UDLA
UNIVERSIDAD DE LAS AMERICAS
VICERRECTORÍA ACADEMICA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, FÍSICA Y ESTADÍSTICA
ÁREA DE MATEMÁTICA-CICLO INICIAL

CÁTEDRA 2

CÁLCULO DIFERENCIAL (MAT-170)

Tiempo: 90 minutos

NOTA

NOMBRE: Marco Godoy V	**NRC:** 4972
RUN: 17.022.457-4	**FECHA:**
CARRERA:	**SECCIÓN:**

Problema	Puntaje
Total	

Indicaciones

- Complete los datos solicitados en la prueba.
- Puntaje ideal de la prueba 60 puntos.
- Nota final=Puntaje_obtenido+1,0
- No se aceptan consultas una vez iniciada la prueba. Salvo que sean de enunciado.
- Sólo podrá salir de la sala después de 30 min de iniciada la prueba.
- Puede utilizar para sus cálculos calculadora pero no su celular ni otros artículos tecnológicos.
- Deberá devolver todas las hojas de la prueba. La ausencia de alguna de ellas desvalidará la evaluación.
- Si requiere hojas adicionales solicitarlas al profesor.

"Declaro haber revisado y recibir conforme la prueba y la nota indicada arriba"

Firma: ....

Profesor: Instituto de Matemática, Física y Estadística

Resultados de Aprendizaje

(a) Aplicar elementos de la trigonometría plana para la resolución de problemas asociados a ángulos de elevación y depresión.

(b) Resolver ecuaciones trigonométricas mediante el uso de las propiedades e identidades trigonométricas.

(c) Analizar límite y continuidad de una funciones reales a partir de sus representaciones gráficas.

Problemas

Nombre del alumno: ....

NOTA

Prob. 1 (1.2 ptos.) Resuelva, para $x \in [0, 2\pi]$, la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\mathbf{sen}(2x) = \mathbf{cos}(x)$$

Desarrollo:

$$\text{sen}(2x) = \cos(x) \iff 2\,\text{sen}(x)\cos(x) = \cos(x)$$
$$\iff 2\,\text{sen}(x)\cos(x) - \cos(x) = 0$$
$$\iff \cos(x)\left(2\,\text{sen}(x) - 1\right) = 0$$

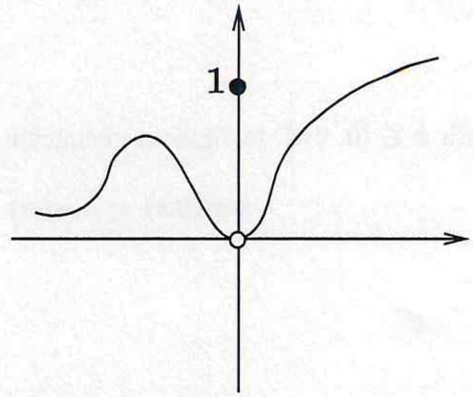
$$\Rightarrow \cos(x) = 0 \quad \text{ó} \quad 2\,\text{sen}(x) - 1 = 0$$

- $\cos(x) = 0$ cuando $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$
- $2\,\text{sen}(x) - 1 = 0 \iff \text{sen}(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \ \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Las soluciones de la ecuación trigonométrica son

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Prob. 2 (1.2 ptos.) Considere la función de variable real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya representación gráfica es:



Determine:

a) **(0.3 ptos.)** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

b) **(0.3 ptos.)** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

c) **(0.3 ptos.)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

d) **(0.3 ptos.)** Es $f(x)$ continua en $x = 0$? Justificar.

Desarrollo:

(a) Por definición de límite lateral:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

(b) Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, entonces $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe y

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

(c) $f(x)$ no es continua en $x=0$; porque $f(0) = 1$ y

$$f(0) \neq \lim_{x \to 0} f(x)$$

Prob. 3 (1.2 ptos.) Desde la parte superior de un edificio, que mide **100** pies de altura, un hombre observa un automóvil que se desplaza frente al edificio (Figura 1). Si el ángulo de depresión del automóvil cambia de 46^o a 22^o durante el periodo de observación, cuánto se ha trasladado el automóvil?

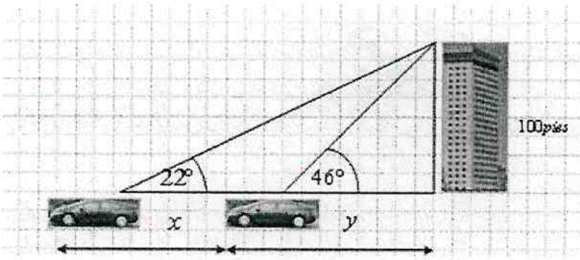
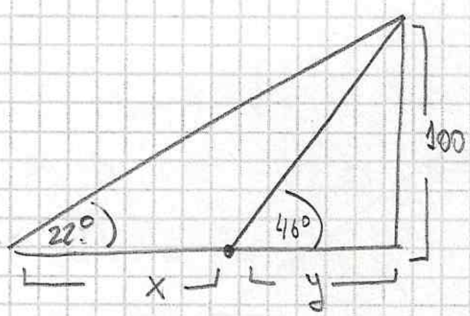


Figura 1: Hombre mirando un automóvil desde lo alto de un edificio.

Desarrollo:



El automovil se ha trasladado una distancia total de x,

$$\tan(46°) = \frac{100}{y}, \quad \tan(22°) = \frac{100}{x+y}$$

Usando calculadora (configurada en grados sexagesimales)

$$\tan(46°) \approx 1.036$$
$$\tan(22°) \approx 0.404$$

Luego: $y = \dfrac{100}{\tan(46°)} \approx 96.569$, $x + y = \dfrac{100}{\tan(22°)} \approx 247.509$

Por lo tanto: $x = 247.509 - 96.569 \approx 150.940$ (pies)

Prob. 4 (1.2 ptos.) Dos observadores, ubicados en los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, visualizan un dron ubicado a cierta altura entre ellos (Figura 2). La distancia entre el observador $\boldsymbol{A}$ y el dron es de **6** metros y la distancia entre el observador $\boldsymbol{B}$ y el mismo dron es **12** metros. Sabiendo que el ángulo formado por el observador $\boldsymbol{A}$, el dron y el observador $\boldsymbol{B}$ es de $\boldsymbol{60^o}$, determine la distancia que hay entre ambos observadores.

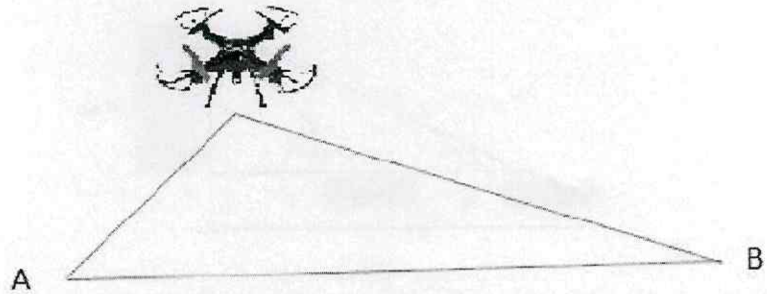
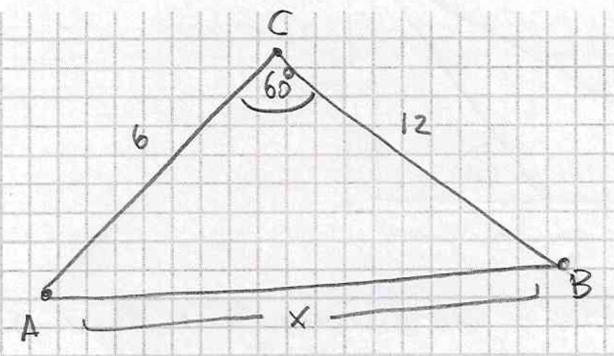


Figura 2: Dron volando con los observadores en los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$.

Desarrollo:



x es la distancia entre A y B

Mediante el Teorema del coseno:

$$x^2 = 6^2 + 12^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cos(60^\circ) = 180 - 144 \cos(60^\circ)$$

Como $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$,

$$x^2 = 180 - 144 \cdot \frac{1}{2} = 180 - 72 = 108$$

$$x = \sqrt{108} \approx 10.39$$

Por lo tanto, la distancia entre ambos observadores es de 10.39 metros

Prob. 5 (1.2 ptos.) Calcule el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}}$$

Desarrollo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + x\sqrt{1-x}}{1 - (1-x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + x\sqrt{1-x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}(1 + \sqrt{1-x})}{\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} (1 + \sqrt{1-x})$$

$$= \lim_{x \to 0} (1) + \lim_{x \to 0} \sqrt{1-x}$$

$$= 1 + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2$$

Por lo tanto, $\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} = 2$.