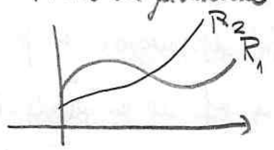
Universidad de las américas
Cálculo 2.
Proyecto clase Integrales_4
Octubre 3, 2018.

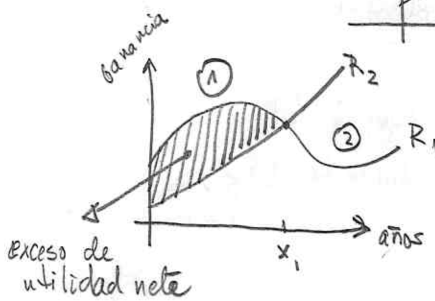
Aplicaciones a la economía.

Aplicación 1. Estudio de la utilidad neta.

Plan de inversión 1 : ritmo de ganancia $R_1(x)$ dólares en x años
Plan de inversión 2 : ritmo de ganancia $R_2(x)$ dólares en x años.

Gráficamente:



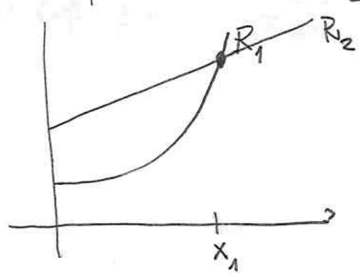


Para $x \in [0, x_1]$ más rentable plan 1 porque $R_1(x) \geq R_2(x)$
Para $x \in [x_1, \infty)$ más rentable plan 2 porque $R_2(x) \geq R_1(x)$

E : exceso de utilidad neta

$$E = \int_0^{x_1} (R_1(x) - R_2(x))\,dx$$

Ejemplo: $R_1(x) = 50 + x^2$, $R_2(x) = 200 + 5x$



En $[0, x_1]$ el plan 2 es más rentable que el plan 1.

$$R_1(x_1) = R_2(x_1) \iff 50 + x_1^2 = 200 + 5x_1$$
$$\iff x_1^2 - 5x_1 - 150 = 0$$
$$\iff (x_1 - 15)(x_1 + 10) = 0$$

Como $x_1 \geq 0$ (años), entonces $x_1 = 15$ (años)

En los primeros 15 años plan 2 es más rentable que plan 1.

$$E = \int_0^{15} (R_2(x) - R_1(x))\,dx = \int_0^{15} (200 + 5x - 50 - x^2)\,dx = \int_0^{15} (150 + 5x - x^2)\,dx = 150x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{15}$$

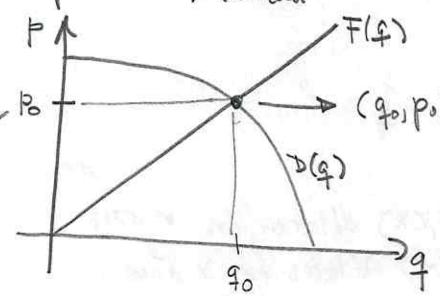
$$= 2250 + \frac{5 \cdot 225}{2} - \frac{15^3}{3}$$

Aplicación 2. Excedente de los consumidores (excedente de demanda) vs excedente de producción (excedente de oferta).

$F(q)$: curva de oferta de q unidades
$D(q)$: curva de demanda de q unidades.

El producto cuesta p dólares/unidad para q unidades

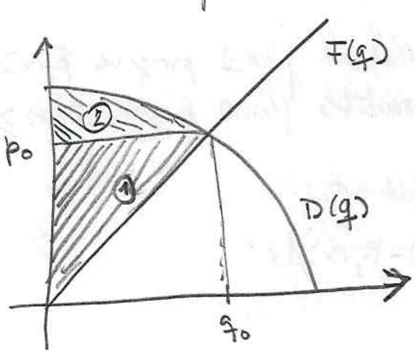
Gráficamente:



$\to$ (q_0, p_0) punto de equilibrio del mercado.
(estabilidad productor-consumidor)

"precio de equilibrio"

Observación 1. • Inicialmente los consumidores están dispuestos a pagar $\geq p_0$ por unidad de producto
• los productores están dispuestos a ofrecer el producto a precio $\leq p_0$.



① Excedente de oferta (E_1)
② Excedente de demanda. (E_2)

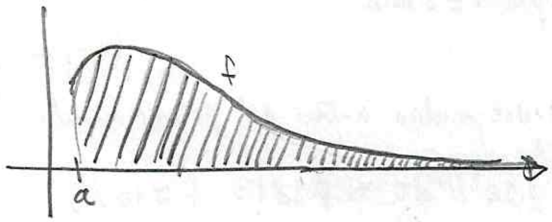
Calculamos las áreas ① y ② :
$$E_1 = \int_0^{q_0} (p_0 - F(q))\,dq \quad , \quad E_2 = \int_0^{q_0} (D(q) - p_0)\,dq$$

Integrales impropias.

f continua en $[a,\infty)$, se define

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Gráficamente:



Ejemplo. Calcular $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$.

Desarrollo $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}dx$. Calculamos $\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = -\frac{1}{b}+1$

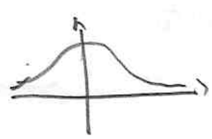
luego: $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = \lim_{b\to\infty} 1 - \lim_{b\to\infty}\frac{1}{b} = 1-0 = 1.$

Observación. Análogamente se define $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

Propiedad fundamental: Para cualquier $c\in\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$

Aplicación 3. Probabilidades.

f es una función de probabilidad si: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, $f(x)\geq 0$ $\forall x$



Para X variable aleatoria con f como función de probabilidad:

$\underbrace{P(a\leq X\leq b)}_{\text{probabilidad de que la variable aleatoria esté entre a y b.}} = \int_a^b f(x)dx$, $P(a\leq X) = \int_a^{\infty} f(x)dx$, $P(X\leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$

Ejemplo 1. $f(x) = \begin{cases} 0.006\,x(10-x) & , x \in [0,10] \\ 0 & , \text{en otro caso}. \end{cases}$

1. f es una función de probabilidad
2. $P(4 \leq X \leq 8) = 0.544$

Ejemplo.

$\boxed{\text{COMPAÑÍA}}$

Tiempo de respuesta = 5 min promedio.

$f(x)$: función de probabilidad que modela el tiempo de respuesta

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0.2e^{-t/5} & t \geq 0 \end{cases}$$

(a) $P(0 \leq T \leq 1)$ probalidad que respondan antes del primer minuto.

$$P(0 \leq T \leq 1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 0.2e^{-t/5}\,dt \approx 0.1813 \quad (\approx 18\,\%)$$

(b) $P(5 \leq T)$ probabilidad de que respondan después de 5 min (que tarden 5 min en responder)

$$P(5 \leq T) = \int_5^\infty f(t)\,dt = \int_5^\infty 0.2e^{-t/5}\,dt \approx 0.368 \quad (\approx 36\,\%)$$

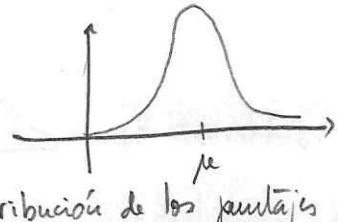
Distribución normal:

La distribución normal es $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$

σ: desviación estándar

μ: media

Gráficamente:



Aplicación. Distribución de los puntajes PSU.