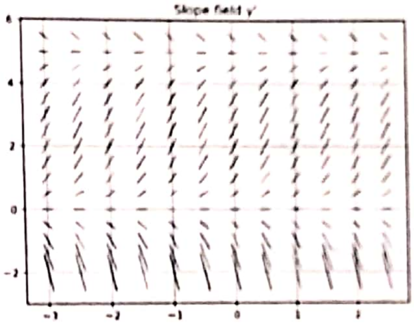
Departamento
de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Andrés Bello

Solemne 2 - FMM251 Int. Ecua. Dif. - 2018/2

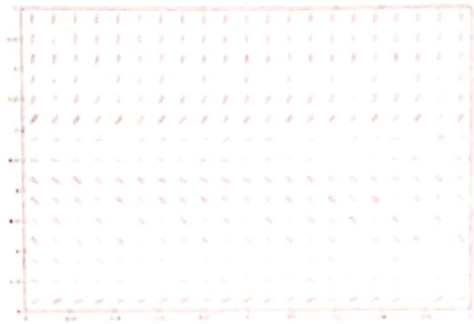
P1. Asocie según corresponda (pueden haber ecuaciones y/o diagramas que no se pueden asociar) las ecuaciones diferenciales con sus diagramas de pendientes:

$$a)\ \frac{dy}{dx} = yx \qquad b)\ \frac{dy}{dx} = 3y\left(1 - \frac{y}{5}\right); \qquad c)\ \frac{dy}{dx} = 1 - x; \qquad d)\ \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$$

. a los siguientes diagramas de pendientes:



1)



2)

3)

P2. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x^3 - 6x^2 + 9x$$

En cada pregunta justifique claramente su respuesta:

a) Encuentre los puntos críticos y dibuje el diagrama de fase.

b) Encuentre $\lim_{t\to\infty} x(t)$ si $x(0) = 2$.

c) Encuentre $\lim_{t\to\infty} x(t)$ si $x(0) = 0$. ¿Qué pasa en el caso $x(0) = -0.0000000000000001$?

P3. Ecuentre la solución de los siguientes problemas:

a.- $y'' + 2y' - 8y = 0$ (solución general)

b.- $y'' - 4y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$

P4. Tenemos una masa que se mueve de manera horizontal conectada a un resorte. La ecuación está dada por

$$x'' + 2x = 0$$

Donde x es la posición de la masa. Se sabe que las condiciones iniciales son $x(0) = 0$, $x'(0) = 10$. Calcule la solución de la ecuación diferencial y determine la amplitud del movimiento.

Tiempo: 80 min.

Departamento
de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Andrés Bello

Control 1 - FMM251 Int. Ecua. Dif. - 2018/2

P1. El virus del Ébola se caracteriza por poseer una rapidez de contagio dada por la ecuación:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{t^2 - 4}$$

donde N es el número de personas contagiadas en el instante t, suponiendo que el tiempo se mide en semanas.

(a) (1pto.) Determine la función que entrega la cantidad de personas contagiadas respecto del tiempo, suponiendo que en $t = 0$ hay 100.000 personas contagiadas.

(b) (1 pto.) ¿Cuántas personas nuevas se contagian después de 4 semanas?

P2. Resuelva la ecuación, usando factor integrante:

$$y' + 4y = e^{2x}$$

Tiempo: 60 min. Puede usar Calculadora.

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Andrés Bello

Solemne 1 - FMM251 Int. Ecua. Dif. - 2018/2

P1. a. resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - x; \quad y(0) = 1.$$

b. ¿Cuál será el valor de la solución $y(x)$ cuando $x = 10$?

P2. Encuentre la solución explicíta de las siguientes ecuaciones (por separación de variables):

$$y' = (y+1)(y-1), \quad y(0) = 3$$

P3. Un estanque en estado inicial contiene 50 litros de agua en los que se ha disuelto 600 gramos de sal. Otra mezcla que contiene 200 gramos de sal por litro es bombeada al tanque con una rapidez de 2 litros por minuto. Suponemos que el estanque mezcla de manera perfecta. La solución mezclada es bombeada hacia el exterior con rapidez de 2 litro por minuto. La ecuación que modela el problema es:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{2}{50}A = 400,$$

donde A es la cantidad de sal en kilogramos y t se mide en minutos.

a) (0.5 ptos) Justifique, usando las técnicas de modelación vistas en clases, por qué la ecuación representa un buen modelo del problema.

b) (1 ptos) Resuelva la ecuación para A usando el método del fáctor integrante.

c) (0.5 ptos) Calcule la cantidad de sal en el estanque una vez transcurridos 30 minutos.

Tiempo: 90 min.

Agosto 27, 2018.
Intro a las ecuaciones diferenciales.
Desarrollo Solemne 1.

P.1. (a) $\frac{dy}{dx} = 1 - x \Rightarrow dy = (1-x)\,dx$

$\int dy = \int (1-x)\,dx + C \Rightarrow y = x - \frac{x^2}{2} + C$. $y(0) = 1 \Rightarrow 1 = C$

Solución particular: $y(x) = x - \frac{x^2}{2} + 1$.

(b) Para $x = 10$, $y(10) = 10 - \frac{100}{2} + 1 = -\frac{78}{2}$. Por lo Tanto, $y(10) = -\frac{78}{2} = -39$

P.2. Resolver el problema de valor inicial $y' = (y+1)(y-1)$, $y(0) = 3$.

Separación de variables: $\frac{dy}{(y+1)(y-1)} = dx$

$$\int \frac{dy}{(y+1)(y-1)} = \int dx + C.$$

Ocupando fracciones parciales: $\int \frac{dy}{(y+1)(y-1)} = \int \left(\frac{1}{2(y-1)} - \frac{1}{2(y+1)} \right) dy$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{y-1}\,dy - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y+1}\,dy = \frac{1}{2}\ln|y-1| - \frac{1}{2}\ln|y+1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|$

Luego: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x + C \Rightarrow \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = 2x + 2C$ $/\exp(\ )$

$\Rightarrow \left|\frac{y-1}{y+1}\right| = C_1 \exp(2x)$.

Sacando el valor absoluto: $\frac{y-1}{y+1} = C_2 \exp(2x)$

$\Rightarrow y(1 - C_2\exp(2x)) = 1 + C_2\exp(2x)$

$$y(x) = \frac{1 + C_2\exp(2x)}{1 - C_2\exp(2x)}$$

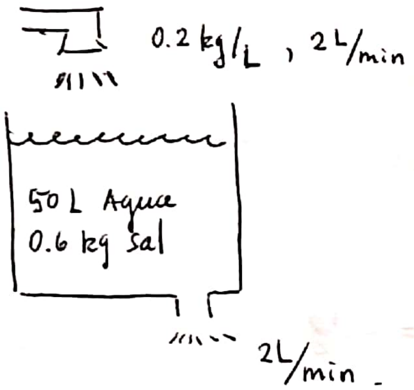
Ocupando la condición inicial $y(0)=3$:

$$3 = y(0) = \frac{1+C_2}{1-C_2} \Rightarrow C_2(1+3) = 2 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ Solución particular: $y(x) = \dfrac{2+\exp(2x)}{2-\exp(2x)}$.

P.3.

(a)



$A = A(t)$ cantidad (kg) de sal en el estanque.

$$\Delta A = (\text{sal que entra}) - (\text{sal que sale}).$$

$$\approx 0.2 \cdot 2 \cdot \Delta t - \frac{A(t)}{50} \cdot 2\,\Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 0.4 - \frac{2}{50}A.$$

Ecuación diferencial que modela el problema: $\dfrac{dA}{dt} + \dfrac{2}{50}A = 0.4$.

(b) Factor integrante: $r(t) = \exp\left(\int \frac{2}{50}dt\right) = \exp\left(\frac{1}{25}t\right)$.

Solución:
$$A = \exp\left(-\frac{1}{25}t\right)\left(\int 0.4\exp\left(\frac{1}{25}t\right)dt + C\right)$$
$$A = \exp\left(-\frac{1}{25}t\right)\left(0.4 \cdot 25\exp\left(\frac{1}{25}t\right) + C\right)$$
$$A = 10 + C\exp\left(-\frac{1}{25}t\right).$$

Condición inicial: $A(0) = 0.6 = 10 + C \cdot 1 \Rightarrow \underline{C = -0.4}$

Solución particular del problema: $A(t) = 10 - 0.4\exp(-0.04t)$

(c) Para $t = 30$ min, $A(30) = 10 - 0.4\exp(-0.04 \cdot 30) = 10 - 0.4\exp(-1.2)$

UNAB.
Intro a las Ecuaciones Diferenciales
Agosto 29, 2018.

Preparacion clase Jueves 30 Agosto.

Resumen del ~~la clase~~ curso:

- Ecuaciones de variables separables: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$. (EVS)
- Ecuaciones lineales: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$. (EL)

Tema a tratar esta semana: Ecuaciones autónomas

Ecuación autónoma: $\frac{dy}{dx} = f(y)$.

Observación 1:
- $\frac{dy}{dx} = f(y)$ es un tipo particular de ecuación de variables sep.
- $\frac{dy}{dx} = f(y)$ se puede estudiar usando técnica de EVS.

Hecho: No toda ecuación, EUS, EL, EVS se pueden encontrar sus soluciones explícitamente. ¿Resulta que debemos dejar de estudiarlas?

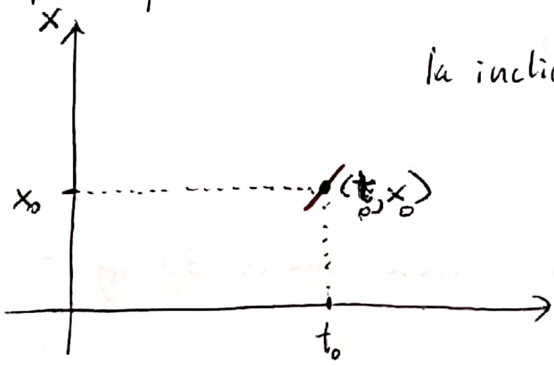
Antes de esta clase, usamos técnicas analíticas-algebraicas para resolver EVS, EL.
Una técnica cualitativa es estudiar su campo de pendientes.

- Campo de pendientes de la ecuación $f(t,x) = \frac{dx}{dt}$.

Pregunta: ¿Los campos de pendientes sirven para estudiar EVS, EL?
Respuesta: Sí, porque:

EVS: $\frac{dx}{dt} = f(x)g(t)$, definimos $h(t,x) = f(x)g(t)$, $\frac{dx}{dt} = h(t,x)$
EL: $\frac{dx}{dt} + p(t)x = f(t)$, definimos $j(t,x) = f(t) - p(t)x$, $\frac{dx}{dt} = j(t,x)$.

Definición : Un campo de pendiente es el siguiente esquema:

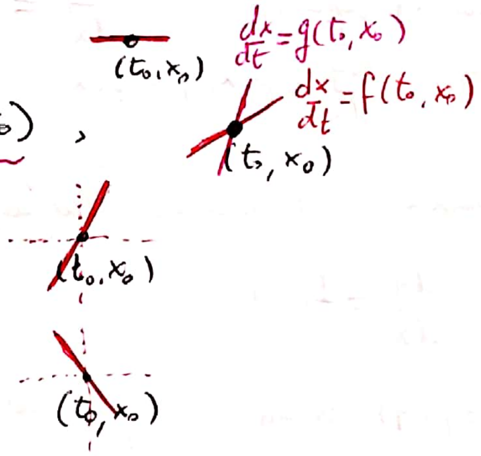


la inclinación / depende del valor $\frac{dx}{dt} = f(t_0, x_0)$.

Algunas consideraciones:

(i) $f(t_0, x_0) = 0$,

(ii) $0 \leq f(t_0, x_0) \leq g(t_0, x_0)$,

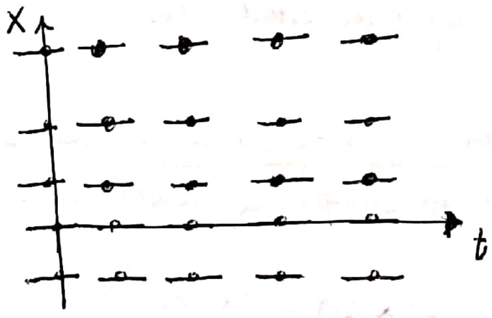


(iii) $0 \leq f(t_0, x_0)$,

(iv) $f(t_0, x_0) \leq 0$,

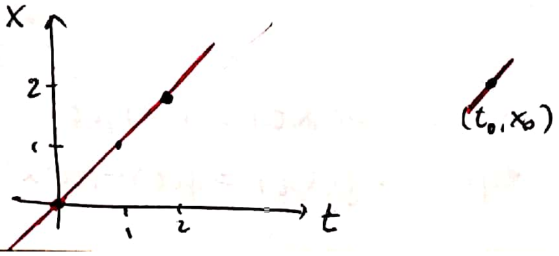
Algunos ejemplos sencillos:

Ejemplo 1. $\frac{dx}{dt} = 0$



Ejemplo 2. $\frac{dx}{dt} = 1$

1 corresponde a la inclinación de la recta $x(t) = t$

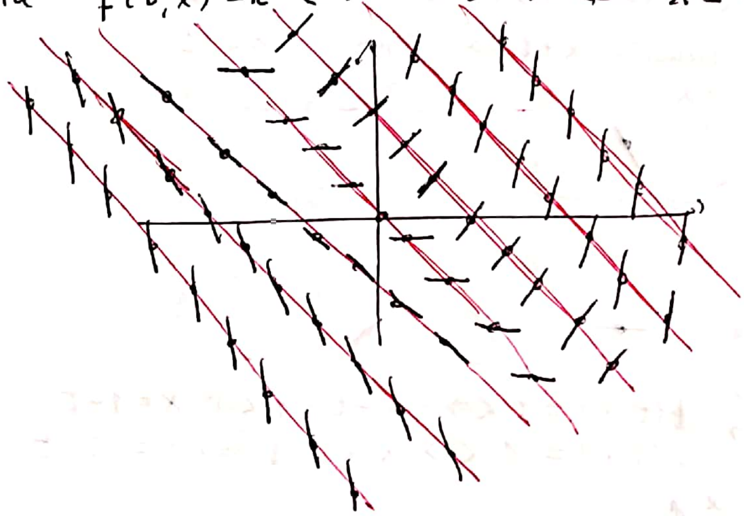


Una forma rápida de graficar un campo de pendientes de $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ cuando $f(t,x) = at+bx$, donde $a,b \in \mathbb{R}$ constantes en $\mathbb{R}$ es encontrando los puntos (t,x) que cumplen la ecuación

$$at + bx = k$$

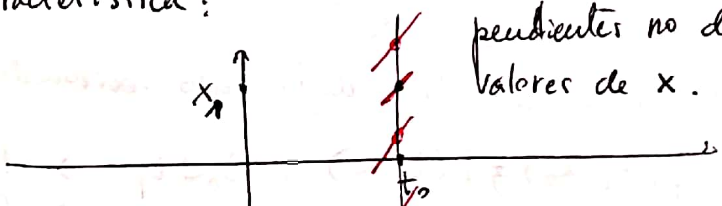
Para el caso $\frac{dx}{dt} = x+t$, $a=b=1$.

Para $f(t,x) = k \iff x+t = k \iff x = -t+k$



Casos particulares:

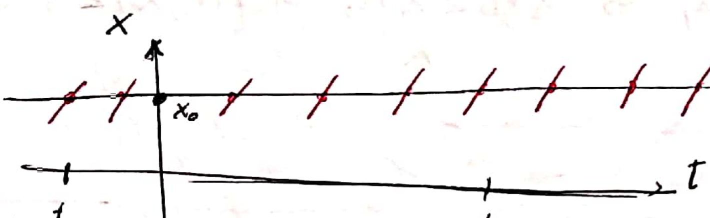
(i) Supongamos $\frac{dx}{dt} = f(t)$. El cambio de pendiente tiene la siguiente característica:



pendientes no dependen de los valores de x.

Ejemplo: Dibujar el campo de pendientes de $\frac{dx}{dt} = t^2$, $\frac{dx}{dt} = 2t+1$, ...

(ii) Supongamos $\frac{dx}{dt} = g(x)$ (Ecuación autónoma)



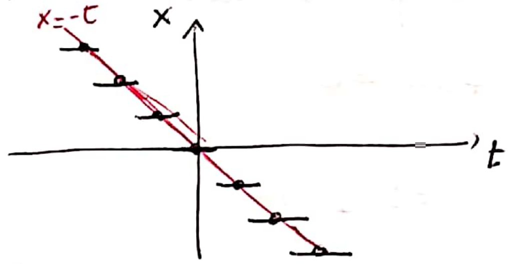
pendientes no dependen de los valores de t.

Ejemplo. Dibujar campo de pendientes de $\frac{dx}{dt} = x$, $\frac{dx}{dt} = x^2$, $\frac{dx}{dt} = 2x+1$

Ejemplo 2: Dibujar el campo de pendientes de la ecuación $\dfrac{dx}{dt} = x + t$

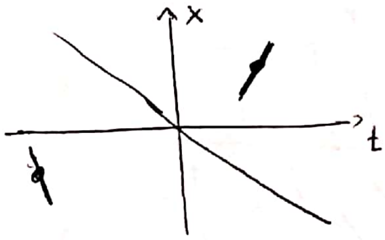
Desarrollo. (i) $f(t,x) = x + t$

(ii) $f(t,x) = 0$ ssi $x + t = 0$ ssi $x = -t$



(iii) $f(t,x) > 0$ cuando $x + t > 0$. Equiv: $x > -t$

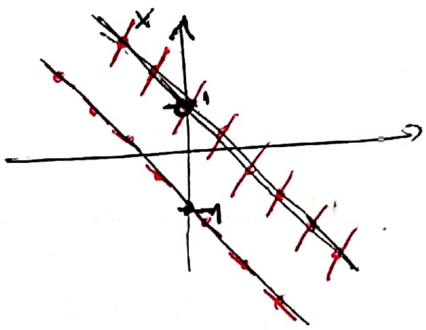
$f(t,x) < 0$ cuando $x + t < 0$. Equiv: $x < -t$



(iv) Supongamos:

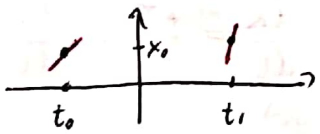
¿Cuándo $m = 1$? $f(t,x) = 1 \iff x + t = 1 \iff x = 1 - t$

¿Cuando $m = -1$? $f(t,x) = -1 \iff x + t = -1 \iff x = -1 - t$

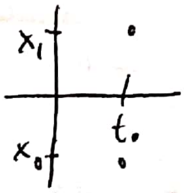


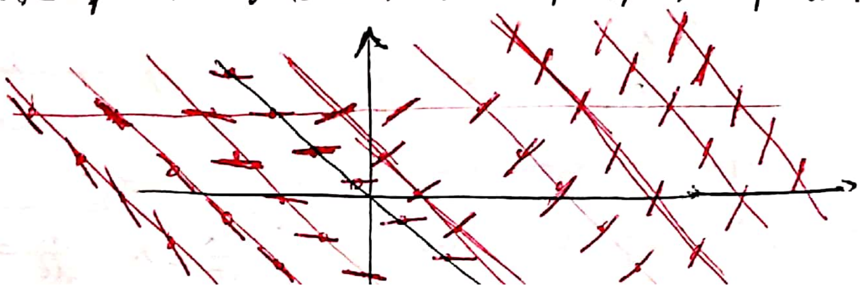
(v) Movimiento a lo largo de los ejes coordenados:

eje t: Para $f(t_0, x_0)$ y $f(t_1, x_0)$; $t_0 < t_1 \Rightarrow t_0 + x_0 < t_1 + x_0$
$\Rightarrow f(t_0, x_0) < f(t_1, x_0)$

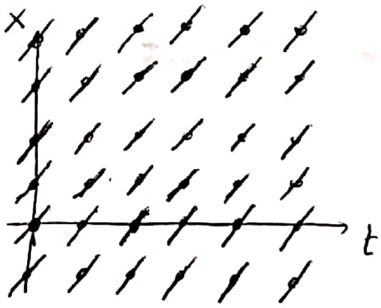


eje x: Para $x_0 < x_1 \Rightarrow x_0 + t_0 < x_1 + t_0 \rightarrow f(t_0, x_0) < f(t_0, x_1)$

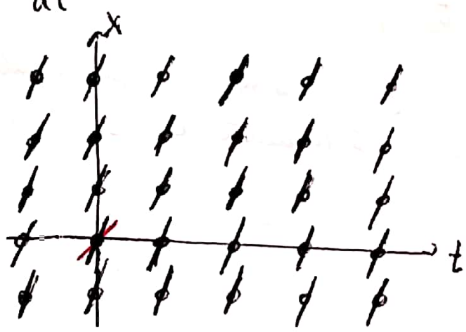




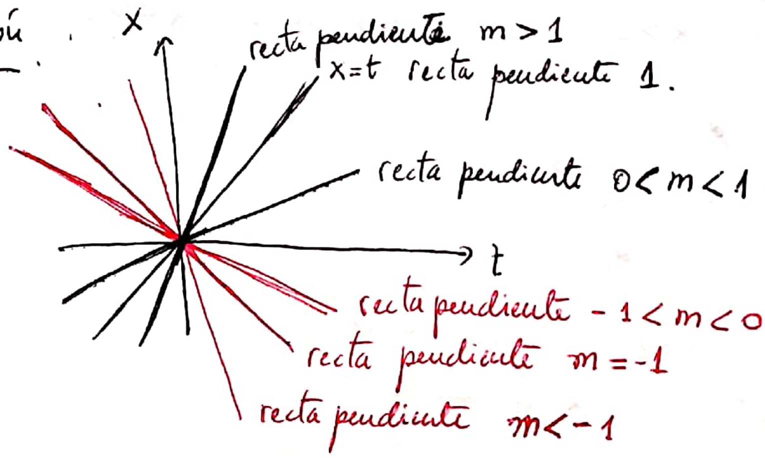
Campo de pendientes de $\frac{dx}{dt} = 1$:



Ejemplo 3. $\frac{dx}{dt} = 2$.

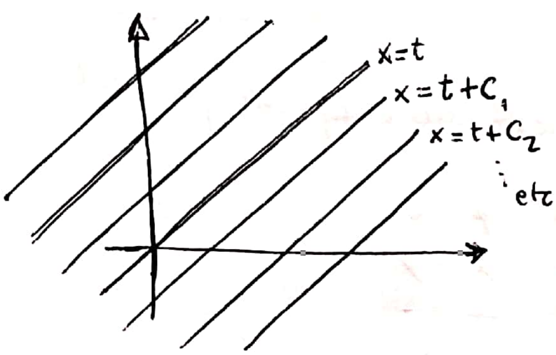


Observación .



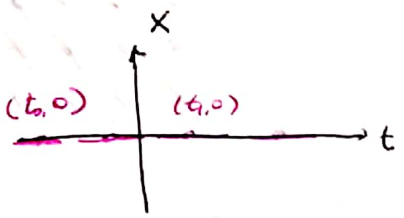
Para la ecuación de variables separables $\frac{dx}{dt} = 1$

$$\frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow dx = dt \Rightarrow \int dx = \int dt \Rightarrow x = t + C$$



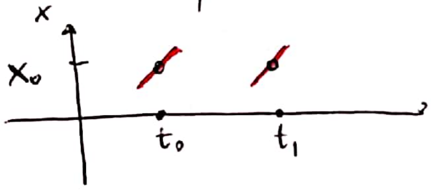
El campo de pendientes nos permite entender ~~el~~ "aproximadamente" el dibujo de la solución general de la ecuación $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$.

Ejemplo. $\dfrac{dx}{dt} = x$

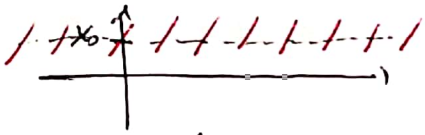


(i) Cuando $\dfrac{dx}{dt} = 0$? $\quad \dfrac{dx}{dt} = 0 \iff x = 0$

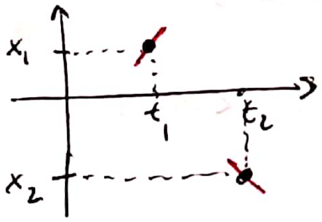
(ii) $f(t_0,x) = f(t_1,x)$ para todo t_0, t_1.



El campo de pendientes depende solamente de los valores de x.

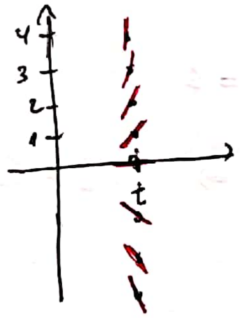


(iii) $f(t,x) > 0$ cuando $x > 0$, $f(t,x) < 0$ cuando $x < 0$.

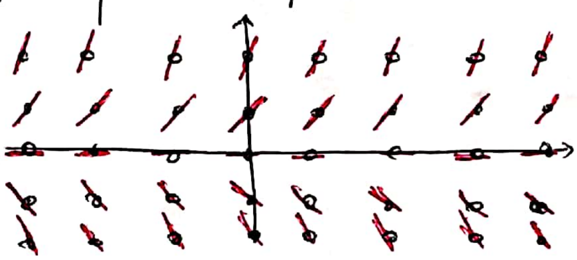


(iv) $f(t,1) = 1$, $f(t,2) = 2$. En particular:

- $f(t,x)$ aumenta ssi x aumenta



Con (ii),(iv) se puede dibujar el resto del campo de pendientes:



Ejemplo resuelto: Dibujar el campo de pendiente de la ecuación autónoma

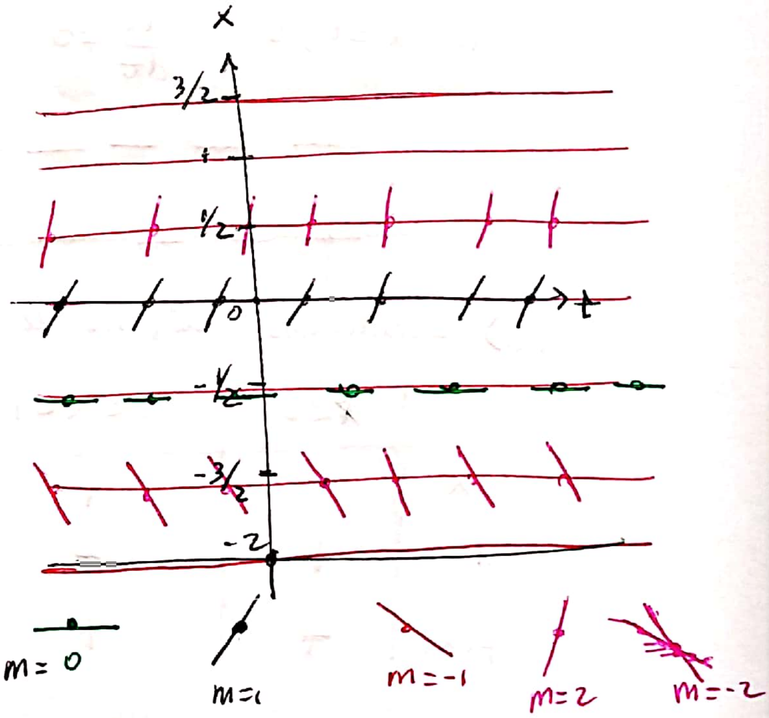
$$\frac{dx}{dt} = 2x+1.$$

Desarrollo. (i) Ecuación autónoma $\frac{dx}{dt} = f(x)$, $f(x) = 2x+1$.

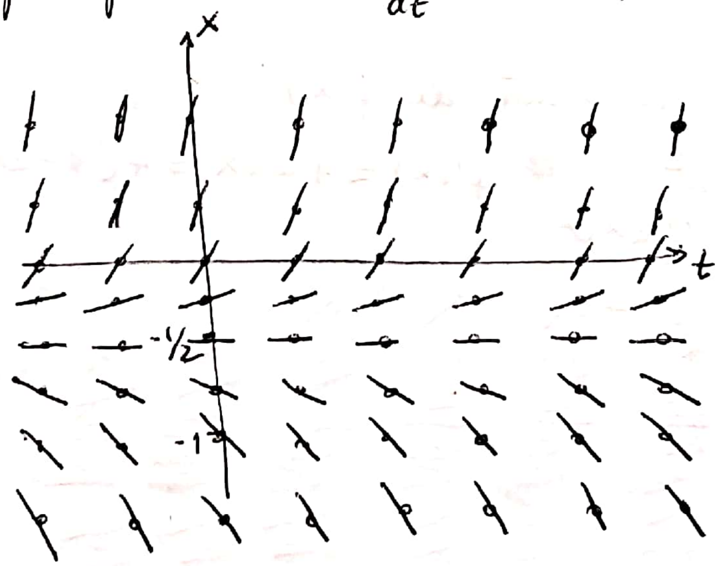
Para $f(x)=k$, k es la pendiente de una recta.

$f(x)=k$ implica $\frac{dx}{dt} = k$

k	$f(x)=k$	x
-3	$2x+1=-3$	-2
-2	$2x+1=-2$	$-3/2$
-1	$2x+1=-1$	-1
0	$2x+1=0$	$-1/2$
1	$2x+1=1$	0
2	$2x+1=2$	$1/2$
3	$2x+1=3$	1
4	$2x+1=4$	$3/2$



~~Cambi~~ Campo de pendientes de $\frac{dx}{dt} = 2x+1$ queda de la siguiente manera:



Ejemplo. Dibujar el campo de pendientes de $\frac{dx}{dt} = 4x(1-x)$.

Desarrollo. (i) $\frac{dx}{dt} = f(x)$, ecuación autónoma, $f(x) = 4x(1-x)$.

(ii) Estudiar la ecuación $f(x)=0$

$f(x)=0$ siempre y cuando $4x(1-x)=0$. $x=0, x=1$

Para $x=0, 1$, $\frac{dx}{dt}=0$

(iii) Estudiamos análisis de signo de $f(x)$

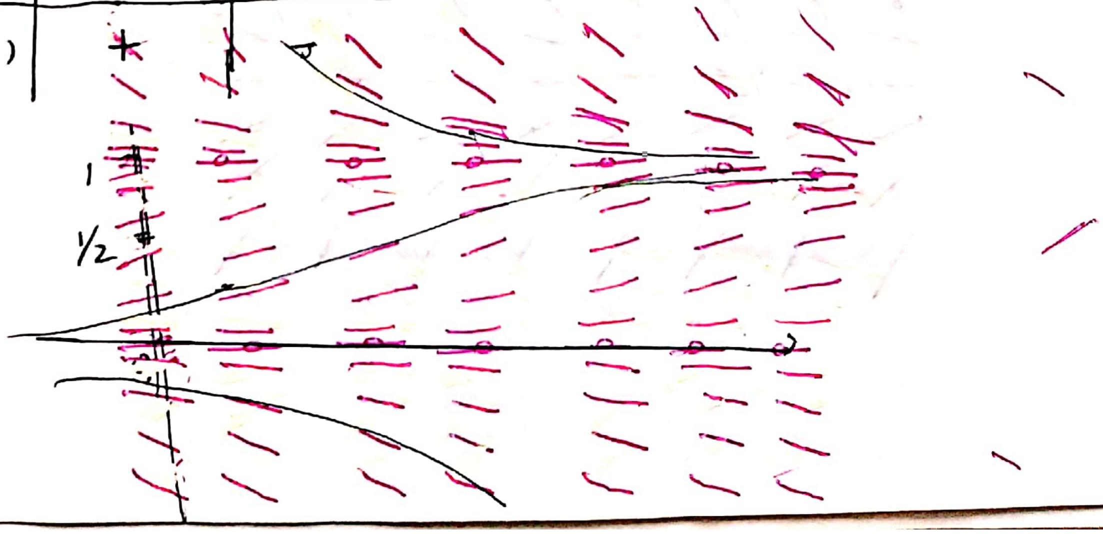
	$x<0$	$0<x<1$	$1<x$
x	$-$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

pendiente positiva para $]-\infty,0[\cup]1,\infty[$, pendiente negativa para $]0,1[$.

(iv) Análisis de crecimiento de $f(x)$.

$f(x) = 4x - 4x^2$. $f'(x) = 4 - 8x = 4(1-2x)$

	$x<1/2$	$\frac{1}{2}<x$
$f'(x)$	$+$	$-$



Introducción a las Ecuaciones diferenciales.
Ayudantía Jueves 03/09/2018.

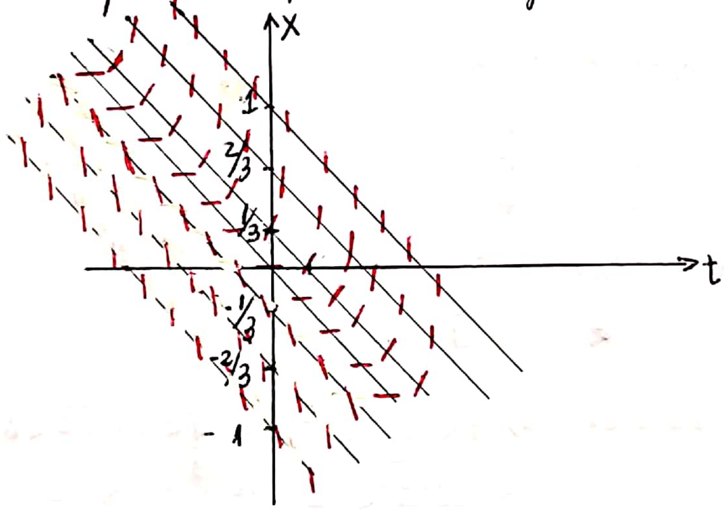
P.2.i. Usando la materia vista en clases, dibuje el campo de pendientes de la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = 3x + t$.

Desarrollo. $F(t,x) = 3x+t$.

Ecuación $F(t,x) = k$ equivale a la recta $t + 3x - k = 0$.

Ecuación de la recta queda de la forma $x = -\frac{t}{3} + \frac{k}{3}$.

El campo de pendientes queda de la siguiente manera:



P.6.iii. Dibuje el campo de pendientes de la ecuación diferencial autónoma

$$\frac{dx}{dt} = (x-1)(x-2)(x+3)$$

Desarrollo. Las ecuación diferencial autónoma tiene la forma $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

Se tiene que $f(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$.

f es diferenciable, se tiene por lo demás:

$$f'(x) = (x-2)(x+3) + (x-1)\left[(x-2)(x+3)\right]'$$

$$= (x-2)(x+3) + (x-1)\left[(x+3) + (x-2)\right] = (x-2)(x+3) + (x-1)(x+3) + (x-1)(x-2).$$

$$f'(x) = (x-2)(x+3) + (x-1)(x+3) + (x-1)(x-2)$$
$$= x^2 - x - 6 + x^2 + 2x - 3 + x^2 - 3x + 2 = 3x^2 - 2x - 7$$
$$\Delta = 4 + 84 = 88 > 0.$$

Se tiene $f'(x) = 0$ ssi $x = \frac{2 \pm \sqrt{\Delta}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{22}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{22}}{3}$.

$x_1 = \frac{1+\sqrt{22}}{3}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{22}}{3}$.

Tabla signo de f:

	$x<-3$	$-3<x<1$	$1<x<2$	$2<x$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$f>0$ en $]-3,1[\,\cup\,]2,\infty[$, $f<0$ en $]-\infty,-3[\,\cup\,]1,2[$

Tabla monotonía de f:

	$x<x_2$	$x_2<x<x_1$	$x_1<x$
$x-x_1$	$-$	$-$	$+$
$x-x_2$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

Observar que $f'(x) = 3(x-x_1)(x-x_2)$, donde $x_2 < x_1$

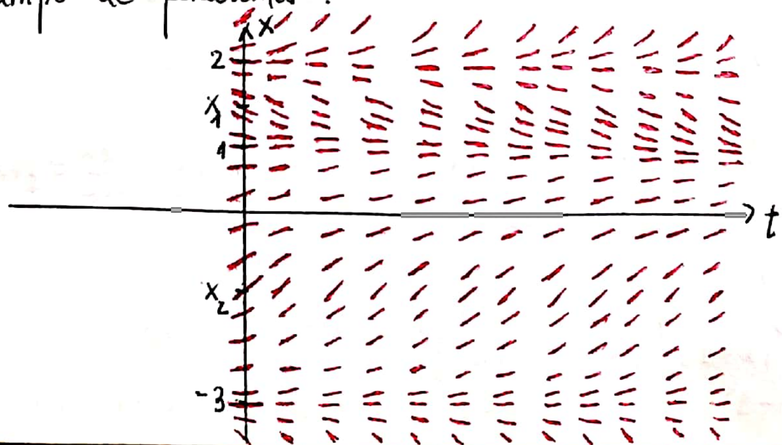
$f'>0$ en $]-\infty, x_2[\,\cup\,]x_1,\infty[$, $f'<0$ en $]x_2, x_1[$.

Observación importante: $16 < 22 < 25 \Rightarrow 4 < \sqrt{22} < 5 \Rightarrow 5 < 1+\sqrt{22} < 6$

Desigualdad: $\frac{5}{3} < \frac{1+\sqrt{22}}{3} < 2$ $\therefore$ $1 < \frac{1+\sqrt{22}}{3} < 2$ .ie. $1 < x_1 < 2$

$4 < \sqrt{22} < 5 \Rightarrow -5 < -\sqrt{22} < -4 \Rightarrow -4 < 1-\sqrt{22} < -3 \Rightarrow -\frac{4}{3} < \frac{1-\sqrt{22}}{3} < -1$ .ie, $-\frac{4}{3} < x_2 < -1$

Dibujo del campo de pendientes:



P.13. Considere la ecuación diferencial autónoma $\frac{dS}{dt} = S^3 - 2S^2 + S$.

(i) A mano, haga un croquis burdo del campo de pendientes.

(ii) Usando este croquis, delinee las gráficas de las soluciones $S(t)$ con las condiciones iniciales $S(0) = 0$, $S(0) = 1/2$, $S(1) = 3/2$, $S(0) = -1/2$.

Desarrollo. $\frac{dS}{dt} = S^3 - 2S^2 + S$, $f(S) = S(S^2 - 2S + 1) = S(S-1)^2$

f es diferenciable, con derivada: $f'(S) = 3S^2 - 4S + 1$

Ecuación de 2° grado, con discriminante: $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$ (cuadrado perfecto).

Soluciones de f': $S = \frac{4 \pm \sqrt{\Delta}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \frac{2 \pm 1}{3}$. $S_1 = 1$, $S_2 = \frac{1}{3}$.

$f'(S) = 3(S - S_1)(S - S_2)$.

Tabla que indica el signo de f:

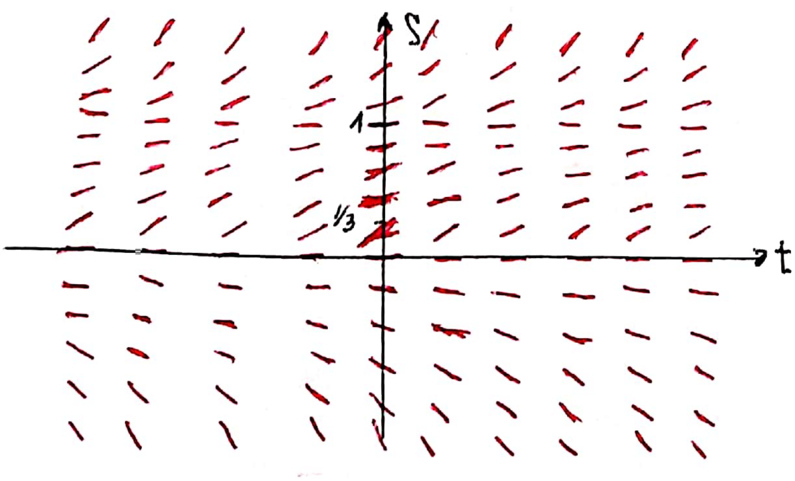
	$S < 0$	$0 < S < 1$	$1 < S$
$(S-1)^2$	+	+	+
S	−	+	+
$f(S)$	−	+	+

$f > 0$ en $]0, \infty[\setminus \{1\}$.
$f < 0$ en $]-\infty, 0[$

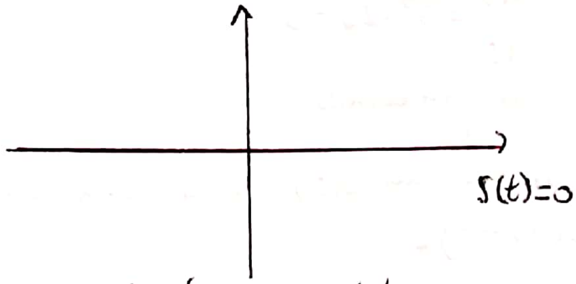
Tabla que indica la monotonía de f:

	$S < S_2$	$S_2 < S < S_1$	$S_1 < S$
$S - S_1$	−	−	+
$S - S_2$	−	+	+
$f'(S)$	+	−	+

f creciente en $]-\infty, S_2[\cup]S_1, \infty[$
f decreciente en $]S_2, S_1[$.

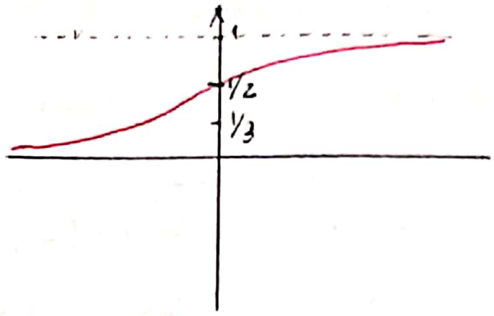


(ii) $S(0)=0$:

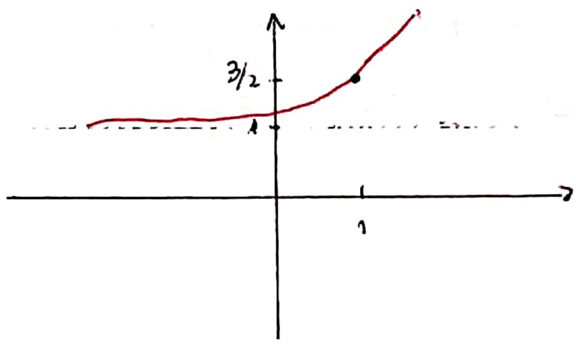


$S=0$ solución de equilibrio.

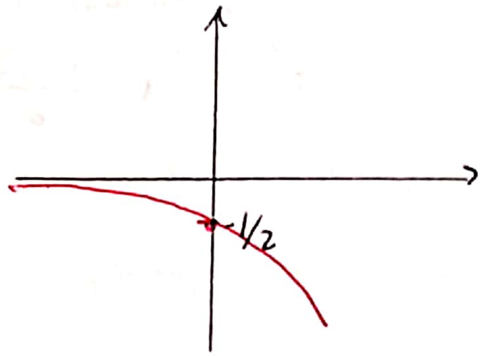
$S(0)=1/2$:



$S(1)=3/2$



$S(0)=-1/2$:



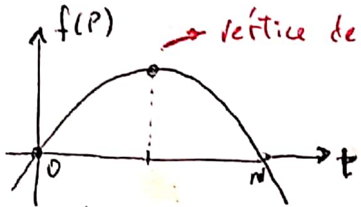
Introducción a las ecuaciones diferenciales.

Proyecto Guía 5: Ptos de equilibrio. Soluciones de equilibrio. Diagramas de fase de ecuaciones autónomas.

1°. Ecuación logística: $\frac{dP}{dt} = k\left(1-\frac{P}{N}\right)P$; $k>0$, $N>0$. (Averiguar si $k<1$)

Podemos definir la función $f(P)=k\left(1-\frac{P}{N}\right)P$. (Parábola).

Gráficamente tenemos:



$f(0)=P(N)=0$, tenemos que $P(t)=0$, $P(t)=N$ son las soluciones de equilibrio.

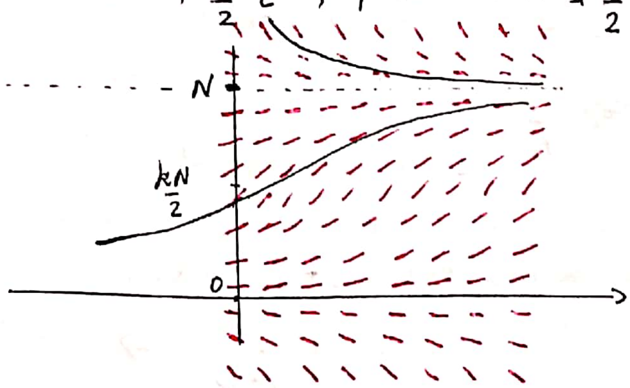
Dibujo del diagrama de pendientes de $\frac{dP}{dt}=f(P)$.

Del gráfico anterior, (i) $f>0$ en $[0,N]$, (ii) $f<0$ en $]-\infty,0[\cup]N,\infty[$.

(iii) f creciente en: $f(P)=kP-\frac{P^2}{N}$, $f'(P)=k-\frac{2P}{N}$

$f'(P)=0$ ssi $P=\frac{kN}{2}$.

f creciente en $]-\infty,\frac{kN}{2}[$, f decreciente $]\frac{kN}{2},\infty[$.



crecimiento acotado.
$0<P(t)<N$.

* Soluciones de la ecuación logística.

El modelo poblacional que estudia el crecimiento de la población es

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = kP\left(1-\dfrac{P}{N}\right) & , t>0 \\ P(0)=P_0 \end{cases}$$

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1-\frac{P}{N}\right) \Rightarrow \frac{dP}{P(N-P)} = \frac{k}{N}\,dt \quad \text{para } P\neq 0,\ P\neq N.$$

$$\frac{1}{P(N-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{N-P} = \frac{A(N-P)+BP}{P(N-P)} = \frac{AN+P(B-A)}{P(N-P)}$$

Sistema de ecuaciones asociado : $\begin{cases} AN=1 \\ B-A=0 \end{cases}$, $A=1/N$, $B=1/N$.

$$\frac{1}{P(N-P)} = \frac{1}{NP} + \frac{1}{N(N-P)}.$$

Integrando ambos lados de la ecuación anterior:

$$\int \frac{dP}{(N-P)P} = \int \frac{k}{N}dt + C \Rightarrow \int \frac{1}{NP}\,dP + \int \frac{1}{N(N-P)}dP = \frac{kt}{N}+C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N}\ln|P| - \frac{1}{N}\ln|N-P| = \frac{kt}{N}+C \Rightarrow \frac{1}{N}\ln\left|\frac{P}{N-P}\right| = \frac{kt}{N}+C$$

$$\ln\left|\frac{P}{N-P}\right| = kt+NC$$

aplicando prop. del logaritmo : $\ln\left|\dfrac{N-P}{P}\right| = -kt-NC$

aplicando función exponencial : $\left|\dfrac{N-P}{P}\right| = \exp(-kt-NC) = \exp(-NC)\exp(-kt).$

eliminando valor absoluto : $\dfrac{N}{P}-1 = \pm\exp(-NC)\exp(-kt)$

$$\frac{N}{P} = 1\pm\exp(-NC)\exp(-kt) \Rightarrow \frac{P}{N} = \frac{1}{1\pm\exp(-NC)\exp(-kt)}.$$

Despejando P : $P(t) = \dfrac{N}{1\pm\exp(-NC)\exp(-kt)} = \dfrac{N}{1+D\exp(-kt)}$

Ocupando condición inicial $P(0)=P_0$: $P_0 = P(0) = \dfrac{N}{1+D} \Rightarrow D = \dfrac{N-P_0}{P_0}.$

Por lo tanto, la solución particular : $P(t) =$

$$P(t) = \frac{N}{1+\frac{N-P_0}{P_0}\exp(-kt)} = \frac{P_0 N}{P_0+(N-P_0)\exp(-kt)}.$$

• Diagrama de fase de la ecuación logística.

Mediante el diagrama de pendientes anterior

$N \rightarrow$ pto. de equilibrio estable

$0 \rightarrow$ pto de equilibrio inestable.

• Sistema depredador - presa y ecuaciones logísticas.

El problema 24 de la página 51 dice lo siguiente:

Suponga que una población puede ser modelada precisamente por la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = 0.4P\left(1 - \frac{P}{30}\right)$$

(Considere que el parámetro de razón de crecimiento es 0.4 y la capacidad de soporte es 30.) Suponga que en el tiempo $t=5$ se presenta una enfermedad en la población que mata 25% de la población por año. Para ajustar el modelo, cambiamos la ecuación diferencial a

$$\frac{dP}{dt} = \begin{cases} 0.4P\left(1 - \frac{P}{30}\right), & 0 \leq t < 5 \\ 0.4P\left(1 - \frac{P}{30}\right) - 0.25P & t > 5 \end{cases}$$

(a) Esboce el campo de pendientes para esta ecuación.

(b) Usando el campo de pendientes, bosqueje las gráficas de unas cuantas soluciones para esta ecuación.

(c) Encuentre las fórmulas para solucionar esta ecuación para las condiciones iniciales $P(0)=30$, $P(0)=20$.

(d) En unas cuantas frases, prediga el comportamiento de las soluciones con las condiciones iniciales $P(0)=30$ y $P(0)=20$ (Puede utilizar los esbozos del campo de pendientes o las fórmulas, pero dé una descripción cualitativa de las soluciones).

Intro a las ecuaciones diferenciales. (FMM251).
Proyecto cátedra
Septiembre 06, 2018.

- Ecuaciones lineales de segundo orden.

Expresión general : $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y + d(x) = 0$. $(a(x) \neq 0)$.
dividiendo por $a(x)$, se puede asumir $y'' + a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$.

1°. La ecuación $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ aguanta combinaciones lineales como solución
2°. Soluciones de $y'' + a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$ se consiguen como.

$$\{\text{Sol. particular}\} + \left\{\begin{array}{l}\text{Esp. soluciones ec.} \\ y'' + a(x)y' + b(x)y = 0\end{array}\right\}$$

Estudio ecuación diferencial $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$.
Mediante cambio de variable $u = y'$

$u' = y''$, $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \Rightarrow u' + a(x)u + b(x)y = 0$.

Sistema de ecuaciones :
acoplado

$$y' = u$$
$$u' = -au - by$$

Ec. matricial asociada: $\begin{pmatrix} y' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}$

Sea λ un valor propio de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$, se tiene $y' = \lambda y$, $u' = \lambda u$ (e.v.s).

$y' = \lambda y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \lambda \int dt \Rightarrow \ln|y| = \lambda t \Rightarrow y = e^{\lambda t}$

Reemplazando en la solución : $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$, $y' = \lambda e^{\lambda t}$, $\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0$

Ecuación de segundo grado : $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

$$\lambda^2+a\lambda+b=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

Denotamos por $\lambda_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$, $\lambda_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$.

$y_1=e^{\lambda_1 t}$, $y_2=e^{\lambda_2 t}$ soluciones de $y''+a(x)y+b(x)=0$.

Principio de superposición: $y=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$ soluciones de la ecuación diferencial.

La naturaleza de λ depende de $\Delta=a^2-4b$.

(i) Supongamos $\Delta>0$.

Soluciones son de la forma $y=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$.

(ii) $\Delta=0$. $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=-\frac{a}{2}$.

Soluciones de la forma $y=(C_1+C_2)e^{\lambda t}$.

(iii) $\Delta<0$, $\lambda_1=\alpha+\beta i$, $\lambda_2=\alpha-\beta i$

$$e^{\lambda_1 t}=e^{\alpha t}e^{\beta t i}=e^{\alpha t}(\cos(\beta t)+i\,\text{sen}(\beta t)).$$
$$e^{\lambda_2 t}=e^{\alpha t}e^{-\beta t i}=e^{\alpha t}(\cos(\beta t)-i\,\text{sen}(\beta t)).$$

Reemplazando en la solución general:

$$y=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}=C_1e^{\alpha t}(\cos(\beta t)+i\,\text{sen}(\beta t))+C_2(\cos(\beta t)-i\,\text{sen}(\beta t))e^{\alpha t}$$
$$=(C_1+C_2)e^{\alpha t}\cos(\beta t)+i(C_1-C_2)e^{\alpha t}\text{sen}(\beta t).$$

$z=(C_1+C_2)e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $z'=(C_1+C_2)(\alpha e^{\alpha t}\cos(\beta t)-e^{\alpha t}\beta\,\text{sen}(\beta t))$
$$=(C_1+C_2)e^{\alpha t}(\alpha\cos(\beta t)-\beta\,\text{sen}(\beta t))$$

$$z''=(C_1+C_2)\alpha e^{\alpha t}(\alpha\cos(\beta t)-\beta\,\text{sen}(\beta t))+(C_1+C_2)e^{\alpha t}(-\alpha\beta\,\text{sen}(\beta t)-\beta^2\cos(\beta t))$$

Como $\lambda=\frac{-a\pm i\sqrt{4b-a^2}}{2}$, $\alpha=-\frac{a}{2}$, $\beta=\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$.

$$\frac{1}{C_1+C_2}\cdot z''+az'+bz=\alpha e^{\alpha t}(\alpha\cos(\beta t)-\beta\,\text{sen}(\beta t))+e^{\alpha t}(-\alpha\beta\,\text{sen}(\beta t)-\beta^2\cos(\beta t))$$
$$+a e^{\alpha t}(\alpha\cos(\beta t)-\beta\,\text{sen}(\beta t))+be^{\alpha t}\cos(\beta t)$$
$$=\cos(\beta t)(\alpha^2-\beta^2+a\alpha+b)e^{\alpha t}+\text{sen}(\beta t)(-\alpha\beta-\alpha\beta-a\beta)e^{\alpha t}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b = +\frac{a^2}{4} - \frac{4b-a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b = -\frac{a^2}{4} + b + \frac{a^2-4b}{4} = 0 .$$

$$-\alpha\beta - \alpha\beta - a\beta = -2\alpha\beta - a\beta = -\beta(a+2\alpha) = -\beta(a-a) = 0 .$$

Por lo tanto, $z_1 = D_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ es solución.

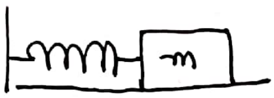
- Se puede demostrar que $z_2 = D_2 e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t)$ también es solución de la ecuación.

Por principio de superposición, las soluciones son de la forma:

$$y = A_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + A_2 e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t) .$$

Intro. Ecuaciones Diferenciales.
Proyecto Cátedra
Septiembre 11, 2018.

* Free undamped motion.



Ecuación de movimiento: $x'' + \omega_0^2 x = 0$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Ec. característica: $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$. $\Delta = -4\omega_0^2 < 0$.

Soluciones: $\lambda = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\pm\sqrt{-4\omega_0^2}}{2} = \frac{\pm 2\omega_0 i}{2} = \pm\omega_0 i = \pm\frac{k}{m} i$

$e^{\lambda_1 t} = e^{k/m\, it} = \cos(\omega_0 t) + i\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$

$e^{\lambda_2 t} = \cos(\omega_0 t) - i\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$.

Solución general: $x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$, $\omega_0 = \frac{k}{m}$

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)}$$

Pregunta: Fenómeno físico oscilatorio ¿cómo representarlo en la ecuación?

Recordatorio: Identidad del seno-suma:

$$\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta).$$

$\beta = \omega_0 t$, $A\cos(\omega_0 t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) = C\,\mathrm{sen}(\alpha + \omega_0 t)$, $\boxed{C \neq 0}$

$C\,\mathrm{sen}(\alpha + \omega_0 t) = C\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\omega_0 t) + C\cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$

$t = 0$: $C\,\mathrm{sen}(\alpha) = A$, $t = \frac{\pi}{2\omega_0}$: $B = C\cos(\alpha)$ $\therefore$ $\boxed{A^2 + B^2 = C^2}$

$$C = \frac{A}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{B}{\cos(\alpha)} \Rightarrow \frac{A}{B} = \tan(\alpha) \quad (B \neq 0).$$

Sin pérdida de generalidad se puede asumir $C > 0$.

Por lo tanto: $C = \sqrt{A^2 + B^2}$

Si $A \neq 0$: $\frac{B}{A} = \frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \cot(\alpha) = \frac{B}{A} \Rightarrow \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{B}{A}$

$B = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$.

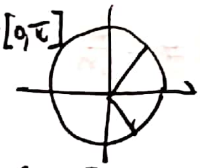
$B \neq 0 \Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{A}{B} \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{A}{B}\right), \quad \alpha = \arctan\left(\frac{A}{B}\right) + \pi.$

Si ~~Alpha~~: $A = 0$: $C = \frac{B}{\cos(\alpha)}$

— o —

Si $A = 0$: $C = \frac{B}{\cos(\alpha)} \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{B}{C} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{B}{C}\right)$ o $2\pi - \arccos\left(\frac{B}{C}\right)$

dom(arccos) $= [0, \pi]$



$A = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ o π (explain)

Si $B = 0$: $C = \frac{A}{\operatorname{sen}(\alpha)} \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{A}{C} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{A}{C}\right)$

$B = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{X(t) = C \operatorname{sen}(\alpha + \omega_0 t) = A \cos(\omega_0 t) + B \operatorname{sen}(\omega_0 t)}$$

$A = 0$, $X(t) = B \operatorname{sen}(\omega_0 t)$.

$\operatorname{sen}(\alpha + \omega_0 t) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\omega_0 t) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\omega_0 t) \Rightarrow \alpha = 0$.

Innecesario.

Afirmación. Siempre es posible expresar la solución $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\operatorname{sen}(\omega_0 t)$ de la forma $X(t) = C \operatorname{sen}(\omega_0 t + \gamma_1)$ o $X(t) = C\cos(\omega_0 t + \gamma_2)$.

Si $A = 0$: $x(t) = B\operatorname{sen}(\omega_0 t) = B\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$, $\gamma_1 = -\frac{\pi}{2}$

Si $B = 0$: $X(t) = A\cos(\omega_0 t) = A\operatorname{sen}\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$ $\gamma_2 = \frac{\pi}{2}$.

Si $A, B \neq 0$:

Intro a las ecuaciones diferenciales.
Desarrollo Guía 6.
12/09/2018.

2 Ec's 2° orden con coef. constantes.

P.1.(i) $y'' + y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Desarrollo. Ecuación característico $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

$\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$. Soluciones son $\lambda = \frac{-1 \pm 5}{2} = 2, -3$.

Soluciones de la ecuación: $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$

$y(0) = 1 = C_1 + C_2$, $y'(x) = 2C_1 e^{2x} - 3C_2 e^{-3x}$

$y'(0) = 0 = 2C_1 - 3C_2$. Sistema de ecuaciones $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 - 3C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow 5C_1 = 3 \Rightarrow C_1 = \frac{3}{5}$

Como $C_1 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{2}{5}$

Solución particular: $y(x) = \frac{3}{5} e^{2x} + \frac{2}{5} e^{-3x}$.

(ii) $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 3$.

Desarrollo. Ecuación característica es $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$. $\Delta = 4 - 4 = 0$.

Soluciones $\lambda = -1$.

Soluciones de la ecuación: $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-x}$

Condiciones: $y(0) = 1 = C_1$, $y(1) = 3 = (C_1 + C_2) e^{-1}$

Sistema de ecuaciones: $\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_1 + C_2 = 3e \end{cases}$

$C_1 = 1$, $C_2 = 3e - 1$. Solución particular es $y(x) = (1 + (3e-1)x) e^{-x}$

(iii) $2y'' + 5y' + 3y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -4$.

Desarrollo. Ecuación característica es $2\lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0$

Discriminante : $\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$

Soluciones de $2\lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0$: $\lambda = \dfrac{-5 \pm 1}{4} = -1 , -\dfrac{3}{2}$.

Soluciones de la ecuación son : $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3/2\, x}$

Por condiciones iniciales tenemos :

$y(0) = 3 = C_1 + C_2$, $y'(x) = -C_1 e^{-x} - \frac{3}{2} C_2 e^{-3/2\, x}$

$y'(0) = -4 = -C_1 - \frac{3}{2} C_2$.

Sistema de ecuaciones: $\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ -C_1 - \frac{3}{2} C_2 = -4 \end{cases} \rightarrow -\frac{1}{2} C_2 = -1 \Rightarrow C_2 = 2$

$C_2 = 2$, $C_1 + C_2 = 3$, luego $C_1 = 1$

Solución particular es $y(x) = e^{-x} + 2e^{-3/2\, x}$.

(iv) $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

Desarrollo. Ecuación característica es $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

Discriminante de la ecuación : $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$.

Soluciones : $\lambda = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$

Soluciones de la ecuación diferencial: ~~son~~

$$y(x) = e^{-x}\left(C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x) \right)$$

Ahora ocupamos condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$ para encontrar la solución particular:

$$y'(x) = -e^{-x}\left(C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x) \right) + e^{-x}\left(-C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \cos(x) \right)$$

$y(0) = 2 = C_1 + C_2 \cdot 0 = C_1$, $y'(0) = 1 = -(C_1 + 0) + 1 \cdot (0 + C_2) = -C_1 + C_2$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1 = 2 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

Fácilmente se tiene $C_2 = 3$.

Solución de la ecuación diferencial son:

$$y(x) = e^{-x}\left(2\cos(x) + 3\,\mathrm{sen}(x)\right)$$

(Vii) $2y'' + y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Desarrollo. Ecuación característica es $2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

Discriminante de la ecuación característica es $\Delta = 1 - 8 = -7$.

Soluciones de $2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ son $\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$

$$\lambda_1 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{-7}}{4}$$

Solución general de la ED: $y(x) = e^{-\frac{1}{4}x}\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right) + C_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right)\right)$

Ahora ocupamos las condiciones iniciales del problema:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$$

$$y'(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right) + C_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right)\right) + e^{-\frac{1}{4}x}\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}C_1\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right) + \frac{\sqrt{7}}{4}C_2\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right)\right)$$

$y(0) = 1 = C_1$

$y'(0) = -2 = -\frac{1}{4}(C_1 + 0) + \left(0 + \frac{\sqrt{7}}{4}C_2\right)$

Sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ -\frac{1}{4}C_1 + \frac{\sqrt{7}}{4}C_2 = -2 \rightarrow C_1 - \sqrt{7}C_2 = 8 \end{cases}$$

$$C_2 = \frac{-7}{\sqrt{7}} = \frac{-7\sqrt{7}}{7} = -\sqrt{7}$$

Solución particular de la ecuación: $y(x) = e^{-\frac{1}{4}x}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right) - \sqrt{7}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{4}x\right)\right)$

Desarrollo Problema P2. iv. d.

$m = 2 kg$
$k = 8 \, N/m$

Calcular la ecuación de movimiento del resorte que tiene por ecuación

$$\begin{cases} 2x'' + 8x = 0 \\ x(0) = 0.5 \quad (m) \\ x'(0) = 1 \quad (m/s) \end{cases}$$

Sabemos que la ecuación de movimiento es $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\,\text{sen}(\omega_0 t)$, donde $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ es la frecuencia angular.

Hay que transformar la ecuación anterior en $2x'' + 8x = 0 \longrightarrow x'' + \omega_0^2 x = 0$

$2x'' + 8x = 0 \Rightarrow x'' + 4x = 0$. Luego $\omega_0^2 = 4$, es decir, $\boxed{\omega_0 = 2}$

Luego: $x(t) = A\cos(2t) + B\,\text{sen}(2t)$

Ocupando condiciones iniciales:

$x(0) = 0.5 = A$
$x'(t) = -2A\,\text{sen}(2t) + 2B\cos(2t)$
$x'(0) = 1 = 2B \Rightarrow B = 0.5$

La ecuación de movimiento es $x(t) = 0.5\cos(2t) + 0.5\,\text{sen}(2t)$.

Para calcular lo que falta, es conveniente hacer la transformación $x(t) = C\cos(2t - \gamma)$

Como $C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.5}$

Además, $\tan(\gamma) = \frac{B}{A} \Rightarrow \tan(\gamma) = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{4}$.

Por lo tanto: $x(t) = \sqrt{0.5}\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$

Amplitud: $C = \sqrt{0.5}$
frecuencia angular: $\omega_0 = 2$
frecuencia: $f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \approx 0.318$ (hertz)

desfase: $\gamma = \frac{\pi}{4}$ radianes.
periodo: $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.318}$ (s)

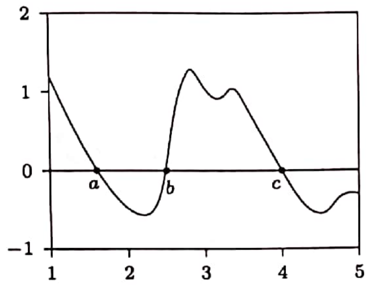
Departamento
de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Andrés Bello

Control 2 - FMM251 Int. Ecua. Dif. - 2018/2

P1. Supongamos que se quiere estudiar el crecimiento de un compuesto P, cuya tasa de crecimiento satisface

$$\frac{dP}{dt} = f(P)$$

donde la función $f(P)$ tiene la siguiente gráfica:



Asuma que los únicos ceros de la función $f(P)$ son a, b y c.

(a) Dibuje el diagrama de fase para este módelo.

(b) Describa la evolución del compuesto si la cantidad inicial de compuesto es 2.

(c) Describa la evolución del compuesto si la cantidad inicial de compuesto es 3.

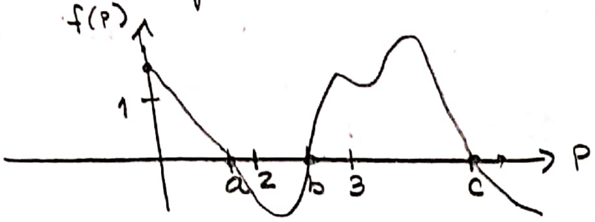
P2. Resuelva la ecuación:

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$$

Tiempo: 60 min. Puede usar Calculadora.

Universidad Andrés Bello.
Intro. Ecuaciones Diferenciales (FMMP251)
Resolución Problema 1, Control 2
Octubre 04, 2018.

(a) Tasa de crecimiento de compuesto $P = P(t)$ es $\frac{dP}{dt} = f(P)$, donde:



Sabemos que $f(P) = 0$ cuando $P = a, b, c$

Por el gráfico:

Si $0 \leq P < 0$, entonces $f(P) > 0 \Rightarrow \frac{dP}{dt} > 0 \Rightarrow P$ creciente

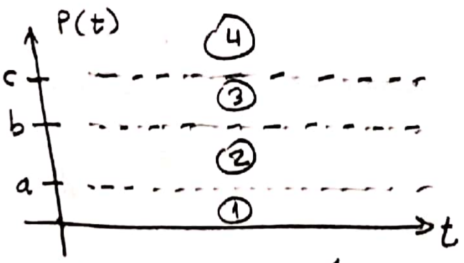
Si $a < P < b$, entonces $f(P) < 0 \Rightarrow \frac{dP}{dt} < 0 \Rightarrow P$ decreciente

Si $b < P < c$, " $f(P) > 0 \Rightarrow \frac{dP}{dt} > 0 \Rightarrow P$ creciente

Si $c < P$, " $f(P) < 0 \Rightarrow \frac{dP}{dt} < 0 \Rightarrow P$ decreciente

Recordar que diagrama de pendientes de $\frac{dP}{dt} = f(P)$ tiene invarianza horizontal porque $\frac{dP}{dt} = f(P)$ es autónoma.

Gráficamente:



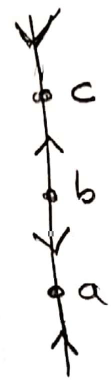
En 1 las pendientes son porque $\frac{dP}{dt} > 0$

En 2 " " " $\frac{dP}{dt} < 0$

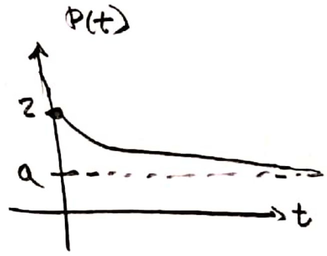
En 3 " " " $\frac{dP}{dt} > 0$

En 4 " " " $\frac{dP}{dt} < 0$

Luego el diagrama de fase de $\frac{dP}{dt} = f(P)$ es



(b) Tenemos el PVI : $\begin{cases} \frac{dP}{dt} = f(P) \\ P(0) = 2 \end{cases}$



Como $a < 2 < b$, y

, entonces

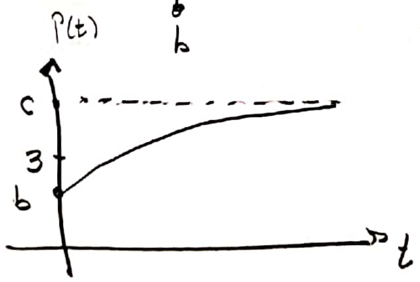
Dicho de otra manera, $\lim_{t \to \infty} P(t) = 2$

(c) Mediante un razonamiento análogo que en (b)

$b < 3 < c$,

Se tiene que $\lim_{t \to \infty} P(t) = c$

Gráficamente :



Scanned with CamScanner

UNAB
Introducción ecuaciones diferenciales.
Ecuaciones no-homogeneas.
Lunes 1 Octubre, 2018.

Buscar soluciones de ecuaciones $ay''+by'+cy = f(x)$

Definimos $L(y) = ay''+by'+cy$.

Afirmación. L es una función lineal.

Thm. $L(y) = f(x)$ ecuación lineal de segundo orden. y_c solución de la ecuación homogenea $L(y)=0$; y_p solución particular de $L(y)=f(x)$.

Solución general de $L(y)=f(x)$: $y = y_c + y_p$.

Idea para estudiar la ecuación $L(y)=f(x)$.

Observación. Por lo general $f(x)$ puede ser polinomio, función trigonométrica, exponencial.

Ejemplo. $y''+2y'+2y = \cos(2x)$.

Asumimos una solución $y_p = A\cos(2x)+B\,\text{sen}(2x)$. $L(y) = y''+2y'+2y$.

$y_p' = -2A\,\text{sen}(2x) + 2B\cos(2x)$

$y_p'' = -4A\cos(2x) - 4B\,\text{sen}(2x)$

$$L(y_p) = -4A\cos(2x) - 4B\,\text{sen}(2x) - 4A\,\text{sen}(2x) + 4B\cos(2x) + 2A\cos(2x) + 2B\,\text{sen}(2x)$$
$$= \cos(2x)$$

$$\Rightarrow (-4A+4B+2A)\cos(2x) + (-4B-4A+2B)\,\text{sen}(2x) = \cos(2x).$$

$$(-2A+4B)\cos(2x) + (-2B-4A)\,\text{sen}(2x) = \cos(2x)$$

Sistema de ecuaciones : $\begin{cases} -2A+4B=1 \\ -2B-4A=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2A+4B=1 \\ +2A+B=0 \end{cases}$

Se tiene que $B=\frac{1}{5}$, $A=-\frac{1}{10}$.

$$y_p = -\frac{1}{10}\cos(2x) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(2x).$$

Solución homogenea : $L(y)=0$.
ecuación característica : $\lambda^2+2\lambda+2=0$ $(\Delta = 4-8=-4)$.

$$\lambda = \frac{-2\pm 2i}{2} = -1\pm i$$

$$y_c(x) = e^{-x}\left(A\cos(x)+B\operatorname{sen}(x)\right)$$

Solución general de la ecuación : $y = e^{-x}(A\cos(x)+B\operatorname{sen}(x)) - \frac{1}{10}\cos(2x)+\frac{1}{5}\operatorname{sen}(2x)$.

2º Supongamos que queremos resolver $L(y)=\cos(3x)$.

Solución particular : $y_p = A\cos(3x)+B\operatorname{sen}(3x)$.

$$y_p' = -3A\operatorname{sen}(3x)+3B\cos(3x)$$
$$y_p'' = -9A\cos(3x)-9B\operatorname{sen}(3x)$$

$$L(y_p) = -9A\cos(3x)-9B\operatorname{sen}(3x)-6A\operatorname{sen}(3x)+6B\cos(3x)+2A\cos(3x)+2B\operatorname{sen}(3x)=\cos(3x)$$
$$=(-7A+6B)\cos(3x)+(-7B-6A)\operatorname{sen}(3x)$$

Sistema de ecuaciones : $\begin{cases} -7A+6B=1 & /\cdot -6 \\ -7B-6A=0 & /\cdot 7 \end{cases}$

$\begin{cases} 42A-36B=-6 \\ -49B-42A=0 \end{cases} \rightarrow \{ -85B=-6$, $B=\frac{6}{85}=$

$6A = -7B = -\frac{42}{85} \Rightarrow A = -\frac{7}{85}$.

Solución general : $y = e^{-x}\left(A\cos(x)+B\operatorname{sen}(x)\right) - \frac{7}{85}\cos(3x)+\frac{6}{85}\operatorname{sen}(3x)$.

~~Pregunta: ¿funciona siempre este método?~~

Supongamos $L(y) = \cos(x)$.

$y_p = A\cos(x) + B\,\text{sen}(x)$

$y_p' = -A\,\text{sen}(x) + B\cos(x)$

$y_p'' = -A\cos(x) - B\,\text{sen}(x)$

$L(y_p) = -A\cos(x) - B\,\text{sen}(x) - 2A\,\text{sen}(x) + 2B\cos(x) + 2A\cos(x) + 2B\,\text{sen}(x) = \cos(x)$

$= (A+2B)\cos(x) + (B-2A)\,\text{sen}(x) = \cos(x)$

Sistema : $\begin{cases} A + 2B = 1 \\ -2A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A + 4B = 2 \\ -2A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow 5B = 2 \Rightarrow B = \frac{2}{5}$.

Despejando : $A = -\frac{1}{5}$.

Solución general : $y = y_c + y_p = e^{-x}(A\cos(x) + B\,\text{sen}(x)) - \frac{1}{5}\cos(x) + \frac{2}{5}\,\text{sen}(x)$.

Ahora vamos con un polinomio.

Supongamos que queremos resolver $y'' + 2y' + 2y = x + 1$

Asumimos $y_p = Ax + B$

$y_p' = A$, $y_p'' = 0$, $L(y_p) = 0 + 2A + 2Ax + 2B = x + 1 \Rightarrow 2Ax + (2A + 2B) = x + 1$

Sistema de ecuaciones : $\begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, \; B = 0$.

Solución general : $y = e^{-x}(A\cos(x) + B\,\text{sen}(x)) + \frac{1}{2}x$.

Ahora vamos con una exponencial:

Supongamos $y'' + 2y' + 2y = e^{2x}$

Asumimos $y_p = Ae^{2x}$

$y_p' = 2Ae^{2x}$, $y_p'' = 4Ae^{2x}$

$L(y_p) = 4Ae^{2x} + 4Ae^{2x} + 2Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow 10Ae^{2x} = e^{2x} \rightarrow 10A = 1$

$A = 1/10$

Solución general: $y = e^{-x}(A\cos(x) + B\,\text{sen}(x)) + \frac{1}{10}e^{2x}$.

Ahora una mezcla: $f(x) = e^x\cos(x)$.

Asumimos $y_p = Ae^x\cos(x) + Be^x\,\text{sen}(x)$.

$$y_p' = A(e^x\cos(x) - e^x\,\text{sen}(x)) + B(e^x\,\text{sen}(x) + e^x\cos(x))$$
$$= (A+B)e^x\cos(x) + (B-A)e^x\,\text{sen}(x)$$

$$y_p'' = (A+B)e^x(\cos(x) - \text{sen}(x)) + (B-A)e^x(\text{sen}(x) + \cos(x))$$
$$= e^x\cos(x)\cdot 2B + e^x\,\text{sen}(x)(-A-B+B-A)$$
$$= 2Be^x\cos(x) - 2Ae^x\,\text{sen}(x)$$

$$L(y_p) = \underline{2Be^x\cos(x)} - \underline{2Ae^x\,\text{sen}(x)} + \underline{2(A+B)e^x\cos(x)} + \underline{2(B-A)e^x\,\text{sen}(x)}$$
$$+ \underline{2Ae^x\cos(x)} + \underline{2Be^x\,\text{sen}(x)}$$
$$= (2B+2A+2B+2A)e^x\cos(x) + (-2A+2B-2A+2B)e^x\,\text{sen}(x)$$
$$= (4A+4B)e^x\cos(x) + (-4A+4B)e^x\,\text{sen}(x).$$

$$L(y_p) = e^x\cos(x) \iff \begin{cases} 4A+4B = 1 \\ -4A+4B = 0 \end{cases} \rightarrow 8B = 1 \rightarrow B = 1/8.$$
$$A = 1/8.$$

Solución general es $y = e^{-x}(A\cos(x) + B\,\text{sen}(x)) + \frac{1}{8}e^x\cos(x) + \frac{1}{8}e^x\,\text{sen}(x)$.

Supongamos que $f(x) = e^{-x}\cos(x)$.

Asumimos solución $y_p = Ae^{-x}\cos(x) + Be^{-x}\operatorname{sen}(x)$.

$$y_p' = A\left(-e^{-x}\cos(x) - e^{-x}\operatorname{sen}(x)\right) + B\left(-e^{-x}\operatorname{sen}(x) + e^{-x}\cos(x)\right)$$
$$= (-A+B)e^{-x}\cos(x) + (-A-B)e^{-x}\operatorname{sen}(x)$$
$$y_p'' = (-A+B)e^{-x}\left(-\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\right) + (-A-B)e^{-x}\left(-\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\right)$$
$$y_p'' = e^{-x}\cos(x)\left(-(-A+B) + (-A-B)\right) + e^{-x}\operatorname{sen}(x)\left(-(-A+B) - (-A-B)\right)$$
$$= -2Be^{-x}\cos(x) + 2Ae^{-x}\operatorname{sen}(x).$$

$$L(y_p) = -2Be^{-x}\cos(x) + 2Ae^{-x}\operatorname{sen}(x) + 2(-A+B)e^{-x}\cos(x) + 2(-A-B)e^{-x}\operatorname{sen}(x)$$
$$+ 2Ae^{-x}\cos(x) + 2Be^{-x}\operatorname{sen}(x)$$
$$= \cancel{-2Be^{-x}\cos(x)} + \cancel{2Ae^{-x}\operatorname{sen}(x)} \cancel{- 2Ae^{-x}\cos(x)} + \cancel{2Be^{-x}\cos(x)} \cancel{- 2Ae^{-x}\operatorname{sen}(x)} \cancel{- 2Be^{-x}\operatorname{sen}(x)}$$
$$\cancel{+ 2Ae^{-x}\cos(x)} + \cancel{2Be^{-x}\operatorname{sen}(x)} = 0$$

No se cumple $L(y_p) = e^{-x}\cos(x)$

Pregunta. ¿Cómo solucionar lo anterior?.

Supongamos que $y_p = Axe^{-x}\cos(x) + Bxe^{-x}\operatorname{sen}(x)$.

$$y_p' = A\left(e^{-x}\cos(x) + xe^{-x}\left(-\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\right)\right) + B\left(e^{-x}\operatorname{sen}(x) + xe^{-x}\left(-\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\right)\right)$$
$$= Ae^{-x}\cos(x) + Be^{-x}\operatorname{sen}(x) + (-A+B)xe^{-x}\cos(x) + (-A-B)xe^{-x}\operatorname{sen}(x)$$

$$y_p'' = A\left(-\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\right)e^{-x} + B\left(-\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\right)e^{-x}$$
$$+ (-A+B)e^{-x}\cos(x) + (-A+B)xe^{-x}\left(-\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\right) + (-A-B)e^{-x}\operatorname{sen}(x)$$
$$+ (-A-B)xe^{-x}\left(-\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\right)$$

$$= -A\cos(x)e^{-x} - A\operatorname{sen}(x)e^{-x} - B\operatorname{sen}(x)e^{-x} + B\cos(x)e^{-x}$$
$$+ (-A+B)e^{-x}\cos(x) - (-A+B)xe^{-x}\cos(x) - (-A+B)xe^{-x}\operatorname{sen}(x) + (-A-B)e^{-x}\operatorname{sen}(x)$$
$$- (-A-B)xe^{-x}\operatorname{sen}(x) + (-A-B)xe^{-x}\cos(x).$$

$$= (-A+B-A+B)\cos(x)e^{-x} + (-A-B-A-B)\operatorname{sen}(x)e^{-x} + (A-B-A-B)xe^{-x}\cos(x)$$
$$+ (A-B+A+B)xe^{-x}\operatorname{sen}(x)$$

$$= (-2A+2B)\cos(x)e^{-x} + (-2A-2B)\,\mathrm{sen}(x)e^{-x} - 2Bxe^{-x}\cos(x) + 2Axe^{-x}\mathrm{sen}(x)$$

$$\begin{aligned} L(y_p) &= (-2A+2B)\cos(x)e^{-x} + (-2A-2B)\,\mathrm{sen}(x)e^{-x} - 2Bxe^{-x}\cos(x) + 2Axe^{-x}\mathrm{sen}(x) \\ &\quad + 2Ae^{-x}\cos(x) + 2Be^{-x}\mathrm{sen}(x) + 2(-A+B)xe^{-x}\cos(x) + 2(-A-B)xe^{-x}\mathrm{sen}(x) \\ &\quad + 2Axe^{-x}\cos(x) + 2Bxe^{-x}\mathrm{sen}(x) \\ &= 2Be^{-x}\cos(x) - 2Ae^{-x}\mathrm{sen}(x) - \cancel{2Axe^{-x}\cos(x)} - \cancel{2Bxe^{-x}\mathrm{sen}(x)} \\ &\quad + \cancel{2Axe^{-x}\cos(x)} + \cancel{2Bxe^{-x}\mathrm{sen}(x)} \\ &= 2Be^{-x}\cos(x) - 2Ae^{-x}\mathrm{sen}(x) \end{aligned}$$

La ecuación $L(y_p) = e^{-x}\cos(x)$ implica $\left\{ \begin{array}{ll} 2B = 1 & B = 1/2 \\ 2A = 0 & A = 0 \end{array} \right.$.

La solución general es $y = e^{-x}(A\cos(x) + B\,\mathrm{sen}(x)) + \frac{1}{2}xe^{-x}\mathrm{sen}(x)$

Comprobación: $y' = -e^{-x}(A\cos(x) + B\,\mathrm{sen}(x)) + \frac{1}{2}e^{-x}\mathrm{sen}(x) + \frac{1}{2}xe^{-x}(\cos(x) - \mathrm{sen}(x))$
$+ e^{-x}(-A\,\mathrm{sen}(x) + B\cos(x))$

$$\cancel{y'' = e^{-x}(A\cos(x) + B\,\mathrm{sen}(x)) - e^{-x}(-A\,\mathrm{sen}(x) + B\cos(x)) - \frac{1}{2}e^{-x}(-\mathrm{sen}(x) + \cos(x))}$$
$$\cancel{+ \frac{1}{2}e^{-x}(-\cos(x) - \mathrm{sen}(x)) - e^{-x}(-A\,\mathrm{sen}(x) + B\cos(x)) + e^{-x}(-A\cos(x) - B\,\mathrm{sen}(x))}$$

$$y' = \frac{1}{2}e^{-x}\left(\cos(x)(-2a+2b+x) - \mathrm{sen}(x)(2a+2b+x-1)\right)$$

$$y'' = e^{-x}\left((2a-1)\,\mathrm{sen}(x) - (2b+x-1)\cos(x)\right)$$

$$\begin{aligned} L(y) &= e^{-x}\left((2a-1)\,\mathrm{sen}(x) - (2b+x-1)\cos(x)\right) \\ &\quad + e^{-x}\left(\cos(x)(-2a+2b+x) - \mathrm{sen}(x)(2a+2b+x-1)\right) \\ &\quad + 2e^{-x}(a\cos(x) + b\,\mathrm{sen}(x)) + xe^{-x}\mathrm{sen}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\cancel{2a}-\cancel{1})e^{-x}\mathrm{sen}(x) - (\cancel{2b}-1)e^{-x}\cos(x) - \cancel{xe^{-x}\cos(x)} \\ &\quad (-\cancel{2a}+\cancel{2b})e^{-x}\cos(x) + \cancel{xe^{-x}\cos(x)} - (\cancel{2a}+\cancel{2b}-\cancel{1})e^{-x}\mathrm{sen}(x) - \cancel{xe^{-x}\mathrm{sen}(x)} \\ &\quad + 2a\,\cancel{e^{-x}\cos(x)} + 2b\,\cancel{e^{-x}\mathrm{sen}(x)} + x\,\cancel{e^{-x}\mathrm{sen}(x)} = e^{-x}\cos(x). \end{aligned}$$

(El cálculo está bueno).

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Andres Bello

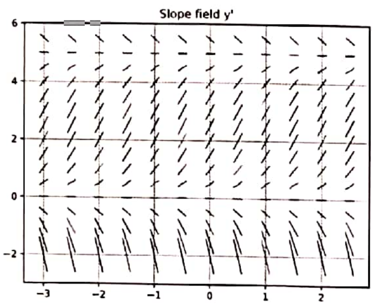
Marco Alejandro Godoy V.
17.022.457-4

Solemne 2 - FMM251 Int. Ecua. Dif. - 2018/2

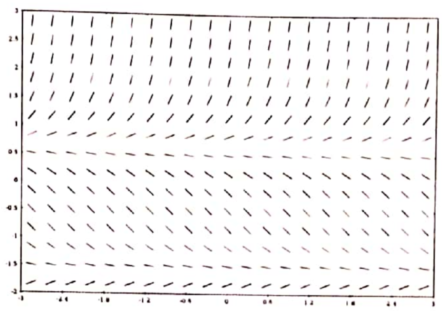
P1. Asocie según corresponda (pueden haber ecuaciones y/o diagramas que no se pueden asociar) las ecuaciones diferenciales con sus diagramas de pendientes:

$$a)\ \frac{dy}{dx} = yx \qquad b)\ \frac{dy}{dx} = 3y(1-\frac{y}{5}); \qquad c)\ \frac{dy}{dx} = 1-x; \qquad d)\ \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$$

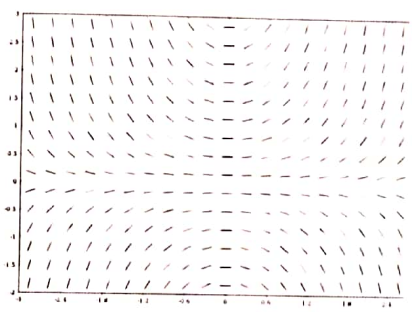
. a los siguientes diagramas de pendientes:



1)



2)



3)

P2. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x^3 - 6x^2 + 9x$$

En cada pregunta justifique claramente su respuesta:

a) Encuentre los puntos críticos y dibuje el diagrama de fase.

b) Encuentre $\lim_{t\to\infty} x(t)$ si $x(0) = 2$.

c) Encuentre $\lim_{t\to\infty} x(t)$ si $x(0) = 0$. ¿Qué pasa en el caso $x(0) = -0.0000000000000001$?

P3. Ecuentre la solución de los siguientes problemas:

a.- $y'' + 2y' - 8y = 0$ (solución general)

b.- $y'' - 4y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$

P4. Tenemos una masa que se mueve de manera horizontal conectada a un resorte. La ecuación está dada por:

$$x'' + 2x = 0$$

Donde x es la posición de la masa. Se sabe que las condiciones iniciales son $x(0) = 0$, $x'(0) = 10$. Calcule la solución de la ecuación diferencial y determine la amplitud del movimiento.

Tiempo: 80 min.

Intro. ecuaciones diferenciales
FMM251
Desarrollo solemne 2.
Octubre 11, 2018.

P.2. (a) $\frac{dx}{dt} = x^3 - 6x^2 + 9x.$

Consideramos $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x-3)^2$. $f(x) > 0$ para $x > 0$, $f(x) < 0$ para $x < 0$.

Ptos críticos: $x = 0$, $x = 3$.

Diagrama de fase:

(b) Si $x(0) = 2 \Rightarrow 0 < x(0) < 3 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = 3$

(c) Si $x(0) = 0 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = 0$ porque $x(t) = 0 \ \forall t > 0$.

En el otro caso, $x(0) < 0$, luego $\lim_{t \to \infty} x(t) = -\infty$ (en el caso de que tenga sentido).

P.3. (a) $y'' + 2y' - 8y = 0$.

Polinomio característico: $\lambda^2 + 2\lambda - 8$. $\Delta = 4 + 32 = 36 > 0$.

Soluciones: $\lambda = \frac{-2 \pm 6}{2} = 2, -4$. Solución general de la ecuación es: $y(x) = Ae^{2x} + Be^{-4x}$

(b) $y'' - 4y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.

Ecuación característica: $\lambda^2 - 4\lambda = 0$. Soluciones. $\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 0}}{2} = \frac{4 \pm 4}{2} = 4, 0$

Solución general de la ecuación: $y(t) = Ae^{4t} + Be^{0} = B + Ae^{4t}$

$y(0) = A + B$. $y(0) = 2$ equivale a $A + B = 2$

$y'(t) = 4Ae^{4t}$. $y'(0) = 6$ equivalente a $4A = 6$. Por lo tanto $A = \frac{3}{2}$, $B = \frac{1}{2}$.

Solución particular de la ecuación es $y(t) = \frac{3}{2}e^{4t} + \frac{1}{2}$.

P.4.

Ecuación diferencial es $x'' + 2x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 10$.

Solución general de la ecuación: $x(t) = A\cos(\sqrt{2}t) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}t)$

$x'(t) = -\sqrt{2}A\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}B\cos(\sqrt{2}t)$

$x(0) = 0$, $x'(0) = 10$ lleva al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A = 0 \\ \sqrt{2}B = 10 \end{cases}$$

Soluciones $A = 0$, $B = 5\sqrt{2}$

Solución particular de $x'' + 2x = 0$ es $x(t) = 5\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}t)$

la amplitud del movimiento es $5\sqrt{2}$.

P.1. (b) $\longleftrightarrow$ (1)

(a) $\longleftrightarrow$ (3)

Las ecuaciones diferenciales restantes no se pueden asociar.

Departamento
de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Andrés Bello

Solemne Recuperativa - FMM251 Int. Ecua. Dif. - 2018/2

P1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a.
$$\frac{dy}{dx} = yx; \quad y(0) = 1.$$

b.
$$\frac{dy}{dx} = x^4 y$$

c.
$$\frac{dy}{dt} = 2 - y$$

P2. Un estanque en estado inicial contiene 50 litros de agua en los que se ha disuelto 5 kilogramos de sal (es decir, la concentración inicial es de 100 gramos por litro). Otra mezcla que contiene 200 gramos de sal por litro es bombeada al tanque con una rapidez de 2 litros por minuto. Suponemos que el estanque mezcla de manera perfecta. La solución mezclada es bombeada hacia el exterior con rapidez de 2 litros por minuto. La ecuación que modela el problema es:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{25} = 400$$

donde A es la cantidad de sal en gramos y t se mide en minutos.

a) (0.5 ptos) Justifique, por qué la ecuación representa un buen modelo del problema.

b) (1 ptos) Resuelva la ecuación para A usando el método del fáctor integrante.

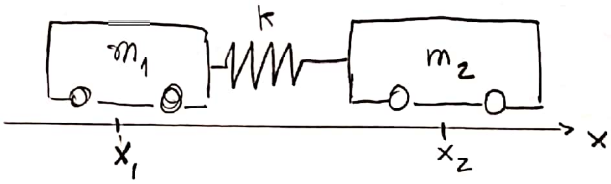
c) (0.5 ptos) Calcule la concentración de sal en el estanque una vez transcurridos 30 minutos y después 140 minutos.

Tiempo: 90 min.

Introducción a las ec's diferenciales (FMM251)
Proyecto cátedra
Octubre, 2018.

Chapter 3. Sistema de ecuaciones diferenciales.

Consideremos el siguiente ejemplo:

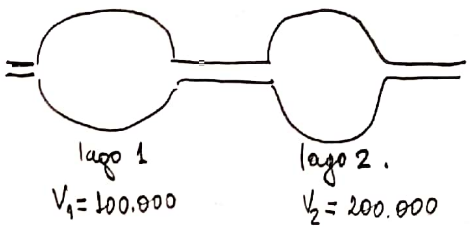


Sistema de dos carros de masa m_1, m_2; unidos por un resorte de constante k

Ecuación que modela el problema:
$$\begin{cases} m_1 x_1'' = k(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' = -k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones acoplado. No es de fácil resolución.

Ejemplo (Problema de los lagos conectados).



$\Delta x_1 \approx -k_1(t) \cdot 500\,\Delta t$, $k_1(t) = \dfrac{x_1(t)}{100.000}$

$\Delta x_2 \approx k_1(t) \cdot 500\,\Delta t - k_2(t) \cdot 500\,\Delta t = (k_1 - k_2) \cdot 500\,\Delta t$

$k_2 = \dfrac{x_2(t)}{200.000}$.

$x_1 = x_1(t)$: cantidad de tóxico en el lago 1
$x_2 = x_2(t)$: cantidad de tóxico en el lago 2

. Inicialmente $x_1(0) = 500$, $x_2(0) = 0$

Sistema de ecuaciones semi-acoplado
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{x_1}{200} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{1}{200}\left(x_1 - \dfrac{x_2}{2}\right) \end{cases}$$

Primero resolvemos $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{x_1}{200} \\ x_1(0) = 500 \end{cases}$. Solución particular es $x_1(t) = 500 e^{-\frac{1}{200}t}$

Resuelta la primera, la segunda se procede con método de factor integrante.

Segunda manera de resolver $\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{200}\left(x_1 - \frac{x_2}{2}\right) \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$:

$$x_2' = \frac{1}{200}\left(x_1 - \frac{x_2}{2}\right) \Rightarrow x_2' + \frac{x_2}{400} = \frac{5}{2} e^{-1/200\, t}$$

$$\Rightarrow 0 x_2'' + x_2' + \frac{x_2}{400} = \frac{5}{2} e^{-\frac{1}{200}t}$$

Buscamos solución de la forma $x(t) = C e^{\lambda t}$ para $0x_2'' + x_2' + \frac{x_2}{400} = 0$

obtenemos ecuación característica $\lambda + \frac{1}{400} = 0$, con solución $\lambda = -\frac{1}{400}$.

Solucion de la ecuación homogenea es $x_h(t) = Ce^{-\frac{1}{400}t}$

Planteamos solución particular del tipo $x_p = De^{-\frac{1}{200}t}$

$$x_p' = -\frac{D}{200} e^{-\frac{1}{200}t}$$

$$x_p' + \frac{x_p}{400} = \frac{5}{2} e^{-\frac{1}{200}t} \Rightarrow -\frac{D}{200} e^{-\frac{1}{200}t} + \frac{D}{400} e^{-\frac{1}{200}t} = -\frac{5}{2} e^{-\frac{1}{200}t}$$

$$\Rightarrow -\frac{D}{400} e^{-\frac{1}{200}t} = \frac{5}{2} e^{-\frac{1}{200}t}$$

la constante es: $D = -1000$

la solución particular es: $x_p = -1000 e^{-\frac{1}{200}t}$

la solución general de $x_2' = \frac{1}{200}\left(x_1 - \frac{x_2}{2}\right)$ es $x_2(t) = Ce^{-\frac{1}{400}t} - 1000 e^{-\frac{1}{200}t}$

Ocupando la condición inicial: $x_2(0) = 0$

$$0 = x_2(0) = C - 1000 \Rightarrow C = 1000.$$

Solución queda de la forma: $x_2(t) = 1000 e^{-\frac{1}{400}t} - 1000 e^{-\frac{1}{200}t}$

Observaciones. El primer sistema es del tipo

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y$$

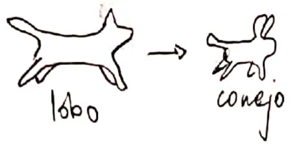
$$\frac{dy}{dt} = \gamma x + \delta y$$

El segundo sistema es del tipo

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha x + \beta y$$

Otro ejemplo. Las ecuaciones de Lotka–Volterra.



$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \dfrac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y \end{cases}$$

$x = x(t)$ población de conejos en el tiempo $t \geq 0$
$y = y(t)$ población de lobos en el tiempo $t \geq 0$
$\dfrac{dx}{dt}$ crecimiento en la población de conejos
$\dfrac{dy}{dt}$ crecimiento de la población de lobos.

Ejemplo. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x' = 2y - x \\ y' = x \end{cases}$

Desarrollo. Si $y' = x$, entonces $y'' = x' = 2y - x'$

Entonces $y'' = 2y - y'$

Tenemos la ecuación de segundo orden $y'' + y' - 2y = 0$

como $\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = 2, -1$, la solución general es $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}$

luego, $x = y' = -2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}$

las soluciones generales son $x(t) = -2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}$, $y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}$

El ejemplo anterior es un problema del tipo

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma x$$

En efecto, $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \gamma \dfrac{dx}{dt} = \alpha(x + \beta y) = \alpha x + \alpha\beta y = \dfrac{\alpha}{\gamma}\dfrac{dy}{dt} + \alpha\beta y$

Ecuación de segundo orden: $\dfrac{d^2y}{dt} - \dfrac{\alpha}{\gamma}\dfrac{dy}{dt} - \alpha\beta y = 0$

Luego de encontrar la solución $y = y(t)$, se puede encontrar la solución $x = x(t)$, porque $x = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{dy}{dt}$

Observar lo siguiente:

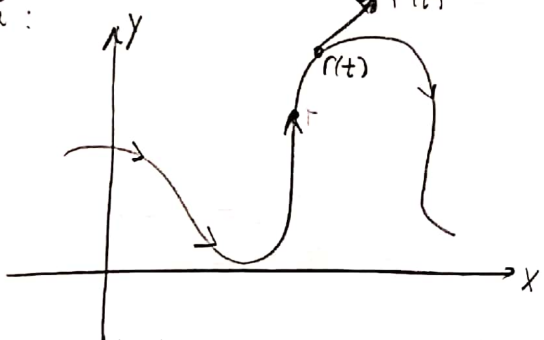
$$\frac{dx}{dt} = -x+2y$$
$$\frac{dy}{dt} = x$$

se puede definir $F(x,y) = (-x+2y, x) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$.

Si $x = x(t)$, $y = y(t)$, entonces podemos definir $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$. Más aún,

$$\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-x+2y, x)$$

Geométricamente:

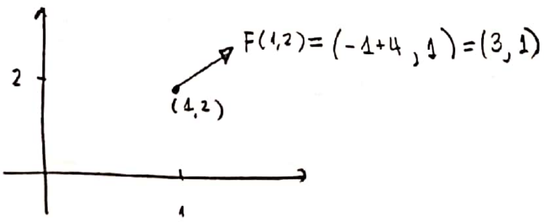


$\vec{r}(t)$ es una curva en el plano

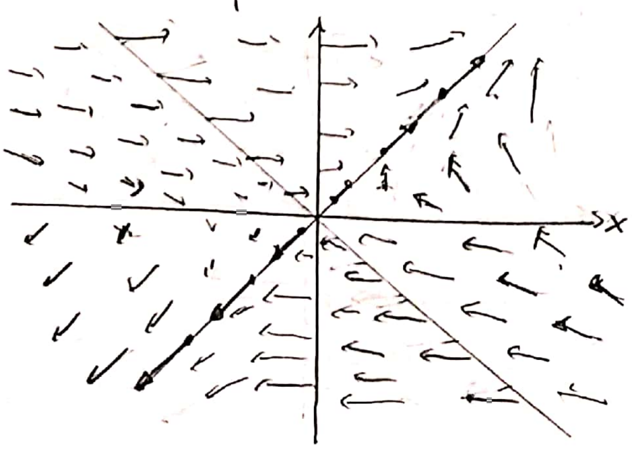
$\vec{r}\,'(t)$ es el vector velocidad.

las soluciones $x(t)$, $y(t)$ del sistema satisfacen $F(x(t), y(t)) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$.

$F(x,y) = (-x+2y, x)$ es un campo vectorial, en donde por ejemplo:



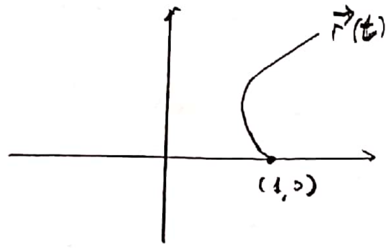
F define el siguiente campo vectorial:



$y = x$: $F(x,x) = (x,x) = x(1,1)$

$y = -x$: $F(x,-x) = (-3x, x) = x(-3,1)$

Para $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, se tiene



Departamento
de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Andrés Bello

Marco Godoy Valdebenito
17.022.457-4
Universidad Andrés Bello
Noviembre 10, 2018.

Control 2 - FMM251 Int. Ecua. Dif. - 2018/2

P1. Encuentre la solución general del problema

$$y'' + 9y = \cos(x).$$

P2. Encuentre la solución del problema

$$y'' + 9y = \cos(3x)$$

con condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Desarrollo

P.1. Solución homogénea es $y_h = C_1\cos(3x) + C_2 \operatorname{sen}(3x)$

Buscamos solución particular del tipo $y_p = A\cos(x)$

$y_p' = -A\operatorname{sen}(x)$, $y_p'' = -A\cos(x)$

$y_p'' + 9y_p = -A\cos(x) + 9A\cos(x) = \cos(x) \Rightarrow 8A\cos(x) = \cos(x) \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{8}}$

Solución general : $y = C_1\cos(3x) + C_2\operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{8}\cos(x)$

P.2. Solución homogénea también es $y_h = C_1\cos(3x) + C_2\operatorname{sen}(3x)$.

Buscamos solución particular del tipo:

$$y_p = Ax\cos(3x) + Bx\operatorname{sen}(3x)$$

$y_p' = A\left(\cos(3x) - 3x\operatorname{sen}(3x)\right) + B\left(\operatorname{sen}(3x) + 3x\cos(3x)\right)$

$y_p'' = A\left(-3\operatorname{sen}(3x) - 3\operatorname{sen}(3x) - 9x\cos(3x)\right) + B\left(3\cos(3x) + 3\cos(3x) - 9x\operatorname{sen}(3x)\right)$

Luego:

$y_p'' + y_p = \cos(3x)$ equivale a :

Tiempo: 60 min. Puede usar Calculadora.

$$-6A\,\text{sen}(3X) + 6B\cos(3X) = \cos(3X)$$

Despejando: $A = 0$
$B = 1/6$

La solución general es:

$$y = C_1\cos(3x) + C_2\,\text{sen}(3x) + \frac{1}{6}x\,\text{sen}(3x).$$

Aplicando condiciones iniciales $y(0)=2$, $y'(0)=1$.

$$y(0) = C_1 + 0 - 0 = C_1 = 2 \Rightarrow \boxed{C_1 = 2}$$

$$y' = -3C_1\,\text{sen}(3x) + 3C_2\cos(3x) + \frac{1}{6}\left(\text{sen}(3x) + 3x\cos(3x)\right)$$

$$y'(0) = 1 \Leftrightarrow 3C_2 + \frac{1}{6}(0+0) = 1 \Leftrightarrow \boxed{C_2 = \frac{1}{3}}$$

Solución particular es: $y = 2\cos(3x) + \frac{1}{3}\,\text{sen}(3x) + \frac{1}{6}x\,\text{sen}(3x)$.

Universidad Andrés Bello
Ejercicios propuestos
Octubre, 2018.

3.1.1 Ejercicios (página 106)

Problema 3.1.2. Encuentre las soluciones general de $\begin{cases} x_1' = x_2 - x_1 + t \\ x_2' = x_2 \end{cases}$

Desarrollo. De la segunda ecuación, $x_2' = x_2$, $x_2 = C_2 e^t$

$x_1' = x_2 - x_1 + t \Rightarrow x_1' + x_1 = C_2 e^t + t$ (equation lineal de primer orden)

Factor integrante: $r(t) = e^t$

$x_1' + x_1 = C_2 e^t + t \Rightarrow x_1(t) = e^{-t}\left(\int (C_2 e^{2t} + t)\,dt + C_1 \right) = e^{-t}\left(C_2 \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{t^2}{2} + C_1 \right)$

Solución general del sistema: $x_1 = C_2 e^t$, $x_2 = C_3 e^t + \frac{t^2 e^{-t}}{2} + C_1 e^{-t}$.

Problema 3.1.3. Encuentre la solución general de $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + e^t \\ x_2' = x_1 \end{cases}$

Desarrollo. $x_1' = 3x_1 - x_2 + e^t \Rightarrow x_1'' = 3x_1' - x_2' + e^t$

$x_1'' = 3x_1' - x_1 + e^t$

Luego queda la ecuación de segundo orden: $x_1'' - 3x_1' + x_1 = e^t$

Discriminante: $\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5 > 0$

Solución general de la ecuación homogenea: $x_h = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2}$

donde; $\lambda_1 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$

Solución particular $x_p = Ae^t$

$x_p'' - 3x_p' + x_p = Ae^t - 3Ae^t + Ae^t = -Ae^t = e^t$. Luego $A = -1$

La solución particular es: $x_p = -e^t$

La solución general x_1 es: $x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} - e^t$

Como $x_2' = x_1 \Rightarrow x_2 = \int x_1\,dt = \frac{C_1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{C_2}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t} - e^t + C_3$

Problema 3.1.4. Escriba $ay''+by'+cy=f(x)$ como un sistema de ec's de primer orden.

Desarrollo. $v=ay'$, $v'=ay''=-by'-cy'+f(x)$

Finalmente tenemos el sistema:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{a}v \\ v' = -by - cy' + f(x). \end{cases}$$

Universidad Andrés Bello
Sistemas de ecuaciones diferenciales
Noviembre 12, 2018.

En clases estudiamos el sistema de ecuaciones autónomas

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}$$

Si $\vec{r}'(t) = A\vec{r}(t)$ es la ecuación vectorial asociada, entonces buscamos soluciones del tipo

$$\vec{r}(t) = \alpha(t)\,\vec{v}_1 + \beta(t)\,\vec{v}_2$$

Para encontrar $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \alpha, \beta$, debemos estudiar los valores propios de A y encontrar sus respectivos vectores propios.

(i) El escalar λ (real o complejo) es un valor propio de A si:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

(ii) $\vec{v}$ es un vector propio de A, asociado al valor propio λ si $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

Aplicamos lo anterior al sistema $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}$

Encontramos sus valores propios mediante el polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 2$$

las raíces de $p(\lambda) = \lambda^2 - 2$ son $\lambda = \pm\sqrt{2}$

Debemos aplicar (ii) dos veces, primero para $\lambda_1 = \sqrt{2}$ y luego para $\lambda_2 = -\sqrt{2}$

Para $\lambda_1 = \sqrt{2}$: Si $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces $A\vec{v} = \sqrt{2}\,\vec{v}$ se convierte en

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nota: Se entiende que las componentes de $\vec{v}$ son distintas a las variables x e y del sistema

Ya vimos (en clases) que

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \text{equivale a} \quad (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Aplicando a $\lambda_1 = \sqrt{2}$, queda $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

cualquier solución no nula de $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un vector propio.

Ya vimos que una solución no nula es $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$. Luego:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos (ii) pero ahora al valor propio $\lambda_2 = -\sqrt{2}$:

$$A\vec{v} = -\sqrt{2}\,\vec{v} \quad \text{es equivalente a} \quad \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una solución no nula es $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Luego:

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

la solución general es, en este caso: $\vec{r}(t) = \alpha(t)\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} + \beta(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$.
Falta encontrar α y β.

Para encontrar α y β, recordamos que $\vec{r}(t) = \alpha(t)\vec{v}_1 + \beta(t)\vec{v}_2$ es solución de $A\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t)$.

$$\vec{r}\,'(t) = \alpha'(t)\vec{v}_1 + \beta'(t)\vec{v}_2$$

$$A\vec{r}(t) = A\left(\alpha(t)\vec{v}_1 + \beta(t)\vec{v}_2\right) = \alpha(t)\,A\vec{v}_1 + \beta\,A\vec{v}_2 = \alpha(t)\left(\sqrt{2}\,\vec{v}_1\right) + \beta(t)\left(-\sqrt{2}\,\vec{v}_2\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}\alpha(t)\right)\vec{v}_1 + \left(-\sqrt{2}\beta(t)\right)\vec{v}_2$$

la igualdad $\alpha'(t)\vec{v}_1 + \beta'(t)\vec{v}_2 = \left(\sqrt{2}\alpha(t)\right)\vec{v}_1 + \left(-\sqrt{2}\beta(t)\right)\vec{v}_2$ implica el sistema:

$$\begin{cases} \alpha'(t) = \sqrt{2}\alpha(t) \\ \beta'(t) = -\sqrt{2}\beta(t) \end{cases}$$

El sistema anterior es de variables separables, con soluciones generales:

$$\alpha(t) = C_1 e^{\sqrt{2}t}$$

$$\beta(t) = C_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

En conclusión, la solución general es

$$\vec{r}(t) = C_1 e^{\sqrt{2}t}\vec{v_1} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}\vec{v_2}$$

Supongamos ahora que queremos resolver el sistema

$$\begin{cases} x' = x+y \\ y' = x-y \\ x(0)=1 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

Como $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, se tiene $\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

la solución general $\vec{r}(t) = C_1 e^{\sqrt{2}t}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$ implica:

$$\vec{r}(0) = C_1 e^{\sqrt{2}\cdot 0}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\sqrt{2}\cdot 0}\begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la igualdad $C_1\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es equivalente al sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}-1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}-1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$ es invertible, porque $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}-1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = -1-\sqrt{2}-\sqrt{2}+1 = -2\sqrt{2}$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}-1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \neq 0.$

la matriz inversa es $-\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2}+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$

la solución de la ecuación matricial es:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

la solución particular de $\begin{cases} x' = x+y \\ y' = x-y \end{cases}$ es en este caso:

$$\vec{r}(t) = \frac{\sqrt{2}+1}{2}e^{\sqrt{2}t}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} + \frac{1-\sqrt{2}}{2}e^{-\sqrt{2}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Departamento
de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Andrés Bello

Control 4 - FMM251 Int. Ecua. Dif. - 2018/2

P1. a) (2 ptos.) Calcule el determinante de $\begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) (1 ptos.) ¿Para qué valores de t es el determinante igual a 0? ¿Es invertible la matriz en esos casos?

P2. Sabemos que un sistema se comporta de la siguiente manera

$$y(t) = A\cos(t) + B\sin(t); \quad y'(t) = -A\sin(t) + B\cos(t)$$

donde A y B son constantes desconocidas.

(a) (1.5ptos.) Si se sabe que $y(0) = 0$, $y'(t) = 1$, escriba un sistema de ecuaciones para A y B.

(b) (1.5ptos.) Transforme el sistema en matriz y resuelvalo.

Tiempo: 60 min. Puede usar Calculadora.

Marco Alejandro Godoy Valdebenito
17,022.457-4
Universidad Andrés Bello

Departamento
de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Andrés Bello

Solemne 3 - FMM251 Int. Ecua. Dif. - 2018/1

P1. (20ptos) Resuelva la ecuación

$$\theta'' + \theta = \cos(\alpha t), \quad \theta(0) = 0, \theta'(0) = 1$$

donde $\alpha = 2$. ¿Qué ocurre si $\alpha = 1$?

P2. Sea el sistema de ecuaciones lineales de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} = x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = x$$

Determine:

(a) (5 puntos) Valores propios del sistema.
(b) (10 puntos) Vectores propios del sistema.
(c) (5 puntos) Solución general del sistema.
(d) (5 puntos) Solución que satisface $x(0) = 1, y(0) = 0$.

P3. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcule:

a) (5ptos) Calcule el determinante de A. Bajo qué condiciones la matriz A no es invertible?
b) (5ptos) (¿Cuantas soluciones tiene el sistema

$$x + y = 1$$

$$2x + 2y = 1$$

c) (5ptos)Calcule todas las soluciones del sistema

$$x + 2y = 2$$

$$x - y = 1$$

Tiempo: 80 min. Puede usar Calculadora. Mochilas y teléfonos celulares adelante.

Universidad Andrés Bello
Desarrollo Solemne 3
19 Noviembre, 2018

P.1. Solución general de $\theta'' + \theta = \cos(\alpha t)$ es $\theta = \theta_h + \theta_p$

Solución homogenea: $\theta_h = C_1 \cos(t) + C_2 \operatorname{sen}(t)$.

(a) Caso $\alpha = 2$. Probamos solución particular $\theta_p = A\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t)$

$\theta_p' = -2A\operatorname{sen}(2t) + 2B\cos(2t)$, $\theta_p'' = -4A\cos(2t) - 4B\operatorname{sen}(2t)$

$\theta_p'' + \theta_p = \cos(2t)$ es equivalente a $-3A\cos(2t) - 3B\operatorname{sen}(2t) = \cos(2t)$. luego: $\begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ B = 0 \end{cases}$

Solución general: $\theta = C_1\cos(t) + C_2\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{3}\cos(2t)$

Imponiendo condiciones iniciales $\theta(0) = 0$, $\theta'(0) = 1$, queda:

$\theta(0) = C_1 - \frac{1}{3} = 0$, $\theta'(t) = -C_1\operatorname{sen}(t) + C_2\cos(t) + \frac{2}{3}\operatorname{sen}(2t)$

$\theta'(0) = C_2 = 1$

luego: $C_1 = \frac{1}{3}$, $C_2 = 1$

Solución particular es $\theta = \frac{1}{3}\cos(t) + \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{3}\cos(2t)$

(b) Caso $\alpha = 1$: Probamos solución particular $\theta_p = At\cos(t) + Bt\operatorname{sen}(t)$

$\theta_p' = A(\cos(t) - t\operatorname{sen}(t)) + B(\operatorname{sen}(t) + t\cos(t))$

$\theta_p'' = A(-\operatorname{sen}(t) - \operatorname{sen}(t) - t\cos(t)) + B(\cos(t) + \cos(t) - t\operatorname{sen}(t)) = -2A\operatorname{sen}(t) + 2B\cos(t) - tA\cos(t) - tB\operatorname{sen}(t)$

$\theta_p'' + \theta_p = \cos(t)$ es equivalente a $-2A\operatorname{sen}(t) + 2B\cos(t) = \cos(t)$

Solución: $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$

Solución general: $\theta = C_1\cos(t) + C_2\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}t\operatorname{sen}(t)$

Nuevamente aplicamos condiciones iniciales $\theta(0) = 0$, $\theta'(0) = 1$, quedando:

$\theta(0) = C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.

$\theta' = -C_1\operatorname{sen}(t) + C_2\cos(t) + \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(t) + t\cos(t))$

$\theta'(0) = 1$ equivale a $1 = C_2$ $\therefore$ $C_2 = 1$

Solución particular: $\theta = \operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}t\operatorname{sen}(t)$

la solución particular es:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 & \frac{5-\sqrt{5}}{10} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}+5}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 \\ -\sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$$

la solución particular del sistema de ecuaciones es:

$$\vec{x} = \frac{\sqrt{5}}{5} e^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)t} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{5}}{5} e^{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)t} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

P.3 (a) El determinante es $\det\begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 3+t$

La matriz A es invertible (o sea, existe A^{-1}) siempre y cuando $\det(A) \neq 0$, o de manera equivalente, $3+t \neq 0$

$\therefore$ A es invertible para todo t distinto de -3.

(b) Forma matricial del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $\det(B) = 2-2=0$.

El sistema tiene infinitas soluciones ó no tiene soluciones.

Es fácil comprobar que del sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=1 \end{cases}$, $x = 1-y$. Reemplazando en la segunda ecuación, $1 = 2x+2y = 2(1-y)+2y = 2-2y+2y = 2$. Como $1=2$ es una contradiccion, concluimos que el sistema de ecuaciones no tiene solución.

(c) Forma matricial del sistema: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, entonces, $\det(C) = -1-2 = -3$.

"El sistema $\begin{cases} x+2y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$ tiene solución única"

Calculamos la solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 + 2/3 \\ 2/3 - 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la unica solución del sistema es $x = 4/3$, $y = 1/3$.

P.2. (a) Ecuación matricial asociado al sistema es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos los valores propios del sistema:

$$0 = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

$0 = \lambda^2 - \lambda - 1$ si y sólo si $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Finalmente, los valores propios son $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(b) Encontramos vector propio asociado a $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vector propio asociado a λ_1, entonces

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o equivalente, $\begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & 1 \\ 1 & -\frac{(1+\sqrt{5})}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

La ecuación matricial a estudiar es: $\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Una solución particular es: $v_2 = 1$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2} v_1 + v_2 = 0 \iff \frac{1-\sqrt{5}}{2} v_1 + 1 = 0 \iff v_1 = -\frac{2}{1-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$(v_1, v_2) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$ también satisface la segunda ecuación $1 \cdot v_1 + \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) v_2 = 0$

Así, un vector propio asociado a λ_1 es $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Ahora buscamos vector propio asociado a $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vector propio asociado a λ_2, debe cumplir

$\begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & 1 \\ 1 & -\frac{(1-\sqrt{5})}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, o equivalentemente, $\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Una solución particular es: $w_2 = 1$, $w_1 \cdot 1 + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) w_2 = 0$ $\left(w_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} w_2\right)$

Así, $\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio asociado a $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(c) La solución general del sistema es $\vec{X} = C_1 e^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)t} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)t} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) Aplicamos condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$,

$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, y además, $\vec{x}(0) = C_1 \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Queda la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

Universidad Andrés Bello.
Desarrollo Solemne 3
21 Noviembre, 2018.

Problema 1. La solución general de $\theta'' + \theta = \cos(\alpha t)$ es del tipo $\theta = \theta_h + \theta_p$, donde θ_h es solución particular de $\theta'' + \theta = 0$ y θ_p es una solución particular.

Sabemos que: $\theta_h = C_1 \cos(t) + C_2 \operatorname{sen}(t)$

(e) (Caso $\alpha = 2$) Probamos solución particular

$$\theta_p = A\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t)$$

Las derivadas θ_p', θ_p'' son:

$$\theta_p' = -2A\operatorname{sen}(2t) + 2B\cos(2t)$$
$$\theta_p'' = -4A\cos(2t) - 4B\operatorname{sen}(2t)$$

Como $\theta_p'' + \theta_p = \cos(2t)$, se tiene la siguiente igualdad:

$$-3A\cos(2t) - 3B\operatorname{sen}(2t) = \cos(2t)$$

Queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -3A = 1 \\ -3B = 0 \end{cases}$$

con soluciones $A = -\frac{1}{3}$, $B = 0$.

La solución general θ es: $\theta(t) = C_1\cos(t) + C_2\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{3}\cos(2t)$

Ocupando condiciones iniciales $\theta(0) = 0$, $\theta'(0) = 1$

$$\theta(0) = 0 = C_1\cos(0) + C_2\operatorname{sen}(0) - \frac{1}{3}\cos(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 - \frac{1}{3}\cdot 1$$

$$C_1 - \frac{1}{3} = 0$$

$$C_1 = \frac{1}{3}$$

Para aplicar $\theta'(0)=1$ primero calculamos θ':

$$\theta' = -C_1\,\text{sen}(t) + C_2\cos(t) + \frac{2}{3}\,\text{sen}(2t)$$

$$\theta'(0) = -C_1\cdot\text{sen}(0) + C_2\cos(0) + \frac{2}{3}\,\text{sen}(0) = -C_1\cdot 0 + C_2\cdot 1 + \frac{2}{3}\cdot 0 = C_2$$

luego: $C_2 = 1$

La solución particular es: $\theta(t) = \frac{1}{3}\cos(t) + \text{sen}(t) - \frac{1}{3}\cos(2t)$.

(b) (Caso $\alpha=1$). Probamos solución particular

$$\theta_p = At\cos(t) + Bt\,\text{sen}(t)$$

Calculamos θ_p', θ_p'':

$$\theta_p' = A\big(\cos(t) - t\,\text{sen}(t)\big) + B\big(\text{sen}(t) + t\cos(t)\big)$$

$$\theta_p'' = -2A\,\text{sen}(t) + 2B\cos(t) - At\cos(t) - Bt\,\text{sen}(t)$$

La igualdad $\theta_p'' + \theta_p = \cos(t)$ es equivalente a:

$$-2A\,\text{sen}(t) + 2B\cos(t) = \cos(t),$$

Queda a continuación el sistema $\begin{cases} -2A = 0 \\ 2B = 1 \end{cases}$

Soluciones: $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$.

Solución general de $\theta'' + \theta = \cos(t)$ es $\theta(t) = C_1\cos(t) + C_2\,\text{sen}(t) + \frac{1}{2}t\,\text{sen}(t)$

Nuevamente aplicamos las condiciones iniciales $\theta(0)=0$, $\theta'(0)=1$:

$$\theta(0) = C_1\cdot 1 + C_2\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 = C_1$$

Así, $\theta(0)=1$ implica $C_1 = 0$.

Calculamos θ'; para después hallar aplicar $\theta'(0)=1$

$$\theta'(t) = -C_1\,\text{sen}(t) + C_2\cos(t) + \frac{1}{2}\big(\text{sen}(t) + t\cos(t)\big)$$

$$\theta'(0) = -C_1\cdot 0 + C_2\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 0 = C_2$$

Luego, $C_2 = 1$

Solución particular de $\theta'' + \theta = \cos(t)$ es: $\theta(t) = \text{sen}(t) + \frac{1}{2}t\,\text{sen}(t)$.

Problema 2, (a) la ecuación matricial asociada al sistema es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculamos sus valores propios:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Los valores propios de A son $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(b) Encontramos vectores propios asociados a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

Sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ un vector propio,

$$\left(A - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) I\right)\vec{v} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & 1 \\ 1 & -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $\det\left(A - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) I\right) = 0$, la ecuación $\left(A - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) I\right)\vec{v} = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones; considerando la ecuación $v_1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) v_2 = 0$

$$v_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) v_2$$

Luego, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Los vectores propios de A asociados a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ son $\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ y sus múltiplos escalares no nulos.

- Buscamos vectores propios de A asociados a $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Sea $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ un vector propio,

$$\left(A - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) I\right)\vec{w} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación $\left(A - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) I\right)\vec{w} = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones, porque $\det\left(A - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) I\right) = 0$.

Tomando la ecuación $w_1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} w_2 = 0$ queda $w_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} w_2$

, luego $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} w_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = w_2 \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Así, $\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ y sus múltiplos $w_2 \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $(w_2 \in \mathbb{R}, w_2 \neq 0)$ son vectores propios asociados a $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(c) La solución general del sistema $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)t} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)t} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) A la solución general $\vec{x} = \vec{x}(t)$ aplicamos condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$:

$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, entonces $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}(0) &= C_1 e^0 \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^0 \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= C_1 \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si $B = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $\det(B) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5} \neq 0$.

El sistema $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ tiene solución única, a saber:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$, se tiene:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{5-\sqrt{5}}{10} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

Así, $c_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $c_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Solución particular: $\vec{x} = \frac{\sqrt{5}}{5} e^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)t} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{5}}{5} e^{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)t} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Problema 3.

(a) $\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 3+t$

A no es invertible siempre y cuando $\det(A)=0$.
Como $\det(A)=0$ para $t=-3$, se concluye que A no es invertible si $t=-3$.

(b) El sistema tiene su equivalente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $\det(B)=0$. Luego el sistema o tiene infinitas soluciones o no tiene solución.

Si (x_0, y_0) es una solución del sistema, se tiene: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

o sea

$$x_0 + y_0 = 1$$
$$2x_0 + 2y_0 = 1$$

De la primera ecuación, $y_0 = 1 - x_0$. Reemplazando en la segunda:

$1 = 2x_0 + 2y_0 = 2x_0 + 2(1-x_0) = 2x_0 + 2 - 2x_0 = 2$

Como $1 = 2$ es una contradicción, se concluye que el sistema no tiene soluciones.

(c) La ecuación matricial asociada al sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, entonces $\det(C) = -1-2 = -3 \neq 0$.

Al ser $\det(C) \neq 0$, el sistema tiene solución única. La calculamos a continuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2/3 + 2/3 \\ 2/3 - 1/3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

La única solución del sistema es $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{1}{3}$.

Departamento
de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Andrés Bello

Control 5 - FMM251 Int. Ecua. Dif. - 2018/2

P1. Sea el sistema de ecuaciones lineales de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y$$

Determine:

(a) Valores propios del sistema.

(b) Vectores propios del sistema.

(c) Solución general del sistema.

Tiempo: 60 min. Puede usar Calculadora.

Departamento
de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Andrés Bello

EXAMEN - FMM251 Int. Ecua. Dif. - 2018/1

1. (15 puntos) Resuelva la ecuación $y' + 2xy = 0$, $y(0) = 1$

2. Un tanque contiene 10 litros de salmuera con un contenido total de sal de 100 grs. Al tanque entran 2 litros de salmuera de concentración $3gr/lt$ por minuto. Simultáneamente se extrae del tanque 2 litros por minuto de la mezcla resultante. Si $A(t)$ es la cantidad de sal (medida en gramos) en el tanque (t se mide en minutos), la ecuación que modela el sistema es:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{1}{5}A = 6$$

   (a) (3 puntos) Justifique el modelo.

   (b) (8 puntos) Resuelva la ecuación, es decir, calcule $A(t)$.

   (c) (4 puntos) Calcule la cantidad de sal que habrá en el tanque cuando t tiende a infinito.

3. Considere la ecuación diferencial de segundo orden (asociada a un oscilador armónico forzado sin amortiguamiento)

$$y'' + 9y = (x + 2)$$

   (a) (7 puntos) Encuentre la solución homogénea

   (b) (8 puntos) Encuentre la solución particular con las condiciones $y(0) = 0$ and $y'(0) = 3$.

4. (15 puntos) Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}x + y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}y$$

Note que los valores propios del sistema son repetidos e iguales a $-\frac{1}{2}$.

DURACION: 90 MINUTOS
Debe escribir todo el desarrollo, además de enmarcar las respuestas
SIN CONSULTAS
PUEDE UTILIZAR CALCULADORA