$\therefore$ Además, $\forall t \in [0,1]$; $\alpha(t) \in G$, $\beta(t) \in H$

$\Rightarrow \forall t \in [0,1] : (\alpha(t), \beta(t)) \in G \times H$

$\Rightarrow \phi(\alpha(t), \beta(t)) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \\ & \beta(t) \end{pmatrix} \in \phi(G \times H)$

$\therefore \phi(G \times H)$ es camino conexo.

7

Problema 2.

Demostrar que $O_{m,k}(\mathbb{R})$ es grupo de Lie

Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in O_{m,k}(\mathbb{R})$; $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \quad A_n T_{m+k} A_n^t = T_{m+k}$

Como la función traspuesta y la función "multiplicación de matrices" son continuas, entonces

$$A_n T_{m+k} A_n^t = T_{m+k} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(A_n T_{m+k} A_n^t \right) = \lim_{n\to\infty} T_{m+k}$$

$$\Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} T_{m+k}\right)\left(\lim_{n\to\infty} A_n^t\right) = \lim_{n\to\infty} I_{m+k}$$

$$A \, T_{m+k} \, A = \overset{T_{m+k}}{I_{m+k}}$$

¿Por que es grupo?

$\therefore A \in O_{m,k}(\mathbb{R})$

$\therefore A$ es grupo de Lie

Demostrar que $O_{m,k}(\mathbb{R})$ no es compacto

Tenemos que $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \cosh(t) & \operatorname{senh}(t) \\ \operatorname{senh}(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(t) & \operatorname{senh}(t) \\ \operatorname{senh}(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(t) & -\operatorname{senh}(t) \\ \operatorname{senh}(t) & -\cosh(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(t) & \operatorname{senh}(t) \\ \operatorname{senh}(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh^2(t) - \operatorname{senh}^2(t) & 0 \\ 0 & \operatorname{senh}^2(t) - \cosh^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \forall t \in \mathbb{R} \; ; \; \begin{pmatrix} \cosh(t) & \operatorname{senh}(t) \\ \operatorname{senh}(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \in O_{1,1}(\mathbb{R})$$

Entonces $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\left\| \begin{pmatrix} \cosh(t) & \operatorname{senh}(t) \\ \operatorname{senh}(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\cosh^2(t) + \operatorname{senh}^2(t) + \operatorname{senh}^2(t) + \cosh^2(t)}$$

$$= \sqrt{2\cosh^2(t) + 2\operatorname{senh}^2(t)} = \sqrt{2\left(\cosh^2(t) + \operatorname{senh}^2(t)\right)}$$

$$= \sqrt{2\left(\frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4} + \frac{e^{2t} + e^{-2t} - 2}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2 + e^{2t} + e^{-2t} - 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2e^{2t} + 2e^{-2t}}$$

$$= \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}} \geq t$$ para t suficientemente grande

BASTA VER QUE $\cosh(t)$ NO ES ACOTADA.

$\therefore$ $O_{1,1}(\mathbb{R})$ no es acotado

$\therefore$ $O_{1,1}(\mathbb{R})$ no es compacto, y en particular $O_{m,k}(\mathbb{R})$ no es compacto

✓ ¿Cómo se generaliza a $O_{m,k}(\mathbb{R})$?

6,0

Problema 3.

Por demostrar que : (a) X nilpotente $\Rightarrow e^X$ unipotente

(b) A unipotente $\Rightarrow \exists \log(A)$ y es nilpotente

Demostración.

(a) Si X nilpotente, $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $X^k = 0$

$$e^X - I_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} - I_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n!} + \overset{e^{0_m}}{\overset{\shortparallel}{I_m}} - I_m$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

como X es nilpotente $\Rightarrow X^n = 0$, $n \geq k$

$$\therefore e^X - I_m = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{X^n}{n!}$$

Antes de seguir, demostramos el hint.

y, z nilpotentes que conmutan, entonces $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}$,

$y^{k_1} = 0$, $z^{k_2} = 0$; Además $yz = zy$

Entonces, para $s \in \mathbb{N}$

$$(y+z)^s = \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} x^{s-j} y^j$$

para $j = k_2$: $(y+z)^s = \sum_{j=0}^{k_2-1} \binom{s}{j} x^{s-j} y^j$

para $s - j = k_1 \Rightarrow s = k_1 + j \Rightarrow s = k_1 + k_2$

$$(y+z)^{k_1+k_2} = \sum_{j=0}^{k_1+k_2} x^{k_1+k_2-j} y^j = \sum_{j=0}^{k_1+k_2} x^{k_1} x^{k_2-j} y^j$$

$$= \sum_{j=0}^{k_2-1} \overset{0}{\cancel{x^{k_1}}} x^{k_2-j} y^j + \sum_{j=k_2}^{k_1+k_2} \overset{0}{\cancel{x^{k_1}}} x^{k_2-j} \overset{0}{\cancel{y^j}}$$

$$= 0 + 0 \qquad \therefore (y+z) \text{ es nilpotente}$$

Como $e^X - I_m = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{X^n}{n!}$

FALTÓ DECIR X NILP $\Rightarrow X^n$ NILP $\forall n \in \mathbb{N}$

X es niltopente, y las potencias de X conmutan

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{k-1} \frac{X^n}{n!}$ es nilpotente y en particular, $e^X - I_m$

es nilpotente. $\therefore$ e^X es unipotente. ✓

(b) Si A es unipotente $\Longrightarrow$ $A - I_m$ es nilpotente

i.e. $\exists k \in \mathbb{N}$, $(A - I_m)^k = 0$

P.d.q. $\| A - I_m \| < 1$

$$\| A - I_m \| = \sqrt{tr\,(A - I_m)(A - I_m)^t}$$

¿Y eso para que?

$$= \sqrt{tr\,(A - I_m)(A^t - I_m)}$$

$$= \sqrt{tr\,(AA^t - A - A^t + I_m)}$$

$$= \sqrt{tr\,AA^t - 2tr\,A + m}$$

4,5

SEA $B = A - I_m$ $B^k = 0$

$$\log(A) = \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^{n+1} \frac{B^n}{n}$$

Y USAS el MISMO ARGUMENTO PARA DECIR QUE $\log(A)$ NILPOTENTE PUES B ES NILPOTENTE

Scanned with CamScanner

Algebra II
Desarrollo Prueba 3
Marco Godoy V

7

P1) V un R-modulo, R anillo.

(a) Sea $B_1 : V\times V \to V\otimes V$ dada por $B_1(v,w) := v\otimes w$, y
$B_2 : V\times V \to V\otimes V$, $B_2(v,w) = w\otimes v$.

Evidente que B_1, B_2 son R-bilineales. Por propiedad universal del producto tensorial, $\exists! \ \tilde{B}_1, \tilde{B}_2 : V\otimes V \to V\otimes V$ ~~tales que~~ R-lineales tales que:

$$\tilde{B}_1(v\otimes w) = B_1(v,w) = v\otimes w$$
$$\tilde{B}_2(v\otimes w) = B_2(v,w) = w\otimes v$$

Como $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2 \in \mathcal{L}(V\otimes V)$, podemos definir $Sym : V\otimes V \to V\otimes V$ por $Sym := \tilde{B}_1 + \tilde{B}_2$. En otras palabras,

$$\forall v,w\in V : \quad Sym(v\otimes w) = \tilde{B}_1(v\otimes w) + \tilde{B}_2(v\otimes w)$$
$$= v\otimes w + w\otimes v \quad ✓$$

Como $\mathcal{L}(V\otimes V)$ es un R-módulo, se tiene que $Sym \in \mathcal{L}(V\otimes V)$.

(b) Si $\dim_K V = 1 \Rightarrow V \cong K$. Se tiene que

$V\otimes_K V \cong K\otimes_K K \cong K$.

$$\forall v,w\in V : \quad Sym(v\otimes w) = v\otimes w + w\otimes v = vw(1\otimes 1) + wv(1\otimes 1)$$
$$= (vw + wv)(1\otimes 1)$$
$$= (vw + vw)(1\otimes 1)$$

Si $\text{car} K = 2 \Rightarrow vw + vw = 0$

$\therefore \ \forall v,w \in V : \ Sym(v\otimes w) = 0$ ✓

$\therefore \ Sym = 0$.

Si char $K \neq 2$: $Sym(v \otimes w) = 2vw(1 \otimes 1)$

Como $K = \langle 1 \rangle_K$ (generado por 1 como K módulo libre), $\{1 \otimes 1\}$ es base de $K \otimes_K K$, es decir, $1 \otimes 1 \neq 0$ en K $(K \cong K \otimes_K K)$.

Ahora dado $\zeta = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i \in V \otimes V$, basta tomar

$\xi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i$, para así,

$$Sym(\xi) = sym\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Sym(v_i \otimes w_i)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} 2(v_i w_i)(1 \otimes 1) = \sum_{i=1}^{n} (v_i w_i)(1 \otimes 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i = \zeta$$

$\therefore$ $Sym(\xi) = \xi$

$\therefore$ Sym epiyectiva.

(c) Si $V \cong \mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo, entonces $V \otimes_{\mathbb{Z}} V \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = \langle 1 \otimes 1 \rangle_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}$, donde $Sym(1 \otimes 1) = 2(1 \otimes 1)$, como $1 \otimes 1 \neq 0$, se tiene que $sym \neq 0$.

Si $\exists\, v, w \in V$ tq $Sym(v \otimes w) = 1 \otimes 1$

$\Rightarrow Sym(v \otimes w) = 2vw(1 \otimes 1) = 1 \otimes 1$

$\Rightarrow (1 \otimes 1)(2vw - 1) = 0$

$\therefore$ $2vw = 1$

$\therefore$ $2 \in \mathbb{Z}$ invertible ($\Rightarrow \Leftarrow$)

$\therefore$ Sym no es epiyectiva ∎

Scanned with CamScanner

Problema 2

Si (V, ρ) es una representación compleja de dimensión 2

$\Rightarrow V \cong \mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial

$\Rightarrow GL(V) = \{T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ / lineales e invertibles$\}$

$\cong GL_2(\mathbb{C})$

Pequeño lema: Si $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \in GL(\mathbb{C}^2)$ tal que

$T^2 = Id \Rightarrow T$ es diagonalizable.

dem. $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \in GL(\mathbb{C}^2)$. Como $\mathbb{C}$ algebraicamente cerrado, T tiene al menos un valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$. $(T(v) = \lambda v)$

Sea $\mathbb{C}^2_\lambda$ el subespacio invariante de T dado por λ.

λ valor propio $\Rightarrow 0 < \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2_\lambda \leq 2$ $(\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2_\lambda \in \{1, 2\})$

Si $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2_\lambda = 2 \Rightarrow \mathbb{C}^2_\lambda = \mathbb{C}^2$

$\therefore \forall v \in \mathbb{C}^2 : T(v) = \lambda v$

$\therefore [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{bmatrix}$ $\mathcal{B} = \{(1,0), (0,1)\}$ base canónica de $\mathbb{C}^2$

Si $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2_\lambda = 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ entonces tenemos valores propios distintos λ, ξ donde $\dim \mathbb{C}^2_\xi = 1$. Así, tenemos $\{v, w\}$ base de vectores propios de $\mathbb{C}^2$ tq $\langle v \rangle = \mathbb{C}^2_\lambda$, $\langle w \rangle = \mathbb{C}^2_\xi$

$T(v) = \lambda v$, $T(w) = \xi v$

$\therefore [T]_{\{v, w\}} = \begin{bmatrix} \lambda & \\ & \xi \end{bmatrix}$

Ahora sea $x \in G$ tq $x \neq e$ (identidad de G), $x^2 = e$

$\rho(x) \in GL(\mathbb{C}^2)$ es tal que $\rho(x)^2 = \rho(x^2) = \rho(e) = id$

$\therefore \rho(x)^2 = 1$

Como el caracter $\chi_\rho(x) = \text{traza}(\rho(x))$ no se ve afectado por cambios de base y $\rho(x)$ es diagonalizable, podemos escoger base $\mathcal{B} = \{v, w\} \subseteq \mathbb{C}^2$ tq

$$[\rho(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \xi \end{pmatrix}$$

pero $[\rho(x)]_{\mathcal{B}}^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \\ & \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda^2 = 1 \\ \xi^2 = 1 \end{cases}$

$\therefore \lambda \in \{1, -1\}$
$\xi \in \{1, -1\}$

Así, $[\rho(x)]_{\mathcal{B}} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \right\}$

$\text{traza}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = 2$

$\text{traza}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = 0$

$\text{traza}\begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = 0$

$\text{traza}\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = -2$

$\therefore \chi_\rho(x) \in \{2, 0, -2\}$ ■

Problema 3

~~7~~ $G' = \langle xyx^{-1}y^{-1} \,/\, x, y \in G \rangle$

~~En~~ Primero veamos que si (σ, V) es una representación de un grupo H (cualquiera) de dimensión 1 $\Rightarrow$ ~~...~~

$\Rightarrow \dim_K V = 1 \Rightarrow V \cong K$ (como e.v) $\Rightarrow GL(V) = K^*$

¿que?

Entonces las representaciones para G y G/G' son

$G \longrightarrow K^*$, $G/G' \longrightarrow K^*$ homomorfismos de grupos.

obs. No olvidar que K^* grupo abeliano.

Dada la proyección canónica $\pi : G \to G/G'$, $g \mapsto gG'$ queremos completar el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[dr, "\rho"'] & G/G' \\ & K^* \end{tikzcd}$$

$\rho : G \longrightarrow K^*$ homo de grupos

(ρ, K) representación de G

Para ello basta demostrar que $G' \subseteq \ker \rho$. Como

$G' = \langle xyx^{-1}y^{-1} \,/\, x, y \in G \rangle$ basta comprobarlo con los generadores

$\forall x, y \in G : xyx^{-1}y^{-1} \in G$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho(xyx^{-1}y^{-1}) &= \rho(x)\rho(y)\rho(x^{-1})\rho(y^{-1}) \in K^* \\ &= \rho(x)\rho(y)\rho(x)^{-1}\rho(y)^{-1} \\ &= \rho(x)\rho(x)^{-1}\rho(y)\rho(y)^{-1} \\ &= 1 \cdot 1 = 1 \quad ✓ \end{aligned}$$

$\therefore \rho(xyx^{-1}y^{-1}) = 1$

$\therefore \quad xyx^{-1}y^{-1} \in \ker \rho$

Así, $G' \subseteq \ker \rho$. Tenemos entonces que existe (única, porque π epiyectiva) $\bar{\rho} : G/G' \longrightarrow K^*$ homo de grupos tq $\bar{\rho} \circ \pi = \rho$,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\rho"'] & G/G' \arrow[d, dotted, "\bar{\rho}"] \\ & K^* \end{tikzcd}$$

$\therefore (\bar{\rho}, K)$ es una representación del grupo G/G'.

Por otro lado, si (λ, K) es una representación del grupo G/G'

$\Rightarrow \lambda : G/G' \longrightarrow K^*$ homo de grupos

$\Rightarrow \lambda \circ \pi : G \longrightarrow K^*$ es homo de grupos

$\therefore (\lambda \circ \pi, K)$ es una representación de G

Ahora definimos

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{c} \text{representaciones de } G \\ 1\text{-dimensional} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{representaciones de} \\ G/G' \ 1\text{-dimensional} \end{array} \right\}$$

✓ $\qquad \rho \longmapsto \bar{\rho}$

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{c} \text{representaciones de} \\ G/G' \ 1\text{-dimensional} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{representaciones de} \\ G \ 1\text{-dimensional} \end{array} \right\}$$

$$\lambda \longmapsto \lambda \circ \pi$$

Se tiene $\Phi = \Psi^{-1}$

Problema 4. 2

$\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ representación irreducible de dimensión n ($n = \dim_{\mathbb{C}} V$). G grupo finito.

(a) Sea $z \in Z(G)$,

$z \in Z(G) \iff zx = xz \quad \forall x \in G$

$\Rightarrow \quad \rho(zx) = \rho(xz) \quad \forall x \in G$

$\rho(z)\rho(x) = \rho(x)\rho(z) \quad \forall x \in G$

$\therefore \forall t \in G$, $\rho(t)$ conmuta con los elementos de $\rho(G)$

$\therefore \rho(t) \in Z(\rho(G))$ ¿por qué? ¿$\rho(G) = GL_n(\mathbb{C})$ siempre?

En particular, $\rho(z) \in Z(GL_n(\mathbb{C}))$, por lo que

$\rho(z) = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$ Como $ord(z) = k \Rightarrow z^k = 1$

$\Rightarrow \quad \rho(z)^k = \rho(z^k) = \rho(e) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$\begin{pmatrix} \lambda^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^k \end{pmatrix}$ $\quad \therefore \lambda^k = 1$

$\therefore \lambda$ raíz k-ésima de la unidad

$\therefore \chi_\rho(z) = \text{traza}\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} = n\lambda$

(b) $\forall z \in Z(G)$, $\rho(z) = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$

λ raiz k-ésima de la unidad

Si ρ es fiel $\Rightarrow$ $\rho(z^m) \neq \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $\forall z \in Z(G)$ $\forall m \in \mathbb{N}$ salvo $ord(z) | m$

$\rho(z^m) = \begin{pmatrix} \lambda^m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^m \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$?

$\rightarrow$ $\lambda^m = 1$ $\forall m$ tq $ord(z) \nmid m$

$\therefore$ λ raiz primitiva de la unidad

$\therefore$ $\rho(Z(G))$ es cíclico   no entendí

$\therefore$ $Z(G)$ cíclico.

(c) ~~G abeliano $\Rightarrow$ $Z(G) = G$~~

~~$G/\ker\rho$ es inye-~~

$\tilde{\rho} : G/\ker\rho \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ inyectiva

$G/\ker\rho$ es abeliano $\Rightarrow$ $G/\ker\rho = Z(G/\ker\rho)$

~~$\therefore$ Aplicando~~

$\therefore$ $Z(G/\ker\rho)$ cíclico.

✗

$Z(G/\ker\rho) \leq G/Z(G)$

PRUEBA 1 TOPICOS EN TEORIA DE ALGEBRAS

SEGUNDO SEMESTRE 2014

1. Sean $a, b \in F^*, F$ cuerpo de característica $\neq 2$, $A = \left(\frac{a,b}{F}\right)$.

   Pruebe que A es álgebra de división sí y sólo sí
   $$\left(\alpha^2 - \beta^2 a - \gamma^2 b + \delta^2 ab = 0, \text{ con } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in F \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0\right).$$

2. Sea $a, b \in F^*, F$ cuerpo de característica $\neq 2$. Suponga que hay elementos $x, y \in F$ tales que $ax^2 + by^2 = 1$. Pruebe que $\left(\frac{a,b}{F}\right) \simeq \left(\frac{1,-ab}{F}\right)$.

3. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $M.C.D(m, n) = 1$. Pruebe que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \{0\}$.

Teoría de Algebras
Desarrollo Prueba 1
Marco Godoy V

5.0

Problema 1

Por demostrar que $A=\left(\frac{a,b}{F}\right)$ es de división ssi

$$\left(\alpha^2-\beta^2 a-\gamma^2 b+\delta^2 ab=0\ ;\ \alpha,\beta,\gamma,\delta\in F \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=\delta=0\right)$$

Dem. Tenemos que $A=\left(\frac{a,b}{F}\right)$ es de división si y sólo si $N(x)\neq 0$, $\forall x\in A$ (N la norma de A). Dicho de manera equivalente, $N(x)=0$ ssi $x=0$.

entonces lo que se pide probar

(entonces lo que se pide probar)

1	5.5
2	2.5
3	7.0
	15.0 : 3 = 5

Sea $x=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ $(k=ij)$

$\bar{x}=\alpha-\beta i-\gamma j-\delta k$

$$N(x)=x\bar{x}=(\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k)(\alpha-\beta i-\gamma j-\delta k)$$
$$=\alpha^2-\alpha\beta i-\alpha\gamma j-\alpha\delta k+\alpha\beta i-\beta^2 i^2-\beta\gamma ij-\beta\delta ik$$
$$+\alpha\gamma j-\gamma\beta ji-\gamma^2 j^2-\gamma\delta jk+\alpha\delta k-\beta\delta ki-\delta\gamma kj$$
$$-\delta^2 k^2$$

$$=\alpha^2-\cancel{\alpha\beta i}-\alpha\gamma j-\cancel{\alpha\delta k}+\cancel{\alpha\beta i}-a\beta^2-\cancel{\beta\gamma ij}-a\beta\delta j$$
$$+\alpha\gamma j-\cancel{\gamma\beta ji}-b\gamma^2+b\gamma\delta i+\cancel{\alpha\delta k}+a\beta\delta j-b\delta\gamma i$$
$$+\gamma\beta ij \qquad +ab\delta^2$$

$$=(\alpha^2-a\beta^2-b\gamma^2+ab\delta^2)+(\cancel{-\alpha\beta}+\cancel{\alpha\beta}+\cancel{b\gamma\delta}-\cancel{b\delta\gamma})i$$
$$+(\cancel{-a\beta\delta}+\cancel{\alpha\gamma}\overset{-\alpha\gamma}{}+a\beta\delta)j+$$

$$\therefore N(x)=0 \Leftrightarrow \left\{ \alpha^2-a\beta^2-b\gamma^2+ab\delta^2=0 \right.$$

$\cancel{\alpha^2-a\beta^2-b\gamma^2+ab\delta^2=0}$

~~Pero veremos que $N(x) = 0$~~ $\Leftrightarrow x = 0$

~~$\therefore \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$~~

$\therefore \quad N(x) = 0 \iff \alpha^2 - \beta^2 a - \gamma^2 b + \delta^2 ab = 0$

~~$N(x) = 0$~~

~~A de división $\iff (\alpha^2 -$~~

Pero además, A de división ssi $\left(N(x) = 0 \iff x = 0 \right)$
$\iff \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.)$

$\therefore$ A de división ssi $\left(\alpha^2 - \beta^2 a - \gamma^2 b + \delta^2 ab = 0,\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in F \right.$
$\left. \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \right)$

Le faltó probar que

D

$\left(N(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \right) \Rightarrow$ A es de división.

dado $x \in A$, $x \neq 0$ ¿cuál es x^{-1}?

Scanned with CamScanner

Problema 3

Pd: Si $MCD(m,n)=1 \Rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \{0\}$

dem: Recordemos que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo generado por los elementos $\bar{a}\otimes\bar{b}$, donde $\bar{a}\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $\bar{b}\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Por otro lado, para todo $\bar{a}\otimes\bar{b}\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

$$\bar{a}\otimes\bar{b} = (a\bar{1})\otimes(b\bar{1}) = ab(\bar{1}\otimes\bar{1}),$$

$a,b\in\mathbb{Z}$.

$$\therefore \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \langle \bar{1}\otimes\bar{1}\rangle_{\mathbb{Z}}$$

generado como $\mathbb{Z}$-módulo.

También tenemos que:

$$m(\bar{1}\otimes\bar{1}) = \bar{m}\otimes\bar{1} = \bar{0}\otimes\bar{1} = 0$$
$$n(\bar{1}\otimes\bar{1}) = \bar{1}\otimes\bar{n} = \bar{1}\otimes\bar{n} = 0$$

así, si d es el orden del elemento $\bar{1}\otimes\bar{1}$,

$$d\mid m \;\wedge\; d\mid n$$

~~(orden visto como grupo aditivo~~
(orden visto aditivamente, o sea, $\langle 1\otimes 1\rangle_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$)

Pero $MCD(m,n)=1$

$$\therefore d = 1$$

Por lo tanto, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \{0\}$

En particular, el isomorfismo es como $\mathbb{Z}$-álgebras.

Problema 2.

Sabemos que $\left(\frac{a,b}{F}\right) \cong \left(\frac{1,-ab}{F}\right)$ ssi existe $\phi : A_+ \to A_+$ lineal biyectiva, tal que $N'(\phi(z)) = N(z)$.

Donde $A = \left(\frac{a,b}{F}\right)$, $A' = \left(\frac{1,-ab}{F}\right)$; N norma de A, N' norma de A'.

Sea $z \in A_+$: $z = \alpha i + \beta j + \gamma k$, $i^2 = a$, $j = b$, $ij = -ji = k$

$$N(z) = (\alpha i + \beta j + \gamma k)(-\alpha i - \beta j - \gamma k)$$
$$= -(\alpha i + \beta j + \gamma k)(\alpha i + \beta j + \gamma k)$$
$$= -(\alpha^2 i^2 + \alpha\beta ij + \alpha\gamma ik + \alpha\beta ji + \beta^2 j^2 + \beta\gamma jk + \alpha\gamma ki + \beta\gamma kj + \gamma^2 k^2)$$
$$= -(a\alpha^2 + \cancel{\alpha\beta ij} + \cancel{a\alpha\gamma j} + \cancel{\alpha\beta ji} + b\beta^2 - \cancel{b\beta\gamma i} - \cancel{a\alpha\gamma j} + \cancel{b\beta\gamma i} - \gamma^2 ab)$$
$$= -a\alpha^2 - b\beta^2 - \gamma^2 ab$$

¿y le hace de A?!

Ahora, $\phi(z) = \alpha\phi(i) + \beta\phi(j) + \gamma\phi(k)$. Queremos que

$N'(\phi(z)) = -a\alpha^2 - b\beta^2 - \gamma^2 ab$

Por otro lado, $\phi(i)^2 = 1$ ...

Teoría de Álgebras
Control 1
Septiembre 23, 2014
Marco Godoy V

7

Problema. Sea $A = \left(\frac{a,b}{F}\right) = Z(A) \oplus A_+$ (A_+ cuaterniones puros)

Demostrar que $\underset{x \neq 0}{x \in A_+} \Leftrightarrow x \notin Z(A) \wedge x^2 \in Z(A)$

Dem. ($\Rightarrow$) Se sabe que $Z(A) = F$. Ahora, si $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ tal que $x \neq 0$ y $x \in A_+$, entonces $x_0 = 0$ y ($x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0, \vee x_3 \neq 0$)

$\therefore x \notin Z(A)$ (también ya que $Z(A) \cap A_+ = \{0\}$)

Por otro lado:

$$x^2 = (x_1 i + x_2 j + x_3 k)^2 = (x_1 i + x_2 j + x_3 k)(x_1 i + x_2 j + x_3 k)$$

$$= x_1^2 i^2 + x_1 x_2 ij + x_1 x_3 ik + x_1 x_2 ji + x_2^2 j^2 + x_2 x_3 jk + x_1 x_3 ki + x_2 x_3 kj + x_3^2 k^2$$

$$= a x_1^2 + \cancel{x_1 x_2 ij} + \cancel{a x_1 x_3 j} - \cancel{x_1 x_2 ij} + b x_2^2 - \cancel{b x_2 x_3 i} - \cancel{a x_1 x_3 j} + \cancel{b x_2 x_3 i} - ab x_3^2$$

$$= (a x_1^2 + b x_2^2 - ab x_3^2) \in F = Z(A) \quad \therefore \quad x^2 \in Z(A)$$

—o—

($\Leftarrow$) Supongamos que $x \in A \setminus \{0\}$ tal que $x \notin Z(A) \wedge x^2 \in Z(A)$.

Por demostrar que $x \in A_+$.

Dem. Debemos demostrar que $x_0 = 0$ ($x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$)

$$x^2 = (x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)^2 = (x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)$$

$$= x_0^2 + x_0 x_1 i + x_0 x_2 j + x_0 x_3 k + x_0 x_1 i + x_1^2 i^2 + x_1 x_2 ij + x_1 x_3 ik + x_0 x_2 j + x_1 x_2 ji + x_2^2 j^2 + x_2 x_3 jk + x_0 x_3 k + x_1 x_3 ki + x_2 x_3 kj + x_3^2 k^2$$

$$= x_0^2 + a x_1^2 + \cancel{x_1 x_2 ij} + \cancel{a x_1 x_3 j} - \cancel{x_1 x_2 ij} + b x_2^2 - \cancel{b x_2 x_3 i} - \cancel{a x_1 x_3 j} + \cancel{b x_2 x_3 i} - ab x_3^2 + 2 x_0 x_1 i + 2 x_0 x_2 j + 2 x_0 x_3 k$$

$\boxed{\mathrm{char}\, F \neq 2}$

$\therefore\ x^2 = (x_0^2 + a x_1^2 + b x_2^2 - ab x_3^2) + 2x_0 x_1 i + 2x_0 x_2 j + 2x_0 x_3 k$

Como $x^2 \in Z(A) \cong F$, debe cumplirse

$$\begin{cases} 2x_0 x_1 = 0 \\ 2x_0 x_2 = 0 \\ 2x_0 x_3 = 0 \end{cases}$$

Como $x \notin Z(A) \Rightarrow x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0 \vee x_3 \neq 0$.
En cualquier caso,

bien

$$x_0 = 0$$

$\therefore\ x = x_1 i + x_2 j + x_3 k \in A_+ \quad (x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0 \vee x_3 \neq 0)$

$\therefore\ x \in A_+$

---

observación: $A = \left(\frac{a,b}{F}\right)$ álgebra de cuaterniones, $\quad a, b \in F \setminus \{0\}$

$i^2 = a,\ j^2 = b,\ k = ij = -ji,$

$ik = iij = aj$

$jk = jij = -ij^2 = -bi$

Por definición de A, $\mathrm{char}\, F \neq 2$.

$\forall x \in A$: $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$, donde $x_1, x_2, x_3 \in F$.

Nombre : Marco Godoy V

3

CONTROL 2 TOPICOS EN TEORIA DE ALGEBRAS

PRIMER SEMESTRE 2014

1. Sean R anillo con uno, I ideal de R, N un R-módulo. Se define $IN = \{\sum_{\text{finita}} y_i n_i \mid y_i \in I, n_i \in N \ \ \forall i\}$. Asuma que IN es un submódulo de N, y que $(R/I) \otimes_R N$ es un R-módulo. Pruebe que

$$(R/I) \otimes_R N \simeq N/IN \ \text{(isomorfismo de } R\text{-módulos).}$$

Desarrollo. Definamos la aplicación

$$B : R/I \times N \longrightarrow N/IN$$ ¿por qué B está bien definida?

$$(a+I, n) \longmapsto an + IN \quad ; \ a \in R, \ n \in N$$

o, por qué es una aplicación?

B es bilineal. En efecto

$$B((a+I)+(b+I), n) = B((a+b)+I, n) = (a+b)n + IN$$
$$= an + bn + IN = (an+IN) + (bn+IN)$$
$$= (an+IN) + (bn+IN)$$
$$= B(a+I, n) + B(b+I, n)$$

$$B(a+I, n+\tilde{n}) = a(n+\tilde{n}) + IN = an + a\tilde{n} + IN$$
$$= (an+IN) + (a\tilde{n}+IN) \cancel{= B(a+IN) +}$$
$$= B(a+I, n) + B(a+I, \tilde{n})$$

$$B(\lambda(a+I), n) = B(\lambda a + I, n) = (\lambda a)n + IN \quad ; \lambda \in R$$
$$= \lambda(an) + IN = \lambda(an+IN)$$
$$= \lambda B(a+I, n)$$

$$B(a+I, \lambda n) = a(\lambda n) + IN = (a\lambda)n + IN$$
$$= (\lambda a)n + IN = \lambda(an+IN)$$
$$= \lambda B(a+I, n)$$

Se supó el hecho de que R es anillo conmutativo. muy bien

$\therefore$ B bilineal

Por propiedad universal del producto tensorial,

$\exists\, h: R/I \otimes_R N \to N/IN$ tal que $\left| \begin{array}{l} h \text{ R-lineal} \end{array}\right.$

$h((a+I)\otimes n) = an + IN$

Falta demostrar que h efectivamente es isomorfismo de R-módulos.

Para ello definimos $g: N/IN \longrightarrow R/I \otimes_R N$ como

$g(n+IN) = I \otimes n$ ✗ NO $\quad I = 0 \quad g(n+IN) = (1+I)\otimes n$

$\overset{\shortparallel}{0}$

Af.1 g R-lineal.

dem. $g((n+IN)+(m+IN)) = g((n+m)+IN) = I\otimes(n+m)$

$= I\otimes n + I\otimes m = g(n+IN) + g(m+IN)$ $\quad \forall n,m\in N$

$g(\lambda(n+IN)) = g(\lambda n + IN) = I\otimes \lambda n = \lambda(I\otimes n)$

$= \lambda\, g(n+IN)$ $\quad \forall \lambda\in R$

Af.2. g es la inversa de h

dem. $(h\circ g)(a+I, n) = h(g(a+I,n)) = \cancel{g(an+I)}$ $\quad \left(\begin{array}{l} a\in R \\ n\in N\end{array}\right)$

$= h(I\otimes an)$

$= a(I\otimes n)$

$= aI\otimes n$

$= I$

CONTROL 3 TOPICOS EN TEORIA DE ALGEBRAS

SEGUNDO SEMESTRE 2014

1. Considere la sucesión exacta $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ de A- módulos. Suponga que M y P son finitamente generados. Pruebe que N es finitamente generado.

Tópicos en teoría de Álgebras
Desarrollo control 3
Marco Godoy V

Dem. Al ser $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ exacta (f, g morfismos de A-módulos) (M, N, P A-módulos), $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$, o de manera equivalente:

$$f \text{ inyectiva}, \quad g \text{ epiyectiva}.$$

Ahora:

$$f \text{ inyectiva} \Rightarrow M \cong f(M) = \mathrm{Im}(f) \subseteq N$$

$$g \text{ epiyectiva} \Rightarrow N/\ker(g) \cong P$$

Como P es finitamente generado $\Rightarrow N/\ker(g)$ es finitamente generado, es decir

$$N/\ker(g) = \langle n_1 + \ker(g), n_2 + \ker(g), \dots, n_s + \ker(g) \rangle,$$
$$n_1, \dots, n_s \in N$$

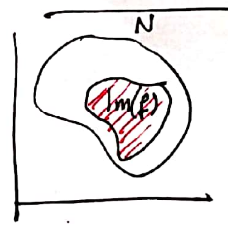
M finitamente generado $\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \ker(g)$ finitamente generado, es decir:

$$\ker(g) = \langle m_1, \dots, m_k \rangle \; ; \quad m_1, \dots, m_k \in \ker(g) \subset N$$

Afirmamos que $N = \langle n_1, \dots, n_s, m_1, \dots, m_k \rangle$

En efecto, sea $\bar{n} \in N$,

Si $\bar{n} \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \bar{n} = \sum_{j=1}^{k} m_j a_j \quad a_j \in A$.



Si $\bar{n} \notin \mathrm{Im}(f) \Rightarrow g(\bar{n}) \neq 0$ (en P)

$$\Rightarrow g(\bar{n}) = \sum_{j=1}^{s} n_j + \ker(g) = \left(\sum_{j=1}^{s} n_j\right) + \ker(g)$$

$\therefore \bar{n} = \sum_{j=1}^{s} n_j$ $\times$ no entendí

$\therefore N = \langle n_1, \dots, n, m_1, \dots, m_k \rangle$ ✓

eso es verdad pero no entendí
el argumento

si $\bar{n} \notin \ker(f)$

$\bar{n} = \sum_{j=1}^{s} n_j a_j + \sum_{r=1}^{k} m_r a_r$

Existencia y unicidad del producto Tensorial

Definición del producto tensorial de módulos..

Definición: Sea R anillo conmutativo y M, N dos R-módulos. Un producto tensorial de M y N es un R-módulo que denotaremos por ~~$M \otimes_R N$~~ (P,φ) P R-módulo ~~junto con una~~ aplicación bilineal $\varphi : M \times N \to M \otimes_R N$ denotada por $(m,n) \mapsto \cancel{m \otimes n}\ \varphi(m,n)$ tal que

(i) $M \otimes_R N$ está generado como R-módulo por $\{\cancel{x \otimes y}\ \varphi(x,y) \mid x \in M, y \in N\} = \varphi(M \times N)$

(ii) (Propiedad universal). Sean ~~R~~ T un R-módulo, $\psi : M \times N \to \cancel{P}\ T$ aplicación bilineal, entonces existe una única aplicación lineal

$$f : \cancel{M \otimes_R N}\ P \to \cancel{P}\ T \ ; \quad f \circ \varphi = \psi$$

luego $f(\cancel{x \otimes y}\ \varphi(x,y)) = \psi(x,y)$ $\quad \forall (x,y) \in M \times N$

Ver el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \cancel{M \otimes_R N}\ P \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
 & \cancel{R}\ T
\end{tikzcd}$$

Teorema. El producto tensorial de dos R-módulos M y N existe y es único, salvo isomorfismo.

Dem. Primero demostraremos la existencia.

Consideremos

$$R^{(M \times N)} = \left\{ \sum_{\substack{(x_j, y_j) \in M \times N \\ \text{finita}}} \alpha_j (x_j, y_j) \;\middle|\; \alpha_j \in R \right\}$$

$R^{(M \times N)}$ es un R-módulo libre, de base $M \times N$.

Sumas formales

Modulo libre = Módulo con conjunto de generadores donde cada elemento se escribe de manera única.

~~Sea S submódulo de $R^{(M\times N)}$ generado~~

obs 1 El R-módulo $R^{(M\times N)}$ cumple propiedad universal

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, hook] \arrow[dr, "g"'] & R^{(M\times N)} \arrow[d, dashed, "h"] \\ & P \end{tikzcd}$$

Sea P R-módulo.
$\forall g: M\times N \to P$ función existe única $h: R^{(M\times N)} \longrightarrow P$ homo de módulos tal que $h\circ i = g$ $(*)$

Sea S submódulo de $R^{(M\times N)}$ generado por los elementos de la forma:

$$(x+x',y)-(x,y)-(x',y)$$
$$(x,y+y')-(x,y)-(x,y')$$
$$\alpha(x,y)-(\alpha x,y)$$
$$\alpha(x,y)-(x,\alpha y)$$

$\forall x,x'\in M$, $\forall y,y'\in N$, $\forall \alpha\in R$

• Explicar $(\star)$.

~~Definimos~~ Consideremos P el R-módulo (cociente) ~~$M\otimes_R N := R^{(M\times N)}/S$~~ $R^{(M\times N)}/S = P$

obs 2: Al definir ~~$M\otimes_R N$~~ hay μ relación de equivalencia en $R^{(M\times N)}$ tal que: $a\mu b \Leftrightarrow a-b\in S$.

Veamos que

$$M\times N \xhookrightarrow{i} R^{(M\times N)} \xrightarrow{p} R^{(M\times N)}/S = P$$

p: proyección canónica (epi)
i: inclusión

Definimos: $\varphi: M\times N \to$ ~~$M\otimes_R N$~~ ~~$R^{(M\times N)}/S$~~ $= P$
$$\varphi = p\circ i$$

$\forall$ sea $\varphi(x,y) = (x,y) + S$

~~def $\mathcal{I}: (x,y) + S = x \otimes y$~~

<u>Afirmación</u>: φ es bilineal

<u>dem</u>: Sean $x, x' \in M$, $y, y' \in N$, $\alpha \in R$,

$$\begin{aligned}
\varphi(x+x', y) &= (x+x', y) + S \\
&= \big((x,y) + (x',y)\big) + S \\
&= \big((x,y) + S\big) + \big((x',y) + S\big) \\
&= \varphi(x,y) + \varphi(x',y)
\end{aligned}$$

(ya que (*)
$(x+x',y) - (x,y) - (x',y) \in S$
$(x+x',y) - (x,y) - (x',y)$
$= (x+x',y) - \big((x,y) + (x',y)\big)$

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y+y') &= (x, y+y') + S \\
&= \big((x,y) + (x,y')\big) + S \\
&= \big((x,y) + S\big) + \big((x,y') + S\big) \\
&= \varphi(x,y) + \varphi(x,y')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha x, y) &= (\alpha x, y) + S \\
&= \alpha(x,y) + S \\
&= (x, \alpha y) + S \\
&= \alpha\big((x,y) + S\big)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \varphi(\alpha x, y) = \varphi(x, \alpha y) = \alpha\, \varphi(x,y)$$

Así, φ es bilineal.

Obs: $\cancel{M \otimes_R N}$ $R^{(M\times N)}/S$ está generado como R-módulo por $\{ \cancel{x \otimes y} \ \varphi(x,y) \mid x \in M, y \in N \}$

donde $\cancel{x \otimes y} = \varphi(x,y) = (x,y) + S$

Pd: Propiedad universal

Dado P un R-módulo, $\psi : M \times N \to P$ bilineal

Aplicamos propiedad universal (*)

$$\exists!\, h : R^{(M\times N)} \longrightarrow P \quad \text{tal que} \quad h \circ i = \psi$$

i.e. $\quad h(x,y) = \psi(x,y)$

Mejor explicar del modo siguiente:

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[ddr, "\psi"'] & R^{(M\times N)} \arrow[d, "p"] \\
& R^{(M\times N)}/S \arrow[d, dashed, "h"] \\
& T
\end{tikzcd}$$

Por otro lado:

$$\begin{tikzcd}
R^{(M\times N)} \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "h"'] & R^{(M\times N)}/S \arrow[d, dashed, "f"] \\
& P
\end{tikzcd}
\iff
\left\{ \begin{array}{l}
\text{Dado } (x,y)+S = (x',y')+S \\
\Rightarrow h(x,y) = h(x',y') \\
\hline
\text{o sea } h \text{ preserva } \mu, \text{ i.e.} \\
(x,y)\,\mu\,(x',y') \Rightarrow h(x,y) = h(x',y')
\end{array} \right\}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l}
\ker(p) \subset \ker(h) \\
\hline
\text{ya que } h, \pi \text{ son homo de } R\text{-módulos}
\end{array} \right\}$$

(por proposición 1.1.2) (En particular funciona para R-módulos) (La unicidad viene garantizada ya que p es epi!)

Pd: $\ker(p) \subset \ker(h)$ i.e., $S \subset \ker(h)$

dem. Basta trabajar en los generadores de S

$$\begin{aligned}
&h\big((x,y+y') - (x,y) - (x,y')\big) = \\
&= h(x,y+y') - h(x,y) - h(x,y') \\
&= \psi(x,y+y') - \psi(x,y) - \psi(x,y') \\
&= 0 \quad (\text{ya que } \psi \text{ es bilineal})
\end{aligned}$$

Similarmente se procede con los otros generadores:

$$h\big((x,y+y')-(x,y)-(x,y')\big) = h(x,y+y') - h(x,y) - h(x,y')$$
$$= \varphi(x,y+y') - \varphi(x,y) - \varphi(x,y')$$
$$= 0$$

$$h\big(\alpha(x,y)-(\alpha x,y)\big) = \alpha h(x,y) - h(\alpha x,y)$$
$$= \alpha\varphi(x,y) - \varphi(\alpha x,y)$$
$$= 0$$

$$h\big(\alpha(x,y)-(x,\alpha y)\big) = \alpha h(x,y) - h(x,\alpha y)$$
$$= \alpha\varphi(x,y) - \varphi(x,\alpha y)$$
$$= 0$$

Por demostrar que $f\circ\varphi = \psi$

dem. Como $h\circ i = \psi$, $f\circ p = h$

$$\Rightarrow f\circ\varphi = f\circ(p\circ i) = (f\circ p)\circ i = h\circ i = \psi$$

~~Por lo tanto, el producto tensorial (P,φ) es tal que $P = R^{(M\times N)}/S$~~

Ahora debemos demostrar del producto tensorial.

Unicidad: Sea (T,φ') otro producto tensorial para M y N

Por demostrar: $T \cong R^{(M\times N)}/S$ (como R-módulos)

Como (T,φ') es producto tensorial de M y N y φ bilineal

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[dr, "\varphi"'] & T \arrow[d, dotted, "g"] \\ & P \end{tikzcd}$$

$g: T \to P$ lineal tal que
$$g\circ\varphi' = \varphi$$

(P,φ) producto tensorial también.

Ahora debemos de demostrar la unicidad del p.t

__Unicidad__. Sean (P,φ), (P',φ') productos tensoriales de M y N.

Primero, como (P,φ') es p.t y φ bilineal

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[dr, "\varphi"'] & P' \arrow[d, dashed, "g'"] \\ & P \end{tikzcd}$$

$\exists!\, g': P' \longrightarrow P$ lineal tq: $g'\circ\varphi' = \varphi$.

Análogamente, como (P,φ) es p.t y φ' es bilineal

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & P \arrow[d, dashed, "g"] \\ & P' \end{tikzcd}$$

$\exists!\; g: P \longrightarrow P'$ lineal tal que $g\circ\varphi = \varphi'$

Afirmación: $g' = g^{-1}$

Pdm.

Pd: $g\circ g' = id_{P'}$, $g'\circ g = id_P$

En efecto, como $g'\circ\varphi' = \varphi$

$$\varphi' = g\circ\varphi = g\circ(g'\circ\varphi') = (g\circ g')\circ\varphi'$$

$$\therefore\; g\circ g' = id_{P'}$$

$$\varphi = g'\circ\varphi' = g'\circ(g\circ\varphi) = (g'\circ g)\circ\varphi \quad \therefore\; g'\circ g = id_P$$

■

Def. Dados M y N R-módulos, y (P, φ) ~~su~~ producto tensorial:

$$P := M \otimes_R N$$

$$\varphi : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N \ , \quad \varphi(x,y) := x \otimes y \ .$$

Obs. ~~tomo~~ Anotar lo que sale en pág 26 ! ☺.

$\mathbb{R}$-álgebras asociativas con unidad

$\Updownarrow$

A - Módulos (por la izquierda).

Ejercicio 2.11. $(M \oplus N)_\phi = M_\phi \oplus N_\phi$

$\phi : A \to B$ homo de álgebras

~~M, A-módulo~~ M, N B-módulos

~~Sea $x \in (M \oplus N)_\phi$~~

$(M \oplus N)_\phi \supseteq M_\phi$

Sea $x \in M_\phi \Rightarrow x = x + 0$, $0 \in N$

$x \in M_\phi \Rightarrow x \in M \Rightarrow \underset{M}{x} = x + \underset{N}{0}$

$\therefore M \subseteq M \oplus N$

$\therefore M_\phi \subseteq (M + N)_\phi$

$M_\phi + N_\phi \subseteq (M \oplus N)_\phi$

Sea $x \in (M \oplus N)_\phi \Rightarrow x \in M \oplus N$

- $\phi \in Hom_B(M, N) \Rightarrow \phi \in Hom_A(M_\phi, N_\phi)$

dem. $\varphi \in Hom_B(M, N) \Rightarrow \phi : M \to N$ homo de B módulos

Pd: $\phi : M_\phi \to N_\phi$ homo de A-módulos

$\phi : A \to B$ homo de álgebras.

- ϕ bien def.
- ϕ opera suma
- $\phi(\alpha \cdot m) = \phi(\phi(\alpha) m) = \phi(\alpha)\, \phi(m) = \alpha\, \phi(m)$

- Si ϕ es epi: $Hom_B(M, N) = Hom_A(M_\phi, N_\phi)$

Sea $\varphi \in Hom_A(M_\phi, N_\phi) \Rightarrow \varphi : M_\phi \to N_\phi$ homo de A-módulos

$\varphi(\alpha \cdot m) = \alpha \varphi(m) = \phi(\alpha) \varphi(m)$

$\varphi : M \to N$ ok. $\varphi(\beta m) = \varphi(\phi(\alpha) m) = \varphi(\alpha \cdot m) = \beta \varphi(m)$

M un A-módulo (por la izquierda)

$X \subseteq M$, $Anul(X) = \{\alpha \in A / \alpha x = 0, \forall x \in X\}$

Lema: M, M' A-módulos , $X \subseteq M$, $Y \subseteq M$

$Anul(X) \trianglelefteq_i A$

dem. $\alpha, \tilde{\alpha} \in Anul(X)$:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha+\tilde{\alpha})x = \alpha x + \tilde{\alpha} x = 0+0 \quad \forall x \in X \\ (\alpha\tilde{\alpha})x = \alpha(\tilde{\alpha} x) = \alpha 0 = 0 \\ (-\alpha)x = -\alpha x = -0 = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\alpha+\tilde{\alpha} \in Anul \\ -\alpha \\ \alpha\tilde{\alpha} \in Anul\end{array}$$

$\beta \in A$, $\alpha \in Anul(X)$: $(\beta\alpha)x = \beta(\alpha x) = 0$

$\therefore$ $\beta\alpha \in Anul(X)$

X es un submódulo de $M \Rightarrow Anul(X) \trianglelefteq A$.

Sea $\alpha \in Anul(X)$, $\beta \in A$

$(\alpha\beta)x = \alpha(\underbrace{\beta x}_{\in M}) = 0$.

2) $X \subseteq Y \Rightarrow Anul(Y) \subseteq Anul(X)$

3) $M \cong M' \Rightarrow Anul(M) = Anul(M')$ $\quad \psi : M \to M'$

Sea $\underline{\alpha \in Anul(M)} \Rightarrow \alpha x = 0 \quad \forall x \in M$

$\Rightarrow \psi(\alpha x) = 0$

$\Rightarrow \alpha \psi(x) = 0$

Sea $y \in M' \Rightarrow \alpha y = \alpha\psi(x) = \psi(\alpha x) = \psi(0) = 0$.

$J \trianglelefteq_i A$, $K = Anul(A/J)$ mayor ideal de A tal que $K \subseteq J$

dem. $K \trianglelefteq A$.

$\alpha \in K$, $\beta \in A$.

$\beta\alpha(a+J) = (\beta\alpha)a + J = \beta(\underbrace{\alpha a}_{\in J}) + J = J$.

$\alpha\beta(a+J) = \alpha(\beta a) + J = \alpha(\beta a + J) = J$.

Sea $H \trianglelefteq A$ tal que $H \subseteq J$

Pd: $H \subseteq K = Anul(A/J)$

Sea $h \in H \Rightarrow h \in J$; como $J \trianglelefteq_i A$

$\Rightarrow ah \in J \quad \forall a \in A$

Ejercicio 2.1.2. $\phi : A \to B$ epi de álgebras

N A-módulo,

$\exists M$ B-módulo tq $N = M_\phi \iff \ker(\phi) \subseteq Anul(M)$

$\ker\phi \subseteq Anul(M)$

$a \in \ker\phi \iff \phi(a) = 0$

$\Rightarrow am = \phi(a)m$

dem ($\Rightarrow$) Sup $\exists M$ B-módulo : $N = M_\phi$

Pd: $\ker(\phi) \subseteq Anul(M)$

Sea $a \in \ker(\phi) \Rightarrow \phi(a) = 0$.

$a \cdot m = \phi(a)m = 0m = 0 \quad \therefore a \cdot m = 0$

($\Leftarrow$) $\ker(\phi) \subseteq Anul(M)$

Sea $M = N$, $\beta m = \phi(\alpha)m$ $\Rightarrow$ M es un

$= \alpha m$

Ejercicio 2.1.3

A una R-álgebra, $I \trianglelefteq A$

$\pi : A \longrightarrow A/I$ proyección canónica

~~Af.~~ N es A-módulo

Af. N es un A/I-modulo $\Leftrightarrow$ $I \subset \mathrm{Anul}(N)$

$(\Leftarrow)$ $(a+I)n = \underset{\substack{\uparrow \\ N}}{an} + I$

$(a+I)n = an$

$In = in = 0$.

$a+I = b+I \Leftrightarrow a-b \in I$

$(a+I)n = an$, $an - bn = (a-b)n = 0$

$(b+I)n = bn$ $\therefore an = bn$.

Corolario. M A-módulo semisimple

$\forall N \leq M$, $N \neq \{0\}$ ~~tiene~~ N tiene submódulo simple.

M semisimple $\Rightarrow \forall N \leq M$, $\exists \bar{N} \leq M$: $N \oplus \bar{N} = M$

M A-módulo semisimple $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$.

Ejercicio. M A-módulo noetheriano $\Rightarrow \forall N \leq M$: N es noetheriano.

dem. Sea $N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_k \subset \dots$ cadena creci. de subm. de N

$\Rightarrow$ cd creciente de subm. en M

$\Rightarrow \exists k_0 : N_t = N_{k_0} \quad \forall t \geq k_0$

pero $N_t \leq N$.

M/N es noetheriano!

dem. $N_1/N \subset N_2/N \subset N_3/N \subset \dots$

donde $N_i \supset N$ / $N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \dots$

$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ suc. exacta corta de A-módulos

1) N noetheriano $\Leftrightarrow M, P$ noetherianos

2) N artiniano $\Leftrightarrow M, P$ artinianos.

dem. N noetheriano.

$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots$ cadena creciente de A-submódulos de M

$f_*(M_1) \subset f_*(M_2) \subset f_*(M_3) \subset \dots$ cadena de A-módulos en N

$f_*(M_1) \subset f_*(M_2) \subset f_*(M_3) \subset \dots \subset N$

$\boxed{f^* f_*(M_1)} \subset f^* f_*(M_2) \subset f^* f_*(M_3) \subset \dots \subset f^*(N)$

YES

$M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset f^*(N)$

Scanned with CamScanner

dem de P noetheriano (análogo). $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$

$(\Leftarrow)$ $N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \dots$

$g_*(N_1) \subset g_*(N_2) \subset g_*(N_3) \subset \dots \subset P_k.$

$f^*(N_1) \subset f^*(N_2) \subset f^*(N_3) \subset \dots \subset M_\ell$

$\Rightarrow \begin{cases} g^*(g_*(N_1)) \subset g^* g_* N_2 \subset g^* g_* N_3 \subset \dots \subset g^* P_k \\ f_* f^* N_1 \subset f_* f^* N_2 \subset f_* f^* N_3 \subset \dots \subset f_* M_\ell \end{cases}$

Sea $a, b \in F^*$, char $F \neq 2$. Suponga que hay $x, y \in F$ tales que $ax^2 + by^2 = 1$. Pruebe que $\left(\frac{a, b}{F}\right) \simeq \left(\frac{1, -ab}{F}\right)$

Sea $A = \left(\frac{a, b}{F}\right)$, luego A_+ tiene base i, j, ij con $i^2 = a$; $j^2 = b$, $(ij)^2 = -ab$

Sea $A' = \left(\frac{1, -ab}{F}\right)$ luego A'_+ tiene base $i', j', i'j'$ con $i'^2 = 1$, $j'^2 = -ab$ y $(i'j')^2 = ab$

$\therefore N'(i') = -1$, $N'(j') = ab$, $N'(i'j') = -ab$

Queremos encontrar $\varphi: A'_+ \to A_+$ lineal biyectiva que preserve las normas.

Se deben encontrar $z_1, z_2, z_3 \in A_+$ tal que $N(z_1) = N'(i') = -1$, $N(z_2) = N'(j') = ab$ y $N(z_3) = N'(i'j') = -ab$

$z_1 \in A_+ \Rightarrow z_1 = \alpha i + \beta j + \gamma ij$ con $\alpha, \beta, \gamma \in F$

$N(z_1) = -\alpha^2 a - \beta^2 b + \gamma^2 ab$ y $N(z_1) = -1$.

Como $\exists\, x, y \in F$ talque $ax^2 + by^2 = 1$, al tomar $(\alpha, \beta, \gamma) = (x, y, 0)$ se puede tomar $z_1 = xi + yj$ y se tiene que $N(z_1) = -1 = N'(i')$

$z_2 \in A_+ \Rightarrow z_2 = \alpha i + \beta j + \gamma ij$ $N(z_2) = -\alpha^2 a - \beta^2 b + \gamma^2 ab$

pero $N(z_2) = N'(j') = ab$ $\therefore$ tomemos $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$.

y $\boxed{z_2 = ij}$

Sea $z_3 = z_1 z_2 = -byi + axj$

$N(z_3) = N(z_1 z_2) = N(z_1) N(z_2) = -1 \cdot (ab) = -ab$.

Como $\{i', j', i'j'\}$ es una base de A'_+ basta definir una función en esa base y se extiende por linealidad. Definamos $\varphi: A'_+ \to A_+$ por $\varphi(i') = xi + yj = z_1$; $\varphi(j') = ij$ y $\varphi(i'j') = -byi + axj$. Entonces $\{xi+yj, ij, -byi+axij\}$ es una base de A^+. Como $\dim_F A_+^* = 3$, basta probar que $\{xi+yj, ij, -byi+axj\}$ es l.i. sobre F. Sea $\alpha(xi+yj) + \beta ij + \gamma(-byi+axj) = 0$

Como $\{i, j, ij\}$ es base de $A+$ se tiene que

$\alpha x - \gamma by = 0$, $\beta = 0$, $\alpha y + \gamma ax = 0$

al resolver $\begin{cases} \alpha x - \gamma by = 0 \\ \alpha y + \gamma ax = 0 \end{cases}$ se tiene $\begin{array}{l} \alpha xy - \gamma by^2 = 0 \\ \alpha xy + \gamma ax^2 = 0 \end{array}$

al restar da $-\gamma(by^2 + ax^2) = 0$. Como $by^2 + ax^2 \neq$

se tiene $\boxed{\gamma = 0}$ Finalmente de $\alpha x = 0$, $\alpha y =$ y $(x, y) \neq (0, 0)$ se implica que $\alpha = 0$

luego $\{xi+yj, ij, -byi+axj\}$ es l.i.

Por lo tanto φ lleva base de A'_+ en base de A_+, luego es biyectiva.

Además se cumple que $N(\varphi(u)) = N'(u)$ $\forall u \in A'_+$. Se usa el hecho que $\forall u \in A'_+$

$N'(u) = -u^2$ y $N(\varphi(u)) = -\varphi(u)^2$.

Scanned with CamScanner