10/08/2015.

TOPOLOGIA Y GEOMETRIA

Libros:

- Guillemin - Pollock "Differential topology"
  (Milnor "Top from the diff viewpoint")
- May "A concise course in Alg. Top".
- Munkres I, II
- Hatcher "Algebraic Topology".

— ∘ —

Un pequeño recuerdo:

Def. Una función $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x_0\in\mathbb{R}^n$, si existe una transformación lineal $J:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-J(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}}=0.$$

si es diferenciable $\Rightarrow J_{x_0}f=df_{x_0}:=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{i,j}$

Ejercicio. Si las derivadas parciales de f son continuas en $x_0\Rightarrow f$ es diferenciable en x_0.

Def. f es C^i si todas sus i-ésimas derivadas parciales son continuas (en ___).

Obs. f es diferenciable en x_0 si en relación a puntos cercanos de x_0, f es como una transformación lineal.

Def. $f:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es suave (C^∞) si es C^i $\forall i$.

Ejercicio. $\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n) = y_1 \\ \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_m) = y_n \end{cases}$ $f(a)=b$.

¿Será que puedo resolver $f(x)=y$ con y cercano b?

Teorema (función inversa). $f: \underset{\overset{\Psi}{a}}{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1 tal que df_a invertible

$\Rightarrow \exists \underset{\overset{\Psi}{a}}{V} \subset U$ abierto y $W \ni f(a)$ abierto tal que $f: V \to W$ tiene una inversa continua $f^{-1}: W \to V$ C^1 $\forall y \in W$. Si f es suave $\Rightarrow f^{-1}$ es suave.

Teorema (función implícita). Sea $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ abierto, $f: U \to \mathbb{R}^n$ C^1 y sea $(a,b) \in U$ tal que $f(a,b)=0$ y $df_{y(a,b)}$ invertible.

Entonces $\exists \underset{\overset{\Psi}{(a,b)}}{V} \subset U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ y $\underset{\mathbb{R}^m}{\overset{\cap}{W}} \ni a$ y $g: W \to \mathbb{R}^n$ C^1 tal que

$$\{(x,y) \in V \;/\; f(x,y)=0\} = \{(x, g(x)) \;/\; x \in W\}$$ y tenemos

$dg_x = -(d_y f)^{-1}(x, g(x)) \cdot d_x f(x, g(x))$. Y g es C^∞ cuando f es C^∞.

Obs. La idea es también generalizar esta noción de "cartas concretas" dentro de algún $\mathbb{R}^M$, a cartas abstractas en principio dentro de "nada".

Vamos a tener variedades:

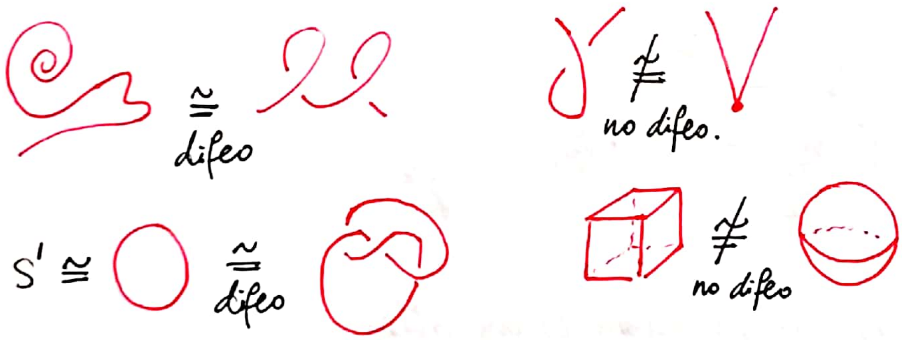
$\left\{ \begin{array}{l} \text{dentro de } \mathbb{R}^M \\ \text{localmente como un } \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Atlas de} \\ \text{difeos locales} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{haces de} \\ \text{funciones diff} \end{array} \right\}$

Def. Si $X \subset \mathbb{R}^n$ arbitrario y $f: X \to \mathbb{R}^m$
$\Rightarrow$ f es suave si $\forall x \in X$, $\exists \underset{x}{\underset{\Psi}{U}} \subset \mathbb{R}^n$ y $F: U \to \mathbb{R}^m$ suave tal que

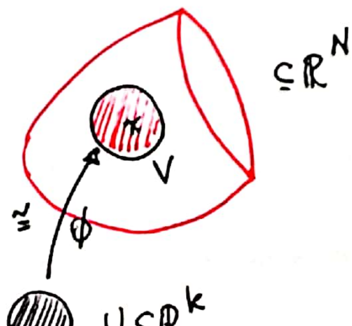
$F|_{U \cap X} = f|_{U \cap X}$. ok! la misma definición que Pollack.

Ejemplo. $X = \{\pm 1/n\}_{n=1}^{\infty}$ y $f: X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ $\Rightarrow$ f es suave en X. Pero
$X \cup \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ no lo es.

Def. $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $f: X \to Y$ es un difeomorfismo si
(1) f biyección
(2) f suave
(3) f^{-1} suave.
En particular es un homeomorfismo.



def. Sea $X \subset \mathbb{R}^N$. Entonces X es una k-variedad diferenciable si es localmente difeomorfa a $\mathbb{R}^k$. Es decir: $\forall x \in X$ $\exists$ vecindad $V \ni x$ y abierto $U \subset \mathbb{R}^k$ y difeomorfismo $\phi: U \to V$



ϕ se llama parametrización local en x
ϕ^{-1} se llama sistema de coordenadas en x.

Obs: $V = \tilde{V} \cap X$, donde $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto.

Def (Abstracto). X = espacio topológico Hausdorff y base numerable.

Un Atlas de X es un cubrimiento $\{V_i\}_{i\in I}$ de abiertos tal que $\exists$ homeomorfismos $\phi_i : V_i \to U_i \subset \mathbb{R}^k$, k fijo.

U_i abierto

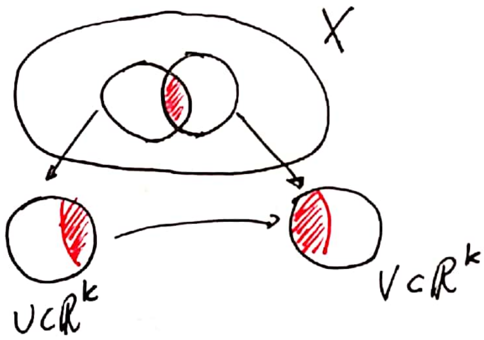
X con atlas = k-variedad topológica.

Ejemplo. $\mathbb{R}^2 \supset \{x^2=y^3\}$ es 1-variedad topológica

$\leftarrow \mathbb{R}$

$(t^3,t^2) \leftarrow t$

Un Atlas suave es un atlas tal que las transiciones en las intersecciones son C^∞.



Def. Dos Atlas son compatibles si su unión es un atlas.

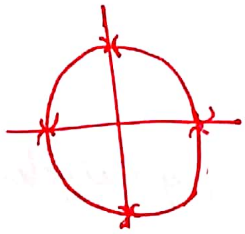
Dado X, los atlas forman una relación de equivalencia (compatibilidad)

Una estructura diferenciable en X es una clase de equivalencia. Una k-variedad diferenciable abstracta es un espacio X con una estructura diferenciable.

Ejemplo. $\mathbb{R}^n$ con topología usual es una n-variedad diferenciable.

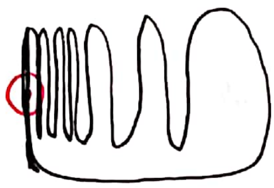
Teorema. ($\mathbb{R}^n$, top. usual) tiene sólo 1 estructura diferencial si $n \neq 4$. De hecho, para $n = 4$, existe un continuo de ellas (Freedman, Donalson, Toutes)

Ejemplo. $S^1 = X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$

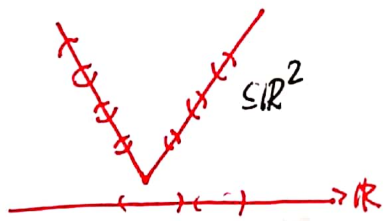


Tarea: S^n.

12/08/2015

No ejemplo.  $\subseteq \mathbb{R}^2$ no es una 1-variedad diferenciable.

Ejemplo.



Def. X, Z variedades diferenciables en $\mathbb{R}^N$, con $Z \subset X \Rightarrow Z$ es subvariedad diferenciable de X.

Sean X, Y k-variedad y l-variedad en $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{R}^M \Rightarrow X \times Y \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M = \mathbb{R}^{N+M}$ es una $k+l$-variedad con parametrizaciones locales $\phi \times \psi : W \times U \longrightarrow X \times Y$

$$(w, u) \longmapsto (\phi(w), \psi(u))$$

$\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$, $\phi_j : W \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$

$\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m)$, $\psi_s : U \subseteq \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^M$

Ejemplo. S^1 es una 1-variedad diferenciable

$S^1 =$  $\Rightarrow S^1 \times S^1 =$  2-variedad diferenciable.

$\phi_j = (\phi_{j1}, \phi_{j2}, \ldots, \phi_{jN})$ diferenciables

$\psi_s = (\psi_{s1}, \ldots, \psi_{sM})$ diferenciables.

Conclusión: $X \times Y$ es una $k+l$-variedad diferenciable.

$$(\phi \times \psi)^{-1} : \phi(W) \times \psi(U) \longrightarrow W \times U$$
$$(a, b) \longmapsto (\phi^{-1}(a), \psi^{-1}(b))$$

Ejemplo. $B_a = \{x \,/\, |x|<a\} \subset \mathbb{R}^k \Rightarrow B_a \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es C^∞.
$$x \longmapsto \frac{ax}{\sqrt{a-|x|^2}}$$

La inversa es $y \longmapsto \dfrac{ay}{\sqrt{a^2+|y|^2}}$ y es C^∞ (ya que $a^2>0$)

$$\mathbb{R}^k \supset B_a \underset{\text{difeo}}{\cong} \mathbb{R}^k$$

Def. X = espacio topológico. Un pre-haz $\mathcal{F}$ de algo (puede ser grupo, algebra, etc) en X consiste del dato

(a) $\forall U$ abierto en X, $\mathcal{F}(U)$ es algo.

(b) $\forall V \subseteq U$ entre abiertos de X $\Rightarrow \exists$ morfismo de algo $\rho_{UV}: \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ tal que

(0) $\mathcal{F}(\phi) = 0$.

(1) $\rho_{UU} = 1\!\!1_U$

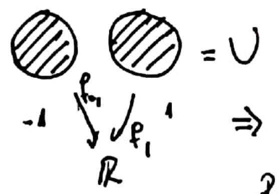
(2) $W \subseteq V \subseteq U \Rightarrow \rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$

Def. Un pre-haz es un haz si además:

(3) $\forall U = \bigcup V_i$ cubrimiento de abiertos por abiertos y $f \in \mathcal{F}(U)$ es tal que $f|_{V_i} = 0 \ \forall i \Rightarrow f = 0$

(4) $\forall U = \bigcup V_i$ es tal que, si $f_i \in \mathcal{F}(V_i)$ para cada i, tal que coincide en intersecciones, i.e. $f_i|_{V_i \cap V_j} = f_j|_{V_i \cap V_j} \ \forall i,j \Rightarrow f \in \mathcal{F}(U)$ $f|_{V_i} = f_i$.

No ejemplo. $\mathcal{F}(U) = \{ f: U \to \mathbb{R} \text{ , } f \text{ constante} \}$



$\Rightarrow$ Pre-haz pero no necesariamente haz

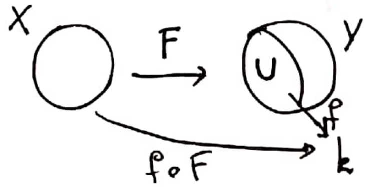
Pre-haz localmente constante $\left(\begin{array}{l} \text{i.e } \forall x \ \exists U \ni x \text{ donde} \\ f|_U \text{ constante} \end{array} \right) \Rightarrow$ es haz

Ejemplo. $X=\mathbb{R}^n$, $C^\infty(U)=\{f:U\to\mathbb{R} \,/\, f \text{ es } C^\infty\}$

$X=\mathbb{C}^n$, $\mathcal{O}(U)=\{f:U\to\mathbb{C} \,/\, f \text{ es holomorfa}\}$

ambos son haces.

Def. k = cuerpo. Un X con un haz $\mathcal{R}$ de funciones a valores en k es $\mathcal{R}(U)=\{f:U\to k\}$ tal que es k-álgebra. $(X,\mathcal{R})$.



def. $(X,\mathcal{R})\to(Y,\mathcal{S})$ es una función continua $F:X\to Y$ tal que $\forall U\subset Y$,

$f\in\mathcal{S}(U) \Rightarrow f\circ F|_{F^{-1}(U)} = F^*f\in\mathcal{R}(F^{-1}(U))$

obs. Analizar el caso en que $F^*:\mathcal{S}(U)\to\mathcal{R}(F^{-1}(U))$ es morfismo de k-álgebras.

def. $(X,\mathcal{R})\cong(Y,\mathcal{S})$ si F es homeomorfismo y $f\in\mathcal{S}(U)\Leftrightarrow F^*f\in\mathcal{R}(F^{-1}(U))$.

$\forall U\subset Y$ abierto.

def. X = Hausdorff, 2do contable es una n-variedad diferenciable si es un $\mathbb{R}$-espacio (X, C^∞_X) tal que admite un cubrimiento $X=\bigcup U_i$ con

$(U_i, C^\infty_X|_{U_i})\cong(\underset{\text{bolas}}{B_1}\subset\mathbb{R}^n, C^\infty|_{B_1})$.

Tarea. n-variedad diferenciable abstracta $\cong$ n-variedad diferenciable con haces.

§ Derivadas y Tangentes.

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ C^∞. Si $x \in U \Rightarrow \forall h \in \mathbb{R}^n$

$$df_x(h) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \in \mathbb{R}^m$$

derivada direccional.

$\therefore$ Tenemos $df_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal, y se puede representar por

$$\text{Matriz Jac de } f \text{ en } x = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \vdots & & \\ \partial f_m/\partial x_1 & \cdots & \partial f_m/\partial x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} U & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^l \\ \cap & & \cap & & \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^m & & \end{matrix}$$ morfismo C^∞. $\Rightarrow d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$.

Ejemplo. Si f es un morfismo lineal $\to df_x = L$ constante $\forall x$.

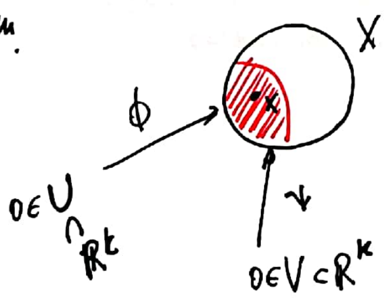
Def. $X \subset \mathbb{R}^N$ k-variedad y $\phi : U \to X$ parametrización local en $0 \in U$, $\phi(0) = x \in X$

$\Rightarrow$ mejor aproximación lineal de ϕ es $U \ni u \mapsto \phi(0) + d\phi_0(u)$

$T_x(X)$ = espacio tangente de X en x = $\mathrm{Im}(d\phi_0) \subset \mathbb{R}^N$

Prop. $T_x(X)$ es independiente de la parametrización local

dem.



$\to \psi^{-1} \circ \phi : U \to V$ es difeo.
$0 \mapsto 0$

tenemos $\phi = \psi \circ (\psi^{-1} \circ \phi)$

$d\phi_0 = d\psi_0 \circ d(\psi^{-1} \circ \phi)_0$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(d\phi_0) \subset \mathrm{Im}(d\psi_0)$.

Por analogía obtenemos $\mathrm{Im}(d\phi_0) = \mathrm{Im}(d\psi_0)$

obs. $T_x(X)$ es un espacio vectorial en $\mathbb{R}^N$ de dimensión k.

dem. $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow X \subset \mathbb{R}^N$ difeo

$0 \longmapsto x$

$\exists F : V \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ C^∞, $V \ni x$ abierto. $F|_{\phi(U)} = \phi^{-1}$

$F \circ \phi = 1_U \Rightarrow dF_x \circ d\phi_0 = 1_{\mathbb{R}^k} \Rightarrow d\phi_0$ es 1-1

$\dim T_x(X) = \dim \operatorname{Im} d\phi_0 = \dim \mathbb{R}^k = k$.

Ejemplos. $\mathbb{RP}^n := \dfrac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$. $x \sim y$ si $\exists t \neq 0$ real tal que $x = ty$

$\mathbb{RP}^n$ es el espacio proyectivo de dimensión n. Tiene cartas naturales
$U_i = \{ x \in \mathbb{RP}^n / x_i \neq 0 \}$. $i = 0, 1, \dots, n$.
Mostrar que U_i son abiertos homeomorfos a $\mathbb{R}^n$ y mostrar existencia cartas difeomorfas $\phi_i : \mathbb{R}^n \to U_i$ (abstracto) con $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ difeos.

$\Rightarrow \mathbb{RP}^n$ es n-variedad diferenciable abstracta

$\mathbb{RP}^1 \cong S^1$, $\mathbb{RP}^2 \cong S^2/_{x \sim -x}$

Tarea. Cambiar $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$ $\therefore$ $\mathbb{CP}^n$ es 2-variedad diferenciable.

Def. $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ variedades, $F: X \to Y$ suave. Definimos $dF_x : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$ como

$$\begin{tikzcd} x \in X \arrow[r, "F"] & F(x) \in Y \\ U \ni 0 \arrow[u, "\cong\ \phi"] \arrow[r, "\psi^{-1}\circ F \circ \phi"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & 0 \in V \arrow[u, "\cong\ \psi"'] \end{tikzcd} \qquad dF_x := (d\psi_0)\circ(d(\psi^{-1}\circ F\circ\phi)_0)\circ(d\phi_0)^{-1}$$

lo cual es inducido de las cartas, ya que usando abiertos comunes a x y $F(x)$ con cartas ϕ', ψ'

$$\Rightarrow (d\psi'_0)\circ(d(\psi'^{-1}\circ F\circ\phi')_0)\circ(d\phi'_0)^{-1} = (d\psi'_0)\circ(d(\psi'^{-1}\circ\psi\circ\psi^{-1}\circ f\circ\phi\circ\phi^{-1}\circ\phi')_0)\circ(d\phi'_0)^{-1}$$
$$= dF_x$$

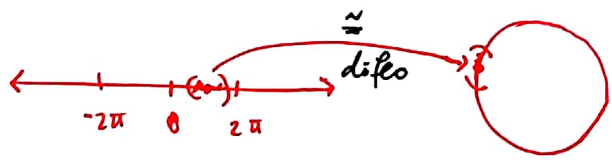
Entonces para $X^k \to Y^\ell \to Z^n$ suaves (X k-variedad diferencial, etc...)

Prop. $d(g\circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x \quad \forall x \in X$.

dem mirar el libro.

Def. $X^n \xrightarrow{f} Y^n$ es un difeo local en $x \in X$, si $\exists$ abiertos $U \ni x$, $V \ni f(x)$ tales que $f|_U : U \to V$ es difeo. Es difeo local si lo es $\forall x$.

Ejemplo $\mathbb{R} \xrightarrow{f} S^1 \quad f(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$



Teo. $X^n \xrightarrow{f} Y^n$ difeo local en $x \in X$ $\iff$ $df_x : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$ isomorfismo.

dem. $(\Rightarrow)$ f difeo local

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & V \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \\ x \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] & f(x) \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] \end{tikzcd}$$

difeo

f^{-1} difeo

$$f \circ f^{-1} = 1_V \quad , \quad f^{-1} \circ f = 1_U \, .$$

Regla de la cadena y $d(1)_x = 1_{\mathbb{R}^e}$ $\Rightarrow$ df_x es isomorfismo.

$(\Leftarrow)$ suponer que df_x es un isomorfismo.

Asumir la figura

$$\begin{tikzcd} x \in X \arrow[r, "f"] & f(x) \in Y \\ 0 \in U \arrow[u, "\phi"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & V \ni 0 \arrow[u, "\psi"'] \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, phantom, "\cap" rotate=180] & \mathbb{R}^n \arrow[u, phantom, "\cap" rotate=180] \end{tikzcd}$$

$$df_x = d\psi_r \circ d(\psi^{-1} \circ f \circ \phi)_0 \circ (d\phi_r)^{-1}$$

$\Rightarrow$ $d(\psi^{-1} \circ f \circ \phi)_0$ es invertible. Por el TFI, $\exists\, 0 \in W \subset U$ tal que

$\Rightarrow$ $\psi^{-1} \circ f \circ \phi : W \longrightarrow \psi^{-1} \circ f \circ \phi(W)$ es difeo

$\Rightarrow$ f es difeo local en x $\blacksquare$

Corolario. Si df_x es un isomorfismo $\Rightarrow$ se pueden encontrar coordenadas cerca de $x \in X$ y cerca de $f(x) \in Y$ tal que en esas coordenadas, $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$ (identidad).

Sea $f: X^k \to Y^l$, $k \leq l$ suave

<u>def</u>. (1) f es una inmersión en $x \in X$ si df_x es 1-1

(2) f es inmersión si lo es $\forall x$

<u>Ejemplo</u>. $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, $f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$.

$df_x = \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}$ es 1-1.

<u>Ejemplo</u>. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (x(t), y(t))$ es una inmersión ssi $(x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Pero no es suficiente para tener $f(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ difeo

<u>Ejemplo</u>. $f: \mathbb{R} \to S^1 \times S^1 = \subseteq \mathbb{R}^4$

inmersión $t \mapsto (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \sqrt{2} t})$

<u>Teorema</u>. $X^k \xrightarrow{f} Y^l$ inmersión en $x \in X$ $\Rightarrow$ se pueden encontrar coordenadas locales $(x_1, \dots, x_k)$, $(y_1, \dots, y_l)$ tales que f cerca de x y $f(x)$ es

$$f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

<u>dem</u>.

$$\begin{tikzcd}
x=\phi(0) \in X \arrow[r, "f"] & Y \ni \psi(0) = f(x) \\
0 \in U \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "g"] \arrow[dr] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & 0 \in V \arrow[u, "\psi"'] \arrow[d, "\text{trans. lineal inv.}"] \\
& V \ni 0
\end{tikzcd}$$

$$df_x = \underbrace{d\psi_0}_{\text{es } 1-1} \circ \underbrace{dg_0}_{\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l} \circ (d\phi_0)^{-1}$$ ← importante, no olvidar df_x de

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "g"'] & V \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

$f = \psi \circ g \circ \phi^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} T_x(X) & \to & T_y(Y) \\ \cong & & \cong \\ \mathbb{R}^k & & \mathbb{R}^l \end{array}$$

$\Rightarrow dg_0$ es $1-1$.

$\therefore$ Podemos hacer el cambio de coordenadas lineal en $V \subseteq \mathbb{R}^l$ tal que
$$dg_0 = \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Definir $G : U \times \mathbb{R}^{l-k} \to \mathbb{R}^l$, $\quad dG_0 = \begin{pmatrix} I_k & \\ & I_{l-k} \end{pmatrix} = I_l$

$$G(x,z) = g(x) + (0,z)$$

importante

$\Rightarrow G$ es un difeo local. Sea $i(x_1,\dots,x_k) = (x_1,\dots,x_k,0,\dots,0)$.

$\Rightarrow g = G \circ i : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ 0 \in U \arrow[u, "\phi", "\cong"'] \arrow[r, "g"'] \arrow[dr, "i"'] & V \ni 0 \arrow[u, "\cong", "\psi"'] \\ & V' \ni 0 \arrow[u, "\cong", "G"'] \end{tikzcd}$$

Carta para $f(x) \in Y$. ■

Corolario. Si f es una inmersión en x $\Rightarrow$ f es una inmersión cerca de x.

Teorema. $X \xrightarrow{f} Y$ inmersión, 1-1, X = compacto. Entonces $f(X)$ es una subvariedad de Y y $f: X \to f(X)$ es un difeo.

dem. Para demostrar que $f(X)$ es una subvariedad, es suficiente mostrar que si $W \subset X$ es abierto $\Rightarrow$ $f(W)$ es abierto en $f(X)$.

19/08/2015.

suponer que $f(W)$ no es abierto en $f(X)$

$\Rightarrow$ $f(X) \setminus f(W)$ no es cerrado en $f(X)$. Entonces existe sucesión (y_i) $\in f(X) \setminus f(W)$. $y_i \to y \notin f(X) \setminus f(W)$ $(y \in f(W))$

$\forall i$, $y_i = f(x_i)$, y como f es 1-1, los x_i son únicos

$\Rightarrow$ $x_i \notin W$ y $y = f(x)$, algún $x \in W$ único.

$(x_i) \subset X \setminus W$ = cerrado $\underset{X = \text{compacto}}{\Rightarrow}$ compacto

$\Rightarrow$ $\exists$ subsucesión (x_i'), $x_i' \to x' \notin W$. $y = f(x') = f(x)$ $\to$ $x = x'$ $(x \in W)$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

$\therefore$ $f(W)$ es abierto en $f(X)$ ∎

Def. Una incrustación (embedding) es una $f: X \to Y$ suave tal que $f(X)$ es variedad y $X \to f(X)$ es difeo.

Teo. $f: X \to Y$ suave inmersión 1-1 y propia (pre-imagen de compacto es compacto) $\Rightarrow$ f es incrustación.

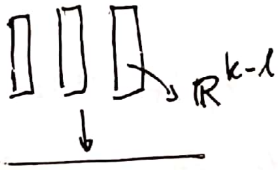
§ Submersiones

$f : X^k \to Y^l \quad k \geq l, \quad df_x : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$

def. f es submersión en $x \in X$ si df_x es sobre.
f es submersión si lo es $\forall x \in X$.

Ej. $s : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l, \quad s(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_l)$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$



Ej. $X = X_1 \times X_2, \quad Y = X_1. \quad \pi_1 : X \longrightarrow Y$ proyección

$\pi(x_1, x_2) = x_1 \Rightarrow T_{(x_1,x_2)}(X) = T_{x_1}(X_1) \times T_{x_2}(X_2)$ y $d\pi_{1(x_1,x_2)}(v_1, v_2) = v_1$

y así sobre.

Ej. (Submersión de Hopf). $f : S^3 \to S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,/\, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$

f es suave, es submersión $\qquad f(z_1, z_2) = \dfrac{z_2}{z_1}$

$0 \in \mathbb{C} \Rightarrow f^{-1}(0) = S^1$

$\forall y \in S^2 \Rightarrow f^{-1}(y) = S^1$

pero $S^3 \neq S^2 \times S^1$.

Teorema. Si f es una submersión en x_0 $\Rightarrow$ $\exists$ coordenadas locales $(x_1,\dots,x_k)$ cerca de x_0 y $(y_1,\dots,y_l)$ cerca de $y_0=f(x_0)$ tal que en esas coordenadas, $f(x_1,\dots,x_k)=(x_1,\dots,x_l)$

dem. Tenemos

$$\begin{tikzcd} x_0\in X \arrow[r, "f"] & Y\ni y_0 \\ 0\in U \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "g"'] & V\ni 0 \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

$g(0)=0$, dg_0 sobre
$dg_0 : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$

Elegir $f_i\in\mathbb{R}^k$ base tal que $dg_0(f_i)=e_i$ $\quad 1\leq i\leq l$ $\quad$ y
$f_{l+1},\dots,f_k$ base del kernel de dg_0.

Entonces en esa base, $dg_0=[\ I_l\ \ 0\ ]$

- Definimos $G: U\to V\times\mathbb{R}^{k-l}$, $G(x_1,\dots,x_k)=(g(x_1,\dots,x_k),x_{l+1},\dots,x_k)$

$\Rightarrow$ En base $f_1,\dots,f_k$ $\quad dG_0=\begin{pmatrix} I_l & \\ & I_{k-l}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ TFI, difeo local. Sea $s:\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}^l$, $s(x_1,\dots,x_k)=(x_1,\dots,x_l)$

$\Rightarrow s\circ G=g$

$$\begin{tikzcd} x_0\in X \arrow[r, "f"] & Y\ni y_0 \\ 0\in U \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "G"'] & V\ni 0 \arrow[u, "\psi"'] \\ G(U)\subset V\times\mathbb{R}^{k-l} \arrow[ur, "s"'] & \end{tikzcd}$$

carta alrededor de x_0

carta alrededor de y_0.

TFI

Corolario. f submersión en $x \to$ submersión alrededor de x.

Digamos que $f: X^k \to Y^l$, $y \in Y$ y supone que $\forall x \in f^{-1}(y)$, f es submersión $\Rightarrow$ Para cada $x \in f^{-1}(y)$, podemos ver f como

$$f(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_l)$$

$$\therefore f^{-1}(0, \ldots, 0) = \{(0, \ldots, 0, x_{l+1}, \ldots, x_k) \in U\}$$

Corolario. Si $\forall x \in f^{-1}(y)$, f es submersión en $x \Rightarrow f^{-1}(y)$ es una $k-l$ variedad diferenciable de X^k y $T_x(f^{-1}(y)) = \ker(df_x : T_x(X) \to T_y(Y))$.

Def. Sea $f: X^k \to Y^l$ suave.

- Puntos críticos de $f = \{x \in X \mid df_x$ no es sobre$\}$
- Valores críticos $= f($puntos críticos$)$ · Puntos regulares $= X \setminus \{$ptos críticos$\}$
- Valores regulares $= Y \setminus \{$valores críticos$\}$.

Notación $f^{-1}(y) = \emptyset \Rightarrow y$ valor regular.

Ejemplo. $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \ldots, x_k) = x_1^2 + \cdots + x_k^2$

$$\Rightarrow \nabla f = (2x_1, \ldots, 2x_k)$$

$\forall x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, df_x es sobre.

$f^{-1}(r)$ es subvariedad de dimensión $k-1$ si $r > 0$

$\cong S^{k-1}$ $\quad (r < 0 \to f^{-1}(r) = \emptyset)$.

24/08/2015

$X^k \xrightarrow{f} Y^\ell$ $(\ell \leq k)$, $y \in Y$ tal que $\forall x \in f^{-1}(y)$, f es submersión
$X^k \subseteq \mathbb{R}^k$, $Y^\ell \subseteq \mathbb{R}^\ell$

en x $\Rightarrow$ localmente : $f(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_\ell)$

$\Rightarrow$ $f^{-1}(y)$ cerca de x $= \{(0, \ldots, 0, x_{\ell+1}, \ldots, x_k) / \; x_j \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^k$

Corolario. $f^{-1}(y)$ es $(k-\ell)$-variedad diferencial $\subset X^k$, y

$$T_x f^{-1}(y) = \ker\left(df_x : T_x(X) \longrightarrow T_y(Y)\right)$$

$X^k \xrightarrow{f} Y^\ell$ suave

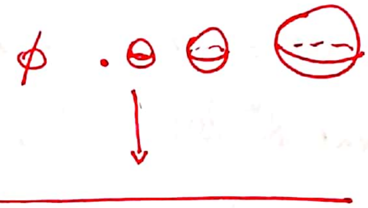
- Puntos críticos $= \{x \in X / \; df_x$ no sobre$\}$
- Valores críticos $= f$ (puntos críticos)
- Puntos regulares $= X \setminus$ ptos críticos
- Valores regulares $= Y \setminus$ valores críticos

Ejemplo. $\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x_1, \ldots, x_k) \longmapsto x_1^2 + \cdots + x_k^2$

$f^{-1}(r) \cong S^{k-1}$

$r > 0$



Ejemplo. $O(n) =$ grupo ortogonal $= \{ M \in \underset{\mathbb{R}^{n^2}}{\underset{\cong}{M_n(\mathbb{R})}} \;/\; M^t M = \mathbb{1}_n \}$

Considerar $f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$, $\underbrace{f(M) = M^t M}_{C^\infty}$

Notar que $f(M)$ es una matriz simétrica y que $S_n(\mathbb{R}) =$ matrices simétricas es una $\frac{n(n+1)}{2}$ - variedad diferencial.

Nos concentramos en $f : \mathbb{R}^{n^2} \to S_n(\mathbb{R})$. Sea $B \in T_A \mathbb{R}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{n^2}$

$$df_A(B) = \lim_{h \to 0} \frac{f(A+hB) - f(A)}{h} = A^t B + B^t A \in S_n(\mathbb{R})$$

Sea $A \in f^{-1}(\mathbb{1}_n)$. Sea $C \in S_n(\mathbb{R})$: $C = \frac{1}{2}(C + C^t)$

$$\Rightarrow A^t B = \frac{C}{2}, \quad B^t A = \frac{C^t}{2} \qquad \left(B = \frac{AC}{2} \right).$$

$\therefore \mathbb{1}_n$ es valor regular de f

$\Rightarrow O(n)$ $\frac{n(n-1)}{2}$ - subvariedad diferenciable de $\mathbb{R}^{n^2}$

$$T_{\mathbb{1}_n}(f^{-1}(\mathbb{1}_n)) = \ker(df_{\mathbb{1}_n}) = \{ B \,/\, B^t = -B \}$$
(skew-symetric)

Def. Un grupo de Lie es una variedad diferencial G, la cual es grupo y las operaciones

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g, g') &\mapsto gg' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

son C^∞.

Ejemplo. $O(n)$ es grupo de Lie

S^1, $Gl_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$, S^2 no es grupo de Lie

$$S^3 = \{ M \in M_2(\mathbb{C}) / M^* = \bar{M}^t = M^{-1}, \det(M) = 1 \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} / \alpha, \beta \in \mathbb{C} , |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

$$= \{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 / |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \}$$

$T = S^1 \times \cdots \times S^1$ es grupo de Lie.

Sean $\{g_1, \ldots, g_\ell\}$ funciones C^∞ en X k-variedad, con $k \geq \ell$.

Pregunta: ¿ Es $Z = \{ x \in X / g_1(x) = \ldots = g_\ell(x) = 0 \}$ un objeto geométrico razonable?

Podemos ponerlo como
$$X \xrightarrow{g} \mathbb{R}^\ell$$
$$x \longmapsto (g_1(x), \ldots, g_\ell(x))$$
y $Z = g^{-1}(0)$

~~Podemos ponerlo como $X \to \mathbb{R}^\ell$~~

Z es subvariedad si 0 es valor regular. En general, tenemos

$(dg_i)_x : T_x(X) \to \mathbb{R}$ y

$(dg)_x$ es sobre $\Leftrightarrow$ $(dg_1)_x, \ldots, (dg_\ell)_x$ son l.i como transformaciones lineales. (*)

dem. Tarea.

Def. Si se cumple el caso anterior (*), decimos que $g_1, \dots, g_\ell$ son independientes en X.

Def. $Z \subset X$ subvariedad $\Rightarrow$ $\operatorname{codim}(Z) := \dim X - \dim Z$.

Pregunta. ¿Puede ser que todo $Z \subset X$ subvariedad está definida por ceros de funciones?

Resp. No.

Respuestas parciales.

I. Si y es un valor regular de $f: X \to Y$ suave $\Rightarrow$ $f^{-1}(y)$ puede ser cortado por funciones independientes.

dem. $h^{-1}: W \to Y$ carta alrededor de y
$0 \mapsto y$

$\Rightarrow g = h \circ f$ y 0 es valor regular. Luego usar (*).

II. Toda subvariedad $Z \subset X$ está localmente cortada por funciones independientes

Prop. $Z = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ valor regular $\Rightarrow \ker(df_x) = T_x(Z)$

dem. f es constante en Z, $(df)_x$ es cero en $T_x(Z)$. Pero $df_x : T_x(X) \to T_y(Y)$ es sobre y así, $\dim \ker(df_x) = \dim(T_x(X)) - \dim(T_y(Y))$

$$= \dim X - \dim Y$$
$$= \dim Z = \dim(T_x(Z)).$$

---

§5. Transversalidad.

Pregunta: Dado $Z \subset Y$ subvariedad y $f : X \to Y$ suave ¿cuando $f^{-1}(Z)$ es una subvariedad de X?

Teo. Si $f \pitchfork Z \Rightarrow f^{-1}(Z)$ es subvariedad de X ($\operatorname{codim} f^{-1}(Z) = \operatorname{codim} Z$)

Def. $Z \subset Y$ subvariedad, $f : X \to Y$ suave. Suponer que $\forall z \in Z$, $\forall x \in f^{-1}(z)$,

$$\operatorname{Im}(df_x) + T_z(Z) = T_z(Y) \quad (f \pitchfork Z)$$

Entonces decimos que <u>f es transversal a</u> Z.

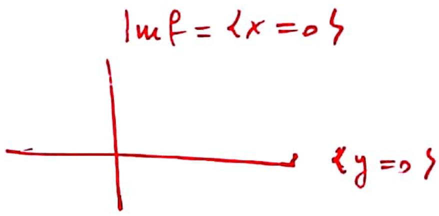
Caso más importante. $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y \supset Z$

$$\therefore\ i \pitchfork Z \ (X \pitchfork Z) \iff T_x(X) + T_x(Z) = T_x(Y)$$

Ejemplo 1. Si $Z = \{y\}$ punto de Y $\Rightarrow f \pitchfork Z \iff \forall x \in f^{-1}(y)$, $T_y(Y) = \operatorname{Im}(df_x) + 0$ es decir, y es valor regular de f.

Ejemplo 2. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} Y = \mathbb{R}^2$ $\quad Z = \{y = 0\}$

$f(x) = (0, x)$

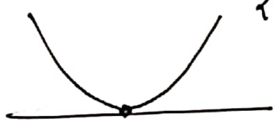


Ejemplo 3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\qquad f \not\pitchfork Z = \{y = 0\}$

$x \mapsto (0, x^3)$

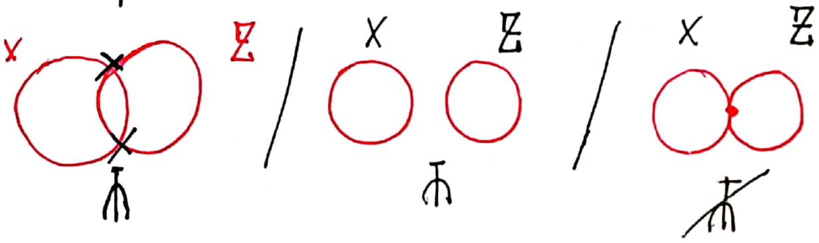
Ejemplo 4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$x \mapsto (x, x^2)$ $\quad \Rightarrow$



$f \pitchfork Z$

Ejemplo. En $Y = \mathbb{R}^2$



Ejemplo.

26/07/2015

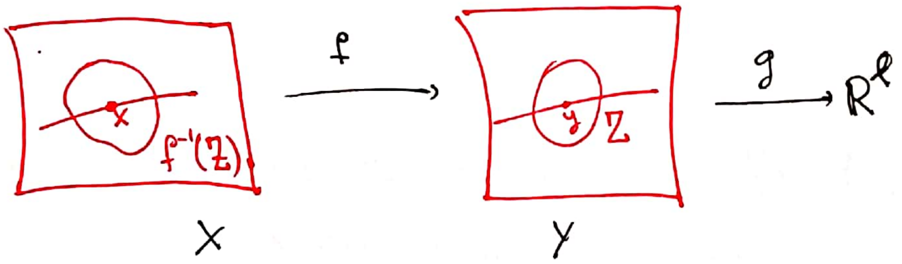
Teo. Si $f \pitchfork Z \Rightarrow f^{-1}(Z)$ es subvariedad de X. | $X \xrightarrow{f} Y \supset Z$

$(\operatorname{codim} f^{-1}(Z) = \operatorname{codim}(Z))$.

dem. • Ser subvariedad es algo local: $x \in f^{-1}(Z)$, $f^{-1}(Z)$ es subvariedad de X alrededor de $x \iff \exists U \subset X$ abierto, $x \in U$ tal que $f^{-1}(Z) \cap U$ es variedad.

• $y = f(x) \in Z \Rightarrow$ alrededor de y, $Z = \{z \in Y \mid g_1(z) = \dots = g_\ell(z) = 0\}$ con $g_1, \dots, g_\ell$ una colección independiente de funciones $g_i \in C^\infty$.

$\Rightarrow$ cerca de x, $f^{-1}(Z) = \{g_1 \circ f = g_2 \circ f = \dots = g_\ell \circ f = 0\}$



$(g \circ f)^{-1}(0)$

$\Rightarrow d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x : T_x(X) \to \mathbb{R}^\ell$ será sobre $\iff dg_y(\operatorname{Im} df_x) = \mathbb{R}^\ell$

$\therefore g \circ f$ submersión en $x \iff \operatorname{Im}(df_x) + T_y(Z) = T_y(Z)$

$\dim f^{-1}(Z) = \dim X - \ell$,
$\dim Z = \dim Y - \ell$
$\operatorname{codim} f^{-1}(Z) = \operatorname{codim} Z$

definición de $f \pitchfork Z$.

$dg_y : T_y(Y) \to \mathbb{R}^\ell$ si es sobre, y $T_y(Z) = \ker(dg_y)$

Caso más importante: $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y \supset Z$

$i \pitchfork Z \iff \forall x \in X \cap Z$, $T_x X + T_x Z = T_x Y$

Corolario. Si $X \pitchfork Z$, $X \cap Z$ es subvariedad, y $\operatorname{codim}(X\cap Z) = \operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Z$

dem. $\dim X - \dim X\cap Z = \dim Y - \dim Z$ ∎

P.34 #4 (Pollack): Si $X \pitchfork Z$ en Y, $y \in X\cap Z$

$$\Rightarrow T_y(X\cap Z) = T_y(X) \cap T_y(Z)$$

En general, $f: X \to Y \supset Z$, $f \pitchfork Z \Rightarrow W = f^{-1}(Z)$ es variedad y

$$T_x(W) = (df_x)^{-1}(T_{f(x)} Z)$$

---

§6. Homotopía y estabilidad

Def. X, Y variedades y $f_i : X \to Y$, $i=1,2$ suaves. $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Decimos que f_0 es homotópico a f_1 ($f_0 \sim f_1$) si existe un morfismo suave $X \times I \xrightarrow{F} Y$ tal que $F(x,0) = f_0(x)$ y $F(x,1) = f_1(x)$

Ejemplo $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, f_i(x))$

$$\Rightarrow F : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,t) \mapsto (x, tf_0(x) + (1-t)f_1(x))$$

Ejemplo $S^1 \xrightarrow{f} S^2$ f continuo $\Rightarrow f \sim$ constante.

Def. Una propiedad de morfismos es estable si dado morfismo $f_0 : X \to Y$ con esa propiedad y homotopía $f_t : X \to Y$ de f_0 $\Rightarrow$ $\exists \varepsilon > 0$ tal que f_t, con $t < \varepsilon$ tiene esa propiedad.

Ejemplo. $\{f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2 \text{ suave}\}$

$\Rightarrow$ la propiedad de pasar por $(0,0)$ no es estable. Tampoco el intersectar el eje X. Sin embargo, una intersección transversal con el eje X sí lo es.

Teo. Las siguientes clases de morfismos suaves $X \to Y$ con X compacto son estables:

(a) difeo local

(b) inmersiones

(c) submersiones

(d) morfismos $\pitchfork$ en variedades $Z \subset Y$ dada

(e) inmustaciones

(f) difeomorfismos.

Uso de X compacto: Cualquier vecindad de $X \times \{0\} \subset X \times I$ contiene un $X \times [0, \varepsilon]$, algún $\varepsilon \ll 0$.

---

§7. Teorema de Sard y funciones de Morse.

Teo (Sard 1942). El conjunto de valores críticos tiene medida cero.

Medida: Una caja $S \subset \mathbb{R}^n$ es $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

$$\mathrm{Vol}(S) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Def. $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida cero si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ cubrimiento de A por cajas $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} Vol(S_i) < \varepsilon$

Prop. Si $A_1, A_2, \ldots$ son cajas de $\mathbb{R}^n$ con medida cero $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ también

Def. Sea Y una n-variedad, $A \subset Y$. Entonces A tiene medida cero si para cada parametrización local (carta) $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to Y$,

$$\phi^{-1}(A) = \phi^{-1}(A \cap \phi(U)) \subset U \subset \mathbb{R}^n$$

Teo. Sean $\phi_i : U_i \subseteq \mathbb{R}^n \to Y$ parametrizaciones locales tal que $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} \phi_i(U_i)$. Entonces, $A \subset Y$ tiene medida cero $\Leftrightarrow \phi_i^{-1}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene medida cero para cada i.

Aplicación. $X^k \xrightarrow{f} Y^\ell \subset \mathbb{R}^M \quad k < \ell$

$\Rightarrow X =$ ptos críticos de $f \Rightarrow f(X) =$ valores críticos

$\Rightarrow f(X)$ tiene medida cero en Y

Ejemplo. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $f(t) = (t, \sqrt{2}\, t)$

$\Rightarrow f(\mathbb{R})$ es denso, pero de medida cero.

Lema. $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ suave y $A \subset U$ medida cero $\Rightarrow F(A)$ medida cero

dem. • Asumir $\bar{A}$ compacto y contenido en U, ya que A se puede considerar como unión numerable de A_i con $\bar{A}_i$ compacto y en U.

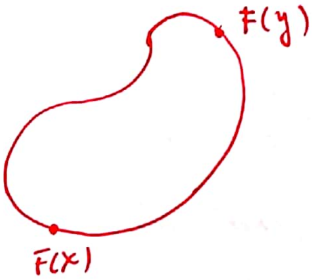
• Entonces como las derivadas parciales son continuas (de F)

$\Rightarrow$ Podemos usar $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| < C$ en $\overline{W}$ y decir

$$|f(x) - f(y)| < M|x-y| \qquad \forall x, y \in \underset{\bar{A} \subset}{B}(p_i, r_i) \subset \overline{W}$$

Scanned with CamScanner

Luego existe otra constante M' tal que si $S = \text{caja} \subset W$
$\Rightarrow f(S) \subset S' = \text{caja}$ con $Vol(S') < M' Vol(S)$



$$|F(x) - F(y)| < M|x-y| \leq M(b-a)$$

$$M^n \underbrace{\prod (b_i - a_i)}_{Vol(S)} \quad \blacksquare$$

31/08/2015

dem teo de Sard. Sea $X^n \xrightarrow{f} Y^p$, $p>0$ suave

(*) Sea $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ parametrizaciones locales (cartas) $\Rightarrow X = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(V_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$
con cartas en X.

y así, valores críticos de $f = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\text{val. críticos } f|_{U_i}\}$

(Fubini) $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado

Para $c \in \mathbb{R}^k$, $V_c := \{c\} \times \mathbb{R}^l$. Supongamos que $\forall c$, $V_c \cap A$ tiene medida cero
$\Rightarrow A$ tiene medida 0 en $\mathbb{R}^n$.

C = puntos críticos de $f \subseteq \mathbb{R}^n$ ($f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$)

conjuntos cerrados en U

$$\begin{cases} C_1 = \{x \in U / df_x = 0\} \subset C \\ C_2 = \{x \in U / df_x = 0 \text{ y } \left.\frac{\partial f_k}{\partial x_i \partial x_j}\right|_x = 0 \ \forall i,j,k\} \subset C_1 \\ \vdots \\ C_i = \{x \in U / \left.\frac{\partial f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}\right|_x = 0 \ \forall i_1 + \cdots + i_n \leq i, \forall l\} \end{cases}$$

Queremos mostrar que $f(C)$ tiene medida cero, a través de:

1. Mostrar que $f(C \setminus C_1)$ tiene medida cero
2. Mostrar que $f(C_i \setminus C_{i+1})$ tiene medida cero $\forall i \geq 1$
3. Mostrar que $f(C_i)$ tiene medida cero, algún i $\left(i > \frac{n}{p} - 1 \right)$

dem!: Mostraremos que alrededor de cada punto $x \in C \setminus C_1$, existe abierto $V \ni x$ tal que $f(V \cap C)$ tiene medida cero. Podemos cubrir $C \setminus C_1$ con un número contable de estas vecindades y así $f(C \setminus C_1)$ tendrá medida cero.

· Como $x \notin C_1$, $\exists \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_x \neq 0$. Considerar $h: U \to \mathbb{R}^n$

$h(x) := (f_1(x), x_2, \dots, x_n) \Rightarrow dh_x$ es invertible

y así $\exists V \subset U$, $h: V \to V'$ es difeo, luego $g := f \circ h^{-1}$

Luego $g := f \circ h^{-1} : V' \to \mathbb{R}^p$ y tiene los mismos valores críticos de f en V.

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[d, phantom, "\cap"] & V \subset U \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

Luego $g: V' \to \mathbb{R}^p$, $(t, x_2, \dots, x_n) \mapsto (t, y_2, \dots, y_p)$

$\Rightarrow$ para cada t, g induce un morfismo

$$g^t : (t \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \to \{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$$

tal que

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline * & \dfrac{\partial g_i^t}{\partial x_j} \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ Un punto en $t \times \mathbb{R}^{n-1}$ es crítico para $g^t \Leftrightarrow$ es crítico para g.

Por inducción, Sard es válido para $n-1 \Rightarrow$ valores críticos de g^t tienen medida cero

$\Rightarrow$ Por Fubini, los valores críticos de g tienen medida cero.

dem. $x \in C_k \setminus C_{k+1} \Rightarrow \exists$ una $k+1$-derivada parcial de f en x que no es cero $\Rightarrow$ podemos encontrar una k-derivada de f, digamos ρ, tal que se anula en C_k (por def), pero $\left.\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\right|_x \neq 0$.

- Luego, $h: U \to \mathbb{R}^n$, $h(x) := (\rho(x), x_2, \dots, x_n)$ mapea $V \ni x \xrightarrow[\text{difeo}]{} V'$, $(V \subseteq U)$.

  Por construcción, h lleva $C_k \cap V$ al hiperplano $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Así, $g = f \circ h^{-1}$ tiene todos sus puntos críticos de tipo C_k en $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Sea $\bar{g}: (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \to \mathbb{R}^p$ la restricción de g. Por inducción, el conjunto de valores críticos de $\bar{g}$ tiene medida cero. Los puntos críticos de g de tipo C_k son obviamente puntos críticos de $\bar{g}$ $\Rightarrow$ la imagen tiene medida cero y así $f(C_k \cap V)$.

- Se cubre $C_k \setminus C_{k-1}$ con cantidad numerable de tales V_j y listo.

dem 3. Si $k > \frac{n}{p} - 1 \Rightarrow f(C_k)$ tiene medida cero.

Sea $S \subset U$ cubo de lado δ. C_k puede ser cubierto por una cantidad numerable de esos cubos. Mostraremos que $f(C_k \cap S)$ tiene medida cero.

- Por Taylor, S compacto, def de C_k tenemos:

$$f(x+h) = f(x) + R(x,h) \quad , \text{con } |R(x,h)| < a|h|^{k+1}$$

(1) constante que depende de f y S.

$$x \in C_k \cap S, \ x+h \in S$$

Scanned with CamScanner

Subdividir S en r^n cubos de lados $\frac{\delta}{r}$.

Sea S_1 un cubo que contiene a $x \in C_k$ $\Rightarrow$ todo punto de S_1 se puede escribir como $x+h$, con $|h| < \sqrt{n}\,\frac{\delta}{r}$ (diagonal) (2).

De (1) tenemos que $f(S_1)$ esté contenido en un cubo de lago $\frac{2a(\sqrt{n}\delta)^{k+1}}{r^{k+1}}$

$= \frac{b}{r^{k+1}}$ (usar (2) para dist. máxima)

$\Rightarrow f(C_k \cap S) \subset \bigcup r^n$ cubos con volumen total $v \leq r^n \left(\frac{b}{r^{k+1}}\right)^p$

Si $n-(k+1)p<0$, $\frac{n}{p}<k+1$ $\Rightarrow$ $b^p r^{n-(k+1)p} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$ ∎

$\rightarrow$ $X^k \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ suave. Si x es un punto regular $\Rightarrow df_x$ es sobre, i.e, $df_x \neq 0$

$\Rightarrow$ localmente (en alguna carta) es como $f(x_1, \dots, x_k) = x_1$.

<u>Pregunta</u>. ¿Qué se puede decir sobre puntos críticos?

<u>Ejemplo</u>. Si X es compacto $\Rightarrow f$ tiene máximo y mínimo, en esos puntos df_x. Luego toda f tiene al menos dos puntos críticos.

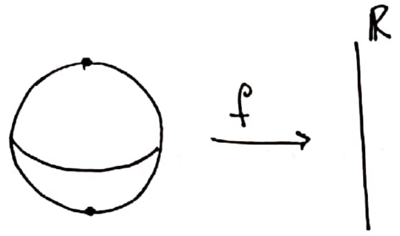
Si x es punto crítico $\Rightarrow$ Existe criterio para ver si max, min, punto silla, a través de $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)\Big|_x$ si H es invertible.

1. Si todos los valores propios >0 $\Rightarrow$ mínimo local
2. Si todos los valores propios <0 $\Rightarrow$ máximo local
3. Si no $\Rightarrow$ punto silla.

Def. Si $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) \Big|_x$ es invertible y x punto crítico

$\Rightarrow$ x es no-degenerado. f con sólo puntos críticos no degenerado se llama función de Morse.

Ejemplo.



f = función altura.

función de Morse

02/09/2015

$X^k \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $x \in X^k$ punto crítico

def. Sea x punto crítico y $H_x = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_x \right)$ invertible $\Rightarrow$ x no degenerado.

Ejemplo. $f(x) = x^n$

n	
0	Todo x crítico
1	No crítico
2	0 punto crítico no degenerado
>2	0 punto crítico degenerado.

Prop. Un punto crítico no degenerado es aislado (de otros puntos críticos).

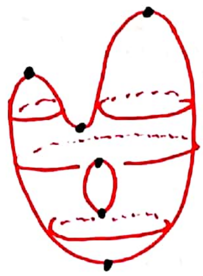
dem. $\mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$, $g = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$

$df_x = 0$ ssi $g(x) = 0$

$dg_x = H(f)x$, si es invertible en x $\Rightarrow$ g es local

$\Rightarrow$ localmente g es biyección.

Ejemplo. Cuando X^k es compacto, los puntos críticos son finitos.



Lema (Morse). Sea $a \in \mathbb{R}^k$ un punto crítico no degenerado de f,

$$(h_{ij}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)(a)$$

$\Rightarrow \exists$ coordenadas $(x_1, \dots, x_k)$ alrededor de a tal que

$f(x) = f(a) + \sum' h_{ij} x_i x_j$

def. $x \in X^k \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ suave en X^k, ϕ parametrización local en x,
x punto crítico

$$\begin{array}{cc} x \in X^k & \\ \uparrow & \uparrow \phi \\ 0 & U \subseteq \mathbb{R}^k \end{array}$$

Si 0 es punto crítico de $f \circ \phi$ y decimos que x es no degenerado si 0 lo es en $f \circ \phi$ y $d(f \circ \phi)_0 = df_x \circ d\phi_0$

Lema. Sea $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ con punto crítico no degenerado en 0. Sea $\Psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ difeomorfismo en 0, $\Psi(0) = 0$ $\Rightarrow f \circ \Psi$ también tiene un punto crítico no degenerado en 0

dem. Queremos $f' = f \circ \Psi$, $\det H \neq 0 \Rightarrow \det H' \neq 0$

$$H' = (d\Psi_0)^t H (d\Psi_0) \quad (\text{Calculando}) \blacksquare$$

y $\det(d\Psi_0) \neq 0$ ($d\Psi_0$ invertible, Ψ_0 difeomorfismo)

Comentario (Raro). Película por Morse "Pits, peaks and passes".

Def. $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ es de Morse, si todos sus puntos críticos son no degenerados.

Lema. $U \underset{\circ}{\subseteq} \mathbb{R}^k \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k$ suave. Entonces para casi todas las k-tuplas $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$,

$$f_a = f + a_1 x_1 + \dots + a_k x_k \text{ es de Morse en } U.$$

dem. Sea $g : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $g = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$

$\Rightarrow (df_a)_p = g(p) + a$, luego p punto crítico de $f_a \Leftrightarrow g(p) = -a$,

como f_a y f tienen las mismas 2ª derivadas parciales $\Rightarrow H(f)(p) = H(f_a)(p) = dg_p$

Si $-a$ es valor regular de g, $\Rightarrow$ si $p \in U$, $g(p) = -a$

$\Rightarrow dg_p$ no singular $\Rightarrow$ todo punto crítico de f_a es no degenerado.

y por teo de Sard, los valores críticos de g forman un conjunto de medida cero.

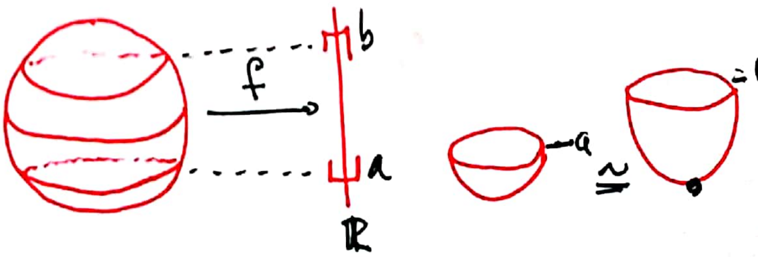
Teorema. Para toda $\underset{\mathbb{R}^N}{\overset{}{X^n}} \!\!\! \begin{smallmatrix} \\ \cap \end{smallmatrix} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ suave, tenemos que para casi todo $a \in \mathbb{R}^N$, f_a es de Morse.

dem. (Leer)

Topología (Geometría) que describe una función de Morse.

Teo. Suponer que $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ de Morse tal que $f^{-1}[a,b]$ compacto (X compacto ya) y supongamos que no hay valores críticos entre a y b,

$\Rightarrow X^a := f^{-1}[-\infty, a] \underset{dif}{\cong} X^b \rightsquigarrow$



def. Sea $X^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, x punto crítico no degenerado

$\Rightarrow H_x$ no singular $\Rightarrow$ tiene n valores propios no cero reales

$\Rightarrow \mathrm{Ind}_f(x) = \#$ valores propios negativos.

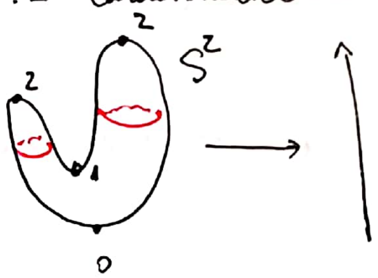
Ejemplo.

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$	Ind
x^2-y^2	1
x^2+y^2	0
$-x-y^2$	2

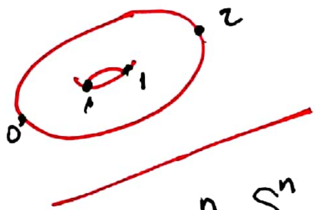
Teo (de Morse). X = variedad diferenciable compacta, $f: X \to \mathbb{R}$ de Morse, Entonces

(1) $\displaystyle\sum_{x \text{ pto crítico}} (-1)^{\mathrm{Ind}_f(x)}$ es independiente de f

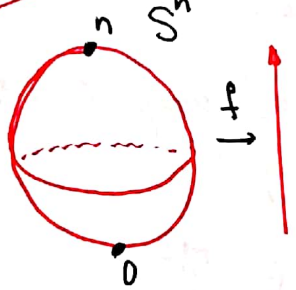
(2) $\overset{\|}{e(X)} :=$ Característica de Euler.

Ejemplo. $S =$ 

$\therefore e(S) = (-1)^0 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^1 = 2$



$(-1)^2 + (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^1 = 0 = e(T)$

Ejemplo. 

$e(S^n) = (-1)^n + (-1)^0 = \begin{cases} 2, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar.} \end{cases}$

Teo. Si X = variedad diferenciable compacta. $\dim X$ = impar $\Rightarrow e(X) = 0$

dem. $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ y $X \xrightarrow{-f} \mathbb{R}$, $\mathrm{ind}_{-f}(x) = n - \mathrm{ind}_f(x)$ ■

Coro. $f:$  $\to \mathbb{R}$ de Morse $\Rightarrow$ tiene al menos 4 puntos críticos

dem. $(-1)^0 \gamma_0 + (-1)^1 \gamma_1 + (-1)^2 \gamma_2 = 0 = e(T)$

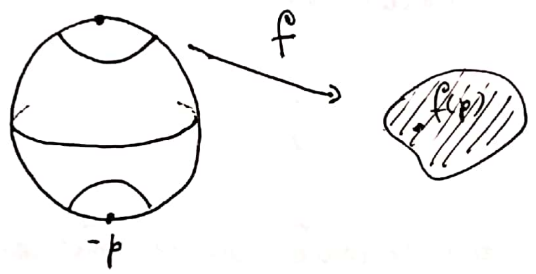
mínimo local y máximo local $\Rightarrow$ sillas ≥ 2, pues $e(T) = 0$ ■

07/09/2015

Problema 1 (I1)

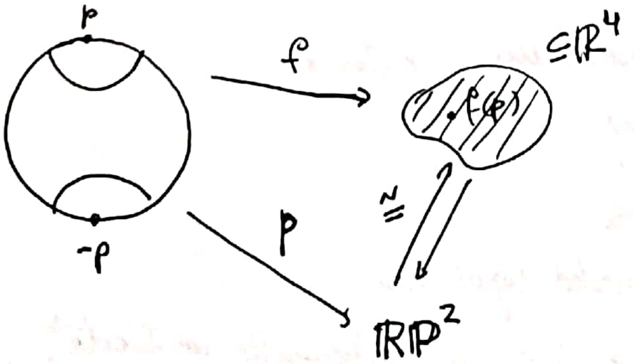
Mostrar que $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x,y,z) = (x^2-y^2, xy, xz, yz)$ es tal que $f(S^2) \subseteq \mathbb{R}^4$ es subvariedad.

- Vía df_x en $\mathbb{R}^3$, podemos decir que $df_x|_{S^2}$ es 1-1 $\Rightarrow$ inmersión.
- También podemos ver que $f(x,y,z) = f(-x,-y,-z)$ $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, y en efecto, en S^2 es 2:1.



- En S^2, f es propia y así podemos usar la demostración inmersión + 1-1 + propia para demostrar que $f(S^2)$ es variedad.
- ¿Qué es $f(S^2)$? La función $f: S^2 \to f(S^2)$ es exactamente el cociente por $x \sim -x$ (f es sobre y $f(S^2)$ tiene base a través de S^2,

$$U \subseteq f(S^2) \text{ abierto} \Leftrightarrow f^{-1}(U) \text{ es abierto}$$



$f|_{S^2}$ es constante en $p^{-1}(y)$)

Más en general : G grupo que actúa en un espacio topológico X

($G \curvearrowright X$: $G \times X \longrightarrow X$ $\qquad g_1(g_2(x)) = (g_1 g_2)(x) \quad \forall g_1, g_2 \quad \forall x$
$(g, x) \longmapsto g(x)$ $\qquad e(x) = x \quad \forall x$, $e \in G$ neutro

homomorfismo
$G \longrightarrow Biy(X)$)

$X =$ espacio topológico (variedad topológica) , $G \longrightarrow Homeo(X)$

$X =$ variedad diferenciable , $G \longrightarrow difeo(X)$

El conjunto de órbitas X/G es el espacio cociente con la topología cociente dada por $X \xrightarrow{p} X/G$

Def. G actúa libre y propiamente discontinua en X si :

1) Dado $x \in X$, $\exists U \ni x$ abierto tal que $g(U) \cap U = \phi \quad \forall g \neq e$

2) Si $x, y \in X$ están en órbitas distintas $\Rightarrow \exists U \ni x$, $V \ni y$ vecindades tales que $U \cap g(V) = \phi$

Teo. $G \curvearrowright X$ libre y propiamente discontinua. Entonces

1) X Hausdorff $\Rightarrow X/G$ Hausdorff

2) X 2º contable $\Rightarrow X/G$ 2º contable

3) X variedad topológica $\Rightarrow X/G$ variedad topológica

4) X variedad diferenciable abstracta $\Rightarrow X/G$ var. diferenciable abstracta.

dem. Observar que $p : X \to X/G$ es abierto

Si $U \subseteq X$ abierto $\Rightarrow p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} \overset{\text{homeo}}{g}(U)$ abiertos.

1.- $\bar{x}, \bar{y} \in X/G$ y $x, y \in X$, $p(x) = \bar{x}$, $p(y) = \bar{y}$

$\Rightarrow$ usar $\underset{x}{\overset{U}{\psi}}$ y $\underset{y}{\overset{V}{\psi}}$ de 2) $\Rightarrow p(U) \cap p(V) = \emptyset$

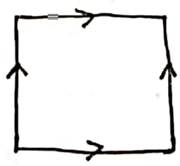
2.- $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ base numerable de X $\Rightarrow$ $\{p(U_i)\}_{i=1}^{\infty}$ base numerable de X/G

3.- y 4.- crear cartas para X/G.

Ejemplo. (1) $X = \mathbb{R}^2$, $G = \langle (x,y) \overset{a}{\mapsto} (x+1, y), (x,y) \overset{b}{\mapsto} (x, y+1) \rangle$

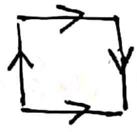
$\Rightarrow \mathbb{R}^2/G =$  con la estructura inducida de $\mathbb{R}^2$.

$\overset{\shortparallel}{T^2} \subseteq \mathbb{R}^3$

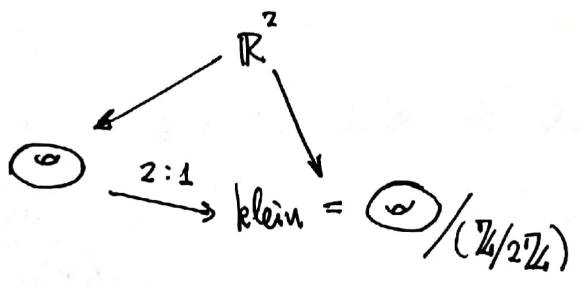


(2) $X = \mathbb{R}^2$, $G' = \langle (x,y) \overset{a'}{\mapsto} (x+1, -y), (x,y) \overset{b'}{\mapsto} (x, y+1) \rangle$

$\Rightarrow X/G' =$  botella de Klein



$G'' = \langle a'^2, b' \rangle \trianglelefteq G'$, $[G' : G''] = 2$



Corolario. $e(K) = \frac{1}{2} e(T^2) = 0$ (e: Característica de Euler)

• Demostraremos más tarde que $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong K$

Teorema. Superficies compactas suaves $\overset{\text{conexas}}{}$ caen en dos tipos:

1) Orientables: $\underbrace{T^2 \# T^2 \# \dots \# T^2}_{g}$ $(e = 2-2g)$

2) No orientables: $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$ $(1, 0, -1, -2, \dots)$

[fórmula: $e(X_1 \# X_2) = e(X_1) + e(X_2) - 2$]

Las clases difeo 2-variedades compactas forman un semigrupo abeliano generado por T^2, $\mathbb{RP}^2$ con una relación

$$\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 = \mathbb{RP}^2 \# T^2$$

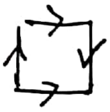
---

§8. Incrustaciones de variedades en $\mathbb{R}^N$.

$X \subseteq \mathbb{R}^N \subseteq \mathbb{R}^{N+1} \dots$ N arbitrariamente grande.

Problema: minimizar el N.

Ejemplo. (1) $S^1 \not\subset \mathbb{R}$ ni topológica ni diferenciable, pero $S^1 \subset \mathbb{R}^2$

(2) Botella de Klein =  no vive en $\mathbb{R}^3$, pero sí en $\mathbb{R}^4$.

Teo (Whitney). $X^n \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ (de hecho, $X^n \subset \mathbb{R}^{2n}$)

def. El fibrado tangente ($X^n \subset \mathbb{R}^N$) es

$$TX = \{(x,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mid x \in X,\ v \in T_x(X)\}$$

→ Notar que $X \subset TX$ como $X = \{(x,0)\}$. Digamos $f: X^k \to Y^l$ suave

$Y^l \subseteq \mathbb{R}^M \Rightarrow df: TX \to TY$, $df(x,v) = (f(x), df_x(v))$

Prop. df es función suave entre $\mathbb{R}^{2N}$ y $\mathbb{R}^{2M}$

dem. • Si $(x,v) \in TX \subset \mathbb{R}^{2N}$, queremos vecindad $U' \ni (x,v)$, $U' \subset \mathbb{R}^{2N}$ y

$\underset{\text{suave}}{\Phi: U' \to \mathbb{R}^{2M}}$ tal que $\Phi|_{U' \cap TX} = df|_{U' \cap TX}$

• Sabemos que $f: X \to Y$ suave $\Rightarrow \exists F: x \in U \to \mathbb{R}^M$ suave

$F|_{U \cap X} = f|_{U \cap X}$ $\forall U \ni x$ vecindad

• Tomar $dF: TU \to T\mathbb{R}^M$ y $\Phi := dF$ suave.

$TU = U' = U \times \mathbb{R}^N \subseteq \mathbb{R}^{2N}$

Prop. Dado $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \Rightarrow TX \xrightarrow{df} TY \xrightarrow{dg} TZ$, $d(g \circ f) = dg \circ df: TX \to TZ$

dem. $g \circ f: X \to Z$, $d(g \circ f)(x,v) = (g \circ f(x), d(g \circ f)_x(v))$

$$= (g(f(x)), dg_{f(x)}(df_x(v)))$$

$$= dg(df(x,v))$$

Corolario. Si $f: X \to Y$ difeo $\Rightarrow df: TX \to TY$ difeo

dem. $f \circ f^{-1} = \mathbb{1}$, $d(f \circ f^{-1}) = d_{\mathbb{1}} = df \circ df^{-1} = \mathbb{1}$

y $df^{-1} \circ df = \mathbb{1}$ ∎

Prop. TX es $2n$-variedad diferenciable

dem. Si $\phi: U \subseteq \mathbb{R}^k \to X$ parametrización local de X

$$\Rightarrow d\phi : \underset{\substack{\| \\ U \times \mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^{2k}}}{TU} \to TX \quad \text{es parametrización local de } TX$$

y de $\dim = 2k$

$$TX \underset{\text{difeo}}{\not\cong} X \times \mathbb{R}^k$$

<u>09/09/2015</u>

$X^n \subset \mathbb{R}^N$

$$TX = \{(x,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \,/\, x \in X,\ v \in T_x(X)\}$$

$\downarrow$

fibrado tangente

Probamos: $TX \subset \mathbb{R}^{2N}$ es una $2n$-variedad diferencial con cartas

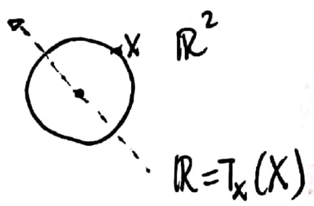
$\phi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to X$

$$\Rightarrow d\phi : \underset{\substack{\| \\ \underbrace{U \times \mathbb{R}^n}_{TX \text{ es localmente trivial}}}}{TU} \to TX \quad \text{es carta abierta de } (x,v)$$

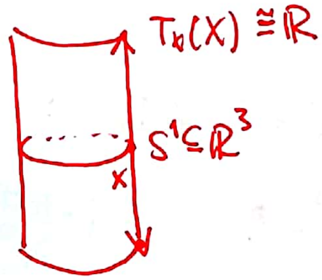
Ejemplo. $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$$TS^1 = \{(x,v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \,/\, x \in S^1,\ v \in T_x(S^1) = \mathbb{R}\}$$

Se puede demostrar que $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$



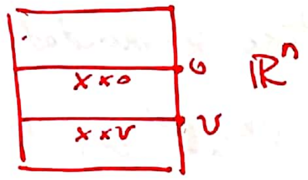
construirlo



¿Será que $TX = X \times \mathbb{R}$ siempre?

Resp. Ya partiendo con S^2 <u>NO</u>.

$$\underset{\substack{\text{dif}\\(\text{top})}}{\mathrm{inv}(TX)} \neq \underset{\substack{\text{dif}\\(\text{top})}}{\mathrm{inv}(X\times\mathbb{R}^n)}$$



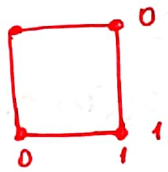
<u>Invariante topológico</u>: Característica de Euler

- Si X, Y son CW-complejos con

  i-cells e_{x_i} para X

   e_{y_j} para Y

$\Rightarrow$ $e_{x_i} \times e_{y_j} = (i+j)$-cell para $X\times Y$, $n_{x_k} = \#$ k-cells de X

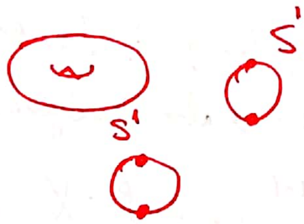


4 ptos

4 trozos

1 ▨

$\therefore \#$ k-cells de $X\times Y = n_{x_0} n_{y_k} + n_{x_1} n_{y_{k-1}} + \cdots + n_{k_X} n_{y_0}$



(estudiar)

<u>Teo</u>. $e(X\times Y) = e(X)\,e(Y)$

$\Rightarrow \boxed{e(X\times\mathbb{R}^n) = e(X)}$??

Teorema (Whitney, 1936).

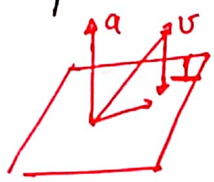
Toda k-variedad diferenciable admite una inmersión 1-1 en $\mathbb{R}^{2k+1}$.
En particular, toda k-variedad diferenciable compacta vive en $\mathbb{R}^{2k+1}$.

dem. Idea: Dada $X^k \subseteq \mathbb{R}^N$ con $N > 2k+1$

$\Rightarrow$ produciremos una proyección lineal $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{2k+1}$ que restringe a inmersión 1-1.

- Por inducción mostraremos: Si $f: X \to \mathbb{R}^M$ 1-1 inmersión con $M > 2k+1$ $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}^M$ tal que $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}^M \xrightarrow{\perp} \mathbb{R}^{M-1}$ es inmersión 1-1

donde $\perp$ es proyector sobre el complemento ortogonal de a



$H = \{b \in \mathbb{R}^M / b \perp a\}$

- Definir $h: X \times X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^M$

$$h(x,y,t) = t(f(x) - f(y))$$

$g: TX \to \mathbb{R}^M$ ambas son suaves

$$g(x,v) = df_x(v)$$

Como $M > 2k+1$, Sard $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}^M$ tal que no pertenece ni a Im h ni a Im g ($a \neq 0$ ya que $0 \in$ ambas imágenes)

Sea $\pi: \mathbb{R}^M \xrightarrow{\perp} \mathbb{R}^{M-1} \Rightarrow \pi \circ f: X \to H = \mathbb{R}^{M-1}$ es 1-1 e inmersión.

(1-1) $\pi \circ f(x) = \pi \circ f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = ta$, algún $t \in \mathbb{R}$

Si $x \neq y \Rightarrow t \neq 0$ ya que f es 1-1

luego $h(x, y, \frac{1}{t}) = a$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

(Inmersión). Si $v\in T_x(X)$ no cero tal que $d(\pi\circ f)_x(v)=0$

$\Rightarrow$ como π es lineal, $\pi\circ df_x(v)=0$

$\Rightarrow df_x(v)=ta$ para algún $t\in\mathbb{R}$

Como f es inmersión, $t\neq 0$, $g(x,\frac{v}{t})=a$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

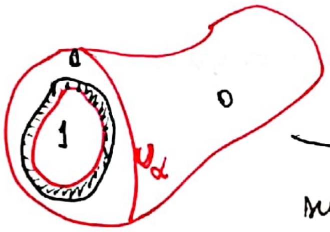
Para generalizar a cualquier (y tener incrustación) se modifica el argumento por tener morfismo propio ($\forall K\subseteq Y$ compacto, $f^{-1}(K)$ compacto).

Lo único que necesitamos es: Dado X variedad diferenciable, existe $\rho: X\to\mathbb{R}$ suave y propia.

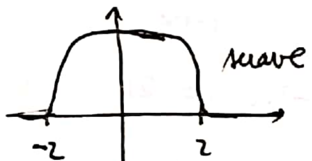
dem. Usa particiones suaves del 1 (unidad) en X

$$\rho=\sum_{i=1}^{\infty} i\,\theta_i$$

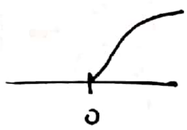
Pollack: pág 52-53



$\xrightarrow[\text{suaves}]{\theta_i}[0,1]\subseteq\mathbb{R}$



$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x>0 \\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$



Teo. Toda k-variedad diferenciable $\subset\mathbb{R}^{2k+1}$

dem. Tomar inmersión 1-1 $X\longrightarrow\mathbb{R}^{2k+1}$

- Componer con difeo de $\mathbb{R}^{2k+1}$ con bola 1 en $\mathbb{R}^{2k+1}$
- Tenemos inmersión 1-1 $f: X\to\mathbb{R}^{2k+1}$ con $|f(x)|<1$ $\forall x\in X$
- Definir $F: X\to\mathbb{R}^{2k+2}$
  $x\mapsto(f(x),\rho(x))$

y es inmersión 1-1 $\left(dF=\begin{bmatrix} df \\ d\rho\end{bmatrix}\right)$

• Como antes vamos con $\pi : \mathbb{R}^{2k+2} \longrightarrow H = \mathbb{R}^{2k+1}$ con algún $a \in \mathbb{R}^{2k+2}$,

$\pi \circ F : X \to H$ es inmersión 1-1 para casi todo $a \in S^{2k+1} \subset \mathbb{R}^{2k+2}$

no polos de

• $\pi \circ F$ es propia.

En efecto, dado $c > 0$, $\exists d > 0$ tal que

(*) los $x \in X$ con $|\pi \circ F(x)| \leq c$ están contenidos en el conjunto donde $|\rho(x)| \leq d$. Como ρ es propia $\Rightarrow \{x \in X \,/\, |\pi \circ F(x)| \leq c\}$ es compacto

$\Rightarrow$ la preimagen de toda bola cerrada en H es compacta en X y así

$\pi \circ F$ es propia. Si (*) no es verdad $\Rightarrow \exists \{x_i\} \in X$ con $|\pi \circ F(x_i)| < c$,

pero $\rho(x_i) \xrightarrow[i \to \infty]{} \infty$. Por definición, $\forall z \in \mathbb{R}^{2k+2}$, $\pi(z)$ es tal que

$z - \pi(z) = ta$, así $F(x_i) - \pi \circ F(x_i) = t_i a$.

Sea $\omega_i = \dfrac{1}{\rho(x_i)} [F(x_i) - \pi \circ F(x_i)]$

$$\therefore \quad \frac{F(x_i)}{\rho(x_i)} = \left(\frac{f(x_i)}{\rho(x_i)}, 1 \right) \xrightarrow[i \to \infty]{} (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

ya que $|f(x_i)| < 1 \quad \forall i$

tenemos también: $\left| \dfrac{\pi \circ F(x_i)}{\rho(x_i)} \right| \leq \dfrac{c}{|\rho(x_i)|} \xrightarrow{i \to \infty} 0$

Así $\omega_i \xrightarrow[i \to \infty]{} (0, 0, \ldots, 0, 1)$, pero $\omega_i = t_i a \xrightarrow[i \to \infty]{} (0, 0, \ldots, 0, 1)$

y luego a debe ser uno de los polos.

14/09/2015.

X k-variedad diferenciable $\subset \mathbb{R}^N$

Un campo de vectores es $v: X \to \mathbb{R}^N$ y es suave.
$x \mapsto v(x) \in T_x(X)$

Capítulos posteriores en Guillemin-Pollack $\left\{ \right.$ (Poincare-Hopf) X orientable y compacta además, para cada cero de v se puede asignar un índice $\in \mathbb{Z}$

Luego, $e(X) = \sum_{v(x)=0} ind_x(v)$

Sea S^k, k impar, la k-esfera

$$S^k = \{ \underbrace{x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2}_{\#\text{ par de variables}} = 1 \} \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$$

$\therefore v: S^k \to \mathbb{R}^{k+1}$

$(x_1, \dots, x_{k+1}) \mapsto (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{k+1}, -x_k)$

Notar: $(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \cdot (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{k+1}, -x_k) = 0$

nunca es cero

$\therefore e(S^k) = 0$ si k es impar.

X = k-variedad diferenciable $\subset \mathbb{R}^N$

$TX = X \times \mathbb{R}^k$.

$v: X \to \mathbb{R}^N$, será un campo vectorial sin ceros
$x \mapsto v$ = constante en $\mathbb{R}^k$

$\Rightarrow e(X) = 0$.

$\{$ Campo vectorial en X $\}$

$$\Big|\Big|\Big| \ 1\text{-}1$$

$\left\{ \begin{tikzcd} TX \arrow[d, "pr"] \\ X \arrow[u, bend right, "\sigma"'] \end{tikzcd} \right.$ secciones, tal que $pr \circ \sigma = 1_X$

Dado $\begin{tikzcd} TX \arrow[d, "pr_1"'] \\ X \arrow[u, bend right, "\sigma"'] \end{tikzcd}$ $\sigma \circ pr_1 = 1_X$, $v = pr_2 \circ \sigma : X \to \mathbb{R}^N$

$$TX = \{(x,v) \in \mathbb{R}^{2N} \ / \ x \in X, \ v \in T_x(X)\}$$

$$v : X \to \mathbb{R}^N$$

$$X \xrightarrow{\sigma} TX$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, "1_X"'] & (x, v(x)) \arrow[d, "pr"] \\ & x \end{tikzcd}$$

$\therefore$ S^{2k} tienen $TS^{2k} \neq S^{2k} \times \mathbb{R}^{2k+1}$

Resumen:

<u>Teo 1</u>. (Whitney 1936) Toda k-variedad diferenciable admite una inmersión 1-1 en $\mathbb{R}^{2k+1}$. En particular, toda compacta vive en $\mathbb{R}^{2k+1}$.

<u>Teo 2</u>. (+ propia) Toda k-variedad diferenciable vive en $\mathbb{R}^{2k+1}$

<u>Teo 3</u>. Toda k-variedad diferenciable vive en $\mathbb{R}^{2k}$.

Regreso a variedades abstractas

def (recuerdo) Un espacio topológico X es una n-variedad topológica si es Hausdorff, 2º numerable y para todo $x \in X$, $\exists \phi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to X$ continua tal que $\phi : U \to \phi(U) \ni x$ es homeomorfismo.

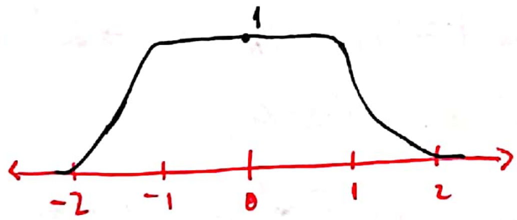
Teo. Si X es variedad topológica compacta $\Rightarrow \exists F : X \to \mathbb{R}^N$ para algún N tal que $X \to F(X)$ es homeomorfismo.

dem • Suficiente construir función continua 1-1 $F : X \to \mathbb{R}^N$ (ya que $F^{-1} : F(X) \to X$ si C cerrado en $X \Rightarrow (F^{-1})^{-1}(C) = F(C)$ compacto y así cerrado en $\mathbb{R}^N$).

• Dado punto $x \in X$, sea $\phi_x : B(\vec{0}, 3) \subseteq \mathbb{R}^N \to X$ parametrización local

$\therefore$ Cubrir X por estas parametrizaciones $X = \bigcup_{i=1}^{j} \phi_i(B(\vec{0}, 1))$

• En $\mathbb{R}$ tenemos la función C^∞, $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico es



• Para $z \in \mathbb{R}^n$, definir $f(z) = \alpha(|z|)$ es C^∞

• Definir $g_i : X \to \mathbb{R}$

$$g_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \phi_i(B(\vec{0}, 3)) \\ f(\phi^{-1}(x)) & \text{si } x \in \phi_i(B(\vec{0}, 3)) \end{cases}$$

g_i es C^∞.

Finalmente definir $h_i(x) = \begin{cases} g_i(x)\, \phi_i^{-1}(x) & \text{si } x \in \operatorname{Im}\phi_i \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

- $F : X \to \mathbb{R}^J \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{J\text{-veces}}$

$$F(x) = (g_1(x), \dots g_J(x), h_1(x), \dots, h_J(x)) \quad \text{es continua}$$

$F(x) = F(y) \Rightarrow g_i(x) = g_i(y)$ y $h_j(x) = h_j(y)$ $\forall i, j$

Pero: $\exists i$ por construcción tal que $g_i(x) = 1$

$\Rightarrow g_i(x) = 1 \Rightarrow x, y \in \phi_i(B(\vec{0}, 1))$ y luego $h_i(x) = h_i(y) \Rightarrow$ por def que $\phi_i^{-1}(x) = \phi_i^{-1}(y) \Rightarrow x = y$ $\square$

Variedades topológicas compactas $\subset \mathbb{R}^N$.

Teorema Si X es una n-variedad diferenciable compacta abstracta
$\Rightarrow \exists F_i : X \to \mathbb{R}$ suaves tales que $F = (F_1, \dots, F_N) : X \to \mathbb{R}^N$ es una incrustación en una $F(X) \subseteq \mathbb{R}^N$ según Guillemin - Pollack

dem. Tomar los $\{\phi_i\}_{i=1}^{J}$ como en el caso topológico y considerar la misma $F : X \to \mathbb{R}^{J(n+1)}$ la cual es homeo en la imagen.

- Las F_i ya son suaves por construcción.
- Para cada $i \in \{1, \dots, J\}$, $F \circ \phi_i : B(\vec{0}, 3) \to \mathbb{R}^{J(n+1)}$ es una inmersión $B(\vec{0}, 1)$ ya que:

$$F \circ \phi_i |_{B(\vec{0},1)} = (\dots, 1, \dots, x_1, \dots, x_n, \dots)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\phi_i^{-1}"'] & \mathbb{R}^{J(n+1)} \\ \mathbb{R}^N \arrow[u, shift right, "\phi_i"'] \end{tikzcd} \quad x_1, \dots, x_n$$

$$\Rightarrow d(F \circ \phi_i) = \left[\begin{array}{c} * \\ \hline 1_{\mathbb{R}^n} \\ \hline * \end{array} \right] \Rightarrow \text{inmersión} \ \square$$

Variedades algebraicas proyectivas suaves sobre $\mathbb{C}$ $\subsetneq$ Variedades diferenciables compactas ($\subset \mathbb{R}^N$) $\subsetneq$ variedad topológica compacta ($\subset \mathbb{R}^N$)

<u>Hecho</u>. Existen variedades topológicas compactas no homeomorfas a una variedad diferencial

$n=8$ Milnor (60') $\qquad n=4$ (Freedman 80')

y $n<4$ no hay ejemplos ($\pm$ por el 2003)

dim 1 : S^1

dim 2 : $T^2 =$, $\mathbb{RP}^2 = S^2/_{x\sim -x}$, $S^2 =$

Suma conexa : $M_1 \# M_2$ = suave

misma dim 2 a través de un

dos-variedades diferenciables compactas $= \begin{cases} \text{(orientable)} & S^2, \underbrace{T^2 \# T^2 \# \cdots \# T^2}_{g\text{-veces}} \\ \text{(no orientable)} & \underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2}_{r\text{-veces}} \end{cases}$

$(\mathbb{RP}^2)^3 = \mathbb{RP}^2 \# T^2$

$\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 = K$, K - botella de Klein

TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

Asignación de invariantes algebraicos a espacios topológicos y morfismos continuos. Más aún, queremos que estos invariantes algebraicos se preserven bajo "deformaciones continuas topológicas".

Categoría espacios topológicos $\qquad\qquad$ Categoría de Grupos

$$\text{Functor}$$

$$X \longmapsto A(X)$$

$$X \xrightarrow{f} Y \longmapsto A(X) \xrightarrow{f_*} A(Y)$$

$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ y $(1_X)_* = 1_{A(X)}$

Def. Una homotopía entre morfismos $h : p \simeq q$, $p, q : X \to Y$ continuas, es un morfismo continuo $h : X \times I \to Y$ tal que $h(x,0) = p$, $h(x,1) = q$

Lo que queremos es $p_* = q_*$ si $p \simeq q$.

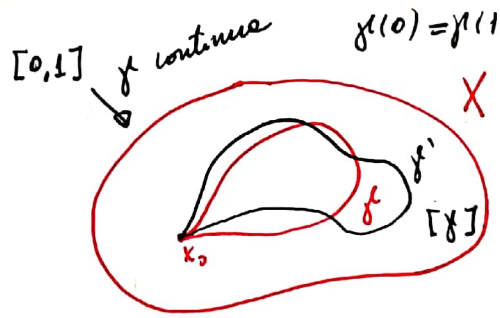
Esto funciona así:

1. Se define construcción algebraica de $A(X)$ y se prueba invarianza homotópica.
2. Se calcula A para espacios y morfismos adecuados.
3. Tomamos algún problema que queremos resolver, lo deformamos a algo en 2, y ...!

Miraremos $A(X)$ = grupo fundamental de X con punto base $x_0 \in X$ $= \pi_1(X, x_0)$ (Primer grupo de homotopía)

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ ‖

clases de homotopía de loops con base x_0



$\gamma(0)=\gamma(1)=x_0$

$$\gamma'\gamma(t) := \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma'(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$\gamma^{-1}(t) := \gamma(1-t)$$

Ejemplo. $\pi_1(S^1,1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = 0$, $\pi_1\left(\begin{smallmatrix}\text{conjunto} \\ \text{convexo de} \\ \mathbb{R}^n\end{smallmatrix}, x_0\right) = 0$

Prop. $\nexists$ morfismo continuo $r : D^2 \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow S^1$ tal que $r \circ i = 1_{S^1}$

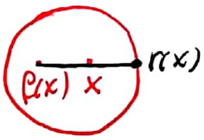
$$\begin{array}{c} D^2 \\ {\scriptstyle i}\uparrow \\ S^1 \end{array} \qquad D^2 = \{|z| \le 1\}$$

dem. $\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1,1) \longrightarrow \pi_1(D^2,1)^{\,0} \longrightarrow \pi_1(S^1,1) \cong \mathbb{Z}$ $\quad (\Rightarrow\Leftarrow)$.

$$\underbrace{\hspace{6cm}}_{1_{\pi_1(S^1,1)}}$$

Teo. (Brouwer) Todo morfismo continuo $D^2 \xrightarrow{f} D^2$ tiene punto fijo.

dem. Si $f(x) \neq x$ $\forall x \in D^2 \Rightarrow$ definir $r : D^2 \to S^1$, $x \mapsto r(x)$ continua , de la manera siguiente



Def. X = espacio topológico , $x, y \in X$. Un camino de x a y es una $f : I \to X$ continua , $f(0) = x$, $f(1) = y$ $\quad (f : x \to y)$

Ejemplo. $X = I^2$, $\exists f : I \to X$ camino que rellene todo X (curvas pueden ser contraintuitivas)

Scanned with CamScanner

Def. $f: x \to y$, $g: x \to y$ caminos. Decimos que $f \sim g$ ssi $\exists$ homotopía

$$h: f \sim g \quad \begin{cases} h: I \times I \to X \\ h(s,0) = f(s) \\ h(s,1) = g(s) \end{cases}$$

tal que $h(0,t) = x$, $h(1,t) = y$ $\forall t \in I$.

Obs. $\sim$ = relación de equivalencia

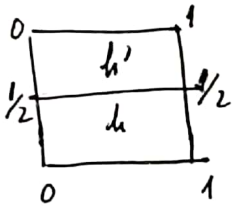
$f \sim f$ a través de $f \times 1_I$

$f \sim g \Rightarrow h: I \times I \to X \Rightarrow g \sim f$ con $h'(s,t) = h(s, 1-t)$

$f \underset{h}{\sim} g$, $g \underset{h'}{\sim} r \Rightarrow h'': I \times I \to X$

$$h''(s,t) = \begin{cases} h(s, 2t) & t \in [0, 1/2] \\ h'(s, 2t-1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$\Rightarrow f \underset{h''}{\sim} r$



Def (Composición de caminos)

Sean $f: x \to y$, $g: y \to z$ caminos, se define $gf: x \to z$ como

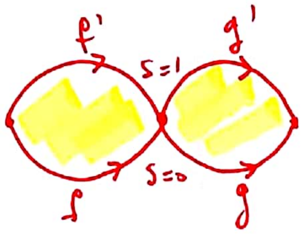
$$gf(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, 1/2] \\ g(2t-1), & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Sea $[g]$ = clase homotopías de caminos de $g: x \to y$

Prop. def. $[g][f] = [gf]$ (bien definido). demostrado!

Scanned with CamScanner

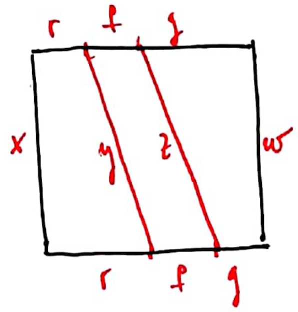
$\underline{\text{dem}}$. Si $g \underset{h_g}{\sim} g'$, $f \underset{h_f}{\sim} f'$ $\Rightarrow$ $gf \underset{h}{\sim} g'f'$



$$h(s,t) = \begin{cases} h_f(s, 2t) , & t \in [0, 1/2] \\ h_g(s, 2t-1) , & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$ ■

$\underline{\text{Prop}}$. $[g]\big([f][r]\big) = \big([g][f]\big)[r]$

$\underline{\text{dem}}$.

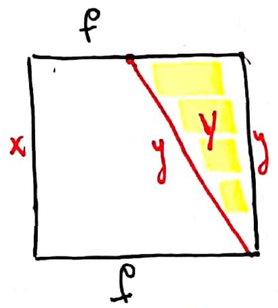


$x \xrightarrow{r} y \xrightarrow{f} z \xrightarrow{g} w$

Sea $1_x : x \to X$ $\quad 1_x(t) = x \quad \forall t$

$\underline{\text{Prop}}$. Dado $f: x \to y$, $[1_y][f] = [f][1_x] = [f]$

$\underline{\text{dem}}$.

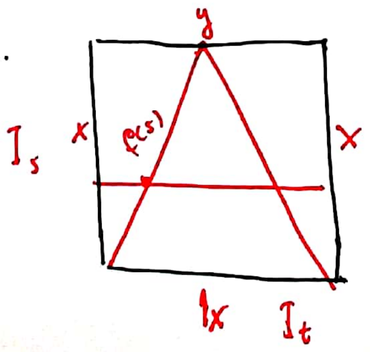


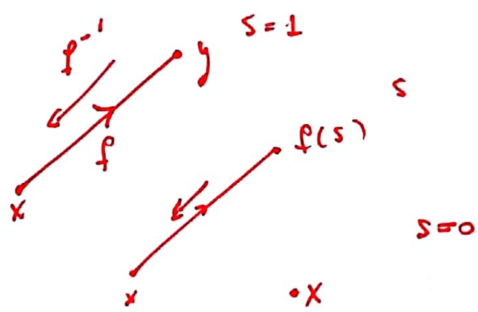
$\underline{\text{Def}}$. $f: x \to y \Rightarrow f^{-1}: y \to x \quad f^{-1}(t) = f(1-t)$

$\underline{\text{Prop}}$. Si $g \sim f \Rightarrow g^{-1} \sim f^{-1}$ $\quad \therefore [f]^{-1} = [f^{-1}]$ y satisface

$[f]^{-1}[f] = [1_x]$, $[f][f^{-1}] = [1_y]$

$\underline{\text{dem}}$.





Def. $\pi_1(X,x)$ = clases de loops $x \to x$ en X con la operación $[f][g]=[fg]$
e identidad $[1_x]$

Teo. Es grupo

Obs. $\underset{\text{loop}}{I \to X} \Leftrightarrow S^1 \to X$ continua

Obs. $\pi_1(X,x)$ no es necesariamente abeliano.

Prop. $\pi_1($conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$, $p \in A) = 0$

dem.

Prop. $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y)$

dem. $f: I \to X \times Y$
$f_1: I \to X$
$f_2: I \to Y$

$$\begin{aligned} \pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y) &\longrightarrow \pi_1(X \times Y, x \times y) \\ ([f_1],[f_2]) &\longmapsto [f_1 \times f_2] \end{aligned}$$

es isomorfismo

$f = f_1 \times f_2 \sim x \times y$

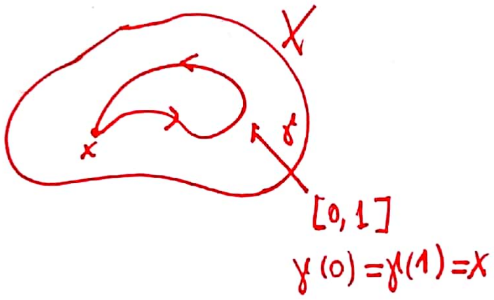
$$\begin{tikzcd} I \times I \arrow[r, "h"] \arrow[d, "h_1"'] \arrow[dr, "h_2"] & X \times Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \\ X & Y \end{tikzcd}$$

en realidad es
$(f_1, f_2): I \longrightarrow X \times Y$
$t \longmapsto (f_1(t), f_2(t))$

23/09/2015

Resumen. Dado X espacio topológico, $x \in X$

$$\begin{array}{ccc} f & & X \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \text{Functor} \\ f_* & & \pi_1(X,x) = \{\text{Clases de homotopía}, \circ\} \end{array}$$



Tarea: Calcular $\pi_1(X,x)$

$$\pi_1\left(\begin{matrix}\text{convexo en} \\ \mathbb{R}^n\end{matrix}, x\right) = 0.$$

$$\pi_1(X \times Y, x \times y) = \pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y)$$

Teo. $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$

Puntos bases: Suponer $a : x \to y$ camino en X

$$\Rightarrow \gamma[a] : \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y), \quad \gamma[a]([f]) = [afa^{-1}]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f \sim f' \\ \Rightarrow afa^{-1} \sim af'a^{-1} \end{array}}$$

$$\gamma([a])([gf]) = [agfa^{-1}] = [ag 1_x fa^{-1}] = \ldots = \gamma[a]([g])\,\gamma[a]([f])$$

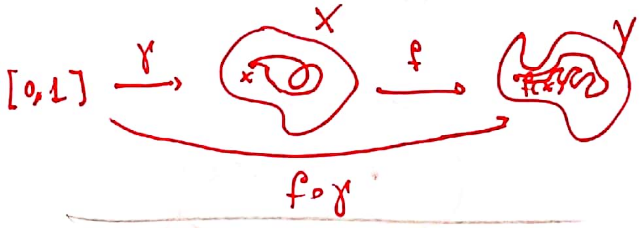
homomorfismo de grupos (depende de $[a]$). ✓

Si $b : y \to z$ otro camino, $\gamma[ba] = \gamma[b]\gamma[a]$. En particular, tomando $b = a^{-1} \Rightarrow \gamma[a]$ es isomorfismo. | se puede demostrar que $\gamma[a]$ es isomorfismo de manera directa

Resultado: $\pi_1(X,x)$ abeliano $\Leftrightarrow \gamma[a] = \gamma[b]\ \forall a,b$

Si $f : X \to Y$ continua $\Rightarrow f_* : \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x))$

$$[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$



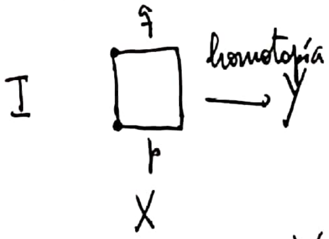
Claramente f_* es un homomorfismo de grupos.

$(1_X)_* = 1_{\pi_1(X,x)}$

Si $g : Y \to Z \Rightarrow g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$

obs. f homeo $\Rightarrow f_*$ isomorfismo
. la demostración es fácil.
ocupar

Prop. $p, q : X \to Y$ continuas, con $p \sim q$. Se tiene



$h(x,t) =$ camino en Y

$h(x,0) = p(x)$
$h(x,1) = q(x)$ } a

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X,x) \arrow[dl, "p_*"'] \arrow[dr, "q_*"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
\pi_1(Y,p(x)) \arrow[rr, "{\gamma[a]}"', "\text{isomorfismo}"' {yshift=-12pt}] & & \pi_1(Y,q(x))
\end{tikzcd}$$

dem. Tarea, ver el libro.

def. $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica ssi $\exists g : Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ g \sim 1_Y$, $g \circ f \sim 1_X$. mega importante!

$f : X \to Y$ equivalencia homotópica
$\Rightarrow f_* : \pi_1(X,x) \to (Y, f(x))$ isomorfismo.

Def. Un espacio X es contractible si $X \sim$ pto

Ejemplo. $X = \mathbb{R}^n \supset$ pto $\Rightarrow f : X \to$ pto

y $i :$ pto $\hookrightarrow X \Rightarrow f \circ i = 1_{pto}$

$f = i \circ f : X \to$ pto , $h : I \times X \to X$

$$h(t,x) = t \cdot pto + (1-t)\, x$$

$$f \underset{h}{\simeq} 1_X$$

Corolario. $f : X \to Y$ equivalencia homotópica $\Rightarrow f_*$ isomorfismo.

dem. • Para cada $n \in \mathbb{Z}$, $f_n : I \to S^1$, $f_n(s) = e^{2\pi i n s}$

• Entonces tenemos $i : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, 1)$, $i(n) = [f_n]$

• $p : \mathbb{R} \to S^1$ $\qquad \tilde{f}_n(s) = sn$

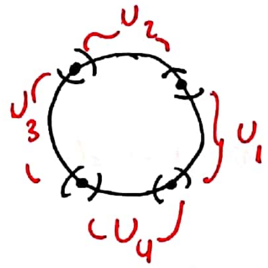
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "p"] & S^1 \\ & {[0,1]} \arrow[ul, "\tilde{f}_n"] \arrow[u, "f_n"'] \end{tikzcd}$$

• La idea es que todo $f : I \to S^1$ con $f(0) = 1$ tendrá un único $\underbrace{\text{levantamiento}}_{\text{tal que } p \circ \tilde{f} = f}$

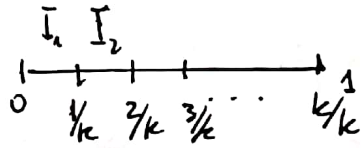
$\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$.

Lema (numero de Lebesgue). Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento de un espacio métrico (X, d) por abiertos. Si X es compacto, entonces existe $\delta > 0$ tal que cada subconjunto de X de diámetro $< \delta$ está en algún abierto de $\mathcal{A}$.

• Ahora subdividir S^1 en



tal que por Lebesgue $\exists k \in \mathbb{N}$ con



$f(I_j) \subseteq U_i$ algún i

• La idea es levantar pedazo por pedazo.

$\Rightarrow \exists \tilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ único tal que $\tilde{f}(0) = 0$, $p \circ \tilde{f} = f$

• Definir $j : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$, $j([f]) = \tilde{f}(1)$

Necesitamos $h : f \sim g \Rightarrow \tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$

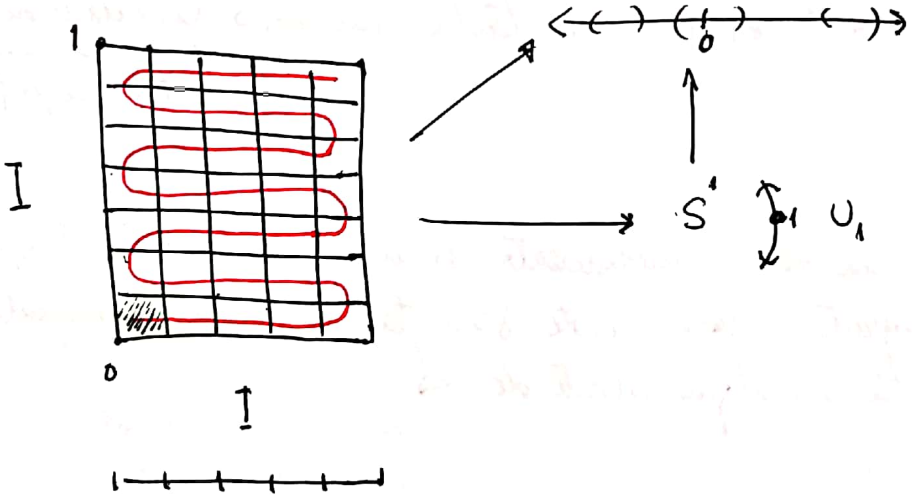
$j \circ i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \Rightarrow 1_{\mathbb{Z}}$

Suponer $j[f] = j[g] \Rightarrow \tilde{f}(1) = \tilde{g}(1) \Rightarrow \tilde{g}^{-1}\tilde{f}$ es un loop en $0 \in \mathbb{R}$

pero $\pi_1(\mathbb{R}, 0) = 0 \Rightarrow [\tilde{g}^{-1} \cdot \tilde{f}] = [1_0]$

$\underset{p_*}{\Rightarrow} [g^{-1}][f] = [g^{-1}f] = [1_1]$

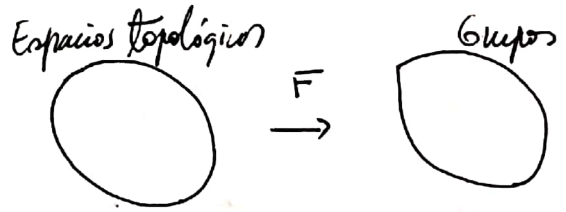
$\exists!\, \tilde{h} : I \times I \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{h}(0,0) = 0$, $p \circ \tilde{h} = h$



20/09/2015

Resumen. X = esp. topológico, $x \in X$ punto

$\Rightarrow \pi_1(X,x) = \left(\text{lazos en } x / \text{homotopía}, \text{ concatenar caminos} \right)$



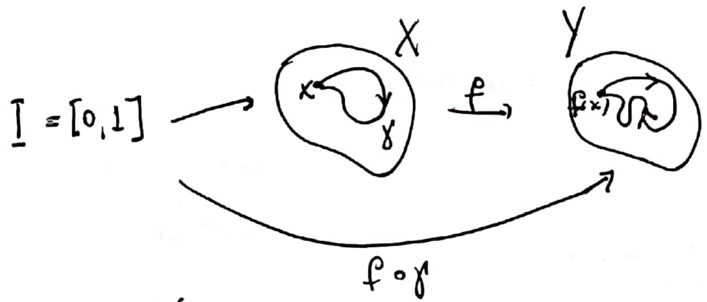
$(1_X)_* = 1_{\pi_1(X,x)}$

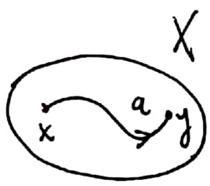
$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$

$X \longmapsto \pi_1(X,x)$

$f \longmapsto f_* : \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x))$

$[\gamma] \longmapsto [f \circ \gamma]$

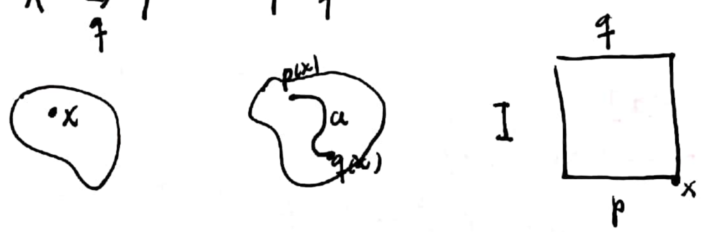




$\pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,y)$

$[\alpha] \longmapsto [a \alpha a^{-1}]$ isomorfismo.

$X \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} Y \qquad p \sim q$



$$\begin{tikzcd} & \pi_1(X,x) \arrow[dl, "p_*"'] \arrow[dr, "q_*"] & \\ \pi_1(Y,p(x)) \arrow[rr, "\gamma[a]", "\text{isom.}"'] & & \pi_1(Y,q(x)) \end{tikzcd}$$

hom. equivalente $p : X \to Y$ $\quad p \circ r \sim 1_Y$

$\exists r : Y \to X \quad r \circ p \sim 1_X$

$\Rightarrow$ si $X \sim Y \Rightarrow p_*$ isomorfismo.

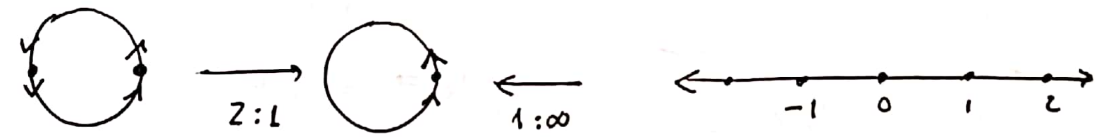
$\pi_1(\text{espacios contractibles}, \text{pto}) = 0$

$\pi_1(X,Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_2(Y)$

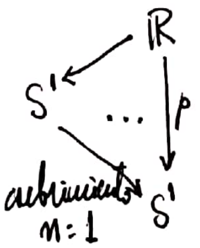
$\pi_1(S^1,1) \cong \mathbb{Z}$

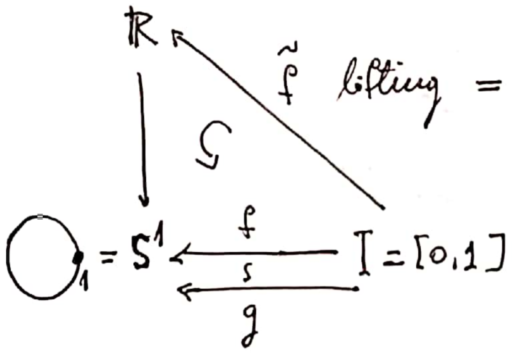
· Puntos iniciales en cálculo de $\pi_1(S^1,1) \cong \mathbb{Z}$

Clave:



$e^{2\pi i r} \longleftrightarrow r$





$\exists!\ \tilde{f}$ levantamiento con $\tilde{f}(0)=0$

$\tilde{f}(1) \in \mathbb{Z}$

Teorema fundamental del álgebra.

Def. Digamos $\pi_1(S^1,1) = \langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$. Sea $f: S^1 \to S^1$ continua. Se define el grado de f como:

$a: f(1) \to 1$

$$\pi_1(S^1,1) \xrightarrow{f_*} \pi_1(S^1, f(1)) \xrightarrow{\gamma[a]} \pi_1(S^1,1)$$

$$1 \longmapsto \text{grado de } f = \deg(f)$$

$a: X \to y$
$b: x \to y$

¿ $\gamma[a] = \gamma[b]$?

$[afa^{-1}] = [bfb^{-1}]$

$[b^{-1}a][f][a^{-1}b] = [f]$ en $\pi_1(X,x)$

si pasa cuando $\pi_1(X,x)$ es conmutativo.

Si $f \sim g \Rightarrow \deg(f) = \deg(g)$

$\deg(z \mapsto z^n) = n$, $\deg f = 0$ ssi $f \sim 1$.

Teo. $f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n \in \mathbb{C}[x]$, $n > 0$. $\exists z \in \mathbb{C}$, $f(z) = 0$.

dem. • Suponer que $f(x) \neq 0$ $\forall x \in S^1$. Definir $\hat{f} : S^1 \to S^1$, $\hat{f}(x) = \dfrac{f(x)}{\|f(x)\|}$

• Suponer $f(x) \neq 0$ cuando $|x| \leq 1$.

Tenemos homotopía $h : S^1 \times I \to S^1$

$$h(x,t) = \frac{f(tx)}{\|f(tx)\|}$$

entre $\dfrac{f(0)}{\|f(0)\|}$ y $\hat{f} \Rightarrow \deg(\hat{f}) = 0$

• Suponer $f(x) \neq 0$ $\forall x$ con $|x| \geq 1$.

Definir $j : S^1 \times I \to S$, $j(x,t) = \dfrac{k(x,t)}{\|k(x,t)\|}$ con $k(x,t) = t^n f\left(\frac{x}{t}\right)$

$$= x^n + t\left(c_1 x^{n-1} + \dots + t^{n-1} c_n\right)$$

$\Rightarrow j : f_n \sim \hat{f} \Rightarrow \deg(\hat{f}) = n$ $(\Rightarrow\!\Leftarrow)$

Teorema de Seifert - Van Kampen (1930)

Problema, objetivo: Cómo calcular $\pi_1(X, x)$

Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una colección de abiertos arcoconexos en X

Asumir: dados $i, j \in I \Rightarrow \exists k \in I$ tal que $U_k = U_i \cap U_j$

Asumir $x \in U_i$, $\forall i \in I$ y $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ $\left(\begin{array}{l} U_i \xhookrightarrow{\varphi_i} X \\ U_i \subset U_j \to \varphi_{ij} : U_i \hookrightarrow U_j \end{array} \right)$

Entonces $\pi_1(X,x)$ satisface la siguiente propiedad universal:

Dado H grupo y $\rho_i : \pi_1(U_i,x) \longrightarrow H$ homomorfismo $\forall i \in I$

tal que

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_i,x) \arrow[dr, "\rho_i"] \arrow[d, "\psi'_{ij*}"'] & \\
\pi_1(U_j,x) \arrow[r, "\rho_j"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & H
\end{tikzcd} \qquad U_i \subset U_j$$

$\exists !$ homomorfismo $\rho : \pi_1(X,x) \longrightarrow H$ tal que

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_i,x) \arrow[dr, "\rho_i"] \arrow[d, "\psi'_{i*}"] & \\
\pi_1(X,x) \arrow[r, dashed, "\rho"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & H
\end{tikzcd} \qquad \forall i \in I$$

La demostración se pospone para hablar primero de COLÍMITES (límites directos) $\varinjlim G_i$.

Sean $\{G_i\}_{i \in I}$, I ordenado parcialmente tal que si $i \leq j \Rightarrow \psi_{ij} : G_i \longrightarrow G_j$

$\psi_{ii} = 1_{G_i}$ y $\psi_{jk} \circ \psi_{ij} = \psi_{ik}$ ■

<u>Teo (Construcción)</u>. $\exists$ grupo G y $\exists$ homomorfismos $\psi_i : G_i \longrightarrow G$ tal que

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[dr, "\psi_i"] \arrow[d, "\psi_{ij}"'] & \\
G_j \arrow[r, "\psi_j"'] & G
\end{tikzcd} \qquad \forall i \leq j$$

y para todo grupo H junto con homomorfismo $\rho_i : G_i \to H$ tal que

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[d, "\psi_{ij}"'] \arrow[dr, "\rho_i"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright" near start] & \\ G_j \arrow[r, "\rho_j"'] & H \end{tikzcd}$$

$\exists!$ homomorfismo $\rho : G \to H$ con
$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[d, "\rho_i"'] & G \arrow[l, "\psi_j"'] \arrow[dl, "\rho"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright" near start] \\ H & \end{tikzcd}$$
$\forall i \in I$.

05/10/2015

Teorema de Seifert - Van Kampen

Hf. $\{U_i\}_{i\in I}$ colección abierta de arcoconexos en $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Asumir, dados $i, j \in I \Rightarrow \exists k \in I$ tal que $U_k = U_i \cap U_j$ y que $x \in \bigcap_{i\in I} U_i \neq \emptyset$. Sea $U_i \overset{\psi_i'}{\hookrightarrow} X$ y si $U_i \subset U_j \Rightarrow \psi_{ij}' : U_i \hookrightarrow U_j$ inclusión

$$\Rightarrow \pi_1(X, x) = \underset{i \in I}{\operatorname{colim}}\, \pi_1(U_i, x)$$

Teo. Sea $\{G_i\}_{i\in I}$, I ordenado parcialmente tal que si $i \leq j \Rightarrow \psi_{ij} : G_i \to G_j$ que satisface $\psi_{ii} = 1_{G_i}$ y $\psi_{jk}\psi_{ij} = \psi_{ik}$, $\exists G$ (único salvo isomorfismo)
$\overset{\shortparallel}{\underset{i\in I}{\operatorname{colim}}\, G_i}$

y $\exists$ homomorfismo $\psi_i : G_i \to G$ tal que

$$\begin{tikzcd} & G & \\ G_i \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[rr, "\psi_{ij}"'] & & G_j \arrow[ul, "\psi_j"'] \end{tikzcd}$$

Scanned with CamScanner

y para todo grupo H junto con homomorfismo $\rho_i : G_i \to H$ tal que

$$\begin{tikzcd} & H & \\ G_i \arrow[ur, "\rho_i"] \arrow[rr, "\psi_{ij}"'] & \circlearrowright & G_j \arrow[ul, "\rho_j"'] \end{tikzcd} \qquad \exists!\ \rho : G \to H \text{ con } \qquad \begin{tikzcd} G_i \arrow[rr, "\psi_i"] \arrow[dr, "\rho_i"'] & \circlearrowright & G \arrow[dl, "\rho"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

dem

- (Unicidad) obvio, a través de la propiedad universal
- (existencia) Debemos primero hablar de grupos libres. Sea S un conjunto arbitrario. Sea $\phi(S)$ el conjunto de todas las palabras de largo finito, generado por elementos de S y elementos de S^{-1} (formal) tal que:

(1) palabra vacía será el 1

(2) $\omega_1 a a^{-1} \omega_2 = \omega_1 \omega_2 \quad \forall a \in S$

y $\omega_1 a^{-1} a\, \omega_2 = \omega_1 \omega_2 \quad \forall \omega_i$ palabras.

Multiplicamos ω_1, ω_2 en $\phi(S)$ como $\omega_1 * \omega_2 = \omega_1 \omega_2$. Luego $(\phi(S), *)$ es grupo, denotado por $F(S)$ = grupo libre generado por S

Notación: $\underbrace{a^{\pm 1} a^{\pm 1} \cdots a^{\pm 1}}_{k\text{-veces}} = a^{\pm k}$

Sean $W \subset F(S)$ un conjunto de palabras. Luego el grupo generado por S con relaciones W es

$$\langle s \in S \,/\, \omega \in W \rangle := F(S)/H \,,$$

$H = \langle g^{-1} \omega g \,/\, \omega \in W,\ g \in F(S) \rangle$ subgrupo normal más pequeño que contiene a W.

Ejemplo. Sea G un grupo. Escribir $G=\{g_i \mid i\in I\}$ y $g_i g_j = g_{k(i,j)}$

$$\Rightarrow \quad G=\langle g_i,\ i\in I \mid g_i g_j g_{k(i,j)}^{-1}\quad \forall i,j\rangle$$

(tarea para los detalles)

Ejemplo 2. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\langle a \mid a^2\rangle$

Ejemplo (teo. filosófico). $\nexists$ un algoritmo que decide

$$\langle a_1,\dots,a_n / \omega_1,\dots,\omega_k\rangle \overset{?}{\cong} \langle b_1,\dots,b_p / \nu_1,\dots,\nu_q\rangle$$

en tiempo finito.

Construcción de $\operatorname*{colim}_{i\in I} G_i$:

Tomar $F(\bigcup_{i\in I} G_i)\supset H$

$$H \doteq \langle ghf^{-1} \ / \ \underset{\text{con } gh \underset{G}{=} f}{g,h,f\in G_i}\ ,\ gh^{-1}\ \ \underset{\psi_{ij}(g)=h}{g\in G_i,\ h\in G_j}^{\ i\leq j} \rangle \quad \text{normal}$$

$$\Rightarrow \quad G=F(\textstyle\bigcup_{i\in I} G_i)/H \quad \text{y} \quad \varphi_i : G_i \longrightarrow G\ ,\ \varphi_i(g)=g\ .$$

Notar que

$$\begin{tikzcd} & G & \\ G_i \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[rr, "\psi_{ij}"'] & & G_j \arrow[ul, "\varphi_j"'] \end{tikzcd}$$

Suponer que tenemos H con $G_i \xrightarrow{\rho_i} H$ tal que conmutan con los ψ_{ij}

$\Rightarrow$ tenemos que definir $\rho : G\to H$ tal que $\rho(g)=\rho_i(g)$

una forma de hacerlo, pero

tarea: verificar que esté bien definido.

Ejemplo: $I = \{1,2\}$ sin orden

$$\Rightarrow \operatorname{colim}_{i=1,2} G_i := G_1 * G_2$$

$$F(a_1,\dots,a_n) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n\text{-veces}}$$

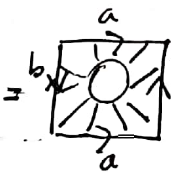
$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle a,b \,/\, a^2, b^2 \rangle$$

Ejemplo:
$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha} & A \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow & & \\ B & & \end{array} \qquad c \longmapsto \alpha(c)c^{-1}$$

colímite es llamado producto amalgamado

$$A *_C B = \langle a \in A,\ b \in B,\ c \in C \,/\, \text{rel } A,\ \text{rel } B,\ \text{rel } C,\ \begin{matrix}\alpha(c)c^{-1} \\ \beta(c)c^{-1}\end{matrix}\ c \in C \rangle$$

$$\cong A * B/H \qquad H = \text{grupo normal más pequeño que contiene a } \alpha(c)\beta(c)^{-1} : c \in C.$$

Ejemplo: Toro $T^2 =$  $=$ 

$$\pi_1(\infty) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}, \qquad \pi_1(T^2) \cong \pi_1(\infty) * \pi_1(pt)/H$$

$$H = \langle \gamma \rangle \text{ normal}$$

$$\pi(T^2) = \langle a,b \,/\, ba^{-1}b^{-1}a \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$