$= 4^d 4^{n_2 r} \quad 2^r \cdot 4^c$

$= \quad 4^s.$

Pues $\prod_{p|\infty} |p|_p = p^{[F:\mathbb{Q}]} = |p|_{\mathbb{R}}^r |p|_{\mathbb{C}}^c$, pero $[F:\mathbb{Q}] = r+2c$

$\Rightarrow \quad |p|_{\mathbb{R}} = p \quad , \quad |p|_{\mathbb{C}} = p^2.$ (de $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} F \cong \mathbb{R}^r \otimes \mathbb{C}^c$)

$S = A \dot\cup B$, $A = \{ p \in S$: hay 2 lugares en E sobre p $\}$, $B = \{ p \in S$: hay un lugar sobre p $\}$, $a = |A|$, $|B| = b$

Proposición: Sea $E = F(\sqrt{\theta})$, $\theta \in P_F^S$, entonces

Si S contiene los lugares diádicos $\Rightarrow (J_F^S : N_F(J_E^S)) = 2^b$

[E|F tiene grado 2 ∴ hay uno o dos lugares $(E:F) = \sum_{P|p} [E_P | F_p]$]

Demostración: $\varphi : J_F^S \longrightarrow \prod_{p \in \Omega - S} F_p^*$ con $\ker \varphi = K_F^S$.

Observe pues: $F_p \otimes E \cong E_{P_1} \times E_{P_2}$, $E_{P_1} \cong E_{P_2} \cong F_p$ como F-espacios

Por ello $N : (F_p \otimes_F E)^* \longrightarrow (F_p)^*$ epiyectiva

Sino $F_p \otimes E \cong E_P$ cuerpo $\Rightarrow E_P | F_p$ no ramificada

$\Rightarrow N_{E_P | F_p}(E_P^*) = F_p^* O_p^*$

Por ello:

$$J_F^S / N_F(J_E^S) \cong \prod_{p \in \Omega - S} F_p^* / N(F_p \otimes E)^*$$

$$\cong \prod_{p \in A} 1 \prod_{p \in A} C_2 \cong (C_2)^s$$

Vamos a $\boxed{(J_F : P_F N_{E|F}(J_E)) = 2}$

K cuerpo global. S conjunto de lugares en Ω con $S^c = \Omega - S$ finito.
$|S| = s < \infty$. b lugares en S^c en los que Θ no es un $\square$
a el nº de lugares en S^c en los que es un $\square$.
Θ es S-unidad. $E = F(\sqrt{\Theta})$. $J_F = P_F J_F^S$

Sabemos que: $(P_F^S : (P_F^S)^2) = 2^s$ y que $(J_F^S : J_F^{S,2}) = 4^s$.
cuadrados en S^c

Por último:

$$(J_F^S : N_{E|F}(J_E^S)) = 2^b.$$

Lema de Herbrand:

Sean $N: G \to G$, $T: G \to G$ tal que $N \circ T = T \circ N = \mathbb{1}$ $(g \mapsto 1)$
y Φ un subgrupo de G de índice finito tal que:
$N(\Phi) \subseteq \Phi$ y $T(\Phi) \subseteq \Phi$

entonces:

$$\frac{|G_T / N(G)|}{|G_N / T(G)|} = \frac{|\Phi_T / N(\Phi)|}{|\Phi_N / T(\Phi)|}, \quad \Phi_T = \ker T \cap \Phi, \quad G_T = \ker T \subseteq G$$

Demostración: Tenemos que:

$$[G:\Phi][\Phi_T : N(\Phi)] = [T(G):T(\Phi)][G_T:\Phi_T][\Phi_T:N(\Phi)]$$
$$= [T(G):T(\Phi)][G_T : N(\Phi)]$$
$$= [T(G):T(\Phi)][G_T : N(G)][N(G):N(\Phi)].$$
$$= [T(G):T(\Phi)][G_T : N(G)][G:\Phi][G_N : \Phi_N]^{-1}$$
$$= \frac{[G_T:N(G)][G:\Phi][T(G):T(\Phi)]}{[G_N:T(G)][T(G):T(\Phi)][\Phi_N:T(\Phi)]}$$

y cancelamos.

Falta ver que:

$$[G : \Phi] = [T(G) : T(\Phi)][G_T : \Phi_T]$$

Esto se debe a que:

$$\overline{T} : G/\Phi \to T(G)/T(\Phi).$$

Basta ver cuál es $|\ker \overline{T}|$, pero $\overline{\rho} \in \ker \overline{T} \Leftrightarrow T(\rho) \in T(\Phi)$

$\Leftrightarrow \rho = \varphi h$, $h \in \ker T$, $\varphi \in \Phi$

$\therefore$ Por ello $\ker \widetilde{T} = G_T \Phi / \Phi \cong G_T / G_T \cap \Phi \cong G_T / \Phi_T$.

__Proposición:__ Si Θ es una S-unidad, $\Theta \in \mathcal{O}^*_{S,F} \cong P_F^S$.

$$(P_F^S : N_{E|F}(P_E^S)) = 2^{b-1}.$$

__Demostración:__ Sea N = norma, $T : E^* \to E^*$ con $T(\Gamma) = \Gamma / \overline{\Gamma}$

claramente $N \circ T = T \circ N = 1$.

Usaremos la notación $\mathcal{U} = \mathcal{O}^*_{S,E}$ y tenemos que $F^* = E^*_T$. $\left(\begin{array}{l}\text{pero } \Gamma = \overline{\Gamma} \\ \Leftrightarrow \Gamma \in F^*\end{array}\right)$

$u = \mathcal{O}^*_{S,F}$.

Sabemos que $u = u_0 \times u_1$, con $u_1 \cong \mathbb{Z}^{s-1}$. Luego consideramos

$$\Phi = u_1 . T(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$$

pues $u = \mathcal{U}_T$.

Observe que $N(\Gamma) = \Gamma \overline{\Gamma}$, $T(\Gamma) = \Gamma / \overline{\Gamma} \Rightarrow N(\Gamma) T(\Gamma) = \Gamma^2$.

__Afirmación:__ $u_1 \cap T(\mathcal{U}) = \{1\}$

__Demostración:__ $T(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}_N$; $u \in u_1$, $N(u) = u^2 \neq 1$, $u \neq 1$

$\Rightarrow u \notin T\mathcal{U}$

$\therefore \Phi = u_1 \times T\mathcal{U}$

Observe que $U^2 \subseteq N(U)T(U) \subseteq \mu_0 T(U) = \mu_0 \Phi$

Con $[U : U^2] < \infty$, $|\mu_0| < \infty$. Luego:

$$[U : \Phi] = [U : \mu_0 \Phi][\mu_0 \Phi : \Phi] \leq [U : U^2] |\mu_0| < \infty$$

Luego por Lema de Herbrand:

$$\frac{[U_T : N(U)]}{[U_N : T(U)]} = \frac{[\Phi_T : N(\Phi)]}{[\Phi_N : T(\Phi)]}$$

Observe que:

$$\Phi_T = U_1 \times (\Phi_T \cap T(U))$$
$$N(\Phi) = U_1^2 \times \{0\}$$

Por otro lado

$$\Phi_T = \{r \in \Phi \mid T(r) = 1\} = U \cap \Phi = U_1 (T(U) \cap U)$$

Si $\lambda = T/\bar{\pi} \in F^*$, $N(\lambda) = \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$: Si $\lambda = \pm 1 \Rightarrow T = \sqrt{\Theta}$.

Luego $\Phi_T \cap T(U) = \{\pm 1\}$. Por ello $[\Phi_T : N(\Phi)] = 2^s$.

Necesitamos calcular $[\Phi_N : T(\Phi)] = ?$ Observe que:

$$\Phi_N = \{1\} \times TU$$
$$T(\Phi) = \{1\} \times T(TU).$$

Pero $T(T\omega) = (T\omega)^2 / N(T(\omega)) = (T\omega)^2$ Por ello

$$T(\Phi) = \{1\} \times (TU)^2$$

Luego:

$$\Phi_N / T(\Phi) \cong TU / (TU)^2$$

Queremos determinar TU. Observemos que rango$(U) = a+b-1$.
pues p se ext de los primos:

$$\begin{array}{ccc} \text{en } A & & \text{en } B \\ \mathbb{P}_1 \quad \mathbb{P}_2 & & \mathbb{P} \\ \backslash \quad / & & | \\ p & & p \end{array}$$

Pero $U_T = U$ con rango $U = b-1$. Luego rang$(TU) = \emptyset$, pero

$$T(U) \cong U/U_T.$$

Luego $(\Phi_N : T(\Phi)) = 2^{a+1}$ y que $TU/(TU)^2 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^a \times \Psi/\Psi^2$

donde Ψ = torsión $(T(U))$, pero $-1 \in \Psi \Rightarrow \Psi/\Psi^2 \cong C_2$.

$$\therefore \frac{(\Phi_T : N(\Phi))}{(\Phi_N : T(\Phi))} = 2^{b-1}$$

$$\therefore \frac{(U_T : N(U))}{(U_N : T(U))} = 2^{b-1}$$

__Afirmación__: $U_N = T(U)$

Por T. 90 Hilbert $\quad W = T(\Gamma) = \Gamma/\bar{\Gamma}$, $\Gamma \in E^*$

Observe que $\displaystyle\prod_{\substack{\mathbb{P} \in S(E) \\ \text{en } E}} \mathbb{P}^{\alpha(\mathbb{P})} = (\Gamma) \subseteq O_E^S$ ideal.

descompuesto.

Pero $\quad p\, O_E = \mathbb{P}_1 \mathbb{P}_2$ o bien

$p\, O_E = \mathbb{P}$ ← inerte

Pero $(\Gamma) = (\bar{\Gamma})$, pues $(w) = (\Gamma/\Gamma') = O_E$

Así $\quad \alpha(\mathbb{P}_1) = \alpha(\mathbb{P}_2)$. Luego $\exists\, J \subseteq O_F^S$ ideal tal que

$$J\, O_E^S = (\Gamma)$$

Por otro lado, como $J_F = P_F J_F$,

tenemos que $J = (\Delta)$, $\Delta \in F^*$ (pues tomamos S para que el no de clase sea 1)

con $\Delta \in F^* \Rightarrow \Delta = \overline{\Delta}$

Si cambiamos: $w = \Gamma/\overline{\Gamma} = \Gamma\Delta^{-1}/(\overline{\Gamma\Delta^{-1}})$, con $\Gamma\Delta^{-1}$ unidad.

$\Gamma\Delta^{-1} \in \mathcal{U}$. Por ello:

$$(\mathcal{U}_N : \pi(\mathcal{U})) = 1$$

$$\Rightarrow (\mathcal{U}_T : N(\mathcal{U})) = 2^{b-1}.$$

$$(\mathcal{U}'' : N(\mathcal{U})) = (P_F{}^S : N(P_E{}^S)).$$

<u>Proposición</u>: Si $\alpha \in F^*$ es un cuadrado en F_p $\forall p \in S$ y $\alpha \in O_p^*$ $\forall p \notin S$ entonces α es un cuadrado, α es un cuadrado.

<u>Dem</u>:

Si no: Tomamos $\theta = \alpha \Rightarrow b \geq 1$ (*) $\therefore \alpha$ es un cuadrado.

<u>Corolario</u>: $P_F{}^S \cap J_F{}^{S,2} = (P_F{}^S)^2$

<u>Proposición</u>: $(J_F : P_F J_F{}^{S,2}) = (J_F{}^S : P_F{}^S J_F{}^{S,2}) = 2^s$.

<u>Demostración</u>: Estamos suponiendo que $P_F J_F{}^S = J_F$.

Luego $(J_F : P_F J_F{}^{S,2}) = (P_F J_F{}^S : P_F J_F{}^{S,2})$

$$= ((P_F J_F{}^{S,2}) J_F{}^S : P_F J_F{}^{S,2})$$

$$= (J_F{}^S : J_F{}^S \cap (P_F J_F{}^{S,2}))$$

$$= (J_F{}^S : (J_F{}^S \cap P_F) J_F{}^{S,2})$$

$$= (J_F{}^S : P_F{}^S J_F{}^{S,2})$$

$$= \frac{(J_F{}^S : J_F{}^{S,2})}{(P_F{}^S J_F{}^{S,2} : J_F{}^{S,2})}$$

$$= \frac{(J_F{}^S : J_F{}^{S,2})}{(P_F{}^S : P_F{}^S \cap J_F{}^{S,2})} = \frac{(J_F{}^S : J_F{}^{S,2})}{(P_F{}^S : (P_F{}^S)^2)} = \frac{4^s}{2^s}, \text{ pues } P_F{}^S = C_2 \times \mathbb{Z}^{s-1}$$

■

Tenemos que:

$$(\mathcal{J}_F{}^S : \mathcal{J}_F{}^{S,2}) = 4^S$$
$$(P_F{}^S : N_{E|F}\, P_E{}^S) = 4^{l-1}$$
$$(\mathcal{J}_F{}^S : N_{E|F}\, \mathcal{J}_E{}^S) = 2^l$$
$$(\mathcal{J}_F : P_F\, \mathcal{J}_F{}^{S,2}) = 2^S$$

__Proposición__: En las mismas hipótesis $(\Theta \in P_F{}^S,\ P_F \mathcal{J}_F{}^S = \mathcal{J}_F,\ P_E \mathcal{J}_E{}^S = \mathcal{J}_E)$

Se tiene que:

$$(\mathcal{J}_F : P_F N(\mathcal{J}_E)) = 2\,(P_F{}^S \cap N(\mathcal{J}_E{}^S) : N(P_E{}^S)) < \infty$$

__Demostración__:
$$(\mathcal{J}_F : P_F N(\mathcal{J}_E)) = (P_F \mathcal{J}_F{}^S : P_F N(\mathcal{J}_E))$$
$$= (P_F \mathcal{J}_F{}^S : P_F N(P_E \mathcal{J}_E{}^S))$$

Como $N(P_E) \subset P_F$

$$= (P_F \mathcal{J}_F{}^S : P_F N(\mathcal{J}_E{}^S))$$
$$= (P_F N(\mathcal{J}_E{}^S)\mathcal{J}_F{}^S : P_F N(\mathcal{J}_E{}^S))$$
$$= (\mathcal{J}_F{}^S : \mathcal{J}_F{}^S \cap P_F N(\mathcal{J}_E{}^S))$$
$$= (\mathcal{J}_F{}^S : P_F{}^S N(\mathcal{J}_E{}^S))$$
$$= \frac{(\mathcal{J}_F{}^S : N(\mathcal{J}_E{}^S))}{(P_F{}^S N(\mathcal{J}_E{}^S) : N(\mathcal{J}_E{}^S))} = \frac{2^S}{(P_F{}^S : P_F{}^S \cap N(\mathcal{J}_E{}^S))}$$
$$= \frac{2^l (P_F{}^S : N(P_E{}^S))}{(P_F{}^S : P_F{}^S \cap N(\mathcal{J}_E{}^S))}$$
$$= \frac{2^l (P_F{}^S : P_F{}^S \cap N(\mathcal{J}_E{}^S))(P_F{}^S \cap N(\mathcal{J}_E{}^S) : N(P_E{}^S))}{(P_F{}^S : P_F{}^S \cap N(\mathcal{J}_E{}^S))}$$ ∎

__Corolario__: Si $(\mathcal{J}_F : P_F N(\mathcal{J}_E)) \neq 2$, entonces
$$P_F{}^S \cap N(\mathcal{J}_E{}^S) = N(P_E{}^S).$$

Proposición: $(J_F : P_F N(J_E)) = 2$

Corolario: $P_F^S \cap N(J_E^S) = N(P_E^S)$ [Principio local-global].

Proposición (Teorema de los D globales).

Sea $\alpha \in F^*$ tal que $\alpha \in F_\wp^*$ es un cuadrado para casi todo $\wp \in \Omega$, entonces $\alpha \in F^{*2}$.

Demostración: Sea $S \subseteq \Omega$ tal que:

① $\alpha \in F_\wp^{*2}$, $\forall \wp \notin S$

② $J_F = J_F^S P_F$

③ $i(\alpha) \in P_F^S$

Afirmación: $P_F N(J_E) = J_F$ (*) con el resultado anterior $\left(E = F(\sqrt{\alpha})\right.$ existe si $\left.\alpha \notin F^{*2}\right)$

Afirmación 1: $O_\wp^* \subseteq N(E_P^*)$, si P es un lugar sobre $\wp \notin S$.

① $\wp$ no es diádico

② $\wp \neq \infty$ y $\alpha \in O_\wp^*$

Luego $E_P / F_\wp$ no ramificada, o bien $[E_P : F_\wp]$ tiene grado 1)

(si tiene grado 1 se sigue de inmediato)

Sea $\alpha \in J_F$ cualquiera, $\mu \in P_F$ tal que

$|\alpha_\wp - \mu|_\wp < \varepsilon$, $\forall \wp \in S^c$ (aproximación débil)

Así $\mu^{-1}\alpha_\wp \in F_\wp^{*2}$, $\forall \wp \in S_\infty^c$

$\Rightarrow$ $\mu^{-1}\alpha_\wp \in N(E_P)$, $\forall \wp \in S^c$ y $\underbrace{\mu^{-1}\alpha_\wp \in N(E_P)}_{\text{aparece el grado en } 1}$, $\forall \wp \in S$

$\therefore\ u^{-1}\alpha \in N(J_E)$

$\Rightarrow\ \alpha \in P_F N(J_E)$. Por lo tanto $P_F N(J_E) = J_F$.

Proposición: (Teorema de la Norma de Hasse)

Sea $E|F$ ext. cuadrática dada.

Si $\alpha \in F^*$ satisface $\alpha \in N_{E_P|F_\wp}(E_P^*) \subseteq F_\wp^*$, $\forall \wp$

$\Rightarrow\ \alpha \in N_{E|F}(E^*)$.

Demostración: $S \subseteq \Omega$ tal que

① $i(\theta), i(\alpha) \in P_F^S$; donde $E = F(\sqrt{\theta})$

② $J_F = P_F J_F^S$

Luego $i(\alpha) \in P_F^S \cap \underbrace{N_{E|F}(J_E^S)}_{\text{acá } \alpha \in N_{E_P|F_\wp}(E_P^*),\ \forall P} = N_{E|F}(P_E^S)$.

Proposición: Sea V un K-espacio cuadrático de dimensión 4 y discriminante $d \in K^*$. Sea $E = F(\sqrt{d})$ entonces V es isotrópico ssi $V_E = V \otimes_F E$ es isotrópico.

Demostración: Suponemos que $v = u + w\sqrt{d}$, $u, w \in V$.

Supongamos que:

$$f(u) + f(w)d + 2B(u,w)\sqrt{d} = f(v) = f(u + w\sqrt{d}) = 0$$

En particular:

$$B(u,w) = 0 \Rightarrow u, w \text{ ortogonales.}$$

Si $f(u) = 0$ ganamos. Sino $f(u) = \varepsilon \neq 0 \Rightarrow d f(w) = -\varepsilon$

Escribimos $V = Fu \perp Fw \perp W$ ed:

$$V \cong \langle \varepsilon \rangle \perp \langle -\varepsilon/d \rangle \perp W$$

$\Rightarrow$ $\operatorname{disc} W = -1$. Por lo tanto $W \cong \mathbb{H}$ $\therefore$ isotrópico $\boxed{\#}$

Scanned with CamScanner

$C_2^s \cong U/U^2 = \{\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_s\}$

Lema: $\exists$ infinitos $\wp$ tales que $\varepsilon_1 \notin K_\wp^{*2}$, $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s \in K_\wp^{*2}$.

Demostración: $s=1$: Teorema de los cuadrados locales

$s>1$: $H = K(\sqrt{\varepsilon_2}, \dots, \sqrt{\varepsilon_s})$, $\sqrt{\varepsilon_1} \notin H$.

$\exists$ infinitos $P \in \Pi(H)$ (no diádicos) donde ε_1 no es cuadrado en H_P y $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \square$ en H_P.

En particular, si $\wp = P \cap K \in \Pi(K)$ tenemos que:

$$\begin{array}{cc} P & H \\ \downarrow & | \\ \wp & K \end{array}$$

ε_1 no es $\square$ en $K_\wp$, $\varepsilon_1 \varepsilon_r$ no es $\square$ en H_P, $\varepsilon_1 \varepsilon_r$ no es $\square$ en $K_\wp$

$\Rightarrow$ ε_1, $\varepsilon_1 \varepsilon_r$ no son $\square$ y son unidades

$\Rightarrow$ $\varepsilon_r = \varepsilon_1 \varepsilon_r / \varepsilon_1 \in \square$ en $K_\wp$.

Corolario: Dados $\{\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_s\} = U/U^2$ existen lugares $\wp_1, \dots, \wp_s$ tales que ε_i es un cuadrado en $K_{\wp_j}$ ssi $i \neq j$.

$$C_2^s = U/U^2 \longrightarrow \prod_{j=1}^{s} U_{\wp_j}/U_{\wp_j}^2 \cong C_2$$

$$\varepsilon_i \longmapsto (0, 0, \dots, 1, 0 \dots 0)$$

Lema: Si $\alpha \in K^*$ es un $\square$ en $\Omega - S$ y una unidad en $S - \{\wp_1, \dots, \wp_s\}$ entonces α es un $\square$ en K

Demostración: Si no, sea $E = k(\sqrt{2})$

Afirmación: $J_k = P_k N_{E|k}(J_E)$ [(*) pues sabemos que $(J_k : P_k N_{E|k}(J_E)) \geq 2$].

Como $J_k = P_k J_k^S$ basta probar que $J_k^S \subseteq P_k N_{E|k}(J_E)$.

Sea $b \in J_k^S$. Si $b_{\wp_i}$ es un $\square$ tomamos $c_i = 0$, sino $c_i = 1$.

$$a = b\left(\prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{c_i}\right) \in \underset{P_k}{\overset{\cap}{J_k^S}}$$

a es un cuadrado en $\wp_1, \dots, \wp_n$.

Pd: $a \in N_{E|k}(J_E)$

Demostración: $\alpha \in S$ unidad. Si $\wp \in S$: $O_\wp \subset N_{E_\wp|k_\wp}(\mathbb{1}O_{E_\wp})$

$a_{\wp_i} \in k_{\wp_i}^{*2} \subset N_{E_{\wp_i}|k_{\wp_i}}(E_\wp^*)$

Falta ver que sucede si $\wp \in \Omega - S$. En este caso $\overset{E_\wp}{\overset{\shortparallel}{E_\wp \otimes_k k_\wp}} = k_\wp \times k_\wp$

$\Rightarrow N_{E_\wp|k_\wp}(E_\wp^*) = k_\wp^*$

$\Rightarrow a_\wp \in N_{E_\wp|k_\wp}(E_\wp^*)$

$\therefore a \in N_{E|k}(J_E)$

$\therefore b \in P_k N_{E|k}(J_E)$.

Formas Enteras

$q: \mathcal{O}_K^n \longrightarrow K$ forma cuadrática. q se denomina forma entera. Decimos que $f \sim f'$ si $\exists\ \rho: \mathcal{O}_K^n \rightarrow \mathcal{O}_K^n$ inv. tal que
$f(v) = f'(\rho(v))$, $\forall v \in \mathcal{O}_K^n$. [puede reemp. $\mathcal{O}_K$ por $\mathcal{O}_K^S$]

Sobre cuerpos: $f, f': K^n \rightarrow K$ son equiv. si $\exists\ \rho: K^n \rightarrow K^n$ inv tal que $f(v) = f'(\rho(v))$, $\forall v \in K^n$.

Observación: Si $f \sim f'$ sobre $\mathcal{O}_K$ entonces $f \sim f'$ sobre $\mathcal{O}_\wp$, $\forall \wp \in \Pi_f(K)$.

Si $f \sim f'$ sobre $\mathcal{O}_\wp$, $\forall \wp \in \Pi_f(K)$ entonces $f \sim f'$ sobre $K_\wp$, $\forall \wp \in \Pi_f(K)$
Si $f \sim f'$ sobre $\mathcal{O}_\wp$, $\forall \wp \in \Pi_f(K)$ y $f \sim f'$, $\forall \wp \in \Pi_\infty(K)$, en particular
$f \sim f'$, sobre $K_\wp$, $\forall \wp \in \Pi(K) \Rightarrow f \sim f'$ sobre K (Hasse)

Sean f, f' formas cuadráticas sobre $\mathcal{O}_K$ tales que
1. $\forall \wp \in \Pi_f(K)$, $\exists\ \rho_\wp \in \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_\wp)^*$ tal que $f(v) = f(\rho_\wp(v))$ $\forall v \in \mathcal{O}_K^n$
2. $\forall \wp \in \Pi_\infty(K)$, $\exists\ \rho_\wp \in \mathbb{M}_n(K_\wp)^*$ tal que $f(v) = f(\rho_\wp(v))$, $\forall v \in K_\wp^n$

Entonces diremos que f, f' están en el mismo genero ($f' \in \mathrm{Gen}(f)$)
En tal caso $\exists\ \rho \in \mathbb{M}_n(K)$ tal que: $f(v) = f'(\rho(v))$, $\forall v \in K^n$.

Sea $\Lambda_0 = \mathcal{O}_K^n$ y sea $\Lambda = \rho\Lambda_0$ entonces ρ define una isometría
$$(\Lambda_0, f) \xrightarrow{\rho} (\Lambda, f')$$

Si $\rho \in \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_K^*)$, entonces $\Lambda = \Lambda_0$ y en tal caso ρ es una isometría de (Λ_0, f) a (Λ_0, f') y $f \sim f'$ sobre $\mathcal{O}_K$.

Sea G grupo, X, Y G-conjuntos.

$$G \times X \to X$$
$$G \times Y \to Y$$

Sea $Z = X \times Y$. Supongamos que G es transitivo en X e Y.
Sea $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Sea $H = Stab_G(x)$, $K = Stab_G(y)$ entonces tenemos:

Proposición:

$$\Psi : K\backslash X \to G\backslash(X \times Y) \quad \text{biyección}$$
$$[x] \mapsto [(x, y_0)]$$

Demostración: Sea $x' = k x$ entonces
$$(x', y_0) = (k.x, k.y_0)$$

$\therefore \overline{(x', y_0)} = \overline{(x, y_0)}$.

Inyectiva: $\overline{(x, y_0)} = \overline{(x', y_0)}$ ed: $(x, y_0) = k(x', y_0) = (kx', y_0)$

$\therefore x = kx'$. $\Rightarrow \bar{x} = \bar{x}'$

Sobreyectiva: Sea $\overline{(x, y)} \in G\backslash X \times Y$ entonces si escribimos $y = \rho . y_0$ tenemos que:

$$\overline{(x, y)} = \overline{(\rho . \tilde{x}, \rho y_0)} = \overline{(\tilde{x}, y_0)} = \Psi(\tilde{x})$$

En lo que sigue: $X = \{$conj. de reticulados en $K^n\}$ $\leftarrow$ libres.
$Y = \{$Conj. de f.c$\}$.
$\tilde{G} = \mathbb{M}_n(\mathbb{A})^*$ (N_0).
$G = \mathbb{M}_n(K)^*$ actúa — tal que $f \in Gen(f_0) \Rightarrow$ ej. Global, en el o la acción es transitiva.

Nos interesa estudiar $(\Lambda(f)) \in \tilde{f} \subseteq X \times Y$. Sea $x_0 = \Lambda_0 \cong O_K^n$ e $y_0 = f$ forma cuadrática global. Si f', f c global. f' está en el género de f ssi está en la H-órbita de f, donde

$$H = \prod_{p \in \infty} \mathbb{M}_n(K)^* \times \prod_{\wp \in \Pi_f} M_n(O_\wp)^* = Stab_{\tilde{G}}(\Lambda_0)$$

El género de f.c en Λ_0 están en correp. con las $\tilde{G}$-órbitas en $X \times Y$, que contienen un par (Λ, f) con f f.c. global.

El género de f corresponde a la órbita Φ de (Λ_0, f)

Sea $G = M_n(K)$. G actúa en $\Phi = X \times Y$.
$f \sim f'$ si existe $T \in M_n(O_K) = Stab_G(\Lambda_0)$ con $f = f' \circ T$
Así las clases de Isometría en O_K^n (de formas cuadráticas) son las clases en

$$Stab_G(\Lambda_0) \backslash Y \cong G \backslash X \times Y \cong Stab_{G(f)} \backslash X \cong O(f) \backslash X$$

grupo ortogonal.

Clasificar formas salvo equivalencia entera es equiv. a clasificar retículos salvo $O(f)$-órbitas. (local o Globalmente)

Clase: $O(f)$-órbita

Género: $O(A)(f)$-órbita