Universidad de las Américas

Calculo Diferencial e integral, MAT333

Marzo 27, 2019.

Desarrollo cátedra 1.

Problema 1.

$$I(x) = 0.01x\,(1000 - x) = 10x - 0.01x^2$$

Ingreso marginal: $I'(x) = 10 - 0.02x$

$$I'(200) = 10 - 0.02 \cdot 200 = 10 - 4 = 6$$

$$\boxed{I'(200) = 6 \quad (\text{dólares/unidad})}$$

Interpretación. Cuando se producen y venden 200 pares de zapatos, el ingreso por cada par es de \$6 dólares.

Problema 2.

a. Costo de producción: $C(x) = 4 + \dfrac{2000000}{x} + x^2$

Si $x = x_0$ es la cantidad de ampolletas que minimiza C, entonces:

$$C'(x_0) = 0 \quad , \quad C''(x_0) > 0$$

$$C'(x) = -2000000\,x^{-2} + 2x \quad , \quad C''(x) = 4000000\,x^{-3} + 2$$

$$C'(x_0) = 0 \iff -2000000\,x^{-2} + 2x = 0 \iff -2x^{-2}(1000000 - x^3) = 0$$

$C'(x_0) = 0$ siempre y cuando $1000000 - x_0^3 = 0$

$$x_0 = \sqrt[3]{1000000} = 100$$

$$\boxed{x_0 = 100}$$

$$C''(100) = 4000000 \cdot 100^{-3} + 2 = 6 > 0$$

Efectivamente $x_0 = 100$ minimiza el valor de la función C.

b. Menor costo de producción:

$$C(100) = 4 + \frac{48}{100} + 3 \cdot 100^2$$

$$= 30004,48$$

$$\boxed{C(100) = 30004,48 \ \text{(dólares)}}$$

Problema 3.

a. Ingreso $I(x)$: $I(x) = 7x$

Costo $C(x)$: $C(x) = A(x) + x = 300 \ln\left(\frac{450}{550-x}\right) + x$

Utilidad $U(x)$:

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

$$U(x) = 7x - \left(300 \ln\left(\frac{450}{550-x}\right) + x\right)$$

$$U(x) = 7x - 300 \ln\left(\frac{450}{550-x}\right) - x$$

$$\boxed{U(x) = 6x - 300 \ln\left(\frac{450}{550-x}\right)}$$

b. Utilidad marginal es $U'(x)$,

$$U'(x) = (6x)' - \left(300 \ln\left(\frac{450}{550-x}\right)\right)'$$

$$= 6 - 300 \frac{1}{\frac{450}{550-x}} \cdot \left(450 \cdot \frac{1}{550-x} \cdot (-x)\right) \quad \text{(Regla de la cadena)}$$

$$U'(x) = 6 - \frac{300(500-x)}{450} \cdot \frac{450(-x)}{550-x} = 6 + \frac{300}{450}x = 6 + \frac{2}{3}x$$

$$\boxed{U'(x) = 6 + \frac{2}{3}x \quad (\text{dólares/unidad})}$$

Problema 4.

a. $f(x) = x(2x+1)^{1000}$

Ocupando derivada del producto,

$$f'(x) = (x)'(2x+1)^{1000} + x\left((2x+1)^{1000}\right)'$$

$$= (2x+1)^{1000} + x \cdot 1000(2x+1)^{999} \cdot 2 \qquad \text{(Regla de la cadena)}$$

$$= (2x+1)^{1000} + 2000x(2x+1)^{999}$$

$$= (2x+1)^{999}(2x+1+2000x)$$

$$= (2x+1)^{999}(2002x+1)$$

$$\boxed{f'(x) = (2x+1)^{999}(2002x+1)}$$

b. $g(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$

$$g'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x+1)$$

$g'(x) > 0$ en $x \in \,]-\infty,-1[\, \cup \,]1,\infty[$

$g'(x) < 0$ en $x \in \,]-1,1[$

Por lo tanto, g es creciente en $]-\infty,-1[\, \cup \,]1,\infty[$ y decreciente en $]-1,1[$

Universidad de las Américas
Cálculo Diferencial e Integral MAT333
Marzo 29, 2019.

Segunda versión
Cátedra 1.

Problema 3.

a. $U(x) = I(x) - C(x)$,

U : utilidad
I : Ingreso
C : Costo

$$U(x) = 7x - \left(\frac{5000}{x} + 1 + x\right)$$
$$= 7x - \frac{5000}{x} - 1 - x = 6x - \frac{5000}{x} - 1$$

$$\boxed{U(x) = 6x - \frac{5000}{x} - 1}$$

b. $U'(x) = 6 + 5000x^{-2} = \dfrac{6x^2 + 5000}{x^2}$

$$U'(10) = \frac{6 \cdot 10^2 + 5000}{10^2} = 56$$

Interpretación: Cuando se producen y venden 56 artículas, la utilidad por cada uno es de \$56. dólares.

Problema 4.

- La función es creciente en el intervalo $[-0.5, 0.5]$ y $[1.5, 2]$.
- La función es decreciente en el intervalo $[-1, -0.5]$ y $[0.5, 1.5]$
- La función alcanza su mínimo local en $x = -0.5$ y $x = 1.5$
- La función alcanza su máximo local en $x = 0.5$