Universidad de Chile
Topología Algebraica
March 26 th, 2019.

Continuity

We make the continuity theory using filters and nets.

In context of metric spaces we have a similar definition using nets:

Proposition. let $f: X \to Y$ be continuous function iff $x_\lambda \to x$ in X $\Rightarrow f(x_\lambda) \to f(x)$ in Y.

Proof. Supose that f continuous, and $x_\lambda \to x$.

Using definition: $V \in \mathcal{V}(f(x))$, $\exists U \subseteq Y$ open such that $f(x) \in U \subseteq Y$.

Then: $x \in f^{-1}(U)$.

therefore: $f^{-1}(U)$ neighborhood of x.

($\Leftarrow$) Since $x_\lambda \to x$, we have:

$\exists \lambda_0 \in \Lambda$ such that $\lambda \geq \lambda_0$ implies $x_\lambda \in f^{-1}(U)$

$\Rightarrow f(x_\lambda) \in U \subseteq V$.

therefore: $f(x_\lambda) \to f(x)$.

($\Rightarrow$) Supouse That $x_\lambda \to x$ implies $f(x_\lambda) \to f(x)$.

let $U \subseteq Y$ be open.

We need to proof: $f^{-1}(U)$ is open.

It's suficient to check That $f^{-1}(U)^c = f^{-1}(U^c)$ closed

If $\{x_\lambda\}$ is a net in $f^{-1}(U^c)$ $\quad (f(x_\lambda) \in U^c)$

$x_\lambda \to x \Rightarrow f(x_\lambda) \to f(x)$ implies $f(x) \in U^c$

therefore $\quad x \in f^{-1}(U^c)$

equivalent to : $\quad f^{-1}(U^c)$ closed.

Definition. let $f : X \to Y$ be a function and $x \in X$. f is continous in x $x_\lambda \to x$ in X implies $f(x_\lambda) \to f(x)$.

We say that f is continuous if f is continuous in every point of X.

Proposition. f is continuous in x iff $\forall U \in \mathcal{V}(f(x))$, $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ such that $f(V) \subseteq U$

Proof. ($\Rightarrow$) By contradition.

f continuous in x but $\exists\, U \in \mathcal{V}(f(x))$ such that $f(V) \nsubseteq U$ for all $V \in \mathcal{V}(x)$

$\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists\, y_V$ such that $y_V \in V$ but $f(y_V) \notin U$

By property of $\mathcal{V}$: $\quad y_V \to x$

Using Continuity : $\quad f(y_V) \to f(x)$

Then : $\quad \exists V_0$ such that $V \subseteq V_0 \to f(y_V) \in U$

therefore : $\quad f(y_{V_0}) \in U$ and $f(y_V) \notin U$ $\quad (\Rightarrow\Leftarrow)$

($\Leftarrow$) Begin ~~suponing~~ assuming That:

$$\forall U \in \mathcal{V}(f(x)) \ \exists V \in \mathcal{V}(x) \text{ such that } f(V) \subseteq U$$

let $x_\lambda \to x$ be a convergent net.

let $U \in \mathcal{V}(f(x))$, $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ such that $f(V) \subseteq U$

$\exists \lambda_0$ such that $\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in V$.

then $f(x_\lambda) \in U$.

therefore we have : $f(x_\lambda) \to f(x)$.

As same way as using nets for studying ~~convergence~~ continuity of a function. We would like generalize the concept of continuity using filters.

Question. $\mathcal{F}$ is a filter ¿ what is $f(\mathcal{F})$?

Proposition. the family of sets $f(\mathcal{F}) = \{ A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{F} \}$ is a filter.

Proposition. f is a continuous function in x iff

$$\forall \mathcal{F} : \quad \mathcal{F} \longrightarrow x \Longrightarrow f(\mathcal{F}) \longrightarrow f(x)$$

Proof. ($\Rightarrow$) f continuous in x. let $\mathcal{F} \to x$ a convergent filter

we have to proof That $f(\mathcal{F}) \to f(x)$.

Using continuity of f in x :

$$V \in \mathcal{V}(f(x)) \Rightarrow \exists U \in \mathcal{V}(x) \text{ such that } f(U) \subseteq V.$$

Remembering : $f^{-1}(f(U)) \supseteq U$

$$\mathcal{F} \to x \Rightarrow \mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow U \in \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow f(U) \in f(\mathcal{F}) \Rightarrow V \in f(\mathcal{F})$$

$$\therefore \mathcal{V}(f(x)) \subseteq f(\mathcal{F})$$

$$\therefore f(\mathcal{F}) \to f(x).$$

Observation. It's possible to short the argument remembering that:

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(x)), \ f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x).$$

($\Leftarrow$) Assuming that:

$$\mathcal{F} \to x \quad \Rightarrow f(\mathcal{F}) \to f(x)$$

Remember that neighborhoods is the most canonical example of filters.

then we have:

$$\mathcal{V}(x) \to x \quad \Rightarrow f(\mathcal{V}(x)) \to f(x)$$
$$\Rightarrow \mathcal{V}(f(x)) \subseteq f(\mathcal{V}(x))$$

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(x)) \quad \Rightarrow V \in f(\mathcal{V}(x))$$
$$\Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$$

Sumarizing, f is a continuous function. $\square$.

How to readecuate the continuity of a function using filter basis.

Proposition. If $\mathcal{B}$ is a filter basis of $\mathcal{F}$, then $f(\mathcal{B})$ is a filter basis.

Proof. $f(\mathcal{B}) = \{ f(B) \mid B \in \mathcal{B} \}$.

Using property of functions: $f(B_1 \cup B_2) \subseteq f(B_1) \cup f(B_2)$

$\mathcal{B}$ is a filter implies that

$$\exists B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

Therefore: $$f(B_3) \subseteq f(B_1 \cap B_2).$$

Let $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{B})$ be the filter generated by the basis $\mathcal{B}$.

Proposition. $\mathcal{F}(f(\mathcal{B})) = f(\mathcal{F})$

Proof. $B \in \mathcal{F} \Rightarrow f^{-1}(f(B)) \in \mathcal{F} \Rightarrow f(B) \in f(\mathcal{F})$

$$f^{-1}f(B) \supseteq B$$

By the other side: $G \in f(\mathcal{F}) \Rightarrow f^{-1}(G) \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ such that $B \in f^{-1}(G)$

$\Rightarrow f(B) \subseteq G \quad \Rightarrow \quad G \in \mathcal{F}(f(\mathcal{B}))$. $\square$

Example. In the case of subsets, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(A)$,

$$f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(f(A))$$

In the case of a singleton $\{x\}$:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\{x\}) \quad \Rightarrow f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(\{f(x)\})$$

Definition. A filter $\mathcal{F}$ is said a ultrafilter if for all filter $\mathcal{F}'$ such that $\mathcal{F}' \geq \mathcal{F}$, we have $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$

Proposition. Every filter is contended in an ultrafilter.

Proof. Using Zorn Lemma.
We start considering the set

$$\Sigma = \{\mathcal{F}' \text{ filter} \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'\}.$$

Is easy to see $\Sigma \neq \emptyset$.
Let $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$ be a chain,

$$\tilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{\mathcal{F}' \in \mathcal{C}} \mathcal{F}' \in \Sigma$$

To prove: $\tilde{\mathcal{F}}$ is a filter

1. $\phi \notin \tilde{\mathcal{F}}$, $\forall \tilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{C}$: $\emptyset \notin \mathcal{F}'$
2. $A \in \tilde{\mathcal{F}}_1$, $\forall C \supset A \Rightarrow C \in \tilde{\mathcal{F}}$
   Also, $A \in \mathcal{F}' \Rightarrow C \in \mathcal{F}' \Rightarrow C \in \tilde{\mathcal{F}}$
3. $A, B \in \tilde{\mathcal{F}} \Rightarrow A \cap B \in \tilde{\mathcal{F}}$
   Also: $\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{F}', B \in \mathcal{F}'' \\ \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}'' \end{array}\right\} \Rightarrow A, B \in \mathcal{F}''$. $A \cap B \in \mathcal{F}'' \Rightarrow A \cap B \in \tilde{\mathcal{F}}$

Zorn: $\exists\, \hat{F} \in \Sigma_0'$ maximal

Proposition. F is a ultrafilter iff

$$\forall A \subseteq X : \quad A \in F \quad \text{or} \quad A^c \in F \qquad (*)$$

Small example: $F = \mathcal{F}(\{x\})$ is a ultrafilter.

Proof. $(\Leftarrow)$ Let F be a filter with $*)$ property

If $F' \supseteq F$ is a filter with $A \in F'$

$$A \in F \quad \text{or} \quad A^c \in F \subseteq F'$$

In the first case:

$$A \in F$$
$$\therefore \quad F' = F$$

In the second case:

$$A^c \in F$$
$$A^c \in F'$$
$$\Rightarrow \emptyset \in F \quad (\Rightarrow\Leftarrow)$$

$(\Rightarrow)$ Let F be a ultrafilter. Let $A \subseteq X$ be a subset.

Suppose that $A, A^c \notin F$

Let $\mathcal{B}$ be the set:

$$\mathcal{B} = \{A \cap F \mid F \in \mathcal{F}\}$$

To prove: $\mathcal{B}$ is a filter basis.

1. $\emptyset \notin \mathcal{B}$ because $A \cap F = \emptyset$
$$\Rightarrow F \subseteq A^c \Rightarrow A^c \in F \quad (\Rightarrow\Leftarrow)$$

2. $(A\cap F)\cap(A\cap F') = A\cap(\underbrace{F\cap F'}_{\in \mathcal{F}})$.

Affirmation. $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}(\mathcal{B})$

For the set $F\in\mathcal{F}$: $F \supseteq F\cap A$

The last affirmation implies $F\in \mathcal{F}(\mathcal{B})$

Thus $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{B})$

The fact $A\in \mathcal{F}(\mathcal{B})$ implies $\mathcal{F}\subsetneq \mathcal{F}(\mathcal{B})$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$. □

Proposition. Let $f: X\to Y$ be a function and $\mathcal{F}$ an ultrafilter, then $f(\mathcal{F})$ is an ultrafilter.

Proof. For $A\subseteq Y$ we have $f^{-1}(A)^c = f^{-1}(A^c)$

Then : $f^{-1}(A)\in \mathcal{F}$ or $f^{-1}(A)^c\in\mathcal{F}$

then : $A\in f(\mathcal{F})$ or $A^c\in f(\mathcal{F})$

thus : $f(\mathcal{F})$ is an ultrafilter. □

Example. Consider the naturals $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$.

Let $\mathcal{B}$ be the following:

$$\mathcal{B}=\{[n,\infty)\cap\mathbb{N} \mid n\in\mathbb{N}\}$$

$\exists\, \mathcal{F}$ ultrafilter such that $\mathcal{F}\supseteq \mathcal{F}(\mathcal{B})$

Affirmation: $\mathcal{F}\neq \mathcal{F}(\{n\})$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$[n+1,\infty)\notin \mathcal{F}(\{n\})$.

Universidad de Chile
Topología Algebraica I
Marzo 29, 2018.

Sea Λ conjunto dirigido (Λ discreto).

Definimos el conjunto dirigido:

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \{\infty\}, \qquad \lambda \leq \infty \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

A continuación:

$$\tau = \mathcal{P}(\Lambda) \cup \left\{ A \cup [\lambda, \infty] \;\middle|\; \begin{array}{c} \lambda \in \Lambda \\ A \subset \Lambda \end{array} \right\}$$

es una topología en $\tilde{\Lambda}$.

Con la propiedad de que $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda = \infty$.

$\forall V \in \mathcal{V}(\infty)$, $\exists \lambda_0 \in \Lambda$ tq $\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow \lambda \in V$

Proposición. $\{x_\lambda\}_\lambda$ red en X, se tiene que $x_\lambda \to x$ ssi $f: \tilde{\Lambda} \to X$, con $f(\lambda) = x_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, $f(\infty) = x$, es continua en $\tilde{\Lambda}$.

Demostración. ($\Rightarrow$)

$$f \text{ continua} \Rightarrow x_\lambda = f(\lambda) \to f(\infty) = x.$$

($\Leftarrow$) supongamos que $x_\lambda \to x$

Observación. $\{\lambda\}$ abierto $\Rightarrow$ f continua en λ, $\{\lambda\}_{\psi \in \Psi}$

$\lambda_\psi \to \lambda \Rightarrow \exists \lambda_0$ tq $\lambda_\psi = \lambda \quad \forall \psi \geq \psi_0$

Supongamos $x_\psi \to \infty$

Por demostrar $f(\lambda_\psi) = x_{\lambda_\psi} \to x = f(\infty)$

$\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists \lambda_0 \in \Lambda$ tq $\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in V$

$[\lambda_0, \infty] \in \mathcal{V}_{\tilde{\Lambda}}(\infty) \Rightarrow \exists \psi_0 \in \Psi$ tal que $\psi \geq \psi_0$.

Luego: $\lambda_\psi \geq \lambda_0$, $\lambda_\psi \in [\lambda_0, \infty] \Rightarrow x_{\lambda_\psi} \in V$.

f es continua en a
$A \subseteq X$ subespacio topológico.

$$a_\lambda \to a \text{ en } A$$

implica: $a_\lambda \to a$ en X, $\tilde{\Lambda} \xrightarrow{f} A \xhookrightarrow{i} X$

Definición. $X = \prod_{i \in I} X_i$ espacio producto con la topología producto (topología de Tichonoff). Es la topología con sub-base:

$$\left\{ U_{i_0} \times \prod_{i \neq i_0} X_i \;:\; i_0 \in I,\ U_{i_0} \subseteq X_{i_0} \text{ abierto} \right\}$$

O bien la topología con base:

$$\left\{ \prod_{i \in T} U_i \times \prod_{i \in I - T} X_i \;\middle|\; T \subseteq I \text{ finito},\ U_i \subseteq X_i \text{ abierto} \right\}.$$

Equivalentemente, es la topología inducida por la familia de proyecciones:

$$\pi_{i_0} : X \longrightarrow X_{i_0}$$

[La menor topología que hace a las proyecciones continuas]

Proposición. $f : Y \to X$ continua ssi $f_i = \pi_i \circ f$ es continua.

Proposición. $f : \tilde{\Lambda} \to X$, $f(\lambda) = (f_i(\lambda))_{i \in I} = (x_{i_\lambda})_{i \in I}$

$$(x_{i_\lambda}) \longrightarrow (x_i)_{i \in I} \iff x_{i_\lambda} \longrightarrow x_i \quad \forall i.$$

Proposición. $X = \prod X_i$, $x_i = \pi_i(x)$. Para $\mathcal{F}$ filtro en X tal que $\mathcal{F} \to x \in X$ siempre y cuando $\pi_i(\mathcal{F}) \longrightarrow x_i \ \forall i$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X, $x \in X$.

(a) $\mathcal{F} \to x \overset{(b)}{\iff} \forall$ red $\{x_F\}_{F \in \mathcal{F}}$ asociado al filtro, $x_F \longrightarrow x$

$\overset{(c)}{\iff} \forall$ red $\{x_F\}_F$ asociada a $\mathcal{F}$, $\underset{\pi_i(x_F)}{\overset{\shortparallel}{x_{i_F}}} \longrightarrow \underset{\pi_i(x)}{\overset{\shortparallel}{x_i}}$

$\overset{(d)}{\iff} \pi_i(\mathcal{F}) \longrightarrow \pi_i(x) = x_i$
(*)

demostración de (*):

(a) $\Rightarrow$ (d). $V \in \mathcal{V}(x_i)$

Por demostrar: $V \in \pi_i(\mathcal{F})$, $\pi_i^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}$ (por (a))

Por lo tanto: $V \in \pi_i(\mathcal{F})$

(d) $\Rightarrow$ (a).

Supongamos que $\pi_i(\mathcal{F}) \to x_i \ \forall i$, sean $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \supseteq \prod_{i \in T} U_i \times \prod_{i \notin T} X_i$

$i_0 \in T$, $U_{i_0} \times \prod_{i \neq i_0} X_i = \pi_{i_0}^{-1}(U_{i_0})$

$U_{i_0} \in \mathcal{V}(x_{i_0}) \subseteq \pi_{i_0}(\tilde{\mathcal{F}})$

$\Rightarrow \pi_{i_0}^{-1}(U_{i_0}) \in \tilde{\mathcal{F}}$

Se tiene: $V \supseteq \prod_{i \in T} U_i \times \prod_{i \notin T} X_i = \bigcap_{i \in T} \pi_i^{-1}(U_i) \in \tilde{\mathcal{F}}$

$\square$

Definición. Puntos de acumulación.

a. x es pto de acumulación de un filtro $\mathcal{F}$ si $\exists \mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}' \to x$.

b. x es punto de acumulación, si $\forall F \in \mathcal{F}, \forall V \in \mathcal{V}(x)$: $F \cap V \neq \phi$.

Proposición. a. $\Leftrightarrow$ b.

dem. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}'$, $\begin{matrix} F \in \mathcal{F}' \\ F \cap V \in \mathcal{F}' \end{matrix} \Rightarrow F \cap V \neq \phi$. (a. $\Rightarrow$ b.)

b. $\Rightarrow$ a.

(b) $\Rightarrow \{F \cap V \mid F \in \mathcal{F}, V \in \mathcal{V}(x)\}$ es base de filtro.

Ejemplo. $B_n = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 1 + \frac{1}{n}\}$

$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$

Se tiene que $\{z \mid |z| = 1\} \leftrightarrow$ puntos de acumulación.

Observación. Si tomo un x afuera no se cumple $\cap \neq \phi$, es válido también para circunferencias abiertas o cerradas.

$U_n = B(x, \frac{1}{n})$, $\{B_n \cap U_n\}$ es base de filtro.

Proposición. Un ultrafiltro tiene un punto de acumulación ssi converge a ese punto.

Demostración. $\mathcal{F}$ ultrafiltro, x punto de acumulación

$\Leftrightarrow \exists \mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ con $\mathcal{F}' \to x$

$\mathcal{F}$ ultrafiltro, $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

Definición. Un espacio topológico se dice cuasicompacto si todo recubrimiento abierto tiene un subrecubrimiento finito.

Definición. Un espacio topológico se dice compacto si es Hausdorff y cuasicompacto.

Proposición. Un espacio topológico es cuasicompacto ssi cada ultrafiltro tiene un punto de acumulación.

Corolario. Un espacio topológico X es cuasicompacto ssi cada ultrafiltro tiene al menos un límite.

2. Un espacio topológico es Hausdorff ssi cada ultrafiltro tiene a lo más un límite.

3. Un espacio topológico es compacto ssi cada ultrafiltro tiene exactamente un límite.

$X = \prod_{i \in I} X_i$, X_i cuasicompacto. $\mathcal{F}$ ultrafiltro en X

Entonces: $\mathcal{F}_i = \pi_i(\mathcal{F})$ ultrafiltro en X_i.

Entonces: $\exists x_i$ tq $\mathcal{F}_i \longrightarrow x$,

Por lo tanto: $\mathcal{F} \longrightarrow (x_i)_{i \in I}$.

De lo anterior, concluimos el siguiente teorema.

Teorema (Tichonoff). Un producto de espacios cuasicompactos, es cuasicompacto.

Universidad de Chile
Topología algebraica I
02 Abril, 2019.

Compacidad.

Definición. X espacio topologico cuasicompacto si

$$X \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists\, i_1, \dots, i_r \text{ tal que } X \subseteq \bigcup_{r=1}^{n} U_{i_r}$$

La cuasicompacidad también se puede caracterizar con cerrados.

Definición. X tiene la propiedad de la intersección finita si toda familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de conjuntos cerrados, en la que cada intersección finita es no vacía, tiene intersección no vacía.

Teorema. Las definiciones anteriores son equivalentes.

Demostración. Basta notar que $\bigcap_{i\in I} A_i = \phi \iff \bigcup_{i\in I} A_i^c = X$. $\square$

Observación. Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X, $x \in X$ es un punto límite del filtro ssi:

$$x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}.$$

Demostración. $(\Rightarrow)$ Caracterización de punto límite:

$$\forall F \in \mathcal{F}, \forall V \in \mathcal{V}(x) : V \cap F \neq \phi.$$

pero $x \in \overline{F}$ ssi $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap F \neq \phi$.

Ahora aplicamos:

$$x \notin F \Rightarrow \overline{F}^c \in \mathcal{V}(x), \quad \overline{F}^c \cap F = \phi.$$

$$V \cap F = \phi \Rightarrow F \subseteq V^c \Rightarrow \overline{F} \subseteq V^c \Rightarrow x \notin \overline{F}$$

Por lo tanto: $x \in \bigcap_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \overline{F}$

($\Leftarrow$) $x \in \bigcap_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \overline{F} \Rightarrow V \cap F \neq \phi \quad \forall V \in \mathcal{V}(x) \; \forall F \in \tilde{\mathcal{F}}$

Por lo tanto: x es punto límite. □

punto de acumulación

Proposición. X es cuasicompacto ssi todo filtro en X tiene un límite.

($\Rightarrow$) Supongamos: X cuasicompacto, $\tilde{\mathcal{F}}$ filtro en X.

Sean $F_1, \dots, F_n \in \tilde{\mathcal{F}}$, por definición:

$$F_1 \cap \dots \cap F_n \in \tilde{\mathcal{F}},$$

en particular: $F_1 \cap \dots \cap F_1 \neq \phi$

Luego: $\overline{F}_1 \cap \dots \cap \overline{F}_n \neq \phi$

Propiedad de la intersección finita: $\bigcap_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \overline{F} \neq \phi$.

Cada $x \in \bigcap_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \overline{F} \neq \phi$ es un punto límite de $\tilde{\mathcal{F}}$.

(Cambiar punto límite por punto de acumulación)

($\Leftarrow$) Supongamos que cada filtro en X tiene un punto de acumulación.

Objetivo: Demostrar que X cumple propiedad de intersección finita.

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ familia de cerrados tq:

$$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} \neq \phi \quad \forall i_1, \dots, i_n \in I$$

Se define el filtro: $\mathcal{F} = \{ F \subseteq X \mid F \supseteq A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} \text{, algunos } i_1, \dots, i_n \in I \}$.

$$\exists \; x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} = \bigcap_{i \in I} A_i \quad (A_i \text{ cerrado } \forall i)$$

Por lo tanto:

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \phi.$$

$\square$

Pregunta: ¿Se puede caracterizar la compacidad usando redes?

Definición. Un elemento $x \in X$ es un punto de acumulación de una red $\{x_\lambda\}_\lambda$, si,

$$\forall \lambda_0 \in \Lambda, \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists \lambda > \lambda_0 : \quad x_\lambda \in V$$

Proposición. x es un punto de acumulación de $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ssi existe una subred que converge a x.

Demostración. ($\Leftarrow$) Sea $\varphi : M \to \Lambda$ cofinal tal que $x_{\varphi(\mu)} \to x$

Por propiedad: $\forall \lambda_0 \in \Lambda, \exists \mu_0 \in M$ tq $\varphi(\mu_0) \geq \lambda_0$

Luego: $\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists \mu > \mu_0 : \quad x_{\varphi(\mu)} \in V$

($\Rightarrow$) Ocupamos el siguiente truco:

$$\hat{\Lambda} = \Lambda \times \mathcal{V}(x) \quad \text{conjunto dirigido.}$$

$$\tilde{\Lambda} = \{(\lambda, V) \mid x_\lambda \in V\} \subseteq \hat{\Lambda}$$

La función $\rho : \tilde{\Lambda} \longrightarrow \Lambda$, $\rho(\lambda, V) = \lambda$ es cofinal.

Se define a continuación: $y_{(\lambda,V)} = x_\lambda = x_{\rho(\lambda,V)}$, una sub-red.

afirmamos que: $y_{(\lambda,V)} \longrightarrow x$.

En efecto: $\forall V_0 \in \mathcal{V}(x)$, $\exists \lambda_0$ con $x_{\lambda_0} \in V_0$.

Luego: $(\lambda_0, V_0) \in \tilde{\Lambda}$.

$\forall (\lambda, V) \geq (\lambda_0, V_0)$, $(\lambda, V) \in \tilde{\Lambda}$,

se tiene: $y_{(\lambda,V)} = x_\lambda \in V \subseteq V_0$

Por lo tanto: $y_{(\lambda,V)} \longrightarrow x$. $\square$

Proposición. x es punto de acumulación de la red ssi es punto de acumulación del filtro asociado.

Recordatorio. $\tilde{\mathcal{F}}$ filtro asociado a $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$,

$$\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) \quad , \quad \mathcal{B} = \{B_{\lambda_0}\}_{\lambda_0 \in \Lambda}$$

$$B_{\lambda_0} = \{x_\lambda \mid \lambda \geq \lambda_0\}.$$

(⇒) x punto de acumulación.

⇒ $\exists$ subred $\{x_{g(\mu)}\}_{\mu \in M}$ que converge a x

⇒ Su filtro asociado converge a x (filtro asociado $\mathcal{G}$)

Se tiene lo siguiente (ejercicio) : $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$

Luego : x punto de acumulación de $\mathcal{F}$

(⇐) Supongamos x punto de acumulación de $\mathcal{F}$.

Por definición : $\forall V \in \mathcal{V}(x)\ \forall F \in \mathcal{F} : V \cap F \neq \phi$.

$\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\forall \lambda_0 \in \Lambda$: $B_{\lambda_0} \cap V \neq \phi$.

Luego: $\exists \lambda \geqslant \lambda_0$ tal que $x_\lambda \in V$.

$\square$

~~Proposición. x es un punto de acumulación de $\mathcal{F}$ ssi existe una red asociada a $\mathcal{F}$ que tiene a x como punto de acumulación.~~

Proposición. X es cuasicompacto ssi cada red en X tiene un punto de acumulación.

Demostración.

(⇒) $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ red y $\mathcal{F}$ su filtro asociado.

⇒ $\mathcal{F}$ tiene punto de acumulación.

⇒ $\{x_\lambda\}_\lambda$ tiene punto de acumulación.

($\Leftarrow$) Supongamos que cada red tiene punto de acumulación.

Sea $\mathcal{F}$ filtro en X, $\{a_F\}_{F\in\mathcal{F}}$ red asociada a $\mathcal{F}$.

Se tiene: $\exists a \in X$ punto de acumulación de $\{a_F\}$

Por demostrar: a punto de acumulación de $\mathcal{F}$.

Para demostrar la última parte, necesitamos el siguiente Lema:

Lema. Sea $\mathcal{F}$ filtro y $\{a_F\}_{F\in\mathcal{F}}$ su red asociada. Todo punto de acumulación de la red es punto de acumulación del filtro.

Demostración. Sea $\mathcal{G}$ filtro asociado a $\{a_F\}_F$

$$B_F \subseteq F$$

$$\Rightarrow \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$$

a punto de acumulación $\Rightarrow$ a punto de acumulación de $\mathcal{G}$

$\Rightarrow \exists\, \mathcal{G}_0 \supseteq \mathcal{G}$, con $\mathcal{G}_0 \longrightarrow a$.

Además: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_0$

Por lo tanto: a punto de acumulación de $\mathcal{F}$.