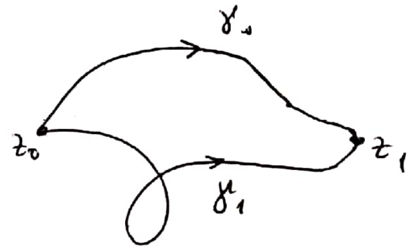
Homotopía

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ curvas C^1 por tramos, con los mismos puntos extremos:

$$z_0 = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$$
$$z_1 = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$$

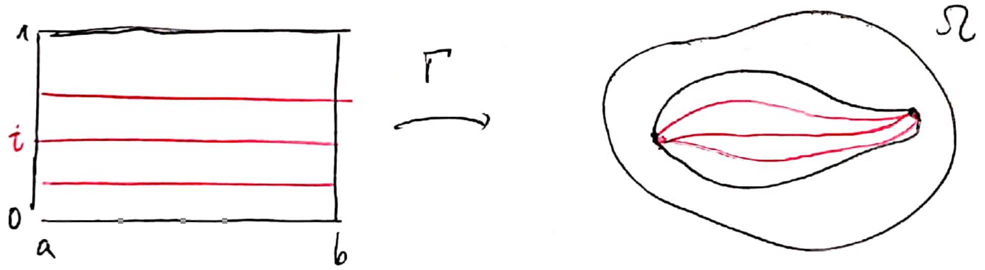


Def. Decimos que γ_0, γ_1 son homotópicas en Ω si existe aplicación continua (llamada homotopía) $\Gamma : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ tal que:

(1) $\Gamma(s,0) = \gamma_0(s)$, $\Gamma(s,1) = \gamma_1(s)$ $\forall s \in [a,b]$

(2) $\forall t \in [0,1]$, $\gamma_t(s) := \Gamma(s,t)$ es C^1 por tramos.

(3) $\forall t \in [0,1]$, $\gamma_t(a) = z_0$, $\gamma_t(b) = z_1$.



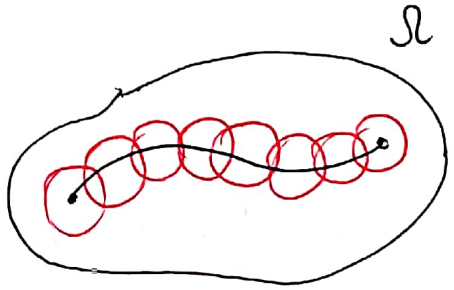
Teorema. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y γ_0, γ_1 son curvas homotópicas en Ω, entonces

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz .$$

dem. SPG, $[a,b] = [0,1]$. Fijamos la homotopía Γ. Es suficiente probar que la función $I(t) = \int_{\gamma_t} f(z)\,dz$ es localmente constante en $[0,1]$.

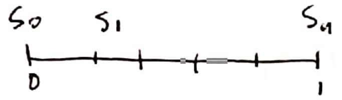
Fijemos $t \in [0,1]$,

Recubrimos el conjunto $\gamma_t([0,1])$ por discos abiertos contenidos en Ω.



Tomando preimágenes por γ_t, obtenemos recubrimiento de $[0,1]$ por conjuntos abiertos de $[0,1]$. Sea $\delta>0$ el número de Lebesgue de este recubrimiento.

Sea $n\in\mathbb{N}$, tq $1/n < \delta$. Sea $s_j = j/n$, $j\in\{0,1,\dots,n\}$



$\forall j\in\{0,1,\dots,n-1\}$ $\exists$ disco abierto $D_j\subset\Omega$ tal que $\gamma_t([s_j,s_{j+1}])\subset D_j$

Por continuidad de Γ, $\exists \varepsilon>0$ tal que:

$$t'\in[0,1],\quad |t'-t|<\varepsilon \Rightarrow \forall j,\ \gamma_{t'}([s_j,s_{j+1}])\subset D_j .$$

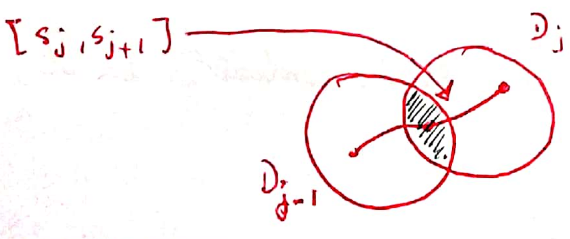
Por Cauchy para discos, $\forall j$ $\exists$ primitiva F_j de $f|_{D_j}$

$$I(t) = \int_{\gamma_t} f(z)\,dz = \sum_{j=0}^{n-1}\int_{\gamma_t|_{[s_j,s_{j+1}]}} f(z)\,dz$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}\Big[F_j(\gamma_t(s_{j+1})) - F_j(\gamma_t(s_j))\Big]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} F_{j-1}(\gamma_t(s_j)) - \sum_{j=0}^{n-1} F_j(\gamma_t(s_j))$$

$$= F_{n-1}(\underbrace{\gamma_t(1)}_{z_1}) - F_0(\underbrace{\gamma_t(0)}_{z_0}) + \sum_{j=1}^{n-1}\underbrace{(F_{j-1}-F_j)(\gamma_t(s_j))}_{c_j}$$

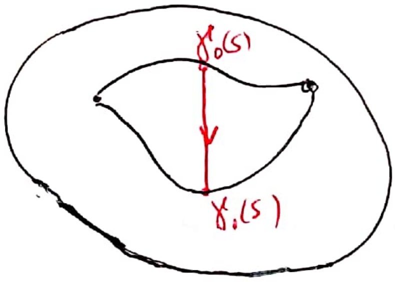


En $D_{j-1}\cap D_j$ (convexo) tenemos 2 primitivas F_{j-1} y F_j de la misma f
$\Rightarrow \exists c_j\in\mathbb{C}$ constante tq $F_{j-1}-F_j = c_j$

Ocupando la continuidad de Γ, $\forall t' : |t'-t| < \varepsilon$, se tiene que $I(t) = I(t')$.

Def. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y conexo. Decimos que Ω es simplemente conexo si $\forall \gamma_0, \gamma_1$ curvas en Ω con los mismos puntos extremos, uno tiene que γ_0 y γ_1 son homotópicas en Ω.

Ejemplo. Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y convexo, entonces es simplemente conexo.



$$\gamma_t(s) := (1-t)\gamma_0(s) + t\gamma_1(s).$$

Ω simplemente conexo $\Leftrightarrow \pi_1(\Omega, z_0) = 0$.

Teo (Teorema de Cauchy). Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es simplemente conexo, entonces toda función holomorfa $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tiene una primitiva $F : \Omega \to \mathbb{C}$. En particular, si γ es una curva cerrada en Ω, se tiene $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

dem. Fijemos $z_0 \in \Omega$ cualquiera. Definimos $F(z) := \int_\gamma f(z)\,dz$, donde γ es una curva cualquiera (el valor de F no depende de la elección de γ).

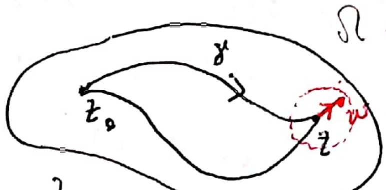
dem. $F(z) = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$, $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z$

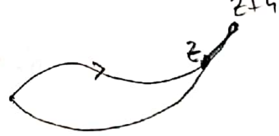
γ tiene puntos extremos z_0 y z_1.

$\forall h \in \mathbb{C} : z+h \in \Omega$

Ω simplemente conexo.

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta - \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta\right)$$





$$= \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{h}\int_0^1 f((1-t)z+(z+h)t)\,h\,dt$$

Ejs. ¿Por qué existe γ?

cuenta $\Rightarrow F' = f$

$$= \int_0^1 f((1-t)z+(z+h)t)\,dt$$

$$\Rightarrow \left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| \leq \int_0^1 |f((1-t)z+(z+h)t) - f(z)|\,dt \xrightarrow{h\to 0} 0$$

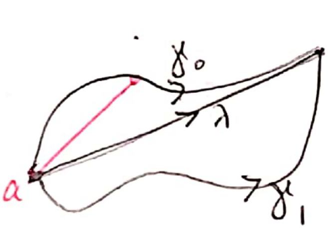
Hecho (ejercicio). Ser 'homotópica' es una relación de equivalencia.

Prop. Todo Ω abierto estrellado es simplemente conexo.

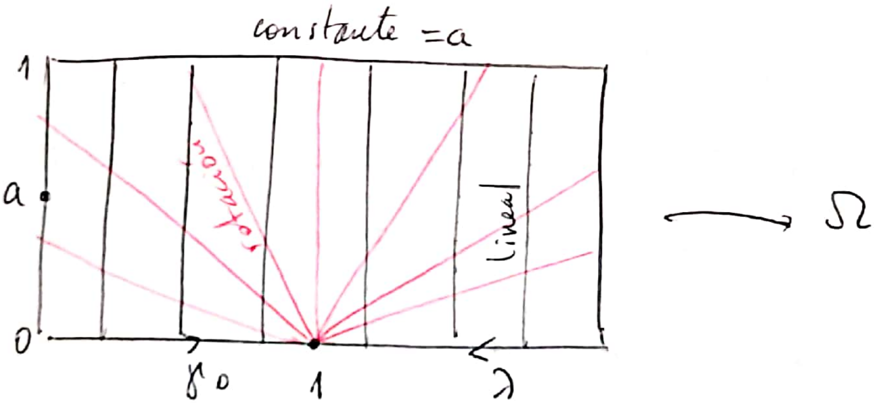
dem. Supongamos que Ω es estrellado con respecto a 'a'. Sean γ_0, γ_1
$\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ curvas con los mismos puntos extremos.

Caso 1. $z_0 = \gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$, z_1. Vamos a probar que γ_0 es homotópica a λ

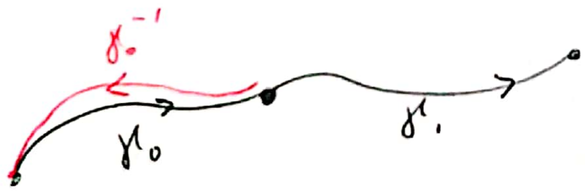
$$\lambda(s) = (1-s)a + s z_1$$



Lo mismo para γ_1. Por lo tanto, γ_0 y γ_1 son homotópicas.



(Interludio) Concatenación e inversión.



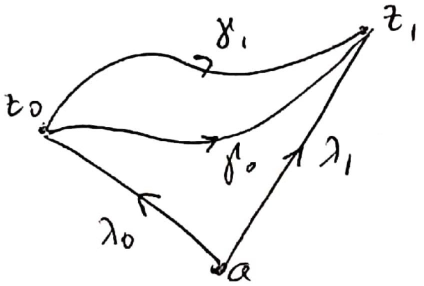
$\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$ $\quad \gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$

$\Rightarrow \gamma_0 * \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$

$$\gamma_0 * \gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t), & t \in [0, 1/2] \\ \gamma_1(2t-1), & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$\gamma_0^{-1} : [0,1] \to \Omega$, $\quad \gamma_0^{-1}(t) = \gamma_0(1-t)$

Caso general



Por el caso precedente, $\lambda_0 * \gamma_1 \sim \lambda_1$ $\overset{\text{ejercicio}}{\Longrightarrow}$ $\gamma_0 \sim \lambda_0^{-1} * \lambda_1$

homotópica

obs. Definimos el grupo fundamental

$$\pi_1(\Omega, z_0) := \frac{\{\text{curvas } \gamma : [0,1] \to \Omega \; ; \; \gamma(0) = z_0 = \gamma(1)\}}{\sim}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [\gamma_0] \cdot [\gamma_1] := [\gamma_0 * \gamma_1] \\ e = [\text{constante } z_0] \\ [\gamma_0]^{-1} = [\gamma_0^{-1}] \end{array} \right.$$

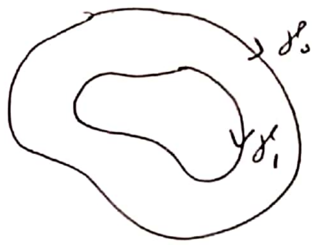
Valen los axiomas de grupo.

Homotopía libre

Fijamos $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y no vacío. Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ curvas C^1 por tramos cerradas. Decimos que γ_0, γ_1 son libremente homotópicas en Ω, si $\exists \Gamma : [0,1]\times[0,1] \to \Omega$

$$(s,t) \longmapsto \gamma_t(s)$$

- Continua
- $\Gamma(\cdot,0) = \gamma_0$, $\Gamma(\cdot,1) = \gamma_1$
- Cada γ_s es C^1 por tramos y cerrada ($\gamma(0)=\gamma(1)$)



abierto y no vacío.

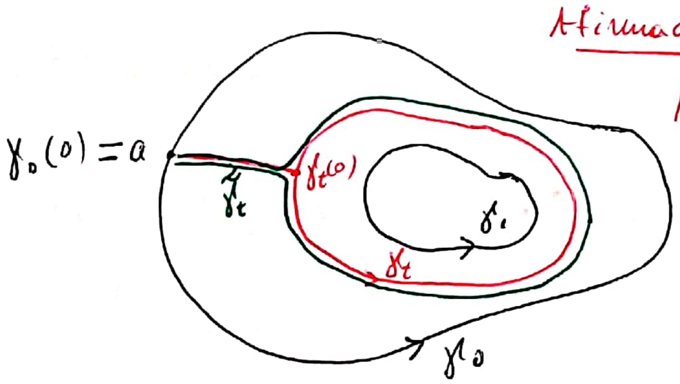
Teorema. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y γ_0, γ_1 son curvas cerradas libremente homotópicas, entonces

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

dem. Sea $a := \gamma_0(0) = \gamma_0(1)$

Sea $(\gamma_t)_{t\in[0,1]}$ la homotopía libre.

Afirmación. Reemplazando la homotopía, podemos suponer que la curva $t \mapsto \gamma_t(0)$ es C^1.



Definimos $\tilde{\gamma}_t : [0,1] \to \Omega$ para $t \in [0,1]$

$$\tilde{\gamma}_t(s) = \begin{cases} \gamma_{3st}(0) & , \ s \in [0, 1/3] \\ \gamma_t(3s-1) & , \ s \in [1/3, 2/3] \\ \gamma_{(3-3s)t}(0) & , \ s \in [2/3, 1] \end{cases}$$

Esta es una homotopía con los extremos fijados.

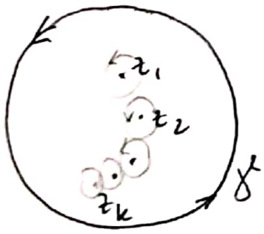
Por la versión precedente del teo de Cauchy:

$$\int_{\tilde{\gamma}_0} f(z)\,dz = \int_{\tilde{\gamma}_1} f(z)\,dz$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

obs. Recordemos el teo de los residuos 



$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(f, z_j) .$$

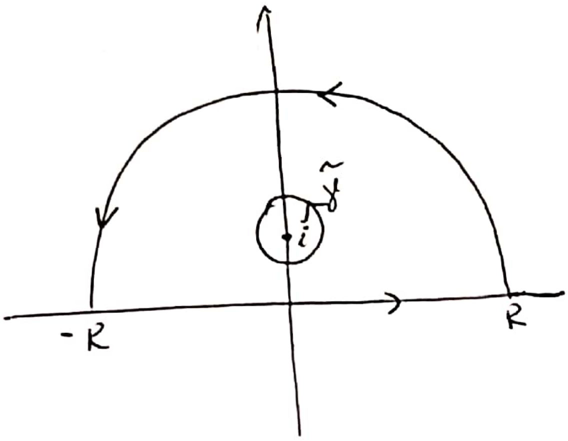
γ curva libremente homotópica a un círculo.

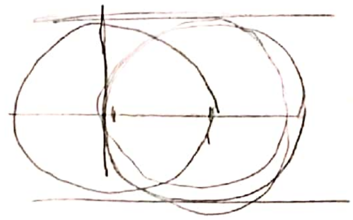
—∘—

· Aplicación del teo. de residuos al cálculo de integrales reales

[1] $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$

$$= \frac{1}{(1+i)(1-i)}$$ ← polos simples.





Para $R>1$. Sea γ_R como en el dibujo.

$$I_R = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, i) = \pi$$

teo de Cauchy (para curvas homotópicas)

$$\mathrm{Res}(f,i) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-i|=r} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-i|=r} \frac{1}{z^2+1}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(i+re^{it})^2+1}\, rie^{it}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2rie^{it}+r^2e^{2it}}\, e^{it}\,dt \quad \ldots$$

Hecho. Si f tiene polos simples en z_0, entonces $\mathrm{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ (ejercicio). | z_0 polo simple de $f \Rightarrow f(z) = \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \forall z\in B(z_0,\rho)$

$\Rightarrow \forall z:\ (z-z_0)f(z) = a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+1}$

$\therefore \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = a_{-1}$

En nuestro caso, $\mathrm{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$

$$I_R = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \underbrace{\int_{\frown_{-R}^{R}} f(z)\,dz}_{\star_R \xrightarrow{R\to\infty} 0} \qquad \Big| \quad \text{Pd: } \star_R = \int_{\frown_{-R}^{R}} f(z)\,dz = 0.$$

$$\Big\downarrow R\to\infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Pd: $\int_{\frown_{-R}^{R}} f(z)\,dz = 0$

$$\left|\int_{\frown_{-R}^{R}} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{Ri}{R^2e^{2it}+1}\,dt\right|$$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{R}{|R^2e^{2it}+1|}\,dt = \frac{1}{R}\int_0^{\pi} \frac{1}{|e^{2it}+1/R^2|}\,dt$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{|e^{2it}+R^{-2}|}\,dt \xrightarrow[\text{acotar bien}]{R\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|e^{2it}|}\,dt$$

$$= 2\pi$$

$$\therefore \left|\int_{\frown_{-R}^{R}} f(z)\,dz\right| \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

z_0 polo de f de orden m: $f(z) = (z-z_0)^{-m} g(z)$

$g: \Omega\cup\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorfa. $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \cdots$$

igualando coef: $\frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = a_{-1} = \mathrm{Res}(f,z_0)$

Para caso $m=1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} = a_{-1} + a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + \cdots$

$\Rightarrow g(z_0) = a_{-1}$

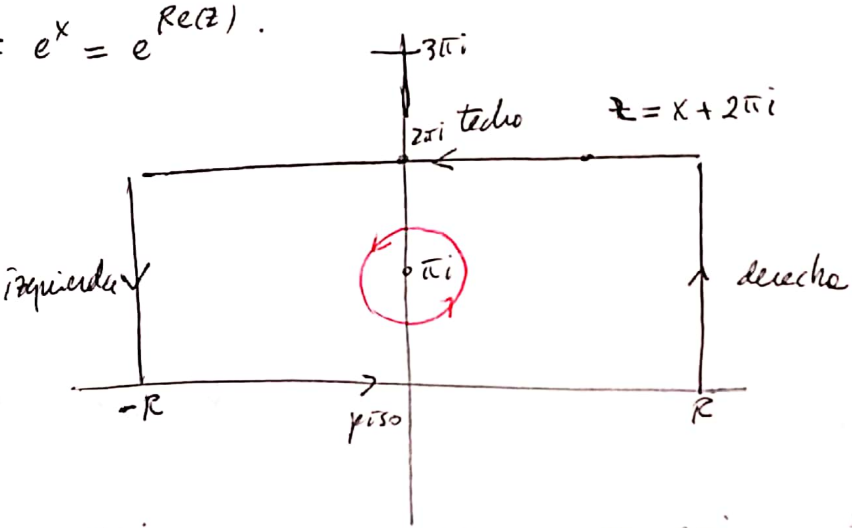
[2] Calcular, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx$, donde $0<a<1$.

Desarrollo. $f(z) := \dfrac{e^{az}}{1+e^z}$

Polos: $1+e^z=0$, $z=\pm\pi i, \pm 3\pi i, \dots$

$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$

$|e^z| = e^x = e^{Re(z)}$.



$f(z) = \dfrac{e^x e^{2\pi a i}}{1+e^x}$ $\Big|$ $f(z) = \dfrac{e^{az}}{1+e^z} = \dfrac{e^{ax}e^{ayi}}{1+e^x e^{iy}}$ techo: $x+2\pi i$ $f(x+2\pi i) = \dfrac{e^{ax}e^{a(2\pi i)}}{1+e^x} = e^{2\pi i a}\dfrac{e^{ax}}{1+e^x}$

$\displaystyle\int_{piso} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(z)dz = I_R$, $\displaystyle\int_{techo} f(z)dz = -e^{2\pi i a} I_R$

$z \in$ derecha $\Rightarrow$ $z = R+iy$, $y\in[0,\pi]$ $\Bigg|$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{a((1-t)R+2\pi i - tR)}}{1+e^{((1-t)R+2\pi i - tR)}}(-2R)\,dt$

$|f(z)| \leq \dfrac{|e^{az}|}{|e^z|-1} = \dfrac{e^{aR}}{e^R-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0$. $\displaystyle\int_{derecha} \xrightarrow{R\to\infty} 0$

c.v. $(1-t)R - tR = x$ $\to dx = -2R\,dt$

$\displaystyle = \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{(x+2\pi i)}}dx = -\int_{-R}^{R}\frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{(x+2\pi i)}}dx$

$z\in$ izquierda $\Rightarrow$ $z=-R+iy$, $y\in[0,\pi]$

$|f(z)| \leq \dfrac{|e^{az}|}{1-|e^z|} = \dfrac{e^{-aR}}{1-e^{-R}} \xrightarrow{R\to\infty} 0$. $\displaystyle\int_{izq} \xrightarrow{R\to\infty} 0$ $\quad = -e^{a2\pi i}\int_{-R}^{R} f(x)dx$

$2\pi i Res(f,\pi i) = I_R + I_{derecha} - e^{2\pi i a} I_R + I_{izq}$

$\xrightarrow{R\to\infty}$ $I_\infty - e^{2\pi i a} I_\infty = 2\pi i Res(f,\pi i) \to I_\infty = \dfrac{2\pi i Res(f,\pi i)}{1-e^{2\pi i a}}$

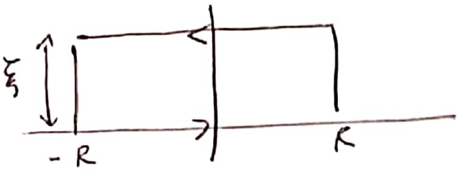
$$I_\infty = -e^{2\pi a i}\, I_\infty = 2\pi i \; Res(f, \pi i)$$

$$Res(f, \pi i) = \lim_{z \to \pi i} (z - \pi i) f(z) = \lim_{z \to \pi i} e^{az} \frac{z - \pi i}{e^z + 1}$$

$$= e^{a\pi i} \lim_{z \to \pi i} \frac{z - \pi i}{e^z - e^{\pi i}} = -e^{a\pi i} \quad , \qquad \left(\frac{d}{dz}\Big|_{z=\pi i} e^z \right)^{-1} = (e^{\pi i})^{-1} = -1$$

$$I_\infty = \frac{-2\pi i \, e^{a\pi i}}{1 - e^{2\pi a i}} = \frac{2\pi \operatorname{sen}(a\pi)}{2 \operatorname{sen}^2(a\pi)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(a\pi)}$$

[3] $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} \, dx = e^{-\pi \xi^2}$$



(La transformada de Fourier de la función $x \mapsto e^{-\pi x^2}$ es ella misma).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2 + 2ix\xi)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi((x+i\xi)^2 + \xi^2)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\xi)^2} e^{-\pi\xi^2} dx = e^{-\pi\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\xi)^2} dx$$

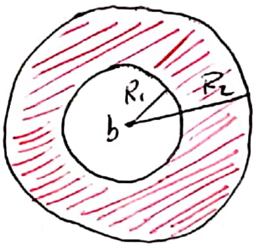
$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\xi)^2} dx \quad , \quad F(ai) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-a)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1$$

$$F_n(\xi) = \int_{-n}^{n} e^{-(x+i\xi)^2} dx$$ | $\forall K \subseteq \Omega$ compacto $\exists r > 0$ tq $K = \overline{B(0,r)}$ ...

Series de Laurent

Notación: $0 \le R_1 < R_2 \le \infty$, $b \in \mathbb{C}$. Definimos el anillo (abierto)

$A(b, R_1, R_2) = \{ z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-b| < R_2 \}$



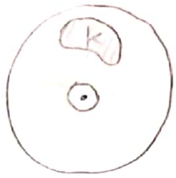
Teorema de Laurent: Sea f holomorfa en el anillo $\Omega = A(b, R_1, R_2)$, entonces existe $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ tal que:

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-b)^n$$

donde la convergencia es normal (*) en subconjuntos compactos de Ω.

obs. Convergencia normal (*) significa

$\forall K \subset \Omega$ compacto



$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{z\in K} |a_n(z-b)^n| < \infty$$

Además, los coeficientes son únicos, y son dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-b|=r} \frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}} dz \quad , \quad R_1 < r < R_2 .$$

Corolario 1 :

Sea f holomorfa en $A(b,0,R) = B(b,R) \setminus \{b\}$. Sea $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}' a_n (z-b)^n$ serie de Laurent en el anillo. Entonces la singularidad aislada b es:

(1) removible $\Leftrightarrow$ $\forall n \geq 1$, $a_{-n} = 0$ (no tiene coef negativos).

(2) polo de orden k $\Leftrightarrow$ $\exists k \geq 1$ tq $a_{-k} \neq 0$, $\forall n > k : a_{-n} = 0$

(3) esencial $\Leftrightarrow$ $\forall k \geq 1$, $\exists n > k$: $a_{-n} \neq 0$.

Corolario 2 : Con las hipótesis del teorema de Laurent, $R_1 < r < R_2$ y $R_1 = 0$:

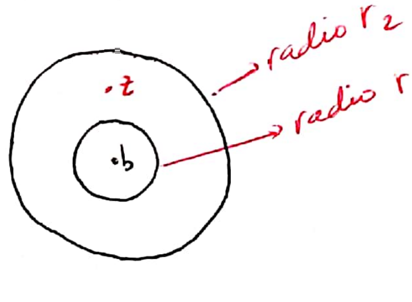
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-b|=r} f(z)\,dz = a_{-1} := Res(f,b)$$

O sea, los residuos están definidos para todas las singularidades aisladas.

• dem del teo. de Laurent : Fijamos r_1, r_2 tales que $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$.

Definimos dos funciones, $j \in \{1,2\}$: $f_j(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-b|=r_j} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$

f_j está definida en $\mathbb{C} \setminus \{z : |z-b| = r_j\}$ y además es holomorfa en este dominio.



Supongamos $z \in A(b, r_1, r_2)$.

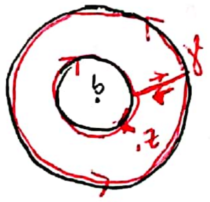
Afirmación. $f(z) = f_2(z) - f_1(z)$

dem. $f_2(z) - f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dz$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

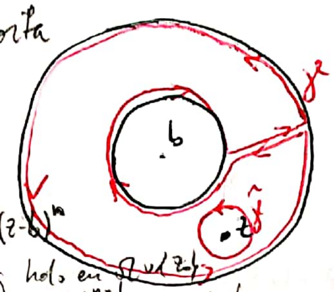
teo de Cauchy para curvas homotópicas

$\tilde{\gamma}$ libremente homotópica a γ en el dominio $A(b,r_1,r_2) \setminus \{z\}$



mismo anillo que el anterior, salvo que ahora incluye camino γ.

$\lim_{z \to b} (z-b) f(z) = 0$, f holomorfa



Explicación gráfica de que γ y $\tilde{\gamma}$ son homotópicas.

$g(z) = (z-b) f(z)$, $z \neq b$

$g(b) = 0$

g holomorfa en Ω, $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-b)^n$

continua en $\Omega \cup \{z_0\}$ $\Rightarrow$ teo Morera, g holo en $\Omega \cup \{z_0\}$

$\frac{g(z)}{(z-b)}$ holo en Ω, $\frac{g(z)}{(z-b)} = \sum^{\infty} a_n (z-b)^{n-1}$ en vec de b

Fórmula integral de Cauchy + homotopía $\tilde{\gamma}, \gamma^{\varepsilon}$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(w)}{w-z} \, dw = f(z)$$

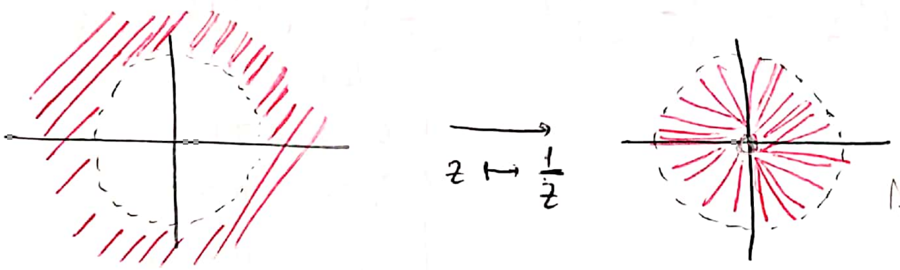
Ahora, f_2 es holomorfa en la bola $B(b, r_2)$

$$\Rightarrow f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-b)^n$$ (convergencia normal en subconjuntos compactos de $B(b, r_2)$).

Ahora estudiamos la f_1. $\underline{SPG}$: $b = 0$.

f_1 es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0, r_1)}$. Mediante el cambio de variables $\zeta = \frac{1}{z}$,

$$g(\zeta) := f_1(1/\zeta) \text{ es holomorfa en } B(0, 1/r_1) \setminus \{0\}.$$



$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - b| = r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$

$|f_1(z)| \leq \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - b| = r_1} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| |d\zeta|$

$||z| - r_1| \leq |\zeta - z|$

$|z| - r_1 \leq |\zeta - z|$

Si $|z| > r_1$, entonces $|f_1(z)| \leq \frac{1}{2\pi} (2\pi r_1) \frac{\max_{|w-b|=r_1} |f(w)|}{|z| - r_1}$. En particular,

$\lim_{|z| \to \infty} f_1(z) = 0 = \lim_{\zeta \to 0} g(\zeta) = 0$. Podemos extender g de manera holomorfa

$g(\zeta) = f_1(1/\zeta)$, $\zeta \to 0 \Rightarrow z \to \infty \Rightarrow \lim_{\zeta \to 0} f_1(1/\zeta) = 0$

a la $B(0, 1/r_1)$ poniendo $g(0) = 0$. g tiene singularidad removible en $\zeta = 0$

$\lim_{\zeta \to 0} \zeta g(\zeta) = 0$

$\therefore g(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \zeta^n$ convergencia normal en compactos de $B(0, 1/r_1)$

$\Leftrightarrow f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^{-n}$ " " " " " $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0, r_1)}$

Scanned with CamScanner

$\therefore\ \forall z \in A(0, r_1, r_2)$:

$$f(z) = f_2(z) - f_1(z)$$

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-b)^n \quad , \quad a_n = \begin{cases} \alpha_n & , n \geq 0 \\ -\beta_n & , n < 0 \end{cases}$$

ok.

Fórmula de los coeficientes:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-b|=r} \frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}} dz = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-b|=r} \frac{f_2(z)}{(z-b)^{n+1}} dz} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-b|=r} \frac{f_1(z)}{(z-b)^{n+1}} dz}_{(**)}$$

$< R_1 < r_1 < r < r_2 < R_2$

obs: No depende del r escogido, porque los círculos son libremente homotópicos en el dominio.

$\hookrightarrow = \begin{cases} \alpha_n = a_n & \text{si } n \geq 0 \text{ (fórmula de Cauchy para serie de potencias)} \\ 0 & \text{si } n < 0 \text{ (por Cauchy)} \end{cases}$

$$(**) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1/r} f_1(1/\zeta)\, \zeta^{n+1} \left(-\frac{1}{\zeta^2}\right) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\frac{1}{r}} g(\zeta)\zeta^{n-1} d\zeta$$

Cambio de variable $z = b + \frac{1}{\zeta}$

$dz = -\frac{1}{\zeta^2} d\zeta$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 1 \\ \beta_0 = 0 & n = 0 \\ \beta_1 & n = 1 \end{cases}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-b)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (z-b)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-b)^{-n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \zeta^n$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-b|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-b|=r} \frac{f_2(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-b|=r} \frac{f_1(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}} d\zeta$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-b|=r} \frac{f_1(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=1/r} \frac{f_1(b+1/\mu)}{\mu^{-(n+1)}} \left(-\frac{1}{\mu^2}\right) d\mu = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=1/r} \frac{g(\mu)}{\mu^{-(n-1)}} d\mu$$

$\zeta - b = \frac{1}{\mu}$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=1/r} g(\mu)\mu^{n-1} d\mu = \begin{cases} 0 & , n \geq 1 \\ \beta_0 = 0 & n = 0 \\ \beta_{-n} & n \leq 1 \end{cases}$$

Ejemplos de Series de Laurent

(1) La función definida en $\mathbb{C}\setminus\{0\} = A(0,0,\infty)$, $f(z) = z^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$

Encontremos su serie de Laurent:

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$ (normalmente convergente en todo $\mathbb{C}$).

$$\operatorname{sen}(1/z) = z^{-1} - \frac{z^{-3}}{3!} + \frac{z^{-5}}{5!} - \dots$$ normalmente convergente en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

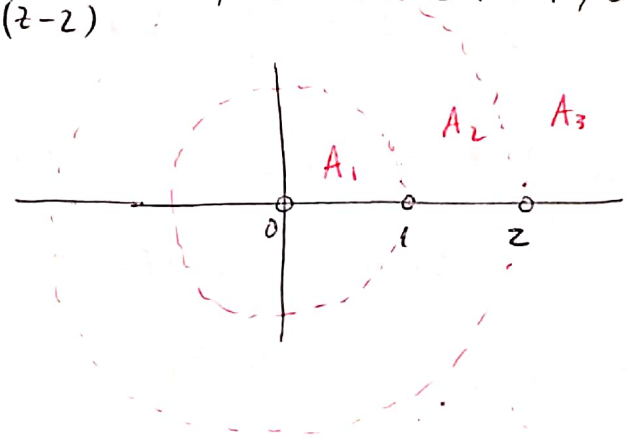
$$f(z) = z^3 - \frac{z}{3!} + \frac{z^{-1}}{5!} - \frac{z^{-3}}{7!} + \dots$$ normalmente convergente en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(2) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ definida en $\mathbb{C}\setminus\{0,1,2\}$.

$A_1 = A(0,0,1)$

$A_2 = A(0,1,2)$

$A_3 = A(0,2,\infty)$



Serie de Laurent de f en A_1:

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -1 - z - z^2 - z^3 - z^4 - \dots$$ (n.c en $|z|<1$)

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \dots$$ (normalmente conv. en $|z|<2$)

$$\Rightarrow \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \frac{7}{8}z^2 + \dots$$

✓ ok.

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8}z + \frac{15}{16}z^2 + \dots$$

Encontremos la serie de Laurent de f en $A_2 = A(0,1,2)$

Por fracciones parciales: $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{-1}{z-1} + \dfrac{1}{z-2}$

Serie de Laurent de $z \longmapsto \dfrac{1}{z-1}$ en A_2:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = \frac{1}{z}\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots\right)$$

$$= z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots \qquad \text{u.c en } |z^{-1}| < 1$$

$$\Leftrightarrow |z| > 1$$

$$\therefore \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \cdots - z^{-3} - z^{-2} - z^{-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \cdots$$

$$\therefore f(z) = \cdots - z^{-4} - z^{-3} - z^{-2} - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z - \cdots$$

(3) Pregunta: ¿la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n = \cdots + z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + z^2 + \cdots$ es una serie de Laurent de alguna función holomorfa en algún anillo?

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n = \underbrace{\cdots + z^{-3} + z^{-2} + z^{-1}}_{\frac{1}{1-z^{-1}}} + \underbrace{1 + z + z^2 + z^3 + \cdots}_{\frac{1}{1-z}}$$

$|z| < 1$ ok.

$|z^{-1}| < 1$

$|z| > 1$

$\therefore$ No puede ser!

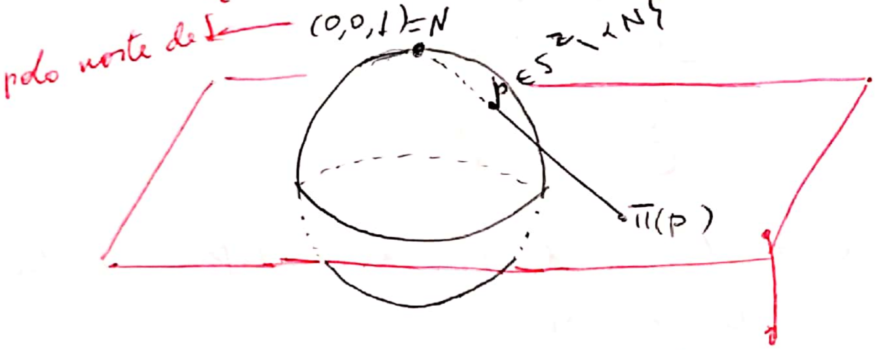
La Esfera de Riemann

La esfera de Riemann se define como:

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Vamos a definir una biyección $\pi : S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$, donde

$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ es la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$



$\pi(N) := \infty$

π es biyección (proyección estereográfica)

$\{\text{Plano } x_3 = 0\} = \{(\underbrace{x_1, x_2}_{= x_1 + i x_2}, 0) ; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

- La topología en $\hat{\mathbb{C}}$ es la heredada de S^2.
  (abiertos de $\overline{\mathbb{C}} := \pi(\text{abiertos de } S^2)$). La sola topología que hace que π sea homeomorfismo)
- π preserva ángulos

- $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto $\Rightarrow$ $\Omega \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ abierto.
- Supongamos ahora $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f : \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$

  f es continua $\Leftrightarrow$ $\pi^{-1} \circ f : \Omega \to S^2$ es continua.

- $\pi|_{S^2 \setminus \{N\}} : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ es un homeomorfismo.

Notación: $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

$$\varphi : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$$
$$z\in\mathbb{C}^* \longmapsto \frac{1}{z}$$
$$0 \longmapsto \infty$$
$$\infty \longmapsto 0$$

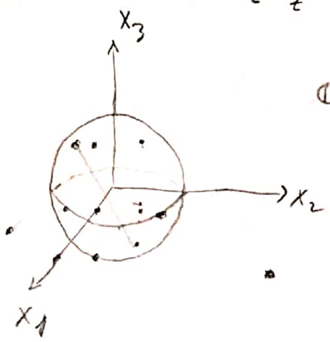
$$\psi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$$
$$0 \mapsto \infty$$
$$\infty \mapsto 0$$
$$z\in\mathbb{C}^* \mapsto \frac{1}{\bar z}$$

$$\frac{1}{\bar z} = \frac{1}{\bar z}\cdot\frac{z}{z} = \frac{z}{|z|^2}$$

$\pi^{-1}\circ\psi\circ\pi$ es reflexión sobre plano $x_1 x_2$ (verificar).

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{\bar z}{\bar z} = \frac{\bar z}{|z|^2}$$

obs. φ es una biyección. $\varphi^2 = id$.



Por otro lado, tenemos:

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{\pi^{-1}\circ\varphi\circ\pi} & S^2 \\ \pi\downarrow & & \uparrow\pi^{-1} \\ \hat{\mathbb{C}} & \xrightarrow[\varphi]{} & \hat{\mathbb{C}} \end{array}$$

$\therefore\ \pi^{-1}\circ\varphi\circ\pi$ = rotación de 180° de la esfera alrededor del eje x_1.

ok ✓

Existen más rotaciones sobre los ejes

Def. Sea $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ abierto, $f:\Omega\to\hat{\mathbb{C}}$ función continua. Decimos que f es función meromorfa si:

ej: $f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad f(0)=\infty$ $\quad f^{-1}(\infty) = 0$. $\quad f|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ holomorfa.

(1) $f|_{\Omega\setminus f^{-1}(\infty)}$ es holomorfa ✓

(2) $\varphi\circ f|_{\Omega\setminus f^{-1}(0)}$ es holomorfa. $\quad \varphi\circ f(z) = \frac{1}{f(z)}$

↳ exigencia rara.

Ejemplo. La función $f:\mathbb{C}\to\hat{\mathbb{C}}$

$$\begin{cases} z \longmapsto \dfrac{1}{(z-1)^2}, & z\neq 1 \\ z \longmapsto \infty, & z = 1 \end{cases}$$

es meromorfa. En efecto, $\mathbb{C}\setminus\{1\}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto\frac{1}{(z-1)^2}$ es holomorfa.

Además $\mathbb{C}\xrightarrow{\varphi\circ f}\mathbb{C}$

$$z \longmapsto (z-1)^2,\quad z\neq 1$$
$$1 \longmapsto 0,\quad z = 1$$

también es holomorfa.

Teorema. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f : \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$ función continua ($f \not\equiv \infty$)

Entonces f es meromorfa sii valen (1), (2), (3):

(1) $A := f^{-1}(\infty)$ no tiene puntos de acumulación en Ω.

(2) $f|_{\Omega \setminus A}$ es holomorfa.

(3) f tiene polo en cada uno de los puntos de A.

Obs. Por teo anterior, f meromorfa $\equiv$ f holomorfa salvo polos aislados

Recordatorio: • $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es la esfera de Riemann.

• $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, $z \in \mathbb{C}^* \longmapsto 1/z$

$0 \longmapsto \infty$

$\infty \longmapsto 0$.

• $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ es vecindad de ∞ si $\exists R > 0$ tal que $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\} \subset U$

Def. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto. $f : \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$ continua es llamada meromorfa si

(1) $f|_{\Omega \setminus f^{-1}(\infty)}$ es holomorfa

(2) $\varphi \circ f|_{\Omega \setminus f^{-1}(0)}$ es holomorfa. $\varphi \circ f(z) = \frac{1}{f(z)}$, $z \in \Omega \setminus f^{-1}(0)$
$z \in \Omega$, $f(z) \neq 0$

Prop. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto. $f : \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$, $f \not\equiv \infty$. Entonces f es meromorfa ssi valen (a), (b) y (c):

(a) $A := f^{-1}(\infty)$ no tiene puntos de acumulación en Ω.

(b) $f|_{\Omega \setminus A}$ es holomorfa.

(c) f tiene polo en cada uno de los puntos de A.

dem. $(\Rightarrow)$ $A = (\varphi \circ f)^{-1}(0)$, $\varphi \circ f \not\equiv 0$. Por lo tanto, vale (a).
holomorfa donde es finita.

(b) es automático.

(c) : $a \in A$, $f(a) = \infty$
$h = \varphi \circ f$ es holomorfa en vecindad de a. $h(a) = \varphi(\infty) = 0$, $h \not\equiv 0$.

$h(z) = (z-a)^n g(z)$, $n \geq 1$; g es holomorfa en vecindad de a. $g(a) \neq 0$.

$\therefore f(z) = \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z-a)^n} \cdot \frac{1}{g(z)}$ ⟶ holomorfa en vecindad de a.

Por lo tanto, f tiene un polo de orden n en a.

$(\Leftarrow)$ Argumentos parecidos.

Ahora queremos definir $f: \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$ meromorfa cuando $\Omega \subseteq \hat{\mathbb{C}}$.

Def. $f: \Omega \subseteq \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ continua es llamada meromorfa si:

(1) $f|_{\Omega^* \setminus f^{-1}(\infty)}$ es holomorfa

(2) $\varphi \circ f|_{\Omega^* \setminus f^{-1}(0)}$ es holomorfa.

mismas condiciones $f: \Omega^* \to \hat{\mathbb{C}}$ meromorfa

Notación: $\Omega^* = \Omega \setminus \{\infty\}$

(3) $f \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(\Omega^*) \setminus \varphi^{-1}(f^{-1}(\infty))}$ es holomorfa

$z \notin \varphi^{-1}(\Omega)^*$ $\quad z \in \varphi^{-1}(f^{-1}(\infty)) \Rightarrow f \circ \varphi(z) = \infty$ $\quad f(1/z) = \infty$

$f(1/z)$ holo en $\{z \neq 0, 1/z \in \Omega\} \cap \{z \mid f(1/z) \neq \infty\}$

(4) $\varphi \circ f \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(\Omega)^* \setminus \varphi^{-1}(f^{-1}(0))}$ es holomorfa. $(\mathbb{C} \to \mathbb{C})$

$\infty \notin \varphi(z) \in \Omega \mid \varphi(z) \neq 0$

$\varphi \circ f \circ \varphi(z) = \dfrac{1}{f(1/z)}$ holo en $\{z \neq 0, 1/z \in \Omega\} \cap \{z \mid f(1/z) \neq 0\}$

Ejemplo. Fijados $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ $(a_n \neq 0, n \geq 1)$

$$f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$$
$$\mathbb{C} \ni z \mapsto a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = P(z)$$
$$\infty \mapsto \infty$$

Sea $\{c_1, \dots, c_n\} = P^{-1}(0)$.

(1) $z \mapsto P(z)$ holomorfa en $\mathbb{C}$

(2) $z \mapsto \dfrac{1}{P(z)}$ holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{c_1, \dots, c_n\}$

(3) $z \mapsto P(1/z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(4) $z \mapsto \dfrac{1}{P(1/z)} = \dfrac{1}{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-(n-1)} + \dots + a_0} = \dfrac{z^n}{a_n + a_{n-1} z + \dots + a_0 z^n}$ $(= (*))$

Es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{$ raíces del polinomio (*) $\}$

Tenemos un análogo para la caracterización de $f : \Omega \subseteq \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ meromorfa en la prop. anterior:

Prop. $f : \Omega \subseteq \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ es meromorfa si

(a) $A = f^{-1}(\infty)$ no tiene puntos de acumulación en Ω.

(b) $f|_{\Omega \setminus A}$ es holomorfa.

(c) f tiene polo en cada uno de los puntos de A.

(d) $f(\infty) = \lim_{z \to \infty} f(z)$ (continuidad en $z = \infty$). (*) ✓

Obs. (*) significa: para toda vecindad U de $f(\infty)$ (punto de $\hat{\mathbb{C}}$), existe vecindad V de ∞ tal que $f(V) \subseteq U$

En el caso $f(\infty) \in \mathbb{C}$ $\to$ la función $z \mapsto f(1/z)$ tiene singularidad removible en $z = 0$.

$F(z) = f(1/z)$, $F(0) \in \mathbb{C}$

$f(\infty) = \lim_{z \to \infty} f(z) \Leftrightarrow F(0) = \lim_{z \to 0} F(z) \Rightarrow F(z)$ acotada en vecindad de $z = 0$.

En el caso $f(\infty) = \infty$ $\to$ la función $z \mapsto f(1/z)$ tiene un polo en $z = 0$.

Ejemplo. Sean P, Q polinomios en $\mathbb{C}$ sin factores comunes. $Q \not\equiv 0$.

Definimos $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ como:

$$z \longmapsto \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus Q^{-1}(0)$$

$$z \longmapsto \infty \quad \text{si } z \in Q^{-1}(0)$$

$$\infty \longmapsto \lim_{z \to 0} \frac{P(z)}{Q(z)}$$

f es meromorfa en $\hat{\mathbb{C}}$. (f se llama función racional en $\mathbb{C}$).

Teorema. $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ es meromorfa ssi $f\equiv\infty$ ó $f=$ función racional.

dem. Supongamos que $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ meromorfa, $f\not\equiv\infty$.

$f^{-1}(\infty)$ no tiene puntos de acumulación en $\hat{\mathbb{C}}$

$\hat{\mathbb{C}}$ compacto $\Rightarrow f^{-1}(\infty)$ es finito.

Primer caso: $f^{-1}(\infty)=\phi$. $\lim_{z\to\infty} f(z)=f(\infty)\in\mathbb{C}$

$\sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|\leq C<\infty$. Teo. de Liouville $\Rightarrow f|_{\mathbb{C}}=cte$

$\therefore f\equiv c=\frac{c}{1}$ ✓

Segundo caso: $f^{-1}(\infty)=\{c_1,\dots,c_m\}$. Para cada $c_k\neq\infty$, f tiene un polo en c_k:

$$\Rightarrow f(z)=\underbrace{\frac{a_n}{(z-c_k)^n}+\dots+\frac{a_1}{(z-c_k)}}_{f_k(z)}+\text{resto}$$

con único polo en c_k, $f_k(\infty)=0$

Existe función racional f_k tal que la función (meromorfa) $f-f_k$ tiene valor finito en c_k.

Si todos los c_k's son finitos, entonces la función meromorfa:

$F=f-f_1-f_2-\dots-f_k$ tal que $F^{-1}(\infty)=\phi$, o sea,

$F\equiv$ constante.

Conclusión: $f=F+f_1+\dots+f_k$ es racional. ✓

- Mostrar con un ejemplo la descomposición $f=F+f_1+\dots+f_k$

Scanned with CamScanner

Tercer caso: $f^{-1}(\infty) = \{c_1, \dots, c_k, \infty\}$

Definimos $h := f \circ \varphi$. $h(z) = f(1/z)$, $h(0) = \infty$

h tiene un polo en $z=0$,

$$\Rightarrow h(z) = \frac{a_n}{z^n} + \dots + \frac{a_1}{z} + g(z) \quad g(0) \neq 0$$, $g(z)$ holomorfa en vecindad de $z=0$.

$$\Rightarrow f(z) = \underbrace{a_n z^n + \dots + a_1 z}_{P(z)} + g(1/z) \qquad (f(z) = h(1/z))$$

$F = f - f_1 - \dots - f_k - P$ es siempre finita (en $\hat{\mathbb{C}}$), y por lo tanto, acotada. Se tiene que es constante. (debiera cumplirse que $F^{-1}(\infty) = \phi$) $\sup_{z \in \hat{\mathbb{C}}} |F(z)| < C$

$\therefore f$ es racional. ✓ ok.

Obs. $f : \mathbb{C} \setminus \overline{B(a,R)} \to \mathbb{C}$ es holomorfa tal que $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$

$\Rightarrow f(z) = \text{polinomio} + g(z)$ tal que $\lim_{z\to\infty} g(z) \in \mathbb{C}$.

$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \Rightarrow$ podemos extender f a $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{B(a,R)}$ con $f(\infty) = \infty$

$f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$. $\therefore$ Caso anterior: $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + h(z)$

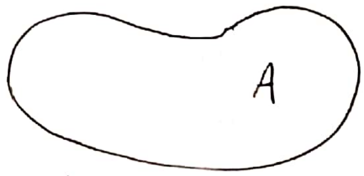
$h(z) = g(1/z)$

$\lim_{z\to\infty} h(z) = \lim_{z\to\infty} g(1/z)$

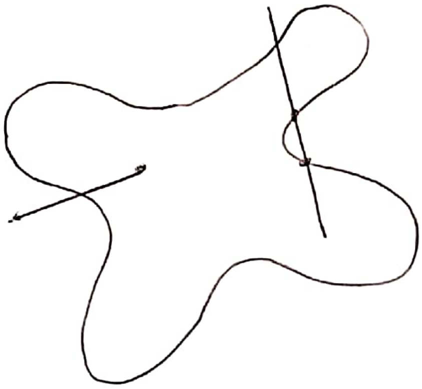
$= \lim_{z\to 0} g(z) \in \mathbb{C}$.

Teorema de la curva de Jordan

Sea γ curva cerrada simple en $\mathbb{C}$ y sea Γ su imagen. $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ tiene 2 componentes conexas A y B, siendo A acotada y simplemente conexa



Decimos que γ es recorrida en sentido antihorario si A está siempre a la izquierda de los rectas tangentes $\gamma'(t)$
vectores



$f(z)=z$, $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$

$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{it}}\, ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi}dt = 2i\pi$

juntando estas dos observaciones

$$f(z)=(z-a_1)^{n_1}\cdots(z-a_k)^{n_k}(z-b_1)^{-m_1}\cdots(z-b_l)^{-m_l}\,g(z)$$

g meromorfa, sin ceros ni polos en A

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i\,(n_1+\dots+n_k-m_1-\dots-m_l)+\underbrace{\int_\gamma\frac{g'(z)}{g(z)}dz}_{=0 \text{ (por Cauchy)}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz = n_1+\dots+n_k-m_1-\dots-m_l$$

Corolario de la demostración:

Bajo las mismas hipótesis, sea $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa,

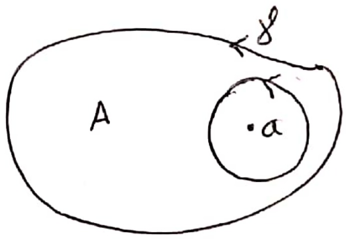
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_i n_i \varphi(a_i) - \sum_j m_j \varphi(b_j)$$

Corolario del teorema: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, γ curva cerrada simple contenida en Ω, recorrida en sentido antihorario cuya parte interior es $A \subseteq \Omega$,

sea $t \in [0,1] \to f_t \in \underline{H(\Omega)}$ continua

funciones holomorfas en Ω con topología de convergencia uniforme en subconjuntos compactos

tq $\forall t \in [0,1]$ f_t no tiene ceros en la curva ∂A



A es simplemente conexa por Jordan, luego es homotópica a un círculo alrededor de a.

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = n = \begin{cases} \text{mult del cero} & \text{si } n>0 \\ 0 & n=0 \\ -\text{mult del polo} & \text{si } n<0 \end{cases}$$

Obs. Si $f = f_1 f_2$

$$\Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{f_1' f_2 + f_1 f_2'}{f_1 f_2} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2}$$

Si $f = f_1 \cdots f_n$: $\dfrac{f'}{f} = \dfrac{f_1'}{f} + \dots + \dfrac{f_n'}{f_n}$

$$f(z) = \underbrace{(z-z_1)^{n_1}}_{f_1(z)}\cdots\underbrace{(z-z_k)^{n_k}}_{f_k(z)}\underbrace{(z-p_1)^{-m_1}}_{\tilde{f}_1(z)}\cdots\underbrace{(z-p_\ell)^{-m_\ell}}_{\tilde{f}_\ell(z)}g(z)$$

$$\Rightarrow \frac{f(z)}{f'(z)} = \frac{n_1}{(z-z_1)} + \dots + \frac{n_k}{(z-z_k)} - \frac{m_1}{(z-p_1)} - \dots - \frac{m_\ell}{(z-p_\ell)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Si f tiene ceros de orden n en a, entonces

$$f(z) = (z-a)^n g(z)$$

meromorfa $g(a) \neq 0, \infty$.

Si f tiene un polo de orden n en b, entonces,

$$f(z) = \frac{1}{(z-b)^n} \underbrace{h(z)}_{\text{meromorfa}}, \quad h(b) \neq 0, \infty$$

Teorema (principio del argumento).

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f : \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$ meromorfa. γ curva cerrada simple recorrida en sentido antihorario, contenida en Ω, tal que su parte interior A también esté contenida en Ω.

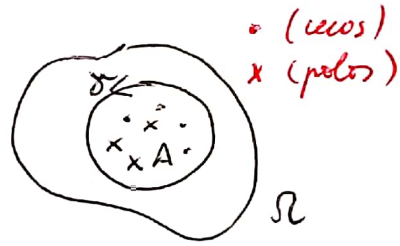
Supongamos que no hay ceros ni polos de f a lo largo de la curva γ.

Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \left\{ \begin{array}{l} \text{número de} \\ \text{ceros de } f \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{número de} \\ \text{polos de } f \end{array} \right\}$$

(contados con multiplicidad)

obs. $\bar{A} = A \cup \underbrace{\partial A}_{\text{imagen de la curva.}}$



obs. Si existiera $\log(f(z))$ se tendría:

$$(\log f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

(Estudiar esta parte del conway)

$$\log(re^{i\theta}) = \log(r) + i\theta$$

la integral mide la variación de θ

demostración. Caso particular $f(z) = (z-a)^n$, donde $a \in A$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$f'(z) = n(z-a)^{n-1} \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{n}{z-a} dz$$

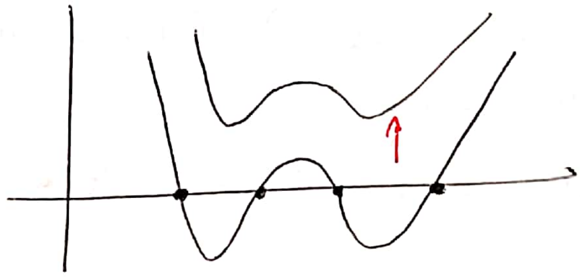
Polo simple con $z = a$ y residuo es n.

Scanned with CamScanner

Sea $\mathbb{Z}(f_t, A)$ = nº de ceros de f_t en A (contando multiplicidad)

Entonces $\mathbb{Z}(f_t, A)$ es constante (no depende de t)

obs. El caso real es falso:



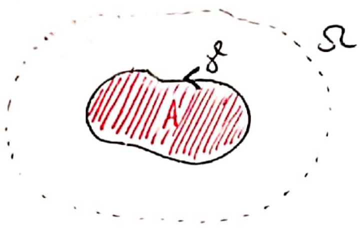
sumando una constante.

Ejemplo del corolario: z^2 tiene 2 ceros. Si la movemos un poco, $(z-\varepsilon)^2$ tiene 2 ceros pero en $\pm\sqrt{\varepsilon}$

aquí va algo

La demostración basicamente, (o, decir ?), que como la función es continua, entonces $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ es continua, pero en $\mathbb{Z}$. Luego es constante.

<u>Corolario del principio del argumento</u>: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto. γ curva cerrada simple recorrida en sentido antihorario, contenida en Ω y tal que su "parte interior" A también está contenida en Ω.



Principio del argumento: $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}\,dz = Z(f_t, A)$

$E : [0,1] \longrightarrow \mathbb{Z}$
$t \longmapsto \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}\,dz$ continua $\Rightarrow$ constante

Sea $t \in [0,1] \to f_t \in H(\Omega)$ continua, tal que ninguna f_t tiene ceros en ∂A (= imagen de γ). Entonces

$Z(f_t, A) :=$ numero de ceros de f_t en A (finito) (contados con multiplicidad).

no depende de t.

<u>Teorema (Rouché)</u> Bajo las hipótesis del corolario anterior, $f, g \in H(\Omega)$ son tales que: $\forall z \in \partial A$

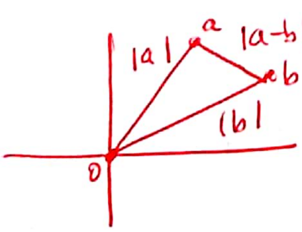
$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

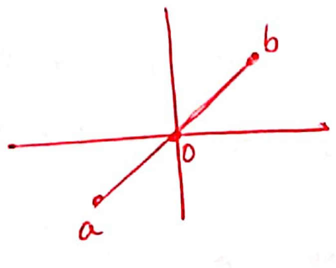
entonces $Z(f, A) = Z(g, A)$ (las dos son finitas, pues ni f ni g tienen ceros en ∂A).

<u>obs</u>. La versión tradicional del teo de Rouché pide $|f(z) + g(z)| < |f(z)|$

<u>obs</u>. $a, b \in \mathbb{C}$,

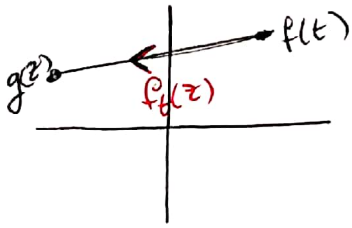
$$|a - b| \underset{=}{<} |a| + |b| \iff 0 \underset{\in}{\notin} \text{segmento } [a, b].$$





dem del teo de Rouché : Sea $z \in \Omega$, $t \in [0,1]$

$$f_t(z) := (1-t) f(z) + t g(z)$$



$f_0 = f$, $f_1 = g$

$f_t'(z) = (1-t) f'(z) + t g'(z)$

$Z(f_t, A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_t'(z)}{f_t(z)} dz$ constante $\forall t$ (no depende de t)

(terminar).

—— o ——

$f_t(z) = f(z) + t(f(z) - g(z))$

Pendiente: Demostrar que f_t no puede tener ceros en ∂A.

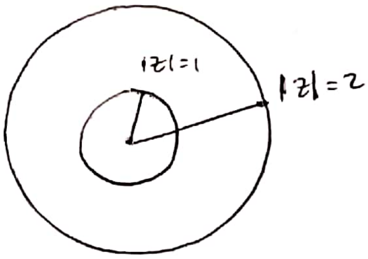
—— o ——

$|f_t(z)| = |f(z) + t(f(z) - g(z))|$

$|f_0(z)| = |f(z)|$

Aplicaciones.

(1) ¿Cuantos ceros (con multiplicidad) tiene el polinomio $z^4 - 6z + 3$ en el anillo $1 < |z| < 2$?



$|z| = 2 \Rightarrow \underbrace{|z^4|}_{f(z)} = 16 > 15 \geq \underbrace{|-6z+3|}_{f(z) - g(z)}$

Rouché tradicional con $f(z) = z^4$

$g(z) = z^4 - 6z + 3$

$\therefore N(g, B(0,2)) = 4$

De igual manera, se demuestra que $g(z)$ tiene 1 cero en $B(0,1)$

$\therefore z^4 - 6z + 3$ tiene 3 ceros en el anillo $1 < |z| < 2$.

(2) Teo de Rouché $\Rightarrow$ Teo fundamental del álgebra.

dem. Sea $p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$

$\exists R > 0$ tq : $|z| = R \Rightarrow |z^n| > |a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0|$

z^n tiene n ceros en $B(0,R)$.

Scanned with CamScanner

Teorema (aplicación abierta). Supongamos que $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y conexo, y que $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa no constante. Entonces f es una aplicación abierta, o sea, $\forall A \subset \Omega$ abierto, $f(A) \subseteq \mathbb{C}$ es abierto.

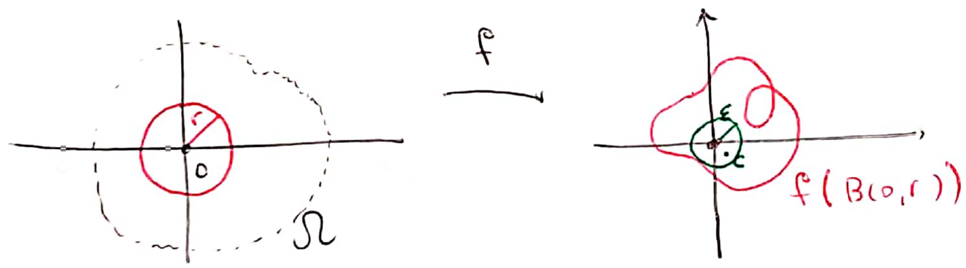
obs. No funciona en $\mathbb{R}$, basta estudiar $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

dem. Es suficiente probar que $f(\Omega)$ es abierto. Sea $b \in f(\Omega)$, o sea, $\exists a \in \Omega$ tq $f(a) = b$.

a posteriori, puedo tomar cualquier $A \subset \Omega$ abierto.

Hay que probar: $b \in \operatorname{int}(f(\Omega))$.

SPG: $a = b = 0$.



Los ceros de f son aislados. $\exists r > 0$ tal que $f^{-1}(0) \cap \overline{B(0,r)} = \{0\}$.

$\exists \varepsilon > 0$ tq $|z| = r \Rightarrow |f(z)| > \varepsilon$. ok. Esto porque los ceros de f son aislados

Probemos que $B(0,\varepsilon) \subset f(\Omega)$ ✓. Sea $c \in B(0,\varepsilon)$

$|z| = r \Rightarrow |c| < \varepsilon < |f(z)|$ $\quad f$ no tiene ceros en $|z| = r$

Rouché para $\begin{cases} f \\ g = f - c \end{cases} \Rightarrow Z(g, B(0,r)) = \underset{\overset{\vee}{0}}{Z(f, B(0,r))} > 0$ ■

$\hookrightarrow \exists \tilde{z} \in B(0,r) \subset \Omega : f(\tilde{z}) - c = 0$

$|f - (f - c)| = |c| < |f|$

$f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa

f abierta $\Rightarrow f + c$ abierta

$c \in \mathbb{C}$.

$\varepsilon < |f(z)| = |f(z) - c + c| \leq |f(z) - c| + |c| < |f(z) - c| + \varepsilon$

$\therefore |f(z) - c| > \varepsilon/2 \quad \forall z \in \partial B(0,r)$

$\therefore f(z) - c$ no tiene ceros en $|z| = r$

Teorema del módulo máximo Supongamos $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y conexo, y que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa no constante. Entonces $|f|$ no alcanza máximo en Ω.

dem. Usar Teorema de la aplicación abierta.

pendiente
hacer ejercicios de este resultado.

$$\exists p \in \Omega, \forall z \in \Omega : |f(z)| \leq |f(p)| =: R$$

Ejemplo (Conexión con EDP). $h : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^2, es llamada armónica si

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0.$$

Las funciones armónicas son siempre C^∞ y satisfacen la propiedad "del módulo máximo".

obs. f holomorfa $\Rightarrow$ $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $\log |f|$ son funciones armónicas.

Winding number (número de vueltas)

Def. Sea γ una curva cerrada en $\mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C} \setminus$ (imagen de γ). Winding number de γ alrededor de a:

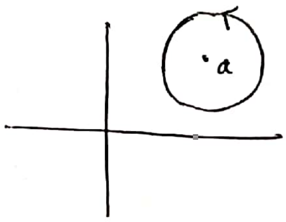
$$W_a(\gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

✓ ok.

Scanned with CamScanner

Ejemplo. Sea $n \in \mathbb{Z}$. $\quad \zeta_n : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{a\}$

$$t \mapsto a + e^{2\pi i n t}$$



$\pm n$ vueltas alrededor de a

$+$: sentido antihorario

$-$: sentido horario

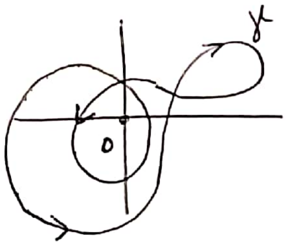
$$W_a(\zeta_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi i n \, e^{2\pi i n t}}{e^{2\pi i n t}} \, dt = n$$

$z \in \mathbb{C} \setminus \{a\} \longmapsto \dfrac{1}{z-a}$ es holomorfa.

γ_0, γ_1 curvas cerradas libremente homotópicas en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

$\underset{\text{teo Cauchy}}{\Rightarrow} \quad W_a(\gamma_0) = W_a(\gamma_1)$ ←  ← libremente homotópica a ←

Ejemplo.



$W_0(\gamma) = W_0(\zeta_2) = 2$

γ homotópica a ζ_2 en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Teorema (topológico) Toda curva cerrada en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ es libremente homotópica a ζ_n para algún $n \in \mathbb{Z}$. ✓

Corolario. Si γ_0, γ_1 son curvas cerradas en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, entonces:

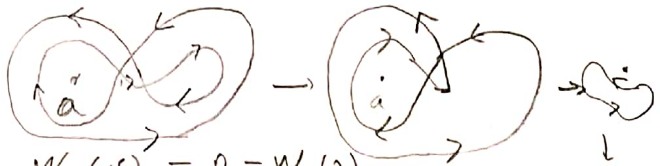
γ_0, γ_1 libremente homotópicos en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$

$$\Leftrightarrow W_a(\gamma_0) = W_a(\gamma_1)$$

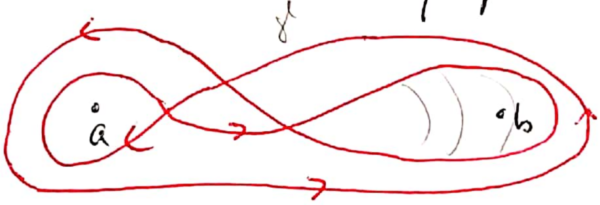
γ_0, γ_1 curvas cerradas libremente homotópicas en $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$

siempre se cumple $\Downarrow$ $\Uparrow$?

$$\begin{cases} W_a(\gamma_0) = W_a(\gamma_1) \\ \quad y \\ W_a(\gamma_0) = W_b(\gamma_1) \end{cases}$$



Respuesta: No! Como contraejemplo:



$W_a(\gamma) = 0 = W_a(0)$

$W_b(\gamma) = 0 = W_b(0)$

pero γ no es homotópica a una constante en $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$

• Para que lo anterior resulte, se debe cambiar el concepto de "curvas homotópicas" por "curvas homólogas".

Obs. (Importante) $W_a(\gamma) \in \mathbb{Z}$.

$$W(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a} dt$$

$$g : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad g(s) = \int_0^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a} dt, \quad s \in [0,1]$$

$$g(0) = 0, \quad \text{TFC: } g'(s) = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a} \Rightarrow (\gamma(s)-a) g'(s) = \gamma'(s) \quad \forall s \in [0,1]$$

$$\Rightarrow (\gamma(s)-a) g'(s) - \gamma'(s) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{ds}\left(e^{-g(s)}(\gamma(s)-a)\right) = -e^{-g(s)} g'(s)(\gamma(s)-a) + e^{-g(s)} \gamma'(s)$$

$$= e^{-g(s)}\left(-g'(s)(\gamma(s)-a) + \gamma'(s)\right) = 0$$

$\gamma(0) = \gamma(1)$

$$\therefore e^{-g(s)}(\gamma(s)-a) \text{ constante en } [0,1]$$

$$e^{-g(0)}(\gamma(0)-a) = e^{-g(1)}(\gamma(1)-a) \Rightarrow e^{-g(0)} = e^{-g(1)} \Rightarrow 1 = e^{-g(1)}$$

$$\Rightarrow g(1) = \int_0^1 \frac{dz}{z-a} = 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \therefore N(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{dz}{z-a} = k \in \mathbb{Z}.$$

Winding numbers: $W_a(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$, γ curva cerrada en $\mathbb{C}$ ✓
$a \in \mathbb{C} \setminus \{\text{imagen de } \gamma\}$

Hecho 1. $W_a(\gamma) \in \mathbb{Z}$ ✓

Hecho 2. $\gamma_0 \sim \gamma_1$ en $\mathbb{C}\setminus\{a\} \Rightarrow W_a(\gamma_0) = W_a(\gamma_1)$ ✓
→ libremente homotópicos

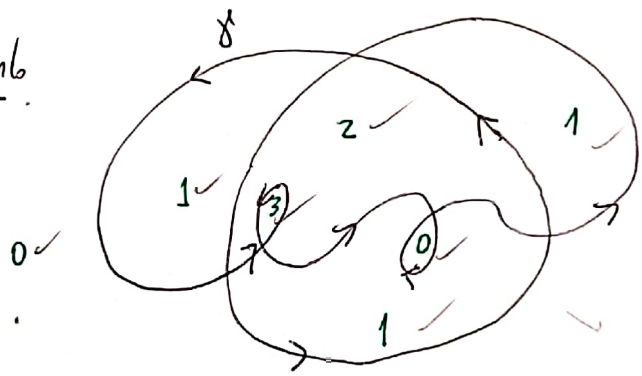
Hecho 3. Toda γ en $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ es homotópica a ζ_n ($n \in \mathbb{N}$): ✓

$$\begin{aligned} \zeta_n : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{a\} \\ t &\longmapsto a + e^{2\pi i n t} \end{aligned}$$

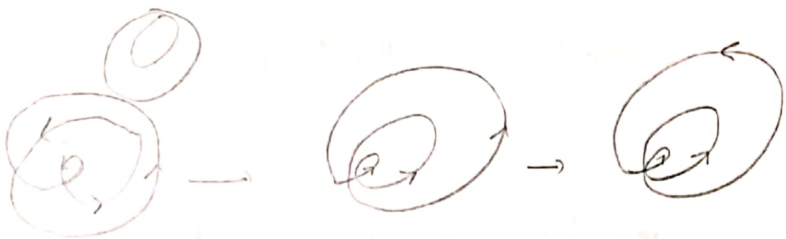
$n \in \mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow \zeta_n$ recorrida sentido a-h
$n \in \mathbb{Z}^- \Leftrightarrow \zeta_n$ recorrida sentido horario.

$W_a(\zeta_n) = n$.

Ejemplo.



$W_a(\gamma) \in \{0, 1, 2, 3\}$.



Teorema de Residuos (versión con W.N)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto simplemente conexo. Sea $f:\Omega \to \hat{\mathbb{C}}$ meromorfa, con polos $a_1, \dots, a_n$. Sea γ curva cerrada en Ω. $f(a_i) = \infty$

Entonces:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} W(\gamma, a_j)\, Res(f, a_j)$$

Repasar residuos.

dem. Hecho: $f = f_1 + \dots + f_n + g$ ok ✓, para alguna g ($g = f - f_1 - f_2 - \dots - f_k$)

donde:
- Cada f_j es racional con único polo en a_j
  $f_j(z) = \frac{c_{j,k_j}}{(z-a_j)^{k_j}} + \dots + \frac{c_{j,1}}{z-a_j}$
- g es holomorfa en Ω (sin polos!).

obs. • $\int_\gamma g(z)\,dz = 0$, pués g es holomorfa en Ω = simplemente conexo.

• $\int_\gamma \frac{c}{(z-a)^k}\,dz = \begin{cases} 0, & k \geq 2 \\ 2\pi i\, c\, W(\gamma, a) & \text{si } k = 1. \end{cases}$ ok.

↑ residuo.

Principio del argumento (versión W.N)

Pregunta: ¿Qué significa que una curva sea simple?

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto. $f : \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$ meromorfa

γ curva cerrada simple recorrida en sentido antihorario cuya "parte interior" A está contenida en Ω.

Supongamos que γ no pasa por ningún cero ni polo de f.

Entonces: $W(f\circ\gamma, 0) = \begin{pmatrix}\text{número de} \\ \text{ceros de } f \\ \text{en } A\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{número de} \\ \text{polos de } f \\ \text{en } A\end{pmatrix}$

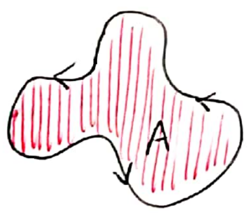
obs. los números son contados con multiplicidad.

$f(z) = (z-z_1)^{n_1} g(z)$

$\Rightarrow g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n_1}}$

$g(z) = (z-z_2)^{n_2} h(z)$

obs.



B

Teo de la curva de Jordan

$\mathbb{C} \setminus (\text{imagen de } \gamma) = A \sqcup B$

dem. Hay que verificar

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = W(f\circ\gamma, 0) \checkmark$$

$$W(f\circ\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma = f\circ\gamma} \frac{1}{w}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

$$W(f\circ\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz, \quad w = f(\overbrace{\gamma(t)}^{=z})$$

$$dw = f'(\gamma(t))\,\underbrace{\gamma'(t)\,dt}_{=dz}$$

$f(z) = (z-z_1)^{n_1}\cdots(z-z_k)^{n_k}(z-p_1)^{-m_1}\cdots(z-p_l)^{-m_l}\,g(z)$

$g(z)$ sin ceros ni polos.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{(z-z_i)} - \sum_{j=1}^{l} \frac{m_j}{(z-p_j)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

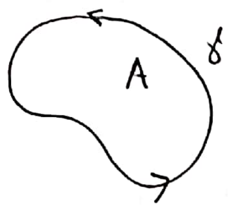
, g sin ceros ni polos.

n_i: multiplicidad de cada cero z_i

m_j: multiplicidad de cada polo p_j

Habíamos visto (corolario del P. A)

$$t \in [0,1] \longmapsto f_t \in H(\Omega)$$



supongamos que ninguna de las f_t tiene ceros en $\partial A = (\text{imagen de } \gamma)$

Entonces $Z(f_t, A) = \left(\begin{matrix}\text{nº de ceros}\\ \text{de } f_t \text{ en } A\end{matrix}\right)$ es constante (no depende de t).

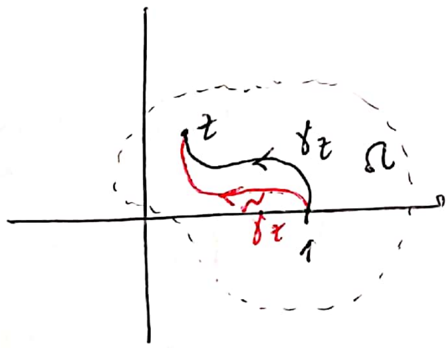
obs. Existe una generalización para cuando $f_t \in \mathcal{M}(\Omega)$, $t \in [0,1]$
$(\mathcal{M}(\Omega) = \{ \Omega \to \hat{\mathbb{C}} \text{ meromorfas} \}$.

Hasta acá

Ramas del logaritmo → pendiente (Estudiar del libro!)

Teorema. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto simplemente conexo, $0 \notin \Omega$, $1 \in \Omega$.
$\exists!\ F : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, tal que $F(1) = 0$, $\forall z \in \Omega$, $e^{F(z)} = z$.
F es llamada "rama del logaritmo".

dem.



Para cada $z \in \Omega$, sea γ_z curva con punto inicial 1 y punto final z.

Definimos: $F(z) := \displaystyle\int_{\gamma_z} \frac{dw}{w}$

Entonces $F(z)$ está bien definida.

$\tilde{\gamma}_z$ = otra elección para la curva,

$$\int_{\gamma_z} \frac{dw}{w} - \int_{\tilde{\gamma}_z} \frac{dw}{w} = \int_{\text{curva cerrada en } \Omega} \frac{dw}{w} = 0$$

Ω simplemente conexo.

$$F'(z) = \frac{1}{z} \quad \text{(cuenta conocida)}.$$

Hay que probar $\dfrac{z}{e^{F(z)}} = 1 \quad \forall z \in \Omega$.

$$\frac{d}{dz}\left(z e^{-F(z)}\right) = (1 - z \underbrace{F'(z)}_{1/z}) e^{-F(z)} \equiv 0$$

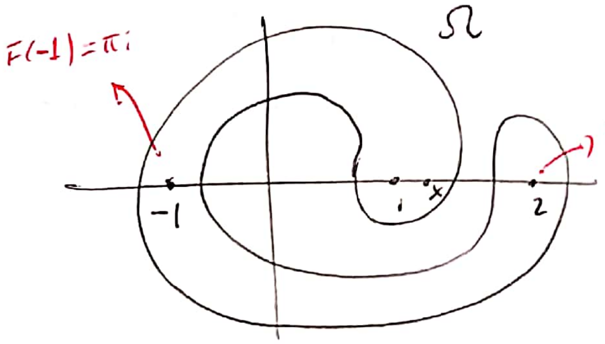
Ω conexo $\Rightarrow$ $z \mapsto z e^{-F(z)}$ es constante $(=1)$

$1 \mapsto 1$

obs. Rama de la raíz cuadrada en Ω

$$G(z) := \exp\left(\frac{1}{2} F(z)\right)$$

$$[G(z)]^2 = \left(\exp\left(\frac{1}{2} F(z)\right)\right)^2 = \exp(F(z)) = z$$



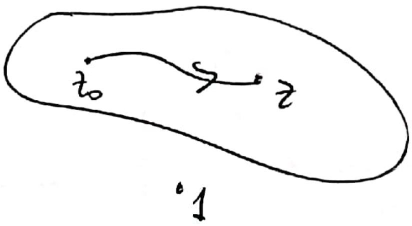
$\sqrt{x} = \exp\left(\frac{1}{2}\log x\right), \quad x>0.$

$G(2) = -\sqrt{2}$

Teorema. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto simplemente conexo. $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa sin ceros.

$\Rightarrow \exists g: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $e^{g(z)} = f(z)$

dem. $g(z) = \displaystyle\int_{\gamma_z} \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw + c_0$



Transformaciones de Möbius

<u>obs</u>. Recordamos que $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ meromorfa $\Longleftrightarrow$ $f \equiv \infty$ o $f \equiv$ función racional.

Pregunta: ¿Cuáles de estas funciones son biyecciones?

<u>def</u>. Una transformación de Möbius es una función $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ tq:

$\exists a, b, c, d \in \mathbb{C}$ $(ad - bc \neq 0)$: $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ si $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{-\frac{d}{c}, \infty\}$; $T(-\frac{d}{c}) = \infty$; $T(\infty) = \frac{a}{c}$

<u>obs</u>. $-\dfrac{d}{c}$ significa ∞ si $c = 0$.

$\dfrac{a}{c}$ significa ∞ si $c = 0$.

<u>Teorema</u>. $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ es biyección meromorfa sii $f =$ transformación de Möbius.

<u>dem</u> ($\Leftarrow$) Hay que verificar que las transformaciones de Möbius son biyecciones de $\hat{\mathbb{C}}$.

$$\frac{az+b}{cz+d} = w \to az + b = (cz+d)w \Rightarrow z = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

Considerando la transformación de Möbius

$$w \xmapsto{S} \begin{cases} \dfrac{dw-b}{-cw+a} & , w \neq \infty, \frac{a}{c} \\ \infty & , w = \frac{a}{c} \\ -\dfrac{d}{c} & , w = \infty \end{cases}$$

Se verifica que $S = T^{-1}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ biyección meromorfa, $f = \frac{P}{Q}$ donde P, Q polinomios en $\mathbb{C}$ sin factores comunes.

1er Caso. $f(\infty) = \infty$ o sea $\deg P > \deg Q$. Como f es inyectiva, no hay $\mathbb{C} \ni z$ tq $f(z) = \infty$. O sea, $Q \equiv cte$

f no tiene polos.

$\therefore f =$ polinomio.

Basta probar que los polinomios de grado > 1 no son biyecciones.

Supongamos que $\exists\, g = f^{-1}$,

$\forall c \in \mathbb{C}$, la ecuación polinomial $f(z) = c$ tiene única raíz $z = g(c)$ (contradicción con el teorema de Sard).

$\hookrightarrow f(z) - c = a\,(z - g(c))^n$ $\quad f(z) = \beta(z-\alpha)^n \quad n \geq 1.$

$a \neq 0$ $\quad f(1+\alpha) = \beta$

$f(z_n + \alpha) = \beta z_n^n = \beta$

$f(z) = a z^n - a g(c) z^{n-1} +$ términos de grado más chico $\quad (n = \deg f)$ $\quad n > 1$

$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$

Hecho. Si dos funciones polinomiales son iguales $\Rightarrow$ sus coeficientes son iguales. (no funciona en cuerpos finitos).

$n \geq 2 \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -a\, g(c) \quad \forall c \in \mathbb{C}$

g es constante $(\Rightarrow\Leftarrow)$

Conclusión: $f(\infty) = \infty \Rightarrow f =$ función afín no constante

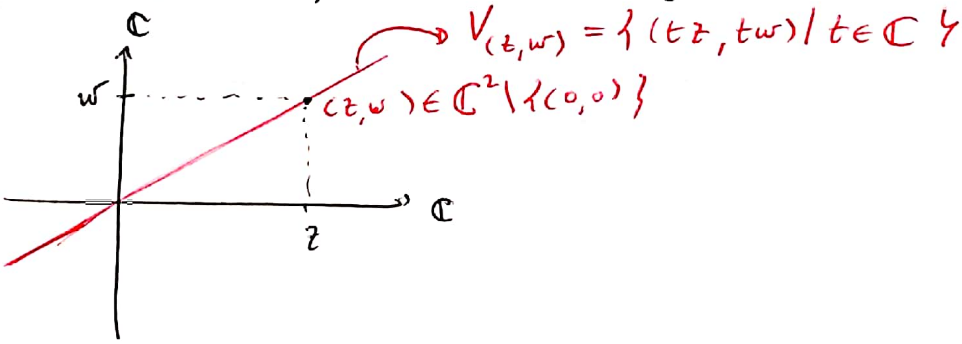
$$\therefore f(z) = \frac{az+b}{0z+1} = az+b \quad (f = \text{Möbius})$$

Otra manera de ver la esfera de Riemann es la siguiente:

$\mathbb{C}^2$ = espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión 2.

$$P(\mathbb{C}^2) = \{ V \leq \mathbb{C}^2 , \ \dim_{\mathbb{C}} V = 1 \}$$

$P(\mathbb{C}^2)$



$V = \langle (z,w) \rangle$, $(z,w) \neq 0$

Relación de equivalencia en $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$(z,w) \sim (z',w') \quad \text{ssi} \quad \langle (z,w) \rangle_{\mathbb{C}} = \langle (z',w') \rangle_{\mathbb{C}}$$
$$\Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : (z',w') = t(z,w)$$

Sea $[z:w]$ la clase de equivalencia de (z,w)

$$P(\mathbb{C}^2) = \{ [z:w] / (z,w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \} = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} / \sim$$

$w \neq 0 \ : \ [z:w] = [\frac{z}{w} : 1]$

$w = 0 \ : \ [z:0] = [1:0]$

Tenemos la biyección: $\Phi : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow P(\mathbb{C}^2)$

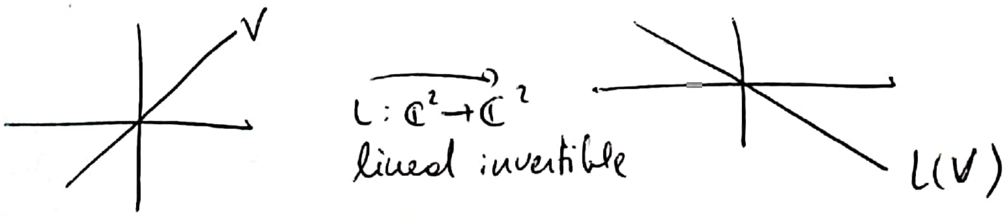
$$z \in \mathbb{C} \longmapsto [z:1]$$
$$\infty \longmapsto [1:0]$$

$\Phi^{-1} : P(\mathbb{C}^2) \to \hat{\mathbb{C}}$

$[z:w] \longmapsto \frac{z}{w}$ $\quad w \neq 0$.

$[1:0] \longmapsto \infty$

- $GL(2,\mathbb{C})$ actúa en $\mathbb{C}^2$ por transformaciones lineales invertibles.
- $GL(2,\mathbb{C})$ también actúa en $P(\mathbb{C}^2)$



$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}\ ,\quad S(z)=\frac{ez+f}{gz+h}$$

$$ST(z)=\frac{e\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+f}{g\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+h}=\frac{aez+be+cfz+df}{agz+bg+chz+dh}$$

$$=\frac{(ae+cf)z+(be+df)}{(ag+ch)z+bg+dh}$$

2° caso: $\lambda = f(\infty) \neq \infty$.

$$\begin{tikzcd} \infty \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right] & \lambda\in\mathbb{C} \arrow[r, mapsto, "{g:\ z\mapsto\frac{1}{z-\lambda},\ \lambda\mapsto\infty}", "\text{Möbius}"'] & \infty \end{tikzcd}$$

$$(ae+cf)(bg+dh)-(ag+ch)(be+df)$$
$$=\cancel{aebg}+aedh+cfbg+\underline{cfdh}-\cancel{agbe}-agdf-chbe-\underline{chdf}$$

$g\circ f$ = biyección meromorfa que lleva $\infty \mapsto \infty$

$g\circ f = h$, h afín $\longrightarrow$ $f = \underbrace{h}_{\text{afín}}\circ \underbrace{g^{-1}}_{\text{möbius}}$ = Möbius.

$$=ad(eh-gf)+cb(fg-eh)=\underbrace{(ad-cb)(eh-fg)}_{\neq 0}$$

__Corolario__. {Möbius} es un grupo con la operación de composición.

__obs__. $GL_2(\mathbb{C})=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \,\middle|\, ad-bc\neq 0\right\}$ es un grupo con multiplicación de matrices.

Si $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in GL(2,\mathbb{C})$, sea f_A la transformación de Möbius inducida:

$$\begin{cases} z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}\ , & z\neq -\dfrac{c}{d},\infty\\[2mm] z\longmapsto \dfrac{a}{c} & \\[2mm] -\dfrac{c}{d}\longmapsto \infty & \end{cases}$$

__Afirmación__. $(f_A)^{-1}=f_{A^{-1}}$

$$f_B\circ f_A = f_{BA}$$

o sea, $GL(2,\mathbb{C})\longrightarrow \widetilde{\text{Möb}}$ es homomorfismo de Grupos. $\boxed{\widetilde{\text{Möb}}=\{\text{trans. Moebius}\}}$

$$\ker\left(GL(2,\mathbb{C})\longrightarrow \widetilde{\text{Möb}}\right)=\left\{\begin{pmatrix} t & \\ & t\end{pmatrix} \,/\, t\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\right\}.$$

Scanned with CamScanner

Usando Φ^{-1}, obtenemos acción de $Gl(2,\mathbb{C})$ en $\hat{\mathbb{C}}$.

Para $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix}$

$gz = ?$

$$z \in \mathbb{C} : \quad z \longleftrightarrow [z:1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} [az+b : cz+d] = \left[\frac{az+b}{cz+d} : 1\right] \longleftrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$$

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, mapsto] & {[z:1]} \arrow[d, mapsto] \\ T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \arrow[r, leftrightarrow] & {[az+b, cz+d]} \end{tikzcd}$$

$\tilde{T} = \Phi \circ T \circ \Phi^{-1}$

$$\begin{tikzcd} \infty \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, mapsto] & {[1:0]} \\ \frac{a}{c} \arrow[r, leftrightarrow] & {[a:c]} \\ -\frac{d}{c} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, mapsto] & {[-d:c]} \\ \infty \arrow[r, leftrightarrow] & {[1:0]} \end{tikzcd}$$

$T[z:1] = [az+b, cz+d]$

$T[1:0] = [a:c]$

$T[-d:c] = [1:0]$

$T(z) = T(\lambda z), \quad \forall \lambda \neq 0$

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0,0\} &\longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ (z,w) &\longmapsto \frac{z}{w} \quad (w \neq 0) \\ (z,0) &\longmapsto \infty \end{aligned}$$

sobreyectiva.

$\{V \subseteq \mathbb{C}^2,\ \dim_{\mathbb{C}} V = 1\}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}/\sim \, = P(\mathbb{C}^2) \arrow[d, dotted, "\tilde{\pi}"] \\ & \hat{\mathbb{C}} \arrow[r] & S^2 \end{tikzcd}$$

proy. estereográfica

$\tilde{\pi}$ es biyectiva:

$z \in \hat{\mathbb{C}}\ (z \neq \infty) \Rightarrow \pi(z,1) = z$

$\Rightarrow \tilde{\pi}([z:1]) = z$

$z = \infty \Rightarrow \pi(1,0) = \infty$

$\tilde{\pi}([1:0]) = \infty$

π respeta $\sim$

$\tilde{\pi}([z:w]) = \tilde{\pi}([z':w']) \Rightarrow \pi(z,w) = \pi(z',w') \Rightarrow \frac{z}{w} = \frac{z'}{w'} \Rightarrow w = \frac{w'}{z'} z$

si

$\Rightarrow (z,w) = (z, \frac{w'}{z'} z) \Rightarrow [z:w] = [z : \frac{w'}{z'} z] = [z':w']$

$\widetilde{\text{Mob}} = \{$ grupo de las transformaciones de Möbius $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \}$.

Prop. Si T fija 3 elementos distintos de $\overline{\mathbb{C}}$, entonces $T = id$.

dem. $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = z \Rightarrow az+b = z(cz+d)$
ecuación de grado 2

Si tiene 3 soluciones, entonces debe ser trivial $\longrightarrow \begin{cases} c=0 \\ d-a=0 \\ b=0 \end{cases}$

$T(z) = z \Leftrightarrow az+b = z(cz+d) = cz^2+dz$

$\Rightarrow cz^2+(d-a)z-b=0$ tiene a lo más 2 soluciones. $T(z) = \dfrac{az+0}{0+a} = z$

Lema. Dados $z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ distintos, existe (única) transformación de Möbius T tal que:

$$T(z_2) = 1, \quad T(z_3) = 0, \quad T(z_4) = \infty.$$

dem. Si $z_2, z_3, z_4 \neq \infty$: $T(z) := \left(\dfrac{z-z_3}{z-z_4}\right) \Big/ \left(\dfrac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)$

Si $z_2 = \infty$: $T(z) := (z-z_3)/(z-z_4)$ $\rightarrow$ $z_2 = \infty \longmapsto 1$, $z_3 \longmapsto 0$, $z_4 \longmapsto \infty$

Si $z_3 = \infty$: $T(z) := \left(\dfrac{1}{z-z_4}\right) \Big/ \left(\dfrac{1}{z_2-z_4}\right)$ $\quad T(z) = \dfrac{z-z_3}{z-z_4}$

Si $z_4 = \infty$: $T(z) = (z-z_3)/(z_2-z_3)$ $\rightarrow T(z) = \dfrac{(z-z_3)}{(z_2-z_3)}$

Prop. Dados dos tripletas (z_2, z_3, z_4), (w_2, w_3, w_4) de puntos distintos en $\hat{\mathbb{C}}$, $\exists!$ $T \in \text{Mob}$ tal que:

$$T(z_j) = w_j \quad \forall j = 2, 3, 4.$$

dem. Usamos el lema anterior 2 veces

$$\begin{array}{ccccc} z_2 & \xmapsto{T_1} & 1 & \xleftarrow{T_2} & w_2 \\ z_3 & \longmapsto & 0 & \longleftarrow & w_3 \\ z_4 & \longmapsto & \infty & \longleftarrow & w_4 \end{array}$$

La transformación de Möbius buscada es $T = T_2^{-1} \circ T_1$.

Si $\tilde{T} \in \widetilde{Mob}$ es tal que $\tilde{T}(z_j) = w_j$, entonces

$$T^{-1} \circ \tilde{T}(z_j) = z_j \qquad \forall j \in \{2, 3, 4\}$$

$$\therefore \quad T^{-1} \circ \tilde{T} = id_{\hat{\mathbb{C}}}$$

o sea, $\tilde{T} = T$.

obs. $\widetilde{Mob}$ actúa fiel y transitivamente en el conjunto de tripletas de puntos distintos de $\hat{\mathbb{C}}$.

Def. $T(z_1) = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ el cross-ratio de los 4 puntos ($T \in \widetilde{Mob}$ tq $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = 0$, $T(z_4) = \infty$).

Dadas 4-tuplas de puntos distintos en $\hat{\mathbb{C}}$:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \quad y \quad (w_1, w_2, w_3, w_4)$$

¿Cuándo $\exists\, T \in \widetilde{Mob}$ tal que $T(z_j) = w_j \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$?

Respuesta: ssi $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$

dem. ($\Leftarrow$)

$$\begin{array}{ccccc} z_1 & \xmapsto{T_1} & c \neq c' & \xleftarrow{T_2} & w_1 \\ z_2 & \xmapsto{T_1} & 1 & \xleftarrow{T_2} & w_2 \\ z_3 & \longmapsto & 0 & \longleftarrow & w_3 \\ z_4 & \longmapsto & \infty & \longleftarrow & w_4 \end{array} \qquad T = T_2^{-1} \circ T_1$$

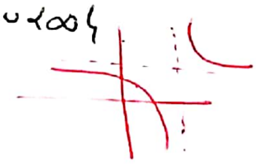
($\Rightarrow$) Mismo argumento. $T(z_1) \neq w_1$ si los cross-ratio son distintos.

Definimos $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subseteq \hat{\mathbb{C}}$.

Una transformación de Moebius T es llamado real si podemos elegir los coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Equivalentemente, $T(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$

($\Rightarrow$ trivial, $\Leftarrow$ ejercicio).

Sea $T_0 = T|_{\hat{\mathbb{R}}}$. $\quad T_0(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $\quad T_0 : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$



Prop. $T \in$ Mob real, T preserva $\mathbb{H}$ sii $ad - bc > 0$.
($\mathbb{H} = \{$ semiplano superior de $\mathbb{C}\}$).

dem. $\operatorname{Im}\left(\dfrac{ai+b}{ci+d}\right) = \operatorname{Im}\left(\dfrac{(ai+b)(-ci+d)}{c^2+d^2}\right) = \dfrac{ad-bc}{c^2+d^2} > 0 \iff T(i) \in \mathbb{H}$

$\Updownarrow$ convexidad

$T(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.

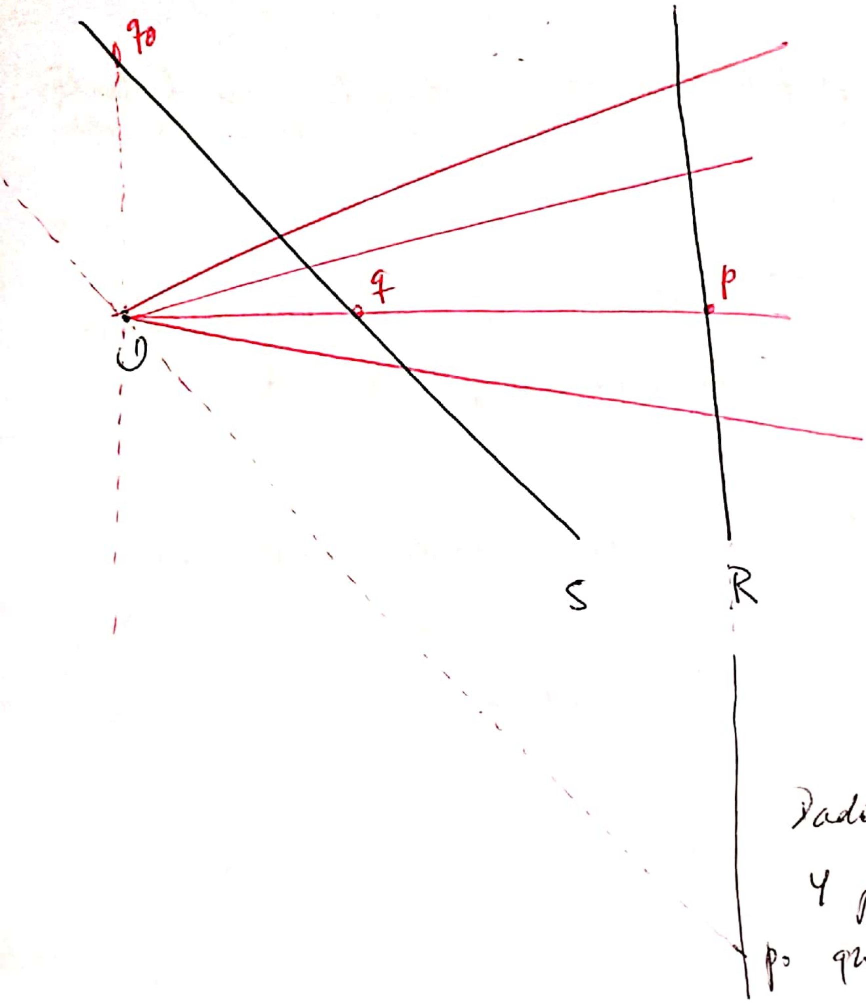
$$T(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}} \Rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R} = \underbrace{\mathbb{H} \cup (-\mathbb{H})}_{\text{componentes conexas}} \circlearrowleft T$$

Aplicación geométrica

Sean R y S dos rectas en $\mathbb{R}^2$, O un punto que no pertenece a ninguna de ellas. Sea $\hat{R} = R \cup \{\infty\}$, $\hat{S} = S \cup \{\infty\}$.

Parametrizamos cada una de las rectas de manera afín:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \qquad \text{Biyecciones} \begin{cases} \hat{R} \longleftrightarrow \hat{\mathbb{R}} \\ \hat{S} \longleftrightarrow \hat{\mathbb{R}} \end{cases} \quad \text{(coordenadas afines)}$$



Definimos una "proyección"

$$P_O : \hat{R} \longrightarrow \hat{S}$$

$$p \longmapsto q$$
$$p_0 \longmapsto \infty$$
$$\infty \longmapsto q_0$$

<u>Hecho</u>: la expresión de P_O en coordenadas afines es una transformación de Möbius real

$$T(t) = \frac{at+b}{ct+d}$$

Dados 4 ptos z_j en una recta R, y 4 ptos w_j en otra recta S ¿$\exists$ proy P_O que lleva los z_j en los w_j?

Dado un automorfismo $\mathbb{C}$ - lineal, $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, definimos una transformación de Moebius $T = T_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$

$$T_A(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & z \neq \infty, -\dfrac{d}{c} \\ \infty, & z = -\dfrac{d}{c} \\ \dfrac{a}{c}, & z = \infty. \end{cases}$$

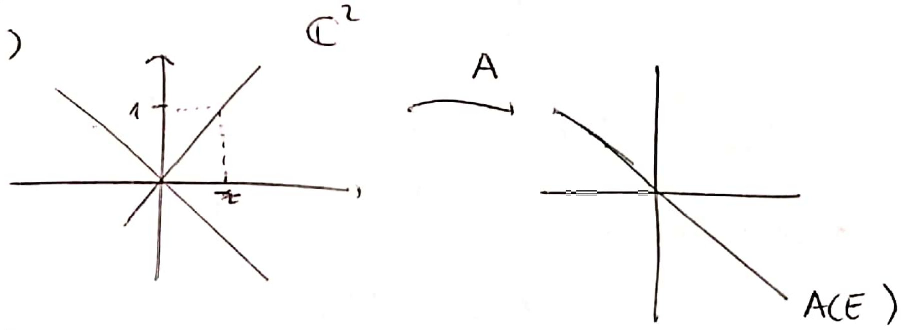
Homomorfismo de grupos:

$$(C_pL(2,\mathbb{C}), \cdot) \longrightarrow (\widetilde{\mathcal{M}ob}, \circ)$$
$$A \longmapsto T_A$$

$$\hat{\mathbb{C}} \xleftrightarrow{\text{biyección}} \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \left\{ \text{subespacios vectoriales sobre } \mathbb{C},\ E \subseteq \mathbb{C}^2,\ \dim_{\mathbb{C}} E = 1 \right\}$$

$z \in \mathbb{C} \longmapsto E = \mathbb{C}.(z, 1)$

$z \in \mathbb{C} \longmapsto E = \mathbb{C}.(1, 0)$



Clasificación de las transformaciones de Möbius.

$T = T_A$, sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ valores propios de A $\left(\mu = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$

(1) A = homotecia $= \begin{pmatrix} a & \\ & a \end{pmatrix}$. En particular, $\lambda_1 = \lambda_2$. O sea, $\mu = 1$.
$\to T_A(z) = \frac{az}{a} = z$

(2) $\mu = 1$, $A \neq$ homotecia, o sea, A no es diagonalizable. En este caso, T es llamada transformación de Möbius Parabólico.

$T(z) = \dfrac{iz+1}{2z+3} \to A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 3i - 2 = \alpha$

$T(z) = \dfrac{\frac{i}{\sqrt{\alpha}} z + 1/\sqrt{\alpha}}{\frac{2}{\sqrt{\alpha}} z + 3/\sqrt{\alpha}}$ | Sup T tiene valores propios λ_1, λ_2 $\left(\mu = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \neq 1\right)$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} = HAH^{-1} \Rightarrow \tau(z) = \mu z$, $\tau(z) = hTh^{-1}(z)$

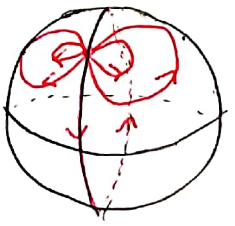
τ fija a 0 y ∞
T fija a z_1, z_2
τ fija $h(z_1), h(z_2)$
$\Rightarrow T$ tiene dos puntos fijos

φ transformación parabólica $\Rightarrow A_\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2,\mathbb{C})$ no es diagonalizable $\Rightarrow$ φ es conjugada a una traslación

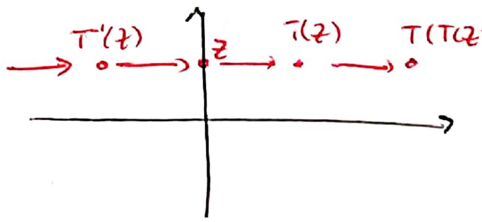
Ejemplo. $T: z \longmapsto z+1$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$

$T: \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tiene exactamente un punto fijo, en este caso ∞ es el punto fijo.

En $\hat{\mathbb{C}}$

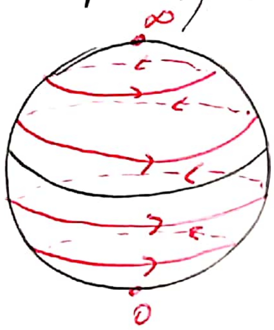


En $\mathbb{C}$

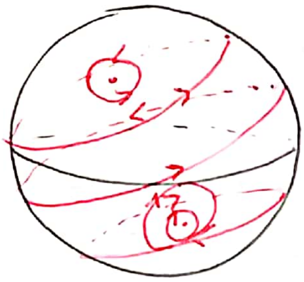


transformación con matriz diagonalizable.

(3) Si $\mu \neq 1$ pero $|\mu| = 1$, T es llamada elíptico



2 puntos fijos.



Ejemplo. $\boxed{T(z) = e^{i\theta} z}$. Puntos fijos $0, \infty$ $\Rightarrow A_T = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & 1 \end{pmatrix}$

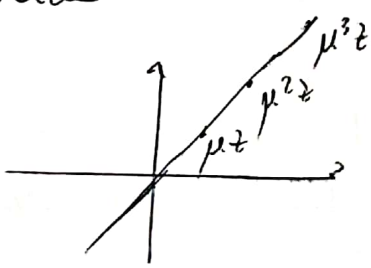
¿Cómo demostrar esto? Como A es diagonalizable, por Jordan

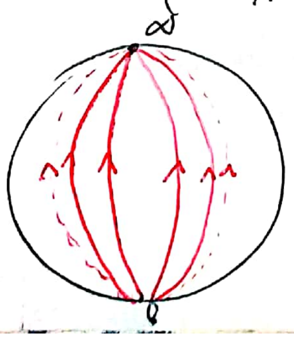
$$A = H \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} H^{-1}$$

$$\text{y} \quad T_A = T_H = T_{(\lambda_1, \lambda_2)} \circ (T_H)^{-1}$$

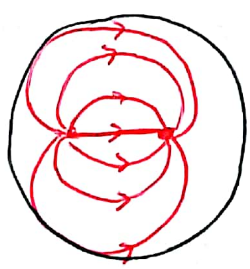
(4) Si $\mu \neq 1, -1$, pero $\mu \in \mathbb{R}$, T es llamada hiperbólica

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} \mu & \\ & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mu > 1$. $\quad T(z) = \mu z$

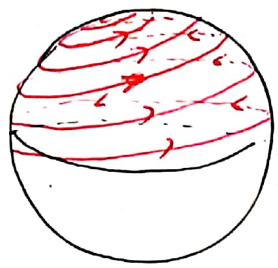




ó

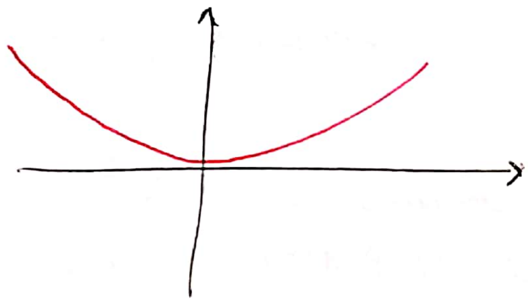


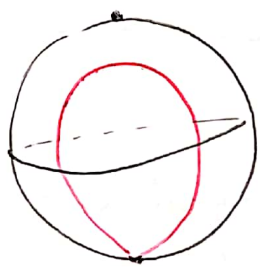
(5) $|\mu| \neq 1$, $\mu \notin \mathbb{R}$, T es llamada loxodrómica



Definición. • Una recta extendida es $R \cup \{\infty\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ donde R es una recta.

• Un círculo extendido (en $\hat{\mathbb{C}}$) es un círculo usual en $\mathbb{C}$ o una recta extendida.





Proposición. $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ transformación de Möbius, entonces si $C \subset \hat{\mathbb{C}}$ es un círculo extendido, entonces $T(C)$ es un círculo extendido.

dem 1. (Cuentas)

dem 2. Algebra lineal en $\mathbb{C}^2$.

def. Una forma hermitiana en $\mathbb{C}^2$ es una función $\varphi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ tal que

1) φ es $\mathbb{C}$-lineal en la primera variable, i.e:

$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, v_3) = \lambda_1 \varphi(v_1, v_3) + \lambda_2 \varphi(v_2, v_3)$$

$\lambda_i \in \mathbb{C}$
$v_j \in \mathbb{C}^2$

2) $\varphi(v_1, v_2) = \overline{\varphi(v_2, v_1)}$

$$\varphi(v_1, v_2 + v_3) = \overline{\varphi(v_2 + v_3, v_1)} = \overline{\varphi(v_2, v_1)} + \overline{\varphi(v_3, v_1)}$$
$$= \varphi(v_1, v_2) + \varphi(v_1, v_3)$$

En este caso, $Q(v) = \varphi(v,v)$, $\overline{Q(v)} = Q(v)$. $Q: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$.

Si $Q \geq 0$, $Q^{-1}(0) = \{(0,0)\}$, entonces $\varphi(\cdot,\cdot)$ es llamado producto interno hermitiano.

En general, $Q(z,w) = (\bar{z}, \bar{w}) \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}}_{M \text{ tal que } M^t = \bar{M}} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ con $a, c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$

<u>Teorema (Teorema Espectral, versión compleja).</u> Si $\boxed{M^t = \bar{M}}$, entonces los valores propios de M son reales. ✓

matriz hermitiana

<u>Def.</u> Q tiene signatura $+,-$ si la M tiene un valor propio positivo y otro negativo.

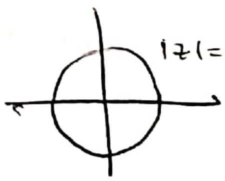
<u>Hecho.</u> Si Q tiene signatura $+,-$, entonces el conjunto $Q^{-1}(0) \subseteq \mathbb{C}^2$ puede ser identificado con un subconjunto de $P(\mathbb{C}^2) = \hat{\mathbb{C}}$ que es exactamente un círculo extendido.

<u>Ejemplo.</u> $M = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

$$Q(z,w) = (\bar{z}, \bar{w}) \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = (\bar{z}, \bar{w}) \begin{pmatrix} z \\ -w \end{pmatrix} = z\bar{z} - w\bar{w} = |z|^2 - |w|^2$$

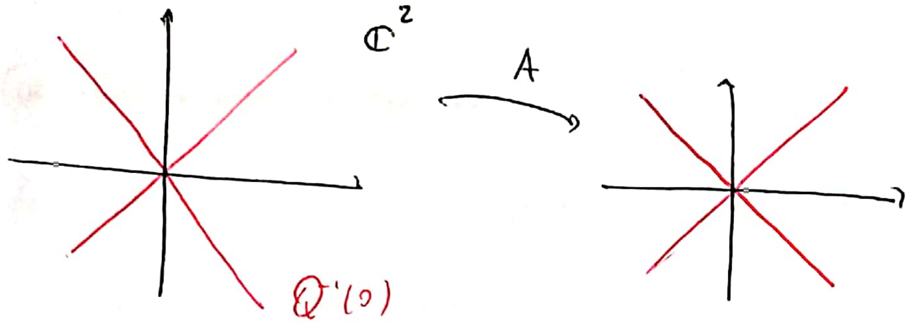
$$\hat{\mathbb{C}} \longleftrightarrow P(\mathbb{C}^2)$$
$$z \longrightarrow \mathbb{C}(z,1)$$

$$Q^{-1}(0) = \{(z,w) : |z|^2 - |w|^2 = 0\} \longrightarrow \{z \in \hat{\mathbb{C}},\ |z|^2 - 1 = 0\} = \mathbb{S}^1$$



$$M = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \Rightarrow Q(z,w) = (\bar{z}, \bar{w}) \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$
$$= (\bar{z}, \bar{w}) \begin{pmatrix} -w \\ z \end{pmatrix} = -w\bar{z} + z\bar{w}$$

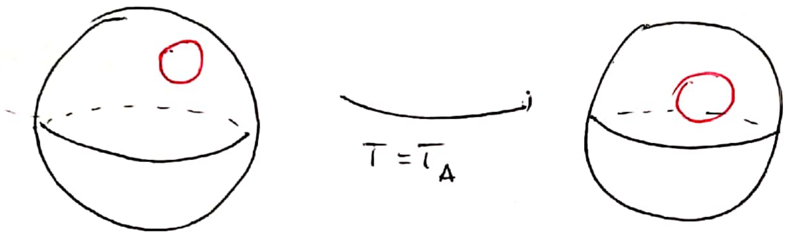
El conjunto es $\{z \in \hat{\mathbb{C}} : -\bar{z} + z = 0\}$ = eje real $\cup \{\infty\}$



$A(Q^{-1}(0)) = \tilde{Q}^{-1}(0)$

donde

$\tilde{Q}(v) = Q(A^{-1}v)$



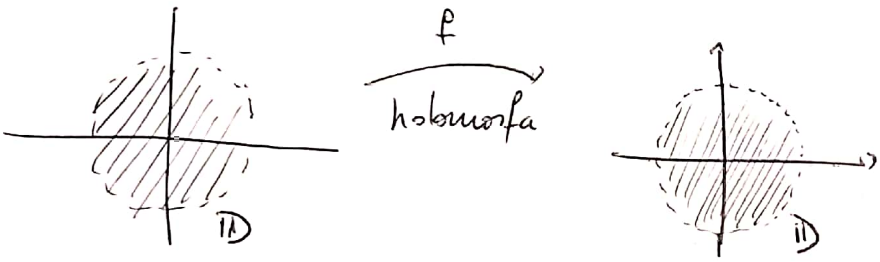
$v \in A(Q^{-1}(0))$

$A^{-1}(v) \in Q^{-1}(0)$

$Q(A^{-1}(v)) = 0$

<u>Teorema</u>. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biyección holomorfa $\Rightarrow$ T es una transformación de Möbius

$$T(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z-a}{-\bar{a}z+1}$$



ver : Lema de Schwarz.

Según Conway: $T : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ transformación de Moebius tal que $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, entonces

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{\bar{\alpha} z - 1}, \quad \text{donde } \theta \in \mathbb{R}$$

Repaso. $\widetilde{Mob} = \{$grupo de transformaciones de Moebius$\}$

Af. $\widetilde{Mob} = GL(2,\mathbb{C})/Z(GL(2,\mathbb{C}))$

dem. $\varphi : GL(2,\mathbb{C}) \to \widetilde{Mob}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto T_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$$

$$z \mapsto \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & z \neq \infty, -\dfrac{d}{c} \\ \infty, & z = -\dfrac{d}{c} \\ \dfrac{a}{c}, & z = \infty \end{cases}$$

cuando $c \neq 0$

$T \in \widetilde{Mob}$. $\exists a,b,c,d \in \mathbb{C}$ tq $ad-bc \neq 0$ y $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ $T(\infty) = \frac{a}{c}$, $T(-\frac{d}{c}) = \infty$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C})$ es tal que $\varphi(A) = T_A = T$. $\therefore \varphi$ epiyectiva

$$\varphi(AB) = \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} = T_{AB}$$

Se tiene que $\varphi(AB) = \varphi(A) \circ \varphi(B)$, ya demostrado

$\therefore \varphi$ homomorfismo de grupos.

¿$\ker \varphi$? $A \in \ker\varphi \Rightarrow \varphi(A) = T_A = id = \dfrac{z+0}{0z+1}$ $\left(A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$

$T_A(z) = id(z) \Rightarrow T_A(\infty) = \infty = id(\infty) \Rightarrow \frac{a}{c} = \infty \Rightarrow c = 0, a \neq 0$

$T_A(0) = 0 \Rightarrow T_A(0) = \frac{b}{d} = 0 \Rightarrow d \neq 0, b = 0$

$T_A(1) = 1 \Rightarrow T_A(1) = \frac{a}{d} = 1 \Rightarrow \boxed{a = d}$ $\therefore \begin{pmatrix} a & \\ & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C}^*$

$\therefore \varphi$ es un isomorfismo

obs. $GL(2,\mathbb{C})/Z(GL(2,\mathbb{C})) \stackrel{!}{\cong} SL(2,\mathbb{C})/\{\pm\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\}$, $PSL(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})/\{\pm\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\}$

Transformaciones de Moebius ...

Prop. $C \subset \overline{\mathbb{C}}$ círculo extendido (círculo usual o recta $\cup \{\infty\}$)

$T : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ transformación de Möbius $\Rightarrow$ $T(C)$ es círculo extendido.

Prop. Dados dos círculos extendidos C_1, C_2, existe $T : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ Möbius tal que $T(C_1) = C_2$.

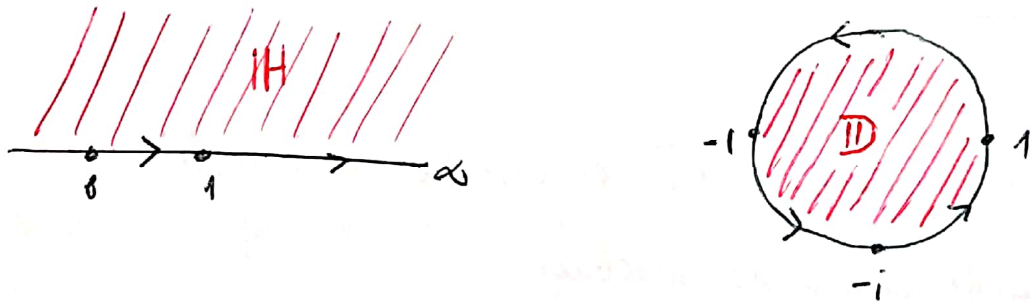
dem.

$\Rightarrow \exists T$ Moebius tal que $T(z_j) = w_j$ $\forall j \in \{1,2,3\}$.

Hecho. Dados 3 puntos, distintos en $\overline{\mathbb{C}}$, hay un único círculo extendido que los contiene.

$T(C_1)$ es círculo extendido y contiene a w_1, w_2, w_3. Por lo tanto $T(C_1) = C_2$.

Ejemplo. Encontrar transformación de Moebius que lleva $\mathbb{H} := \{z / \operatorname{Im}(z) > 0\}$ en $\mathbb{D} := \{z / |z| < 1\}$.



Busquemos T tal que

$$\begin{cases} T(0) = -1 \\ T(1) = -i \\ T(\infty) = 1 \end{cases}$$

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$T(\infty) = 1 \iff a = c$ SPG $a = c = 1$

$$T(z) = \frac{z+b}{z+d}$$

$T(0) = -1 \iff b = -d$

$$\Rightarrow T(z) = \frac{z+b}{z-b}$$

$T(1) = -i$, $\frac{1+b}{1-b} = -i \Rightarrow b = -i$

$$\boxed{\therefore \ T(z) = \frac{z-i}{z+i}}$$ → transformación de Cayley.

con inversa holomorfa

Teorema 1: $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es biyección holomorfa $\iff$ f es Moebius tal que $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

con inversa holomorfa

Teorema 2: $g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es biyección holomorfa $\iff$ g es Möbius y $g(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$

(condición no necesaria)

obs. Teorema 1 y teorema 2 son equivalentes, porque

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D} \arrow[r, "f"] & \mathbb{D} \\ \mathbb{H} \arrow[u, "T"] \arrow[r, "g"'] & \mathbb{H} \arrow[u, "T"'] \end{tikzcd} \qquad g = T^{-1} \circ f \circ T.$$

obs. Ya habíamos visto que $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ es biyección meromorfa $\iff$ f es transformación de moebius.

Lema de Schwarz.

Sea $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa, tal que $f(0)=0$. Entonces

(1) $\forall z \in \mathbb{D}, \quad |f(z)| \leq |z|$.

(2) $c := f'(0) \Rightarrow |c| \leq 1$.

Además si $|c|=1$, entonces $\forall z \in \mathbb{D}, \quad f(z) = cz$.

dem. Definimos $h: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorfa

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & , z \neq 0 \\ f'(0) & , z = 0 \end{cases}$$

Sea $\overline{\mathbb{D}_r} = \{ z \mid |z| \leq r \}$ $(r<1)$. Por el teorema del módulo máximo, el máximo de $|h|$ sobre $\overline{\mathbb{D}_r}$ es alcanzado en el borde.

$$z \in \overline{\mathbb{D}_r} \Rightarrow |h(z)| \leq \max_{w \in \partial \mathbb{D}_r} |h(w)| = \max_{w \in \partial \mathbb{D}_r} \frac{|f(w)|}{|w|} \leq \frac{1}{r}$$

$|c| = |h(0)| \leq \frac{1}{r}$ para todo $r \in (0,1)$. Por lo tanto $|c| \leq 1$.

Otra conclusión (haciendo $r \to 1$)

$$\forall z \in \mathbb{D}, \quad |h(z)| \leq 1$$

o sea: $|f(z)| \leq |z|$

Además, si $|c|=1$, entonces el máximo de $|h|$ es alcanzado en el interior, y por lo tanto, h es constante.

$$\therefore f(z) = cz.$$

Afirmación. Si f es biyección con f^{-1} holomorfa, entonces $f(z) = cz$.

dem. Aplicamos lema de Schwarz a f^{-1}.

$$f^{-1}(0) = 0 \ , \quad |(f^{-1})'(0)| \leq 1 \ \rightarrow \ \frac{1}{|f'(0)|} \leq 1$$

$$\therefore \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Schwarz a } f.}}{1 \leq} |f'(0)| \leq 1$$

$$\therefore \quad |f'(0)| = 1 \quad \Rightarrow \quad f(z) = cz .$$

dem del teorema 1. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biyección f, f^{-1} holomorfas.

Sea $a := f^{-1}(0) \in \mathbb{D}$. Definimos

$$\varphi(z) := \frac{z-a}{-\bar{a}z+1} \qquad (\text{Möbius } \det = 1 - |a|^2 > 0)$$

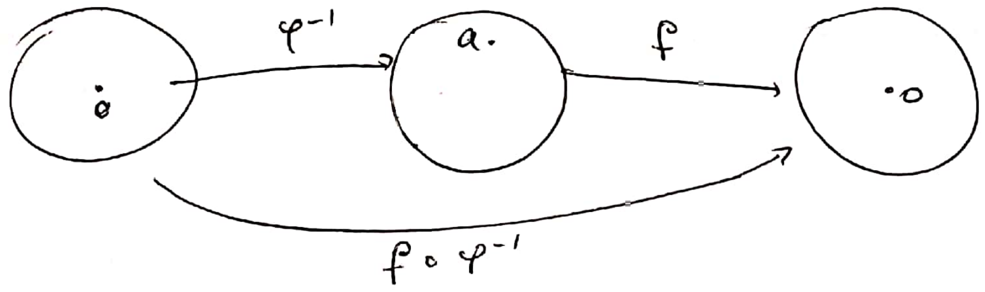
Afirmación. $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $\varphi(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$.

Si $|z| = 1$ $\quad (\bar{z} = \frac{1}{z})$

$$|a-z|^2 = (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = |z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2$$

$$|-\bar{a}z+1| = (-\bar{a}z+1)(\overline{-\bar{a}z+1}) = |a|^2|z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + 1$$

$$|z|^2 + |a|^2 \leq |a|^2|z|^2 + 1$$



$\tilde{f}(0) = 0$, $f = \tilde{f} \circ \varphi$

Schwarz + afirmación $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ lineal, en particular Möbius

obs. En el teorema 1, $f(z) = e^{i\theta} \dfrac{z-a}{-\bar{a}z+1}$ donde $\theta \in \mathbb{R}$.

En el teorema 2, $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $ad-bc>0$

$g(\partial\mathbb{H}) = \partial\mathbb{H}$.

Teorema (del mapeo de Riemann)

si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto simplemente conexo, $\Omega \neq \mathbb{C}$, entonces existe $h : \Omega \to \mathbb{D}$ biyección holomorfa con h^{-1} holomorfa.

FIN.

Problema 1. Suponga $|f(z)| \leq 1 \quad \forall |z|<1 \quad f \neq cte$ holomorfa.

$$g: \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \quad g(z) = \frac{f(z)-a}{1-\bar{a}f(z)}, \quad a = f(0).$$

Pd: $$\frac{|f(0)| - |z|}{1+|f(0)||z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|f(0)|+|z|}{1-|f(0)||z|}, \quad |z|<1$$

dem. $g: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa, $$g(0) = \frac{f(0)-a}{1-\bar{a}f(0)} = \frac{a-a}{1-\bar{a}a} = \frac{0}{1-|a|^2}$$

Sup que $a \in \mathbb{D}$, $g(0) = 0$

Lema de Schwarz: $|g(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}$ y $|g'(0)| \leq 1$

$$g'(z) = \frac{f'(z)(1-\bar{a}f(z)) - (f(z)-a)(-\bar{a}f'(z))}{(1-\bar{a}f(z))^2}$$

$$g'(0) = \frac{f'(0)(1-|a|^2)}{(1-|a|^2)^2} \Rightarrow g'(0) = \frac{f'(0)}{1-|a|^2} \Rightarrow |g'(0)| = \frac{|f'(0)|}{1-|a|^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow \boxed{|f'(0)| \leq 1-|a|^2}$$

$$|g(z)| \leq |z| \iff \frac{|f(z)-a|}{|1-\bar{a}f(z)|} \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

$$g(z)(1-\bar{a}f(z)) = f(z)-a \Rightarrow g(z)+a = f(z)+\bar{a}g(z)f(z)$$
$$= f(z)(1+\bar{a}g(z))$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{g(z)+a}{1+\bar{a}g(z)}. \quad |f(z)| \leq \frac{|g(z)|+|a|}{|1+\bar{a}g(z)|} \leq \frac{|z|+|a|}{|1+\bar{a}g(z)|}$$

$$|f(z)| \leq \frac{|z|+|a|}{|1-|a||g(z)||}. \quad |g(z)| \leq |z| \Rightarrow |a||g(z)| \leq |a||z|$$
$$\Rightarrow 0 < 1-|a||z| \leq 1-|a||g(z)|$$
$$\Rightarrow 0 < |1-|a||z|| \leq |1-|a||g(z)||$$

$$\therefore |f(z)| \leq \frac{|z|+|a|}{1-|a||z|}$$

Scanned with CamScanner

Por otro lado,

$$|f(z)| = \frac{|g(z)+a|}{|1+\bar{a}\,g(z)|} \geq \frac{\big||g(z)|-|a|\big|}{1+|a||g(z)|} \geq \frac{\big||g(z)|-|a|\big|}{1+|a||z|}$$

$$|g(z)| \leq |z| \Rightarrow |g(z)|-|a| \leq |z|-|a| \Rightarrow |a|-|z| \leq |a|-|g(z)|$$

$$|f(z)| \geq \frac{\big||a|-|g(z)|\big|}{1+|a||z|}$$

Nuevamente: $|g(z)| \leq |z| \Rightarrow |f(z)-a| \leq |z||1-\bar{a}f(z)|$

$$\Rightarrow \big||f(z)|-|a|\big| \leq |z|(1+|a|\,|f(z)|) = |z|+|a||z|\,|f(z)|$$

$$\Rightarrow -|z|-|a||z|\,|f(z)| \leq |f(z)|-|a| \leq |z|+|a||z|\,|f(z)|$$

$$-|z|-|a||z|\,|f(z)| \leq |f(z)|-|a|$$

$$\Leftrightarrow |a|-|z| \leq |f(z)|(1+|a||z|)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a|-|z|}{1+|a||z|} \leq f(z)$$

$$|f(z)|-|a| \leq |z|+|a||z|\,|f(z)| \Leftrightarrow |f(z)|(1-|a||z|) \leq |a|+|z|$$

$$\Leftrightarrow |f(z)| \leq \frac{|a|+|z|}{1-|a||z|}$$

Así, $\dfrac{|a|-|z|}{1+|a||z|} \leq |f(z)| \leq \dfrac{|a|+|z|}{1-|a||z|}$

P8| Sea $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$. $T(\hat{\mathbb{R}})=\hat{\mathbb{R}}$ ssi $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

dem. ($\Leftarrow$) Evidente.

($\Rightarrow$) $c=0$: $T(z)=\dfrac{az+b}{d}$. $T(\infty)=\infty$, $d\neq 0, a\neq 0$

$$\frac{az+b}{d}=w \Rightarrow z=\frac{dw-b}{a} \Rightarrow T(\mathbb{R})=\mathbb{R}.$$

$c\neq 0$: $T(z)=\dfrac{\frac{a}{c}z+\frac{b}{c}}{z+\frac{d}{c}}$, $T\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty$, $T(\infty)=\dfrac{a}{c}$

$$T\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty \Rightarrow -\frac{d}{c}\in\mathbb{R}. \quad T(\infty)=\frac{a}{c} \Rightarrow \frac{a}{c}\in\mathbb{R} \Rightarrow \frac{a}{c}-\frac{d}{c}\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \frac{a-d}{c}\in\mathbb{R}$$

$$T(0)=\frac{b}{d}\in\mathbb{R} \Rightarrow \frac{a}{c}-\frac{b}{d}=\frac{ad-bc}{cd}\in\mathbb{R} \;\Big|\; \frac{b}{d}, -\frac{d}{c}\in\mathbb{R} \Rightarrow \frac{b}{d}, \frac{d}{c}\in\mathbb{R} \Rightarrow \frac{b}{c}\in\mathbb{R}$$

$$\cancel{\frac{az+b}{cz+d}=z \Rightarrow cz^2+dz=az+b \Rightarrow cz^2+(d-a)z-b=0 \Rightarrow \Delta=(d-a)^2+4cb=d^2+a^2-2ad+4cb}$$

$\frac{a}{c}=k_1$, $\frac{b}{c}=k_2$, $\frac{d}{c}=k_3$

$k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}$

$$\therefore\ T(z)=\frac{k_1z+k_2}{z+k_3} \quad \blacksquare$$

P9| Para $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, encuentre condiciones necesarias y suficientes para q[ue]

$T(\Gamma)=\Gamma$, donde $\Gamma=\{z : |z|=1\}$.

dem. $z\in\Gamma \Rightarrow z\bar{z}=1$. $T(z)\in\Gamma \Leftrightarrow T(z)\overline{T(z)}=1$

$$T(z)\overline{T(z)}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\left(\frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{|a|^2|z|^2+a\bar{b}z+\bar{a}b\bar{z}+|b|^2}{|c|^2|z|^2+c\bar{d}z+\bar{c}d\bar{z}+|d|^2}=1$$

$$\Leftrightarrow |a|^2|z|^2+a\bar{b}z+\bar{a}b\bar{z}+|b|^2=|c|^2|z|^2+c\bar{d}z+\bar{c}d\bar{z}+|d|^2$$
$$(|a|^2-|c|^2)|z|^2+(a\bar{b}-c\bar{d})z+(\bar{a}b-\bar{c}d)\bar{z}+|b|^2-|d|^2=0$$

P6| Evaluar las siguientes relaciones cruzadas:

(a) $(7+i,\ 1,\ 0,\ \infty)$

(b) $(2,\ 1-i,\ 1,\ 1+i)$

(c) $(0,\ 1,\ i,\ -1)$

(d) $(i-1,\ \infty,\ 1+i,\ 0)$

dem. (a) $T(z) = (z, 1, 0, \infty) = z$, $T(7+i) = 7+i$

(b) $T(z) = (z, 1-i, 1, 1+i) = \dfrac{(z-1)}{(1-i-1)(z-(1+i))} = \dfrac{z-1}{-iz + i(1+i)}$

$= \dfrac{z-1}{-iz-1+i}$. $T(2) = \dfrac{1}{-2i-1+i} = \dfrac{1}{-1-i}$

(c) $T(z) = (z, 1, i, -1) = \dfrac{(z-i)}{(1-i)(z+1)} = \dfrac{z-1}{(1-i)z+(1-i)}$. $T(0) = \dfrac{-1}{1-i} = \dfrac{1}{i-1}$

(d) $T(z) = (z, \infty, 1+i, 0) = \dfrac{z-(1+i)}{z}$. $T(i-1) = \dfrac{i-1-(1+i)}{i-1} = \dfrac{-2}{i-1}$

P7| Sea $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Encontrar $\alpha, \beta, \gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ tq $T(z) = (z, \alpha, \beta, \gamma)$

dem. $T(\alpha) = 1 \iff \dfrac{a\alpha+b}{c\alpha+d} = 1 \Rightarrow a\alpha + b = c\alpha + d \Rightarrow \alpha(a-c) = d-b$

$T(\beta) = 0 \iff a\beta + b = 0 \iff a\beta = -b \ \wedge \ c\beta + d \neq 0$

$T(\gamma) = \infty = \dfrac{a\gamma+b}{c\gamma+d} = \infty \iff c\gamma + d = 0 \ \wedge \ a\gamma + b \neq 0$

Sup que $a \neq c$. $\alpha = \dfrac{d-b}{a-c}$ $(a = c \Rightarrow d = b \Rightarrow ad - bc = ad - da = 0 \Rightarrow \Leftarrow)$

$a = 0 \Rightarrow b = 0\ (\Rightarrow\Leftarrow)$ Como $a \neq 0 \Rightarrow \beta = -\dfrac{b}{a}$ $\wedge$ $\gamma = -\cancel{\dfrac{b}{a}} = -\dfrac{d}{c}$

Luego, $T(z) = \left(z, \dfrac{d-b}{a-c}, -\dfrac{b}{a}, -\dfrac{d}{c}\right)$

Si $(*)\left\{\begin{array}{l} |a|^2-|c|^2=1 \\ a\bar{b}-c\bar{d}=0 \\ \bar{a}b-\bar{c}d=0 \\ |b|^2-|d|^2=-1 \end{array}\right. \Rightarrow |a|^2+|b|^2=|c|^2+|d|^2$

Obs. Si $z\in\Gamma$, $z\bar{z}=1 \Rightarrow T(z)\overline{T(z)}=1$. Y si $T(z)\in\Gamma$
$T(z)\overline{T(z)}=1 \Rightarrow z\bar{z}=1$ i.e, $T^{-1}(T(z))\in\Gamma$. Luego debe cumplirse $(*)$.

$\therefore$ Condiciones: $\left\{\begin{array}{l} a\bar{b}-c\bar{d}=0 \\ |a|^2+|b|^2=|c|^2+|d|^2 \end{array}\right. \quad (**)$

$(\Leftarrow)$ Supongamos que se cumple $(**)$. ¿P.d. $T(\Gamma)=\Gamma$?

~~Sup que~~ $\cancel{c\neq 0.\ a\bar{b}-c\bar{d}=0 \Leftrightarrow a\bar{b}=c\bar{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c}\bar{b}=\bar{d} \Leftrightarrow \frac{\bar{a}}{\bar{c}}b=d}$

~~Sea~~ $\cancel{d=\lambda b \Rightarrow}$

$\cancel{\Rightarrow a\bar{b}-c\bar{d}=0 \Leftrightarrow a\bar{b}-c\bar{\lambda}\bar{b}=0 \Leftrightarrow \bar{b}(a-c\bar{\lambda})=0}$

~~Como~~ $\cancel{b\neq 0 \Rightarrow a=c\bar{\lambda}}$

$\cancel{\Rightarrow |a|^2+|b|^2=|c|^2+|d|^2 \Leftrightarrow |c|^2|\lambda|^2+|b|^2=|c|^2+|\lambda|^2|b|^2}$

$a\bar{b}-c\bar{d}=0 \Leftrightarrow a\bar{b}=c\bar{d}$

Supongamos $c=0$: $a\bar{b}=0$. Necesariamente $b=0$.

$|a|^2+|b|^2=|c|^2+|d|^2 \Rightarrow |a|^2=|d|^2$ donde $a,b\neq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{d}\right|^2=1$

$\Rightarrow \left|\frac{a}{d}\right|=1 \Rightarrow \frac{a}{d}=\lambda \Leftrightarrow a=\lambda d \mid \lambda=e^{i\theta},\ \theta\in\mathbb{R}$

$\therefore T(z)=\frac{az}{d}=\frac{\lambda d z}{d}=\lambda z=e^{i\theta}z$ ok.

Supongamos que $c\neq 0$. $d=\bar{a}\frac{b}{c}=\lambda\bar{a}\quad \left(\lambda=\frac{b}{c}\right)$

Si $b=0 \Rightarrow c\bar{d}=0$ pero $d\neq 0 \Rightarrow c=0\ (\Rightarrow\Leftarrow)$. $\bar{a}=\frac{1}{\lambda}d$

Se tiene: $|a|^2+|b|^2=\frac{1}{|\lambda|^2}|d|^2+|b|^2$. $0=a\bar{b}-c\bar{d}=a\bar{b}-c\bar{\lambda}a=a(\bar{b}-c\bar{\lambda})$

$\Rightarrow a=0$ ó $\bar{b}=c\bar{\lambda}$

Si $a=0$, se cumple ✓

Si $a\neq 0 \Rightarrow \bar{b}=c\bar{\lambda}$: $|a|^2+|b|^2=\frac{1}{|\lambda|^2}|d|^2+|\lambda|^2|c|^2=\frac{|d|^2+|\lambda|^4|c|^2}{|\lambda|^2}$

Si $a=0 \Rightarrow d=0$. Luego $|b|^2=|c|^2 \Rightarrow b=e^{i\tilde{\theta}}c \quad \tilde{\theta}\in\mathbb{R}$

$$T(z)=\frac{e^{i\tilde{\theta}}c}{cz}=e^{i\tilde{\theta}}\frac{1}{z} \quad \text{ok.}$$

Si $a\neq 0$: $|a|^2+|b|^2=\frac{1}{|\lambda|^2}\left(|d|^2+|\lambda|^4|c|^2\right)=|c|^2+|d|^2$

$\therefore \ |\lambda|=1$, o sea $\lambda=e^{i\theta}$

donde $d=\lambda\bar{a}$, $\bar{b}=c\bar{\lambda} \Rightarrow d=e^{i\theta}\bar{a}$, $b=\bar{c}e^{i\theta}$

$$T(z)=\frac{az+\bar{c}e^{i\theta}}{cz+e^{i\theta}\bar{a}}=\frac{e^{i\theta}\left(\frac{a}{e^{i\theta}}z+\bar{c}\right)}{\bar{a}e^{i\theta}\left(\frac{c}{e^{i\theta}\bar{a}}z+1\right)}$$

$$T(z)=\frac{a}{e^{i\theta}\bar{a}}\left(\frac{z+\frac{\bar{c}e^{i\theta}}{a}}{\frac{c}{e^{i\theta}\bar{a}}z+1}\right)=e^{i\varphi}\hat{\lambda}\left(\frac{z+\sigma}{\bar{\sigma}z+1}\right) \quad |\hat{\lambda}|=1$$

~~también~~ $\bar{d}=\bar{\lambda}a \Rightarrow a=\frac{\bar{d}}{\bar{\lambda}}=\lambda\bar{d}$

$$\Rightarrow T(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{\lambda\bar{d}z+\bar{c}\lambda}{cz+d}=\lambda\frac{\bar{d}z+\bar{c}}{cz+d}=e^{i\theta}\left(\frac{\bar{d}z+c}{cz+d}\right)$$

Scanned with CamScanner

Problema E. $a, b, c, d \in \hat{\mathbb{C}}$ distintos dos a dos. Escribir relación cruzada $R(a,b,c,d)$ en coordenadas homogeneas, y demuestre que para toda transformación de Moebius M tenemos

$$R(M(a), M(b), M(c), M(d)) = R(a,b,c,d) \qquad (*)$$

Inversamente, demuestre que que si $M : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ es inyectiva tq $\forall a,b,c,d \in \hat{\mathbb{C}}$ distintos dos-a-dos tenemos $(*)$, entonces M es una transformación de Moebius.

---

dem. $T(z) = R(z,b,c,d)$, $T(b) = 1$, $T(c) = 0$, $T(d) = \infty$

$$\hat{z} \in \hat{\mathbb{C}} \longleftrightarrow \begin{cases} [z:1], & z \in \mathbb{C} \\ [1:0], & z = \infty. \end{cases}$$

sup $b, c, d \neq \infty$: $T[b:1] = [1:1]$, $T[c:1] = [0:1]$

$T[d:1] = [1:0]$

$$T[z:1] = [(z-c)(b-d) : (b-c)(z-d)]$$

$$T[z:w] \underset{w \neq 0}{=} T\left[\frac{z}{w} : 1\right] = \left[\left(\frac{z}{w} - c\right)(b-d) : (b-c)\left(\frac{z}{w} - d\right)\right]$$

$$= [(z-cw)(b-d) : (b-c)(z-dw)]$$

$$T[1:0] = [(1-0)(b-d) : (b-c)(1-0)] = [(b-d) : (b-c)]$$

Para $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ transformación de Moebius, $T[z:1] = [\alpha z + \beta : \gamma z + \delta]$

$$T[z:w] \underset{w \neq 0}{=} T\left[\frac{z}{w} : 1\right] = \left[\alpha \frac{z}{w} + \beta : \gamma \frac{z}{w} + \delta\right] = [\alpha z + \beta w : \gamma z + \delta w] \quad \text{ok.}$$

Luego tenemos → relación cruzada

$$R([z:w]) = [(b-d)(z-cw) : (b-c)(z-dw)]$$

$$T[z:w] = [\alpha z+\beta w : \gamma z+\delta w]$$

$a = [a_1, a_2]$, $c = [c_1, c_2]$

$b = [b_1, b_2]$, $d = [d_1, d_2]$

Falta pulir R

$$R[z:w] = \left[\left(\frac{b_1}{b_2} - \frac{d_1}{d_2}\right)\left(z - \frac{c_1}{c_2}w\right) : \left(\frac{b_1}{b_2} - \frac{c_1}{c_2}\right)\left(z - \frac{d_1}{d_2}w\right)\right]$$

$$= \left[(b_1d_2 - b_2d_1)(c_2z - c_1w)\frac{1}{c_2b_2d_2} : (b_1c_2 - b_2c_1)(d_2z - d_1w)\frac{1}{b_2c_2d_2}\right]$$

$$= [(b_1d_2 - b_2d_1)(c_2z - c_1w) : (b_1c_2 - b_2c_1)(d_2z - d_1w)]$$

$$R(T[z:w], T[b_1:b_2], T[c_1:c_2], T[d_1:d_2])$$

$$= R(\underset{[\alpha z+\beta w : \gamma z+\delta w]}{T[z:w]}, [\alpha b_1+\beta b_2 : \gamma b_1+\delta b_2], [\alpha c_1+\beta c_2 : \gamma c_1+\delta c_2], [\alpha d_1+\beta d_2 : \gamma d_1+\delta d_2])$$

$$= [((\alpha b_1+\beta b_2)(\gamma d_1+\delta d_2) - (\gamma b_1+\delta b_2)(\alpha d_1+\beta d_2))((\gamma c_1+\delta c_2)(\alpha z+\beta w) - (\alpha c_1+\beta c_2)(\gamma z+\delta w))$$
$$: ((\alpha b_1+\beta b_2)(\gamma c_1+\delta c_2) - (\gamma b_1+\delta b_2)(\alpha c_1+\beta c_2))((\gamma d_1+\delta d_2)(\alpha z+\beta w) - (\alpha d_1+\beta d_2)(\gamma z+\delta w))]$$

$$= [(\cancel{\alpha b_1\gamma d_1} + \alpha b_1\delta d_2 + \beta b_2\gamma d_1 + \cancel{\beta d_2\delta d_2} - \cancel{\gamma b_1\alpha d_1} - \gamma b_1\beta d_2 - \delta b_2\alpha d_1 - \cancel{\delta b_2\beta d_2})$$
$$(\cancel{\gamma c_1\alpha z} + \gamma c_1\beta w + \delta c_2\alpha z + \cancel{\delta c_2\beta w} - \cancel{\alpha c_1\gamma z} - \alpha c_1\delta w - \beta c_2\gamma z - \cancel{\beta c_2\delta w}) :$$
$$(\cancel{\alpha b_1\gamma c_1} + \alpha b_1\delta c_2 + \beta b_2\gamma c_1 + \cancel{\beta b_2\delta c_2} - \cancel{\gamma b_1\alpha c_1} - \gamma b_1\beta c_2 - \delta b_2\alpha c_1 - \cancel{\delta b_2\beta c_2})$$
$$(\cancel{\gamma d_1\alpha z} + \gamma d_1\beta w + \delta d_2\alpha z + \cancel{\delta d_2\beta w} - \cancel{\alpha d_1\gamma z} - \alpha d_1\delta w - \beta d_2\gamma z - \cancel{\beta d_2\delta w})]$$

$$= [(\alpha\delta(b_1d_2 - b_2d_1) + \beta\gamma(b_2d_1 - b_1d_2))(\beta\gamma(c_1w - c_2z) + \alpha\delta(c_2z - c_1w)) :$$
$$(\alpha\delta(b_1c_2 - b_2c_1) + \beta\gamma(b_2c_1 - b_1c_2))(\beta\gamma(d_1w - d_2z) + \alpha\delta(d_2z - d_1w))]$$

$$= [(\alpha\delta - \beta\gamma)^2(b_1d_2 - b_2d_1)(c_2z - c_1w) : (\alpha\delta - \beta\gamma)(b_1c_2 - b_2c_1)(d_2z - d_1w)]$$

$$= [(b_1d_2 - b_2d_1)(c_2z - c_1w) : \cancel{(\alpha\delta - \beta\gamma)}(b_1c_2 - b_2c_1)(d_2z - d_1w)]$$

Problema 1 Demuestre que si una función en $PSL(2,\mathbb{C})$ es de orden finito, entonces es necesariamente elíptica.

dem. Supongamos que $\varphi \in PSL(2,\mathbb{C})$ ~~no es elíptica~~

$\varphi = \sigma \psi \sigma^{-1} \Rightarrow \varphi^n = \sigma \psi^n \sigma^{-1}$

$\varphi^n = id \Rightarrow \psi^n = id.$

$\psi(z) = cz$, donde $|c| = 1$

$\psi^n(z) = c^n z \Rightarrow \psi^n(z) = \psi(z) \Rightarrow c^n z = cz \ \forall z \Rightarrow c^n = c$

Como $c \neq 1$, $c^{n-1} = 1 \Rightarrow c = e^{2\pi i/n-1}$ (una opción).

Sup: $\varphi(z_1) = z_1$, ~~[illegible]~~ (tiene un sólo punto fijo. es parabólica)

$\sigma(z) = \dfrac{1}{z - z_1}$, $\sigma(z_1) = \infty$

$\Rightarrow \sigma\varphi\sigma^{-1}$ fija a ∞ solamente $\Rightarrow \sigma\varphi\sigma^{-1}(z) = az + b$

Pero $\sigma\varphi\sigma^{-1}$ no puede ser de orden finito.

$\Rightarrow$ φ tiene dos puntos fijos $\Rightarrow$ debe ser conjugada a $\psi(z) = cz$, $c \neq 0$

Como ψ y φ tienen el mismo orden, $\psi^n(z) = c^n z = cz$

$\Rightarrow c^{n-1} = 1 \Rightarrow |c|^{n-1} = 1 \overset{\forall n>1}{\Rightarrow} \boxed{|c| = 1}$

$\therefore$ φ es una transformación elíptica.

Problema 2. Demuestre que cualquier traslación $z \mapsto z+b$, $b \in \mathbb{C}$, es conjugada en $PSL(2,\mathbb{C})$ a la traslación $z \mapsto z+1$

dem. $z \mapsto z+b$, $z \mapsto z+1$ son ambas parabólicas.

$\varphi(z) = z+b$
$\psi(z) = z+1$

$\psi\varphi = \varphi\psi$ porque tienen los mismos puntos fijos.

$\varphi\psi\varphi^{-1} = \psi$

$\sigma(z) = \frac{1}{z}$, $\sigma(\infty) = 0$ | $\sigma\psi\sigma^{-1}$ fija únicamente a 0.

$\sigma\psi\sigma^{-1}(z) = \cancel{kz} = \cancel{u(z)}$
$= \frac{kz}{lm+n}$

Análogamente $\sigma\varphi\sigma^{-1}(z) = \cancel{\hat{k}z = \hat{u}(z)}$
$= \frac{\hat{k}z}{\hat{l}z + \hat{m}}$

Supongamos que $\forall \sigma \in PSL(2,\mathbb{C})$: $\sigma\varphi\sigma^{-1} \neq \psi$

¿Puntos fijos de $\sigma\varphi\sigma^{-1}$? $\sigma\varphi\sigma^{-1}$ fija a $\sigma(\infty)$

Si $\sigma(\infty) = \infty \Rightarrow \sigma(z) = az+b$, $\sigma^{-1}(z) = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}$

$\sigma\varphi\sigma^{-1}(z) = \sigma\varphi\left(\frac{1}{a}z - \frac{b}{a}\right) = \sigma\left(\frac{1}{a}z - \frac{b}{a} + \beta\right) = z - b + a\beta + b = z + a\beta$

$\sigma\varphi\sigma^{-1}(z) = \psi(z) \Rightarrow z + a\beta = z+1 \quad \forall z \Rightarrow a = 1/\beta$

Luego, $\sigma(z) = \frac{1}{\beta}z + b$, $\sigma^{-1}(z) = \beta z - \beta b$

$\sigma(\sigma^{-1}(z)) = \sigma(\beta z - \beta b) = \frac{1}{\beta}(\beta z - \beta b) + b = z - b + b = z$

$\sigma^{-1}(\sigma(z)) = \sigma^{-1}\left(\frac{1}{\beta}z + b\right) = \beta\left(\frac{1}{\beta}z + b\right) - \beta b = z + \beta b - \beta b = z$

$\sigma\varphi\sigma^{-1}(z) = \sigma\varphi(\beta z - \beta b) = \sigma(\beta z - \beta b + \beta) = \frac{1}{\beta}(\beta z - \beta b + \beta) + b$
$= z - b + 1 + b = z + 1 = \psi(z)$

$\therefore$ φ y ψ son conjugados.

Scanned with CamScanner

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE – Facultad de Matemáticas

Interrogación 1 – Variable Compleja (Magíster) – 2016

Nombre: Marco Godoy Valdebenito.

Ítem	1	2	3	Suma
Valor	3	2	1	6
Puntaje	1	1	0,5	2,5

→ $\boxed{3{,}5}$

1. Una función holomorfa definida en todo el plano $\mathbb{C}$ es llamada una función *entera*.

   ¿Verdadero o falso? Existe una función entera f tal que ...

   (a) (1 punto) $f(x) = \cos\sqrt{x}$ para todo x real positivo.

   Falta detalles? (b) (1 punto) $f(1/n) = n/(n+1)$ para todo n entero positivo.

   (c) (1 punto) $|f(1/n)| > 2|f(i/n)|$ para todo n entero positivo.

2. (2 puntos) Sea (f_k) una sucesión de funciones holomorfas en el disco unitario $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$, cuyas series de potencias son:

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k}\, z^n\,.$$

Muestre que las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(i) Toda sub-sucesión de (f_k) posee una sub-sub-sucesión que converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$ a una función holomorfa f.

(ii) Para cada $n \geqslant 0$, uno tiene que $M_n := \sup_{k\geqslant 0} |a_{n,k}|$ es finito, y además,

$$\limsup_{n\to\infty} M_n^{1/n} \leqslant 1.$$

3. (1 punto) Muestre que existe una sucesión de polinomios (p_n) que converge puntualmente a la función $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ siguiente:

$$f(z) := \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{Im(z)} > 0, \\ 0 & \text{si } \mathrm{Im(z)} = 0, \\ -1 & \text{si } \mathrm{Im(z)} < 0. \end{cases}$$

Variable Compleja
Desarrollo Prueba 1
Marco Godoy V.

P1 (b) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ conexo abierto y $f, \bar{f}$ extensiones holomorfas.

$\therefore$ tq $f(1/n) = \bar{f}(1/n) = \frac{n}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f|_A = \bar{f}|_A$, $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Como A tiene punto de acumulación 0 $\Rightarrow f = \bar{f}$ en Ω.

~~En este problema, f es la sucesión~~

Sea $f(z) = \frac{1}{1+z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

$f(1/n) = \frac{1}{1+1/n} = \frac{n}{n+1}$. $\therefore f$ es la única extensión holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ tq $f(1/n) = \frac{n}{n+1}$, pero f no tiene extensión holomorfa a $\tilde{g} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

~~$\therefore f(1/n) = \frac{n}{n+1}$ no tiene extensión entera.~~

$\therefore$ No existe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entera tal que $f(1/n) = \frac{n}{n+1}$

obs. Si $\tilde{g} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ extensión entera de f $\Rightarrow \int_{\partial B(-1,1)} \tilde{g}(z)\,dz = 0$,

pero $\int_{\partial B(-1,1)} \tilde{g}(z)\,dz = \int_{\partial B(-1,1)} f(z)\,dz \neq 0$. Esto justifica lo anterior.

$$\int_{\partial B(-1,1)} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-1+e^{i\theta}} ie^{i\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} i\,d\theta = 2\pi i$$

(c) Dada $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $|f(1/n)| > 2|f(i/n)|$

$n \to \infty \Rightarrow f(1/n) \xrightarrow{n\to\infty} f(0)$ | f continua en $\mathbb{C}$.

$f(i/n) \xrightarrow{n\to\infty} f(0)$

$\Rightarrow |f(0)| \geq 2|f(0)|$. ~~Como $f(0) =$~~

Si $f(0) = 0 \Rightarrow 0 > 0$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$ X

Si $f(0) \neq 0 \to |f(0)| \neq 0 \Rightarrow |f(0)| > 2|f(0)|$

$\Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{|f(0)|}{|f(0)|} = 1$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

$\therefore$ ~~No ex~~ No existe extensión entera $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $|f(1/n)| > 2|f(i/n)|$

(a) Supongamos que $f, \tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ enteras tales que $\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$: $f(x) = \cos\sqrt{x} = \tilde{f}(x)$. Como $\mathbb{C}$ conexo y ~~$\mathbb{R}_{>0}$~~ $\mathbb{R}_{>0}$ tiene puntos de acumulación, $f = \tilde{f}$ en $\mathbb{C}$.

Luego la extensión entera debe ser única.

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \cos\sqrt{z}$. Como $f(x) = \cos\sqrt{x}$ $\forall x > 0$, $f(z) = \cos\sqrt{z}$ es la única extensión posible.

Pero ya vimos que $z \mapsto \sqrt{z}$ no puede estar definida en todo $\mathbb{C}$. Luego la afirmación en (a) es falsa. X

P2 $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesión de holomorfas $\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{C}$,

$\forall k\in\mathbb{N}$: $f_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k}\, z^n$

$(\Rightarrow)$ $(i) \iff \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ relativamente compacto ✓

Como en un espacio métrico, compacto $\Rightarrow$ cerrado,

Por teorema de Montel : $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ cerrado y localmente acotado.

$\cancel{\forall n\in\mathbb{N}\ \{f_k^{(n)}\}_{k\in\mathbb{N}}}$ Si $f_{k_j}\xrightarrow{j\to\infty} f$ en $H(\mathbb{D})$ (convergencia en compactos de $\mathbb{D}$)

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ f_{k_j}^{(n)}\xrightarrow{j\to\infty} f^{(n)}$ en $H(\mathbb{D})$ (convergencia en compactos de $\mathbb{D}$)

Luego, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\{f_k^{(n)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ compacto, es decir, toda subsucesión de $\{f_k^{(n)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente.

Como $\{0\}\subseteq\mathbb{D}$ es compacto y $\forall n\in\mathbb{N}$, $\{f_k^{(n)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ localmente acotado, existe $R_n>0$ tal que $\forall k\in\mathbb{N}$: $|f_k^{(n)}(0)|\leq R_n$,

pero, $f_k^{(n)}(0)=a_{n,k}\,n!$

$$\therefore\ |a_{n,k}|\leq R_n/n! \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

$$\therefore\ \sup_{k\geq 0}|a_{n,k}|\leq R_n/n! < \infty$$

Así, $M_n := \sup_{k\geq 0} |a_{n,k}| < \infty$.

Pd: $\limsup_{n\to\infty} M_n^{1/n} \leq 1$

$\limsup_{n\to\infty} M_n^{1/n} \leq 1 \iff M_n^{1/n} \leq 1$ para n suficientemente grande.

$\iff M_n \leq 1$ para n suficientemente grande.

$1 \geq M_n = \sup_{k\geq 0} |a_{n,k}| \geq |a_{n,k}| \quad \forall k \geq 0$.

pero $|a_{n,k}| = \frac{|f_k^{(n)}(0)|}{n!} \quad \forall k\geq 0$

Considerando una subsucesión $f_{k_j} \xrightarrow{j\to\infty} f$ en $H(\mathbb{D})$,

$|a_{n,k_j}| = \frac{|f_{k_j}^{(n)}(0)|}{n!} \xrightarrow{j\to\infty} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} < 1$ para n suficientemente grande.

??

$\therefore \sup_{k\geq 0} |a_{n,k}| \leq 1$ para n suficientemente grande.

$\therefore \limsup_{n\to\infty} M_n^{1/n} \leq 1$.

$(\Leftarrow)$ Tenemos que demostrar que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es cerrado y localmente acotado.

Como $\forall k\in\mathbb{N}$, f_k es holomorfa, y si $f_{k_j} \xrightarrow{j\to\infty} f$ en $H(\mathbb{D})$ para alguna subsucesión $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, entonces $f\in H(\mathbb{D})$ por teorema de Weierstrass.

$\therefore \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ cerrado. ¿ $f \in \{f_k\}_k$?