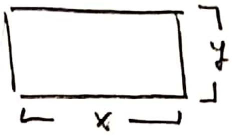
Problema 3.

Terreno rectangular:



$x > 0$
$y > 0$

Primera ecuación: $2x + 2y = 100$

$y = 50 - x$

Segunda ecuación: $xy \geq 600$

Reemplazando: $xy \geq 600 \Rightarrow x(50 - x) \geq 600$

$$x(50 - x) \geq 600 \iff -x^2 + 50x - 600 \geq 0 \quad / \cdot -1$$
$$\iff x^2 - 50x + 600 \leq 0$$
$$\iff (x - 20)(x - 30) \leq 0$$

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & 20 & & 30 & \end{array}$$

Luego, $(x-20)(x-30) \leq 0$ para $x \in [20, 30]$

Por otro lado: $20 \leq x \leq 30$

$\Rightarrow -30 \leq -x \leq -20 \quad / + 50$

$\Rightarrow 20 \leq \underbrace{50 - x}_{y} \leq 30$

Por lo tanto: $x \in [20, 30]$, $y \in [20, 30]$.

Problema 4.

$$S(r) = 4\pi r^2$$
$$r(t) = t + \frac{2}{3}$$

Componiendo : $S\circ r(t) = S(r(t)) = 4\pi r(t)^2 = 4\pi\left(t+\frac{2}{3}\right)^2$

Sea $t = t_0$ el tiempo el cual el globo revienta:

$$S\circ r(t_0) = 4000$$

luego : $S\circ r(t_0) = 4000 \iff 4\pi\left(t_0 + \frac{2}{3}\right)^2 = 4000$

$$\iff \pi\left(t_0^2 + \frac{4}{3}t_0 + \frac{4}{9}\right) = 1000$$

Ecuación cuadrática : $\pi t_0^2 + \frac{4\pi}{3}t_0 + \frac{4\pi}{9} = 1000$

$$\pi t_0^2 + \frac{4\pi}{3}t_0 + \left(\frac{4\pi}{9} - 1000\right) = 0 \quad /\cdot 9$$

$$9\pi t_0 + 12\pi t_0 + (4\pi - 9000) = 0$$

Despejando t_0:

$$t_0 = \frac{-12\pi \pm \sqrt{144\pi^2 - 36(4\pi - 9000)}}{18\pi} \approx 9.41$$

La otra solución de la ecuación cuadrática se desecha porque es negativa :

$$\frac{-12 - \sqrt{144\pi^2 - 36(4\pi - 9000)}}{18\pi} < 0$$

Por lo tanto : Pablo infla el globo durante 9.41 hasta que explota.

Problema 5.

(a) La función que f que modela el comportamiento del taxímetro es:

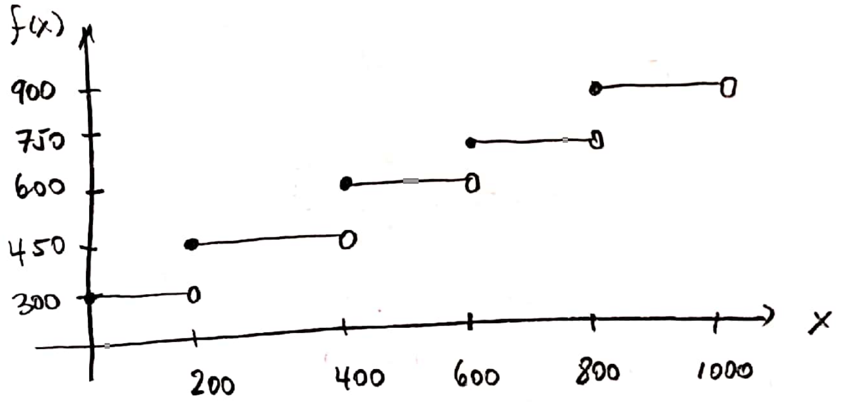
$$f(x) = 300 + 150\left[\frac{x}{200}\right] \quad \left([x] \text{ función parte entera} \right)$$

x : distancia recorrida por el auto (en metros)

Como $x \geq 0$, el dominio de f es el conjunto:

$$[0, +\infty[$$

(b) Para $x \in [0, 1000]$ tenemos:



Universidad de las Américas
Cálculo II, MAT170.
Abril 04, 2019.

Problema 4.

(a) $C(x) = \dfrac{400x}{x+100}$, $x(t) = t+5$

$(C \circ x)(t) = C(x(t))$ es el costo de retirar el petroleo después de trabajar t horas.

$$(C\circ x)(t) = C(x(t)) = \frac{400\,x(t)}{x(t)+100} = \frac{400\cdot(t+5)}{(t+5)+100} = \frac{400t+2000}{t+105}$$

Luego: $$(C\circ x)(t) = \frac{400t+2000}{t+105}$$

(b) Sea $t = t_0$ el tiempo que hay que trabajar para sacar todo el petroleo,

$$(C\circ x)(t_0) = 200$$

tenemos: $$200 = \frac{400t_0+2000}{t_0+105}$$

$$\Rightarrow \quad 200t_0 + 200\cdot 105 = 400t_0 + 2000$$

$$\Rightarrow \quad 21000 - 2000 = 200t_0$$

$$t_0 = \frac{19000}{200} = 95$$

Respuesta: La faena debe durar 95 horas (aproximadamente 4 días)

Universidad de las Américas
Calculo Diferencial MAT170
Junio 11, 2019.

Aplicación de la derivada
Regla de L'Hôpital

Sean funciones f, g tales que

$$\lim_{x\to a} f(x),\ \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty \quad ó$$

$$\lim_{x\to a} f(x),\ \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

Entonces, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Ejemplo. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

Desarrollo. $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}(x)=0$, $\lim_{x\to 0} x = 0$. Ocupando L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ejemplo. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x\operatorname{sen}(x)}$

Desarrollo. Fácilmente se demuestra que es un límite del tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\operatorname{sen}(x)+x\cos(x)} \quad \left(\text{límite de la forma } \tfrac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\operatorname{sen}(x)}$$

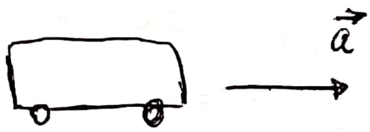
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(x)}{2\cos(x)-x\operatorname{sen}(x)} = \frac{0}{2} = 0.$$

Aplicaciones de la derivada
Ecuaciones diferenciales

Definición. La derivada de segundo orden f'' se define como

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Ejemplo. Cinemática



carrito que se mueve
con aceleración constante a

Sea $x = x(t)$ posición del carro (a lo largo del eje X) en el tiempo t,

$x'(t)$: velocidad del carro

$x''(t)$: aceleración del carro

Se cumple: $\quad x''(t) = a$

$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$ (x_0, v_0 constantes) es solución de la ecuación de movimiento $x'' = a$.

En efecto: $\quad x' = at + v_0$, $\quad x'' = a$

Ejemplo. La función $x(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$ es solución de la ecuación diferencial $\quad x'' + \omega^2 x = 0$

Desarrollo. $\quad x' = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$

$$x'' = -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$\begin{aligned} x'' + \omega^2 x &= -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t) + \omega^2(A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)) \\ &= -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t) + A\omega^2\cos(\omega t) + B\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio. Encuentre $X=x(t)$ que cumple las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} x''+\omega^2 x = 0 \\ X(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

Desarrollo: $X(t) = A\cos(\omega t) + B\,\text{sen}(\omega t)$

$x(0) = A + B\,\text{sen}(0) = A$

$x'(t) = -A\omega\,\text{sen}(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$

$x'(0) = -A\cdot 0 + B\omega\cos(0) = B\omega = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{\omega}$

Universidad de las Américas
Cálculo Diferencial MAT170
Junio 18, 2019.

Aplicación de la derivada: Razón de cambio y optimización

Para $y = f(x)$, $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ se llama razón de cambio instantánea de y con respecto a x.

Problema 1. $s(t) = -16t^2 + 1296$ (m), t medido en segundos

a. Velocidad: $v(t) = s'(t) = -32t$ (m/s) (velocidad instantánea)

b. $v(2) = s'(2) = -64$ (m/s)

c. La moneda llega al suelo cuando $s(t) = 0$ (m)

$$s(t) = 0 \iff -16t^2 + 1296 = 0$$
$$\iff t = -9, 9$$
$$\therefore t = 9 \text{ (s)}$$

d. $v(9) = s'(9) = -32 \cdot 9 = -288$ (m/s)

Problema 2. Ley de Boyle: $PV = k$

$P = P(t)$: Presión de gas (medido en unidades de presión, ya sea PSI, bar, etc)

$V = V(t)$: Volumen del gas (medido en cm^3)

$V(t=0) = 60\ cm^3$

$$P(0) = k/V(0) = k/60 \quad \Rightarrow \quad P(0) = 30 + 2 \cdot 0 = 30$$

$$PV = k \Rightarrow \frac{dP}{dt} \cdot V + P \cdot \frac{dV}{dt} = 0$$

$$P(t) = 30 + 2t \Rightarrow \frac{dP}{dt} = 2$$

Scanned with CamScanner

$$\frac{dP}{dt}(10)\,V(10) + \frac{dV}{dt}(10)\,P(10) = 0$$

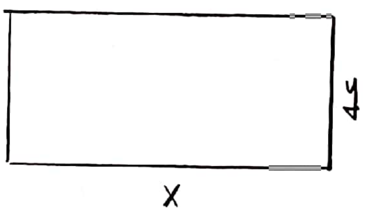
$$P(10) = 30 + 2\cdot 10 = 50 \quad \Rightarrow \quad V(10)\,P(10) = k = V(0)\,P(0) = 1800$$

$$V(10) = \frac{1800}{P(10)} = \frac{1800}{50} = 36$$

Luego : $2\cdot 36 + 50\cdot \frac{dV}{dt}(10) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt}(10) = -\frac{72}{50} \approx -1.44$

Finalmente : $\frac{dV}{dt}(10) = -1.44 \ (cm^3/s)$

Problema 3.



Perímetro : P
Área : A

$$P = 2x + 2y \ (cm)$$
$$A = xy \ (cm^2)$$

Sabemos que $2x + 2y = 120 \Rightarrow y = 60 - x$

$$A(x) = x(60 - x) = -x^2 + 60x$$

Debemos maximizar el área $A = A(x)$:

$$\frac{dA}{dx} = -2x + 60$$

Punto crítico : $\frac{dA}{dx} = 0 \iff -2x + 60 = 0 \iff x = 30$

$A''(x) = \frac{d^2A}{dx^2} = -2$. Como $\frac{d^2A}{dx^2}(30) = -2 < 0$, $A = A(x)$ alcanza un máximo relativo en $x = 30$.

Dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima :

largo = 30 (cm), ancho = 30 (cm)

Problema 4. $A = 3600\ m^2 = xy$

$P = 2x + 2y$

Dimensiones del campo de juego: $x =$ largo
$y =$ ancho

$$xy = 3600 \Rightarrow y = \frac{3600}{x}$$

$$P = P(x) = 2x + 2\left(\frac{3600}{x}\right) = 2x + \frac{7200}{x} \Rightarrow P(x) = 2x + \frac{7200}{x}$$

Buscamos punto crítico: $\frac{dP}{dx} = 0 \iff 2 - \frac{7200}{x^2} = 0 \iff \frac{2x^2 - 7200}{x^2} = 0$

$$2x^2 - 2700 = 0 \Rightarrow x = 15\sqrt{6}, -15\sqrt{6}$$

Veamos que $A = A(x)$ efectivamente se minimiza en $x = 15\sqrt{6}$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -14400x^{-3} \Rightarrow \frac{d^2P}{dx^2}(15\sqrt{6}) > 0$$

$P = P(x)$ alcanza su mínimo relativo en $x = 15\sqrt{6}$

Dimensiones del campo de juego:

$x = 15\sqrt{6} \approx 36.74$ (m) (ancho)

$y = \frac{3600}{15\sqrt{6}} \approx 97.98$ (m) (largo)

Universidad de las Américas
Cálculo Diferencial MA170
junio 11, 2019.

Desarrollo Cátedra 3.

Problema 1. Encuentre y clasifique todos los puntos críticos de la función

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{12} - \frac{2x^3}{9} + 16$$

Desarrollo. $f'(x) = \frac{5x^4}{5} - \frac{4x^3}{12} - \frac{6x^2}{9} = x^4 - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{3} = x^2\left(x^2 - \frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right)$

$= \frac{x^2}{3}\left(3x^2 - x - 2\right)$

$3x^2 - x - 2 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(3)(-2)}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{1 \pm 5}{6}$.

$x_1 = 1 \ , \ x_2 = -\frac{2}{3}$

$f'(x) = 0$ siempre y cuando $x = 0$, $x = 1$, $x = -\frac{2}{3}$

Los puntos críticos de f son $x=0$, $x=1$, $x = -\frac{2}{3}$

$f''(x) = 4x^3 - x^2 - \frac{4x}{3}$

$f''(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ punto de inflexión de f

$f''(1) = \frac{5}{3} > 0 \Rightarrow x = 1$ mínimo local de f.

$f''\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{20}{27} < 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$ máximo local de f.

Problema 2. Use la regla de L'Hopital para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,\text{sen}(x)}{(e^x-1)^3}$$

Desarrollo. Este límite es de la forma $\frac{0}{0}$, porque:

$$\lim_{x\to 0} x\,\text{sen}(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0} (e^x-1)^3 = 0 .$$

Regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,\text{sen}(x)}{(e^x-1)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)+x\cos(x)}{3(e^x-1)^2 e^x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\text{sen}(x)+x\cos(x)\right) = \lim_{x\to 0}\text{sen}(x) + \lim_{x\to 0} x\cos(x) = 0 + 1\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} 3(e^x-1)^2 e^x = 3\lim_{x\to 0}(e^x-1)^2 e^x = 3\cdot(1-1)\cdot 1 = 0$$

Como es un límite de la forma $\frac{0}{0}$, ocupamos L'Hôpital nuevamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)+x\cos(x)}{3(e^x-1)^2 e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)+\cos(x)-x\,\text{sen}(x)}{6(e^x-1)e^x e^x + 3(e^x-1)^2 e^x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x)-x\,\text{sen}(x)}{6(e^x-1)e^{2x}+3(e^x-1)e^x}$$

Problema 4

a. $X(t) = A\cos(5t) + B\,\text{sen}(5t)$

$X'(t) = -5A\,\text{sen}(5t) + 5B\cos(5t)$

$X''(t) = -25A\cos(5t) - 25B\,\text{sen}(5t)$

$$X'' + 25X = -25A\cos(5t) - 25B\,\text{sen}(5t) + 25(A\cos(5t) + B\,\text{sen}(5t))$$
$$= -25A\cos(5t) - 25B\,\text{sen}(5t) + 25A\cos(5t) + 25B\,\text{sen}(5t)$$
$$= 0$$

Por lo tanto, $X'' + 25X = 0$.

b. $X(0) = A\cos(5\cdot 0) + B\,\text{sen}(5\cdot 0) = A\cos(0) + B\,\text{sen}(0) = A\cdot 1 + B\cdot 0 = A \Rightarrow A = 0$

$X'(0) = -5A\,\text{sen}(5\cdot 0) + 5B\cos(5\cdot 0) = -5A\cdot 0 + 5B\cdot 1 = 5B$

$X'(0) = 1 \Rightarrow 5B = 1 \Rightarrow B = 1/5$

La función es: $X'(t) = \frac{1}{5}\,\text{sen}(5t)$.

Problema 5

a.

$U(q) = q^3 - 6q^2 + 9q + 6$

$U'(q) = 3q^2 - 12q + 9$

$U'(q) = 0$ es equivalente a $3q^2 - 12q + 9 = 0$

$$q = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{6} = \frac{12 \pm 6}{6} = 3, 1$$

$U''(q) = 6q - 12$

$U''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 18 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow U(3)$ mínimo relativo

$U''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = 6 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow U(1)$ máximo relativo.

La utilidad de la empresa se maximiza cuando se venden 1000 seguros.

b. Utilidad máxima:

$U(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 6 = 1 - 6 + 9 + 6 = 10$

La utilidad máxima de la empresa es de 1 millón de dólares.

Problema 3. Tenemos $V = \frac{4}{3}\pi r^3$,

donde r cambia en función del tiempo t : $r = r(t)$

Velocidad de cambio del volumen en $\frac{dV}{dt}$,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^2 \cdot 3 \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Para $\frac{dr}{dt} = -4$ (cm/seg), $r = 10$ (cm)

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi(10)^2 \cdot (-4) = -1600\pi \approx -5026{,}54 \ (cm^3/seg)$$

Problema 2. Usando la regla de L'Hopital calcule:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x \operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)\, e^x}$$

Desarrollo. Es un límite de la forma $\frac{0}{0}$, porque:

$$\lim_{x \to 1} x \operatorname{sen}(x-1) = \left(\lim_{x \to 1} x\right)\left(\lim_{x \to 1} \operatorname{sen}(x-1)\right) = 1 \cdot \operatorname{sen}(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 1} (x-1)e^x = \lim_{x \to 1}(x-1) \lim_{x \to 1} e^x = 0 \cdot e = 0$$

Ocupando regla de L'Hopital, queda:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x \operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)e^x} = \lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1) + x\cos(x-1)}{e^x + (x-1)e^x}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 1} \operatorname{sen}(x-1) + x\cos(x-1)}{\lim_{x \to 1} e^x + (x-1)e^x}$$

$$= \frac{0 + 1 \cdot \cos(0)}{e + 0 \cdot e} = \frac{1 \cdot 1}{e} = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

Scanned with CamScanner

Universidad de las Américas
Cálculo Diferencial MA170
Junio 24, 2019.

Desarrollo Cátedra Recuperativa.

Problema 1.

a. $C(x) = \dfrac{5400x^2}{2x+10}$, $x(t) = 2t^2+5t$

$$(C\circ x)(t) = C(x(t)) = \frac{5400(2t^2+5t)}{2(2t^2+5t)+10} = \frac{10800t^2+27000t}{4t^2+10t+10}$$

$$= \frac{5400t^2+13500t^2}{2t^2+5t+5}$$

Respuesta: El costo en t horas de trabajo es de $(C\circ x)(t) = \dfrac{5400t^2+13500t}{2t^2+5t+5}$ miles de dólares.

b. $x(t) = 2t^2+5t > 1000$

$$2t^2+5t-1000 > 0$$

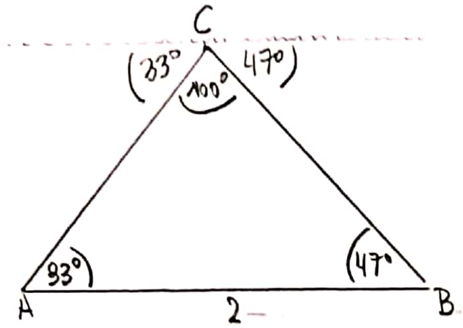
Buscamos raíces: $2t^2+5t-1000=0 \iff t_1 = \dfrac{-5-5\sqrt{321}}{4} \approx -23.65$, $t_2 = \dfrac{-5+5\sqrt{321}}{4} \approx 21.15$. Luego queda:

$$2\left(t-\left(\frac{-5-5\sqrt{321}}{4}\right)\right)\left(t-\left(\frac{-5+5\sqrt{321}}{4}\right)\right) > 0$$

Mediante una tabla de signos, además considerando el hecho de que $t \geq 0$, se obtiene $t \in \,]21.15, \infty[$.

Conclusión: A partir de las 21.15 horas de trabajo, la cantidad de salmón faenado y empacado superará las 1000 toneladas.

Problema 2.

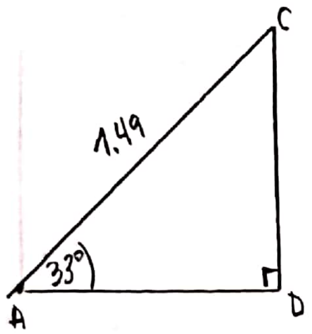


a. Aplicamos el teorema del Seno:

$$\frac{\operatorname{sen}(47^\circ)}{\overline{AC}} = \frac{\operatorname{sen}(100^\circ)}{2} \Rightarrow \overline{AC} = 2\,\frac{\operatorname{sen}(47^\circ)}{\operatorname{sen}(100^\circ)} \approx 1.49$$

Respuesta: La distancia entre el globo y la persona del punto A es de 1.49 (km)

b.



$\overline{CD}$: altura del globo

Aplicamos razón trigonométrica:

$$\operatorname{sen}(33^\circ) = \frac{\overline{CD}}{1.49}$$

$$\overline{CD} = 1.49\,\operatorname{sen}(33^\circ) \approx 0.81$$

La altura a la que se encuentra el globo es de 0.81 (km).

Problema 3.

a. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

Como los límites laterales no existen, no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Conclusión. A pesar de que $f(0)=\frac{1}{2}$, f no es continua en $x=0$.

b. $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+x\sqrt{1-x}}{1-(1-x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+x\sqrt{1-x}}{x}$$

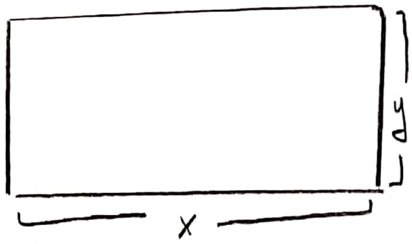
$$= \lim_{x\to 0} 1+\sqrt{1-x}$$

$$= 1+\sqrt{1}$$

$$= 1+1$$

$$= 2$$

Problema 4.



$$xy = 3600$$
$$P = 2x + 2y \quad \text{(perímetro del juego rectangular)}$$
$$x > 0 \,,\; y > 0$$

$$y = \frac{3600}{x} \quad \Rightarrow \quad P = P(x) = 2x + 2\left(\frac{3600}{x}\right) = 2x + \frac{7200}{x}$$

$$P(x) = 2x + \frac{7200}{x}$$

$$P'(x) = 2 - \frac{7200}{x^2} = \frac{2x^2 - 7200}{x^2}$$

$P'(x) = 0$ siempre y cuando $2x^2 - 7200 = 0$

$$x_1 = 60 \,,\; x_2 = -60$$

Como $x > 0$, la única solución es $x = 60$.

Verificamos que P efectivamente se minimiza cuando $x = 60$

$$P''(x) = 14400\, x^{-3}$$
$$P''(60) = 14400 \cdot 60^{-3} \approx 0.067 > 0$$

$P = P(x)$ se minimiza cuando $x = 60$ (m)

Dimensiones del juego:

$$x = 60 \text{ metros}$$
$$y = \frac{3600}{x} = 60 \text{ metros}$$

Problema 5.

a. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - x^2 + x + 5$

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 2x + 1$$

$$f'(0) = 1$$

Recta tangente de $f(x)$ en el punto $(0,5)$:

$$y - 5 = f'(0)(x - 0)$$

$$y = 1x + 5$$

$$\boxed{y = x + 5}$$

b. Aplicando L'hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{\tan(4x)} = \lim_{x\to 0} \frac{5\cos(5x)}{4\sec^2(4x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5}{4}\cos(5x)\cos^2(4x)$$

$$= \frac{5}{4}\cos(0)\cos(0)$$

$$= \frac{5}{4}\cdot 1 \cdot 1$$

$$= \frac{5}{4}$$

Universidad de las Américas
Calculo Diferencial e integral, MAT333
Marzo 27, 2019.

Desarrollo cátedra 1.

Problema 1.

$$I(x) = 0.01x\,(1000 - x) = 10x - 0.01x^2$$

Ingreso marginal: $I'(x) = 10 - 0.02x$

$$I'(200) = 10 - 0.02 \cdot 200 = 10 - 4 = 6$$

$$\boxed{I'(200) = 6 \quad (\text{dólares}/\text{unidad})}$$

Interpretación. Cuando se producen y venden 200 pares de zapatos, el ingreso por cada par es de \$6 dólares.

Problema 2.

a. Costo de producción: $C(x) = 4 + \dfrac{2000000}{x} + x^2$

Si $x = x_0$ es la cantidad de ampolletas que minimiza C, entonces:

$$C'(x_0) = 0 \quad , \quad C''(x_0) > 0$$

$$C'(x) = -2000000\,x^{-2} + 2x \quad , \quad C''(x) = 4000000\,x^{-3} + 2$$

$$C'(x_0) = 0 \iff -2000000\,x^{-2} + 2x = 0 \iff -2x^{-2}(1000000 - x^3) = 0$$

$C'(x_0) = 0$ siempre y cuando $1000000 - x_0^3 = 0$

$$x_0 = \sqrt[3]{1000000} = 100$$

$$\boxed{x_0 = 100}$$

$$C''(100) = 4000000 \cdot 100^{-3} + 2 = 6 > 0$$

Efectivamente $x_0 = 100$ minimiza el valor de la función C.

b. Menor costo de producción :

$$C(100) = 4 + \frac{48}{100} + 3 \cdot 100^2$$

$$= 30004{,}48$$

$$\boxed{C(100) = 30004{,}48 \text{ (dólares)}}$$

Problema 3.

a. Ingreso $I(x)$: $I(x) = 7x$

Costo $C(x)$: $C(x) = A(x) + x = 300 \ln\left(\frac{450}{550-x}\right) + x$

Utilidad $U(x)$:

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

$$U(x) = 7x - \left(300 \ln\left(\frac{450}{550-x}\right) + x\right)$$

$$U(x) = 7x - 300 \ln\left(\frac{450}{550-x}\right) - x$$

$$\boxed{U(x) = 6x - 300 \ln\left(\frac{450}{550-x}\right)}$$

b. Utilidad marginal es $U'(x)$,

$$U'(x) = (6x)' - \left(300 \ln\left(\frac{450}{550-x}\right)\right)'$$

$$= 6 - 300 \frac{1}{\frac{450}{550-x}} \cdot \left(450 \cdot \frac{1}{550-x} \cdot (-x)\right) \quad \text{(Regla de la cadena)}$$

$$U'(x) = 6 - \frac{300(500-x)}{450} \cdot \frac{450(-x)}{550-x} = 6 + \frac{300}{450}x = 6 + \frac{2}{3}x$$

$$\boxed{U'(x) = 6 + \frac{2}{3}x \quad (\text{dólares/unidad})}$$

Problema 4.

a. $f(x) = x(2x+1)^{1000}$

Ocupando derivada del producto,

$$f'(x) = (x)'(2x+1)^{1000} + x\left((2x+1)^{1000}\right)'$$

$$= (2x+1)^{1000} + x \cdot 1000(2x+1)^{999} \cdot 2 \qquad \text{(Regla de la cadena)}$$

$$= (2x+1)^{1000} + 2000x(2x+1)^{999}$$

$$= (2x+1)^{999}(2x+1+2000x)$$

$$= (2x+1)^{999}(2002x+1)$$

$$\boxed{f'(x) = (2x+1)^{999}(2002x+1)}$$

b. $g(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$

$$g'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x+1)$$

$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
+	−	+

$g'(x) > 0$ en $x \in \,]-\infty, -1[\,\cup\,]1, \infty[$

$g'(x) < 0$ en $x \in \,]-1, 1[$

Por lo tanto, g es creciente en $]-\infty, -1[\,\cup\,]1, \infty[$ y decreciente en $]-1, 1[$

Universidad de las Américas
Cálculo Diferencial e Integral MAT333
Marzo 29, 2019.

Segunda versión
Cátedra 1.

Problema 3.

a. $U(x) = I(x) - C(x)$,

U : utilidad
I : Ingreso
C : Costo

$$U(x) = 7x - \left(\frac{5000}{x} + 1 + x\right)$$
$$= 7x - \frac{5000}{x} - 1 - x = 6x - \frac{5000}{x} - 1$$

$$\boxed{U(x) = 6x - \frac{5000}{x} - 1}$$

b. $U'(x) = 6 + 5000x^{-2} = \dfrac{6x^2 + 5000}{x^2}$

$$U'(10) = \frac{6 \cdot 10^2 + 5000}{10^2} = 56$$

Interpletación: Cuando se producen y venden 56 artículas, la utilidad por cada uno es de \$56. dólares.

Problema 4.

- La función es creciente en el intervalo $[-0.5, 0.5]$ y $[1.5, 2]$.
- La función es decreciente en el intervalo $[-1, -0.5]$ y $[0.5, 1.5]$
- La función alcanza su mínimo local en $x = -0.5$ y $x = 1.5$
- La función alcanza su máximo local en $x = 0.5$

Universidad de las Américas
Calculo Diferencial e integral, MAT333
Marzo 27, 2019.

Desarrollo cátedra 1.

Problema 1.

$$I(x) = 0.01x\,(1000 - x) = 10x - 0.01x^2$$

Ingreso marginal : $I'(x) = 10 - 0.02x$

$$I'(200) = 10 - 0.02 \cdot 200 = 10 - 4 = 6$$

$$\boxed{I'(200) = 6 \quad (\text{dólares}/\text{unidad})}$$

Interpretación. Cuando se producen y venden 200 pares de zapatos, el ingreso por cada par es de $6 dólares.

Problema 2.

a. Costo de producción : $C(x) = 4 + \dfrac{2000000}{x} + x^2$

Si $x = x_0$ es la cantidad de ampolletas que minimiza C, entonces :

$$C'(x_0) = 0 \quad , \quad C''(x_0) > 0$$

$$C'(x) = -2000000\,x^{-2} + 2x \quad , \quad C''(x) = 4000000\,x^{-3} + 2$$

$$C'(x_0) = 0 \iff -2000000\,x^{-2} + 2x = 0 \iff -2x^{-2}(1000000 - x^3) = 0$$

$C'(x_0) = 0$ siempre y cuando : $1000000 - x_0^3 = 0$

$$x_0 = \sqrt[3]{1000000} = 100$$

$$\boxed{x_0 = 100}$$

Scanned with CamScanner

$$C''(100) = 4000000 \cdot 100^{-3} + 2 = 6 > 0$$

Efectivamente $x_0 = 100$ minimiza el valor de la función C.

b. Menor costo de producción :

$$C(100) = 4 + \frac{48}{100} + 3 \cdot 100^2$$

$$= 30004,48$$

$$\boxed{C(100) = 30004,48 \text{ (dólares)}}$$

Problema 3.

a. Ingreso $I(x)$: $I(x) = 7x$

Costo $C(x)$: $C(x) = A(x) + x = 300 \ln\left(\frac{450}{550-x}\right) + x$

Utilidad $U(x)$:

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

$$U(x) = 7x - \left(300 \ln\left(\frac{450}{550-x}\right) + x\right)$$

$$U(x) = 7x - 300 \ln\left(\frac{450}{550-x}\right) - x$$

$$\boxed{U(x) = 6x - 300 \ln\left(\frac{450}{550-x}\right)}$$

b. Utilidad marginal es $U'(x)$,

$$U'(x) = (6x)' - \left(300 \ln\left(\frac{450}{550-x}\right)\right)'$$

$$= 6 - 300 \frac{1}{\frac{450}{550-x}} \cdot \left(450 \cdot \frac{1}{550-x} \cdot (-x)\right) \quad \text{(Regla de la cadena)}$$

$$U'(x) = 6 - \frac{300(500-x)}{450} \cdot \frac{450(-x)}{550-X} = 6 + \frac{300}{450}x = 6 + \frac{2}{3}x$$

$$\boxed{U'(x) = 6 + \frac{2}{3}x \quad (\text{dólares/unidad})}$$

Problema 4.

a. $f(x) = x(2x+1)^{1000}$

Ocupando derivada del producto,

$$f'(x) = (x)'(2x+1)^{1000} + x\left((2x+1)^{1000}\right)'$$

$$= (2x+1)^{1000} + x \cdot 1000(2x+1)^{999} \cdot 2 \qquad (\text{Regla de la cadena})$$

$$= (2x+1)^{1000} + 2000x(2x+1)^{999}$$

$$= (2x+1)^{999}(2x+1+2000x)$$

$$= (2x+1)^{999}(2002x+1)$$

$$\boxed{f'(x) = (2x+1)^{999}(2002x+1)}$$

b. $g(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$

$$g'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x+1)$$

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & -1 & & 1 & \end{array}$$

$g'(x) > 0$ en $x \in]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$

$g'(x) < 0$ en $x \in]-1,1[$

Por lo tanto, g es creciente en $]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$ y decreciente en $]-1,1[$

Universidad de las Américas
Cálculo Diferencial e Integral MAT333
Marzo 29, 2019.

Segunda versión
Cátedra 1.

Problema 3.

a. $U(x) = I(x) - C(x)$,

U : utilidad
I : Ingreso
C : Costo

$$U(x) = 7x - \left(\frac{5000}{x} + 1 + x \right)$$
$$= 7x - \frac{5000}{x} - 1 - x = 6x - \frac{5000}{x} - 1$$

$$\boxed{U(x) = 6x - \frac{5000}{x} - 1}$$

b. $U'(x) = 6 + 5000x^{-2} = \dfrac{6x^2 + 5000}{x^2}$

~~U'(x)=0 cuando~~
~~$6x^2+5000=0$~~
~~$x^2=$~~

$$U'(10) = \frac{6 \cdot 10^2 + 5000}{10^2} = 56$$

Interpretación: Cuando se producen y venden 56 artículos, la utilidad por cada uno es de \$56 dólares.

Problema 4.

- La función es creciente en el intervalo $[-0.5, 0.5]$ y $[1.5, 2]$.
- La función es decreciente en el intervalo $[-1, -0.5]$ y $[0.5, 1.5]$
- La función alcanza su mínimo local en $x = -0.5$ y $x = 1.5$
- La función alcanza su máximo local en $x = 0.5$

Universidad de las Américas
Cálculo Diferencial e Integral MAT333
Mayo 23, 2019

Integrales indefinidas e integrales definidas.

Definición. Integral definida consiste en un cálculo de la forma

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$\int$: signo de integración.
$f(x)$: integrando
dx : diferencial de x (x es la variable de integración)
$F(x)$: antiderivada o primitiva
C : constante de integración.

Se cumple la siguiente propiedad: $F'(x) = f(x)$

Proposición. Reglas básicas de integración (vs. reglas de derivación)

i. $\dfrac{d(C)}{dx} = 0$, $\int 0\,dx = C$

ii. $\dfrac{d(kx)}{dx} = k$, $\int k\,dx = kx + C$

iii. $\dfrac{d(kf(x))}{dx} = k\dfrac{df(x)}{dx}$, $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

iv. $\dfrac{d(f(x)+g(x))}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx} + \dfrac{dg(x)}{dx}$, $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

v. $\dfrac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$, $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

vi. $\dfrac{d(e^x)}{dx} = e^x$, $\int e^x\,dx = e^x + C$

vii. $\dfrac{d(\ln(x))}{dx} = \dfrac{1}{x}$, $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

Angels Devia

Ejemplo. Calcular la integral indefinida $\int \frac{3x^4+4x^3-5\sqrt{x}}{x}\,dx$

Definición. La integral definida se calcula de la siguiente forma

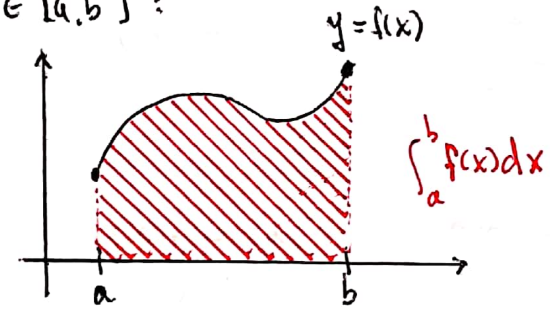
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

$F(x)$: primitiva o antiderivada de $f(x)$

$\int_a^b f(x)dx$: integral de la función f en el intervalo $[a,b]$

Interpretación geométrica de la derivada :

Para $f(x) \geq 0$ en $x \in [a,b]$:



Ejemplo. Calcular la integral definida $\int_1^2 (3x^2+x-1)dx$

Relación entre la derivada y la integral.

Proposición. Se cumple

i. $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$

ii. $\int \frac{d}{dx} f(x)\,dx = f(x)$

Proposición. Sea la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, donde f es una función continua. F es derivable en x y se cumple:

$$F'(x) = f(x)$$

Ejemplo. Resolver problema 1 cátedra 3 2018

Un agricultor que se dedica al cultivo de trigo, adquirió nueva maquinaria por un valor de 30.000 dólares. Si la tasa con que cambia el valor de venta de las máquinas está dada por:

$$V'(t) = 80(4-5t),$$

donde t es el tiempo transcurrido desde la fecha de compra y V se mide en dólares por año.

a. Encuentre la expresión $V(t)$ que define la función de venta.
b. ¿Cuál será el valor de venta de las máquinas después de 5 años de uso?

Ejemplo. Problema 3 Cátedra 3, 2018 (Modificado).

Los gastos totales (en dólares) de cierta empresa, están dados por:

$$G(t) = \int_0^t 400e^t \, dt$$

Con t, medido en años. ¿Cuál será el gasto total aproximado en que incurre la empresa durante 3 años?

Adicional: · Calcule el gasto marginal a los 3 años.

· Calcule el gasto marginal a los 5 años

Universidad de las Américas
Cálculo Diferencial e integral
Mayo 27, 2019.

Desarrollo Cátedra II

Problema 1. $f(x,y) = 2xy + 3x^2y - y^3$.

Desarrollo. $f_x = 2y + 6xy$, $f_{xx} = 6y$

$f_y = 2x + 3x^2 - 3y^2$, $f_{yy} = -6y$

$f_{xx} + f_{yy} = 6y - 6y = 0$. Se cumple $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

Problema 2. $D_x(x,y) = -2xy$, $D_y(x,y) = -x^2$

$D_x(1,10) = -2 \cdot 1 \cdot 10 = -20$, $D_y(x,y) = -1^2 = -1$

- Al adquirir un producto A extra sobre 1, manteniendo el producto B fijo a 10, la demanda disminuye a razón de 20 unidades.
- Al adquirir un producto B extra sobre 10, manteniendo fijo el producto A en 1, la demanda disminuye a razón de 1 unidad.

Problema 3. Buscamos puntos críticos de $P(x,y)$ mediante el sistema

$$\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = 0 \end{cases}$$

$P_x = 1.08x - 0.06x^2$, $P_y = 3.78y - 0.27y^2$

Las soluciones del sistema son:

$$(0,0),\ (0,14),\ (18,0),\ (18,14).$$

Estudiamos los puntos críticos mediante el criterio del Hessiano:

$$\Delta(x,y) = P_{xx}(x,y)P_{yy}(x,y) - (P_{xy}(x,y))^2$$

$P_{xx} = -0.12x$, $P_{yy} = -0.54y$, $P_{xy} = 0$.

$\Delta(0,0) = 0$, $\Delta(18,0) = 0$

$\Delta(0,14) = 0$, $\Delta(18,14) = 16{,}3296$

Como $\Delta(18,14) > 0$, $P_{xx}(18,14) = -2.16 < 0$, se concluye que P alcanza su máximo (local) en el punto crítico $(18,14)$.

La producción máxima es de $P(18,14) = 181{,}18$ cientos de toneladas.

Problema 4. La restricción es $10x + 30y = 600$

$$L(x,y,\lambda) = U(x,y) + \lambda(10x + 30y - 600)$$
$$= 10x^{3/5}y^{2/5} + 10\lambda x + 30\lambda y - 600\lambda$$

Estudiamos las soluciones del sistema $\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases}$

Luego:
$$\begin{cases} 6x^{-2/5}y^{2/5} + 10\lambda = 0 \\ 4x^{3/5}y^{-3/5} + 30\lambda = 0 \\ 10x + 30y - 600 = 0 \end{cases}$$

De las 2 primeras ecuaciones despejamos λ:
$$\lambda = -\frac{3}{5}x^{-2/5}y^{2/5}$$
$$\lambda = -\frac{2}{15}x^{3/5}y^{-3/5}$$

Igualando queda:
$$-\frac{3}{5}x^{-2/5}y^{2/5} = -\frac{2}{15}x^{3/5}y^{-3/5}$$

Si reordenamos:
$$y = \frac{2}{9}x$$

$$0 = 10x + 30y - 600 = 10x + 30\left(\frac{2x}{9}\right) - 600 = \frac{50x}{3} - 600$$

Despejando x: $x = \frac{1800}{50} = \frac{180}{5} = 36$

Reemplazamos $x = 36$ en la igualdad $y = \frac{2}{9}x$
$$y = \frac{2}{9} \cdot 36 = 8$$

En resumen, deben venderse 36 artículos de tipo A y 8 artículos de tipo B para maximizar la utilidad.

Universidad de las Américas
Cálculo Diferencial e integral MAT333
Junio 13, 2019.

Problemas resueltos preparación CAT 3.

Problema 1. $G(t) = \int_0^t (2s+5)(s^2+5s+120)^{1/2}\,ds$

Debemos calcular $G(2) = \int_0^2 (2s+5)(s^2+5s+120)^{1/2}\,ds$

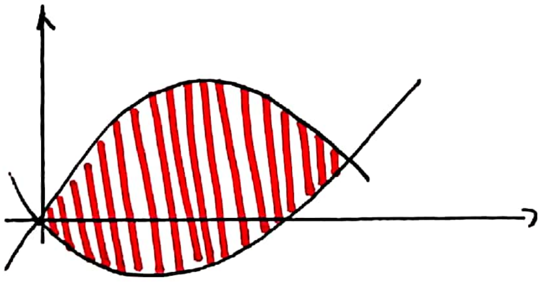
Cambio de variable : $r = s^2+5s+120$, $dr = 2s+5\,ds$

$$G(2) = \int_{120}^{134} r^{1/2}\,dr =$$

Problema 2. $\frac{dA}{dt} = I$

$$(t) = \int_4^9 I(t)\,dt = \int_4^9 (4+\sqrt{t})\,dt$$

Problema 3. Terreno limitado por las curvas $\begin{cases} y_1 = x^2 - 2x \\ y_2 = -x^2 + 4x \end{cases}$



A : Area total :

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (-x^2+4x-(x^2-2x))\,dx$$, donde x_1, x_2 cumplen $y_1 = y_2$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x^2 - 2x = -x^2 + 4x$$
$$\Rightarrow 2x^2 - 6x = 0$$
$$\Rightarrow 2x(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \,,\; x = 3 .$$

El problema se termina fácilmente.

<u>Problema 4</u>. Funciones de oferta y demanda:

$$D(q) = 8300 - 0.1q$$
$$O(q) = 5800 + 0.4q$$

Buscamos punto de equilibrio:

$$D(q) = O(q) \iff 8300 - 0.1q = 5800 + 0.4q$$
$$\iff 2500 = 0.5q$$
$$\iff q = 2500/0.5 = 5000 \qquad \therefore\ D(5000) = 7800$$

Excedente de demanda E_D:

$$E_D = \int_0^{5000} (D(q) - 7800)\,dq = \int_0^{5000} (8300 - 0.1q - 7800)\,dq = \int_0^{5000} (500 - 0.1q) =$$

Excedente de la oferta E_O:

$$E_O = \int_0^{5000} (7800 - O(q))\,dq = \int_0^{5000} (7800 - 5800 - 0.4q)\,dq = \int_0 (2000 - 0.4q)\,dq =$$

Universidad de las Américas.
Cálculo Diferencial e Integral MAT333
Jueves 13, 2019.

Ideas cátedra 3 MAT333

Problema 1. Problema de oferta y demanda:

$$O(x) = x^2 \quad , \quad D(x) = (x-3)^2$$

Búsqueda de punto de equilibrio:

$$O(x) = D(x) \iff x^2 = (x-3)^2 \iff x^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$6x - 9 = 0$$

$$x = 9/6 = 3/2$$

Cambiando 3 por 4: $x^2 = (x-4)^2 \iff x^2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x = 2$

Excedente del productor:

$$E_p = \int_0^2 (4 - O(x))\,dx = \int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$E_c = \int_0^2 (D(x) - 4)\,dx = \int_0^2 (x^2 - 8x + 16 - 4)\,dx = \int_0^2 (x^2 - 8x + 12)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 16 + 24 = \frac{8}{3} + 8 = \frac{32}{3}$$

Universidad de las Américas
Cálculo Diferencial e Integral MAT 333
Junio 24, 2019.

Desarrollo Cátedra Recuperativa

Problema 1.

$$c(q) = 0.4q^2 + 4q + 5$$
$$c'(q) = 0.8q + 4$$

$$C'(2) = 0.8 \cdot 2 + 4 = 1.6 + 4 = 5.6$$

Costo marginal : $C'(2) = 5.6$ millones de pesos/tonelada

Interpretación: Cuando la empresa produce 2 toneladas, producir 1 tonelada de dulce cuesta 5.6 millones de pesos.

Problema 2.

$$I(x,y) = 200 + 504x + 482y - 10x^2 - 20y^2$$

$C(x,y)$: costo de producir x toneladas de plástico de tipo A e y toneladas de plástico de tipo B.

$$C(x,y) = 4x + 2y$$

a. $G = G(x,y)$: Ganancia por producir x toneladas de plástico de tipo A e y toneladas de plástico de tipo B.

$$G(x,y) = I(x,y) - C(x,y)$$
$$G(x,y) = 200 + 504x + 482y - 10x^2 - 20y^2 - (4x + 2y)$$
$$G(x,y) = 200 + 500x + 480y - 10x^2 - 20y^2$$

b. $G_x = 500 - 20x$, $G_y = 480 - 40y$

$\left\{ \begin{array}{l} G_x = 0 \\ G_y = 0 \end{array} \right\}$ es equivalente a $\left\{ \begin{array}{l} 500 - 20x = 0 \\ 480 - 40y = 0 \end{array} \right.$

$$x = 25$$
$$y = 12$$

$$G_{xx} = -20 , \quad G_{yy} = -40 , \quad G_{xy} = 0$$

$$\Delta = G_{xx}(x,y)\, G_{yy}(x,y) - G_{xy}(x,y)^2$$

$$\Delta(25,12) = (-20)(-40) - 0 = 800 > 0$$

Como $\Delta(25,12) > 0$, $G_{xx}(25,12) = -20 < 0$, la función $G = G(x,y)$ se maximiza cuando $x = 25$, $y = 12$.

$$G(25, 12) = 200 + 500 \cdot 25 + 480 \cdot 12 - 10 \cdot 25^2 - 20 \cdot 12^2$$
$$= 9330$$

Conclusión: La empresa de Poliuretano maximiza su ganancia cuando se producen 25 toneladas de plástico de tipo A, 12 toneladas de plástico de tipo B. Su ganancia máxima es de $9330 dólares.

Problema 3.

a. $P_O(x) = 0.1x^2 + x + 40$

$P_D(x) = -0.2x^2 + 60$

Buscamos el precio de equilibrio:

$$P_O(x) = P_D(x)$$
$$0.1x^2 + x + 40 = -0.2x^2 + 60$$
$$0.3x^2 + x - 20 = 0$$

$$x_1 = -10$$
$$x_2 = \frac{20}{3}$$

$x_1 = -10$ no tiene sentido en el contexto del problema, luego $x_2 = \frac{20}{3}$ sirve.

Precio de equilibrio: $P_D\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{460}{9}$

Sea:

E_P: Excedente del productor (oferta)

E_C: Excedente del consumidor (demanda)

$$E_P = \int_0^{20/3} \left((-0.2x^2+60) - \frac{460}{9}\right) dx = \int_0^{20/3} \left(-0.2x^2 + \frac{80}{9}\right) dx$$
$$= \left(\frac{-0.2}{3}x^3 + \frac{80}{9}x\right)\Bigg|_0^{20/3} \approx 39.51$$

$$E_C = \int_0^{20/3} \left(\frac{460}{9} - (0.1x^2+x+40)\right) dx = \int_0^{20/3} \left(\frac{100}{9} - 0.1x^2 - x\right) dx$$
$$= \left(\frac{100}{9}x - \frac{0.1}{3}x^3 - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{20/3} \approx 41.98$$

Luego: El excedente del productor es 39.51 euros, mientras que el excedente del consumidor es de 41.98 euros.

b. Sea B el bienestar social:

$$B = E_p + E_c$$

$$B \approx 39.51 + 41.98 = 81.49$$

El bienestar social es de 81.49 euros.

Universidad de las Américas
Cálculo Diferencial e Integral MAT333
Junio 14, 2019

Desarrollo Cátedra III

Problema 1.

Búsqueda del precio de equilibrio:

$$\mathcal{O}(x) = D(x)$$
$$x^2 = (x-4)^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 = x^2 - 8x + 16 \quad \Rightarrow \quad 8x = 16 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

P_0 : precio de equilibrio $\Rightarrow \quad \mathcal{O}(2) = 4$ (dólares)

$E_{\mathcal{O}}$: excedente del productor (oferta)

E_D : excedente del consumidor (demanda).

$$E_{\mathcal{O}} = \int_0^2 (4 - \mathcal{O}(x))dx = \int_0^2 (4 - x^2)dx = \int_0^2 4dx - \int_0^2 x^2 dx = 4x\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2$$
$$= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \approx 5.3$$

$$E_D = \int_0^2 (D(x) - 4)dx = \int_0^2 (x^2 - 8x + 16 - 4)dx = \int_0^2 (x^2 - 8x + 12)dx$$
$$= \int_0^2 x^2 dx - \int_0^2 8x dx + \int_0^2 12 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 - 4x^2\Big|_0^2 + 12x\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 16 + 24 = \frac{32}{3} \approx 10.67$$

Respuesta: El excedente del productor es de 5.3 dólares y el excedente del consumidor es de 10.67 dólares.

Problema 2.

$$D'(p) = -\frac{4000}{p^2} \quad / \int dp$$

$$\int D'(p)dp = \int -\frac{4000}{p^2} dp$$

$$D(p) = \frac{4000}{p} + C$$

Por condición del problema : $D(8) = 504$

$$504 = D(8) = \frac{4000}{8} + C = 500 + C$$

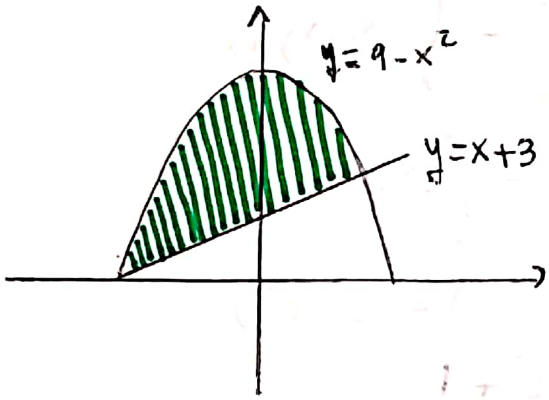
$$C = 4$$

La función de demanda es : $D(p) = \frac{4000}{p} + 4$

Problema 3.

A : Area total a sembrar (en metros cuadrados)
P : Dinero total a gastar en semillas (en pesos)

Ecuación : $P = 38400\, A$



Buscamos punto de intersección entre las curvas :

$$9 - x^2 = x + 3 \Rightarrow 0 = x^2 + x + 3 - 9 .$$
$$\Rightarrow 0 = x^2 + x - 6$$
$$\Rightarrow x = -3, 2$$

$$A = \int_{-3}^{2} (9 - x^2 - (x+3))dx = \int_{-3}^{2} (-x^2 - x + 6)dx$$
$$= -\frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{2} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^{2} + 6x\Big|_{-3}^{2} = \frac{125}{6}$$

Por lo tanto : $P = 38400 \cdot \frac{125}{6} = 800.000$

Conclusión : El cliente debe cancelar 800000 pesos.

Problema 4

$$G(t) = \int_0^t 400 e^x x \, dx = 400 \int_0^t e^x x \, dx$$

Ocupando regla de integración por partes sobre la integral $\int_0^t e^x x \, dx$

$$\int_0^t e^x x \, dx = e^x x \Big|_0^t - \int_0^t e^x (x') \, dx$$

$$= e^x x \Big|_0^t - \int_0^t e^x dx$$

$$= (e^t t - e^0 \cdot 0) - (e^t - e^0)$$

$$= e^t t - e^t + 1$$

El gasto total es $G(t) = e^t t - e^t + 1$

Gasto total en los primeros 10 años : $G(10)$

$$G(10) = e^{10} \cdot 10 - e^{10} + 1 \approx 198239.19$$

Conclusión : El gasto total de la empresa durante los primeros 10 años es de aproximadamente 198239.19 dólares.

Universidad de las Américas.
Algebra II, MAT141
Marzo 28, 2019

Desarrollo Cátedra 1.

Problema 1. (a) Sean $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Calcule $\vec{u}^T\vec{v}$, $\vec{v}^T\vec{u}$, $\vec{u}\vec{v}^T$, $\vec{v}\vec{u}^T$

Desarrollo. $\vec{u}^T\vec{v} = (-3\ 2\ -5)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (-3a + 2b - 5c)$

$$\vec{v}^T\vec{u} = (a\ b\ c)\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = (-3a + 2b - 5c)$$

$$\vec{u}\vec{v}^T = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}(a\ b\ c) = \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 2a & 2b & 2c \\ -5a & -5b & -5c \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\vec{u}^T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(-3\ 2\ -5) = \begin{pmatrix} -3a & 2a & -5a \\ -3b & 2b & -5b \\ -3c & 2c & -5c \end{pmatrix}$$

(b) Ocupando propiedades algebraicas del producto y la traspuesta:

$$\begin{aligned} (AB\vec{x})^T &= ((AB)\vec{x})^T \quad \text{(asociatividad)} \\ &= \vec{x}^T(AB)^T \\ &= \vec{x}^T(B^TA^T) \\ &= \vec{x}^TB^TA^T \end{aligned}$$

Por lo tanto: $(AB\vec{x})^T = \vec{x}^TB^TA^T$

Problema 2.

a. Existe A^{-1} siempre y cuando $\det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & a+1 \end{pmatrix} - 1\det\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} + 4\det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= 2\left(5(a+1) - 28\right) - 1\left(3(a+1) - 7\right) + 4\left(12 - 5\right)$$

$$= 10(a+1) - 56 - 3(a+1) + 7 + 48 - 20$$

$$= 10a + 10 - 3a - 3 - 21$$

$$= 7a - 14$$

$$\det(A) = 0 \iff 7a - 14 = 0 \iff a = \frac{14}{7} = 2$$

luego, A^{-1} existe siempre y cuando $a \neq 2$.

b. Ocupamos la fórmula $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \operatorname{Adj}(A)$, donde

$$\operatorname{Adj}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^T$$

$$a_{11} = (-1)^2 \det\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 20 - 28 = -8$$

$$a_{12} = (-1)^3 \det\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -1(12 - 7) = -5$$

$$a_{13} = (-1)^4 \det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 12 - 5 = 7$$

$$a_{21} = (-1)^3 \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = -(4 - 16) = 12$$

$$a_{22} = (-1)^4 \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 8 - 4 = 4$$

$$a_{23} = (-1)^5 \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -(8 - 1) = -7$$

$$a_{31} = (-1)^4 \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = 7 - 20 = -13$$

Problema 3. Sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 2y = 8000 \\ 3y + z = 10\,500 \\ x + y + z = 7000 \end{cases}$$

x : taza de café

y : sándwich

z : helado.

Desarrollo, Ocupamos Regla de Cramer

Ecuación matricial asociada:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8000 \\ 10\,500 \\ 7000 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$A_1(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 8000 & 2 & 0 \\ 10\,500 & 3 & 1 \\ 7000 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 8000 & 0 \\ 0 & 10\,500 & 1 \\ 1 & 7000 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8000 \\ 0 & 3 & 10\,500 \\ 1 & 1 & 7000 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1(\vec{b})) = 8000(3-1) - 2(10\,500 - 7000) = 16000 - 7000 = 9000$$

$$\det(A_2(\vec{b})) = 2(10\,500 - 7000) - 8000(-1) = 7000 + 8000 = 15000$$

$$\det(A_3(\vec{b})) = 2(21000 - 10\,500) - 2(-10\,500) + 8000(-3)$$

$$= 21000 + 21000 - 24000 = 18000$$

$$\det(A) = 2(3-1) - 2(-1) = 4 + 2 = 6$$

Así: $x = \dfrac{9000}{6} = 1500$, $y = \dfrac{15000}{6} = 2500$, $z = \dfrac{18000}{6} = 3000$

$$a_{32} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = -1(14-12) = -2$$

$$a_{33} = (-1)^6 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 10 - 3 = 7$$

luego: $\cancel{A^{-1}}$ $\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 7 \\ 12 & 4 & -7 \\ -13 & -2 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -8 & 12 & -13 \\ -5 & 4 & -2 \\ 7 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = 21 - 14 = 7$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -8 & 12 & -13 \\ -5 & 4 & -2 \\ 7 & -7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/7 & 12/7 & -13/7 \\ -5/7 & 4/7 & -2/7 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tq $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} -8/7 & 12/7 & -13/7 \\ -5/7 & 4/7 & -2/7 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8/7 + 24/7 - 65/7 \\ -5/7 + 8/7 - 10/7 \\ 1 - 2 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Segunda forma:

Resolvemos la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 10\,500 \\ 7000 \end{pmatrix}$

mediante el calculo de A^{-1}:

$$\vec{x} = A^{-1} \vec{b}$$

Como $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot Adj(A)$, $Adj(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^T$

$$a_{11} = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3-1 = 2$$

$$a_{12} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -(-1) = 1$$

$$a_{13} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -3$$

$$a_{21} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -(2-0) = -2$$

$$a_{22} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$a_{23} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -(2-2) = 0$$

$$a_{31} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$a_{32} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

$$a_{33} = (-1)^6 \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 6$$

Luego: $$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & -1/3 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente: $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & -1/3 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8000 \\ 10500 \\ 7000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8000}{3} - \frac{10500}{3} + \frac{7000}{3} \\ \frac{8000}{6} + \frac{10500}{3} - \frac{7000}{3} \\ -4000 + 7000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1500 \\ 2500 \\ 3000 \end{pmatrix}$$ (o sea, $x = 1500$, $y = 2500$, $z = 3000$)

Scanned with CamScanner

Problema 4.

Ocupando Regla de Cramer

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & h \\ 4 & 8 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$A_1(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 & h \\ k & 8 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & k \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1(\vec{b})) = 16 - hk$$

$$\det(A_2(\vec{b})) = k - 8$$

$$\det(A) = 8 - 4h$$

Así, $\quad x = \dfrac{16 - hk}{8 - 4h} \quad , \quad y = \dfrac{k - 8}{8 - 4h}$

a. Sistema tiene solución única si $8 - 4h \neq 0 \quad (h \neq 2)$

b. Sistema tiene infinitas soluciones si $h = 2$, $k = 8$

c. Sistema tiene solución nula (sin soluciones) si $h = 2$, $k \neq 8$.

Universidad de las Américas.
Algebra II
Abril 12, 2019

La regla de Cramer.

Regla de Cramer: La ecuación matricial $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución

$$x_{i_1} = \frac{\det(A_i(\vec{b}))}{\det(A)}$$

Ejemplo. Estudiar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + ky + 6z = 6 \\ -x + 3y + (k-3)z = 0 \end{cases}$$

x

$$4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Desarrollo. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1(k(k-3)-18) + 2(2(k-3)+6) + 3(6+k) \\ &= k^2 - \cancel{3k} - \cancel{18} + 4k - \cancel{12} + \cancel{12} + \cancel{18} + \cancel{3k} \\ &= k^2 + 4k \\ &= k(k+4) \end{aligned}$$

A^{-1} existe para $k \neq 0$, $k \neq -4$

Calculamos la solución (única) para $k \neq 0, -4$.

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A_1(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & k & 6 \\ 0 & 3 & k-3 \end{pmatrix}, \quad A_2(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & k-3 \end{pmatrix}, \quad A_3(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A_1(\vec{b})) &= (k(k-3)-18) - (-2)\big(6(k-3) - 0\big) + 3(18-0) \\ &= k^2 - 3k - 18 + 2(6k-18) + 54 \\ &= k^2 + 9k = k(k+9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A_2(\vec{b})) &= \big(6(k-3) - 0\big) - \big(2(k-3) + 6\big) + 3(0+6) \\ &= 6k - 18 - (2k - \cancel{6+6}) + 18 = 4k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A_3(\vec{b})) &= (0-18) - (-2)(0+6) + 1(6+k) \\ &= -18 + 12 + 6 + k = k \end{aligned}$$

Finalmente: $\quad x = \dfrac{k(k+9)}{k(k+4)}, \quad y = \dfrac{4k}{k(k+4)}, \quad z = \dfrac{k}{k(k+4)}$

Observación. Solamente se puede simplificar $\dfrac{a}{a}$ cuando $a \neq 0$.

1. Solución única para $k \neq 0, -4$

$$x = \frac{k+9}{k+4}, \quad y = \frac{4}{k+4}, \quad z = \frac{1}{k+4}$$

2. No hay solución cuando $k = -4$,

$$x = \frac{-20}{0}, \quad y = \frac{-16}{0}, \quad z = \frac{-4}{0}$$ expresiones que no existen en $\mathbb{R}$.

3. Solución infinita cuando $k = 0$,

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}, \quad z = \frac{0}{0}$$ expresiones indeterminadas.

Algebra II (MAT171)
Clase 5

Prof. Marco Godoy
marco.godoy@edu.udla.cl

Abril 2019

P1. La *Regla de Cramer* ofrece un método alternativo a la hora de resolver la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si $\det(A) \neq 0$ (A posee inversa), entonces la solución de la ecuación matricial es tal que $\mathbf{x} = (x_{i1})$ cumple:

$$x_{i1} = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det(A)}.$$

La matriz $A_i(\mathbf{b})$ es la que resulta de quitar la columna i de A y reemplazarla por la matriz columna $\mathbf{b}$. Es decir:

$$A_i(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{b} \cdots \mathbf{a}_n)$$

A modo de ejemplo, vamos a aplicar la Regla de Cramer en el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} 30x + 10y + 20z &= 540 \\ x + 30z &= 278 \\ 10x + 10y + 20z &= 380 \end{aligned}$$

Se tiene $A = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 20 \\ 1 & 0 & 30 \\ 10 & 10 & 20 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 540 \\ 278 \\ 380 \end{pmatrix}$. Ahora calculamos $A_1(\mathbf{b})$, $A_2(\mathbf{b})$, $A_3(\mathbf{b})$:

$$A_1(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 540 & 10 & 20 \\ 278 & 0 & 30 \\ 380 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A_2(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 30 & 540 & 20 \\ 1 & 278 & 30 \\ 10 & 380 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A_3(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 540 \\ 1 & 0 & 278 \\ 10 & 10 & 380 \end{pmatrix}$$

Calculamos los determinantes:

$$\begin{aligned}\det(A) &= -6000\\ \det(A_1(\mathbf{b})) &= -48000\\ \det(A_2(\mathbf{b})) &= -72000\\ \det(A_3(\mathbf{b})) &= -54000\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}x &= \frac{\det(A_1(\mathbf{b}))}{\det(A)} = \frac{-48000}{-6000} = 8\\ y &= \frac{\det(A_2(\mathbf{b}))}{\det(A)} = \frac{-72000}{-6000} = 12\\ z &= \frac{\det(A_3(\mathbf{b}))}{\det(A)} = \frac{-54000}{-6000} = 9\end{aligned}$$

P2. Una ecuación matricial del tipo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{x}$ es la matriz columna de las incógnitas, tiene solamente 3 alternativas:

a. Tiene solución única, es decir, existe solamente un $\mathbf{x}$ que satisface la ecuación.

b. Tiene infinitas soluciones.

c. No tiene solución.

Ya sabemos que para que la ecuación matricial tenga solución única, debe cumplirse que $\det(A) = 0$. Es decir, cuando $\det(A) = 0$, puede ocurrir el caso de b. o c.

Ejemplo: Ocupando la Regla de Cramer, determine los valores de k para que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}x - 2y + 3z &= 1\\ 2x + ky + 6z &= 6\\ -x + 3y + (k-3)z &= 0\end{aligned}$$

a. Tenga solución única (además determínela).

b. Tenga infinitas soluciones.

c. No tenga soluciones.

P3. Una Ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se dice *homogenea* cuando $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ es el vector columna donde todas sus entradas son cero). A modo de ejemplo, la siguiente ecuación matricial es homogenea:

$$\begin{pmatrix} 30 & 10 & 20\\ 1 & 0 & 30\\ 10 & 10 & 20\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$