Universidad Andrés Bello - Facultad de Ciencias Exactas - Departamento de Matemáticas

CONTROL N°1 - MATEMÁTICAS AVANZADAS I - FMMP 315.

Segundo Semestre de 2018.

NOMBRE:____RUT:____________

Reglas: El control dura 50 minutos. Si no hay desarrollo que justifique una respuesta no hay puntaje. Su desarrollo debe ser ordenado y coherente. Sus respuestas finales se escriben con lápiz pasta o deben estar destacadas. Apague y guarde el celular sino se considera copia. No se aceptan hojas anexas. Los problemas se deben resolver con los contenidos vistos en clases. Con calculadora. No hay consultas. Controles sin nombre se calificarán con 1,0.

1. Calcule la siguiente integral:

$$\iiint_R 2(z+1)\,dV$$

donde R es la región encerrada por el cilindro $x^2+y^2 \leq 4$ y el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$

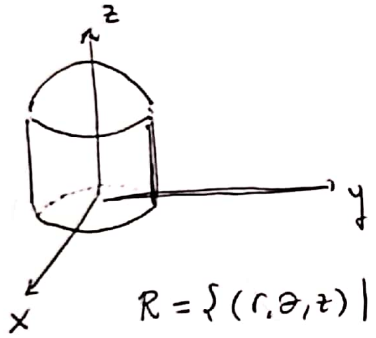
Septiembre 01, 2018.
Matemáticas Avanzadas I (FMMP315).
Desarrollo control 1.

P.1. Calcule la siguiente integral: $\iiint_R 2(z+1)\,dV$, donde R es la región encerrada por el cilindro $x^2+y^2\leq 4$ y el paraboloide $z = 9-x^2-y^2$.

Desarrollo.

$$\iiint_R 2(z+1)\,dV = 2\iiint_R z\,dV + 2\iiint_R dV$$

Cambio de coordenadas cilíndricas: $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z\in\mathbb{R}$



$$x^2+y^2\leq 4 \Rightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta \leq 4 \Rightarrow r^2\leq 4$$

Se tiene que $0\leq r\leq 2$.

$$z = 9-x^2-y^2 \Rightarrow z = 9-(x^2+y^2) = 9-r^2$$

$$R = \{(r,\theta,z) \mid 0\leq r\leq 2,\ 0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq z\leq 9-r^2\}.$$

Calculamos las integrales:

$$\iiint_R z\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{9-r^2} zr\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r\frac{z^2}{2}\bigg|_0^{9-r^2} dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{r(9-r^2)^2}{2}\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (81r-18r^3+r^5)\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{81r^2}{2} - \frac{18r^4}{4} + \frac{r^6}{6}\bigg|_0^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(162-72+\frac{64}{6}\right)d\theta = \pi\left(90+\frac{32}{3}\right) = \frac{302}{3}\pi.$$

$$\iiint_R dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{9-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r(9-r^2)\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^2 r(9-r^2)\,dr$$

$$= 2\pi\left(\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\bigg|_0^2\right) = 2\pi(18-4) = 28\pi$$

Por lo tanto, $\iiint_R 2(z+1)\,dV = \frac{604}{3}\pi + 56\pi = \pi\,\frac{604+168}{3} = \frac{772}{3}\pi$

Problema 21. Evalúe $\iiint_B (x^2+y^2+z^2)\,dV$, donde B es la bola con centro en el origen y radio 5.

Desarrollo. Cambio de coordenadas esféricas:

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \;,\quad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \;,\quad z = \rho\cos\phi$$

Jacobiano: $|J(\rho,\theta,\phi)| = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$.

$B = \{(\rho,\theta,\phi) \mid 0 \le \rho \le 5\}$.

$$\iiint_B (x^2+y^2+z^2)\,dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{5} \rho^2\cdot\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{5} \rho^4 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi .$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^5}{5}\operatorname{sen}\phi\right)\Big|_0^5 d\theta\, d\phi = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 5^4 \operatorname{sen}\phi\, d\theta\, d\phi = 5^4\cdot 2\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi = 5^4\cdot 2\pi(-\cos\phi)\Big|_0^{\pi}$$

$$= 4\cdot 5^4 \pi .$$

Problema 22. Evalúe $\iiint_H (9-x^2-y^2)\,dV$, donde H es el hemisferio sólido $x^2+y^2+z^2 \le 9$, $z \ge 0$.

Desarrollo. Consideramos el cambio de coordenadas esféricas:

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \;,\quad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \;,\quad z = \rho\cos\phi .$$

Jacobiano: $|J(\rho,\theta,\phi)| = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$.

$$9-x^2-y^2 = 9 - \rho^2\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta - \rho^2\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}^2\theta = 9-\rho^2\operatorname{sen}^2\phi$$

$$\iiint_H (9-x^2-y^2)\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{3} (9-\rho^2\operatorname{sen}^2\phi)\rho^2\operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi .$$

$$\iiint_H (9-x^2-y^2)\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^3 (9-\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi)\,\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{3} (9\rho^2 \operatorname{sen}\phi - \rho^4 \operatorname{sen}^3\phi)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

$$= 9\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi - \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^3 \rho^4 \operatorname{sen}^3\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

Calculamos las integrales separadamente:

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{3} \operatorname{sen}\phi \Big|_0^3 d\theta\, d\phi = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} 9 \operatorname{sen}\, d\theta\, d\phi$$

$$= 18\pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi\, d\phi = 18\pi\,(-\cos\phi)\Big|_0^{\pi/2} = 18\pi.$$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^3 \rho^4 \operatorname{sen}^3\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^5}{5} \operatorname{sen}^3\phi \Big|_0^3 d\theta\, d\phi = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \frac{243}{5} \operatorname{sen}^3\phi\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{486}{5}\pi \operatorname{sen}^3\phi\, d\phi = \frac{486}{5}\pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\phi\, d\phi$$

$$= \frac{486}{5}\pi \left[-\frac{1}{3}\left(\operatorname{sen}^2\phi \cos\phi + 2\cos\phi\right)\Big|_0^{\pi/2} \right]$$

$$= \frac{486}{5}\pi \left(-\frac{1}{3}\right)\left[0-0\right] = 0.$$

Por lo tanto el valor de la integral es $\iiint_H (9-x^2-y^2)\,dV = 9\cdot 18\pi = 162\pi.$

Problema 23. Evalúe $\iiint_E z\,dV$, donde E es el sólido limitado por las esferas $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$ y el primer octante.

Desarrollo. Cambio de coordenadas esféricas:

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \quad z = \rho\cos\phi.$$

Sólido $E = \{(\rho,\theta,\phi) \mid 1 \le \rho \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \phi \le \pi/2\}$.

Jacobiano: $|J(\rho,\theta,\phi)| = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$.

$$\iiint_E z\,dV = \int_1^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (\rho\cos\phi)\,\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi\, d\theta\, d\rho.$$

$$= \int_1^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \rho^3 \operatorname{sen}\phi\cos\phi\, d\phi\, d\theta\, d\rho = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \rho^3 \operatorname{sen}(2\phi)\, d\phi\, d\theta\, d\rho$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \rho^3 (-\cos(2\phi)) \Big|_0^{\pi/2} d\theta\, d\rho = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \rho^3\, d\theta\, d\rho = \frac{\pi}{4} \int_0^2 \rho^3\, d\rho$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^2 = \pi.$$

Matemáticas Avanzadas I
Proyecto Ayudantía 11/09/2018.

P.14. Dibuje el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = \left(y, \frac{1}{x}\right)$

Desarrollo. $dom(\vec{F}) = \{(x,y) \mid x \neq 0\}$.

módulo : $\|\vec{F}(x,y)\|^2 = y^2 + \frac{1}{x^2}$, $\|\vec{F}(x,y)\| = \sqrt{y^2 + \frac{1}{x^2}}$.

dirección : $\tan(\theta(x,y)) = \frac{1}{xy}$. $\iff \theta(x,y) = \arctan\left(\frac{1}{xy}\right)$.

Para $y = y_0$: $\|\vec{F}(x,y_0)\| > \|\vec{F}(\tilde{x},y_0)\|$ si $|x|<|\tilde{x}|$. En particular $\lim_{|x|\to 0} \|\vec{F}(x,y_0)\| = 0$.

Como $\tan(\theta(x,y)) = \frac{1}{xy}$, $0 < \theta < \pi/2$ para $x,y>0$ ó $x,y<0$.
$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ para $x>0, y<0$ ó $x<0, y>0$.

$\|\vec{F}(x,y)\| = k \Rightarrow y^2 + \frac{1}{x^2} = k^2 \Rightarrow y^2 = k^2 - \frac{1}{x^2}$

Consideramos las funciones $f_{1,k}(x) = \sqrt{k^2 - \frac{1}{x^2}}$, $f_{2,k}(x) = -\sqrt{k^2 - \frac{1}{x^2}}$

$dom(f_{1,k}) = \{x \in \mathbb{R} \mid (xk)^2 > 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid xk \geq 1 \text{ ó } xk \leq -1\}$

$f_{1,k}'(x) = \frac{1}{2}\left(k^2 - \frac{1}{x^2}\right)^{-1/2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{x^3}$ creciente en $\left(\frac{1}{k}, \infty\right)$; decreciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{k}\right)$.

⋮

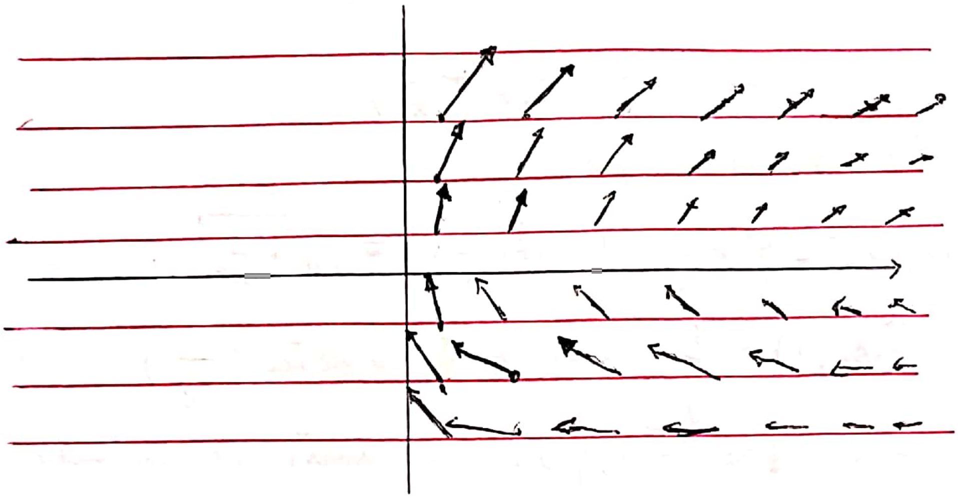
Para $\tan(\theta) = k \iff \frac{1}{xy} = k \iff \frac{1}{k} = xy$.

Para $y \to 0^+$, $\theta = \arctan\left(\frac{1}{xy}\right) \to \frac{\pi}{2}$, $x>0$
$\to -\frac{\pi}{2}$, $x<0$

Para $y \to 0^-$, $\theta = \arctan\left(\frac{1}{xy}\right) \to \frac{\pi}{2}$, $x<0$
$\to -\frac{\pi}{2}$, $x>0$.

Para $x = x_0$: $\lim_{|y| \to \infty} \|\vec{F}(x,y)\| = \infty$, $\lim_{|y| \to 0} \|\vec{F}(x,y)\| = \frac{1}{|x|}$

Ahora podemos dibujar el campo vectorial $\vec{F}(x,y)$:



$\tan(\theta) \to 0$ cuando $|x| \to 0$, $|y| \to 0$.

Tarea : Completar el dibujo en clases

$\tan(\theta) = \frac{1}{xy} \Leftrightarrow \theta = \arctan\left(\frac{1}{xy}\right)$.

Si $x > 0$: $\theta \to 0^+$ si $y \to \infty$, $\theta \to 0^-$ si $y \to -\infty$.

Si $x < 0$: $\theta \to 0^+$ si $y \to -\infty$, $\theta \to 0^+$ si $y \to +\infty$

Universidad Andrés Bello - Facultad de Ciencias Exactas - Departamento de Matemáticas

CONTROL N°2 - MATEMÁTICAS AVANZADAS I - FMMP 315.

Segundo Semestre de 2018.

NOMBRE: Marco Alejandro Galoy Valdebenito. RUT: 17.022.457-4

PROFESOR: Cristian Hernández NOTA: 7,0

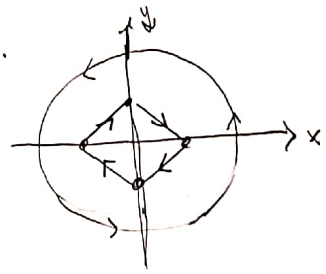
Reglas: El control dura 60 minutos. Si no hay desarrollo que justifique una respuesta no hay puntaje. Su desarrollo debe ser ordenado y coherente. Sus respuestas finales se escriben con lápiz pasta o deben estar destacadas. Apague y guarde el celular sino se considera copia. No se aceptan hojas anexas. Los problemas se deben resolver con los contenidos vistos en clases. Con calculadora. No hay consultas. Controles sin nombre se calificarán con 1, 0.

1. Verificar el Teorema de Green con el campo:

$$\vec{F}(x,y) = (x+y, 2x-y)$$

, y el camino cuya imagen es la frontera, en sentido positivo, de la región comprendida entre el círculo $x^2+y^2=4$ y el cuadrado de vértices $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$.

Desarrollo.



$s(t) = \ell(t+1) = (0,-1)+(t+1)(-1,1)$

$s(-1) = (0,-1)$

$s(0) = (0,-1)+(-1,1) = (-1,0)$

$s(t) = (-t-1, t)$

$\ell(t) = (0,-1)+t(-1,1)$

$\ell(0) = (0,-1)$

$\ell(1) = (0,-1)+(-1,1) = (-1,0)$

biyección entre $[0,1]$, $[-1,0]$

$y = x-1$ $\to$ $f(t) = t-1$ $\to$ $f^{-1}(t) = t+1$

$f(0) = -1$

$f(1) = 0$

$r(0) = (1,0)$

$r(1) = (0,-1)$

$s(t) = r(1-t) = (1-t, -t)$

$r(0) = (0,-1)$

$r(1) = (1,0)$

$r(t) = (t, t-1)$

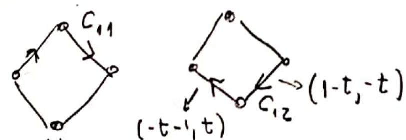
Campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (x+y, 2x-y)$.

Teorema de Green: $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$.

Primero Calculamos $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

$C = C_1 \cup C_2$, C_1: cuadrado, C_2 círculo.

$$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{C_{11}} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_{12}} P\,dx + Q\,dy ,$$



$$\int_{C_{11}} P\,dx + \int_{C_{11}} Q\,dy = \int_{-1}^{0} (x+x+1)\,dx + \int_0^1 (x-x+1)\,dx + \int_{-1}^{0} (2x-(x+1))\,dx + \int_0^1 (2x-(-x+1))(-dx)$$

$$= \int_{-1}^{0} (2x+1)\,dx + \int_0^1 dx + \int_{-1}^{0} (x-1)\,dx - \int_0^1 (3x-1)\,dx$$

$$= x^2+x\Big|_{-1}^{0} + 1 + \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{-1}^{0} - \left(\frac{3x^2}{2}-x\right)\Big|_0^1 = -(\cancel{1-1}) + 1 + \left(0-\left(\frac{1}{2}+1\right)\right) - \left(\frac{3}{2}-1\right)$$

$$= 1 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1-2 = -1$$

$$\int_{C_{12}} P\,dx + Q\,dy = \int_{C_{12}} P\,dx + \int_{C_{12}} Q\,dy = \int_0^1 (1-t-t)(-dt) + \int_{-1}^{0} (-t-1-t)(-dt) + \int_0^1 (2-2t-t)(-dt) + \int_{-1}^{0} (-2t-2-t)\,dt$$

$$= -\int_0^1 (1-2t)\,dt - \int_{-1}^{0} (-2t-1)\,dt - \int_0^1 (-3t+2)\,dt + \int_{-1}^{0} (-3t-2)\,dt$$

$$= (t^2-t)\Big|_0^1 + (t^2+t)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{3t^2}{2}-2t\right)\Big|_0^1 - \left(\frac{3t^2}{2}+2t\right)\Big|_{-1}^{0} = -(1-1) + \left(\frac{3}{2}-2\right) + \left(\frac{3}{2}-2\right) = 3-4 = -1$$

Luego: $\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2$

Ahora calculamos la integral de línea sobre el círculo.

Para $x^2+y^2=4$, $\vec{r}(t) = (2\cos(t), 2\,\text{sen}(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

$\vec{r}\,'(t) = (-2\,\text{sen}(t), 2\cos(t))$

$\vec{F}(x,y) = (x+y, 2x-y)$, $\vec{F}(\vec{r}(t)) = (2(\text{sen}(t)+\cos(t)), 4\cos(t) - 2\,\text{sen}(t))$

$$\oint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left[-4\,\text{sen}(t)(\text{sen}(t)+\cos(t)) + 2\cos(t)(4\cos(t) - 2\,\text{sen}(t))\right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-4\,\text{sen}^2(t) - 4\,\text{sen}(t)\cos(t) + 8\cos^2(t) - 4\,\text{sen}(t)\cos(t)\right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[8\cos^2(t) - 8\,\text{sen}(t)\cos(t) - 4\,\text{sen}^2(t)\right] dt = \int_0^{2\pi} \left[-4 + 12\cos^2(t) - 4\,\text{sen}(2t)\right] dt$$

$$= -8\pi + 12\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\,dt - 4\int_0^{2\pi} \text{sen}(2t)\,dt$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \text{sen}^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 \Rightarrow \cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\,dt = \pi + \int_0^{2\pi} \cos(2t)\,dt = \pi + \frac{1}{2}\,\text{sen}(2t)\Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}(2t)\,dt = -\frac{1}{2}\cos(2t)\Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Luego: $\oint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -8\pi + 12\pi - 4\cdot 0 = 4\pi$

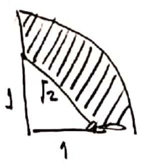
Finalmente: $\boxed{\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 4\pi - 2}$

Ahora calculamos $\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$.

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$.

Se tiene: $\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_A (2-1)\,dx\,dy = \iint_A dx\,dy$

Para calcular $\iint_A dx\,dy = \text{Area}(A)$ ocupamos geometría básica.



Area triangulo $= \frac{1}{2}$

Area circulo $= \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 4 = \pi$

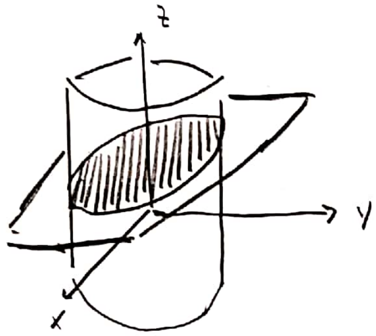
$4\,(\text{Area achurada}) = \iint_A dx\,dy = 4\left(\pi - \frac{1}{2}\right) = 4\pi - 2.$ $\boxed{\therefore \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 4\pi - 2}$

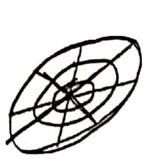
En conclusión: sí se cumple el Teorema de Green.

Universidad Andrés Bello.
Matemáticas Avanzadas I
Ejercicio Propuesto
Octubre 4, 2018.

P.38. Calcular el área del plano $2x+5y+z=10$ que queda dentro del cilindro $x^2+y^2=9$

Desarrollo. Ocupamos coordenadas cilíndricas $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$; $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$





$9 = x^2+y^2 = r^2(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = r^2$

Por lo tanto $0 \leq r \leq 3$

De lo que $z = 10 - 2r\cos\theta - 5r\,\text{sen}\,\theta$

donde : $(r,\theta) \in [0,3] \times [0,2\pi]$

En ese caso, $(x,y,z) = (r\cos\theta,\ r\,\text{sen}\,\theta,\ 10-2r\cos\theta-5r\,\text{sen}\,\theta)$

Parametrización : $\vec{\alpha}(r,\theta) = r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\jmath} + (10-2r\cos\theta-5r\,\text{sen}\,\theta)\,\hat{k}$

$\vec{\alpha}_r = \cos\theta\,\hat{\imath} + \text{sen}\,\theta\,\hat{\jmath} + (-2\cos\theta - 5\,\text{sen}\,\theta)\,\hat{k}$, $\vec{\alpha}_\theta = -r\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\imath} + r\cos\theta\,\hat{\jmath} + (2r\,\text{sen}\,\theta - 5r\cos\theta)\,\hat{k}$

$$\vec{\alpha}_r \times \vec{\alpha}_\theta = \det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & -2\cos\theta - 5\,\text{sen}\,\theta \\ -r\,\text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 2r\,\text{sen}\,\theta - 5r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\left(2r\,\text{sen}^2\theta - 5r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + 2r\cos^2\theta + 5r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\right) - \hat{\jmath}\left(\cancel{2r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta} - 5r\cos^2\theta - \cancel{2r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta} + 5r\,\text{sen}^2\theta\right) + r\hat{k}$$

$$= 2r\,\hat{\imath} + 5r\,\hat{\jmath} + r\,\hat{k},$$

Luego se tiene $\|\vec{\alpha}_r \times \vec{\alpha}_\theta\|^2 = 4r^2+25r^2+r^2 = 30r^2$, i.e, $\|\vec{\alpha}_r \times \vec{\alpha}_\theta\| = r\sqrt{30}$

A = área de la superficie

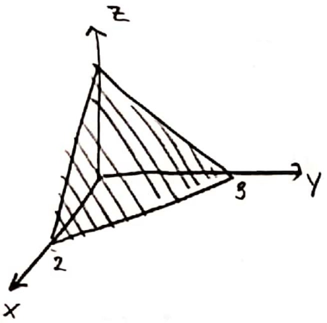
$$A = \int_0^3\int_0^{2\pi} r\sqrt{30}\,d\theta\,dr = 2\pi\sqrt{30}\int_0^3 r\,dr = 2\pi\sqrt{30}\left(\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^3 = \frac{2\pi\sqrt{30}\cdot 9}{2}$$

$$A = 9\sqrt{30}\,\pi$$

P.37. Encuentre el área del plano que se encuentra en el primer octante, donde Π : $3x+2y+z=6$. (Resolver este problema mediante parametrización por gráfico de una función)

Desarrollo. $3x+2y+z=6 \Rightarrow z=f(x,y)=6-3x-2y$

la parametrización es : $\vec{r}(x,y)=x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+(6-3x-2y)\hat{k}$



Si A = área de la superficie

$$A=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

donde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R} \mid 0\leq x\leq 2 \ , \ 0\leq y\leq -\frac{3}{2}x+3\}$

$\frac{\partial f}{\partial x}=-3$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-2$, En ese caso:

$$A=\int_0^2\int_0^{-\frac{3}{2}x+3}\sqrt{1+9+4}\, dy\, dx = 14\iint_0^{2}\int_0^{-\frac{3}{2}x+3} dy\, dx=\sqrt{14}\cdot \text{Area}(D)=\sqrt{14}\cdot\frac{2\cdot 3}{2}=3\sqrt{14}$$

Scanned with CamScanner

Calculo vectorial, Marsden Tromba
Problemas resueltos
Octubre 9, 2018

P.4. (a) Mostrar que la integral de trayectoria de $f(x,y)$ a lo largo de una trayectoria dada en coordenadas polares por $r=r(\theta)$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

(b) Calcular la longitud de arco de $r = 1+\cos\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$

Desarrollo, (a) Tenemos que $\sigma(t) = (x(t), y(t))$.

Por coordenadas polares $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, $r = r(\theta)$. En particular $r = r(\theta(t))$

$\int_\sigma f(x,y)\,ds = \int_a^b f(\sigma(t))\,\|\sigma'(t)\|\,dt$. Primero debemos calcular $\sigma'(t)$

$\sigma'(t) = (x'(t), y'(t))$, donde $x'(t) = \frac{dr}{d\theta}\theta'\cos\theta - r\,\mathrm{sen}(\theta)\,\theta'$

$y'(t) = \frac{dr}{d\theta}\theta'\,\mathrm{sen}\,\theta + r\cos\theta\cdot\theta'$

$$\|\sigma'(t)\|^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2(\theta')^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\theta\cdot(\theta')^2 \cancel{- 2r(\theta')^2\frac{dr}{d\theta}\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta} + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2(\theta')^2\mathrm{sen}^2\theta + r^2\cos^2\theta\cdot(\theta')^2 \cancel{+ 2r\frac{dr}{d\theta}(\theta')^2\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}$$

$$= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2(\theta')^2 + r^2\cdot(\theta')^2 = (\theta')^2\left(r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right)$$

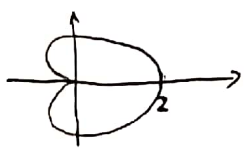
Luego: $\|\sigma'(t)\| = |\theta'|\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$.

Como $\theta = \theta(t)$ es creciente, $\theta' > 0 \to \|\sigma'(t)\| = \theta'\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)}$

Por teo. cambio de variable: $d\theta = \theta'dt$, $\theta(a) = \theta_1$, $\theta(b) = \theta_2$ y además

$$\int_\sigma f\,ds = \int_a^b f(x,y)\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,\theta'\,dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta. \quad \square$$

(b) La gráfica de $r = 1+\cos(\theta)$ es aproximadamente esto:



La longitud de la curva es $L = \int_\sigma ds = \int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$

$\frac{dr}{d\theta} = -\mathrm{sen}\,\theta$, $r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = 1+\cos^2\theta + 2\cos\theta + \mathrm{sen}^2\theta = 2+2\cos\theta$

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos(\theta)}\,d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos(\theta)}\,d\theta$$

Identidad trigonométrica: $\cos(\theta) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \left(1-\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$

$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\cos(\theta)+1}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cos(\theta)+1}{2}}$

Luego: $L = 2\int_0^{2\pi}\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|d\theta = 2\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta - 2\int_\pi^{2\pi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi} - 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big|_\pi^{2\pi} = 4+4 = 8$

Marsden Tromba, Cálculo vectorial
Desarrollo Problemas resueltos
Octubre 9, 2018.

Problemas página 436. (Integrales sobre trayectorias y superficies).

Problema 4. Sea σ una trayectoria suave.
(a) Suponer que $\vec{F}$ es perpendicular a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$. Mostrar que $\int_\sigma \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0$
(b) Si $\vec{F}$ es paralelo a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$, mostrar que $\int_\sigma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_\sigma \|\vec{F}\| ds$

Demostración.
(a) Por hipótesis, $\vec{F}(\sigma'(t))\cdot\sigma'(t) = 0$. En ese caso,

$$\int_\sigma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)dt = \int_a^b 0\,dt = 0.$$

(b) $\vec{F}$ paralelo a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$ significa $\vec{F}(\sigma(t)) = \lambda(t)\sigma'(t)$, $\lambda(t)\in\mathbb{R}\ \forall t$

$$\int_\sigma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)dt = \int_a^b \lambda(t)\left(\sigma'(t)\cdot\sigma'(t)\right)dt = \int_a^b \lambda\|\sigma'(t)\|^2 dt$$

$$= \int_a^b \lambda(t)\|\sigma'(t)\|\,\|\sigma'(t)\|dt = \int_\sigma \lambda(t)\|\sigma'(t)\|\,ds$$

En el caso de que $\lambda(t)>0$ (en el libro lo asume), se tiene que $\int_\sigma \lambda(t)\|\sigma'(t)\|ds = \int_\sigma \|\vec{F}\|ds$.

Por lo tanto, $\int_\sigma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_\sigma \|\vec{F}\|ds$. $\square$

Problema 5. Suponer que σ tiene longitud l y $\|\vec{F}\|\leq M$. Probar que $\left|\int_\sigma \vec{F}\cdot d\vec{s}\right| \leq Ml$

Demostración. $$\left|\int_\sigma \vec{F}\cdot d\vec{s}\right| = \left|\int_a^b \vec{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)dt\right| \leq \int_a^b \left|\vec{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\right|dt$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz: $|\vec{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)| \leq \|\vec{F}(\sigma(t))\|\,\|\sigma'(t)\|$

$$\int_a^b |\vec{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)|dt \leq \int_a^b \|\vec{F}(\sigma(t))\|\,\|\sigma'(t)\|dt \leq M\underbrace{\int_a^b \|\sigma'(t)\|dt}_{\text{longitud de } \sigma} = Ml. \quad \square$$

Marsden Tromba - Cálculo vectorial
Desarrollo problemas resueltos
Octubre 9, 2018.

Página 497, Teoremas integrales del cálculo vectorial

Problema (Teorema 3:). Deduzca la forma vectorial del Teorema de Green.

Demostración. El Teorema de Green dice que

$$\int_{\partial D^+} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \ , \text{ donde } \vec{F} = (P, Q)$$

Por otro lado: $\nabla \times \vec{F} = \text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = -\partial_z Q\hat{\imath} + \partial_z P\hat{\jmath} + (\partial_x Q - \partial_y P)\hat{k}$

Pero $\partial_x Q - \partial_y P = \text{rot}(\vec{F})\cdot\hat{k}$. Por lo tanto:

$$\int_{\partial D^+} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_D \text{rot}(\vec{F})\cdot\hat{k}\, dA. \qquad \square$$

Problema. Demuestre el Teorema de la divergencia en el plano:

$$\int_{\partial D^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \iint_D \text{div}(\vec{F})\, dA,$$

donde $\vec{n} = \dfrac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$, $\vec{F} = (P, Q)$

Demostración. $\text{div}(\vec{F}) = \nabla\cdot\vec{F} = \partial_x P + \partial_y Q$

$$\int_{\partial D^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \int_{\partial D^+} \frac{Py' - Qx'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}\, ds = \int_a^b (Py' - Qx')\, dt$$, porque $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$

donde σ parametriza el borde ∂D^+.

Por otro lado, $\text{div}(\vec{F}) = \partial_x P + \partial_y Q = \partial_x P - \partial_y(-Q)$.

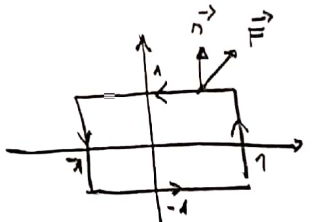
Ocupando el Teorema de Green,

$$\iint_D \text{div}(\vec{F})\, dA = \int_{\partial D^+} (-Q, P)\cdot d\vec{s} = \int_a^b (-Q, P)\cdot(x', y')\, dt = \int_a^b (Py' - Qx')\, dt$$

Por lo tanto: $$\int_{\partial D^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \iint_D \text{div}(\vec{F})\, dA$$

Ejemplo 4. Sea $\vec{F} = y^3\hat{\imath} + x^5\hat{\jmath}$. Calcular la componente normal de $\vec{F}$ alrededor del cuadrado unitario.

Desarrollo.



$D = [0,1]\times[0,1]$

Tenemos $\displaystyle\int_{\partial D^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \operatorname{div}(\vec{F})\,dA$, pero $\operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla\cdot\vec{F} = 0$

Luego $\displaystyle\int_{\partial D^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = 0$.

——— o ———

Lección Ejercicios (página 500)

P.2. Hallar el área del disco D de radio R usando el Teorema de Green.

Desarrollo. Sin pérdida de generalidad, $D = \{x^2+y^2 \leq R^2\}$

A: Área Disco D.

$$A = \iint_D dA = \frac{1}{2}\iint_D (\partial_x Q - \partial_y P)\,dA, \quad \text{donde } Q = x,\ P = -y$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\partial D^+} (x,-y)\cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-R\,\mathrm{sen}(\theta), -R\cos\theta)\cdot(-R\,\mathrm{sen}\,\theta, R\cos\theta)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (R^2\,\mathrm{sen}^2\theta + R^2\cos^2\theta)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2\,dt = \frac{1}{2}R^2\int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2}2\pi R^2 = \pi R^2. \qquad \square$$

P.4. Usando el Teorema de la divergencia, mostrar que $\int_{\partial D} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = 0$ donde $\vec{F} = y\hat{\imath} - x\hat{\jmath}$ y D es el disco unitario. Verificar esto directamente.

Demostración.

Mediante el Teorema de la divergencia, $\displaystyle\int_{\partial D} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_D \operatorname{div}(\vec{F})\,dA$.

$\operatorname{Div}(\vec{F}) = \nabla\cdot\vec{F} = \partial_x y - \partial_y x = 0 - 0 = 0$. Por lo tanto $\displaystyle\int_{\partial D} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = 0$.

Verificación directa de la igualdad.

$\sigma(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t))$, $t \in [0,2\pi]$, $\displaystyle\vec{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{((x')^2+(y')^2)^{1/2}}$

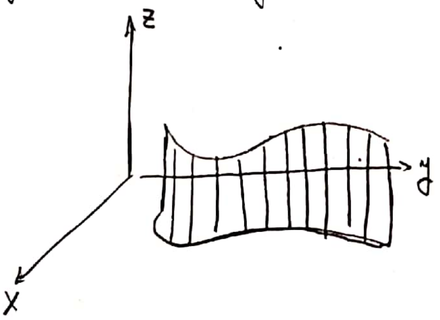
$$\int_{\partial D} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(t)\cos(t) + (-\cos(t))(\mathrm{sen}(t))\,dt = \int_0^{2\pi} 0\,dt = 0$$

M. Tromba. Cálculo vectorial
Resumen integrales de línea y superficie
Octubre 8, 2018.

Definición. Integral de línea de $f=f(x,y,z)$ a lo largo de una trayectoria $\sigma: I=[a,b]\to \mathbb{R}^3$ de clase C^1:

$$\int_\sigma f\,ds=\int_a^b f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|\,dt$$

Observación. $\int_\sigma f\,ds$ generaliza la integral de Riemann $\int_a^b f(x)dx$ en el caso de $\sigma: I\to\mathbb{R}^2$.



Observación. $\int_\sigma f\,ds$ es independiente de las reparametrizaciones de σ: $\int_\sigma f\,ds=\int_\rho f\,ds$.

Definición. La integral de línea de un campo vectorial se define como

$$\int_\sigma \vec{F}\cdot d\vec{s}=\int_a^b \vec{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt$$

Propiedad fundamental: $\int_{-\sigma}\vec{F}\cdot d\vec{s}=-\int_\sigma \vec{F}\cdot d\vec{s}$, donde $-\sigma$ es el camino opuesto de σ.

Observación. Otras definiciones de la integral de línea:

$$\int_\sigma \vec{F}\cdot d\vec{s}=\int_\sigma \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds=\int_\sigma F_1dx+F_2dy+F_3dz \quad \text{, donde } \vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$$

$F_1dx+F_2dy+F_3dz$ se llama "forma diferencial".

Teorema fundamental del cálculo para integrales de línea:
Para $\vec{F}=\nabla f$, tenemos:

$$\int_\sigma \vec{F}\cdot d\vec{s}=f(\sigma(b))-f(\sigma(a))$$

Integrales de superficie.

Superficie parametrizada por $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$S = \Phi(D) \quad , \quad \Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

Φ diferenciable siempre y cuando x, y, z diferenciables continuas.

Definimos: $$\vec{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\,\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\,\hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\,\hat{k}$$
$$\vec{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\,\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\,\hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\,\hat{k}$$

Vectores tangentes de $t \mapsto \Phi(t, v_0)$, $t \mapsto \Phi(u_0, t)$ en el punto $\Phi(u_0, v_0)$.

S suave en el punto $\Phi(u_0, v_0)$ siempre y cuando $T_u \times T_v \neq \vec{0}$.

Plano tangente de $\Phi(D) = S$ en el punto $\Phi(u_0, v_0)$ es $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (T_u \times T_v) = 0$

Definición. $\vec{n} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v$.

Cuando la superficie S es el gráfico de una función $z = g(x, y)$, se puede conseguir una parametrización

$$x = u \quad , y = v \quad , \quad z = g(u, v).$$

$$\vec{T}_u = \hat{\imath} + \frac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0)\,\hat{k} \quad , \quad \vec{T}_v = \hat{\jmath} + \frac{\partial g}{\partial v}(u_0,v_0)\,\hat{k}$$

$$\vec{n} = T_u \times T_v = -\frac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0)\,\hat{\imath} - \frac{\partial g}{\partial v}(u_0,v_0)\,\hat{\jmath} + \hat{k} \neq \vec{0}.$$

* Largo de una curva y área de una superficie:

- Largo de una curva σ: $\quad l(\sigma) = \int_\sigma ds = \int_a^b \|\sigma'(t)\|\, dt$

  En caso de parametrización por longitud de arco: $l(\sigma) = \int_0^{l(\sigma)} \|\vec{T}'(t)\|\, dt$

- Área de una superficie S: $\quad A = \iint_D \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|\, du\,dv$

Integrales de funciones escalares sobre superficies

$f: S \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, S superficie

$$\iint_S f\, dS = \iint_D f(\Phi(u,v)) \| \vec{T}_u \times \vec{T}_v \| \, du\, dv$$

Integrales de superficie de funciones vectoriales.

$$\iint_\Phi \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) \, du\, dv$$

Teorema. (i) S una superficie orientada ; Φ_1 y Φ_2 parametrizaciones suaves que preservan la orientación. $\vec{F}$ campo vectorial continuo :

$$\iint_{\Phi_1} \vec{F} \cdot dS = \iint_{\Phi_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Si Φ_1 preserva la orientación y Φ_2 la invierte, entonces

$$\iint_{\Phi_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = - \iint_{\Phi_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

(ii) Φ_1, Φ_2 parametrizaciones independientes si preservan o no la orientación

$$\iint_{\Phi_1} f\, dS = \iint_{\Phi_2} f\, dS .$$

Teorema $\displaystyle \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$, donde $\displaystyle \vec{n} = \frac{\vec{T}_u \times \vec{T}_v}{\| \vec{T}_u \times \vec{T}_v \|}$

"La integral de superficie de $\vec{F}$ sobre S, es igual a la integral de la componente normal de $\vec{F}$ sobre la superficie"

Mardsen Tromba - Cálculo vectorial
Problemas resueltos integrales de superficie
Octubre 08, 2018.

Problema. Usar el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea

$$\int_C -y^3dx + x^3dy - z^3dz ,$$

donde C es la intersección del cilindro $x^2+y^2=1$ y el plano $x+y+z=1$, la orientación de C corresponde al movimiento en el sentido contrario al que giran las manecillas del reloj, en el plano xy.

Desarrollo. $\int_C -y^3dx + x^3dy - z^3dz = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $\vec{F}(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3)$

Teorema de Stokes: $\int_{\partial C} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S}$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\cdot 0 - \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}(3x^2-3y^2) = (3x^2+3y^2)\hat{k}$$

Buscamos parametrización de S:

Coordenadas polares: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$. $z = 1-x-y = 1-r\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta$

Parametrización: $\Phi(r,\theta) = r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\jmath} + (1-r\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta)\,\hat{k}$, $(r,\theta)\in[0,1]\times[0,2\pi]$

$\partial_r\Phi = \cos\theta\,\hat{\imath} + \text{sen}\,\theta\,\hat{\jmath} + (-\cos\theta - \text{sen}\,\theta)\,\hat{k}$, $\partial_\theta\Phi = -r\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\imath} + r\cos\theta\,\hat{\jmath} + (r\,\text{sen}\,\theta - r\cos\theta)\,\hat{k}$

$$\begin{aligned}\partial_r\Phi\times\partial_\theta\Phi &= r\cos^2\theta(\hat{\imath}\times\hat{\jmath}) + (r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - r\cos^2\theta)(\hat{\imath}\times\hat{k}) + (-r\,\text{sen}^2\theta)(\hat{\jmath}\times\hat{\imath}) + (r\,\text{sen}^2\theta - r\cos\theta\,\text{sen}\,\theta)(\hat{\jmath}\times\hat{k}) \\ &\quad + (r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + r\,\text{sen}^2\theta)(\hat{k}\times\hat{\imath}) + (-r\cos^2\theta - r\cos\theta\,\text{sen}\,\theta)(\hat{k}\times\hat{\jmath}) \\ &= r\cos^2\theta\,\hat{k} - (r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - r\cos^2\theta)\hat{\jmath} + r\,\text{sen}^2\theta\,\hat{k} + (r\,\text{sen}^2\theta - r\cos\theta\,\text{sen}\,\theta)\hat{\imath} \\ &\quad + (r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + r\,\text{sen}^2\theta)\hat{\jmath} + (r\cos^2\theta + r\cos\theta\,\text{sen}\,\theta)\hat{\imath} \\ &= r\hat{\imath} + r\hat{\jmath} + r\hat{k}.\end{aligned}$$

$$\iint_S \text{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} = \iint_S \text{rot}(\vec{F})\cdot\frac{\partial_r\Phi\times\partial_\theta\Phi}{\|\partial_r\Phi\times\partial_\theta\Phi\|}\,\|\partial_r\Phi\times\partial_\theta\Phi\|\,du\,dv = \iint \text{rot}(\vec{F})\cdot(\partial_r\Phi\times\partial_\theta\Phi)\,du\,dv$$

$$= \iint_S (3r^2\hat{k})\cdot(r\hat{\imath} + r\hat{\jmath} + r\hat{k})\,d\theta\,dr$$

$$= \iint_S 3r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^3 = 2\pi\,\frac{3r^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{2}.$$

Observación. Segunda forma de desarrollo.

S puede verse como el gráfico de la función $z = 1 - x - y$ en el dominio $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

La parametrización es

$$\Phi(x,y) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + (1-x-y)\hat{k}$$

$\partial_x \Phi = \hat{\imath} - \hat{k}$, $\partial_y \Phi = \hat{\jmath} - \hat{k}$

$\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi = (\hat{\imath} - \hat{k}) \times (\hat{\jmath} - \hat{k}) = \hat{\imath} \times \hat{\jmath} - \hat{\imath} \times \hat{k} - \hat{k} \times \hat{\jmath} + \hat{k} \times \hat{k} = \hat{k} + \hat{\jmath} + \hat{\imath} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$.

Calculamos el rotor de $\vec{F}$

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = (3x^2 + 3y^2)\hat{k}.$$

Teorema de Stokes: $\displaystyle\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_D (3x^2 + 3y^2)\hat{k} \cdot (\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})\, dx\,dy$

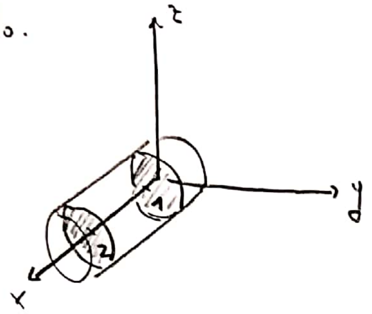
$$= 3\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\,dy$$

Cambiando a coordenadas polares, finalmente queda $\displaystyle\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{2}$. $\square$

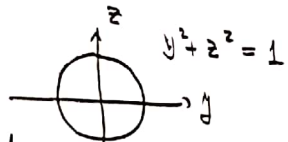
Universidad Andrés Bello
Problemas resueltos Cálculo vectorial
Octubre, 2018.

Problema 1 Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F} = 3xy^2\,\hat{\imath} + xe^z\,\hat{\jmath} + z^3\,\hat{k}$ a través de la superficie S que consiste en el cilindro $y^2+z^2=1$ y los planos $x=1$, $x=2$.

Desarrollo.



proyección en el plano yz:



Hacemos cambio de coordenadas:

$$\begin{cases} y = r\cos\theta \\ z = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Matriz Jacobiana es $J(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $|J(r,\theta)| = r$

mediante el Teorema de la divergencia:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_E \mathrm{div}(\vec{F})\,dV = 3\iiint_E y^2+z^2\,dV = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_1^2 r^3\,dx\,dr\,d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

Problema 2. Verificar el Teorema de Stokes para el hemisferio superior $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $z\geq 0$ y el campo vectorial radial $\vec{F}(x,y,z) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$.

Desarrollo. Teorema de Stokes: $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S}$

Parametrización superficie: $\Phi(x,y) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + \sqrt{1-x^2-y^2}\,\hat{k}$

$$\Phi_x = \hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + -x(1-x^2-y^2)^{-1/2}\,\hat{k}$$

$$\Phi_y = 0\hat{\imath} + \hat{\jmath} - y(1-x^2-y^2)^{-1/2}\,\hat{k}$$

$$\Phi_x \times \Phi_y = \hat{k} + y(1-x^2-y^2)^{-1/2}\,\hat{\jmath} + x(1-x^2-y^2)^{-1/2}\,\hat{\imath}$$

$$\|\Phi_x\times\Phi_y\|^2 = 1 + (1-x^2-y^2)^{-1}(x^2+y^2) = \frac{1-x^2-y^2+x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \quad \|\Phi_x\times\Phi_y\| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0\hat{\imath} - 0\hat{\jmath} + 0\hat{k} = 0.$$ Por lo tanto; $\iint_S \mathrm{rot}(\vec{F})\,d\vec{S} = 0$.

Por otro lado: $z=0$ implica $x^2+y^2=1$.

Cambio de coordenadas $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $r=1$. $\vec{r}\,'(\theta) = (-\mathrm{sen}\,\theta, \cos\theta, 0)$

$$\vec{F}(\vec{r}(\theta))\cdot\vec{r}\,'(\theta) = (\cos\theta\,\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath})\cdot(-\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}) = 0 \quad \therefore \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0.$$

Universidad Andrés Bello - Facultad de Ciencias Exactas - Departamento de Matemáticas

CONTROL N° 3 - MATEMÁTICAS AVANZADAS I - FMMP 315.

Segundo Semestre de 2018.

NOMBRE: Marco Alejandro Godoy Valdebenito RUT: 17.022.457-4

PROFESOR:_______________ NOTA:___________

Reglas: El control dura 60 minutos. Si no hay desarrollo que justifique una respuesta no hay puntaje. Su desarrollo debe ser ordenado y coherente. Sus respuestas finales se escriben con lápiz pasta o deben estar destacadas. Apague y guarde el celular sino se considera copia. No se aceptan hojas anexas. Los problemas se deben resolver con los contenidos vistos en clases. Con calculadora. No hay consultas. Controles sin nombre se calificarán con 1,0.

1. Determine el desarrollo de Fourier para las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = |x|$ si $-1 < x < 1$

   (b) $f(x) = e^x$ si $-\pi < x < \pi$

Desarrollo.

(a) f es una función par, es decir: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 x\,dx = x^2\Big|_0^1 = 1$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} \underbrace{f(x)\cos(n\pi x)}_{\text{par}}dx = 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)dx = 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx$$

$$\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx = \frac{1}{n\pi}x\,\mathrm{sen}(n\pi x)\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \mathrm{sen}(n\pi x)dx = \frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 = \frac{1}{n^2\pi^2}(\cos(n\pi) - 1) = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}$$

Por lo tanto: $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)$

(b) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\,\mathrm{sen}(nx))$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{1}{\pi}e^x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi e^{\pi}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}e^x\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\,\mathrm{sen}(nx)dx = \frac{1}{\pi}\cos(n\pi)(e^{\pi} - e^{-\pi}) + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\,\mathrm{sen}(nx)dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x\,\mathrm{sen}(nx)dx = e^x\,\mathrm{sen}(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} - n\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos(nx)dx = -n\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos(nx) = -n\pi a_n$$

Luego: $a_n = \frac{1}{\pi}\cos(n\pi)(e^{\pi} - e^{-\pi}) - n^2 a_n$

$$(n^2+1)a_n = \frac{1}{\pi}\cos(nx)(e^{\pi} - e^{-\pi})$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\pi(n^2+1)}(e^{\pi} - e^{-\pi})$$

Por otro lado:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \operatorname{sen}(nx)\,dx = n\,a_n = \frac{(-1)^n n}{\pi(n^2+1)}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)$$

la serie de Fourier de $f(x)=e^x$ en $(-\pi,\pi)$ queda de la siguiente manera

$$f(x) = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+1)\pi}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)\cos(nx) + \frac{(-1)^n n}{\pi(n^2+1)}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)\operatorname{sen}(nx)$$

$$f(x) = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}\left[\frac{1}{n}\cos(nx) + \operatorname{sen}(nx)\right]\right)$$

J. Lebl, Notes on Diffy Qs.
Resumen.
Octubre 12, 2018.

Problemas de valores en la frontera.

A problemas de valores en la frontera (o problema de puntos finales) se refiere a problemas del tipo:

$$x'' + \lambda x = 0 \quad , \quad x(a) = 0, \quad x(b) = 0.$$

λ constante, $x = x(t)$ definida en $t \in [a, b]$.

Ejemplo. Estudiar el problema $x'' + x = 0$, $x(0) = 0$, $x(\pi) = 0$.

Desarrollo. Se sabe que $x = A\cos(t) + B\,\mathrm{sen}(t)$

$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0$. Se tiene $x = B\,\mathrm{sen}(t)$; inmediatamente cumple la condición $x(\pi) = 0$.

Por lo tanto: $x(t) = B\,\mathrm{sen}(t)$ para cualquier valor de B.

Ejemplo. El problema de valores de frontera $x'' + 2x = 0$, $x(0) = 0$, $x(\pi) = 0$ tiene solución trivial $x = 0$.

Observación. En un problema de valores de frontera, puede haber solución trivial o infinitas soluciones.

Los problemas de valores propios más importantes a estudiar son los siguientes

$$x'' + \lambda x = 0 \qquad x(a) = 0, \quad x(b) = 0, \qquad (1)$$

$$x'' + \lambda x = 0 \qquad x'(a) = 0, \quad x'(b) = 0, \qquad (2)$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(a) = x(b), \quad x'(a) = x'(b). \qquad (3)$$

$T(x) = -x''$ es un operador lineal. λ es un valor propio de T (o de $x'' + \lambda x = 0$) si existe $x_0 \neq 0$ tal que $T(x_0) = \lambda x$, o equivalentemente, $x_0'' + \lambda x_0 = 0$ con alguna de las condiciones (1), (2) o (3).

Observación. λ también se llama eigenvalor y x_0 se llama eigenfunción. x_0 también se llama función propia.

Ejemplo. Calcular todos los eigenvalores y las eigenfunciones del problema

$$x''+\lambda x=0, \quad x(0)=0, \quad x(\pi)=0.$$

Desarrollo.

(a) Supongamos $\lambda>0$.

Solución general, $x=A\cos(\sqrt{\lambda}t)+B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}t)$

$x(0)=0$ implica $0=x(0)=A$. luego $x(t)=B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}t)$

$x(\pi)=0$ implica $0=B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}t)$

Como x es una eigenfunción, $B\neq 0$, luego $\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)=0$.

$\sqrt{\lambda}\pi>0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi=n\pi$, con $n=1,2,3,\ldots$, se sigue que $n=\sqrt{\lambda}$, equivalente, $\boxed{\lambda=n^2}$

lo anterior implica $x=B\,\mathrm{sen}(nt)$, multiplo de la eigenfunción $x(t)=\mathrm{sen}(nt)$

Por lo tanto: eigenvalores: $\lambda=n^2$, $n\in\mathbb{N}$

eigenfunciones: $x=\mathrm{sen}(nt)$

(b) Supongamos $\lambda=0$.

Solución general de $x''=0$ es $x=A+Bt$

$x(0)=0=A$, luego $x=Bt$

$x(\pi)=0=B\cdot\pi$ implica $B=0$

Como $x(t)=0$, se tiene que $\lambda=0$ no puede ser un eigenvalor.

(c) Supongamos $\lambda<0$.

Solución general de $x''+\lambda x=0$ es $x(t)=A\cosh(\sqrt{-\lambda}t)+B\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}t)$

$x(0)=0$ implica $x(0)=0=A\cosh(0)+B\,\mathrm{senh}(0)=A\cdot 1+B\cdot 0=A$. luego $x=B\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}t)$

$x(\pi)=0$ implica $x(\pi)=0=B\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}\pi)$.

Por propiedad de senh, $B=0$ es la única posibilidad.

luego no hay eigenvalores $\lambda<0$.

En resumen: Eigenvalores de $x''+\lambda x=0$, $x(0)=0$, $x(\pi)=0$ son $\lambda_n=n^2$, $n\in\mathbb{N}$

Eigenfunciones: $x_n=\mathrm{sen}(nt)$, $n\geq 1$.

Ejemplo. Calcular los eigenvalores y las eigenfunciones de
$$x''+\lambda x=0, \quad x'(0)=0, \quad x'(\pi)=0$$

Desarrollo. Eigenvalores: $\lambda_n=n^2$, $\lambda_0=0$
Eigenfunciones: $x_n=\cos(nt)$, para todo $n\geq 1$, $x_0=1$

Ejemplo. Calcular los eigenvalores y las eigenfunciones de
$$x''+\lambda x=0, \quad x(-\pi)=x(\pi), \quad x'(-\pi)=x'(\pi)$$

Desarrollo. Supongamos que $\lambda>0$
Solución general de $x''+\lambda x=0$ es $x=A\cos(\sqrt{\lambda}t)+B\,\text{sen}(\sqrt{\lambda}t)$.
la condición $x(-\pi)=x(\pi)$ implica
$$A\cos(\sqrt{\lambda}\pi)+B\,\text{sen}(\sqrt{\lambda}(-\pi))=A\cos(\sqrt{\lambda}\pi)+B\,\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)$$
$$B\,\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)=0$$
Puede darse que $B=0$ o $\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)=0$.
Si $B\neq 0$, entonces $\sqrt{\lambda}=n$, o equivalentemente $\lambda_n=n^2$, $n\in\mathbb{N}$.
Derivando $x=x(t)$, queda, $x'(t)=-A\sqrt{\lambda}\,\text{sen}(\sqrt{\lambda}t)+B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}t)$
La condición $x'(\pi)=x'(-\pi)$ implica
$$A\sqrt{\lambda}\,\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)+B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\pi)=-A\sqrt{\lambda}\,\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)+B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\pi)$$
$$A\sqrt{\lambda}\,\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)=0$$
Puede darse que $A=0$ o $\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)=0$.
Como x es una eigenfunción, $A\neq 0$ o $B\neq 0$.
Para $A=0$, entonces $B\neq 0$. El eigenvalor es $\lambda_n=n^2$. La eigenfunción asociada es $x_n=\text{sen}(nt)$.
Para $B=0$, se tiene que $A\neq 0$. El eigenvalor es $\lambda_n=n^2$.
Eigenfunción asociada: $x_n=\cos(nt)$

Supongamos $\lambda=0$.
Solución general $x(t)=A+Bt$.
$x(-\pi)=x(\pi)$ implica $A+B\pi=A-B\pi \Rightarrow B=0$.
$x(t)=A$ siempre cumple la segunda condición.
La eigenfunción asociada a $\lambda=0$ es $x_0(t)=1$

Para $\lambda < 0$,

la solución general es $x(t) = A\cosh(\sqrt{-\lambda}\,t) + B\,\text{senh}(\sqrt{-\lambda}\,t)$

$x(\pi) = x(-\pi)$ implica la igualdad

$$A\cosh(\sqrt{-\lambda}\pi) - B\,\text{senh}(\sqrt{-\lambda}\pi) = A\cosh(\sqrt{-\lambda}\pi) + B\,\text{senh}(\sqrt{-\lambda}\pi)$$
$$B\,\text{senh}(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$$

Calculamos $x'(t) = A\sqrt{-\lambda}\,\text{senh}(\sqrt{-\lambda}t) + B\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}t)$

La condición de borde $x'(-\pi) = x(\pi)$ implica

$$-A\sqrt{-\lambda}\,\text{senh}(\sqrt{-\lambda}\pi) + B\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}\pi) = A\sqrt{-\lambda}\,\text{senh}(\sqrt{-\lambda}\pi) + B\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}\pi)$$
$$A\sqrt{-\lambda}\,\text{senh}(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0.$$

la única posibilidad es $A = B = 0$.

En resumen: $\forall n \geq 1$. El eigenvalor $\lambda_n = n^2$ tiene eigenfunciones asociadas $\cos(nt)$, $\text{sen}(nt)$

El eigenvalor $\lambda_0 = 0$ tiene eigenfunción asociada $x = 1$.

Ortogonalidad de las eigenfunciones

Definimos el siguiente producto interno: $\langle x_1(t), x_2(t)\rangle = \int_a^b x_1(t)x_2(t)\,dt$

Teorema. Para $x'' + \lambda x = 0$ con algunas de las condiciones de borde (1), (2), (3).

Si x_1 está asociada al eigenvalor λ_1, x_2 asociada al eigenvalor λ_2; y $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Entonces $\langle x_1, x_2\rangle = 0$.

Demostración. Sabemos que $x_1'' + \lambda_1 x_1 = 0$, $x_2'' + \lambda_2 x_2 = 0$

$$\begin{cases} x_1'' x_2 + \lambda_1 x_1 x_2 = 0 \\ x_2'' x_1 + \lambda_2 x_1 x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{implica} \quad x_1''x_2 - x_2''x_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)x_1x_2 = 0$$

Se tiene, como $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $\quad x_1x_2 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(x_2''x_1 - x_1''x_2)$

$$\langle x_1, x_2\rangle = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_a^b (x_2''x_1 - x_1''x_2)\,dt = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_a^b (x_2'x_1 - x_1'x_2)'\,dt$$
$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(x_2'(b)x_1(b) - x_1'(b)x_2(b) - x_2'(a)x_1(a) + x_1'(a)x_2(a)\right)$$

(1): $x(a) = x(b) = 0 \Rightarrow \langle x_1, x_2\rangle = 0$

(2): $x'(a) = x'(b) = 0 \Rightarrow \langle x_1, x_2\rangle = 0$

(3): $x(a) = x(b)$, $x'(a) = x'(b) \Rightarrow \langle x_1, x_2\rangle = 0$

Finalmente, $\langle x_1, x_2\rangle = 0$ independiente de las condiciones de borde.

4.1.4. Fredholm alternative.

Primero la versión matricial,

Sea $A=(a_{ij})$ matriz $n\times n$. Sea λ un escalar. Se cumple sólo una de las siguientes:

(i) λ es un valor propio de A, i.e, existe solución $\vec{x}\neq\vec{0}$ de $(A-\lambda I)\vec{x}=\vec{0}$

(ii) $\forall\vec{b}$, la ecuación $(A-\lambda I)\vec{x}=\vec{b}$ tiene solución única.

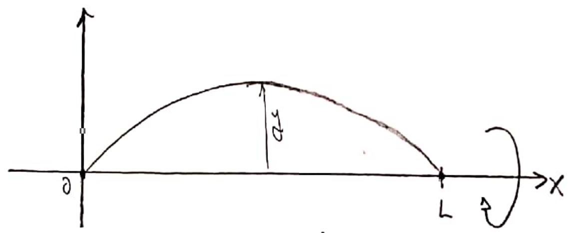
Versión ecuaciones diferenciales.

Sea $L(x)=\frac{d^2}{dt}x$. λ un escalar. Se cumple sólo una de las siguientes alternativas

(i) Un problema $x''+\lambda x=0$ con condiciones de borde (i), (ii), (iii) tiene solución no trivial

(ii) $\forall f$ función continua en $[a,b]$, el problema $x''+\lambda x=f(t)$ con condiciones (i), (ii), (iii) tiene solución única.

4.1.5 Aplicación a la física.



Cuerda de largo L, densidad lineal ρ, sin volumen, con tensión T gira alrededor del eje x con velocidad angular ω

Suponiendo que la deformacion y es pequeña, se tiene:

$$Ty''+\rho\omega^2 y=0 \quad , \quad y(0)=y(L)=0$$

Problema de 2º orden con valores de frontera $y''+\frac{\rho\omega^2}{T}y=0$, $y(0)=y(L)=0$.

El problema no tiene eigenvalores <0 o $=0$.

$\lambda=\frac{\rho\omega^2}{T}$ eigenvalor, $\lambda>0$. Solución general $y=A\cos(\sqrt{\lambda}x)+B\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)$

$y(0)=0=A$

$y(L)=0=B\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L)$. Como $B\neq 0$, se tiene $\sqrt{\lambda}L=n\pi$. $\lambda=\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $n\in\mathbb{N}$

Ejemplo. Para $x''+\lambda x=0$, $x(0)=0$, $x(\pi)=0$. tiene eigenfunciones $x_n=\operatorname{sen}(nt)$.

Luego, para $n\neq m$:

$$\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(nt)\operatorname{sen}(mt)\,dt=0.$$

Ejemplo. De $x''+\lambda x=0$, $x'(0)=x'(\pi)=0$ se deduce:

$$\forall n\neq m: \quad \int_0^{\pi}\cos(nt)\cos(mt)\,dt=0$$

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad \int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt=0.$$

Ejemplo. De $x''+\lambda x=0$, $x(-\pi)=x(\pi)$, $x'(-\pi)=x'(\pi)$ se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(nt)\,dt=0, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\,dt=0 \quad \forall n\geq 1$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(nt)\operatorname{sen}(mt)\,dt=0, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\cos(mt)\,dt=0 \quad \forall n\neq m \ (n,m\geq 1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(nt)\cos(mt)\,dt=0 \quad \forall n,m\geq 1$$

Debe cumplirse $\dfrac{\rho\omega^2}{T} = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2} = \lambda$

Para una cuerda establecida (ρ, T, L fijos).
¿A qué velocidad angular ω debe girar?

$$\frac{\rho\omega^2}{T} = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow \omega = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\lambda}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Para $\omega = \dfrac{n\pi}{L}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$, problema se convierte en $y'' + \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}y = 0$

Eigenfunción $y_n = y_n(x)$ satisface : $y_n(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$

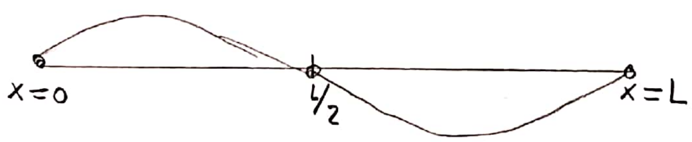
$y_n(x) = 0$ para $\dfrac{n\pi}{L}x = s\pi$, $s \in \mathbb{Z}$. Despejando, $x = s\dfrac{L}{n}$

Como $x \in [0, L]$: $x = 0 \Rightarrow s = 0$

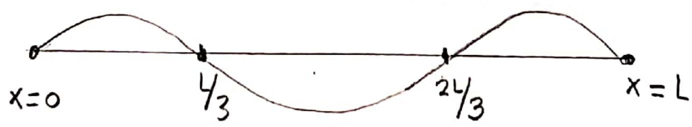
$x = L \Rightarrow s = \dfrac{nx}{L} = n$

$n=1$, $y_1 = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{L}x\right)$

$n=2$, $y_2 = \operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{L}x\right)$



$n=3$, $y_3 = \operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{L}x\right)$



Para $n \in \mathbb{N}$, y_n cruza el eje x $(n-1)$-veces (sin contar los extremos $x=0, L$)

Universidad Andres Bello.
Calculo integral.
Marzo 15, 2019.

Ayudantía 1.

Problema 1. Problema Quiz (15 minutos).

Evaluar la integral $\int \frac{x}{(2x^2+1)^5}\,dx$.

Desarrollo. Usando la sustitución simple $u = 2x^2+1$,

$$du = 4x\,dx$$

Luego: $\int \frac{x}{(2x^2+1)^5}\,dx = \int \frac{1}{4}\,\frac{du}{u^5} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^5}\,du = \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}u^{-4}\right)+C$

Regresando a la variable original:

$$\int \frac{x}{(2x+1)^5}\,dx = -\frac{1}{16}(2x^2+1)^{-4}+C.$$

Problema 2. Integral en donde se aplica técnica de integración por partes.

Evaluar la integral $\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx$

Desarrollo. Ocupamos el siguiente truco algebraico:

$$\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx = \int x^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(2x\sqrt{x^2+4}\right)dx \quad , \quad u = \frac{1}{2}x^2,\ dv = 2x\sqrt{x^2+4}\,dx$$

$v = \frac{2}{3}(x^2+4)^{3/2}$, $du = x$

Luego queda: $\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{2}{3}(x^2+4)^{3/2} - \int x\cdot\frac{2}{3}(x^2+4)^{3/2}\,dx$

$$\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{1}{3}x^2(x^2+4)^{3/2} - \frac{1}{3}\int 2x(x^2+4)^{3/2}\,dx$$

Por otro lado calculamos : $\int 2x\,(x^2+4)^{3/2}dx = \frac{2}{5}(x^2+4)^{5/2}$

Finalmente queda : $\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{1}{3}x^2(x^2+4)^{3/2} - \frac{2}{15}(x^2+4)^{5/2} + C$

$$= \frac{1}{15}(x^2+4)^{3/2}\left(5x^2-2(x^2+4)\right)+C$$

$$= \frac{1}{15}(x^2+4)^{3/2}(3x-8)+C.$$

Problema 2' : En caso de sobrar tiempo, desarrollar la integral $\int \cos^3 x\,dx$.

Problema 3. Integral que se resuelve mediante sustitución trigonométrica.

Desarrollar la integral $\int \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}dx$, para $x>0$.

Desarrollo. Ocupamos la sustitución trigonométrica $2x = \operatorname{sen}(u)$

$$\cos(u)du = 2dx$$

Recordar la identidad trigonométrica : $1-\operatorname{sen}^2(u) = \cos^2(u)$.

Sustituyendo : $\int \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(u)}}{\left(\operatorname{sen}(u)/2\right)} \cdot \frac{\cos(u)}{2}du$

$$= \int \frac{\cos(u)}{\operatorname{sen}(u)}\cdot\cos(u)\,du = \int \frac{\cos^2(u)}{\operatorname{sen}(u)}du$$

$w = \cos(u)$

$dw = -\operatorname{sen}(u)\,du$

$du = -\frac{dw}{\operatorname{sen}(u)}$

Ocupamos sustitución simple : $w = \cos(u)$.

$$dw = -\operatorname{sen}(u)du$$

$$= \int \frac{w^2}{\operatorname{sen}(u)}\cdot\frac{dw}{\operatorname{sen}(u)} = -\int \frac{w^2dw}{1-\cos^2 u} = -\int \frac{w^2dw}{1-w^2}$$

$$\int \frac{\cos^2(u)}{\operatorname{sen}(u)}\,du = \int \frac{w^2}{\operatorname{sen}(u)}\cdot\left(-\frac{dw}{\operatorname{sen}(u)}\right) = -\int \frac{w^2}{1-w^2}\,dw = \int \frac{w^2}{w^2-1}\,dw$$

Veamos que $\dfrac{w^2}{w^2-1} = \dfrac{w^2-1+1}{w^2-1} = 1 + \dfrac{1}{w^2-1}$

$$\int \frac{w^2}{w^2-1}\,dw = w + \int \frac{1}{w^2-1}\,dw$$

Para integrar $\int \frac{1}{w^2-1}\,dw$, ocupamos fracciones parciales:

$$\frac{1}{w^2-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{w-1} - \frac{1}{1+w}\right] \qquad \frac{1+w-(w-1)}{2(w^2-1)} = \frac{2}{}$$

Luego: $\displaystyle\int \frac{w^2}{w^2-1}\,dw = w + \frac{1}{2}\ln|w-1| - \frac{1}{2}\ln|w+1| = w + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{w-1}{w+1}\right|$

Finalmente:

$$\int \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}\,dx = w + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{w-1}{w+1}\right| + C = \cos(u) + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos(u)-1}{\cos(u)+1}\right|$$

Consideramos $\cos(u) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(u)}$ ¿Por qué?

$$\int \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}\,dx = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(u)} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(u)}-1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(u)}+1}\right|$$

$$= \sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-4x^2}-1}{\sqrt{1-4x^2}+1}\right| + C. \quad = \sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{4x^2+2\sqrt{1-4x^2}}{4x^2}\right|$$

$\tan\left(\frac{u}{2}\right) = \theta$

$1-4x^2-1 = -4x^2$

$$\cos(u) = \cos^2\left(\tfrac{u}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\tfrac{u}{2}\right)$$
$$= \cos^2\left(\tfrac{u}{2}\right) - 1 + \cos^2\left(\tfrac{u}{2}\right)$$
$$= 2\cos^2\left(\tfrac{u}{2}\right) - 1$$

$$1-4x^2+1-2\sqrt{1-4x^2}$$
$$= -4x^2 - 2\sqrt{1-4x^2}$$

Segundo método de desarrollo para $\int \frac{\cos^2(u)}{\operatorname{sen}(u)}\,du$:

$$\int \frac{\cos^2(u)}{\operatorname{sen}(u)}\,du = \int \frac{1-\operatorname{sen}^2(u)}{\operatorname{sen}(u)}\,du = \int \frac{1}{\operatorname{sen}(u)}\,du - \int \operatorname{sen}(u)\,du$$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{sen}(u)}\,du + \cos(u)$$

Ocupamos la sustitución trigonométrica : $\theta = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$

$$\theta = \tan\left(\frac{u}{2}\right) \iff u = 2\arctan(\theta)$$

Fórmula del ángulo doble : $\operatorname{sen}(u) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right)$

Como $\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right) = \tan\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right)$, $\operatorname{sen}(u) = 2\tan\left(\frac{u}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)$

Recordemos que $1+\tan^2\left(\frac{u}{2}\right) = \sec^2(u)$, $\sec(u) = \frac{1}{\cos(u)}$

$$\operatorname{sen}(u) = 2\tan\left(\frac{u}{2}\right)\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{u}{2}\right)}$$

Calculando la diferencial : $du = \frac{2}{1+\theta^2}\,d\theta$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}(u)}\,du = \int \frac{1+\theta^2}{2\theta}\cdot\frac{2}{1+\theta^2}\,d\theta = \int \frac{1}{\theta}\,d\theta = \ln|\theta|$$

Volvemos a la variable original :

$$\ln|\theta| = \ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right| = \ln\left|\tan\left(\frac{\operatorname{arcsen}(2x)}{2}\right)\right|$$

$$\cos(u) = \cos(\operatorname{arcsen}(2x))$$

Finalmente : $\int \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}\,dx = \ln\left|\tan\left(\frac{\operatorname{arcsen}(2x)}{2}\right)\right| + \cos(\operatorname{arcsen}(2x)) + C$

Pregunta: ¿La expresión se puede seguir simplificando?

Universidad Andrés Bello.
Cálculo Integral
Marzo 22, 2019

Ayudantía 2.

Problema 1. Fast Quiz (15')

Calcule $\int \tan^2(2x)\sec^2(2x)\,dx$

Desarrollo. Ocupamos la sustitución trigonométrica $u = \tan(2x)$

$$du = 2\sec^2(2x)\,dx$$

$dx =$

Luego: $\int \tan^2(2x)\sec^2(2x)\,dx = \int u^2 \cdot \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int u^2 du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}u^3 + C$

Finalmente:

$$\int \tan^2(2x)\sec^2(2x)\,dx = \frac{1}{6}\left(\tan(2x)\right)^3 + C$$

Problema 2. Evaluar la integral definida $\int_0^2 \sqrt{4x^2+3}\;x\,dx$

Desarrollo. sustitución $u = 4x^2+3$,

$$du = 8x\,dx$$

De $u = 4x^2+3$, se tiene que: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=3 \\ x=2 \Rightarrow u=19 \end{cases}$

Luego: $\int_0^2 \sqrt{4x^2+3}\,x\,dx = \int_3^{19}\sqrt{u}\,\frac{du}{8} = \frac{1}{8}\int_3^{19}\sqrt{u}\,du = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_3^{19}$

$$= \frac{1}{12}u^{3/2}\Big|_3^{19} = \frac{1}{12}\left(19^{3/2} - 3^{3/2}\right)$$

Problema 3. Calcule $\int_0^1 (x^2+3x)\,e^x\,dx$

Desarrollo. Ocupamos integral por partes

$$\int_0^1 (x^2+3x)e^x dx = (x^2+3x)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx = 4e - 2\int_0^1 x e^x dx$$

Nuevamente ocupamos integración por partes sobre $\int_0^1 x e^x dx$:

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e-(e-1) = 1$$

Finalmente: $\int_0^1 (x^2+3x)e^x dx = 4e - 2\cdot 1 = 4e-2.$

Problema 4. Calcule $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+3x^2}dx$

Primero veamos que $\frac{1}{1+3x^2} = \frac{1}{1+(\sqrt{3}x)^2}$.

Ocupamos la sustitución simple $u = \sqrt{3}x$,

$$du = \sqrt{3}\,dx$$

Luego:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+3x^2}dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+u^2}du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(u)\Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan(-\sqrt{3})\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2\frac{\pi}{3} = \frac{2}{9}\sqrt{3}\,\pi.$$

Universidad Andrés Bello
Cálculo Integral
Marzo 28, 2019.

Problema 1. Control rápido 15 min.
Evalúe la integral $\int_0^2 x\ln(x+1)dx$.

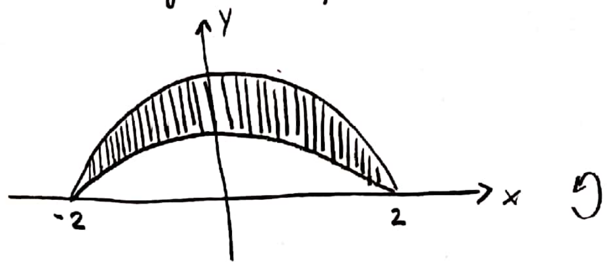
Desarrollo.
$$\int_0^2 x\ln(x+1)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+1)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x+1}dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+1)\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}dx$$

Por otro lado:
$$\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}dx = \int_0^2 \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= \int_0^2 x - \int_0^2 dx + \int_0^2 \frac{1}{x+1}dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - 2 + \ln|x+1|\,\Big|_0^2 = 2-2+\ln(3) = \ln(3)$$

Por lo tanto:
$$\int_0^2 x\ln(x+1)dx = 2\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(3) = \frac{3}{2}\ln(3).$$

Problema 2. Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma al girar con respecto al eje x la región acotada por las curvas de ecuaciones
$$y = 4-x^2$$
$$y = 1-\frac{1}{4}x^2$$

Desarrollo. $f(x) = 4-x^2$, $g(x) = 1-\frac{1}{4}x^2$.



Para $x \in [-2,2]$, $f(x) \geq g(x)$.

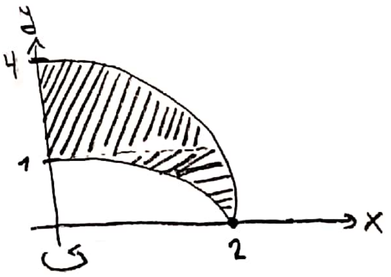
$$V = \int_{-2}^{2} \pi \left(f(x)^2 - g(x)^2 \right) dx = \int_{-2}^{2} \pi \left(16 + x^4 - 8x^2 - \left(1 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right) \right) dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} \left(15 + \frac{15}{16}x^4 - \frac{15}{2}x^2 \right) dx = 60\pi + \frac{15}{16}\pi \frac{x^5}{5} \Big|_{-2}^{2} - \frac{15}{2}\pi \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^{2}$$

$$= 60\pi + \frac{3\pi}{16}(32+32) - \frac{5\pi}{2}(8+8) = 60\pi + 12\pi - 40\pi = 32\pi$$

Problema 3. Resuelva el problema 2, pero ahora la revolución es sobre eje Y.

Desarrollo.



$$y = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4 - y \Rightarrow x = \sqrt{4-y} \quad (x \in [0,2])$$

$$y = 1 - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow x^2 = 4(1-y) \Rightarrow x = 2\sqrt{1-y}$$

$$V = \int_0^1 \pi \left(4 - y - 4(1-y) \right) dy + \int_1^4 \pi (4-y)\, dy$$

$$= \int_0^1 \pi (3y)\, dy + 4\pi \int_1^4 dy - \pi \int_1^4 y\, dy$$

$$= 3\pi \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 + 12\pi - \pi \frac{y^2}{2} \Big|_1^4 = \frac{3\pi}{2} + 12\pi - \frac{\pi}{2}(16-1)$$

$$= \frac{27\pi}{2} - \frac{15\pi}{2} = \frac{12\pi}{2} = 6\pi.$$

Universidad Andrés Bello.
Cálculo Integral
Abril 4, 2019

Problema 1. Ejercicio Quiz (15 minutos)

Calcule el volumen del sólido de revolución dado por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$,
$x \in [0, 2\pi]$

Desarrollo. Sabemos que $\operatorname{sen}(x) > 0$, $x \in (0, \pi)$; $\operatorname{sen}(x) < 0$, $x \in (\pi, 2\pi)$.
Sea V volumen:

$$V = \int_0^{2\pi} \pi \operatorname{sen}^2(x)dx$$

Ocupamos identidad trigonométrica $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$

$$\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x)$$

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Luego: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \frac{1}{2}(2\pi) - \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\Big|_0^{2\pi}\right)$

$$= 2\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(0-0) = \pi$$

Por lo tanto: $V = \pi^2$

$$\int_\pi^{2\pi} \operatorname{sen}^2(x)dx = \int_\pi^{2\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi} dx - \frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi} \cos(2x)dx$$

$$= \pi - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\Big|_\pi$$

Problema 2. Crecimiento bacteriano.

Un cultivo de bacterias tiene en un comienzo 500 y se duplican cada media hora. Encuentre la función que determina su población.

Desarrollo. Sea $P = P(t)$ población bacteriana en el tiempo t.

$$P(0) = 500$$

t: tiempo medido en horas,

$$P(0.5) = 1000 = 500 \cdot 2^1$$
$$P(1) = 2000 = 4 \cdot 500 = 500 \cdot 2^2$$
$$P(2) = 2^4 \cdot 500$$

Luego: $P(t) = 500\, 2^{2t}$

Otra forma de desarrollo. Sabemos que $P(t) = P_0 e^{at}$

Inicialmente $P(0) = 500$: $500 = P(0) = P_0 e^0 = P_0$

$$P(t) = 500 e^{at}$$

Ahora $P(0.5) = 1000$,

$$1000 = P(0.5) = 500 e^{a \cdot 1/2}$$
$$\Rightarrow e^{\frac{1}{2}a} = 2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}a = \ln(2)$$
$$\Rightarrow a = 2\ln(2)$$

Luego: $P(t) = 500 e^{2\ln(2) t} = 500\, 2^{2t}$

Problema 3. Ley de enfriamiento de Newton.

La función que determina la temperatura $T = T(t)$ en función del tiempo en un ambiente de temperatura constante T_m es:

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-rt}$$

donde $T(0) = T_0$ es la temperatura del objeto inicialmente

Una botella de soda en el refrigerador a $20°C$ y $T_m = -0.5°C$. Pasada media hora, la botella está a $10°C$

a) Calcule la temperatura de la botella después de 1 hora.

b) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que la botella llegue a $0°C$?

Desarrollo. a. $T(0) = 20$, $T(0.5) = 10$

$$T(0.5) = 10 = -0.5 + (20 + 0.5)e^{-r \cdot 0.5}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}r} = \frac{10}{20.5}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}r = \ln\left(\frac{10}{20.5}\right)$$

$$r = -2\ln\left(\frac{10}{20.5}\right)$$

b. Hacerlo en clases.