Nombre del estudiante: ....

NOTA

Problemas

Problema 1. [**1.5 Puntos**] Calcule la longitud de la curva C, la cual esta determinada por la cuarta parte de circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ con $y \geq 0, y \geq 0$ y el segmento de recta que va desde el punto $A = (0, 4)$ a $B = (4, 0)$

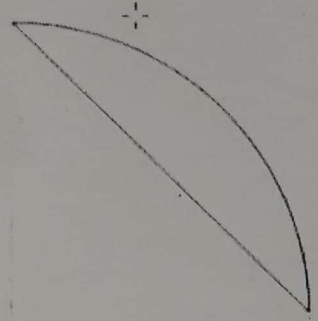
Indicación: $L(C) = \int_C 1\, ds$

$$L_C = \int 1 \, \| r'(t) \| \, dt$$

Parametrización $x^2 + y^2 = 4^2$

$$x = 4\cos(t) \qquad t\,[0, \tfrac{\pi}{2}]$$
$$y = 4\operatorname{sen}(t)$$

$$r(t) = (4\cos(t), 4\operatorname{sen}(t))$$
$$r'(t) = (-4\operatorname{sen}(t), 4\cos(t))$$



$$\| r'(t) \| = \sqrt{4^2 \operatorname{sen}^2(t) + 4^2 + \cos^2 t}$$
$$= \sqrt{16(\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t))}$$
$$= \sqrt{16} = 4$$

$$\int_0^{\pi/2} 1 \cdot 4\, dt = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

Problema 2. **[1.5 Puntos]** Considere la curva C determinada por la intersección del plano $z = 4$ y el cono elíptico $z = \sqrt{4x^2 + 3y^2}$. Aplique el teorema de Green para calcular $\oint_C F\, dS$, donde $F = (2xy, x^2 + x)$

$z = 4 \qquad z = \sqrt{4x^2+3y^2}$

$4 = \sqrt{4x^2+3y^2} \quad /(\ )^2$

$16 = 4x^2+3y^2 \quad / \cdot 1/16$

$1 = \frac{4}{16}x^2 + \frac{3y^2}{16} \quad /$

$-2 < x < 2$

$0 < y < \sqrt{\frac{16}{3} - \frac{4x^2}{3}}$

$$2\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{\frac{16}{3}-\frac{4x^2}{3}}} dy\, dx$$

$$2\int_{-2}^{2}\sqrt{\frac{16}{3}-\frac{4x^2}{3}}\, dx$$

$$4\int_{0}^{2}\frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\, dx$$

$$\frac{16}{\sqrt{3}}\int_{0}^{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\, dx$$

$x = 2\,\text{sen}\,\theta$

$dx = 1 + \cos\theta\, d\theta$

Cambiando límites

$2\,\text{sen}\,\theta = 2 \quad \theta = \frac{\pi}{2}$

$2\,\text{sen}\,\theta = 0 \quad \theta = 0$

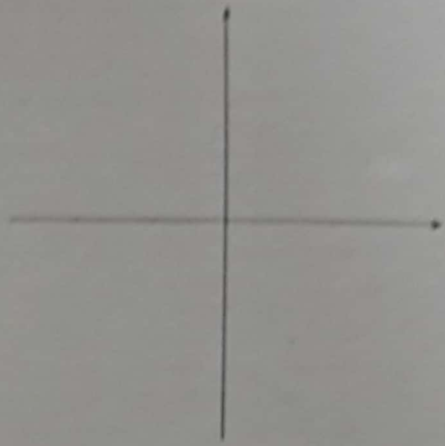
$$\int 2\cos^2\theta\, d\theta = 2\int \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \rightarrow 2\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}\,2\theta}{4}\right]$$

$$\frac{16}{\sqrt{3}}\int_{0}^{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)}\, dx = \frac{16}{\sqrt{3}}\left(2\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\text{sen}\,\pi}{4}\right]\right) = \frac{\pi}{2}\,\frac{16}{\sqrt{3}}$$

Problema 3. [1.5 Puntos] Determine el área de la superficie S dada por semi-esfera $x^2+y^2+z^2=4$ con $z \geq 0$.

Indicación: $A(S) = \iint_S 1 \hat{n}\, ds$

Proyección



$x^2+y^2+z^2=4$ $\qquad z=0$

$x^2+y^2+0=4$ $\qquad 0<r<2$

$\underbrace{x^2+y^2}_{r} = 4 \,/\sqrt{\ }$ $\qquad 0<\theta<2\pi$

$r = 2$

Parametrizar Superficie

$x^2+y^2+z^2=4 \,/\sqrt{\ }$

$z=2+x+y$

Norma

$X(x,y)=(x,y,2+x+y)$ $\qquad \| X(x) \times X(y) \| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ //

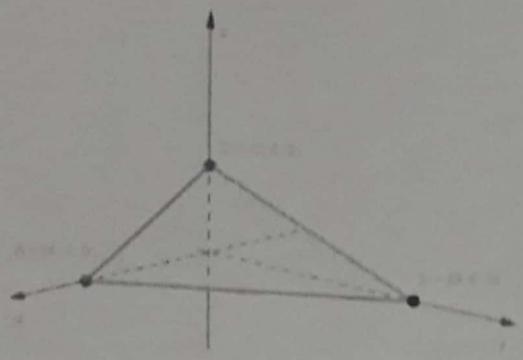
$X(x)=(1,0,1)$

$X(y)=(0,1,1)$

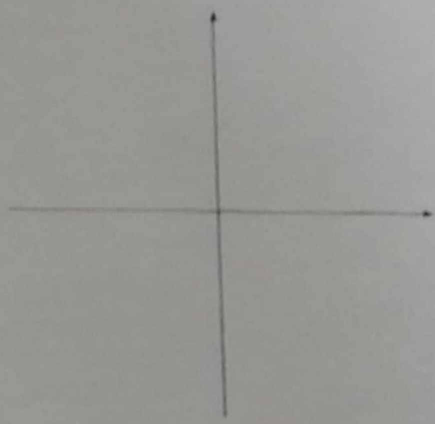
$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{3}\, r \, d\theta \, dr = \sqrt{3} \int_0^{2\pi} r\theta \Big|_0^{2\pi} = \sqrt{3} \int_0^2 r\, 2\pi \, dr$

$\sqrt{3}\left[2\pi \cdot \frac{r^2}{2}\right]\Big|_0^2 = \sqrt{3}\left[2\pi \cdot \frac{2^2}{2}\right] = 4\pi\sqrt{3}$

Problema 4. [1.5 Puntos] Dado el campo vectorial $F(x,y,z) = (2x + \operatorname{sen}(zy))\,\hat{\imath} + (xz^3 + y)\,\hat{\jmath} - 2z\,\hat{k}$, usar el teorema de Divergencia para evaluar $\iint_S F \cdot \hat{n}\, dS$, donde S es el tetraedro cuyos vértices son $A = (4,0,0)$, $B = (0,6,0)$, $C = (0,0,2)$ y $D = (0,0,0)$



PROYECCIÓN



Divergencia

$$\text{Dív} = (2x + \text{sen}(zy))\frac{\partial}{\partial x} + (xz^3+y)\frac{\partial}{\partial y} + (-2z)\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\text{Div} = (2 + 1 - 2) = 1$$

Producto mixto con 3 vectores utilizando A como Origen

$\overrightarrow{AB} = B - A \quad (0,6,0) - (4,0,0) - -4,6,0$

$\overrightarrow{AC} = C - A \quad (0,0,2) \quad (4,0,0) = -4,0,2$

$\overrightarrow{AD} = D - A \quad (0,0,0) \quad (4,0,0) = -4,0,0$

Formula Volumen Tetra

$$V = \frac{|\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}|}{6}$$