En resumen, para f dos veces diferenciable, $u(x,t)=\frac{1}{2}\left(f(x+at)+f(x-at)\right)$ es solución de la ecuación de ondas, con $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$.

Pr. 12. Ecuación de onda para una cuerda infinitamente larga.

Consideremos el PVF: $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $-\infty<x<\infty$, $t>0$

$u(x,0)=f(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x)$

(a) Deducir expresión $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}=0$, para $\xi=x+at$, $\eta=x-at$

Demostración. $x=\frac{\xi+\eta}{2}$, $t=\frac{\xi-\eta}{2a}$ $\Rightarrow$ $u(x,t)=u\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2a}\right)=\tilde{u}(\xi,\eta)$

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial\xi}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2a}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}\right)\cancel{+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\left(-\frac{1}{2a}\right)}\cancel{+\frac{1}{2a}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\left(\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{2a}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(-\frac{1}{2a}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{4a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{4a^2}\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=0.$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}=0.$$

(b) Encuentre soluciones de $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}=0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial\xi}=p(\xi)\Rightarrow u=\int_{\mu_0}^{\xi}p(\mu)\,d\mu+g(\eta)$$

FECHA : / /

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial\eta}=\tilde{q}(\eta) \Rightarrow u=\int_{\lambda_0}^{\eta}\tilde{q}(\lambda)d\lambda+\tilde{p}(\xi)$$

Como $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} \Rightarrow \int_{\lambda_0}^{\eta}\tilde{q}(\lambda)d\lambda+\tilde{p}(\xi)=\int_{\mu_0}^{\xi}p(\mu)d\mu+q(\eta)$.

$$\therefore q(\eta)=\int_{\lambda_0}^{\eta}\tilde{q}(\lambda)d\lambda, \quad \tilde{p}(\xi)=\int_{\mu_0}^{\xi}p(\mu)d\mu$$

$$u(x,t)=\int_{z_0}^{x+at}p(z)dz+\int_{z_1}^{x-at}\tilde{q}(z)dz$$

Luego, $\frac{\partial u}{\partial x}=p(x+at)+\tilde{q}(x-at)$, $\frac{\partial u}{\partial t}=a\,p(x+at)-a\tilde{q}(x-at)$

$$p(x+at)=\frac{a\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}}{2a}, \quad \tilde{q}(x-at)=\frac{a\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial t}}{2a}$$

En particular, $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}=p'(\xi)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=\tilde{q}'(\xi)$.

Por lo tanto, para $F(\xi)=\int_{z_0}^{\xi}p(z)dz$, $G(\eta)=\int_{z_1}^{\eta}\tilde{q}(z)dz$, se tiene F, G dos veces diferenciable, y

$$u(x,t)=F(x+at)+G(x-at).$$

Ahora, ocupando condiciones iniciales:

$$u(x,0)=f(x)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x)$$

$$f(x)=u(x,0)=F(x)+G(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=aF'(x+at)-aG'(x-at) \Rightarrow g(x)=aF'(x)-aG'(x)$$

Luego, $F(x)-G(x)=\frac{1}{a}\int_{s_0}^{x}g(s)ds+2c$, $c\in\mathbb{R}$ constante.

Resolviendo sistema de ecuaciones:

$$F(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a}\int_{s_0}^{x} g(s)ds + c$$

$$G(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a}\int_{s_0}^{x} g(s)ds - c$$

(c) Encontrar solución a la ecuación de ondas original.

Recordemos que $u(x,t) = F(x+at) + G(x-at)$,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+at)+f(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)ds$$ (Solución de d'Alembert)

Observación: Para $g(x) = 0$,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+at) + f(x-at)\right], \quad -\infty < x < \infty$$

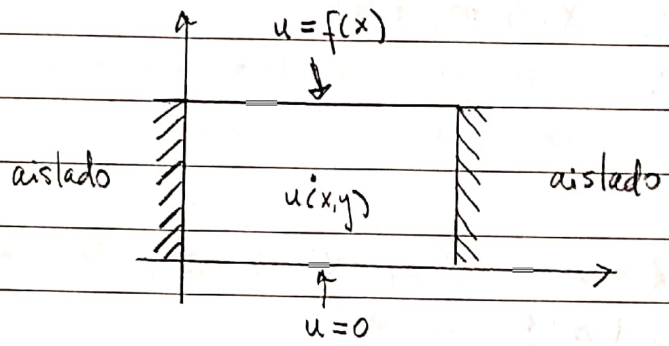
La solución es la superposición de las ondas viajeras $\frac{1}{2}f(x+at)$, y, $\frac{1}{2}f(x-at)$

Pr. 13. Utilice la solución de d'Alembert para la cuerda infinita, donde $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $g(x) = 1$

Desarrollo. $\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} g(s)ds = \int_{x-at}^{x+at} ds = 2at$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x+at) + \operatorname{sen}(x-at)\right] + t.$$

11.5 La ecuación de Laplace.



$u(x,y)$ representa la temperatura de una placa rectangular aislada lateralmente

Problema de valores de frontera:

$$\nabla u = 0 \quad , \quad 0<x<a \quad , \quad 0<y<b$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0 \quad , \quad 0<y<b$$

$$u(x,0) = 0 \quad , \quad u(x,b) = f(x) \quad , \quad 0<x<a.$$

Desarrollo del PVF: Buscamos soluciones del tipo $u(x,y) = X(x)Y(y)$

$$\nabla u = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y)X''(x) + X(x)Y''(y) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ constante}$$

Tenemos ecuaciones: $X'' + \lambda X = 0$, $X'(0) = 0 = X'(a)$

$Y'' - \lambda Y = 0$, $Y(0) = 0$

FECHA: / /

Primero solucionar $X'' + \lambda X = 0$, $X'(0) = X'(a) = 0$

$\lambda = 0$: $X'' = 0 \Rightarrow X = c_1 + c_2 x$

$\Rightarrow X' = c_2$, $X'(0) = c_2 = 0$

$\therefore X(x) = c_1$, siempre satisface la condición $X'(a) = 0$

Para $c_1 \neq 0$, $X = c_1$ es solución no trivial.

$\lambda = -\alpha^2 < 0$: $X'' - \alpha^2 X = 0$, $X'(0) = X'(a) = 0$. Tenemos la solución general $X = d_1 e^{-\alpha x} + d_2 e^{\alpha x}$.

$X' = -d_1 \alpha e^{-\alpha x} + d_2 \alpha e^{\alpha x}$, $X'(0) = -d_1\alpha + d_2 \alpha = 0 \rightarrow d_2 = d_1$.

Calculando $0 = X'(a)$, $0 = X'(a) \Rightarrow -d_1 \alpha + d_2 \alpha e^{2\alpha a} = 0$.

Equivalente a $e^{2\alpha a} = 1$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

$\lambda = \alpha^2 > 0$: $X'' + \alpha^2 X = 0$, $X'(0) = X'(a) = 0$

Soluciones: $X = e_1 \cos(\alpha x) + e_2 \operatorname{sen}(\alpha x)$

$X' = -\alpha e_1 \operatorname{sen}(\alpha x) + e_2 \alpha \cos(\alpha x)$

$X'(0) = 0 \Rightarrow e_2 \alpha = 0 \Rightarrow e_2 = 0$

Luego, $X = e_1 \cos(\alpha x)$. De la condición $X' = -\alpha e_1 \operatorname{sen}(\alpha x)$, para $X'(a) = 0$, se tiene $\operatorname{sen}(\alpha a) = 0$. Luego $\alpha a = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, es decir, decir, $\alpha = \frac{n\pi}{a}$.

La ecuación $X'' + \lambda X = 0$ tiene a $\lambda = 0$ y $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$, $n \in \mathbb{N}$ como valores propios.

Funciones propias: $\begin{cases} \text{asociada a } \lambda = 0: & X_0 = c_1 \\ \text{asociada a } \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}: & X_n = e_1 \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \end{cases}$

Desarrollo de $Y'' + \lambda Y = 0$, $Y(0) = 0$.

Para $\lambda = 0$: $Y = f_1 + f_2 y$. Condición inicial $Y(0) = 0$ implica $Y(0) = f_1 = 0$. Es decir, $Y = f_2 y$

RHEIN®

Para $\lambda = -\alpha_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$, tenemos

$$\begin{cases} Y'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2} Y = 0 \\ Y(0) = 0 \end{cases}$$

Solución general en $0 < y < b$: $Y = g_1 \cosh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) + g_2 \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$

$Y(0) = g_1 \cosh(0) + g_2 \operatorname{senh}(0) = g_1 \Rightarrow g_1 = 0.$

Solución : $Y = g_2 \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$

Para $\lambda = -\alpha_n^2$ no hay solución.

Luego, valor propio $\lambda = 0$, función propia $Y_0 = f_2 y$. Para valor propio $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$, función propia $Y_n = g_2 \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$.

Por lo tanto, $u_0(x,y) = X_0 Y_0 = A_0 y$, $u_n(x,y) = X_n Y_n = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$.

Solución del PVF:

$$u(x,y) = A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$$

$$u(x,b) = f(x) \Rightarrow f(x) = A_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} b\right)$$

donde $A_0 = \frac{1}{2ab} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \frac{1}{ab} \int_0^a f(x)\,dx$, f admite extensión par.

$$A_n = \frac{2}{a \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} b\right)} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx$$

- El problema de Dirichlet.

El problema de Dirichlet consiste en resolver $\nabla^2 u = 0$ en una región R, donde $u(x,y)$ toma valores conocidos en ∂R.

Ejemplo.
$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & 0<x<a,\ 0<y<b \\ u(0,y)=0, & u(a,y)=0 \\ u(x,0)=0, & u(x,b)=f(x) \end{cases}$$

Problema de Dirichlet en el rectángulo $[0,a]\times[0,b]$

Desarrollo. $u(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$

Ecuaciones separables: $X'' + \lambda X = 0 \quad X(0)=X(a)=0$

$Y'' - \lambda Y = 0 \quad Y(0)=0$

Resolución de $X'' + \lambda X = 0$, $X(0)=X(a)=0$

$\lambda = 0$: $X = a_1 + a_2 x$, $X(0)=0$ implica $a_1 = 0$; $X(a)=0$ implica $a_2 = 0$.
Luego sólo tenemos la solución trivial $X=0$

$\lambda = \alpha^2\ (\alpha>0)$: $X = b_1\cos(\alpha x) + b_2 \operatorname{sen}(\alpha x)$,
$X(0) = b_1 = 0$, $X(a) = b_2 \operatorname{sen}(\alpha a)$ implica $\alpha = \frac{n\pi}{a}$, $n\in\mathbb{N}$

$\lambda = -\alpha^2\ (\alpha>0)$: $X = c_1\cosh(\alpha x) + c_2 \operatorname{senh}(\alpha x)$.
$X(0) = c_1 = 0$, $X(a) = c_2 \operatorname{senh}(\alpha a) = 0 = c_2 \frac{1}{2}\left[e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}\right]$. Luego $e^{2\alpha a} = 1$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

Para valor propio $\lambda = 0$: $X_0 = 0$
$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}: \quad X_n = b_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

Resolución de $Y'' - \lambda Y = 0$, $Y(0) = 0$.

$\lambda = 0$: $Y = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 y$, $Y(0) = \tilde{a}_1 = 0$. luego, $Y = \tilde{a}_2 y$

$\lambda = \alpha^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$: $Y = \tilde{b}_1 \cosh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) + \tilde{b}_2 \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$

$Y(0) = 0 \Rightarrow \tilde{b}_1 = 0 \rightarrow Y = \tilde{b}_2 \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$

Se sigue que, para v.p $\lambda = 0$, $Y = \tilde{a}_2 y$

$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$, $Y_n = \tilde{b}_2 \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$

Solución, $u_n(x,y) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ b_2 \tilde{b}_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \end{cases}$

Por p. superposición: $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$

$f(x) = u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} b\right)$ (extensión impar)

y $B_n = \frac{2}{a \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx$.

Principio del maximo. El valor máximo y mínimo de $u(x,y)$ se encuentra en la frontera de R.

Principio de superposición, Para resolver el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & (x,y) \in (0,a) \times (0,b) \\ u(0,y) = F(y), \quad u(a,y) = G(y) & 0 < y < b \\ u(x,0) = f(x), \quad u(x,b) = g(y) & 0 < x < a \end{cases}$$

Se puede asumir que $u = u_1 + u_2$, donde

FECHA : / /

$$\begin{cases} \nabla^2 u_1 = 0 \\ u_1(0,y) = 0 , \quad u_1(a,y) = 0 \\ u_1(x,0) = f(x) , \quad u_1(x,b) = g(x) \end{cases} , \qquad \begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ u_2(0,y) = F(y) , \quad u_2(a,y) = G(y) \\ u_2(x,0) = 0 , \quad u_2(x,b) = 0 \end{cases}$$

RHEIN®

FECHA : / /

11.8 Serie de Fourier con dos variables

Ecuación bidimensional del calor : $k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}$

Ecuación bidimensional de la onda : $a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

donde, en ambos casos, $u=u(x,y,t)$.
La idea es aplicar separación de variables Tipo producto:

$$u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t)$$

Ejemplo. Temperatura de una placa.

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0<x<b,\ 0<y<c,\ t>0$$

$$u(x,y,0)=f(x,y), \quad 0<x<b,\ 0<y<c$$
$$u(0,y,t)=0, \quad u(b,y,t)=0, \quad 0<y<c,\ t>0$$
$$u(x,0,t)=0, \quad u(x,c,t)=0, \quad 0<x<b,\ t>0$$

Para $u=XYT$, $k(YTX''+XTY'')=XYT'$

$$k(YTX''+XTY'')=XYT' \iff kYTX''+kXTY''=XYT'$$
$$\iff kYTX''=X(YT'-kTY'')$$
$$\Rightarrow \frac{X''}{X}=\frac{T'}{kT}-\frac{Y''}{Y}$$

$$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{kT}-\frac{Y''}{Y}=-\lambda, \quad \lambda\in\mathbb{R} \text{ constante}$$

$$X'' + \lambda X = 0 \quad , \quad \frac{Y'}{Y} = \lambda + \frac{T'}{kT}.$$

Si introducimos nueva constante de separación $\mu \in \mathbb{R}$, $\frac{Y'}{Y} = -\mu = \frac{T'}{kT} + \lambda$

Luego tenemos el sistema: $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ Y'' + \mu Y = 0 \\ T' + (\lambda + \mu) kT = 0 \end{cases}$

Por condiciones de frontera: $X(0) = X(b) = 0$, $Y(0) = Y(c) = 0$,

(i) Resolución de $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = X(b) = 0$.

- $\lambda = 0$: $X = a_1 + a_2 x$, $X(0) = a_1 = 0$, $X(b) = a_2 b = 0 \Rightarrow a_2 = 0$
  Por lo tanto, $\lambda = 0$ entrega la solución trivial $X = 0$.
- $\lambda = \alpha^2$: $X = b_1 \cos(\alpha x) + b_2 \operatorname{sen}(\alpha x)$. $X(0) = b_1 = 0$, $X(b) = b_2 \operatorname{sen}(\alpha b) = 0$,
  Se tiene $\alpha = \frac{m\pi}{b}$ $(m \in \mathbb{N})$. Por lo tanto, $\lambda = \alpha^2 = \frac{m^2\pi^2}{b^2}$ entrega soluciones
  $X = b_2 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b} x\right)$.
- $\lambda = -\alpha^2$: $X = c_1 \cosh(\alpha x) + c_2 \operatorname{senh}(\alpha x)$. $X(0) = c_1 = 0$, $X(b) = c_2 \operatorname{senh}(\alpha b) = 0$;
  pero $\operatorname{senh}(\alpha b) = 0$ es una contradicción.

Por lo tanto, valores propios $\lambda_m = \frac{m^2\pi^2}{b^2}$ entrega soluciones $X_m = b_2 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b} x\right)$
y $\lambda_0 = 0$ entrega solución $X_0 = 0$.

(ii) Resolución de $Y'' + \mu Y = 0$, $Y(0) = Y(c) = 0$.

- $\mu = 0$: $Y = \tilde{a}_1 + a_2 y$, $Y(0) = Y(c) = 0$, entrega solución $Y = 0$.
- $\mu = \beta^2$: $Y = \tilde{b}_1 \cos(\beta y) + \tilde{b}_2 \operatorname{sen}(\beta y)$, $Y(0) = Y(c) = 0$ entrega solución
  $\beta = \frac{n^2\pi^2}{c}$, $Y = \tilde{b}_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{c} y\right)$
- $\mu = -\beta^2$ no entrega valores propios ni soluciones.

Por lo tanto, los valores propios $\mu_n = \frac{n^2\pi^2}{c^2}$ entrega soluciones $Y_n = \tilde{b}_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{c} y\right)$
y $\mu_0 = 0$ entrega solución $Y_0 = 0$.

FECHA: / /

(iii) Resolución de $T' + (\lambda+\mu)T = 0$.

- Para λ_0, μ_0, la solución es $T = \ell_1 \in \mathbb{R}$ constante
- Para λ_m, μ_0, la solución es $T = \ell_2 e^{-k\frac{m^2\pi^2}{b^2}t}$
- Para λ_0, μ_n, la solución es $T = \ell_3 e^{-k\frac{n^2\pi^2}{c^2}t}$
- Para λ_m, μ_n, la solución es

(Innecesario)

$$T_{m,n} = \ell_4 \exp\left(-k\left(\frac{m^2\pi^2}{b^2} + \frac{n^2\pi^2}{c^2}\right)t\right)$$

Por lo tanto, $u_{m,n}(x,y,t) = A_{m,n} \exp\left(-k\left(\frac{m^2\pi^2}{b^2} + \frac{n^2\pi^2}{c^2}\right)t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{c}y\right)$

Por principio de superposición: $u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n}$ es la solución buscada.

Observar que $f(x,y) = u(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{c}y\right)$

Para calcular $A_{m,n}$ basta multiplicar $f(x,y)$ por $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{c}y\right)$ e integrar sobre $[0,b]\times[0,c]$:

$$\int_0^b\int_0^c f(x,y) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{c}y\right) dy\,dx = \frac{1}{4}A_{m,n}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{c}y\right) dy\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\, bc\, A_{m,n}$$

$$A_{m,n} = \frac{4}{bc}\int_0^b\int_0^c f(x,y) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{c}y\right) dy\,dx.$$

FECHA : / /

P. 12. Calcular $\int_0^1\int_0^1 xy\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$

Desarrollo. $\int_0^1\int_0^1 xy\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_0^1\left(\int_0^1 xy\sqrt{x^2+y^2}\,dy\right)dx = \int_0^1 x\left(\int_0^1 y\sqrt{x^2+y^2}\,dy\right)dx$

Primero resolvemos $\int_0^1 y\sqrt{x^2+y^2}\,dy$, $u=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow du = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}(2y)\,dy$

$\Rightarrow du = y(x^2+y^2)^{-1/2}\,dy$.

Se tiene que $\int_0^1 y\sqrt{x^2+y^2}\,dy = \int_x^{\sqrt{x^2+1}} u\,y\,dy = \int_x^{\sqrt{x^2+1}} u^2\,du = \left.\frac{u^3}{3}\right|_x^{\sqrt{x^2+1}}$

$= \frac{1}{3}\left((x^2+1)^{3/2} - x^3\right)$

$\int_0^1\int_0^1 xy\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{x}{3}\left((x^2+1)^{3/2} - x^3\right)dx = \frac{1}{3}\int_0^1\left(x(x^2+1)^{3/2} - x^4\right)dx$

$= \frac{1}{3}\left[\int_0^1 x(x^2+1)^{3/2}\,dx - \int_0^1 x^4\,dx\right]$

Resolvemos $\int_0^1 x(x^2+1)^{3/2}\,dx$, $u=(x^2+1)^{3/2} \Rightarrow du = \frac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}(2x)\,dx = 3x(x^2+1)^{1/2}\,dx$

Segunda forma de resolver la integral:

$$\int_0^1 x(x^2+1)^{3/2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\int_0^1 \frac{5}{2}(2x)(x^2+1)^{3/2}\,dx = \left.\frac{1}{5}(x^2+1)^{5/2}\right|_0^1$$

$$= \frac{1}{5}(2)^{5/2} - \frac{1}{5}$$

$\int_0^1 x^4\,dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{1}{5}$. Por lo tanto: $I = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{5}(2)^{5/2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right]$.

FECHA : / /

P.21. Calcular la integral doble $\iint_R xy e^{x^2 y} dA$, $R=[0,1]\times[0,2]$

Desarrollo. $I=\iint_R xy e^{x^2y} dA = \int_0^2 \int_0^1 xy e^{x^2 y} dx\, dy$.

cambio de variable $u = e^{x^2 y}$

$du = u(2xy)dx$; $\int_0^1 xy e^{x^2y} dx = \int_1^{e^y} xy\, u \frac{du}{2xyu} = \int_1^{e^y} \frac{1}{2} du$

$= \frac{1}{2} u \Big|_1^{e^y} = \frac{1}{2}(e^y - 1)$.

Por lo tanto, $I = \int_0^2 \frac{1}{2}(e^y - 1) dy = \frac{1}{2} e^y \Big|_0^2 - \frac{1}{2} y \Big|_0^2$

15.9 Cambio de variable en integrales multiples.

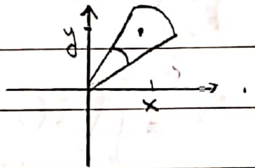
Cambio de variable en cálculo diferencial:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(x(u))\frac{dx}{du}\cdot du \quad , \quad x=g(u), \quad a=g(c), \; b=g(d)$$

Cambio de variable coordenadas polares:

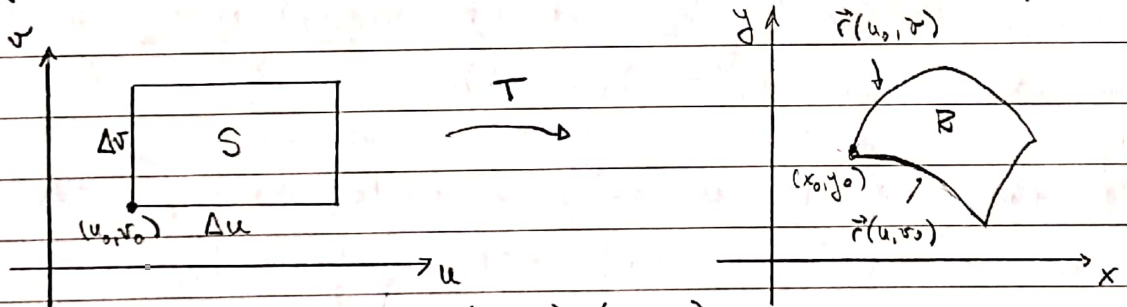
$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_S f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

donde R es una región del tipo



Consideramos una transformación $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ del tipo $T(x,y)=(u,v)$, donde T es un difeomorfismo C^1 (derivadas parciales continuas).

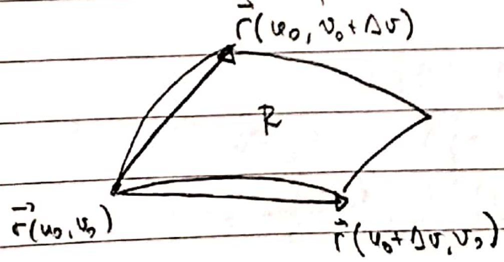
$T(x,y)=(u,v) \Rightarrow u=G(x,y), \; v=H(x,y)$



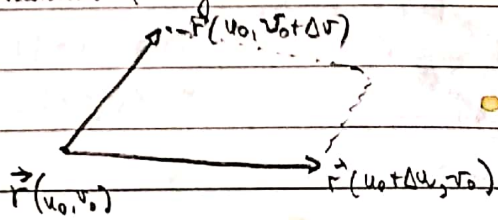
Tenemos que $T(S)=R$, $T(u_0,v_0)=(x_0,y_0)$.

$\vec{r}(u,v) = g(u,v)\hat{\imath} + h(u,v)\hat{\jmath} = x(u,v)\hat{\imath} + y(u,v)\hat{\jmath}$

Derivando nos queda: $\vec{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial u}\hat{\jmath}$, $\vec{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial v}\hat{\jmath}$



Aproximamos la región R mediante el plano



FECHA: / /

Para calcular el área de este paralelógramo:

$$\vec{r}(u_0, v_0+\Delta v) - \vec{r}(u_0,v_0) \approx \vec{r}_v \Delta v$$

$$\vec{r}(u_0+\Delta u, v_0) - \vec{r}(u_0,v_0) \approx \vec{r}_v \Delta u$$

Area paralelógramo $= |\vec{r}_u(\Delta u) \times \vec{r}_v(\Delta v)| = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \Delta u \Delta v$,

donde $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = J(u,v)\,\hat{k}$,

$$J(u,v) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Así, $dR = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, du\, dv$, con lo que queda:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f\circ T^{-1}(u,v)\, J(u,v)\, du\, dv$$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v), y(u,v))\, |J(u,v)|\, du\, dv$$

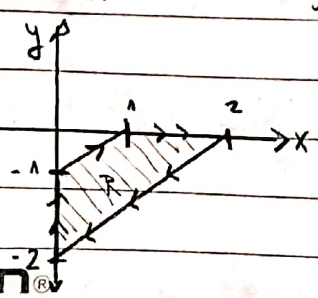
Ejemplo. 3. Evaluar $\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\, dA$, donde R es el trapezoide de vertices $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$, $(0,-1)$.

Desarrollo, Definimos el cambio de variable $u = x+y$, $v = x-y$.

Resolviendo el sistema: $x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{2}(u-v)$.

$$\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\, dA = \iint_S e^{u/v}\, J(u,v)\, du\, dv, \quad \text{donde } J(u,v) = -\frac{1}{2}$$

Falta calcular la región S: $T(x,y) = (u,v) = (x+y, x-y)$



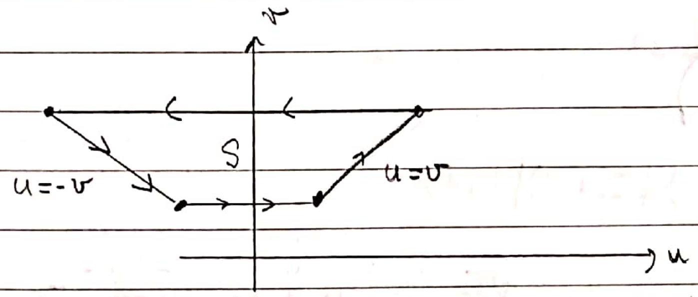
$T(x,0) = (x,x)$, $1 \leq x \leq 2$

$T(2-x,-x) = (2-2x, 2)$, $0 \leq x \leq 2$

$T(0,-2+y) = (-2+y, 2-y)$, $0 \leq y \leq 1$

$T(x, x-1) = (2x-1, 1)$, $0 \leq x \leq 1$

$T(1,0) = (1,1)$, $T(2,0) = (2,2)$, $T(0,-2) = (-2,2)$, $T(0,-1) = (-1,1)$



Tenemos que $v \in [1,2]$, $-v \leq u \leq v$. Por lo tanto :

$$\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\, dA = \int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{u/v} \left(\frac{1}{2}\right) du\, dv = \frac{3}{4}\left(e - e^{-1}\right)$$

Observación. Se recomienda desarrollar los problemas 19-23 , página 1020.

P.19. (Pagina 1020). Calcular $\iint_R \frac{x-2y}{3x-y} dA$. R es el paralelógramo encerrado en los segmentos líneas $x-2y=0$, $x-2y=4$, $3x-y=1$, $3x-y=8$.

Desarrollo. $u = x-2y$, $v = 3x-y$

$\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ -6x+2y=-2 \end{cases} \Rightarrow -5x=-2$, $x=\frac{2}{5}$, $y=\frac{1}{5}$

$\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x-y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ -6x+2y=16 \end{cases} \Rightarrow -5x=-16$, $x=\frac{16}{5}$, $y=\frac{8}{5}$

$\begin{cases} x-2y=4 \\ 3x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=4 \\ -6x+2y=-2 \end{cases} \Rightarrow -5x=2 \Rightarrow x=\frac{-2}{5}$, $y=\frac{-11}{5}$

$\begin{cases} x-2y=4 \\ 3x-y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=4 \\ -6x+2y=-16 \end{cases} \Rightarrow -5x=-12 \Rightarrow x=\frac{12}{5}$, $y=-\frac{4}{5}$

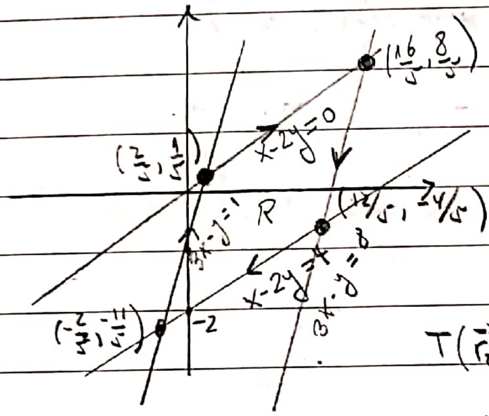
$\begin{cases} u = x-2y \\ v = 3x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -3u = -3x+6y \\ v = 3x-y \end{matrix} \Rightarrow v-3u = 5y \Rightarrow y = \frac{v-3u}{5}$

$$x = \frac{1}{3}\left(v + \frac{v-3u}{5}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{6v-3u}{5}\right) = \frac{2v-u}{5}$$

$$T(x,y) = \left(x-2y,\ 3x-y\right)$$
$$T^{-1}(u,v) = \left(\frac{2v-u}{5},\ \frac{v-3u}{5}\right)$$

$$\iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\,dx\,dy = \iint_S \frac{u}{v}\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{5},\quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{2}{5},\quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{3}{5},\quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{5},\qquad J(u,v) = \det\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix} = \frac{-1}{25}+\frac{6}{25} = \frac{1}{5}$$

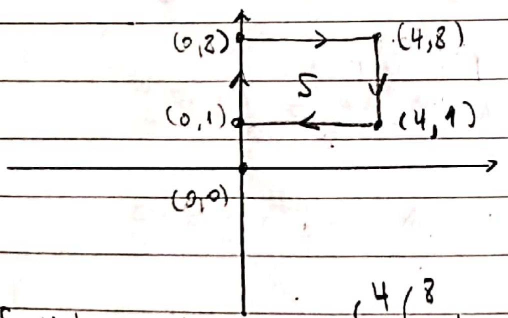


$$\vec{r}_1(t) = \left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)+t\left(\frac{14}{5},\frac{7}{5}\right) = \left(\frac{2+14t}{5},\ \frac{1+7t}{5}\right)$$
$$T(\vec{r}_1(t)) = \left(0,\ \frac{5+35t}{5}\right) = (0,1+7t) = (0,1)+(0,7)t$$

$$\vec{r}_2(t) = \left(\frac{16}{5},\frac{8}{5}\right)+t\left(-\frac{4}{5},-\frac{12}{5}\right) = \left(\frac{16-4t}{5},\ \frac{8-12t}{5}\right)$$
$$T(\vec{r}_2(t)) = \left(4t,\ \frac{40}{5}\right) = (0,8)+t(4,0)$$

$$\vec{r}_3(t) = \left(\frac{12}{5},-\frac{4}{5}\right)+t\left(-\frac{14}{5},-\frac{7}{5}\right) = \left(\frac{12-14t}{5},\ \frac{-4-7t}{5}\right)$$
$$T(\vec{r}_3(t)) = \left(4,\ \frac{40-35t}{5}\right) = (4,8-7t) = (4,8)+t(0,-7)$$

$$\vec{r}_4(t) = \left(-\frac{2}{5},-\frac{11}{5}\right)+t\left(\frac{4}{5},\frac{12}{5}\right) = \left(\frac{-2+4t}{5},\ \frac{-11+12t}{5}\right)$$
$$T(\vec{r}_4(t)) = \left(4-4t,\ 1\right) = (4,1)+t(-4,0)$$

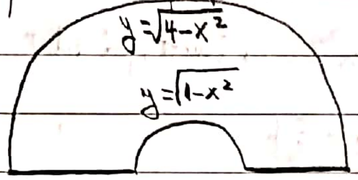


$$\iint_S \frac{u}{v}\,|J(u,v)|\,du\,dv = \int_0^4\int_1^8 \frac{1}{5}\,\frac{u}{v}\,dv\,du = \dots \text{ (fácil Terminar).}$$

15.5 Aplicaciones de las integrales dobles.

P.13. El borde de una lámina consiste en las curvas $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\sqrt{4-x^2}$ con las porciones del eje X que las une. Encontrar el centro de masa de la lámina si la densidad de cualquier punto es proporcional a la distancia del origen.

Desarrollo.



$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right)$$

$\rho(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$, $k\neq 0$.

$M_x = \iint_D y\,\rho(x,y)\,dA$, $M_y = \iint_D x\,\rho(x,y)\,dA$, $m = \iint_D \rho(x,y)\,dA$

Coordenadas polares: $x = x(r,\theta) = r\cos\theta$, $y = y(r,\theta) = r\,\text{sen}\,\theta$

$D = \{(r,\theta) \mid 1\leq r\leq 2,\ 0\leq\theta\leq\pi\}$, $|J(r,\theta)| = r$

$$m = \int_1^2\int_0^\pi kr^2\,d\theta\,dr = \int_1^2 kr^2\pi\,dr = k\pi\int_1^2 r^2\,dr = k\pi\left.\frac{r^3}{3}\right|_1^2 = k\pi\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) = \frac{7k\pi}{3}$$

$$M_x = \int_1^2\int_0^\pi r\,\text{sen}\,\theta\, kr^2\,d\theta\,dr = k\left(\int_1^2 r^3\,dr\right)\left(\int_0^\pi \text{sen}\,\theta\,d\theta\right) = k\left(\frac{16}{4}-\frac{1}{4}\right)(2) = \frac{15k}{2}$$

$$M_y = \int_1^2\int_0^\pi r\cos\theta\, kr^2\,d\theta\,dr = k\left(\int_1^2 r^3\,dr\right)\left(\int_0^\pi \cos\theta\,d\theta\right) = 0$$

Por lo tanto, $(\bar{x},\bar{y}) = \left(0, \frac{45}{14\pi}\right)$

FECHA : / /

Problema. Calcular la integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}(x-y)\,\mathrm{sen}^2(x+y)\,dx\,dy$

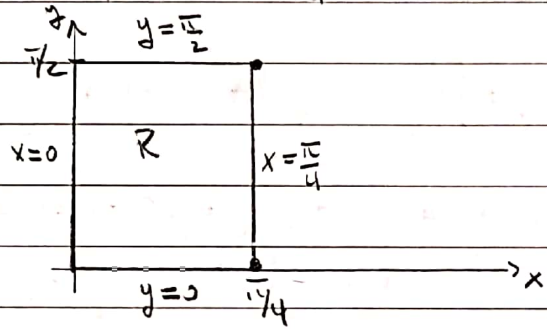
Desarrollo. $u=x-y$, $v=x+y$. $T(x,y)=(x-y,\,x+y)$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} x-y=u \\ x+y=v \end{cases}$, $x=\dfrac{u+v}{2}$, $y=\dfrac{v-u}{2}$

Fórmula de cambio de variable:

$$\iint_R (x-y)\,\mathrm{sen}^2(x+y)\,dx\,dy=\iint_S u\,\mathrm{sen}^2(v)\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

donde $R=\{(x,y)\mid 0\le x\le \frac{\pi}{4},\ 0\le y\le \frac{\pi}{2}\}$.



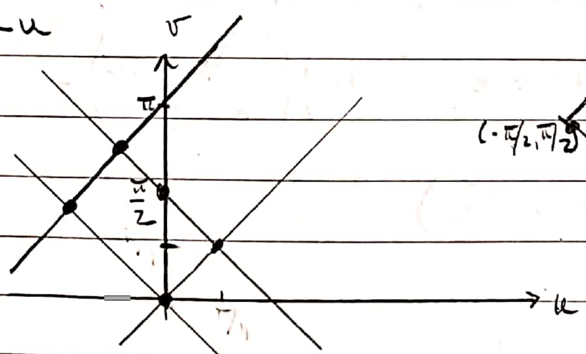
$y=0 \iff 0=\dfrac{v-u}{2} \iff u=v$

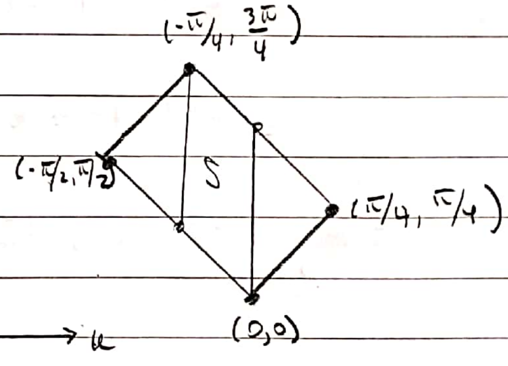
$x=\frac{\pi}{4} \iff \frac{\pi}{4}=\dfrac{u+v}{2} \iff v=-u+\frac{\pi}{2}$

$y=\frac{\pi}{2} \iff \frac{\pi}{2}=\dfrac{v-u}{2} \iff v=u+\pi$

$x=0 \iff v=-u$

Tenemos que:





$\{v=u,\ v=-u+\frac{\pi}{2}\} \Rightarrow u=-u+\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=\frac{\pi}{4},\ v=\frac{\pi}{4}$

$\{v=-u+\frac{\pi}{2},\ v=u+\pi\} \Rightarrow u+\pi=-u+\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2u=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=-\frac{\pi}{4},\ v=\frac{3\pi}{4}$

$\{v=u+\pi,\ v=-u\} \Rightarrow -u=u+\pi \Rightarrow u=-\pi/2,\ v=\pi/2$

$\{v=-u,\ u=v\} \Rightarrow u=v=0$

 Jacobiano: $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{2}$, $\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{1}{2}$, $\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{2}$, $\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{2}$, $J(u,v)=\frac{1}{2}$

FECHA : / /

$$\iint_S u\, \text{sen}^2 v\, |J(u,v)|\, du\, dv = \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \int_{-u}^{u+\pi} u\, \text{sen}^2(v)\, \frac{1}{2}\, dv\, du + \int_{-\pi/4}^{0} \int_{-u}^{-u+\frac{\pi}{2}} u\, \text{sen}^2(v)\, \frac{1}{2}\, dv\, du$$

$$+ \int_{0}^{\pi/4} \int_{u}^{-u+\frac{\pi}{2}} u\, \text{sen}^2(v)\, \frac{1}{2}\, dv\, du.$$

Cálculo 3

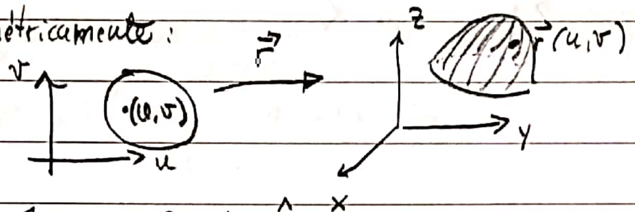
(Ayudantía 23/05/2017)

Superficies paramétricas

$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\,\hat{\imath} + y(u,v)\,\hat{\jmath} + z(u,v)\,\hat{k}$; $(u,v)\in D\subseteq\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

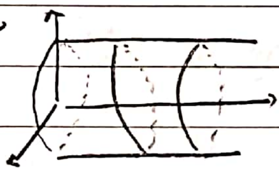
Geométricamente:



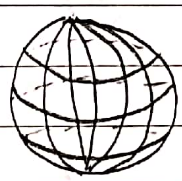
Ejemplo. $\vec{r}(u,v) = 2\cos(u)\,\hat{\imath} + v\,\hat{\jmath} + 2\,\mathrm{sen}(u)\,\hat{k}$.

$x^2+z^2 = 4\cos^2(u) + 4\,\mathrm{sen}^2(u) = 4$. Por lo tanto $(x,y,z)\in S$ tq $x^2+z^2=4$

Geométricamente es un cilindro



$\{\vec{r}(u,v_0) \mid v_0\in\mathbb{R}\}$, $\{\vec{r}(u_0,v) / u_0\in\mathbb{R}\}$ "grid curves" (enrejado)



Algunas parametrizaciones importantes:

(1) Plano: $\vec{r}(u,v) = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$, $(u,v)\in\mathbb{R}^2$

(2) Esfera radio a: $\vec{r}(\theta,\phi) = a\,\mathrm{sen}\phi\cos\theta\,\hat{\imath} + a\,\mathrm{sen}\phi\,\mathrm{sen}\theta\,\hat{\jmath} + a\cos\phi\,\hat{k}$, $(\theta,\phi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]$

(3) Cilindro $x^2+y^2=r^2$: $\vec{r}($

(4) Parametrización tipo $z=f(x,y)$: $\vec{r}(x,y) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + f(x,y)\,\hat{k}$

Observación. La parametrización de una superficie <u>no</u> es única.

Ejemplo. $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$

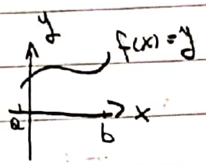
$\vec{r}(x,y) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + 2\sqrt{x^2+y^2}\,\hat{k}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\vec{s}(\theta,r) = r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\,\mathrm{sen}\theta\,\hat{\jmath} + 2r\,\hat{k}$, $(r,\theta)\in\mathbb{R}_{\geq 0}\times[0,2\pi]$.

FECHA: / /

Superficies de revolución.

Para $y = f(x)$ función



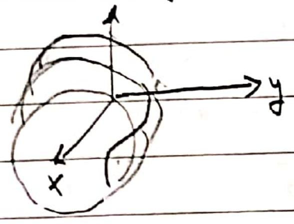
Ecuaciones paramétricas son

$x = x$, $y = f(x)\cos(\theta)$, $z = f(x)\,\text{sen}\,\theta$, $a \leq x \leq b$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Conseguimos:

$\vec{r}(x,\theta) = x\hat{\imath} + f(x)\cos\theta\,\hat{\jmath} + f(x)\,\text{sen}\,\theta\,\hat{k}$

superficie de revolución



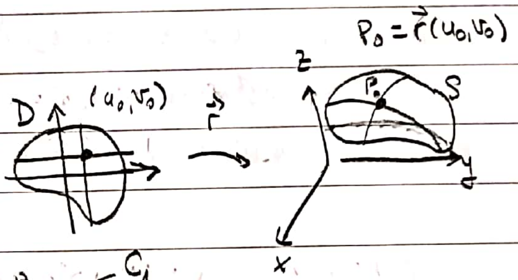
Rotación alrededor eje X

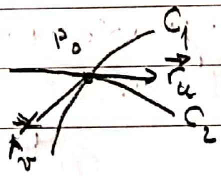
Plano tangente a una superficie

$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\hat{\imath} + y(u,v)\hat{\jmath} + z(u,v)\hat{k}$

$C_1 = \vec{r}(u_0, v)$

$C_2 = \vec{r}(u, v_0)$





$\vec{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\hat{k}$

$\vec{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\hat{k}$

Observación: S suave ssi $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ $\forall P_0 = \vec{r}(u_0,v_0)$

Plano tangente en P_0: $(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \times (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$

Area de una superficie

$\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$: área paralelógramo de lados $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$

$\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$ aproxima al área del parche.

Interpretación. dS: área parche, $dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\,dA$

Area superficie S: $A(S) = \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\,dA$

Ejemplo. Encontrar área de una esfera de radio a

Desarrollo. Ecuaciones paramétricas $x = a \operatorname{sen}\phi \cos\theta$, $y = a \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$, $z = a\cos\phi$

$$D = \{(\phi,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq \phi \leq \pi,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Recordemos que $\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta = \det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x_\phi & y_\phi & z_\phi \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \end{pmatrix}$

Calculando se tiene $\|\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta\| = a^2|\operatorname{sen}\phi| = a^2 \operatorname{sen}\phi$ porque $\phi \in [0,\pi]$.

Finalmente: $A = \iint_D \|\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta\|\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi\, d\theta = 4\pi a^2$

Corolario: Cálculo de área para una superficie de revolución

$$\vec{r}(x,\theta) = x\,\hat{\imath} + f(x)\cos\theta\,\hat{\jmath} + f(x)\operatorname{sen}\theta\,\hat{k}$$

$$\|\vec{r}_x \times \vec{r}_\theta\| = f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}$$

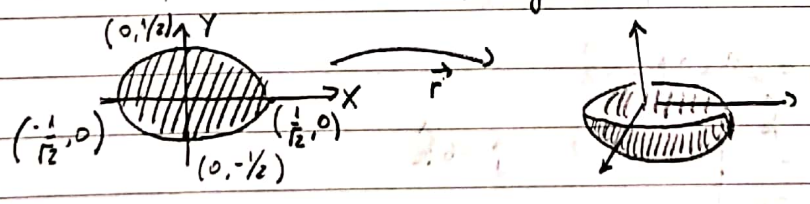
Área es $A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$

Ejercicios propuestos. (J. Stewart, Calculus Early Trascendentals)

P.20. Ecuaciones paramétricas de la mitad inferior del elipsoide $2x^2+4y^2+z^2=1$

Desarrollo. $z^2 = 1-2x^2-4y^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{1-2x^2-4y^2}$

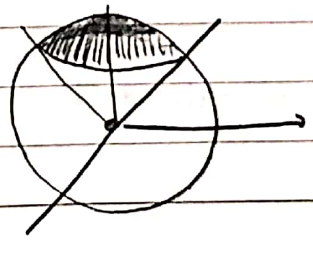
Mitad inferior es $z = -\sqrt{1-2x^2-4y^2}$



$$\vec{r}(x,y) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} - \sqrt{1-2x^2-4y^2}\,\hat{k}$$

P.23. Parametrizar superficie entre cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y esfera $x^2+y^2+z^2=4$

Desarrollo.



$z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z^2 = x^2+y^2$

$4 = x^2+y^2+z^2 = 2z^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{2}$, $z \geq 0 \Rightarrow z = \sqrt{2}$

Ocupando coordenadas esféricas $\begin{cases} x = 2\,\text{sen}\phi\cos\theta \\ y = 2\,\text{sen}\phi\,\text{sen}\theta \\ z = 2\cos\phi \end{cases}$

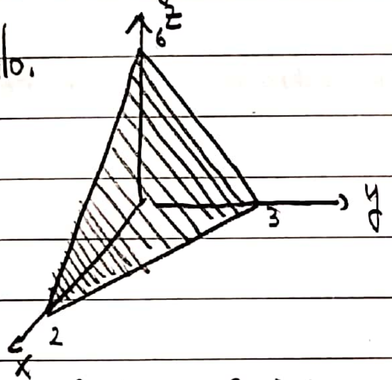
$z = \sqrt{2} \iff \cos\phi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$

Parametrización es : $\vec{r}(\theta,\phi) = 2\,\text{sen}\phi\cos\theta\,\hat{\imath} + 2\,\text{sen}\phi\,\text{sen}\theta\,\hat{\jmath} + 2\cos\phi\,\hat{k}$

donde : $(\theta,\phi) \in [0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{4}]$

P.37. Encuentre el área del plano que se encuentra en el primer octante
$\Pi : 3x + 2y + z = 6.$

Desarrollo.

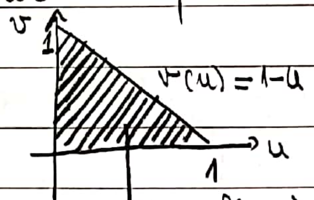


$\vec{v}_1 = (0,3,0) - (0,0,6) = (0,3,-6)$
$\vec{v}_2 = (2,0,0) - (0,0,6) = (2,0,-6)$

Sabemos que :
$\vec{r}(u,v) = (0,0,6) + u(0,3,-6) + v(2,0,-6)$
$\vec{r}(u,v) = 2v\,\hat{\imath} + 3u\,\hat{\jmath} + (6-6u-6v)\,\hat{k}$

Se Tiene $2v \geq 0$, $3u \geq 0$, $6-6u-6v \geq 0 \Rightarrow v \geq 0,\ u \geq 0,\ 1 \geq u+v$

Gráfica del dominio de la parametrización :



$D = \left\{(u,v) \;\middle|\; \begin{matrix} u \geq 0,\ v \geq 0 \\ v \leq 1-u \end{matrix}\right\}$

$\vec{r}_u = 0\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath} - 6\,\hat{k}$, $\vec{r}_v = 2\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} - 6\,\hat{k}$

$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -18\,\hat{\imath} - 12\,\hat{\jmath} - 6\,\hat{k}$

A : Area de la superficie :

$A = \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\,dA = \iint_D \sqrt{18^2+12^2+6^2}\,dA = \sqrt{504}\,\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{504}}{2} = \frac{\sqrt{2^3\cdot 7\cdot 3^2}}{2} = 3\sqrt{14}$

Observación. Hacer el mismo problema con la parametrización
$\vec{r}(x,y) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + f(x,y)\,\hat{k}$