VICERRECTORÍA ACADEMICA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, FÍSICA Y ESTADÍSTICA
ÁREA DE MATEMÁTICA-CICLO INICIAL

CÁTEDRA 2

ALGEBRA II (MAT-141)

Tiempo: 90 minutos

NOTA	

Problema	Puntaje
Total	

NOMBRE: Marco Godoy V **NRC:**

RUN: 17.022.457-4 **FECHA:**

CARRERA: **SECCIÓN:**

Indicaciones

- Complete los datos solicitados en la prueba.
- Puntaje ideal de la prueba 60 puntos.
- Nota final=Puntaje_obtenido+1,0
- No se aceptan consultas una vez iniciada la prueba. Salvo que sean de enunciado.
- Sólo podrá salir de la sala después de 30 min de iniciada la prueba.
- Puede utilizar para sus cálculos calculadora pero no su celular ni otros artículos tecnológicos.
- Deberá devolver todas las hojas de la prueba. La ausencia de alguna de ellas desvalidará la evaluación.
- Si requiere hojas adicionales solicitarlas al profesor.

"Declaro haber revisado y recibir conforme la prueba y la nota indicada arriba"

Firma: ....

Profesor: Instituto de Matemática, Física y Estadística

Resultados de Aprendizaje

(a) Determinar bases asociadas a distintos espacios vectoriales, por ejemplo: $\mathbb{R}^n$, $M_{n\times m}(\mathbb{R})$.

(b) Modelar situaciones aplicadas a la ingeniería, a través de un problema de programación lineal, resolviéndolo con el método gráfico.

Problemas

Nombre del alumno: ....

NOTA

Prob. 1 (15 ptos.) Maximizar la función $f(x, y) = 2x + 3y$, de acuerdo a las restricciones:

$$\begin{aligned} x + y &\leq 50 \\ 2x + y &\leq 80 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

a. **(7.5 ptos.)** Represente gráficamente la región solución del sistema de restricciones.

b. **(7.5 ptos.)** Identifique las coordenadas que maximizan la función dada.

Desarrollo:

La recta $x+y=50$ corta eje X en $(50,0)$
" eje Y en $(0,50)$

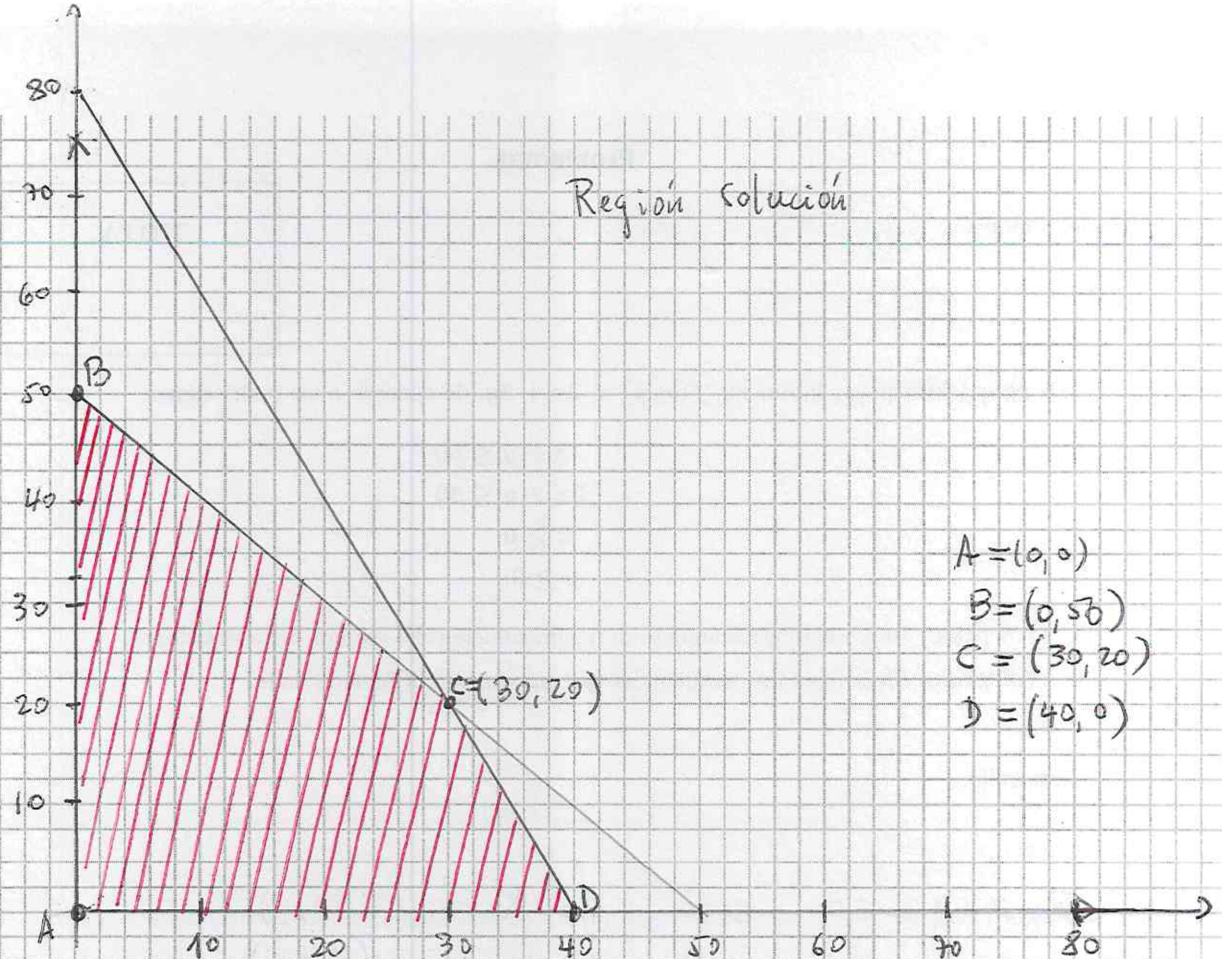
La recta $2x+y=80$ corta eje X en $(40,0)$
" $2x+y=80$ " " Y en $(0,80)$

Intersección entre rectas $\begin{cases} x+y=50 \\ 2x+y=80 \end{cases}$

Cramer: $x = \dfrac{\det\begin{pmatrix} 50 & 1 \\ 80 & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} = \dfrac{-30}{-1} = 30$

$y = \dfrac{\det\begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 2 & 80 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} = \dfrac{-20}{-1} = 20$.

El punto $(0,0)$ cumple desigualdades $x+y \leq 50$, $2x+y \leq 80$.
$(0,0)$ forma parte de la región solución del sistema de restricciones.



Buscamos dónde se maximiza $f(x, y) = 2x + 3y$

$f(0,0) = 0$

$f(0, 50) = 0 + 3 \cdot 50 = 150$

$f(30, 20) = 60 + 60 = 120$

$f(40, 0) = 80$

La función $f(x, y) = 2x + 3y$ se maximiza en el punto $(0, 50)$

Prob. 2 **(20 ptos.)** Para recorrer un determinado trayecto, una compañía desea ofertar, a lo sumo **5000** plazas de dos tipos: T (Turista) y P (Primera). La ganancia correspondiente a cada plaza de tipo T es de **30** euros, mientras que la ganancia de tipo P es de **40** euros. El número de plazas de tipo T no puede exceder de **4500** y el del tipo P, debe ser como máximo, la tercera parte de las ganancias del tipo T que se oferten.

a. **(10 ptos.)**Represente gráficamente la región solución del sistema de restricciones.

b. **(10 ptos.)** Determinar el número de plazas de cada tipo que tienen que ofertarse para que la ganancia sea máxima.

Desarrollo:

T: Turista , P: Primera

a.) Sea x : nº de plazas de tipo T

y : nº de plazas de tipo P

Función objetivo : $G(x,y) = 30x + 40y$

Conjunto de restricciones del problema:

$$x + y \leq 5000$$
$$x \leq 4500$$
$$y \leq \frac{30x}{3} = 10x \qquad (-10x + y \leq 0)$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

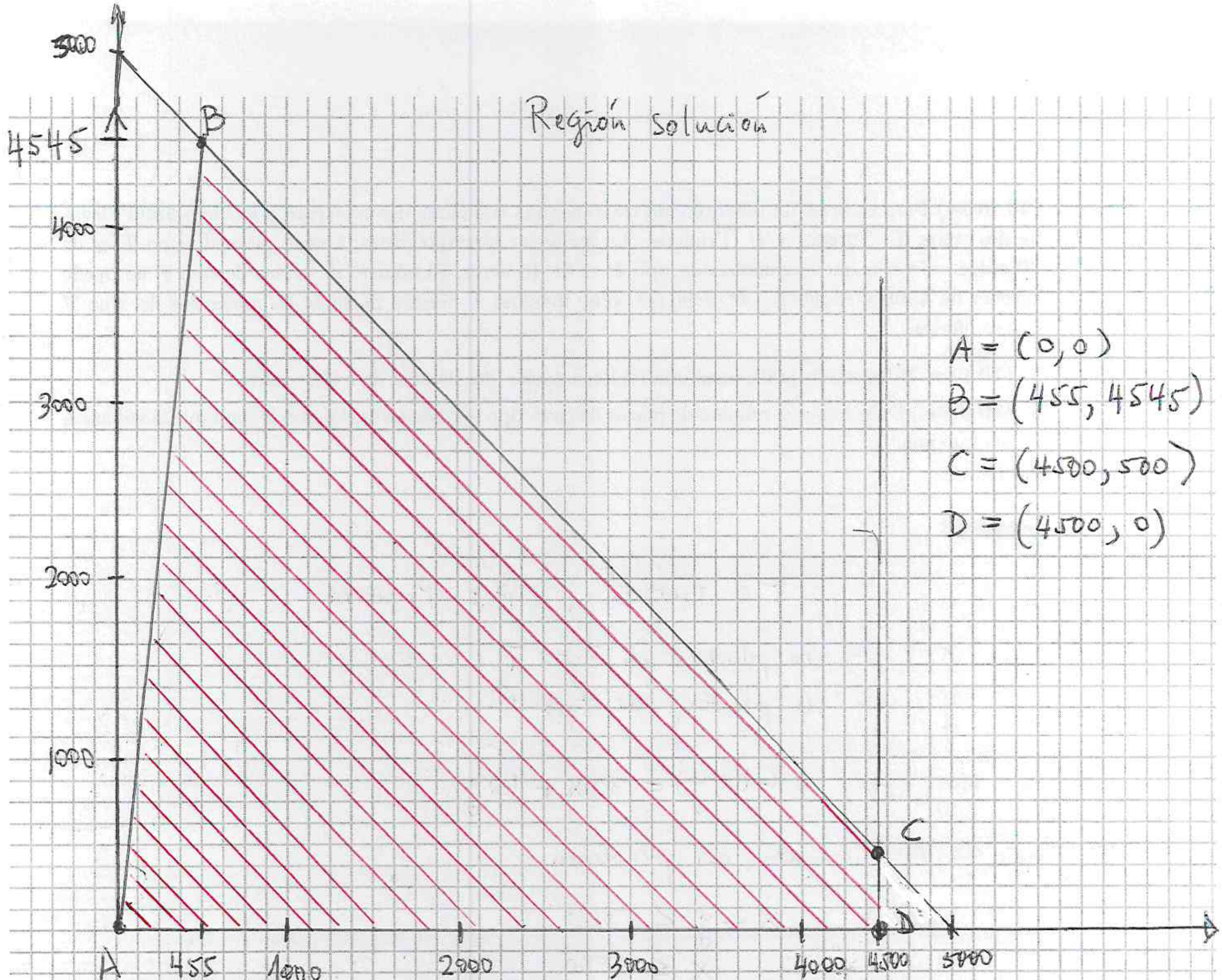
Buscamos punto de intersección entre las rectas $x+y=5000$, $-10x+y=0$

Cramer:

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 5000 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{5000}{11} \approx 455$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 5000 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{50000}{11} \approx 4545$$

El punto (0,0) satisface todas las desigualdades, luego forma parte de la región solución.



Calculamos C: $\begin{cases} x = 4500 \\ x + y = 5000 \end{cases} \longrightarrow y = 500$

b) Buscamos dónde se maximiza $G(x,y) = 30x + 40y$

$G(0,0) = 0$

$G(455, 4545) = 195450$

$G(4500, 500) = 155000$

$G(4500, 0) = 135000$

Por lo tanto:

La Ganancia se maximiza cuando se venden 455 plazas de tipo T y 4545 plazas de tipo P.

Prob. 3 (20 ptos.) Demuestre que $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Desarrollo:

(i) El vector $(0,0,0)$ pertenece a W porque cumple con la igualdad

$$0+0-0=0$$

(ii) Sean (x,y,z), (u,v,w) vectores que pertenecen a W

$$(x,y,z)+(u,v,w) = (x+u,\ y+v,\ z+w)$$

$$\begin{aligned}(x+u)+(y+v)-(z+w) &= x+u+y+v-z-w \\ &= \underbrace{(x+y-z)}_{=0} + \underbrace{(u+v-w)}_{=0} \\ &= 0\end{aligned}$$

$x+y-z=0$, $u+v-w=0$ porque (x,y,z), (u,v,w) pertenecen a W.
Luego la suma $(x,y,z)+(u,v,w)$ pertenece a W.

(iii) Supongamos que (x,y,z) pertenece a W. Hay que demostrar que $\lambda(x,y,z)$ pertenece a W, donde $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

$$\lambda x + \lambda y - \lambda z = \lambda(\underbrace{x+y-z}_{=0}) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

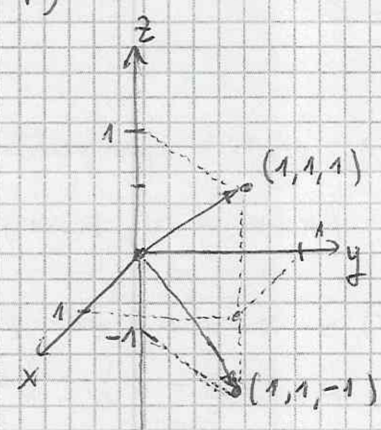
Luego $\lambda(x,y,z)$ pertenece a W.

Conclusión: W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Prob. 4 Construya una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga a los vectores $(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})$ y $(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1})$. Verifique que efectivamente su elección es una base.

Desarrollo:

Primero buscamos un vector que no sea combinación lineal de $(1,1,1)$ y $(1,1,-1)$



Basta tomar el vector $(0,1,0)$. Probemos que $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(0,1,0)$ son linealmente independientes:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -1\cdot 2 + 1\cdot 0 = -2 \neq 0$$

Como el determinante es distinto de 0, los vectores son linealmente indep.

Como $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$, la cantidad máxima de vectores linealmente independientes que hay en $\mathbb{R}^3$ es 3.

Por lo tanto: $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(0,1,0)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.