

Observación. \vec{F} conservativo, $P, Q \in C^2$

Teorema de Clairaut: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

Teorema. La observación anterior es cierta si \vec{F} está definida en una región simplemente conexa.

Aplicación física: Principio de conservación de la energía

Segunda ley de Newton: $\vec{F}(\vec{r}(t)) = m \vec{r}''(t)$

$$\text{Trabajo: } W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = m \int_a^b \vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} [\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)] dt \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \|v(t)\|^2 dt = \frac{m \|v(b)\|^2}{2} - \frac{m \|v(a)\|^2}{2} \\ &= K(b) - K(a) \end{aligned}$$

$$\text{Como } \vec{F} = -\nabla P, \quad W = P(a) - P(b)$$

$$\therefore K(a) + P(a) = K(b) + P(b)$$

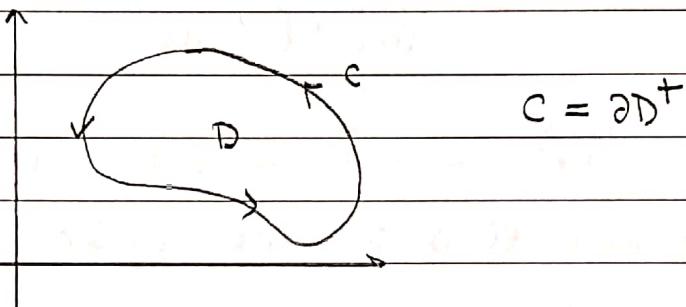
□

16.4 Teorema de Green

Región simple = Región de tipo I o II

D región simple con orientación positiva.

C suave a trozos.



Teorema de Green. $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$; P, Q derivadas parciales continuas en D' abierto tq $D \subseteq D'$,

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Observación. Teo Green \rightarrow TFC

Observación. La demostración del teo. de Green se basa en demostrar las igualdades

$$\int_C P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

$$\int_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA$$

Ejemplo (pag 1057, Chapter 16.4)

$$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}, \quad C = \partial D^+$$

$$\begin{aligned} \oint_C (3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (7x + \sqrt{y^4 + 1}) - \frac{\partial}{\partial y} (3y - e^{\sin x}) \right) dA \\ &= \iint_D (7 - 3) dA = 4 \underbrace{\iint_D dA}_{\text{área del círculo}} = 4(9\pi) = 36\pi \end{aligned}$$

Teorema. El área de D se puede calcular como

$$A = \iint_C x dy = - \iint_C y dx = \frac{1}{2} \iint_C x dy - y dx$$

demonstración. $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$

Ejemplo. Calcular el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

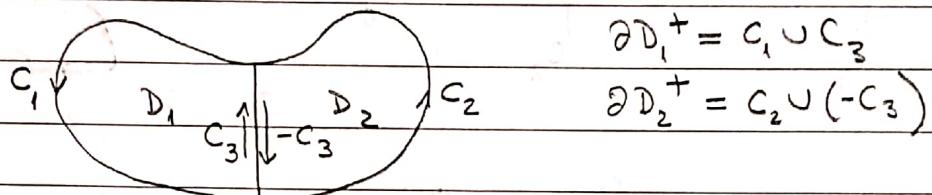
Desarrollo. Ec's param.: $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$

$$A = \frac{1}{2} \iint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab (\cos t)^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab (-\sin t)^2 dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab = \pi ab$$

Observación. El teorema de Green se puede extender a regiones D tales que $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$, donde D_i es simple.

Ejemplo. Para $n=2$



$$\partial D_1^+ = C_1 \cup C_3$$

$$\partial D_2^+ = C_2 \cup (-C_3)$$

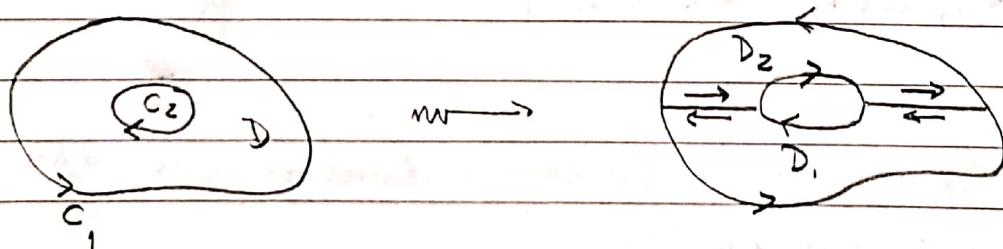
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{-C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{C_1 \cup C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2 \cup (-C_3)} \vec{F} \cdot d\vec{r}; \quad \int_{-C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

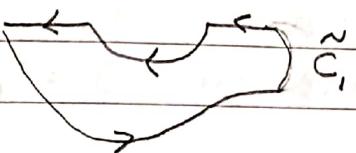
$$= \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Observación. Extensión de TG para regiones con hoyos.

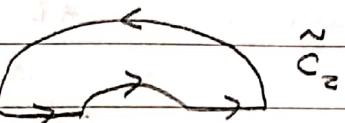


$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$= \oint_{\tilde{C}_1} P dx + Q dy + \oint_{\tilde{C}_2} P dx + Q dy$$



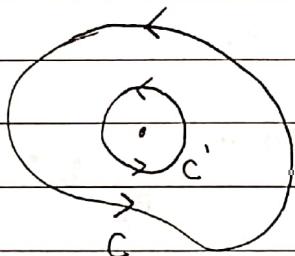
$$= \oint_{C_1} P dx + Q dy + \oint_{C_2} P dx + Q dy$$



Por lo tanto : $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{C_1} P dx + Q dy + \oint_{C_2} P dx + Q dy$

Ejemplo. $\vec{F}(x,y) = (-y \uparrow + x \uparrow) / (x^2 + y^2)$. Se cumple que $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$, para todo camino ∂D^+ tal que $(0,0) \in \text{int}(D)$.

Demonstración. Usar teo. de Green. Además



Se cumple $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Luego se puede escoger

$C: \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, para concluir $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$.

Observación. Teorema de Green, permite demostrar que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ implica que \vec{F} es conservativo.

16.4. Ejercicios.

Pt. 1. $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$

$$\partial D^+ = C : \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

$$\oint_C (x-y)dx + (x+y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y) - \frac{\partial}{\partial y}(x-y) \right) dA = 2 \iint_D dA = 8\pi$$

P. 10. Calcular $\oint_C \operatorname{sen} y dx + x \cos y dy$, para C elipse $x^2 + xy + y^2 = 1$

Desarrollo. $P = \operatorname{sen} y, Q = x \cos y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \cos y, \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y$

Teo. de Green: $\oint_C \operatorname{sen} y dx + x \cos y dy = 0$

P. 9 $I = \oint_C y^3 dx - x^3 dy, C: x^2 + y^2 = 4$

Teo. Green: $I = \iint_D (-3x^2 - 3y^2) dA = -3 \iint_D (x^2 - y^2) dA = -3 \int_0^{2\pi} \int_0^r r^2 (\omega s^2 \theta - \omega s \theta) dr d\theta$
 $\stackrel{(*)}{=}$

P. 21. C la línea que une los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

(a) $\oint_C x dy - y dx = x_1 y_2 - x_2 y_1$

(b) Área de polígonos de vértices (x_i, y_i) ($i = 1, \dots, n$) es

$$A = \frac{1}{2} \left[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n) \right]$$

Demostración.

$$(a) C: \vec{r}(t) = (x_1, y_1)(1-t) + (x_2, y_2)t = (x_1, y_1) + (x_2 - x_1, y_2 - y_1)t \quad t \in [0, 1]$$

$$\vec{r}'(t) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\begin{aligned} \int_C x dy - y dx &= \int_C (-y, x) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (-y_1 - (y_2 - y_1)t, x_1 + (x_2 - x_1)t) \\ &\quad \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1) dt \\ &= \int_0^1 \left[-y_1(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_2 - x_1)t + x_1(y_2 - y_1) + (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)t \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[-x_2 y_1 + x_1 y_2 - (x_2 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + x_1 y_1)t + x_1 y_2 - x_1 y_1 + (x_2 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + x_1 y_1)t \right] dt \\ &= \int_0^1 (x_1 y_2 - x_2 y_1) dt = x_1 y_2 - x_2 y_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) A &= \iint_D dA = \frac{1}{2} \iint_D 2 dA = \frac{1}{2} \int_{\text{polígono}} -y dx + x dy \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{(x_i, y_i)}^{(x_{i+1}, y_{i+1})} (-y dx + x dy) + \int_{(x_n, y_n)}^{(x_1, y_1)} (-y dx + x dy) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + \frac{1}{2} (x_n y_1 - x_1 y_n) \end{aligned}$$

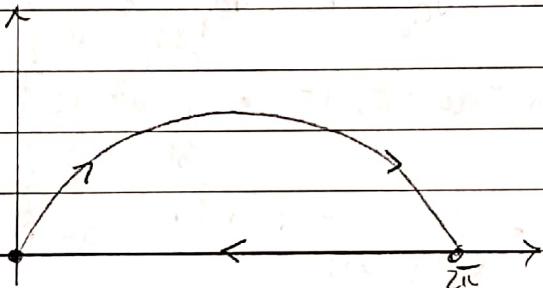
P.19. Encuentre el área bajo la cicloide de ec's paramétricas
 $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$

Desarrollo. $A = \int_C x dy$

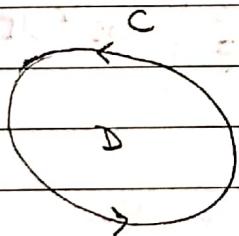
$$C = C_1 \cup C_2 \text{ donde } C_1 : \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}, \quad C_2 : (1-t)2\pi, t \in [0, 1]$$

Calculando directamente $\int_C x dy = \int_{C_1} x dy + \int_{C_2} x dy$ se tiene que

$$A = \pi$$



P.22.



$$C = \partial D$$

(\bar{x}, \bar{y}) coordenadas del centroide.

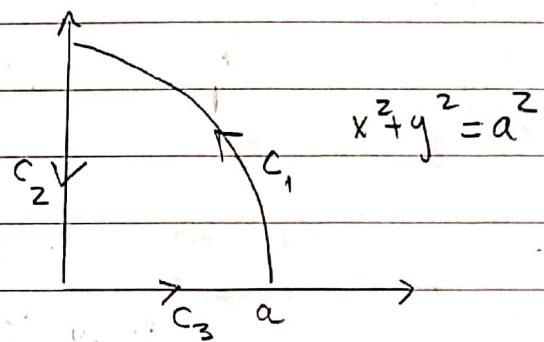
Asumimos densidad constante, $\rho(x,y) = \rho$

$$\bar{x} = \left(\iint_D \rho dA \right)^{-1} \left(\iint_D x \rho dA \right) = (\rho A)^{-1} \rho \iint_D x dA$$

$$= \frac{1}{2A} \iint_D 2x dA = \frac{1}{2A} \oint_C x^2 dy$$

$$\text{Análogamente, } \bar{y} = -\frac{1}{2A} \oint_C y^2 dx$$

P.23. Calcule el centroide de



$$A = \frac{\pi a^2}{4}, \quad \bar{x} = \frac{1}{2A} \int_C x^2 dy, \quad C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

$$\int_C x^2 dy = \int_{C_1} x^2 dy + \int_{C_2} x^2 dy + \int_{C_3} x^2 dy$$

$$\int_{C_1} x^2 dy = \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 t (\alpha \cos t) dt = \int_0^{\pi/2} a^3 \cos^3 t dt$$

$$\int_{C_2} x^2 dy = 0, \quad \int_{C_3} x^2 dy = 0$$

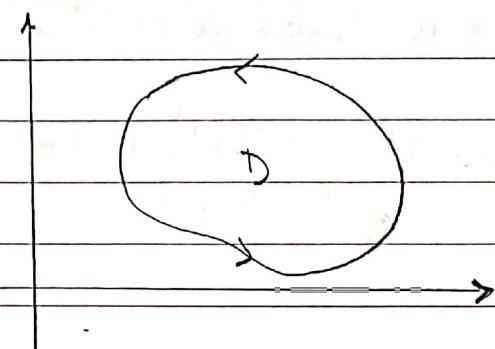
$$\therefore \bar{x} = \frac{2}{\pi a^2} \int_0^{\pi/2} a^3 \cos^3 t dt = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^3 t dt$$

$$\text{Análogamente, } \int_C y^2 dx = \int_{C_1} y^2 dx + \int_{C_2} y^2 dx + \int_{C_3} y^2 dx$$

$$\int_C y^2 dx = \int_0^{\pi/2} (a^2 \operatorname{sen}^2 t) (-a \operatorname{sen} t) dt = -a^3 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 t dt$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 t dt.$$

P. 25



$$\partial D^+ = C$$

$\rho(x,y) = \rho$, densidad constante.

momentos de inercia:

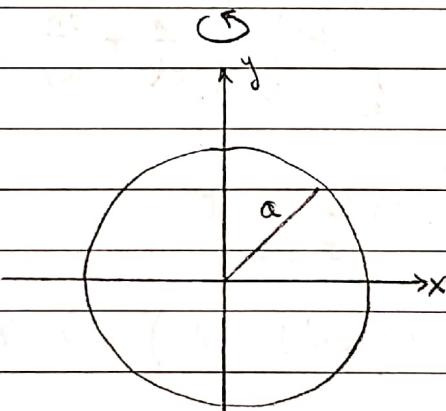
$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y) dA = \rho \iint_D y^2 dA$$

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y) dA = \rho \iint_D x^2 dA$$

$$I_x = -\frac{\rho}{3} \iint_D 3y^2 dA = -\frac{\rho}{3} \int_C y^3 dx$$

$$I_y = \frac{\rho}{3} \iint_D 3x^2 dA = \frac{\rho}{3} \int_C x^3 dy$$

P. 26



$$\rho(x,y) = \rho$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Calcular momento de inercia del disco

$$I_y = \frac{\rho}{3} \int_0^{2\pi} (a^3 \cos^3 t) (a \cos t) dt = \frac{a^4 \rho}{3} \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt \quad (*)$$

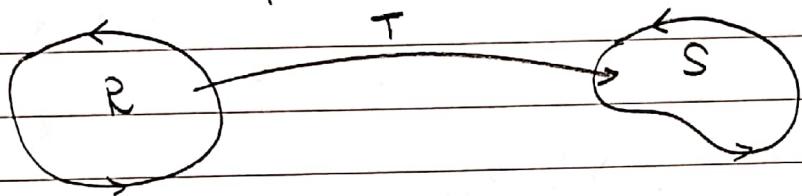
(*) Calcular en SageMath o Python.

P.29. Demuestre el teorema de Cambio de variable

$$\iint_R dx dy = \iint_S \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

Demonstración. Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(u,v) = (x,y)$

el cambio de coordenadas que manda la región R a la región S



$$x = g(u,v), \quad y = h(u,v). \quad \text{Notar que } T(\partial R^+) = \partial S^+$$

Teo. de Green: $\iint_R dx dy = \oint_{\partial R^+} x dy$

$$\oint_{\partial R^+} x dy = \int_a^b x(t) y'(t) dt = \int_a^b x(t) \left[\frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \right] dt$$

$$= \int_a^b x(t) \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} dt + \int_a^b x(t) \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} dt$$

para $a = g(u(a'), v(a'))$, $b = h(u(b'), v(b'))$, se tiene que

$$\oint_{\partial R^+} x dy = \int_{a'}^{b'} x(u,v) \frac{\partial h}{\partial u} du + \int_{a'}^{b'} x(u,v) \frac{\partial h}{\partial v} dv$$

$$= \int_{\partial S^+} x \frac{\partial h}{\partial u} du + x \frac{\partial h}{\partial v} dv$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial v} + x \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial h}{\partial u} - x \frac{\partial^2 h}{\partial v \partial u} \right) du dv$$

$$= \iint_S \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

16.5 Rotor y divergencia.

Consideramos campo vectorial $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$. El rotor $\text{Rot}(\vec{F})$ se define como:

$$\text{Rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F},$$

donde $\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$. De manera de determinante:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

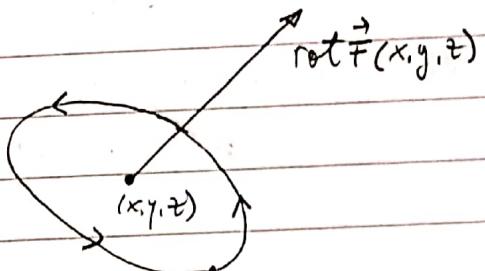
Teorema: f con 2^{o} derivadas parciales continuas, se tiene que $\text{Rot}(\vec{\nabla} f) = \vec{0}$.

Observación. \vec{F} conservativo $\Rightarrow \text{Rot}(\vec{F}) = \vec{0}$

Teorema. $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tq $P, Q, R \in C^2$; $\text{Rot}(\vec{F}) = \vec{0}$. Entonces \vec{F} es conservativo.

Observación. Teorema anterior funciona en cualquier dominio simplemente conexo. Su demostración sigue del teorema de Stokes.

Interpretación geométrica del rotor:



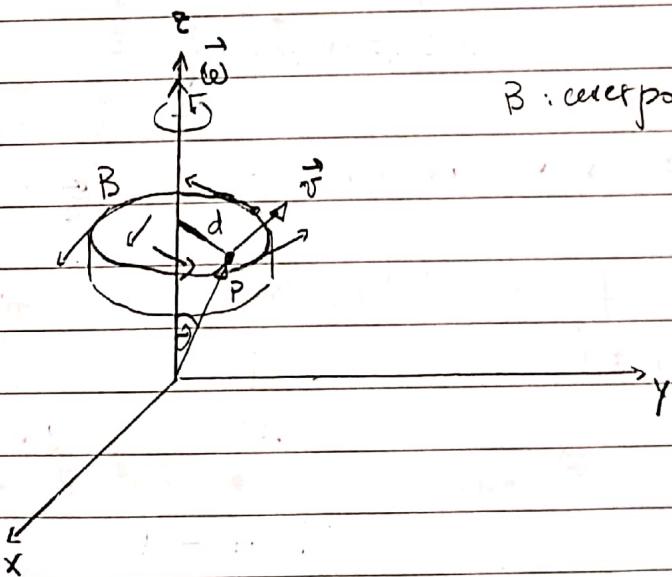
Partículas cerca de (x, y, z) tienen rotación en sentido antihorario, el largo del vector rotor indica qué tan rápido gira alrededor del eje. Para $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$, el fluido es libre de rotación en (x, y, z)

$$\text{rot } \vec{F}(x, y, z) = \vec{0} \Rightarrow F \text{ irrotacional en } P = (x, y, z)$$

Problema 37.

Interpretación física
del rotor

β : cuerpo rígido.



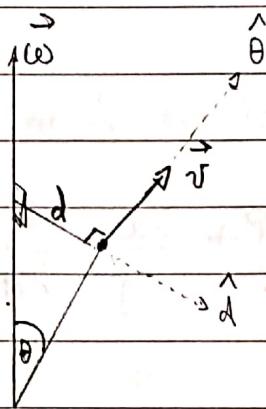
$$\vec{\omega} = \omega \hat{k} \text{ velocidad angular}$$

$$\omega = \frac{v}{d}, \text{ } v \text{ rapidez tangencial}, |v| = v$$

$\vec{r} = (x, y, z)$ vector posición del punto P

(a) Demostrar que el campo de velocidades es $\vec{v} = \omega \times \vec{r}$

Demostración.



$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \hat{k} (\hat{k} \times \vec{r}) = \omega \hat{k} \\&= \omega r \sin\theta (\hat{k} \times \vec{r}) \\&= \omega \hat{k} \times (r \sin\theta \hat{d}) \\&= \omega \hat{k} \times (r \sin\theta \hat{d} + r \cos\theta \hat{k}) \\&= \vec{\omega} \times \vec{r}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

(b) Demostrar que $\vec{v} = -\omega y \hat{i} + \omega x \hat{j}$

$$\begin{aligned}\text{Demostración. } \vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \hat{k} \times (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) \\&= \omega x (\hat{k} \times \hat{i}) + \omega y (\hat{k} \times \hat{j}) + \omega (\hat{k} \times \hat{k}) \\&= -\omega y \hat{i} + \omega x \hat{j}.\end{aligned}$$

(c) Demostrar que $\text{rot}(\vec{v}) = 2\vec{\omega}$

$$\text{Demostración. } \text{rot}(\vec{v}) = \vec{v} \times \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{rot}(\vec{v}) &= \hat{i}(0 + \partial_z \omega x) - \hat{j}(\partial_x 0 + \partial_z \omega y) + \hat{k}(\partial_x \omega x + \partial_y \omega y) \\&= 0 \hat{i} + 0 \hat{j} + \hat{k}(\omega + \omega) = 2\omega \hat{k}\end{aligned}$$

$$\therefore \text{rot}(\vec{v}) = 2\vec{\omega}$$

Divergencia. $\operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F}$

De manera equivalente: $\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

Teorema. $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $P, Q, R \in C^2$, se tiene que $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{F})) = 0$

Interpretación física de la divergencia:

Para $\vec{F}(x, y, z)$ un campo de velocidades, $\operatorname{div}(\vec{F}(x, y, z))$ mide la tendencia del fluido a diverger del punto (x, y, z) .

Para $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$, \vec{F} se dice incompresible.

El operador laplaciano. Para f campo escalar, definimos

$$\nabla^2 f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

donde $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Para \vec{F} campo vectorial, $\nabla^2 \vec{F} = \nabla^2 P \hat{i} + \nabla^2 Q \hat{j} + \nabla^2 R \hat{k}$.

Forma vectorial del teorema de Green.

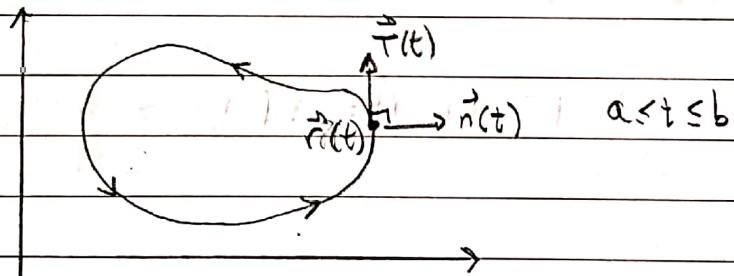
$$\text{Teorema de Green: } \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA ; \quad C = \partial D^+$$

donde $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy$. $\vec{F} = (P, Q, 0)$

Como $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \text{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{k}$, luego se tiene $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \text{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{k} dA$

(i) $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ es la componente tangencial de \vec{F} a lo largo de C

(ii) $\vec{F} \cdot \vec{n}$ es la componente normal de \vec{F} a lo largo de C



$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}, \quad \vec{n}(t) = \frac{1}{|\vec{r}'(t)|} (y'(t), -x'(t))$$

Segunda forma vectorial del teo. de Green: $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_D \text{div } \vec{F}(x, y) dA$

16.5 Ejercicios.

Pr 21. El campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = f(x)\hat{i} + g(y)\hat{j} + h(z)\hat{k}$ es irrotacional.

Demostración. $\text{rot}(\vec{F}(x,y,z)) = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(x) & g(y) & h(z) \end{pmatrix}$

$$= \hat{i} (\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial y}) - \hat{j} (\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}) + \hat{k} (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})$$

$$= 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}.$$

$$\therefore \text{rot}(\vec{F}(x,y,z)) = \vec{0}$$

□

Pr. 22. El campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = f(y,z)\hat{i} + g(x,z)\hat{j} + h(x,y)\hat{k}$ es incompresible.

demonstración. $\text{div}(\vec{F}(x,y,z)) = \frac{\partial}{\partial x} f(y,z) + \frac{\partial}{\partial y} g(x,z) + \frac{\partial}{\partial z} h(x,y) = 0$ □

Pr 23-29. Propiedades algebraicas del rotor y la divergencia

$$\text{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{div}(\vec{F}) + \text{div}(\vec{G})$$

$$\text{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{rot}(\vec{F}) + \text{rot}(\vec{G})$$

$$\text{div}(f\vec{F}) = f \text{div}(\vec{F}) + \vec{F} \cdot \nabla f$$

$$\text{rot}(f\vec{F}) = f \text{rot}(\vec{F}) + \nabla f \times \vec{F}$$

$$\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \text{rot}(\vec{F}) - \vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{G})$$

$$\text{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$$

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{F})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{F})) - \nabla^2 \vec{F}$$

Pr. 33. Demuestre la primera identidad de Green:

$$\iint_D f \nabla^2 g \, dA = \oint_C f(\nabla g) \cdot \vec{n} \, ds - \iint_D \nabla f \cdot \nabla g \, dA$$

Demonstración. $\oint_C f(\nabla g) \cdot \vec{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div}(f \nabla g) \, dA$

$$= \iint_D (f \operatorname{div}(\nabla g) + \nabla f \cdot \nabla g) \, dA = \iint_D (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dA$$

$$\Rightarrow \oint_C f(\nabla g) \cdot \vec{n} \, ds - \iint_D \nabla f \cdot \nabla g \, dA = \iint_D (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g - \nabla f \cdot \nabla g) \, dA \\ = \iint_D f \nabla^2 g \, dA.$$

Pr. 34. Demuestre la segunda identidad de Green:

$$\iint_D (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dA = \oint_C (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \vec{n} \, ds$$

Demonstración. $\oint_C (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \vec{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div}(f \nabla g - g \nabla f) \, dA$

$$= \iint_D \operatorname{div}(f \nabla g) - \operatorname{div}(g \nabla f) \, dA = \iint_D (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g - g \nabla^2 f - \nabla g \cdot \nabla f) \, dA \\ = \iint_D (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dA. \quad \square$$

P.35. g es harmónica si $\nabla^2 g = 0$

definimos $D_{\vec{n}} g = \nabla g \cdot \vec{n}$ la derivada normal de g

$$\text{Pd: } g \text{ harmónica} \Rightarrow \oint_C D_{\vec{n}} g \, ds = 0$$

$$\text{Demostración. } \oint_C D_{\vec{n}} g \, ds = \oint_C \nabla g \cdot \vec{n} \, ds$$

$$= \iint_D \operatorname{div}(\nabla g) \, dA \quad \text{Teo. Green 2^{\circ}}$$

$$= \iint_D \nabla^2 g \, dA = \iint_D 0 \, dA = 0$$

$$\text{P.36. } f \text{ armónica en } D, f|_{\partial D} = 0 \Rightarrow \iint_D |\nabla f|^2 \, dA = 0$$

$$\text{Demostración. } \iint_D |\nabla f|^2 \, dA = \iint_D \nabla f \cdot \nabla f \, dA$$

$$= \oint_C f(\nabla f) \cdot \vec{n} \, ds - \iint_D f \nabla^2 f \, dA = - \iint_D f(\nabla^2 f) \, dA = \iint_D 0 \, dA = 0$$

$\nabla^2 f = 0$

P.38. Ecuaciones de Maxwell

 \vec{E} : campo eléctrico \vec{H} : campo magnético

c: velocidad de la luz

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = 0, \operatorname{div}(\vec{H}) = 0, \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$(a) \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (c) \nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$(b) \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad (d) \nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

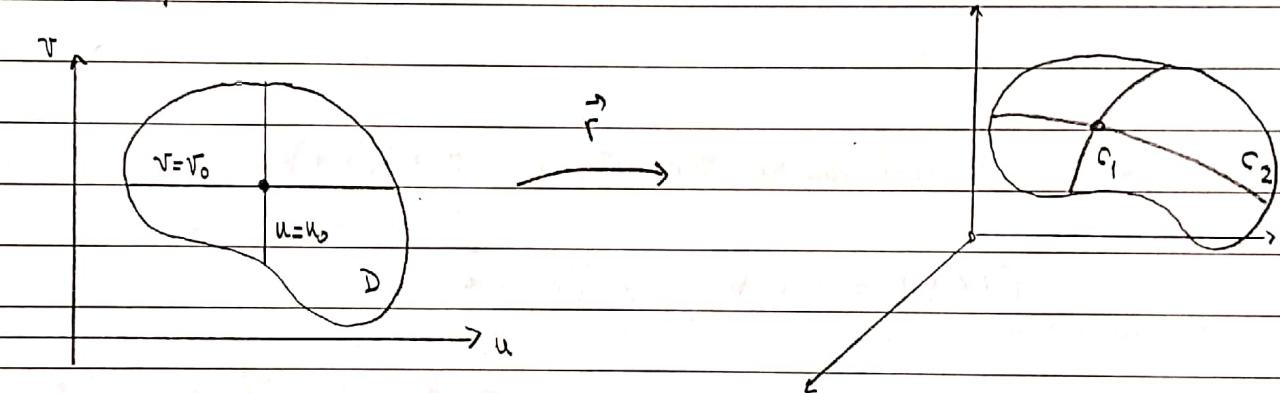
Demostración.

$$(a) \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times (\operatorname{rot}(\vec{E})) = \nabla \times \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c} \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right)$$

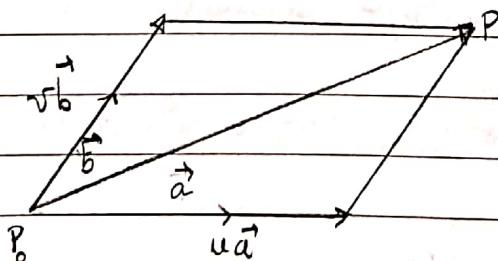
16.6 Superficies paramétricas y sus áreas

Ecuaciones paramétricas de una superficie S

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k}, \quad (u, v) \in D$$

donde $(x, y, z) \in S$.

$$C_1 : \vec{r}(u_0, v), \quad C_2 : \vec{r}(u, v_0) \quad \text{"grid curves" (reticulado)}$$

Ejemplo. Parametrización de un plano que pasa por el punto P_0 .

$$\vec{r}(u, v) = u\vec{a} + v\vec{b} + \vec{r}_0.$$

Para $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$x(u, v) = ua_1 + vb_1 + x_0$$

$$y(u, v) = ua_2 + vb_2 + y_0$$

$$z(u, v) = ua_3 + vb_3 + z_0$$

donde $D = \mathbb{R}^2$.

Ejemplo. Parametrización de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Usando coordenadas esféricas

$$x = a \sin \phi \cos \theta$$

$$y = a \sin \phi \sin \theta$$

$$z = a \cos \phi$$

$$\text{Se tiene : } \vec{r}(\phi, \theta) = a \sin \phi \cos \theta \hat{i} + a \sin \phi \sin \theta \hat{j} + a \cos \phi \hat{k}$$

$$\text{para } D = [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$$

Ejemplo. Parametrización por gráfico $z = f(x, y)$

$$\vec{r}(x, y) = x \hat{i} + y \hat{j} + f(x, y) \hat{k}$$

Como ejemplo, sirve para parametrizar el paraboloide elíptico

$$z = x^2 + 2y^2.$$

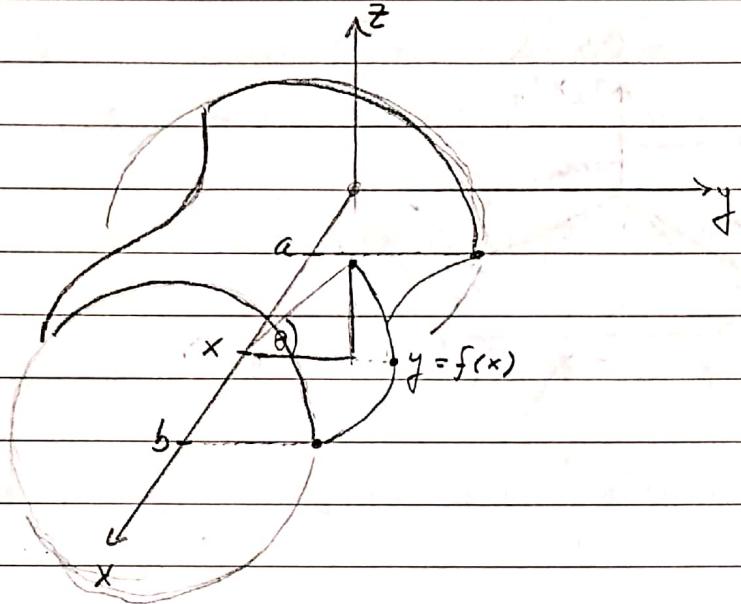
Ejemplo. Las parametrizaciones de las superficies no son únicas.

Para parametrizar el medio cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ tenemos:

$$\vec{r}(x, y) = x \hat{i} + y \hat{j} + \sqrt{x^2 + y^2} \hat{k}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\vec{r}(r, \theta) = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} + r \hat{k}, \quad (r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi]$$

Superficies de revolución.



Por el dibujo tenemos: $\vec{r}(x, \theta) = x\hat{i} + f(x)\cos\theta\hat{j} + f(x)\sin\theta\hat{k}$,
donde $(x, \theta) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$.

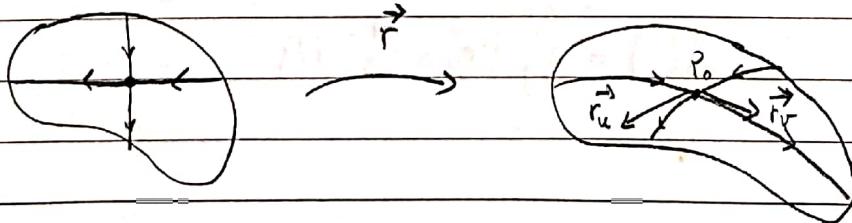
Ejemplo. Para $y = \operatorname{sen}(x)$, $x \in [0, 2\pi]$. La superficie de revolución de $y = \operatorname{sen}(x)$ alrededor del eje x.

$$S: \quad \vec{r}(x, \theta) = x\hat{i} + \operatorname{sen}(x)\cos(\theta)\hat{j} + \operatorname{sen}(x)\sin(\theta)\hat{k}$$

Planos tangentes.

$$\text{Consideramos: } \vec{r}_u(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\hat{k}$$

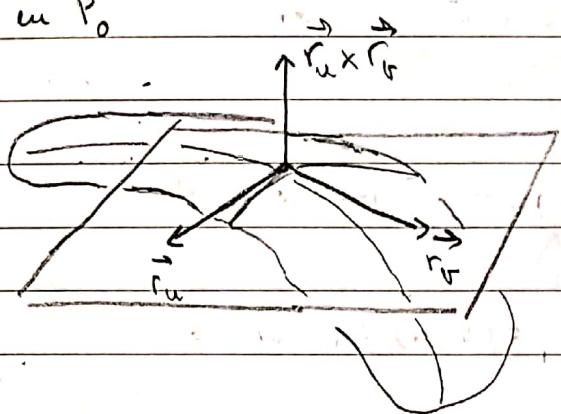
$$\vec{r}_v(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\hat{k}$$



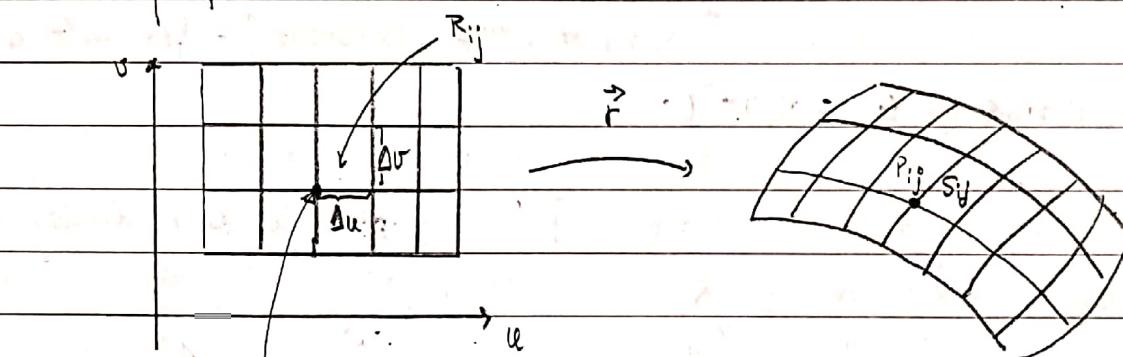
$$P_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$$

Observación. Se dice que la curva en P_0 si $(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)(u_0, v_0) \neq \vec{0}$.

Plano tangente en P_0



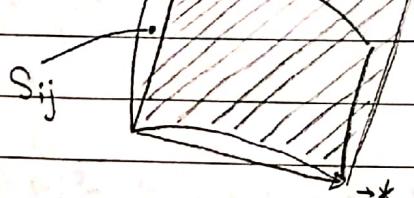
Área de la superficie.



$$\text{Tenemos: } S_{ij} = \vec{r}(R_{ij})$$

$$P_{ij} = \vec{r}(u_i^*, v_j^*)$$

$$\vec{r}_u^* = \vec{r}_u(u_i^*, v_j^*), \quad \vec{r}_v^* = \vec{r}_v(u_i^*, v_j^*)$$



(i) $|\vec{r}_u^* \Delta u \times \vec{r}_v^* \Delta v|$ approxima el área de S_{ij}

(ii) $|\vec{r}_u^* \Delta u \times \vec{r}_v^* \Delta v| = |\vec{r}_u^* \times \vec{r}_v^*| \Delta u \Delta v$

Aproximación del área de S :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\vec{r}_u^* \times \vec{r}_v^*| \Delta u \Delta v$$

Área de S :

$$A(S) = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dA$$

Ejemplo. Calcular área de una esfera de radio a .

Desarrollo. Parametrización de la esfera

$$\vec{r}(\phi, \theta) = a \sin\phi \cos\theta \hat{i} + a \sin\phi \sin\theta \hat{j} + a \cos\phi \hat{k}$$

donde $(\phi, \theta) \in D = \{ 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$.

Por otro lado, $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = a^2 \sin\phi$. Luego:

$$A(S) = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a^2 \sin\phi d\phi d\theta = 4\pi a^2$$

Área de superficie de una función:

la parametrización adecuada es $\vec{r}(x, y) = x \hat{i} + y \hat{j} + f(x, y) \hat{k}$, $z = f(x, y)$

$$\rightarrow |\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = \left| -\frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \hat{k} \right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}$$

$$\text{Luego: } A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dA$$

Área de superficie de revolución.

Consideramos la parametrización

$$\vec{r}(x, \theta) = x \hat{i} + f(x) \cos\theta \hat{j} + f(x) \sin\theta \hat{k}$$

$$x \in [a, b], \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\text{Se tiene que } |\vec{r}_x \times \vec{r}_\theta| = |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

$$A(S) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

16.6 Ejercicios.

P.19. Encontrar parametrización del plano que contiene a $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y pasa por $(1, 2, -3)$.

Desarrollo. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1, 1, -1)$, $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = (1, -1, 1)$

$$\begin{aligned}\text{Parametrización: } \vec{r}(u, v) &= u(1, 1, -1) + v(1, -1, 1) + (1, 2, -3) \\ &= (u+v+1, u-v+2, -u+v-3), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

P.21. Parametrización del hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en la parte derecha del plano xz .

Desarrollo. Plano $xz \Rightarrow y=0$. $x^2 + y^2 - z^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2 - z^2} = f(x, z)$

Parametrización por gráfico: $\vec{r}(x, z) = x\vec{i} + f(x, z)\vec{j} + z\vec{k}$ para $1 - x^2 - z^2 \geq 0$,

$$1 - x^2 - z^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 + z^2 \quad \therefore D = \{(x, z) \mid z \in \mathbb{R}, x^2 \leq 1 + z^2\}$$

P.26. Parametrizar la parte del plano $z = x + 3$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Desarrollo. Usando coordenadas cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z \in \mathbb{R}$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow r^2 = 1 \quad (\text{luego se tiene } 0 \leq r \leq 1)$$

$$z = x + 3 = r\cos\theta + 3$$

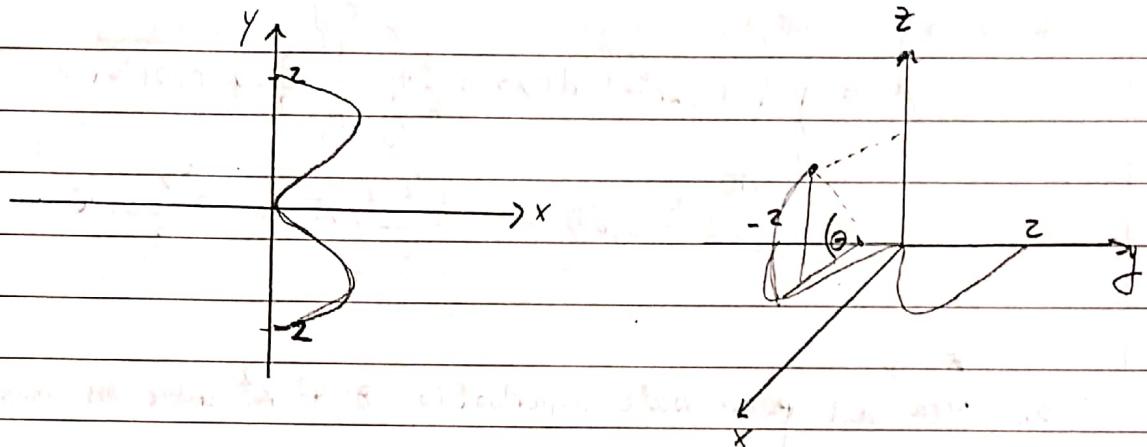
$$\text{Pto. plano} = (x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r\cos\theta + 3) \rightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \text{ proy. plano } xy$$

$$\text{Parametrización: } \vec{r}(r, \theta) = r\cos\theta\vec{i} + r\sin\theta\vec{j} + (r\cos\theta + 3)\vec{k}$$

P.30. Ecaciones paramétricas de superficie de revolución:

$$x = 4y^2 - y^4, \quad -2 \leq y \leq 2; \text{ alrededor del eje } y$$

Desarrollo. $4y^2 - y^4 = y^2(4 - y^2) = y^2(2+y)(2-y)$. $x=0 \Leftrightarrow y \in \{0, -2, 2\}$
 $y(-2) = y(2) = 0$.



Parametrización: $\vec{r}(y, \theta) = (4y^2 - y^4) \cos \theta \hat{i} + y \hat{j} + (4y^2 - y^4) \sin \theta \hat{k}$
para $(y, \theta) \in [-2, 2] \times [0, 2\pi]$

P.41. Área de $z = xy$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

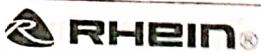
Desarrollo. Coordenadas cilíndricas: $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2 \sin \theta \cos \theta)$
 \Rightarrow obligatoriamente $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, 1]$

Parametrización: $\vec{r}(r, \theta) = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} + r^2 \sin \theta \cos \theta \hat{k}$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} + 2r \sin \theta \cos \theta \hat{k}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -r \sin \theta \hat{i} + r \cos \theta \hat{j} + r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \hat{k}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= r \cos^2 \theta \hat{k} - r \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \hat{j} + r \sin^2 \theta \hat{k} + r^2 \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \hat{i} \\ &\quad - 2r^2 \sin^2 \theta \cos \theta \hat{j} - 2r^2 \sin \theta \cos^2 \theta \hat{i} \\ &= r \cos^2 \theta \hat{k} - r^2 \cos^3 \theta \hat{j} + r^2 \cos \theta \sin^2 \theta \hat{j} + r \sin^2 \theta \hat{k} + r^2 \sin \theta \cos^2 \theta \hat{i} - r^2 \sin^3 \theta \hat{i} \\ &\quad - 2r^2 \sin^2 \theta \cos \theta \hat{j} - 2r^2 \sin \theta \cos^2 \theta \hat{i} \\ &= r^2 \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta) \hat{j} + r^2 \cos \theta (-\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2 \sin^2 \theta) \hat{i} \end{aligned}$$

$$+ r \hat{k}.$$



$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -r^2 \sin \theta \hat{i} - r^2 \cos \theta \hat{j} + \hat{k}$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = \sqrt{r^4 + r^4 + r^2} = \sqrt{2r^4 + r^2} = r\sqrt{2r^2 + 1}$$

A: Área,

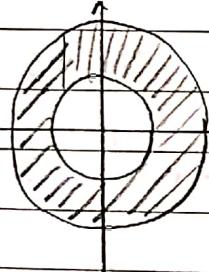
$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\sqrt{2r^2+1} dr d\theta = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{3}{2} \cdot 4 r\sqrt{2r^2+1} dr d\theta = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} (2r^2+1)^{3/2} \Big|_0^1 d\theta$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} (3^{3/2} - 1) d\theta = \frac{3^{3/2} - 1}{6} \cdot 2\pi = \frac{3^{3/2} - 1}{3} \cdot \pi$$

P.43. Área del parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.

Desarrollo. $(x,y,z) \in \text{parabolóide} \Rightarrow (x,y,z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2 \sin^2 \theta - r^2 \cos^2 \theta)$

proj. en plano $XY \Leftrightarrow (x,y,0) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$



$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$r \in [1, 2]$$

parametrización:

$$\vec{r}(r, \theta) = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} + r^2 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \hat{k}$$

16.7 Integrales de superficie

Dada la superficie parametrizable, construimos la suma de Riemann $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}^*) \Delta S_{ij}$, donde f es un campo escalar en \mathbb{R}^3 tal que

$S \subseteq \text{dom}(f)$. $P_{ij}^* \in S_{ij}(S)$

Definimos : $\iint_S f(x,y,z) dS = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}^*) \Delta S_{ij}$

ΔS_{ij} es el área del parche (i,j) de S .

Sabemos que $\Delta S_{ij} \approx |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \Delta u \Delta v$, se verifica

$$\iint_S f(x,y,z) dS = \iint_D f(\vec{r}(u,v)) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dA$$

Ejemplo. Aplicación física : Cálculo del centro de masa de una lámina

$\rho(x,y,z)$ densidad superficial en (x,y,z)

m masa : $m = \iint_S \rho(x,y,z) dS$

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ centro de masa :

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_S x \rho(x,y,z) dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_S y \rho(x,y,z) dS, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z \rho(x,y,z) dS$$

Gráficos

Para una superficie S de ecuación $z = g(x, y)$, se tiene que

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA$$

Teorema. Si superficie suave a trozos $Tq S = S_1 \cup \dots \cup S_n$, S_i suave

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} f(x, y, z) dS.$$

16.7 Ejercicios.

Pr. 5. $\iint_S x^2 y z dS$, S parte del plano $z = 1 + 2x + 3y$ sobre $[0, 3] \times [0, 2]$

Desarrollo: $\vec{r}(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j} + (1+2x+3y)\hat{k}$, $(x, y) \in [0, 3] \times [0, 2]$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \hat{i} + 2\hat{k}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \hat{j} + 3\hat{k} \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \hat{k} - 3\hat{j} - 2\hat{i}$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right\| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

$$\iint_S x^2 y z dS = \int_0^3 \int_0^2 x^2 y (1+2x+3y) \sqrt{14} dy dx =$$

P.37. Encuentre el centro de masa del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$ con densidad constante.

Desarrollo. m : masa. $m = \iiint_S \rho dV = \rho \iiint_S dV = 2\pi a^2 \rho$

Por otro lado, $\iint_S x \rho dS = \rho \iint_S x dS$, $\iint_S y \rho dS = \rho \iint_S y dS$

Coordenadas esféricas: $x = a \sin \phi \cos \theta$, $y = a \sin \phi \sin \theta$, $z = a \cos \phi$

Parametrización: $\vec{r}(\phi, \theta) = a \sin \phi \cos \theta \hat{i} + a \sin \phi \sin \theta \hat{j} + a \cos \phi \hat{k}$

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = a^2 \sin \phi . \text{ Superficie: } 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/2$$

$$\iint_S x dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (a \sin \phi \cos \theta)(a^2 \sin \phi) d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} a^3 \sin^2 \phi \cos \theta d\phi d\theta$$

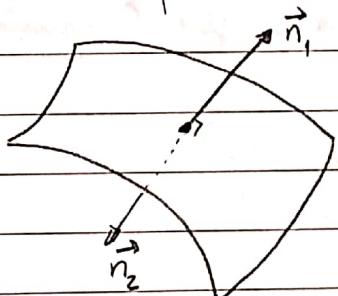
$$\iint_S y dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (a \sin \phi \sin \theta)(a^2 \sin \phi) d\phi d\theta = a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \sin \theta d\phi d\theta$$

Centro de masa: $\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_S x dS = \frac{\rho}{m} \iint_S x dS$, $\bar{y} = \frac{\rho}{m} \iint_S y dS$.

Superficies orientables.

Superficie orientable: Superficie S a la cual $\forall (x,y,z) \in S$ existe plano tangente, con vector normal \vec{n} que varía continuamente a lo largo de S (excepto ∂S).

Observación. Orientaciones posibles de una superficie:



Ejemplo. Para $z = g(x,y)$ define una superficie S con orientación natural:

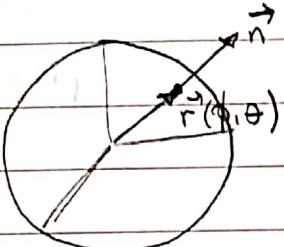
$$\vec{n} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$

Para S suave orientable con parametrización $\vec{r}(u,v)$, tenemos

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

Ejemplo. En la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, la parametrización $\vec{r}(\phi, \theta)$ definida por el cambio de coordenadas induce la orientación

$$\vec{n} = \frac{1}{a} \vec{r}(\phi, \theta)$$



Observación. Orientación positiva = la que \vec{n} apunta afuera de S .

Integrales de superficie.

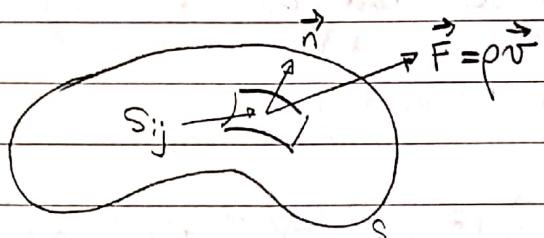
Definición. \vec{F} continuo definido a lo largo de S con orientación \vec{n} , la integral de superficie de \vec{F} a lo largo de S (\circ flujo de \vec{F} a lo largo de S) es

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

Observación. Como $dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dA$, $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dA$$

Interpretación Física del flujo.



Fluido de densidad $\rho(x, y, z)$
y velocidad \vec{v}
 $\vec{F} = \rho \vec{v}$ caudal del fluido a lo largo de S ($\frac{\text{masa}}{\text{tiempo}}$) por unidad de área.

Dividiendo S en parches pequeños S_{ij} , la masa de fluido que cruza a través de S_{ij} es $(\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) A(S_{ij})$. Podemos construir la suma de Riemann $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) A(S_{ij})$ y tomando límite, queda

$$\iint_S (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

la Taza de flujo a través de la superficie S . Como $\vec{F} = \rho \vec{v}$, se tiene

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

Ejemplo. Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = z\hat{i} + y\hat{j} + x\hat{k}$ a través de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Desarrollo. $\vec{r}(\phi, \theta) = \sin\phi \cos\theta \hat{i} + \sin\phi \sin\theta \hat{j} + \cos\phi \hat{k}$, $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\vec{F} \cdot (\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta) = \cos\phi \sin^2\phi \cos\theta + \sin^2\phi \sin^2\theta + \sin^2\phi \cos\phi \cos\theta$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta) dA = \frac{4\pi}{3}$$

Interpretación física: $\vec{F}(x,y,z)$ es el campo de velocidades que describe el flujo de un fluido de densidad cte 1. $\frac{4\pi}{3}$ es la tasa de flujo en S ($\frac{\text{unidades de masa}}{\text{unidad de tiempo}}$).

Ejemplo. Para $z = g(x,y)$, $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \left(-P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA$

Aplicación Física : (i) Electroestática.

Para \vec{E} campo eléctrico, $\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ es el flujo eléctrico.

Ley de Gauss: $Q = \epsilon_0 \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

Q : carga neta encerrada en la superficie cerrada S

$\epsilon_0 \approx 8.8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$ (permeabilidad en el vacío)

(ii) Termodinámica.

$u(x,y,z)$ temperatura en el punto (x,y,z)

Flujo de calor: $\vec{F} = -k \nabla u$

k : constante de conductividad

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = -k \iint_S \nabla u \cdot d\vec{S}$$



Tasa de flujo de calor.

16.7 Ejercicios.

P. 19. Calcular $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, $\vec{F} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$.

S : parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ sobre el cuadrado $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ con orientación positiva.

Desarrollo. Parametrización: $\vec{r}(x,y) = x\hat{i} + y\hat{j} + (4 - x^2 - y^2)\hat{k}$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \hat{i} + (-2x)\hat{k}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \hat{j} - 2y\hat{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \hat{k} + 2y\hat{j} + 2x\hat{i}, \quad \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^1 \int_0^1 ((xy, y(4-x^2-y^2), (4-x^2-y^2)x) \cdot (2x, 2y, 1)) dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (2x^2y + 2y^2(4-x^2-y^2) + (4-x^2-y^2)x) dy dx$$

Teorema de Stokes

Primera forma del teorema de Green:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \text{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{k} dA$$

El teorema de Stokes es una generalización del resultado anterior:

Teorema de Stokes: Si superficie orientable suave a trozos acotada por curva C simple y cerrada, con orientación positiva, \vec{F} campo vectorial en \mathbb{R}^3 con derivadas parciales continuas en $B \supset S$.
Se tiene:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

Observación: $\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

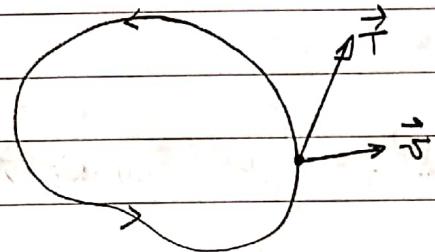
Observación. Para S_1, S_2 superficies con el mismo borde, se tiene

$$\iint_{-S_1} \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}.$$

- Teorema de Stokes y el vector rotor.

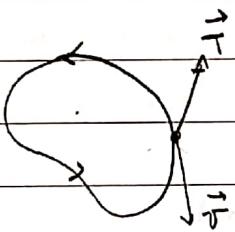
$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ campo de velocidades en un fluido.

C curva cerrada orientable



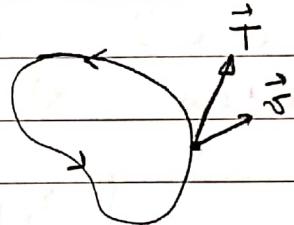
$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$ mide la tendencia del fluido a girar alrededor de C

$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$: circulación de \vec{v} alrededor de C



$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} < 0$$

circulación negativa



$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} > 0$$

circulación positiva

Para $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pto del fluido $S_a = D[P_0, a]$ disco. Si $a \ll 1$, $\text{rot}(\vec{v})(x, y, z) \approx \text{rot}(x_0, y_0, z_0) \quad \forall (x, y, z) \in S_a$. Supongamos $C_a = \partial S_a^+$

$$\int_{C_a} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_a} \text{rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_a} \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} dS$$

$$\approx \iint_{S_a} \text{rot}(\vec{v})(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{n}(x_0, y_0, z_0) dS$$

$$\approx \text{rot}(\vec{v})(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{n}(x_0, y_0, z_0) (\pi a^2)$$

$$\Rightarrow \text{rot}(\vec{v})(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{n}(x_0, y_0, z_0) \approx \frac{1}{\pi a^2} \int_{C_a} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

$$\therefore \text{rot}(\vec{v})(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{n}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\pi a^2} \int_{C_a} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

Observación. Teorema de Stokes sirve para demostrar que $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$, entonces \vec{F} es conservativo.

Ejemplo. Ejemplo 1 página 1095.

$\vec{F} = -y^2 \hat{i} + x \hat{j} + z^2 \hat{k}$, C intersección de $y+z=2$, cilindro $x^2+y^2=1$ orientado en sentido antihorario.

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{pmatrix} = (1+2y) \hat{k}$$

Teorema de Stokes : $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}$

Parametrización de S : $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z \in \mathbb{R}$

Proyección en el plano xy : $(x, y, z) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, 0), 0 \leq r \leq 1$

$$\vec{r}(r, \theta) = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} + (2 - r \sin \theta) \hat{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{k}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -r \sin \theta \hat{i} + r \cos \theta \hat{j} - r \cos \theta \hat{k}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= r \cos^2 \theta \hat{k} + r \cos^2 \theta \hat{j} + r \sin^2 \theta \hat{k} - r \sin \theta \cos \theta \hat{i} + r \sin^2 \theta \hat{j} + r \sin \theta \cos \theta \hat{i} \\ &= r \hat{j} + r \hat{k} \end{aligned}$$

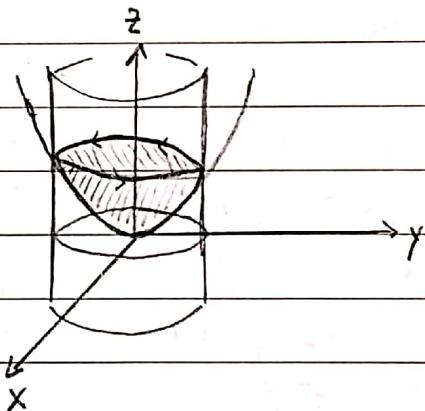
$$\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2 \sin\theta) r dr d\theta = \pi$$

16.8. Ejercicios

Pr. 3. Calcular $\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}$ donde $\vec{F} = x^2 z^2 \hat{i} + y^2 z^2 \hat{j} + xy z \hat{k}$

S es la parte del parabolóide $z = x^2 + y^2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$, con orientación positiva.

Demostración.



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow z = 4. \Rightarrow \text{Parametrización: } \vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 4) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Teorema de Stokes: $\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$\vec{r}'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 0)$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = 2^6 \cos^2(t) \hat{i} + 2^6 \sin^2(t) \hat{j} + 2^4 \sin t \cos t \hat{k}$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-2^3 \sin t \cos^2 t + 2^7 \cos t \sin^2 t) dt =$$