Universidad de las Américas.
Desarrollo Catedra 3
Noviembre 5, 2018.

Problema 1.

(i) Mediante el cambio de variable $u = 2x+1$

$du = 2dx$. Para $x=1$, $u=3$. Para $x=2$, $u=5$

$$\int_1^2 (2x+1)^{100} dx = \int_3^5 u^{100} \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int_3^5 u^{100} du = \frac{1}{2} \frac{u^{101}}{101} \Big|_3^5$$

$$= \frac{1}{202}\left(5^{101} - 3^{101}\right)$$

(ii) Mediante el cambio de variable $u = \frac{x}{2}$

$du = \frac{1}{2} dx$. Para $x=0$, $u=0$, Para $x=\pi$, $u=\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_0^{\pi/2} \cos(u) \cdot 2du = 2\int_0^{\pi/2} \cos(u) du = 2 \operatorname{sen}(u) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= 2(1-0) = 2.$$

Problema 2. $\begin{cases} y' = y(2x-1) \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Desarrollo, Como $y(0)=1$, buscamos solución $y = y(x)$, $y \neq 0$.

Por separación de variables:

$$\frac{dy}{dx} = y(2x-1) \Rightarrow \frac{dy}{y} = (2x-1)dx \quad / \int$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int (2x-1) dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = x^2 - x + C$$

luego, $|y| = e^C e^{x^2-x}$. Despejamos y:

$$y(x) = \pm e^C e^{x^2-x}$$

$$\boxed{y(x) = De^{x^2-x}}$$

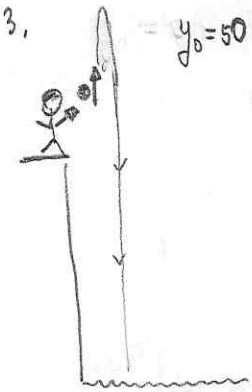
Aplicamos la condición inicial $y(0)=1$ para determinar la constante D:

$$y(0)=1=De^{1^2-1}=De^{0-0}=De^0=D\cdot 1=D$$

Luego $D=1$.

Finalmente, la solución particular es $y(x)=e^{x^2-x}$.

Problema 3.



$y_0=50\ (m)$, $m=2\ (kg)$, $v_0=2\ (m/s)$

Debido a la segunda ley de Newton:

$$my''=-mg$$

$$\boxed{y''=-g}\quad,\quad g=9.8\ (m/s^2)$$

Debemos resolver el problema de valor inicial siguiente:

$$\begin{cases} y''=-g \\ y(0)=y_0 \\ y'(0)=v_0 \end{cases}$$

Integrando 1 vez tenemos $y'(t)=-gt+C_1$

Integrando otra vez: $y(t)=-g\frac{t^2}{2}+C_1t+C_2$

Como $y(0)=y_0 \Rightarrow y(0)=-g\cdot 0+C_1\cdot 0+C_2=y_0 \Rightarrow C_2=y_0$

Como $y'(0)=v_0 \Rightarrow y'(0)=-g\cdot 0+C_1=v_0 \Rightarrow C_1=v_0$

Luego $y(t)=-\frac{gt^2}{2}+v_0t+y_0$

Reemplazamos $g=9.8$, $y_0=50$, $v_0=2$:

$$y(t)=-4.9t^2+2t+50\quad,\quad t\geq 0.$$

Sea $t_1>0$ el tiempo en el que la piedra toca el piso:

$$y(t_1)=0$$

Equivalentemente: $\quad -4.9\,t_1^2 + 2t_1 + 50 = 0$

Despejamos t_1 mediante la fórmula de segundo grado:

$$t_1 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-4.9)\cdot 50}}{-9.8}$$
$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 980}}{-9.8} \approx \frac{-2 \pm 31{,}37}{-9.8}$$

Como $t_1 > 0$, solamente la solución $t_1 \approx 3{,}41$.

Problema 4. Debemos estudiar el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -k(T-22) \\ T(0) = 89 \end{cases}$$

Para resolver $\dfrac{dT}{dt} = -k(T-22)$ ocupamos método de separación de variables

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-22) \Rightarrow \frac{dT}{T-22} = -k\,dt \Rightarrow \int \frac{dT}{T-22} = -\int k\,dt + C_1$$

$$\Rightarrow \ln|T-22| = -kt + C_1$$
$$\Rightarrow |T-22| = e^{C_1} e^{-kt} = C_2 e^{-kt}$$
$$\Rightarrow T - 22 = \pm C_2 e^{-kt}$$
$$\Rightarrow T = C_3 e^{-kt} + 22$$

Como $T(0)=89$, se tiene $T(0) = 89 = C_3 e^0 + 22 = C_3 + 22$.

Despejamos, $C_3 = 89 - 22 = 67$

Luego, $T(t) = 22 + 67\,e^{-kt}$

Para despejar k ocupamos el hecho de que $T(1) = 85$:

$$T(1) = 85 = 22 + 67\,e^{-k} \Rightarrow e^{-k} = \frac{63}{67}$$

$$k = -\ln\left(\frac{63}{67}\right) \approx 0.06$$

la función temperatura $T = T(t)$ es

$$\boxed{T(t) = 22 + 67\,e^{-0.06t}}$$