $\iff \forall y \in Y : \# f^*(\{y\}) \geq 1$
- f biyectiva $\iff \forall y \in Y : \# f^*(\{y\}) = 1$.

Prop. a. $f: X \to Y$. Son equivalentes

(i) f inyectiva

(ii) $\forall x, x' : f(x) = f(x') \to x = x'$

(iii) $\exists g: Y \to X : g \circ f = 1_X$

(iv) $h, h': Z \to X : f \circ h = f \circ h' \to h = h'$

(v) $f^* \circ f_* = 1_{\mathcal{P}(X)}$.

Prop. b. $f: X \to Y$. son equivalentes:

(i) f epiyectiva

(ii) $\forall y, \exists x \in X : f(x) = y$

(iii) $\exists g: Y \to X : f \circ g = 1_Y$

(iv) $h, h': Y \to Z : h \circ f = h' \circ f \Rightarrow h = h'$

(v) $f_* \circ f^* = 1_{\mathcal{P}(Y)}$

Prop. c. $f : X \to Y$. Son equivalentes

(i) f biyectiva

(ii) f inyectiva y epiyectiva

(iii) $\exists\, g : Y \to X \,:\, g \circ f = 1_X,\ f \circ g = 1_Y$.

(iv) $h, h' : Z \to X \,:\, f \circ h = f \circ h' \Rightarrow h = h'$

$k, k' : Y \to Z \,:\, k \circ f = k' \circ f \Rightarrow k = k'$

(v) $f^* \circ f_* = 1_{\mathcal{P}(X)}$, $f^* \circ f_* = 1_{\mathcal{P}(Y)}$

Corolario. $f : X \to Y$ biyección $\Rightarrow (f^*)^{-1} = f_*$, $(f_*)^{-1} = f^*$

Ejemplo a.

$$f : X = (\{a,c\}, \mathcal{P}(X)) \longrightarrow Y = (\{a,b,c\}, \{\emptyset, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\})$$
$$x \longmapsto x$$

es inyectiva y continua (X discreto); pero no existe $g : Y \to X$ continua tal que $g \circ f = 1_X$.

Dem. Si $g \circ f = 1_X \Rightarrow g(a) = a,\ g(c) = c$

- Si $g(b) = a \Rightarrow \{c\} \in \mathcal{O}_X$ pero $g^*(\{c\}) = \{c\} \notin \mathcal{O}_Y$
- Si $g(b) = c \Rightarrow \{a\} \in \mathcal{O}_X$ pero $g^*(\{a\}) = \{a\} \in \mathcal{O}_Y$

$\therefore$ g no puede ser continua.

Ejemplo b. $f : X = (\{a,b,c\}, \{\emptyset, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}) \longrightarrow Y = (\{a,c\}, \{\emptyset, \{a,b\}\})$ tal que $f(x) = \begin{cases} a, & x \in \{a,b\} \\ c, & x = c \end{cases}$ es epi y continua (Y indiscreto) pero no tiene inversa por la derecha continua (ejercicio!).

Ejemplo c. Si $|S| > 1$,

$$id : (S, \mathcal{O}_d) \longrightarrow (S, \mathcal{O}_i)$$

$\mathcal{O}_d$ topología discreta, $\mathcal{O}_i$ topología indiscreta.

Af. id biyectiva continua tal que su inversa no es continua.

Dem. Evidente!

Definición. • $s : X \longrightarrow Y$ sección ssi s continua y $\exists\, r : Y \longrightarrow X$: $r \circ s = 1_X$. r continua.

• $r : X \longrightarrow Y$ continua. r retracción ssi $\exists\, s : Y \longrightarrow X$ continua : $r \circ s = 1_Y$

•• $h : X \longrightarrow Y$ homeomorfismo $\Longleftrightarrow$ h sección y retracción.

Def. X e Y son homeomorfos $\Longleftrightarrow$ $\exists : h : X \rightarrow Y$ homeomorfismo.

Teo. a. (i) Composiciones de sección es una sección

(ii) Composiciones de retracción es una retracción

(iii) Composiciones de homeomorfismos es un homeomorfismo.

Teo. b. X e Y esp. topológicos, $f : |X| \longrightarrow |Y|$ biyección. Son equivalentes

(i) f homeomorfismo

(ii) $f^* : \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X : U \mapsto f^*(U)$ bien definida y biyectiva

(iii) $f_* : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y : O \mapsto f_*(O)$ bien definida y biyectiva.

Obs. Teo.b sólo dice que un homeomorfismo define una biyección entre los abiertos de $\mathcal{O}_X$ y $\mathcal{O}_Y$.

Dem. Ver notas del curso!

Ejemplo.d. X, Y discretos (o indiscretos) $\Rightarrow \forall f: X \to Y$ biyección, f es un homeomorfismo.

Dem. ~~Sean X, Y discretos, $f^*: \mathcal{O}_Y$~~
~~$f^*: \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X : U \mapsto f^*(U)$ está bien definida ya que~~
~~f es continua (X discreto).~~
~~$(f^*)^*(\{0\})$~~

La demostración es trivial ya que f es una sección y una retracción, independiente de si X, Y discretos (o indiscretos)

Ejemplo e

- $s: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x,0)$ sección
- $r: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x+y^2$ retracción
- $\Delta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x,x)$ es una sección.

Dem. • Para $s: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tenemos $\pi_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x$. Evidente que $\pi_1 \circ s = 1_{\mathbb{R}^2}$. Además π_1 es continua, ya que $\pi_1^*(a,b) = (a,b) \times \mathbb{R} \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$, $\forall (a,b) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$.

• Para $r: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : x \mapsto x+y^2$ tenemos la función $\tilde{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dada por $\tilde{r}(x) = (x-y^2, y)$

$$(r\circ\tilde{r})(x) = r(\tilde{r}(x)) = r(x-y^2, y) = x-y^2+y^2 = x$$

$$\therefore\ r\circ\tilde{r} = 1_{\mathbb{R}}$$

Como $\tilde{r}(x) = (x-y^2, y) = (x,0)+(-y^2,y)$, es continua (suma de funciones continuas). O de otra manera, $\tilde{r}=(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)$, donde $\tilde{r}_1(x) = x-y^2$, $\tilde{r}_2(x)=y^2$ son continuas.

- Para $\Delta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 : x\mapsto (x,x)$ consideramos $\pi_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:(x,y)\mapsto x$. Evidente $\pi_1\circ\Delta = 1_{\mathbb{R}}$ ...

<u>Ejemplo f</u>. $f: X\to Y$ continua

<u>Af.</u> X indiscreto. f sección $\Longleftrightarrow$ f inyectiva.

<u>Dem.</u> $(\Rightarrow)$ ✓

$(\Leftarrow)$ Sea f inyectiva e Y indiscreto.

f 1-1 $\Rightarrow \exists g: Y\to X : g\circ f = 1_X$. Automaticamente $g: Y\to X$ es continua.

<u>Af.</u> X indiscreto, f retracción $\Longleftrightarrow$ f epiyectiva

$(\Rightarrow)$ ✓

$(\Leftarrow)$ Análoga que en el caso anterior.

<u>Pregunta</u>: ¿Qué sucede cuando X es discreto?

<u>Resp.</u> No siempre se cumple. Por ejemplo $s:\mathbb{R}\hookrightarrow\mathbb{R}^2 : x\mapsto (x,0)$ donde $\mathcal{O}_{\mathbb{R}} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$ topología métrica. Por ejemplo e, $\pi_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es tal que $\pi_1\circ s = 1_{\mathbb{R}^2}$, pero $\pi_1^*(\{x\}) = \{x\}\times\mathbb{R}$ no es abierto en $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$.

<u>Ejemplo 9.</u> X e Y homeomorfos $\Rightarrow$ (X metrizable $\Leftrightarrow$ Y metrizable)

<u>Dem.</u> X e Y homeomorfos $\Rightarrow \exists\, h:(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ homeomorfismo.

($\Rightarrow$) X metrizable $\Leftrightarrow$ $id:(X,\mathcal{O}_d)\to(X,\mathcal{O}_X)$ homeo, para alguna métrica d en X

$$\begin{array}{ccc} (X,\mathcal{O}_d) & \xrightarrow{id} & (X,\mathcal{O}_X) \\ & \overset{g}{\searrow} \quad \circlearrowleft & \downarrow h \\ & & (Y,\mathcal{O}_Y) \end{array} \qquad g=h\circ id$$

g homeo $\Rightarrow \mathcal{O}_Y=(g_*)_*(\mathcal{O}_d)$. Podemos definir métrica $\tilde d$ en Y como $\tilde d(y,y')=d(g^{-1}(y),g^{-1}(y'))$. Efectivamente $\tilde d$ es una métrica en Y; pero faltaría demostrar que $\mathcal{O}_{\tilde d}=\mathcal{O}_Y$.
Primero notemos, como g es homeo, $(g_*)_*(\mathcal{O}_d)=\mathcal{O}_{\tilde d}$. Luego lo que se debe demostrar es que $(g_*)_*(\mathcal{O}_d)=\mathcal{O}_{\tilde d}$.
Primero probaremos con bolas:

<u>Af.</u> $g_*(B_d(x,r))=B_{\tilde d}(g(x),r)$

$\subseteq$) Sea $g(x')\in g_*(B_d(x,r))\Rightarrow x'\in B_d(x,r)$

$\Rightarrow d(x',x)<r$ pero $d(x',x)=\tilde d(g(x'),g(x))$

$\therefore\ \tilde d(g(x'),g(x))<r$

$\therefore\ g(x')\in B_{\tilde d}(g(x),r)$

$\therefore\ g_*(B_d(x,r))\subseteq B_{\tilde d}(g(x),r)$

$\supseteq$) Sea $y'\in B_{\tilde d}(g(x),r)\Rightarrow \tilde d(y',g(x))<r$

pero $\tilde d(y',g(x))=d(x',x)$, donde $x\in X$ tq $g(x)=y$ (únic

Se tiene que $x' \in B_d(x,r)$

$$\therefore\ g(x') = y \in g_*(B_d(x,r))$$

$$\therefore\ g_*(B_d(x,r)) \supseteq B_{\tilde{d}}(g(x),r)$$

Así, $g_*(B_d(x,r)) = B_{\tilde{d}}(g(x),r)$.

Pd: ~~$\mathcal{O}_{\tilde{d}} = \mathcal{O}_Y$~~ $(g_*)_*(\mathcal{O}_d) = \mathcal{O}_{\tilde{d}}$

Dem. Primero demostraremos que $\mathcal{O}_Y \subseteq \mathcal{O}_{\tilde{d}}$.

Sea $O \in \mathcal{O}_Y$, $\exists U \in \mathcal{O}_d : g_*(U) = O$. Dado $y \in O$, existe $x \in U$ (único) tal que $g(x) = y$, pero $x \in U$ implica que existe $r > 0$ tal que, $B_d(x,r) \subseteq U$

$$\therefore\ O = g_*(U) \supseteq g_*(B_d(x,r)) = B_{\tilde{d}}(\underset{y}{g(x)},r)$$

$$\therefore\ B_{\tilde{d}}(g(x),r) \subseteq O$$

$$\therefore\ O \in \mathcal{O}_{\tilde{d}}$$

Falta demostrar que $\mathcal{O}_{\tilde{d}} \subseteq \mathcal{O}_Y$. Dado $O \in \mathcal{O}_{\tilde{d}}$, $\exists\ \tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{B}_{\tilde{d}}$ (familia de bolas $\tilde{d}$-abiertas) tal que $O = \bigcup \tilde{\mathcal{A}}$; pero acabamos de demostrar que $g_*(\mathcal{B}_d) = \mathcal{B}_{\tilde{d}}$

luego $\tilde{\mathcal{A}} = g_*(\mathcal{A})$, donde $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_d$

$$\therefore\ O = \bigcup \tilde{\mathcal{A}} = \bigcup g_*(\mathcal{A}) = g_*(\bigcup \mathcal{A})$$
$$= g_*(\bigcup \mathcal{A})$$

Por el procedimiento anterior, demostramos que $(g_*)_*(\mathcal{B}_d) = \mathcal{B}_{\tilde{d}}$.

Sea $O \in \mathcal{O}_d \Rightarrow O = \bigcup \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_d$;

$g_*(O) = g_*(O) = g_*(\bigcup \mathcal{A}) = \bigcup g_* \mathcal{A}$; pero $\mathcal{A}$

$\bigcup g_* \mathcal{A} \in \mathcal{O}_{\tilde{d}}$.

Ahora si $\tilde{O} \in \mathcal{O}_{\tilde{d}} \Rightarrow \tilde{O} = \bigcup \tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{B}_{\tilde{d}}$,

~~$\tilde{\mathcal{A}} \neq g$~~ pero $\forall \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{A}}$, $\exists B \in \mathcal{B}_d$ tq $g_*(B) = \tilde{B}$

$$\therefore \tilde{\mathcal{A}} = \{ g_*(B) / B \in \mathcal{B}_d \}$$

Luego existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_d : g_*(\mathcal{A}) = \tilde{\mathcal{A}}$

$$\therefore \tilde{O} = g_*(\underbrace{\bigcup \mathcal{A}}_{\text{abierto en } \mathcal{O}_d})$$

Así se tiene que $(g_*)_*(\mathcal{O}_d) = \mathcal{O}_{\tilde{d}}$.

$\therefore$ Y es metrizable

($\Leftarrow$) Demostración análoga!

Obs. Volver a revisar cuando se tenga tiempo.

Ejemplo h (Omitido por el momento)

Ejemplo k $h : X \to X'$, $k : Y \to Y'$ homeomorfismos, $f : X \to Y$, $f' : X' \to Y'$ funciones tales que $f' \circ h = k \circ f$,

i.e.,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "k"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

Af. f continua $\Longleftrightarrow$ f' continua

Dem. Supongamos f continua. Como

$$\cancel{f/E} \quad k \circ f = f' \circ h$$

$$\Rightarrow f' = k^{-1} \circ f \circ h^{-1}$$

Como f' es composición de continuas, entonces es continua.
De manera análoga se demuestra el otro caso.

Conjuntos cerrados (pág, 35)

Def. $(X,\mathcal{O})$ espacio topológico. $O \subseteq X$ es cerrado ssi $O^c \in \mathcal{O}$.

Def. $\mathcal{C}_X = \mathcal{O}_X^c$ (conjunto de cerrados)

Teorema a. X esp. topológico.

(i) $\phi, X \in \mathcal{C}_X$

(ii) $\mathcal{F}' \subset \mathcal{C}_X$ finito $\Rightarrow \bigcup \mathcal{F}' \in \mathcal{C}_X$.

(iii) $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_X \Rightarrow \bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{C}_X$.

Dem. Morgan!

Teorema b. X conjunto, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ que cumple propiedades del teorema a, entonces existe una única topología $\mathcal{O}$ en X tal que $\mathcal{O}^c = \mathcal{C}$.

Prop. b. X esp. topológico. $C \subset X$ cerrado $\Leftrightarrow \forall x \notin C$, existe $O \in \mathcal{O}_X : x \in O, O \cap C = \phi$.

Teorema c. Una función $f: X \to Y$ es continua $\Leftrightarrow f^{*}(C) \in \mathcal{C}_X, \forall C \in \mathcal{C}_Y$.

Corolario. $f: X \to Y$ biyección

f homeo $\Leftrightarrow$ (C cerrado $\Leftrightarrow f_*(C)$ cerrado).

Prop c. X esp. top. O abierto, C cerrado

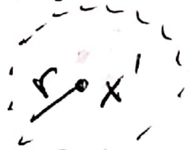
$\Rightarrow O \setminus C$ abierto, $C \setminus O$ cerrado.

Ejemplo a. Omitido

Ejemplo b. $(X,\mathcal{O})$ donde $\mathcal{O}$ es topología métrica $\Rightarrow \{x\}$ cerrado $\forall x \in X$.

Pregunta. ¿Qué ocurre cuando la topología es definida por una pseudométrica?

Dem. $(X,\mathcal{O}_d)$: $\{x\}$ cerrado



Cuando d es pseudométrica, $\exists x' \neq x$ tal que $d(x,x')=0$, luego $\forall r>0$ $\{x\}\cap B(x',r) \neq \emptyset$.

$\therefore$ d pseudométrica (que no es métrica), existen singletons no cerrados.

Ejemplo c. Omitido

Ejemplo d. Omitido.

Miscelánea. (Pág 37)

P1 Omitido

P2. Buscar condición necesaria y suficiente para que un esp. topológico finito sea metrizable.

Desarrollo. X espacio topológico finito

$(\Leftarrow)$ Si X es metrizable $\Rightarrow$ $\forall x \in X$: $\{x\}$ cerrado.

~~Sea $A \subset X$~~ $\forall A \subset X$: A es cerrado (unión finita de cerrados)

$\therefore$ $X \setminus A$ abierto , $\#(X \setminus A) = 1$

$\therefore$ X discreto

Si X es discreto, entonces podemos darle la métrica discreta. ■

P3. $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, (K, d') , d' métrica inducida por la métrica de $\mathbb{R}$. $\hat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ con la topología

$$\mathcal{O} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \{O \subset \hat{\mathbb{N}} \mid \infty \in O \text{ y } O^c \text{ finito}\}$$

Af. la función:

$$f : \hat{\mathbb{N}} \to K : x \mapsto \begin{cases} 1/n & , x \in \mathbb{N} \\ 0 & , x = \infty \end{cases}$$

es un homeomorfismo.

Dem. f biyectiva (fácil).

Sea $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $f_*(A) = \{1/n \mid n \in A\} \in \mathcal{O}_{d'}$ (casi evidente, basta ver que $B_{d'}(1/n, r) = B_d(1/n, r) \cap K$)

Si $A \in \mathcal{O}$ tal que $\infty \in A$ ($\Rightarrow A^c$ finito)

$\therefore$ A^c es finito y cerrado

$\therefore$ $f_*(A^c)$ cerrado ($A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ finito!)

luego $f_*(A^c)^c$ es abierto, y $f_*(A^c)^c = f_*(A)$
(f biyectiva)

$$\therefore f_\star : \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{d'} : O \mapsto f_*(O)$$

está bien definida

Falta demostrar que $f_\star$ biyectiva

Sean $O, U \in \mathcal{O}$: $f_\star(O) = f_\star(U) \iff f_*(O) = f_*(U)$

f biyectiva $\Rightarrow \left(f_*(O) = f_*(U) \Rightarrow f^*(f_*(O)) = f^*(f_*(U)) \right) \Rightarrow O = U$

$$\therefore f_\star \quad 1\text{-}1$$

Pd: $f_\star$ epi.

Sea $O \in \mathcal{O}_{d'}$. Pd: $\exists\, U \in \mathcal{O}$: $f_\star(U) = O \iff f_*(U) = O$

$O \in \mathcal{O}_{d'} \Rightarrow O = \bigcup \mathcal{A}'$, para algún $\mathcal{A}' \subset \mathcal{B}_{d'}$.

pero $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cap \{K\}$, donde $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_d$.

- $0 \notin O \Rightarrow O = \{1/n \,/\, n \in A\}$, algún $A \subseteq \mathbb{N}$
  $\therefore$ Tomar $U = A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- $0 \in O$: (i) $O = K$ (trivial)
  (ii) $O \subsetneq K \Rightarrow O^c$ es finito, ya que $O = \tilde{O} \cap K$, donde $\tilde{O} \in \mathcal{O}_d$. $\tilde{O}$ contiene infinitos $1/n$, $n \in \mathbb{N}$
  $\therefore O^c = \{1/n \,/\, n \in B,\ B \text{ finito}\}$

Evidente que siempre existe $U \in \mathcal{O}$, con $\infty \in U$ y U^c finito tal que $f_*(U) = O$

$\therefore f_*$ epi

Se concluye que f_* biyectiva, i.e., f es un homeomorfismo.

P4. $[a,b] \cong [c,d]$

Dem: Evidente.

Af. $[0,1) \cong [0,\infty)$

Dem. Fácil

P5. (X,d) espacio métrico, $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 \neq x_2)$
$\Rightarrow \exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}_d : x_i \in O_i$ y $O_1 \cap O_2 = \phi$

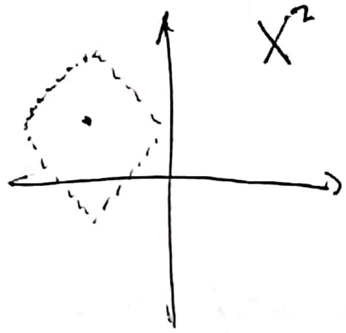
Dem. Evidente.

P6. (X,d) espacio métrico, $\tilde{d}$ métrica en $X^2 = X \times X$

$$\tilde{d}((x,y),(x',y')) = d(x,x') + d(y,y')$$

Af. $\Delta = \{(x,x) / x \in X\}$ es cerrada en la topología definida por la métrica $\tilde{d}$.

Dem. $(x,y)\in X^2$, $x\neq y$



Pd: Δ^c es abierto!

Sea $(x,y)\in \Delta^c \Rightarrow x\neq y$, $d(x,y)\neq 0$

Tomamos $r=\dfrac{d(x,y)}{2}$

Af. $B_{\tilde d}((x,y),r)\subset \Delta^c$

~~Sea~~ Dem: $(x',y')\in B_{\tilde d}((x,y),r)$

$$\Rightarrow \tilde d((x',y'),(x,y)) = d(x',x)+d(y',y) < r = \frac{d(x,y)}{2}$$

Si $(x',y')\in \Delta \Rightarrow x'=y'=\alpha$

$$\Rightarrow \quad d(x,y)\le d(x,\alpha)+d(y,\alpha) < r = \frac{d(x,y)}{2} \quad (\Rightarrow\Leftarrow)$$

$$\therefore B_{\tilde d}((x,y),r)\subset \Delta^c$$

- Supongamos que d es pseudométrica que no es métrica.

Af. $\tilde d$ es pseudométrica que no es métrica (Fácil)

Af. Δ no es cerrada

Dem. Si d pseudométrica que no es métrica, existen $x,x'\in X$, $x\neq x' \wedge d(x,x')=0$. Luego $(x,x'), (x',x')\in X^2$ son tales que $(x,x')\neq(x',x')$ y $\tilde d((x,x'),(x',x'))=0$. Ahora $\forall r>0$, $(x',x')\in B_{\tilde d}((x,x'),r)$ $\therefore$ $B_{\tilde d}((x,x'),r)\cap\Delta\neq\emptyset$

$\therefore$ Δ no puede ser cerrado

P7. Mucho espacios métricos. Se omite!

P8. X espacio topológico

Af. $H(X) = \{ h : X \to X \ / \ h \text{ homeo} \}$ es un grupo con respecto a la composición.

Dem. Trivial.

Af. Si $f : X \to Y$ homeomorfismo, entonces

$$H(f) : H(X) \to H(Y) : h \mapsto f \circ h \circ f^{-1}$$

es un isomorfismo.

Dem. $H(f)(h \circ h') = f \circ (h \circ h') \circ f^{-1} =$

$$= (f \circ h \circ f^{-1}) \circ (f \circ h' \circ f^{-1})$$

$$= H(f)(h) \circ H(f)(h')$$

$$H(f)(h^{-1}) = f \circ h^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ h \circ f^{-1})^{-1} = H(f)(h)^{-1}$$

$\therefore H(f)$ homomorfismo de grupos.

Af. $H(f)^{-1} = H(f^{-1})$

Dem. $(H(f^{-1}) \circ H(f))(h) = H(f^{-1})[H(f)(h)]$

$$= H(f^{-1})[f \circ h \circ f^{-1}]$$

$$= H(f^{-1})f \circ H(f^{-1})h \circ H(f^{-1})f^{-1}$$

$$= f^{-1} \circ f \circ f^{-1} \circ f^{-1} \circ h \circ f \circ f^{-1} \circ f^{-1} \circ f$$

$$= h$$

... etc.

Af. El converso no siempre se cumple.

P9 $\mathcal{O}$ topología euclídea en $\mathbb{R}$, definimos $X=(\mathbb{R},\tilde{\mathcal{O}})$ tal que

$$\tilde{\mathcal{O}}=\mathcal{O}\cup\{\{x\}/x\notin[0,1]\}$$

Af. $\exists f,g : X\to\mathbb{R}$ continuas tq $f+g$ no es continua.

Bases y Subbases de Topologías (pág 39)

• Bases de Topologías

Def. $(X,\mathcal{O})$ esp. top. $\mathcal{B}\subset\mathcal{O}$. $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{O}$ ssi

$$\mathcal{O}=\{O\subset X \mid \forall(x\in O)\,\exists(B\in\mathcal{B})\ x\in B\subset O\}$$

$\Leftrightarrow$ $O\in\mathcal{O}$ ssi $\forall x\in O, \exists B\in\mathcal{B} : x\in B\subset O$.

Obs. Definición anterior es análoga a la usada en la topología métrica y bolas abiertas.

Teo. a. X esp. top. $\mathcal{B}\subset\mathcal{O}_X$. $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{O}_X$ ssi

$\forall O\in\mathcal{O}_X, \exists\,\mathcal{B}_0\subset\mathcal{B} : O=\bigcup\mathcal{B}_0$

Teo. b. $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ bases de $\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_{X'}$ respectivamente, $f: X\longrightarrow X'$ función. Son equivalentes

(i) f continua

(ii) $f^*(B')\in\mathcal{O}_X, \ \forall B'\in\mathcal{B}'$

(iii) $\forall B'\in\mathcal{B}', \forall x\in f^*(B'), \exists B\in\mathcal{B} : x\in B\subset f^*(B')$

Dem. Evidente!

Caracterización de las bases

Obs. No todo $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ es base de una topología en X.
Nuestro objetivo es saber cuándo lo es...

Teorema. Sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{B}$ es base de una topología en X sii

(i) $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B} : x \in B$

(ii) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset B_1 \cap B_2$

Obs. dem. ($\Rightarrow$) trivial

($\Leftarrow$) Dados (i), (ii),

$$\mathcal{O} = \{ O \subset X \mid \forall (x \in O) \exists (B \in \mathcal{B}), x \in B \subset O \}$$

es una topología en X.

Corolario. X conjunto, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que

(i) $\bigcup \mathcal{B} = X$

(ii) $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}, \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$.

$\Rightarrow \mathcal{B}$ es base de una topología en X.

Prop. X esp. top, $\mathcal{B}$ base de su topología.

$C \subset X$ cerrado $\Leftrightarrow \forall x \notin C, \exists B \in \mathcal{B} : x \in B, B \cap C = \emptyset$

<u>Ejemplo a</u>. (X,d) espacio métrico,

$\{ B_d(x, 1/n) \mid x \in X,\ n \in \mathbb{N} \}$ $\cancel{\subset X}$

base de $\mathcal{O}_d$.

$\{ B(x, 1/n) / x \in \mathbb{Q}^m, n \in \mathbb{N} \}$ base de la topología métrica en $\mathbb{R}^m$.

<u>Dem</u>. Evidente!

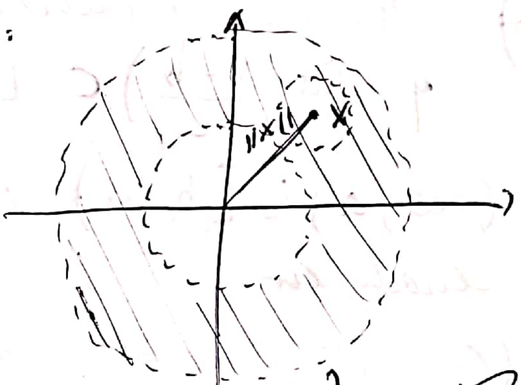
<u>Af</u>. $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} : x \mapsto \alpha \|x\|$ continua $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$ $(\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\})$

<u>Dem</u>. Sea $(a,b) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} f^*((a,b)) &= \{ x \in \mathbb{R}^m / f(x) \in (a,b) \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^m / \alpha \|x\| \in (a,b) \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^m / \|x\| \in (\tfrac{a}{\alpha}, \tfrac{b}{\alpha}) \} \end{aligned}$$

$x \in f^*((a,b)) \iff \frac{a}{\alpha} < \|x\| \wedge \|x\| < \frac{b}{\alpha}$

Gráficamente:



Si $\varepsilon = \min\{ \|x\| - \frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha} - \|x\| \}$, $\cancel{x \in B_{\mathbb{R}^m}}$

$x \in B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon) \subset f^*((a,b))$

$\therefore f^*((a,b)) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^m}$

$\therefore f$ continua.

Ejemplo b. $\{\{x\}/x\in X\}$ es base de la topología discreta en X.

Af. $\forall Y$ esp. top. $f: Y\to X$ continua $\Leftrightarrow f^*(\{x\})\in \mathcal{O}_Y \; \forall x\in X$.

Ejemplo c (Recta de Sorgenfrey)

Af. $\{[a,b)\in \mathbb{R} / a<b\}$ es base de una topología en $\mathbb{R}$.

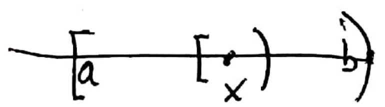
Dem. Sea $\mathcal{B}=\{[a,b)\in\mathbb{R}/a<b\}$

- Evidente que $\cup\mathcal{B}=\mathbb{R}$
- Sean $[a,b), [c,d)\in\mathcal{B}$. Si $[a,b)\cap[c,d)\neq\emptyset$

$\Rightarrow c<b$, en particular $[a,b)\cap[c,d)=[c,b)\in\mathcal{B}$.

Obs. $\mathcal{O}_l$ es la topología generada por $\mathcal{B}$. $\mathbb{R}_l=(\mathbb{R},\mathcal{O}_l)$ es la recta de Sorgenfrey.

Af. $[a,b)$ abierto y cerrado

Dem. 

tomamos el intervalo $[a,\frac{x+b}{2})\ni x$

y $[a,\frac{x+b}{2})\subset[a,b)$

~~Af?~~ Como $[a,b)^c=(-\infty,a)\cup[b,\infty)$ es abierto, entonces $[a,b)$ es cerrado ~~en~~

Af. (a,b) es abierto en $\mathcal{O}_l$

Dem. Evidente!

Af. $[a,b]$ no abierto. (Fácil)

$[a,b]^c=(-\infty,a)\cup(b,\infty)$ abierto $\Rightarrow [a,b]$ cerrado.

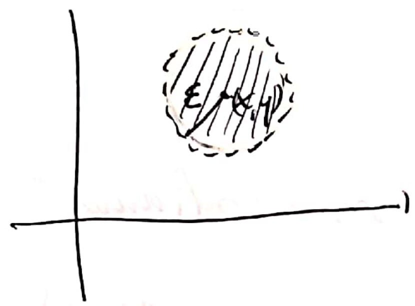
Se tiene que $id : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_\ell) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}})$ continua

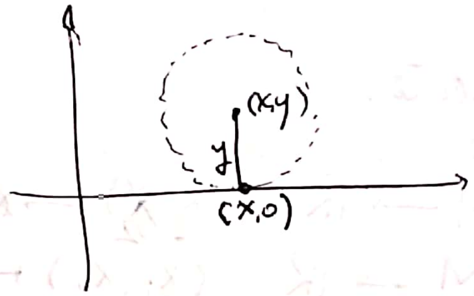
$(\mathbb{R}, \mathcal{O}_\ell) = \mathbb{R}_\ell$.

Se tiene que $id : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_\ell)$ no es continua!

Ejemplo d (Plano de Moore)

$\mathbb{M}$ plano de Moore, $|\mathbb{M}| = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\} = \mathbb{R} \times [0,\infty)$ cuya topología tiene como base a las bolas del tipo





Af. Para $A \subset \mathbb{R}$, $A \times \{0\}$ cerrado en $\mathbb{M}$.

Dem. $(A \times \{0\})^c \cancel{\neq (A^c \times [0,\infty)) \cup}$

$$= \underbrace{(\mathbb{R} \times (0,\infty))}_{\text{abierto}} \cup \underbrace{(A^c \times [0,\infty))}_{\text{abierto}} \quad (\text{fácil})$$

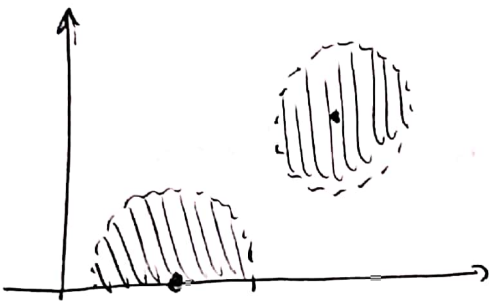
$\therefore$ $A \times \{0\}$ cerrado en $\mathbb{M}$.

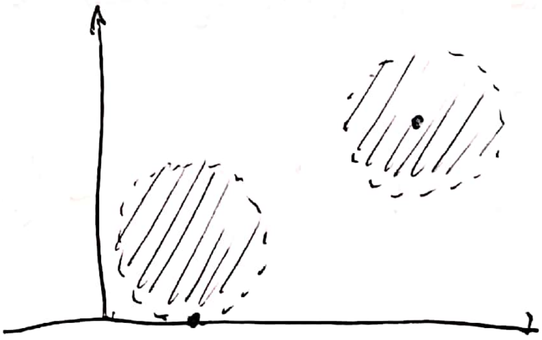
Af. Si $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$ con la topología definida por la métrica inducida, entonces

$$id : X \to \mathbb{M}, \quad id : \mathbb{M} \to X$$

no son continuas.

Dem.





Evidente que $id : \mathbb{M} \to X$ no es continua

¿pero $id : X \to \mathbb{M}$? ... (averiguar)

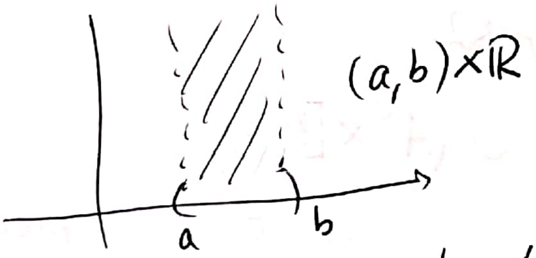
Af. $X \not\cong \mathbb{M}$

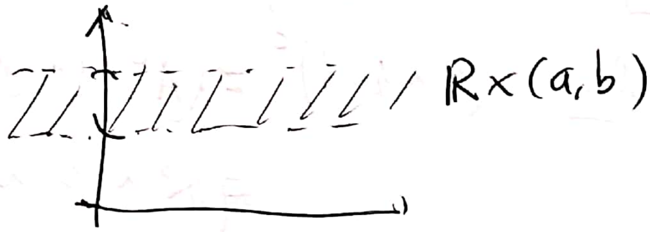
Dem. Pendiente.

Af. $\pi_1 : \mathbb{M} \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto x_1$ son continuas

$\pi_2 : \mathbb{M} \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto x_2$

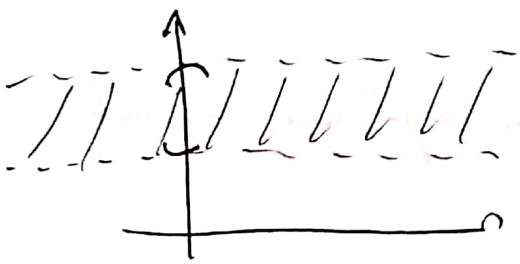
Dem. $\pi_1^*((a,b)) = (a,b) \times \mathbb{R}$ abierto en $\mathbb{M}$ (fácil)

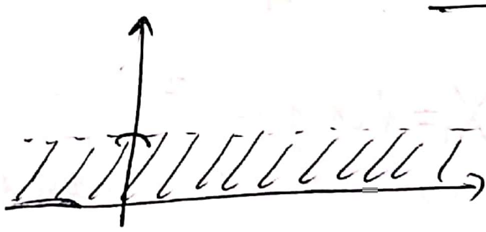




$\pi_2^*(a,b) = \mathbb{R} \times (a,b)$ abierto en $\mathbb{M}$

2º posibilidad





Ejemplo e. (Recta lazada)

La recta lazada es el conjunto $\mathbb{R}$ con topología definida por la base

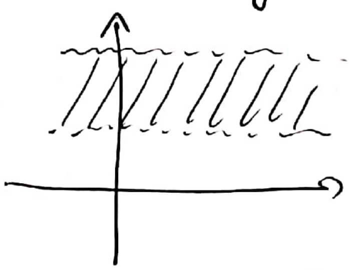
$$\{(a,b) / 0 \notin (a,b)\} \cup \{(-\infty,-n) \cup (-\varepsilon,\varepsilon) \cup (n,\infty) / \varepsilon>0,\ n\in\mathbb{N}\}$$

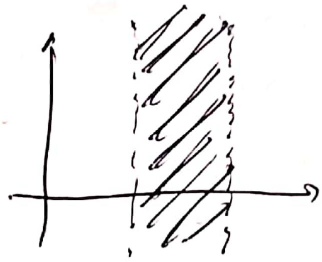
Af. $id : \mathbb{R} \to L$ es continua, $id : L \to \mathbb{R}$ no es continua, donde L es la recta lazada.

Dem. Fácil

Ejemplo f. (Plano rasurado) Omitido por el momento.

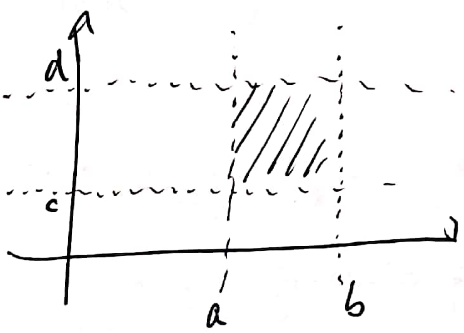
Ejemplo g. $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}$ conjunto cuyos elementos son de la forma $(a,b)\times\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}\times(a,b)$





Af. $\mathcal{O} = \{O \subset X / \forall (x\in O)\ \exists (B\in\mathcal{B}) : x\in B\subset O\}$ no es una topología.

Dem. Falla el caso de la intersección finita



$$((a,b)\times\mathbb{R}) \cap (\mathbb{R}\times(c,d)) = (a,b)\times(c,d)$$

el cual no es abierto en $\mathcal{O}$.

$\therefore\ \mathcal{B}$ no puede ser base de una topología.

Ejemplo h (Espacios topológicos ordenados)

- Definición de orden total ✓
- Intervalos
- Bases para estos espacios

$(X, <)$ totalmente ordenado. La topología del orden en X es la generada por

$\mathcal{B} = \{(a,b) / a,b \in X\}$

Cuando X tiene primer, último o ambos elementos se agregan los intervalos $[m, b)$, $(a, M]$

Ejemplo i. top en $\mathbb{R}$ = top del orden

Ejemplo j. Omitido

Ejemplo k Omitido

Comparación de bases

- Pendiente.

Subbase de una topología (pág 47)

Dado $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$, no siempre $\mathcal{S}$ es base de una topología para X; pero podemos construir una base a partir de $\mathcal{S}$.

Proposición a. Sea $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$

$$\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{A} \,/\, \mathcal{A} \subset \mathcal{S} \text{ finito}\}$$

es base de una topología ~~de~~ en X.

Def. La topología generada por $\mathcal{B}$, digamos $\mathcal{O}$, se llama topología generada por $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ es subbase de $\mathcal{O}$)

- $\mathcal{O}$ consta de uniones e intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$

Proposición b. X conjunto y $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces $\mathcal{O}$ generado por $\mathcal{S}$ es la topología más pequeña en X que contiene a $\mathcal{S}$

Corolario $\mathcal{O} = \bigcap\limits_{\substack{\mathcal{S} \subset \mathcal{U} \\ \mathcal{U} \text{ top en } X}} \mathcal{U}$.

Proposición c. X, Y espacios topológicos, $f: X \to Y$ función, $\mathcal{S}$ subbase de Y. Son equivalentes

(i) f continua

(ii) $f^*(S) \in \mathcal{O}_X \quad \forall S \in \mathcal{S}$

(iii) La topología generada por $\{f^*(S) / S \in \mathcal{S}\}$ es más pequeña que $\mathcal{O}_X$.

Ejemplo a. Es fácil determinar la topología en $\mathbb{R}$ generada por

$$S' = \{(-\infty, b) / b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) / a \in \mathbb{R}\}$$

Desarrollo. Si $a < b \Rightarrow (-\infty, b) \cap (a, \infty) = (a, b)$

(a, b) intervalo abierto

$\therefore$ S genera topología métrica de $\mathbb{R}$.

Ejemplo. $\mathcal{B} = \{(a,b) / a<b ; a,b \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{B}' = \{(a,b) / a<b ; a,b \in \mathbb{Q}\}$

Af. $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ definen la misma topología.

Dem. Trivial.

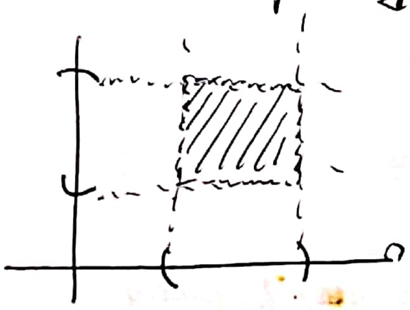
Af. No pasa lo mismo si cambiamos a los intervalos de la forma $[a, b)$.

Dem. Casi evidente.

Ejemplo. El conjunto

$$S = \{(a,b) \times \mathbb{R} / a,b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R} \times (a,b) / a,b \in \mathbb{R}\}$$

No es base de una topología ~~, pero es~~ en $\mathbb{R}^2$, pero es subbase de la topología métrica en $\mathbb{R}^2$.



Basta ver que se puede conseguir un cuadrado. con eso es suficiente! $\blacksquare$

Ejemplo d. X espacio topológico y $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{F}$ es una base de cerrados de X ssi $\mathcal{B} = \{F^c / F \in \mathcal{F}\}$ es una base de la topología de X.

Miscelánea. (Pág 49)

P1. Los siguientes subconjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ son bases de topologías de $\mathbb{R}$

(i) $\mathcal{B}_1 = \{(a,b) / a<b\}$ (Fácil)

(ii) $\mathcal{B}_2 = \{[a,b) / a<b\}$ (Fácil)

(iii) $\mathcal{B}_3 = \{(a,b] / a<b\}$ (Fácil)

(iv) $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_1 \cup \{B \setminus K \mid B \in \mathcal{B}_1\}$, donde $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Dem. $\bigcup \mathcal{B}_4 = \mathbb{R}$

Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_1 \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}_1 \quad \therefore \quad B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}_4$

Si $B_1 ; B_2 \in \{B \setminus K / B \in \mathcal{B}_1\}$

$\Rightarrow B_1 = \overline{B}_1 \setminus K \quad , \quad B_2 = \overline{B}_2 \setminus K$

$B_1 \cap B_2 = (\overline{B}_1 \setminus K) \cap (\overline{B}_2 \setminus K) = (\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2) \setminus K$

$\therefore \quad B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}_4$

Si $B_1 \in \mathcal{B}_1$, $B_2 \in \{B \setminus K / B \in \mathcal{B}_1\}$

$\Rightarrow B_2 = \overline{B}_2 \setminus K$

$\therefore \; B_1 \cap B_2 = \overline{B}_1 \cap (\overline{B}_2 \setminus K)$

(v) $\mathcal{B}_5 = \{(a,\infty) / a \in \mathbb{R}\}$ (fácil)

(vi) $\mathcal{B}_6 = \{(-\infty, b) / b \in \mathbb{R}\}$ (fácil)

(vii) $\mathcal{B}_7 = \{B \subset \mathbb{R} / B^c \text{ finito}\}$

Dem. Evidente que $\cup \mathcal{B}_7 = \mathbb{R}$

$B_1, B_2 \in \mathcal{B}_7 \Rightarrow B_1^c, B_2^c$ finitos $\Rightarrow B_1^c \cup B_2^c = (B_1 \cap B_2)^c$ finito $\Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}_7$.

Obs. $\mathcal{B}_5 \cup \mathcal{B}_6$ no es base de una topología, pero es subbase de $\mathbb{R}$, ya que a partir de $\mathcal{B}_5 \cup \mathcal{B}_6$ se obtiene $\mathcal{B}_1$.

P2. (X,d) espacio métrico.

$O \in \mathcal{O}_d \iff \forall x_0 \in O, \exists r>0 : \{x \in X / d(x_0, x) \leq r\} \subseteq O$

Dem. Evidente.

- $\{\{x \in X / d(x_0,x) \leq r\} / x_0 \in X, r>0\}$ es base para la topología métrica

Dem. Evidente ya que $\{x \in X / d(x_0, x) \leq r\}$ no son abiertos.

P3. X, Y espacios topológicos ordenados (orden total).

$f: X \to Y$ preserva órdenes $\iff f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1 < x_2$

Af. Si f biyectiva y preserva órdenes $\Rightarrow f$ homeomorfismo.

Dem. ~~Por simplicidad supongamos que X e Y no tienen ni primer ni último elemento~~

Afirmamos que si f preserva orden y es biyectiva $\Rightarrow f^{-1}$ debe preservar orden (se demuestra fácil por reducción al absurdo)

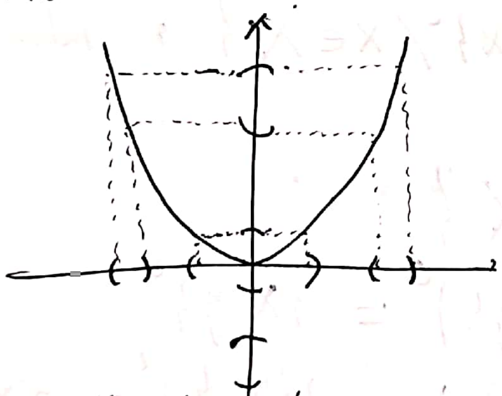
Con lo anterior, es fácil chequear $f_*(a,b) = (f(a), f(b))$, $f_*^{-1}(a,b) = (f^{-1}(a), f^{-1}(b))$

$\therefore f^{-1}, f$ continuas ∎

Obs. • ¿Se cumple el recíproco? (Queda pendiente)

P4. Para demostrar que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$ es continua basta comprobar que si I es un intervalo abierto acotado, entonces $f^*(I)$ es unión de a lo más dos intervalos abiertos.

Dem. Evidente que la condición implica la continuidad de f.
~~Ahora~~ Por otro lado:



← Queda claro por dibujo que $f^*(I)$ es unión de a lo más 2 intervalos abiertos.

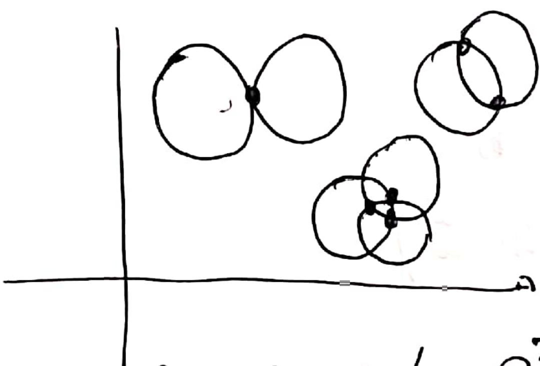
ξ

- $(a,b) \subset \mathbb{R}^- \Rightarrow f^*(a,b) = \emptyset$
- $0 \in (a,b) \subset \mathbb{R} \Rightarrow f^*(a,b) = (-\sqrt{b}, \sqrt{b})$
- $0 \notin (a,b) \subset \mathbb{R}^+ \Rightarrow f^*(a,b) = (-\sqrt{b}, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, \sqrt{b})$ ∎

Ocupar resultado anterior para demostrar la continuidad de
$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto x+y \ ; \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto xy .$$

Dem. Pendiente.

P5, ¿Cuál es la topología generada por el conjunto de todos los círculos de $\mathbb{R}^2$?



Tenemos que
$\mathcal{B} = \{ \bigcap \mathcal{A} \,/\, \mathcal{A} \subset \mathcal{S} \}$, donde
$\mathcal{S}$ es el conjunto de círculos de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \{ \{x_1\} / x_1 \in \mathbb{R}^2 \} \cup \{ \{x_1, x_2\} / x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \} \cup \dots$$
$\mathcal{B} = \bigcup \tilde{\mathcal{A}}$, donde $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ contiene subconjuntos finitos de $\mathbb{R}^2$

$\therefore$ $\mathcal{S}$ genera la topología discreta de $\mathbb{R}^2$

P6, X conjunto, entonces $\{ \{x\}^c / x \in X \}$ es subbase de una topología conocida.

Desarrollo $\mathcal{S} = \{ \{x\}^c / x \in X \}$
$$\{x\}^c \cap \{y\}^c = (\{x\} \cup \{y\})^c = \{x, y\}^c$$
$$\{x_1\}^c \cap \dots \cap \{x_n\}^c = (\{x_1\} \cup \dots \cup \{x_n\})^c = \{x_1, \dots, x_n\}^c$$

$\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ finito $\Rightarrow \mathcal{A} = \{ \{x_1\}^c, \dots, \{x_n\}^c \}$
$\bigcap \mathcal{A} = \{x_1, \dots, x_n\}^c \quad \therefore \mathcal{B} = \{ \bigcap \mathcal{A} / \mathcal{A} \subset \mathcal{S} \text{ finito} \}$ implica

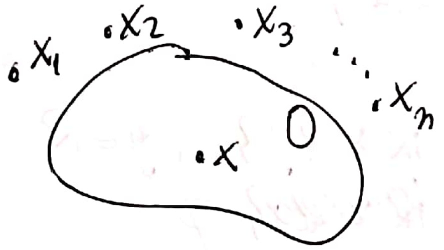
$\mathcal{B} = \{ \{x_1, \dots, x_n\}^c \ / \ x_i \in X \ , \ n \in \mathbb{N} \}$

Afirmación: $\mathcal{B}$ es base de la topología cofinita en X, o sea

$\mathcal{O} = \{\phi\} \cup \{ A \subset X \ / \ A^c \text{ finito} \}$

En efecto, $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$. ~~Dado~~

Dado $O \in \mathcal{O}$, $x \in O$. $O \in \mathcal{O} \Rightarrow O^c$ finito $\Rightarrow O^c = \{x_1, \dots, x_n\}$



$B = \{x_1, \dots, x_n\}^c = O$, $B \cup O = X$

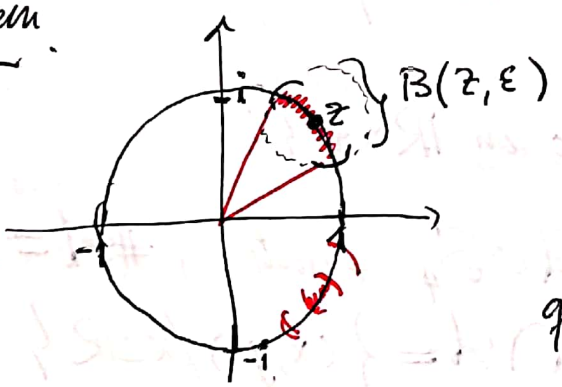
$x \in B \subset O$

P7. Si $\mathbb{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1 \}$, para cada $z \in \mathbb{S}^1$, $0 < \varepsilon$

$$B(z;\varepsilon) = \{ w \in \mathbb{S}^1 \ / \ |z - w| < \varepsilon \}$$

entonces el conjunto $\mathcal{B} = \{ B(z;\varepsilon) \ / \ z \in \mathbb{S}^1 \ , \ 0 < \varepsilon < 1$ es base de una topología

Dem.



- $\bigcup \mathcal{B} = \mathbb{S}^1$ (evidente)
- Dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, suponiendo que $B_1 \cap B_2 = \phi$. Es evidente que si B_1 es un trozo de arco al igual que $B_2 \Rightarrow B_1 \cap B_2$ es un trozo de arco.

Af. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ es continua.

Si $B(z;\varepsilon) \in \mathcal{B} \Rightarrow B(z,\varepsilon) = \{ (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) \ / \ t \in I \}$

$f^*(B(z;\varepsilon)) = I$ (comprobar esto...)

$\therefore f$ continua.

P8 Omitido

P9 X espacio topológico discreto, es interesante encontrar una subbase que ~~contiene~~ no contiene conjuntos de la forma $\{x\}$.

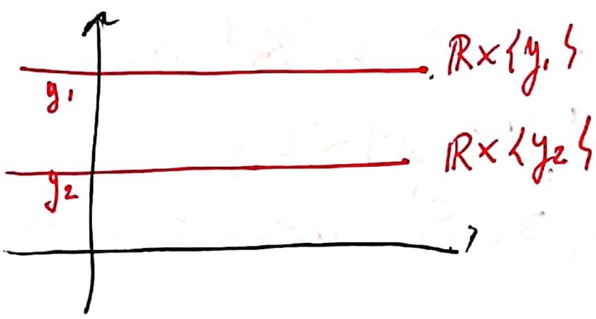
– Omitido

P10 Determinar topologías en $\mathbb{R}^2$ generadas por los conjuntos

$\cancel{S_4}$ $S_1 = \{ L \subset \mathbb{R}^2 \,/\, L \text{ recta} \}$ (Discreta)

$S_2 = \{ \mathbb{R} \times \{y\} \,/\, y \in \mathbb{R} \}$

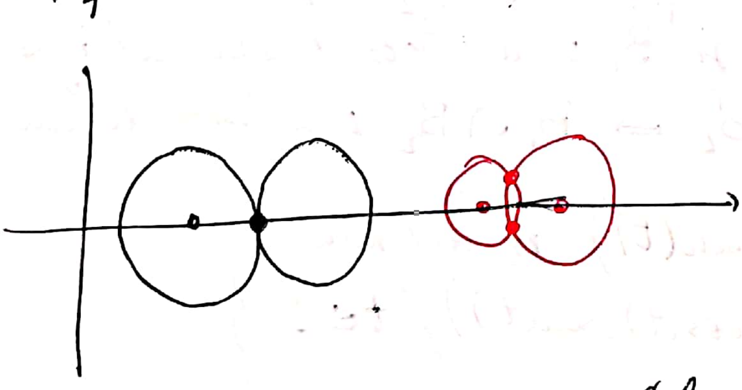
Sea $A \subset S_2$ finito $\Rightarrow \bigcap A = \begin{cases} \mathbb{R} \times \{y\}, & y \in \mathbb{R} \\ \emptyset \end{cases}$



$\therefore \langle S_2 \rangle = \mathbb{R} \times A \;, \quad A \subset \mathbb{R}$

$S_3 = \{ C \subset \mathbb{R}^2 \,/\, C \text{ círculo} \}$ (ya visto en problema anterior)

$S_4 = \{ C \subset \mathbb{R}^2 \,/\, C \text{ círculo con centro en } \mathbb{R} \times \{0\} \}$



$A \subset S_4$ finito, $\#A = 2$

$\Rightarrow \bigcap A = \{ (x,0) \,/\, x \in \mathbb{R} \}$

ó $\{ (x,y), (x,-y) \}$

ó $\emptyset$

(al parecer esa condición se cumple $\forall A$)

$\therefore \langle S_4 \rangle = \{ \text{conjuntos de } \mathbb{R}^2 \text{ con simetría en el eje } x \}$

Interior, clausura, Frontera. (pág 51)

Def. Dado $A \subset X$, X espacio topológico,

$$int(A) = \{x \in X / \exists (O \in \mathcal{O}_X)\ x \in O \subset A\}$$
$$= \{x \in X / \exists (O \in \mathcal{O}_A)\ x \in O\}$$

donde $\mathcal{O}_A = \{O \in \mathcal{O}_X / O \subset A\}$

Teorema a. (i) $int(A) = \bigcup \mathcal{O}_A$

(ii) $O \subset int(A) \in \mathcal{O}_X$ para todo $O \in \mathcal{O}_A$

Teorema b. X espacio topológico, entonces

(i) $int(A) \subset A$

(ii) $int(\phi) = \phi$, $int(X) = X$

(iii) $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$

(iv) $A \in \mathcal{O}_X \Leftrightarrow int(A) = A$

(v) $int(int(A)) = int(A)$

(vi) $int(A) \cup int(B) \subset int(A \cup B)$

(vii) $A \subset B \subset X \Rightarrow int(A) \subset int(B)$

Ejemplo a. X espacio topológico: X discreto $\Leftrightarrow int_X(A) = A$ $\forall A \subset X$.

Dem. Evidente.

X indiscreto $\Leftrightarrow$ $int_X(A)=\phi \quad \forall A \neq X$, $int_X(X)=X$.

Ejemplo b.

Af. $int_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = int_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^c) = \phi$

Dem. Evidente

Notar que
$$
\begin{aligned}
int_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) \cup int_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^c) &= \phi \\
&\neq \mathbb{R} \\
&= int_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \\
&= int_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c)
\end{aligned}
$$

Ejemplo c. $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ continua $\Rightarrow int_{\mathbb{R}^{m+n}}(\Gamma f) = \phi$

• Caracterización de Continuidad con Interior (Pág 55)

Teorema a. ~~[illegible]~~ X, Y espacios topológicos.

$$f: X \to Y \text{ continua} \iff f^* \circ int_Y \subset int_X \circ f^*$$

Teorema b. $f: X \to Y$ biyección. Son equivalentes

(i) f homeomorfismo

(ii) $f^* \circ int_Y = int_X \circ f^*$

(iii) $f_* \circ int_X = int_Y \circ f^*$

• Caracterización de una topología usando interior (pág 57).

Teorema. $i: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tal que

- $i(X) = X$
- $i(A) \subset A \quad \forall A \subset X$
- $i(i(A)) = i(A) \quad \forall A \subset X$
- $i(A \cap B) = i(A) \cap i(B) \quad \forall A, B \subset X$

Entonces existe una única topología $\mathcal{O}$ en X tal que $i = int_{\mathcal{O}}$.

Dem. Como se sabe que A es abierto ssi $int(A) = A$, luego la única definición posible es

$$\mathcal{O} = \{ O \subset X / i(O) = O \}$$

<u>Ejemplo a.</u> X conjunto, Y espacio topológico, $f: X \longrightarrow Y$ biyectiva.

<u>Af.</u> $i: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X) : A \longmapsto f^*(int(f_*(A)))$ es un operador interior

<u>Dem.</u> • $i(X) = f^*(int(f(X))) = f^*(int\, Y)$ $(f(X) = Y)$

$= f^*(Y)$ (Y abierto en $\mathcal{O}_Y$)

$= X$

• $i(A) = f^*(int(f_*(A))) \subset f^*(f_*(A)) = A$

• ~~idem~~ $i(i(A)) = i(f^*(int(f_*(A))))$

$= f^*(int(f_*(f^*(int(f_*(A))))))$

$= f^*(int(int(f_*(A))))$

$= f^*(int(f_*(A))) = i(A)$

• $i(A \cap B) = f^*(int(f_*(A \cap B)))$

$= f^*(int(f_*(A) \cap f_*(B)))$

$= f^*(int(f_*(A)) \cap int(f_*(B)))$

$= f^*(int(f_*(A))) \cap f^*(int(f_*(B)))$

$= i(A) \cap i(B)$.

$\therefore$ i es un operador interior y define una topología en X tal que $int_{\mathcal{O}} = i$

~~Den~~ Denotamos por $\mathcal{O}_f$ la topología definida por i.

Af. $f:(X,\mathcal{O}_f)\longrightarrow Y$ es un homeomorfismo.

Dem.

Sea $B\subset Y$, $(int_X\circ f^*)(B)=int_X(f^*(B))$

$$= i(f^*(B))$$
$$= f^*(int(f_*(f^*(B))))$$
$$= f^*(int(B))$$
$$=(f^*\circ int_Y)(B)$$

$\therefore\ \forall B\in Y:\ int_X\circ f^* = f^*\circ int_Y$

$\therefore$ f es un homeomorfismo.

Ejemplo 6. X conjunto, $X_0\subset X$

Af. $i:\mathcal{P}(X)\longrightarrow\mathcal{P}(X):A\longmapsto\begin{cases}X & ; A=X\\ A\cap X_0 & , A\neq X\end{cases}$

es un operador interior.

Dem. • $i(X)=X$ (por definición)

• $i(A)=X$ si $A=X$ y $i(A)\subset A$

Si $A\neq X$: $i(A)=A\cap X_0\subset A$

• Si $A=X$, $i(A)=i(X)=X$ $\therefore$ $i(i(A))=i(X)=X$

Si $A\neq X$, $i(i(A))=i(A\cap X_0)=A\cap X_0\cap X_0$

$$=A\cap X_0=i(A).$$

• $i(A\cap B)=(A\cap B)\cap X_0=(A\cap B)\cap(X_0\cap X_0)$

$$=(A\cap X_0)\cap(B\cap X_0)=i(A)\cap i(B).$$

$\therefore$ i es un operador interior y define una topología $\mathcal{O}$ en X tal que $i=int_{\mathcal{O}}$

Af. Si $\mathcal{O}_i$ es la topología definida por i,

$$\mathcal{O}_i = \{ O \subset X \mid X_0 \subset O \}$$

Dem. Recordemos que $\mathcal{O}_i = \{ O \subset X \mid i(O) = O \}$

$$O \in \mathcal{O}_i \Leftrightarrow i(O) = O$$

$$\Leftrightarrow O = X \text{ ó } O \cap X_0 = O \quad (\text{def. de } i)$$

$$\Leftrightarrow O = X \text{ ó } O \subset X_0$$

$$\therefore \mathcal{O}_i = \{X\} \cup \{ O \subset X \mid O \subset X_0 \}$$ (Averiguar si hay error!)

Ejemplo c. X conjunto infinito y $x_0 \in X$.

$$i : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X) \;:\; i(A) = \begin{cases} A, & \text{si } A^c \text{ finito} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{si } A^c \text{ es infinito} \end{cases}$$

Af. i define un operador interior

- $i(X) = X$ ya que $X^c = \phi$ finito.
- Sea A^c finito : $i(A) = A$ ~~es i~~
  Sea A^c infinito : $i(A) = A \setminus \{x_0\} \subset A$

$$\therefore \forall A \subset X : i(A) \subset A$$

- Sea A^c finito : $i(A) = A \therefore i(i(A)) = i(A)$
  Sea A^c infinito : $i(A) = A \setminus \{x_0\}$ ~~finito~~

~~$\therefore (A \setminus \{x_0\})^c$ infinito~~

~~$\therefore i(i(A \setminus \{x_0\})) =$~~

~~$i(i(A)) = i(A \setminus \{x_0\}) = A \setminus \{x_0\}$~~

Si $A\setminus\{x_0\}$ es finito, $i(A\setminus\{x_0\}) = A\setminus\{x_0\}$

Si $A\setminus\{x_0\}$ es infinito,

$$\Rightarrow \begin{cases} (A\setminus\{x_0\})^c \text{ finito} \\ (A\setminus\{x_0\})^c \text{ infinito.} \end{cases}$$

$$i(A\setminus\{x_0\}) = A\setminus\{x_0\} \quad \text{o} \quad i(A\setminus\{x_0\}) = (A\setminus\{x_0\})\setminus\{x_0\}$$
$$= A\setminus\{x_0\}.$$

$$\therefore \; i(i(A)) = i(A)$$

- $$i(A\cap B) = \begin{cases} A\cap B & , (A\cap B)^c \text{ finito} \\ (A\cap B)\setminus\{x_0\} & , (A\cap B)^c \text{ infinito.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} A\cap B \\ (A\setminus\{x_0\})\cap(B\setminus\{x_0\}) \end{cases}$$

$$\therefore \; i(A\cap B) = i(A)\cap i(B)$$ (Ordenar después!)

(No es la mejor manera de hacerlo)

¿Qué topología define $\mathcal{O}_i$?

$$\mathcal{O}_i = \{O\subset X \,/\, i(O) = O\}$$

$$O\in\mathcal{O}_i \iff i(O) = O$$

Si O^c finito, $i(O) = O$

Si O^c infinito, $i(O) = O\setminus\{x_0\} = O \quad \therefore \; x_0\notin O$

$\therefore \; \cancel{x_0\notin} \; x_0\in O^c$)

$$\mathcal{O}_i = \{O\subset X \,/\, O^c \text{ finito}\} \cup \{O\subset X \,/\, O^c \text{ infinito},\; x_0\notin O\}$$

• Clausura de un conjunto. (Pág 59)

Def. X esp. topológico, $A \subset X$. $x \in X$ es adherente a A ssi $O \cap A \neq \emptyset$ $\forall O \in \mathcal{O}_x$ tal que $x \in O$.

$$cls(A) = \{x \in X / x \text{ es adherente a } A\}$$

Lema. (i) $\mathcal{C}^A = (\mathcal{O}_{A^c})^c$, $\mathcal{O}_A = (\mathcal{C}^{A^c})^c$

(ii) $cls(A) = \{x \in X / \forall (C \in \mathcal{C}^A)\ x \in C\}$.

(iii) $cls(A)^c = int(A^c)$

(iv) $int(A)^c = cls(A^c)$

Ejemplo a. X espacio topológico discreto $\Leftrightarrow cls_X(A) = A \quad \forall A \subset X$

X esp. indiscreto $\Leftrightarrow cls_X(A) = X \quad \forall A \neq \emptyset$ y $cls_X(\emptyset) = \emptyset$.

Ejemplo b. Omitido

Ejemplo c. Omitido.

• Caracterización de la continuidad usando frontera

Teorema a. $f: X \to Y$ función

$$f \text{ continua} \iff cls_X \circ f^* \subset f^* \circ cls_Y$$

Teorema b. X, Y espacios topológicos, $f: X \to Y$ biyección.

Son equivalentes:

(i) f es un homeomorfismo.

(ii) $f^* \circ cls_Y = cls_X \circ f^*$

(iii) $f_* \circ cls_X = cls_Y \circ f_*$

• Caracterización de una topología usando operadores clausura (pág 65)

Teorema. Sea $c: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tal que:

- $c(\emptyset) = \emptyset$
- $A \subset c(A) \quad \forall A \subset X$
- $c(c(A)) = c(A)$
- $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B) \quad \forall A, B \in X$

entonces existe única topología $\mathcal{O}$ tal que $c = cls_{\mathcal{O}}$.

Ejemplo a. Si $\hat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la función

$$c : \mathcal{P}(\hat{\mathbb{N}}) \to \mathcal{P}(\hat{\mathbb{N}}) \ : \ A \longmapsto \begin{cases} A & \text{, si } A \text{ es finito} \\ A \cup \{\infty\} & \text{, si } A \text{ es infinito} \end{cases}$$

es un operador clausura q̃ define una topología conocida

Dem. • Como ϕ es finito, $c(\phi) = \phi$

• Si A es finito: $c(A) = A \quad \therefore c(A) \supset A$

Si A es infinito: $c(A) = A \cup \{\infty\} \supset A$

$$\therefore A \subset c(A) \quad \forall A \subset X.$$

• A finito, $c(A) = A \quad \therefore c(c(A)) = c(A)$

A infinito, $c(A) = A \cup \{\infty\}$

Como $A \cup \{\infty\}$ infinito, $c(A \cup \{\infty\}) = A \cup \{\infty\} \cup \{\infty\}$
$= A \cup \{\infty\} = c(A)$.

$$\therefore c(c(A)) = c(A)$$

• Sean A, B finitos: $c(A \cup B) = A \cup B = c(A) \cup c(B)$

Sea A infinito $\Rightarrow A \cup B$ infinito

$\therefore c(A \cup B) = A \cup B \cup \{\infty\}$ → $A \cup \{\infty\} \cup B = c(A) \cup c(B)$ cuando B finito.

→ $A \cup \{\infty\} \cup B \cup \{\infty\}$
$= c(A) \cup c(B)$ cuando B es infinito.

$\therefore$ c define una topología tal que $c = cls_{\mathcal{O}}$. Además,

$\mathcal{C}_{\mathcal{O}} = \{C \subset \hat{\mathbb{N}} \ / \ c(C) = C\}$

Describamos $\mathcal{C}$.

$$C \in \mathcal{C} \iff c(C) = C$$

- C finito: $c(C) = C$

  C infinito, $c(C) = C \cup \{\infty\}$.

$$\therefore \; c(C) = C \iff C \cup \{\infty\} = C$$
$$\iff \infty \in C$$

$\therefore \; \mathcal{C} = \{C \subset \hat{\mathbb{N}} / C \text{ finito}\} \cup \{C \subset \hat{\mathbb{N}} / C \text{ infinito}, \infty \in C\}$

Recordemos que $\mathcal{O} = \mathcal{C}^c$. Con un poco de trabajo se puede ver que $\mathcal{O} = \mathcal{C}^c = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \{O \subset \hat{\mathbb{N}} / \infty \in O, \; O^c \text{ finito}\}$

Ejemplo c. (Omitido)

• Conjuntos Densos (pág 67)

Def. X esp. topológico. $D \subset X$ es denso ssi $cls(D) = X$

Af. $D \subset X$ denso $\iff$ $int(D^c) = \phi$.

Proposición a. X espacio topológico, $D \subset X$. Son equivalentes

(i) D es denso

(ii) X es el único cerrado de X que contiene a D

(iii) $O \cap D \neq \phi$ para todo conjunto $\phi \neq O \in \mathcal{O}_X$.

Prop b. X esp. topológico, $D \subset X$ denso. $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continuos tales que $f|_D = g|_D$. Entonces $f = g$

Dem. Pendiente.

Proposición c. Sea X esp. topológico. $D, O \subset X$, D denso, $O \in \mathcal{O}_X$.

$$cls(O) = cls(O \cap D)$$

Dem. Claramente $cls(O \cap D) \subset cls(O)$

Supongamos que $x \in cls(O)$, $U \in \mathcal{O}(x)$. Como $U \cap O \in \mathcal{O}_X$ y D denso:

$$U \cap O \cap D \neq \phi$$

$$\therefore \quad x \in cls(O \cap D). \quad \square$$

No se cumple si O no es abierto. Por ejemplo

$cls_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R} = cls_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^c)$, $cls_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c) = \phi$

Ejemplo a. Si $\hat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ con la topología

$$\mathcal{O}_{\hat{\mathbb{N}}} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \{ O \subset \hat{\mathbb{N}} \,/\, \infty \in O,\ O^c \text{ finito} \},$$

entonces $\mathbb{N}$ es denso en $\hat{\mathbb{N}}$.

Dem. Si $O \in \mathcal{O}_{\hat{\mathbb{N}}}$, entonces es evidente que $O \cap \mathbb{N} \neq \phi$, independiente si $\infty \in O$ o no (cuando $\infty \notin O \Rightarrow O \subset \mathbb{N}$. Si $\infty \in O \Rightarrow O$ infinito $\Rightarrow$ $O \setminus \{\infty\} \subset \mathbb{N}$)

$\therefore$ $\mathbb{N}$ denso en $\hat{\mathbb{N}}$.

Ejemplo b. X espacio discreto. $D \subset X$ denso $\Leftrightarrow$ $D = X$.

Dem. Evidente.

Ejemplo c. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^c$ son densos en la recta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_\ell$.

Dem. Evidente.

Ejemplo d. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y > 0\}$ denso en el plano de Moore $\mathbb{M}$.

Ejemplo e. Omitido

Ejemplo f. Omitido.

• <u>Puntos de acumulación</u> (pág 69)

(Pendiente)...

• <u>Frontera</u> (pág 71)

<u>Def.</u> X espacio topológico, $A \subset X$.

$$fr(A) = cls(A) \cap cls(A^c)$$

Veamos a continuación algunas de sus propiedades

<u>Teorema</u>. X espacio topológico. $A, B \subset X$

(i) $x \in fr(A) \iff \forall O \in \mathcal{O}(x) : O \cap A \neq \emptyset \neq A^c \cap O$

(ii) $fr(A) = cls(A) \setminus int(A)$

(iii) $cls(A) = A \cup fr(A) = int(A) \cup fr(A)$ (unión disjunta)

(iv) $X = int(A) \cup fr(A) \cup int(A^c)$ (unión disjunta)

(v) $fr(\emptyset) = \emptyset = fr(X)$

(vi) $fr(fr(A)) \subset fr(A)$ (En general, no hay igualdad)

(vii) $fr(A) \cap int(A) = \emptyset$

(viii) $fr(A) = fr(A^c)$

(ix) $A \cap B \cap fr(A \cap B) = A \cap B \cap (fr(A) \cup fr(B))$

Dem

(i) $x \in fr(A) \iff x \in cls(A) \wedge x \in cls(A^c)$

$\iff \forall O \in \mathcal{O}(x) : A \cap O \wedge A^c \cap O \neq \emptyset$

(ii) $fr(A) = cls(A) \cap cls(A^c) = cls(A) \cap int(A)^c$

$= cls(A) \setminus int(A)$

(iii) $\cancel{fr(A) = cls(A) \cap cls(A^c) \Rightarrow fr(A) \subset cls(A)}$

~~Además~~ $\cancel{A \subset cls(A) \therefore fr(A) \cup A \subset cls(A) \cup A = cls(A)}$

$\cancel{x \in cls(A) \Rightarrow \forall O \in \mathcal{O}(x) : O \cap A \neq \emptyset}$

[illegible]

$fr(A) = cls(A) \cap cls(A^c) \Rightarrow fr(A) \cup A = (cls(A) \cap cls(A^c)) \cup A$

$\Rightarrow fr(A) \cup A = (cls(A) \cup A) \cap (cls(A^c) \cup A)$

$= (cls(A) \cup A) \cap X$

$= cls(A) \cup A$

$= cls(A)$

Por demostrar que $cls(A) = int(A) \dot{\cup} fr(A)$.

Se tiene que $int(A) \cup fr(A) \subset A \cup fr(A) = cls(A)$

$\therefore int(A) \cup fr(A) \subset cls(A)$

Sea $x \in cls(A)$ $(\Rightarrow \forall O \in \mathcal{O}(x) : A \cap O \neq \emptyset)$

Si $x \notin fr(A) \Rightarrow x \in A$ y $x \notin A^c$

Como $x \notin cls(A^c) \Rightarrow \exists O \in \mathcal{O}(x) : O \cap A^c = \emptyset$

$\therefore O \in \mathcal{O}(x) \wedge O \subset A$

$\therefore x \in int(A)$

(iv) Omitido

⋮

etc.

Ejemplo a. $fr_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = fr_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^c) = \mathbb{R}$

Evidente: $fr_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = cl_s(\mathbb{Q}) \cap cl_s(\mathbb{Q}^c) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
$= fr_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^c)$

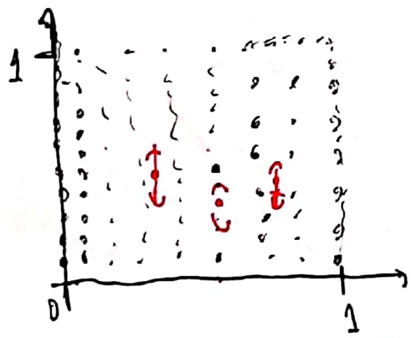
Ejemplo b. $fr_{\mathbb{R}^n}(B(x,r)) = fr_{\mathbb{R}^n}(D(x,r)) = \{v \in \mathbb{R}^n / \|v-x\| = r\}$

Dem. Fácil.

Ejemplo c. $fr_{\mathbb{R}}(\{1/n \,/\, n \in \mathbb{N}\}) = \{0\}$

Dem. Omitido.

Ejemplo d. $X = [0,1] \times [0,1]$, con la topología del orden lexicográfico.
Encontrar $fr_X(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$



$fr_X(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}) = cl_X(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}) \setminus int_X(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$

$cl_X(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$

$\bullet = (r,q)$, $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
$q \in \mathbb{Q}$

$(r,q) \notin cl_X(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$

$\mathcal{O} = \{r\} \times (q-\varepsilon, q+\varepsilon)$

$\bullet = (q,r) \in cl_X(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$ ✓

$\bullet = (r,r) \in cl_X(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$

Af. $cl_X(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}) = [0,1]^2 \setminus ((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \times \mathbb{Q})$

$int_X(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}) = \emptyset$

Vecindades (pág 77)

Def. X esp. topológico, $x \in X$, $V \subset X$.

V vecindad de $x \Leftrightarrow \exists O \in \mathcal{O}_X : x \in O \subset V$

Def. $\mathcal{V}(x) = \{$ ~~conjuntos~~ Vecindades de $x \}$

$\mathcal{V} = \{\mathcal{V}(x) / x \in X\}$ ← Sistema de vecindades de X

Ejemplo a. X esp. topológico.

(i) $\mathcal{O}_X$ discreta $\Leftrightarrow \forall x \in X : \mathcal{V}_X(x) = \{V \subset X / x \in V\}$

(ii) $\mathcal{O}_X$ indiscreta $\Leftrightarrow \forall x \in X : \mathcal{V}_X(x) = \{X\}$

(iii) $\mathcal{O}_X$ cofinita $\Leftrightarrow \forall x \in X : \mathcal{V}_X(x) = \{V \setminus N \subset X / x \in V, N \subset X$ finito$\}$

Dem. (i), (ii) triviales

(iii) $\mathcal{O}_X$ cofinita $\Rightarrow \mathcal{O}_X = \{\emptyset\} \cup \{O \subset X / O^c$ finito$\}$

($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{O}_X$ cofinita, $x \in X$,

$\mathcal{V}_X(x) = \{V \subset X / \exists O \in \mathcal{O}_X : x \in O \subset V\}$

$O \in \mathcal{O}_X \Rightarrow O^c$ finito. Además $O \subset V \Rightarrow V^c \subset O^c$

$\therefore V^c$ finito.

Ejemplo 6. $f: X \to Y$ función continua. $x \in X$.

Def: f continua en $x \iff f^*(W) \in \mathcal{V}_X(x) \ \forall W \in \mathcal{V}_Y(f(x))$.

Es evidente que $\mathcal{O}_x = \{O \in \mathcal{O}_X \ / \ x \in O\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología en X.

Af.

$$\mathcal{V}_{\mathcal{O}_x}(y) = \begin{cases} \mathcal{V}_X(x) & , y = x \\ \{X\} & , y \neq x \end{cases}$$

tal que f es continua en x ssi $f: (|X|, \mathcal{O}_x) \longrightarrow Y$ es continua.

dem. $\mathcal{O}_x$ es una topología $\forall x \in X$ (evidente)

Si $y = x \Rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{O}_x}(y) = \mathcal{V}_X(x)$ (fácil)

$y \neq x$ | $\forall O \in \mathcal{O}_X : y \in O \Rightarrow y, x \in O$

Tenemos que con $\mathcal{O}_x$, $\mathrm{int}(V^c) = \emptyset$. Sea $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{O}_x}(y)$

$$\therefore \ X = \mathrm{int}(X) = \mathrm{int}(V \cup V^c) = \mathrm{int}(V) \subset V$$

$$\therefore \ X \subset V$$

$$\therefore \ V = X$$

—o—

f continua en $x \iff f: (|X|, \mathcal{O}_x) \to Y$ continua.

($\Rightarrow$) Sea $O \in \mathcal{O}_Y$. Como f es continua, $f^*(O) \in \mathcal{O}_X$

f continua en $x \Leftrightarrow f:(|X|, \mathcal{O}_x) \to Y$ continua.

f continua en $x \Leftrightarrow f^*(W) \in \mathcal{V}_X(x) \quad \forall W \in \mathcal{V}_Y(f(x))$

~~Sea $O \in Y$~~ Sea $O \in \mathcal{O}_Y$

- $f(x) \in O$
- $f(x) \notin O$

Sup $f(x) \in O \in \mathcal{O}_Y \Rightarrow x \in f^*(O) \in \mathcal{V}_X(x)$

$O \in \mathcal{O}_Y \Rightarrow f^*(O) \in \mathcal{O}_X$ (f continua)

Como f continua en x : $f^*(O) \in \mathcal{V}_X(x)$

$\therefore f^*(O) \in \mathcal{V}_{\mathcal{O}_x}(x)$

Pd: $f:(|X|, \mathcal{O}_x) \to Y$ continua

Sea $x \in X$, ~~$W \in \mathcal{V}_Y(f(x))$~~

~~$W \in \mathcal{V}_Y(f(x)) \Rightarrow \exists O \in \mathcal{O}_Y : f(x) \in O$~~

Sea $x \in X$, $W \in \mathcal{V}_Y(f(x))$

Como f continua en x : $f^*(W) \in \mathcal{V}_X(x)$

$\therefore f^*(W) \in \mathcal{V}_{\mathcal{O}_x}(x)$

Sea $z \in X$, $W \in \mathcal{V}_Y(f(z))$. f continua $\Rightarrow f^*(W) \in \mathcal{V}_X(z)$

Si $z = x$: $f^*(W) \in \mathcal{V}_X(x) = \mathcal{V}_{\mathcal{O}_x}(x)$.

$z \neq x$. Como f es continua

$$z \in f^{*}(W) \in \mathcal{V}_X(z)$$

~~Ahor~~ No sé cómo terminarlo!

Caracterización de los sistemas de vecindades (pág. 79)

(Omitido.)

Bases de Vecindades (pág. 81)

Def. X espacio topológico, $x \in X$. Una base de vecindades de x es un conjunto $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ tal que para todo $V \in \mathcal{V}(x)$, existe $U \in \mathcal{U}(x)$ tq $U \subset V$.

Def. Una base de vecindades de X es una familia $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(x) / x \in X\}$ tal que $\mathcal{U}(x)$ es una base de vecindades de x, $\forall x$.

Teorema a. (Omitido)

Teorema b. $\mathcal{U}_X$, $\mathcal{U}_Y$ bases de vecindades de X e Y resp. $f: X \to Y$ una función. $\forall x \in X$, son equivalentes

(i) f es continua en x

(ii) $f^*(U) \in \mathcal{V}_X(x)$ para todo $U \in \mathcal{U}_Y(f(x))$

dem. ($\Rightarrow$) trivial, ya que $\mathcal{U}_Y(f(x)) \subseteq \mathcal{V}_Y(f(x))$

($\Leftarrow$) Sea $W \in \mathcal{V}_Y(f(x))$. Como $\mathcal{U}(f(x))$ es base de vecindades de $f(x)$, $\exists \tilde{W} \in \mathcal{U}_Y(f(x))$ tq $\tilde{W} \subset W$

$\therefore f^*(\tilde{W}) \in \mathcal{V}_X(x)$ por (ii) $\therefore f$ continua en x.

Ejemplo: Para todo x en la recta de Sorgenfrey, el conjunto

$$\mathcal{U}(x) = \{[x, x+1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

es una base contable de vecindades abiertas de x.

dem. Evidente. Basta hacer un dibujo.

~~Caracterización de una topología usando bases de vecindades (pág. 83)~~

~~(Omitido)~~

Ejemplo: Sean X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base de su topología. Si para cada $x \in X$ definimos

$$\mathcal{U}(x) = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$$

entonces $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(x) \mid x \in X\}$ es una base de vecindades abiertas de X.

dem. Sea $x \in X$, tomando $V \in \mathcal{V}(x)$

$$\Rightarrow \exists O \in \mathcal{O}_x : x \in O \subset V$$

pero además $\exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset O$

$$\therefore \exists B \in \mathcal{U}(x) : x \in B \subset V$$

$\therefore \mathcal{U}(x)$ base de vecindades de x.

Convergencia (pág 86)

Definición. $C[\bar{x}, n_0] = \{x_n / n \geq n_0\} = \bar{x}_*([n_0, \infty))$ es la n_0-cola de la sucesión $\bar{x}$.

Definición. Sea $\bar{x}$ una sucesión en X esp. topológico, $x \in X$. diremos que $\bar{x} \to x$ (converge) así $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C[\bar{x}, n_0] \subset V$.

Definición. Si $\bar{x}$ es una sucesión en X y $x \in X$ diremos que la función

$$\hat{x} : \hat{\mathbb{N}} \longrightarrow X : n \longmapsto \begin{cases} \bar{x}(n), & n \in \mathbb{N} \\ x, & n = \infty \end{cases}$$

$\hat{x}$ es la extensión de $\bar{x}$ por x.

Notar que $\hat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es espacio topológico con la topología del orden.

Lema. $A \subseteq \hat{\mathbb{N}}$ es abierto $\Leftrightarrow$ $\infty \notin A$ ó existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[n, \infty] \subset A$

Dem Omitida. Cuando tenga tiempo la hago.

Teorema a (Importante). Si $\hat{x}$ es la extensión de $\bar{x}$ por x, entonces:

$$\bar{x} \to x \iff \hat{x} \text{ continua.}$$

Ejemplo f

Sea $X = (0,\infty) \cup \{0, 0'\}$ con la topología con base

$$\mathcal{B} = \{\{0\} \cup (0,b) \,/\, 0<b\} \cup \{\{0'\} \cup (0,b) \,/\, 0<b\} \cup \{(a,b) \,/\, 0<a<b\}$$

$(X, \mathcal{O})$ es llamada semirecta con dos orígenes $(\mathcal{O} = \langle \mathcal{B} \rangle)$

Afirmación. $(1/n \,/\, n \in \mathbb{N})$ converge a 0 y a $0'$

dem. Evidente!