VARIABLE COMPLEJA (AYUDANTIA)

Problema 1

Sea $f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & , \quad z \neq 0 \\ 0 & , \quad z = 0 \end{cases}$. Ver que f es continua, satisface Cauchy-Riemann, pero no es analítica en 0 (ver Zaken)

Problema 2

Sea $h : [0,1] \to [0,1]$ continua, no decreciente. Suponer que $h(0)=0$, $h(1)=1$ y $h'(x)=0$, ctp. Extienda $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vía $h(x+n) = h(x)+n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x \leq 1$. Sea:

$$f(x+iy) = x + i(y + h(x))$$

(i) Probar que f es homeomorfismo.

- Claramente f continua, pues x es continua e $y + h(x)$ continua.
- f tiene inversa $f^{-1}(x+iy) = x + (y - h(x))i$
- Análogamente f^{-1} es continua.

(ii) Ver que $\frac{\partial f}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ ctp.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \underbrace{\frac{1}{2}(1 - i^2)}_{\text{fórmula}} = 1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \underbrace{\frac{1}{2}(1 + i^2)}_{\text{fórmula.}} = 0$$

(iii) f no es holomorfa.

Primero, debe existir $x_0 \in [0,1]$ tal que $h'(x_0) \neq 0$

$$\frac{\partial f(x_0 + iy)}{\partial z} \neq 0$$

Hacer esto:

$$\Delta |f|^2 = 4|f'|^2 \quad \text{(lateo, pero fácil).}$$

Funciones analíticas

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty}{}' a_j (z-p)^j$$

- $\sum_{n\geq 0}' z_n \longrightarrow$ si $\sum_{n\geq 0}' |z_n| < \infty$, $\sum_{n\geq 0}' z_n < \infty$

(Ver $\sum_{n\geq 0}' z_n = \sum_{n\geq 0}' u_n + i v_n$ y mirar sumas parciales $\rightarrow$ ver parte real e imaginaria c/u por su cuenta)

- $R = \limsup_{j\to\infty} |a_j|^{-1/j} \Rightarrow f$ converge $\forall z \in B(p,\varepsilon)$ con $\varepsilon < R$.

Además, f no converge para $|z-p| > R$

Proposición. Si f es analítica, entonces f es derivable en $B(p,\varepsilon)$

$\hookrightarrow$ Sea $g(z) = \sum_{j\geq 1}' j a_j (z-p)^{j-1}$. Esta función tiene el mismo radio de convergencia que f. Sea $z_0 \in B(p,\varepsilon)$, $\varepsilon < R$

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - g(z_0) = \sum_{j\geq 2} a_j \left(\frac{z^j - z_0^j}{z-z_0} - j z_0^{j-1} \right),$$

asumiendo que $p=0$

$$= \left(\underset{①}{\sum_{j=2}^{N}{}'} + \underset{②}{\sum_{N+1}^{\infty}{}'} \right) \left(a_j \left(z^{j-1} + z^{j-2} z_0 + \dots + z_0^{j-1} - j z_0^{j-1} \right) \right)$$

$① \underset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0$ (ver esto)

② $\rightarrow |②| \leqslant \underbrace{\sum_{j\geq N+1}' |a_j|\, 2j\, \delta^{j-1}}_{\star}$, donde $|z|, |z_0| < \delta$

pues, $|\underbrace{z^{j-1} + z^{j-2} z_0 + \dots + z_0^{j-1}}_{j\text{-términos}} - j z_0^{j-1}|$

$$\leqslant |z^{j-1}| + \dots + |j z_0^{j-1}| < \underbrace{\delta^{j-1} + \delta^{j-1} + \delta^{j-1} + \dots + \delta^{j-1}}_{j\delta^{j-1}} + j\delta^{j-1}$$

$$= 2j\,\delta^{j-1}$$

Elegimos $\delta < \varepsilon$. $\star$ mismo radio de convergencia que $\sum' |a_j| \delta^j < \infty$.
Así, elegimos N suficientemente grande tal que:

$|②|$ esté suficientemente acotado $\longrightarrow |②| \leqslant \sum_{j\geq N+1}' \xrightarrow{N\to\infty} 0$

$$\therefore \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = g(z_0) \quad //$$

$\rightarrow$ Así, si una función es analítica, es infinitamente derivable (pues la derivada también es analítica).

Ejemplo. $f(z) = e^z = \sum_{k\geq 0}' \frac{z^k}{k!}$

$$(e^z)' = \sum_{k\geq 0}' \frac{k z^{k-1}}{k!} = \sum_{k\geq 1}' \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = e^z \quad \text{(por ejemplo anterior)}$$

Ejemplo. (1) $\sum_{j\geq 1}' j z^j$

Radio de convergencia $= 1$

$$\Big(\sum_{j\geq 0}' z^j\Big)' = \Big(\frac{1}{1-z}\Big)' \quad , \quad |z|<1$$

$$\Rightarrow \sum_{j\geq 1}' j z^{j-1} = \Big(\frac{1}{1-z}\Big)^2 \quad /\cdot z$$

$$\Rightarrow \sum_{j\geq 1}' j z^j = \frac{z}{(1-z)^2} \quad \boxed{\star}$$

(2) $\sum_{j\geq 1}' j^2 z^j$,

$$\Big(\sum_{j\geq 0}' z^j\Big)'' = \Big(\sum_{j\geq 1}' j z^{j-1}\Big)' = \sum_{j\geq 2}' j^2 z^{j-2} - \sum_{j\geq}' j z^{j-2}$$

O mejor, $\boxed{\star}' \rightarrow \sum_{j\geq 1}' j^2 z^{j-1} = \Big(\frac{z}{(1-z)^2}\Big)' \quad /\cdot z$

$$\Rightarrow \sum_{j\geq 1}' j^2 z^j = \Big(\frac{z}{(1-z)^2}\Big)' \cdot z$$

$$= \frac{z - z^3}{(1-z)^2} \cdot z \quad , \text{ etc} \ldots$$

(3) $f(z)=\dfrac{1}{(1-z^6)^3}$

$$\left(\frac{1}{1-z^6}\right)^3 = \left(\sum_{j\geq 0}' z^{6j}\right)^3 = \sum_{j\geq 0}' b_r z^{6r}$$

$$\rightarrow b_r = \sum_{\{p,q,l\geq 0 \mid p+q+l=r\}}' 1$$

$$= \sum_{l=0}^{r}{}' \sum_{\{p,q\geq 0 \mid p+q=l-r\}}' 1$$

$$= \sum_{l=0}^{r}{}' \sum_{q=0}^{r-l} 1 \longrightarrow$$ pues p queda fijo (determinado por q y l)

$$= \sum_{l=0}^{r}{}'(r-l+1) = \sum_{l=0}^{r}{}'((r+1)-l)$$

$$= (r+1)^2 - \frac{r(r+1)}{2}$$

Ejercicio. Sea $f(z) = \sum_{j\geq 0}' a_j z^j$

(a) $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ sii $a_j \in \mathbb{R}$ $\forall j \geq 0$

($\Leftarrow$) $a_j \in \mathbb{R} \Rightarrow f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$

($\Rightarrow$) Como $f(0) \in \mathbb{R}$, $a_0 \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{f(z)-a_0}_{\mathbb{R}} = \sum_{j\geq 1}' a_j z^j - \underbrace{z}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\sum_{j\geq 1}' a_j z^{j-1}}_{\in \mathbb{R}}$$

$\Rightarrow g(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow a_i \in \mathbb{R}$.

luego inducción y listo.

(b) Si $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, $f(i\mathbb{R}) \subseteq i\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ es impar.

La idea es probar que $a_{2j}=0$ $\forall j \geq 0$. Notar que:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) \in \mathbb{R} \\ f(0) \in i\mathbb{R} \end{array}\right. \rightarrow f(0)=0=a_0$$

$$\sum_{j\geq 0}' a_j z^j = a_1 z + a_2 z^2 + \sum_{j\geq 2}' a_j z^j$$

Por (a), $a_j \in \mathbb{R}$, $\forall j \geq 0$. Miramos:

$$f(z) - a_1 z = z^2 \underbrace{\sum_{j\geq 2}' a_j z^{j-2}}_{g(z)}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} g(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R} \\ g(i\mathbb{R}) \subseteq i\mathbb{R} \end{array}\right. \Rightarrow a_2 = 0$$

lo mismo para $\forall a_i$ etc.

La exponencial

$$e^z = \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{k!}$$

Es una función con infinitas derivadas, definida en todo $\mathbb{C}$ y entera
$(e^z)' = e^z$.

Obs. (1) $e^{z+w} = e^z e^w$

$f(z) = e^{z+w} - e^z e^w$, $f'(z) = e^{z+w} - e^z e^w = f(z)$

$f(0) = 0$.

Por existencia y unicidad ODE, se concluye que $f(z) \equiv 0$ $(e^{z+w} = e^z e^w$

(2) $e^z \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

dem. Hacer por reducción al absurdo.

$e^{z_0} = 0$

$\Rightarrow e^{z+z_0} = e^z e^{z_0} = 0 \implies z = -z_0$. $(\rightarrow\leftarrow)$

Funciones trigonométricas

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen}(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\rightarrow \cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$$

Notar que: $\quad e^{iz} + e^{-iz} = \sum_{k\geq 0} \frac{(iz)^k + (-iz)^k}{k!}$

$k = 2n+1$: $\quad (iz)^{2n+1} + (-iz)^{2n+1} = 0$

$k = 2n$: $\quad (iz)^{2n} + (-iz)^{2n} = 2(-1)^n = 2(-1)^n z^{2n}$.

Obs. $e^{2\pi i} = 1$

$$1 = \cos(2\pi) = \frac{e^{2\pi i} + e^{-2\pi i}}{2}$$

$$0 = \operatorname{sen}(2\pi) = \frac{e^{2\pi i} - e^{-2\pi i}}{2i} \Rightarrow e^{2\pi i} = e^{-2\pi i} \Rightarrow (e^{2\pi i})^2 = 1$$

$$\Rightarrow e^{2\pi i} \in \{-1, 1\}$$

$$1 = \frac{e^{2\pi i} + e^{-2\pi i}}{2} = \frac{e^{2\pi i} + e^{2\pi i}}{2} \Rightarrow \boxed{e^{2\pi i} = 1}.$$

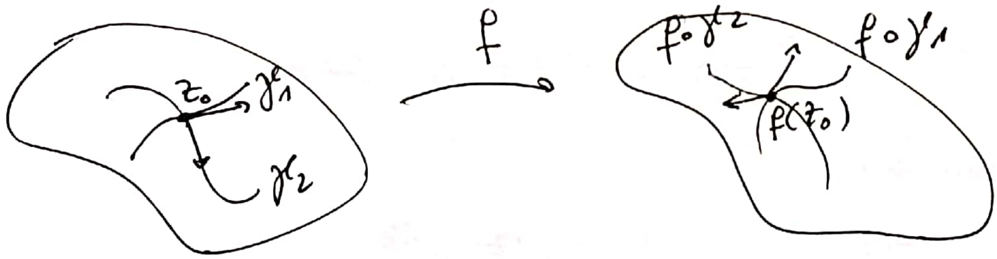
Conclusión: $e^{z+2\pi i} = e^{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Notemos que: $e^{iz} = \cos(z) + i \operatorname{sen}(z)$

$$\Rightarrow z = |z| e^{\arg(z)}.$$

Teo. Sea $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ analítica. Entonces f preserva ángulos en todo $z_0 \in \mathcal{U}$ donde $f'(z_0) \neq 0$.

dem.



Sea γ_1 camino suave en $\mathcal{U}$ ($\exists\, \gamma_1 : [0,1] \to \mathcal{U}$ C^1)

Entonces $f\circ\gamma_1$ es un camino suave.

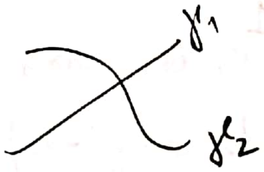
$$(f\circ\gamma_1)'(t) = (f'\circ\gamma_1)(t) \cdot \gamma_1'(t)$$

Si $z_0 = \gamma_1(t_0)$ y $\gamma_1'(t_0) \neq 0$, $f'(z_0) \neq 0$

$$\Rightarrow (f\circ\gamma_1)'(t_0) \neq 0 \text{ y además}$$

$$\operatorname{Arg}(f\circ\gamma_1)'(t_0) = \operatorname{Arg} f'(z_0) + \operatorname{Arg} \gamma_1'(t_0)$$

$$\operatorname{Arg} f'(z_0) = \operatorname{Arg}(f\circ\gamma_1)'(t_0) - \operatorname{Arg}\gamma_1'(t_0)$$



Sea γ_2 otro camino a través de z_0 y que no es tangente a γ_1 en t_0, i.e, $\gamma_1'(t_0) \neq \gamma_2'(t_0)$, donde $\gamma_2(t_1) = z_0$

Si $\gamma_2'(t_1) \neq 0$

$$\Rightarrow \operatorname{Arg}(f\circ\gamma_1)'(t_0) - \operatorname{Arg}\gamma_1'(t_0) = \operatorname{Arg}(f\circ\gamma_2)'(t_1) - \operatorname{Arg}\gamma_2'(t_1)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arg}(f\circ\gamma_1)'(t_0) - \operatorname{Arg}(f\circ\gamma_2)'(t_1) = \operatorname{Arg}\gamma_1'(t_0) - \operatorname{Arg}\gamma_2'(t_1)$$

$\blacksquare$

- Sea $f = \sum_{n\geq 0}' a_n z^n = \sum_{n\geq 0}' b_n z^n$ con radio de convergencia >0 en ambos casos.

Entonces $a_n = b_n \ \forall n \geq 0$.

$f(0) = a_0 = b_0$

Inducción: suponer $a_k = b_k \ \forall n \leq k$

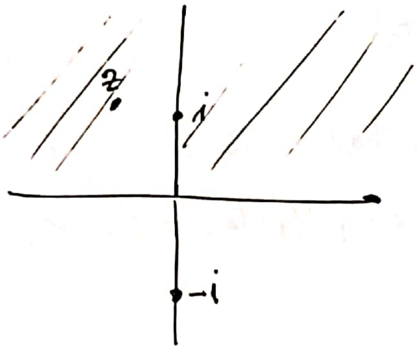
$$f^{(k+1)}(0) = (k+1)!\,a_{k+1} = (k+1)!\,b_{k+1} \Rightarrow a_{k+1} = b_{k+1} = \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}$$

Obs. Recordar que f es infinitamente diferenciable.

Ejemplo. $F : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{D}$, $z \mapsto \dfrac{i-z}{i+z}$, $G : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{H}$, $w \mapsto \dfrac{i-iw}{1+w}$

(a) Muestre que F y G están bien definidas.

(i) F :



Si $z \in \mathbb{H} \Rightarrow |z-i| < |z+i|$

$$\Rightarrow \frac{|z-i|}{|z+i|} < 1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{i-z}{i+z}\right| < 1$$

(ii) G :

$$\frac{i-iw}{1+w} = \frac{i-iw}{1+w} \cdot \frac{1+\bar{w}}{1+\bar{w}} = \frac{i\left(1-\bar{w}+w-|w|^2\right)}{|1+w|^2}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{i\left(1-\bar{w}+w-|w|^2\right)}{|1+w|^2}\right) = \frac{1-|w|^2}{|i+w|} > 0 \quad (\text{ya que } |w|<1)$$

$w \neq -1$
$\Rightarrow |1+w|^2 > 0$

(b) Demuestre que F, G preservan ángulos.

$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ derivable en } p \\ f(p) \neq 0 \\ \rightarrow \frac{1}{f} \text{ derivable en } p \end{array}}$

Las funciones de Möbius son diferenciables con derivada continua.

$$F'(z) = \frac{-2i}{(i+z)^2}, \quad G'(w) = \frac{-2i}{(1+w)^2}$$

$$\therefore \; F'(z) \neq 0 \neq G'(w)$$

Sean $f, g \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ (holomorfas en $\mathcal{U}$), tales que $|f(z)|^2 + |g(z)|^2 = 1$ $\forall z \in \mathcal{U}$. ¿Qué se puede decir sobre f y g?

$\boxed{\Delta|f|^2 = 4|f'|^2}$

$$\Delta|f(z)|^2 + \Delta|g(z)|^2 = \Delta(1) = 0$$

$$4|f'(z)|^2 + 4|g'(z)|^2 = 0$$

$$\rightarrow |f'(z)| + |g'(z)| = 0$$

$$\therefore |f'(z)| = |g'(z)| = 0$$

$$\therefore f'(z), g'(z) = 0 \; (f, g \text{ constantes}).$$

<u>Ejercicio</u>: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z|z|^2$

¿dónde es derivable?

$f(x+iy) = (x^3 + xy^2) + i(yx^2 + y^3)$

C-R: $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2 \\ 2xy = -2yx \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = y^2 \\ xy = 0 \end{cases} \iff x = y = 0$

Otra manera: $z|z|^2 = z \cdot z \cdot \bar{z} = z^2 \bar{z} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z^2$.

<u>Ejercicio</u>. $\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} z^j$. Demuestre que converge $\forall z$ con $|z| = 1$ y $z \neq 1$.

Recordemos que se tiene : $f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}dz$

Sea $\beta>0$ tq $\beta\notin\mathbb{Z}$, f una función entera tal que existe $c>0$ que cumple para todo $r>0$, se tiene :

$$\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|\,dt \leq cr^{\beta}$$

Demuestre que $f\equiv 0$.

dem. Como f es entera, la expresión como serie de potencias de f alrededor de 0 es válida como expresión de f en todo $\mathbb{C}$.

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{it})}{(re^{it})^{n+1}}ire^{it}dt$$

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(re^{it})|}{r^{n+1}}r\,dt \leq \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{1}{r^n}cr^{\beta}$$

$$= \frac{n!}{2\pi}cr^{\beta-n}$$

$\beta\notin\mathbb{Z} \Rightarrow \beta-n\neq 0$

Si $\beta>n$:

$$|f^{(n)}(0)| \leq \lim_{r\to 0}\frac{n!}{2\pi}cr^{\beta-n} = 0 \quad\Rightarrow\quad f^{(n)}(0)=0 \quad \forall n$$

Si $\beta<n$:

$$|f^{(n)}(0)| \leq \lim_{r\to\infty}\frac{n!}{2\pi}cr^{\beta-n} = 0 \quad\Rightarrow\quad f^{(n)}(0)=0 \quad \forall n$$

$\therefore f\equiv 0$.

Calcular:

(a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{4z^2+1}$. Usando fracciones parciales,

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{4z^2+1} = \frac{i}{2}\int_{|z|=1} \frac{1/2}{z+i/2}\,dz + \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{1/2}{z-i/2}\,dz$$

Por la fórmula integral de Cauchy para $f(z) = 1/2$:

$$= \frac{i}{2}\cdot\frac{1}{2}\,2\pi i + \frac{1}{2i}\,\frac{1}{2}\cdot 2\pi i = 0$$

(b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z-e^{-z}}{z^4}\,dz$, considerar $f(z) = e^z - e^{-z}$,

$$f^{(3)}(0) = \frac{6}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^4}\,dz \Rightarrow \frac{\pi i}{3} f^{(3)}(0) = \frac{2}{3}\pi i$$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{|e^{it}-a|^2}$, $|a| \neq 1$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(e^{it}-a)(e^{-it}-\overline{a})} \quad . \text{ Para } f = \frac{1}{e^{it}-a}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{(e^{it}-a)(e^{-it}-\overline{a})\,ie^{it}}\,dt = -i\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{(e^{it}-a)(1-e^{it}\overline{a})}\,dt \qquad \left|\frac{1}{\overline{a}}\right| < 1 \Leftrightarrow |a| > 1$$

$$= -\frac{i}{\overline{a}}\int \frac{f(z)}{\left(\frac{1}{\overline{a}}-z\right)}\,dz = \frac{i}{\overline{a}}\, f\left(\frac{1}{\overline{a}}\right) 2\pi i = -\frac{2\pi}{\overline{a}}\,\frac{1}{\frac{1}{\overline{a}}-a}$$

Si $|a| < 1$:

$$f(z) = \frac{1}{1-z\overline{a}}$$

$$= -i\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{(e^{it}-a)(1-e^{it}\bar{a})}\,dt = -i\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = -i\,2\pi i\,f(a)$$

$$= \frac{2\pi}{1-|a|^2}.$$

Para cada $n\in\mathbb{Z}_+$, calcular:

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(n\theta)}{1-\cos(\theta)}\,d\theta = \frac{1}{i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{z^n - z^{-n} - 2}{z^2 - 2z + 1}\,dz \quad \Big| \; z = re^{i\theta}, \; r=1$$

$$= \frac{1}{i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{z^{2n}-2z^n+1}{z^n(z-1)^2}\,dz = \frac{1}{i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\left(\frac{z^n-1}{z-1}\right)^2}{z^n}\,dz, \quad f(z) = \left(\frac{z^n-1}{z-1}\right)^2$$

$$= f^{(n)}(0)\, i\, 2\pi i \frac{1}{n!} = -f^{(n)}(0)\frac{2\pi}{n!}$$

Sean $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ (holomorfas del disco), tales que para todo $z\in\mathbb{D}(0,1)$
($\mathbb{D}(0,1)$)
se tiene que $f(z)\neq 0$, $g(z)\neq 0$. Además $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)}$ $\forall z = \frac{1}{n}$, $n\geq 2$
¿Qué relación hay entre f y g?

Notemos que como $f(z)\neq 0 \neq g(z)$ $\forall z\in\mathbb{D}(0,1)$, entonces

$$\frac{f'(z)}{f(z)}, \; \frac{g'(z)}{g(z)} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}(0,1))$$

Como $\{1/n\}$ tiene punto de acumulación $\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)}$ $\forall z\in\mathbb{D}(0,1)$

Sea $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}(0,1))$. Notar que $h'(z) = 0$

$\Rightarrow h(z) = \lambda$ cte $\neq 0$

$\therefore f(z) = \lambda g(z)$.

f continua en $\overline{\mathbb{D}(p,r)}$ y $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}(p,r))$. Entonces

$$|f^{(n)}(p)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{|z-p|=r} |f(z)| \quad , \quad n \geq 0.$$

dem. $$|f^{(n)}(p)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}(0,1)} \frac{|f(z)|}{|z-p|^{n+1}} dz \leq \frac{n!}{2\pi} \sup_{z\in\partial\mathbb{D}(p,r)} \frac{|f(z)|}{|z-p|^{n+1}} \int_{\partial\mathbb{D}(p,r)} 1\, dz$$

$$= \frac{n!}{2\pi} \frac{1}{r^{n+1}} \sup_{z\in\partial\mathbb{D}(p,r)} |f(z)| \cdot 2\pi r$$

Corolario. Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}(p,r))$ y $f(\mathbb{D}(p,r)) \subseteq \mathbb{D}(q,s)$. Entonces

$$|f'(p)| \leq \frac{s}{r}.$$

$g(z) = f(z) - q \quad , \quad g(\mathbb{D}(p,r)) \subseteq \mathbb{D}(0,s)$

$g'(p) = f'(p)$,

$$|g'(p)| \leq \frac{1}{r} \sup_{|z-p|=r} |g(z)| \leq \frac{1}{r} s$$

Teorema (de Liouville). Sea f entera y acotada. Demuestre que f es constante.

$f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $p \in \mathbb{C}$, $r > 0$

$f(\mathbb{D}(p,r)) \subseteq \mathbb{D}(0,s)$, donde $|f(z)| \leq s \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Entonces, $|f'(p)| \leq \frac{s}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \quad \therefore f'(p) = 0 \quad \therefore f$ cte!.

Teorema (Fundamental del Algebra)

Principio del módulo mínimo. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ continua, $f \in \mathcal{O}(U)$. Entonces si f no se anula en U, $|f|$ alcanza su mínimo en ∂U.

dem. Si f no se anula en U, consideramos $g = \frac{1}{f} \in \mathcal{O}(U)$, $g : \overline{U} \to \mathbb{C}$ continua, ergo aplicamos principio del módulo máximo a g. ∎

- Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ dominio acotado, $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ continua, $f \in \mathcal{O}(U)$ y no constante. Demuestre que si $|f|$ es constante en ∂U, entonces f debe tener un cero en U.

dem. Si f no se anula, aplicamos principio del máximo y del mínimo $\Rightarrow |f|$ constante en $\overline{U}$

$\Rightarrow$ f constante.

$\Delta |f| = 4|f'|$

- Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $f : U \to \mathbb{C}$ continua. Demuestre que si existe $n \geq 1$ entero tal que $f^n \in \mathcal{O}(U)$, entonces $f \in \mathcal{O}(U)$.

dem. $p \in U$

$$\lim_{z \to p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p}$$

$$f^n(z) - f^n(p) = (f(z) - f(p)) \left(\sum_{i=0}^{n-1} f^i(z) f^{n-i-1}(p) \right)$$

$$\lim_{z \to p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p} \cdot \frac{\sum f^i(z) f^{n-1-i}(p)}{\sum f^i(z) f^{n-1-i}(z)} = \lim_{z \to p} \frac{f^n(z) - f^n(p)}{z - p} \cdot \frac{1}{\sum f^i(z) f^{n-1-i}(p)}$$

$$= \lim_{z \to p} \frac{f^n(z) - f^n(p)}{z - p} \cdot \lim_{z \to p} \frac{1}{\sum f^i(z) f^{n-1-i}(p)}$$ (suponer que $f(p) \neq 0$)

$$\lim_{z\to p} \sum f^i(z) f^{n-1-i}(p) = n f^{n-1}(p)$$

$\therefore$ El límite existe

f tiene derivada en todos los puntos donde no se anula.

Los ceros de f son los mismos ceros de f^n, luego es un conjunto discreto.

Entonces, si $f(p)=0$, $\exists \varepsilon>0$:

f holomorfa en $B(p,\varepsilon)\setminus\{p\}$ y continua en $B(p,\varepsilon)$

$\therefore f \in \mathcal{O}(B(p,\varepsilon))$.

- Sea $\mathcal{U}$ dominio tal que $\overline{\mathbb{D}} \subseteq \mathcal{U}$. Sea $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$. Demuestre que existe $z \in \mathcal{U}$ tal que existe $r>0$ tal que si $|z-p|=r$, entonces $\left|f(z) - \frac{1}{z-p}\right| \geq \frac{1}{r}$, $p \in \mathbb{D}$.

Suponemos $|z-p|=r$

$$\left|f(z)-\frac{1}{z-p}\right| \geq \frac{1}{r} \iff |(z-p)f(z)-1| \geq 1.$$

Procedemos por contradicción, supongamos que $\forall z \in \partial\mathbb{D}$, $|\underbrace{(z-p)f(z)-1}_{g(z)}| < 1$

$g(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, $g: \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ continua. Sin embargo, $|g(p)|=1$, lo que contradice principio del máximo. ∎

- Sean $f,g \in \mathcal{O}(B(0,R))$ tales que $f,g: \overline{B(0,R)} \longrightarrow \mathbb{C}$ continuas,

$$|f(z)| = |g(z)| \quad \forall z: |z|=R$$

f,g no se anulan ~~xxxx~~ en $B(0,R)$. Demuestre que existe λ con $|\lambda|=1$ tal que $f=\lambda g$.

dem. $\frac{f}{g} \in \mathcal{O}(B(0,R))$, $\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| = 1 \quad \forall |z| = R$

Por ejercicio anterior, como f/g no se anula en $B(0,R)$, entonces f/g es constante en $B(0,R)$

$$\therefore f/g = \lambda$$

$$f = \lambda g \,,\quad |f/g| = |\lambda| = 1 \quad \blacksquare$$

· Sea $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $c>0$. Demuestre que (f no constante)

$$\overline{\{z \,/\, |f(z)|<c\}} = \{z \,/\, |f(z)| \leq c\}$$

$\subseteq$] $\{z/|f(z)|<c\} \subseteq \underbrace{\{z/|f(z)| \leq c\}}_{\text{cerrado}} = f^{-1}([0,c])$

$\supseteq$] Sea $z : |f(z)| = c$

Sea $\varepsilon > 0$: $B(z,\varepsilon)$

Si $B(z,\varepsilon) \cap \{z/|f(z)|<c\} = \phi$, luego $|f(\omega)| \geq c \quad \forall \omega \in B(z,\varepsilon)$

Por principio del mínimo se tiene que $|f(z)|$ alcanza su mínimo en $\partial B(z,\varepsilon)$, pero este mínimo es c , luego $|f(z)|$ es constante en $\partial B(z,\varepsilon)$

$\Rightarrow f(z)$ es constante en $B(z,\varepsilon)$ (ende, en $\mathbb{C}$. f es entera) (→←).

· Arzelá-Ascoli.

$\mathcal{F} \subseteq C(G, \Omega)$

G: abierto en $\mathbb{C}$; Ω: esp. métrico.

$\mathcal{F}$ es normal sii se cumplen:

(a) $\mathcal{F}$ es equicontinuo en G

(b) $\forall z \in G$, $\{f(z) / f \in \mathcal{F}\}$ tiene clausura compacta en Ω.

• $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ tal que $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq e^{-n}$.

¿Qué se puede decir sobre f?

Resp. Afirmación. $f \equiv 0$.

dem. Por continuidad, $f(0) = 0$.

Entonces, existe m tal que: $f(z) = z^m f_1(z)$, $f_1(0) \neq 0$.

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{n^m} f_1\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq e^{-n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| f_1\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq n^m e^{-n} \xrightarrow[n \to \infty]{\forall m \in \mathbb{N}.} 0 \quad (\Rightarrow\Leftarrow)$$

$\therefore f \equiv 0$.

• Calcular la serie de Laurent de $\dfrac{1}{1-z^2} + \dfrac{1}{3-z}$ $\left(\begin{array}{ll} (\mathrm{I}) & |z| < 1 \\ (\mathrm{II}) & 1 < |z| < 3 \\ (\mathrm{III}) & |z| > 3 \end{array}\right)$

(I) $\dfrac{1}{1-z^2} = \sum_{k \geq 0} z^{2k}$, $\dfrac{1}{3-z} = \dfrac{1}{3} \dfrac{1}{1-\frac{z}{3}} = \dfrac{1}{3} \sum_{k \geq 0} \left(\dfrac{z}{3}\right)^k$

(II) $\dfrac{1}{1-z^2} = -\dfrac{1}{z^2} \dfrac{1}{-\frac{1}{z^2}+1} = -\dfrac{1}{z^2} \sum_{k \geq 0} \left(\dfrac{1}{z^2}\right)^k$

$$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{z}{3}\right)^k$$

(III) $\dfrac{1}{1-z^2} = -\dfrac{1}{z^2} \sum_{k \geq 0} \left(\dfrac{1}{z^2}\right)^k$, $\dfrac{1}{3-z} = \dfrac{1}{z}\left(\dfrac{1}{\frac{3}{z}-1}\right) = -\dfrac{1}{z} \sum_{k \geq 0} \left(\dfrac{3}{z}\right)^k$.

• $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ tales que $|f(z)| \leq |g(z)|$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Probar que existe λ tal que $f = \lambda g$.

dem. $h = f/g$, $|h| \leq 1$ caso ideal

Si z_0 es un cero de $g \Rightarrow z_0$ es un cero de f.

$$f(z) = (z - z_0)^m f_1(z)$$
$$g(z) = (z - z_0)^n g_1(z) \quad ; \quad f_1(z_0), g_1(z_0) \neq 0.$$

Af. $m \geq n$.

dem. Supongamos que $m < n$. Ocupando la desigualdad

$$|z - z_0|^m |f_1(z)| \leq |z - z_0|^n |g_1(z)|$$
$$|f(z)| \leq |z - z_0|^{n-m} |g_1(z)|$$
$$\Rightarrow |f(z_0)| = 0$$
$$\Rightarrow f(z_0) = 0 \quad (\Rightarrow \Leftarrow).$$

Así, $m \geq n$.

$$\therefore h(z_0) = \begin{cases} 0, & m > n \\ \dfrac{f_1(z_0)}{g_1(z_0)}, & m = n \end{cases}$$

Luego $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ y acotada. Por Liouville, $h = \lambda \in \mathbb{C}$.

Principio del argumento

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'}{f}\,dz = n(f,0) - n(f,\infty)$$

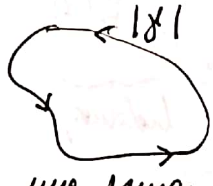
En caso de que existiese el logaritmo, $z = re^{i\theta} \Rightarrow \log(z) = \log(r) + i\theta$.

$$\begin{cases} \log(f(z)) = 2\pi i k \ , \ k = n(f,0) - n(f,\infty) \ (\text{idea}) \\ \operatorname{Im} \log f(z) = \arg(z). \end{cases}$$

Logaritmo. Dado $a \in |\gamma|$;

Escoger $B(a, \varepsilon_a)$

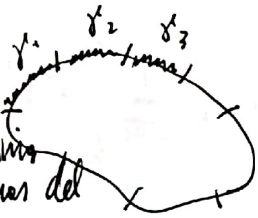
donde se puede definir una rama de $\log(f(z))$.



Bolas del mismo radio

se pueden elegir finitas bolas por compacidad de γ.

Teo. del nº de Lebesgue $\Rightarrow$ Se puede escoger ε_0 único tal que en $B(a,\varepsilon)$ se puede ~~escoger~~ definir una rama de $\log(f(z))$ $\forall a \in |\gamma|$.



En γ_j se pueden definir distintas ramas del logaritmo.

$\gamma_j : [t_j, t_{j+1}] \to \mathbb{C}$, $\quad \int_{\gamma_j} \frac{f'}{f}\,dz = \cancel{\log(f\gamma(t_{j+1})) - \log(f(t_j))}$

$\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]} = \gamma_j$ $\quad = \log(f\gamma(t_{j+1})) - \log(f\gamma(t_j))$

· Sumando sobre todos los γ_j : $\quad \int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = \log(f\gamma(1)) - \log(f\gamma(0))$

Principio del argumento generalizado

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{ord}(f, z_j)\,\phi(z_j) + \sum_{i=1}^{n} \operatorname{ord}(f, P_i)\,\phi(P_i)$$

donde γ es una curva de Jordan orientada positivamente en dominio U.

$f \in \mathcal{M}(U)$ (meromorfa) sin ceros ni polos en γ.

$\{z_j\}$, $\{P_i\}$ ceros y polos de f en $\operatorname{int}(\gamma)$

Obs. $f \not\equiv 0$ en U.

Las singularidades de $g(z)$ estan en $\{z_j\}_{j=1}^{m} \cup \{P_i\}_{i=1}^{n}$

Calculamos los residuos: (i) z_j $\forall j$: $\quad f(z) = (z - z_j)^k f_1(z)$, $\ f_1(z_j) \neq 0$, $\ f_1$ hdo

$$\operatorname{ord}(f, z_j) = k_j$$

$f'(z) = k(z-z_j)^{k-1} f_1(z) + (z-z_j)^k f_1'(z)$

$\Rightarrow g(z) = \phi(z)\left(\frac{k}{z-z_j} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\right)$. Sea η_j la frontera de una bola suficientemente pequeña centrada en z_j. (i.e. no hay otro cero o polo de f)

$$\Rightarrow \int_{\eta_j} g(z)dz = \int_{\eta_j} \frac{\phi(z)k}{z-z_j}dz + \underbrace{\int_{\eta_j} \phi(z)\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}dz}_{\text{holomorfo}}^{\to 0} \underset{\substack{\text{fórmula}\\ \text{integral de}\\ \text{Cauchy}}}{=} 2\pi i\, k\, \phi(z_j)$$

Obs. se hace el mismo procedimiento para P_i.

Así, se obtiene la fórmula. ✓

• Sea $f \in \mathcal{O}(B(0,2))$ tq:
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f'}{f}dz = 2, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} z\frac{f'}{f} = i, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} z^2\frac{f'}{f} = -\frac{1}{2}$$

Queremos localizar los ceros de f.

1° integral tiene dos ceros (contando multiplicidad). Supongamos que f tiene un cero múltiple z_0.

2° integral: $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} z\frac{f'}{f}dz = 2z_0 = i \Rightarrow \boxed{z_0 = \frac{i}{2}}$

3° integral: $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} z^2\frac{f'}{f}dz = 2\cdot z_0^2 = 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

Si en cambio f tiene dos ceros distintos a, b: $\begin{cases} a+b = i \\ a^2+b^2 = -\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = -\frac{i}{2} \\ b = \frac{3i}{2}\end{array}}$

• Demuestre que todas las raíces de $z^5+15z+1$ están en $B(0,2)$ y que sólo una raíz está en $B(0,3/2)$.

dem. $|z^5+15z+1-z^5| = |15z+1| \leq 15|z|+1 \underset{\text{en } \partial B(0,2)}{=} 31 < 32 \underset{\text{en } \partial B(0,2)}{=} |z|$

Rouché $\to$ $z^5+15z+1$ tiene tantas raíces como z^5 en $B(0,2)$.

$$|z^5+15z+1-15z| = |z^5+1| \leq |z|^5+1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{en } \partial B(0,3/2)}}{=} \left(\frac{3}{2}\right)^n + 1 < 15\cdot\frac{3}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{en } \partial B(0,3/2)}}{=} |15z|$$

$\therefore$ $z^5+15z+1$ tiene sólo una raíz en $B(0,3/2)$.

- Sean $f,g:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ holomorfas.
  (a) Si $\overline{f(\mathbb{D})}\subseteq\mathbb{D}$, demuestre que existe un único $z^*\in\mathbb{D}$ tal que $f(z^*)=z^*$.
  (b) Si g es inyectiva y $\overline{f(\mathbb{D})}\subseteq g(\mathbb{D})$, demuestre que existe un único $z^*\in\mathbb{D}$ tal que $f(z^*)=g(z^*)$.

dem. (a) $\overline{f(\mathbb{D})}\subseteq\mathbb{D} \Rightarrow \overline{f(\mathbb{D})}$ es compacto. Luego existe $r_0\in(0,1)$: $\overline{f(\mathbb{D})}\subseteq B(0,r_0)$

Sea $r\in(r_0,1)$, $\forall z\in B(0,r)$:

$$\begin{array}{l} |f(z)|\leq r_0 < r = |z| = |-z| \\ \quad\shortparallel \\ |f(z)-z-(-z)| \end{array}$$

Teo. Rouché $\Rightarrow$ $\#$(ceros de $f(z)-z$) $=\#$(ceros de $-z$) en $B(0,r)$; o sea, 1.
Como esto es cierto $\forall r\in(r_0,1)$, entonces $f(z)-z$ tiene raíz única en $\mathbb{D}$

(b) Como $\overline{f(\mathbb{D})}\subseteq g(\mathbb{D})$, podemos definir $g^{-1}\circ f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ holomorfa.

Además $g^{-1}(\overline{f(\mathbb{D})})\subseteq\mathbb{D}$.

g holomorfa, 1-1 $\Rightarrow$ g tiene inv. holomorfa.

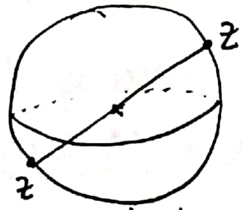
Continuidad de g^{-1} $\Rightarrow$ $g^{-1}(\overline{f(\mathbb{D})})$ cerrado.

Además, $\overline{g^{-1}\circ f(\mathbb{D})} \subseteq g^{-1}(\overline{f(\mathbb{D})})\subseteq\mathbb{D}$

Aplicando (a): $\exists!\, z^*\in\mathbb{D}$: $g^{-1}\circ f(z^*)=z^* \iff g(z^*)=f(z^*)$.

Isometrías de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})=\overline{\mathbb{C}}$



antipodales!

$d(z,z')=2$. M isometría: $d(z_1,z_2)=d(Mz_1,Mz_2)$

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$$

Tomando $J:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$, $z\mapsto -\frac{1}{\bar{z}}$

$$2=d(z,J(z))=d(M(z),M\circ J(z))$$

Es decir, $M(z) = J \circ M \circ J(z)$. $M = J \circ M \circ J$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ donde } \begin{array}{c} \bar{a} = d \\ \bar{c} = -b \\ ad - bc = 1 \end{array}$$

Problema 1. Calcule $Aut(\mathbb{C}\setminus\{0,1\})$.

dem. Sea $f\in Aut(\mathbb{C}\setminus\{0,1\})$. $0,1$ son singularidades de f (pueden ser removibles, polos, esenciales, etc). En ese caso de removibles o polos, f se puede extender a un automorfismo de la esfera de Riemann.

Af. Veremos que ni 0 ni 1 son singularidades esenciales de f.

Por contradicción, supongamos que 0 es una singularidad esencial de f.

Por Wierstrass-Casorati: $\exists r\in(0,1)$: $\overline{f(B^*(0,r))}=\overline{\mathbb{C}}$.

Sea $\gamma=\partial B(0,r)$ curva de Jordan, y como h es biholomorfismo, entonces $f\circ\gamma$ también lo es.

Por el teo. de Jordan, $f\circ\gamma$ separa el plano en dos componentes conexas de interior no vacío.

La imagen de $B^*(0,r)$ bajo f cae dentro de una de estas componentes

$$\therefore f(B^*(0,r)) \text{ no es denso en } \overline{\mathbb{C}} \quad (\Rightarrow\Leftarrow)$$

obs. Lo mismo pasa con 1.

Así, $0,1$ son polos o singularidades removibles de f. Es decir, f se puede extender a una función meromorfa $f:\mathbb{C}\to\overline{\mathbb{C}}$

Si $f(0)=f(1)=p$. Sean V_1,V_2 abiertos disjuntos tales que $0\in V_1$, $1\in V_2$.

$f(V_1), f(V_2)$ son abiertos:

$$p\in f(V_1)\cap f_2(V_2)=W$$

Entonces para cada punto de W, existen dos preimágenes para f. $(\Rightarrow\Leftarrow)$

El ∞ no es singularidad esencial de f por las mismas razones que $0,1$ no lo eran.

$$\therefore f \text{ se extiende a biholomorfismo } f:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}.$$

$\Rightarrow f\in Aut(\overline{\mathbb{C}})$, o sea, una möbius que cumple $f(\{0,1,\infty\})=\{0,1,\infty\}$

$$\therefore f\in\left\{z, \frac{1}{z}, \frac{z}{z-1}, -z+1, \frac{z-1}{z}, -\frac{1}{z-1}\right\}\cong S_3$$

Scanned with CamScanner

Problema 2. Sea γ una curva de Jordan, $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$, inyectiva sin ceros ni polos sobre γ. Demuestre que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 1$$

Como γ es inyectiva, $f\circ\gamma$ también es curva de Jordan:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{(f\circ\gamma)'(z)}{(f\circ\gamma)(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{dw}{w} = 1 \quad (w = f\circ\gamma).$$

Problema 3. Sea γ una curva de Jordan en $\mathcal{U}$, $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ sin ceros en γ tal que f es inyectiva sobre γ. Demuestre que f es inyectiva en $int(\gamma)$

dem. Por el principio del argumento:

$$n(f,0) - \cancel{n(f,\infty)}^{0} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 1 \quad \therefore n(f,0) = 1.$$

Sea $q \in$ ~~int~~ $f(int(\gamma))$. Sea $g(z) = f(z) - q$. Observar que $g \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$, g es inyectiva en γ.

Luego, $n(g,0) - \cancel{n(g,\infty)}^{0} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz = 1 \quad \therefore n(g,0) = 1 \Leftrightarrow f$ es inyectiva en q.

Problema 4. Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ no es inyectiva, demuestre que existen $z, w \in \mathbb{D}$ tales que $|z| = |w|$ y $f(z) = f(w)$.

dem. Por contradicción. Supongamos que siempre $|z| = |w|$, tendremos que $f(z) \neq f(w)$.
Entonces $\forall r(0,1)$, f es inyectiva en $\partial B(0,1)$.
Por el problema anterior, f es inyectiva en $\mathbb{D}$. $(\rightarrow\!\leftarrow)$

Recordemos que $\phi_a \in Aut(\mathbb{D})$: $\phi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

Problema 5. Sea $P(z)$ un polinomio de grado $n \geq 1$ con todas sus raíces en $\mathbb{D}$. Sea $Q(z) = z^n \overline{P(1/\bar{z})}$. Probar que las raíces de $P(z)+Q(z)$ tienen módulo 1

$P(z) = \lambda \prod_{k=1}^{n} (z-a_k)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $a_k \in \mathbb{D}$

$Q(z) = \bar{\lambda} \prod_{k=1}^{n} (1-\bar{a}_k z)$

$P(z)+Q(z)=0$

$\lambda \prod_{k=1}^{n} (z-a_k) + \bar{\lambda} \prod_{k=1}^{n} (1-\bar{a}_k z) = 0$

$$\prod_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z} \right)}_{\phi_{a_k} \in Aut(\mathbb{D})} = -\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \quad ; \quad \prod_{k=1}^{n} |\phi_{a_k}(z)| = 1$$

$\therefore |z| = 1$.

Scanned with CamScanner

Principio de Subordinación.

(2) Sea $f:\mathbb{D}\to\mathcal{U}$ biholomorfismo tal que $f(0)=0$. Sea $g:\mathbb{D}\to\mathcal{U}$ holomorfa tal que $g(0)=0$. Demuestre que para todo $r\in(0,1)$ se tiene que $g(B(0,r))\subseteq f(B(0,r))$.

dem. $f^{-1}\circ g:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$

Por el Lema de Schwarz, sabemos que $|f^{-1}\circ g(z)|\leq|z|$. Ahora bien,
$g(B(0,r))\subseteq f(B(0,r)) \iff f^{-1}\circ g(B(0,r))\subseteq B(0,r)$.

(3) Sea $n\geq 2$, $\omega=e^{2\pi i/n}$. Sea $U\subseteq\mathbb{C}$ dominio simplemente conexo tal que $z\in U \iff \omega z\in U$.
Sea $f:\mathbb{D}\to U$ biholomorfismo con $f(0)=0$. Si $f(z)=\sum_{k\geq 1} a_k z^k$, pruebe que $k\not\equiv 1 \pmod n \Rightarrow a_k=0$.

dem. Sea $g(z)=f^{-1}(\omega f(z)):\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ biholomorfa.

$\Rightarrow g\in Aut(\mathbb{D})$ y como $g(0)=0$, sabemos la forma de g.

$$g(z)=\lambda\left(\frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z}\right)\Big|_{z=0}=-a_k\lambda \quad \text{con } |\lambda|=1$$

$$\Rightarrow g(z)=\lambda z$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\omega f(z))=\lambda z \qquad \therefore\ \omega f(z)=f(\lambda z)$$

Queremos demostrar que $\lambda=\omega$. Como son holomorfas, sus derivadas también. Luego,

$$\omega f'(z)=\lambda f'(\lambda z)$$

$$\Rightarrow \omega f'(0)=\lambda f'(0)$$

Como f es biholomorfa, f' no tiene raíces en $\mathbb{D}$ (Por teo de la función inversa).
Luego $\omega=\lambda$.

Entonces $\omega f(z)=f(\omega z)$

$$\Rightarrow \sum_{k\geq 1} a_k\omega z^k=\sum_{k\geq 1} a_k\omega^k z^k=f(z)$$

$$\Rightarrow a_k\omega=a_k\omega^k \quad \forall k\geq 1$$

Si $k\not\equiv 1 \pmod n$, $a_k\omega-a_k\omega^k=a_k(\omega-\omega^k)=0$, pero $\omega\neq\omega^k \Rightarrow a_k=0$.

(4) Sea $U \subsetneq \mathbb{C}$ dominio simplemente convexo, $p \in U$, $f: U \to \mathbb{D}$ biholomorfismo tal que $f(p)=0$ y $f'(p)>0$. Sea $g: U \to \mathbb{D}$ holomorfa. Demuestre que $|g'(p)| \leq f'(p)$ y $|g'(p)| = f'(p) \iff g = \lambda f$, $|\lambda| = 1$.

dem: Sea $\phi_{g(p)} \circ g \circ f^{-1}: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa

$0 \mapsto 0$

$\phi_{g(p)} \in Aut(\mathbb{D})$ para que llevo el cero en el cero.

Por el lema de Schwarz:

$$|\phi_{g(p)} \circ g \circ f^{-1}(z)| \leq |z| \quad , \quad |(\phi_{g(p)} \circ g \circ f^{-1})'(0)| \leq 1$$

Sea $h = \phi_{g(p)} \circ g \Rightarrow (h \circ f^{-1})'(0)$

$$\Rightarrow h'(f^{-1}(0)) \cdot (f^{-1})'(0) = h'(p)(f^{-1})'(0)$$

$$h'(p) = (\phi'_{g(p)} \circ g(p))\, g'(p)$$

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(p)},$$

Por otro lado, $\phi'_{g(p)} = \dfrac{1-|g(p)|^2}{(1-\overline{g(p)}\,z)^2} \Rightarrow \phi'_{g(p)}(g(p)) = \dfrac{1}{1-|g(p)|^2}$.

Luego, $\left| \dfrac{g'(p)}{1-|g(p)|^2} \cdot \dfrac{1}{f'(p)} \right| \leq 1$

$$|g'(p)| \leq |1-|g(p)|^2|\,|f'(p)|$$

Como g tiene imagen en $\mathbb{D}$. $|g(p)| \leq 1$

$$\Rightarrow |g'(p)| < f'(p)$$

Ahora veamos qué pasa cuando $|(\phi_{g(p)} \circ g \circ f^{-1})'(0)| \leq 1 \Rightarrow \phi_{g(p)} \circ g \circ f^{-1}(z) = \lambda z$

$|\lambda| = 1$

Entonces $\phi_{g(p)} \circ g(z) = \lambda f(z)$

$$\Rightarrow (\phi_{g(p)} \circ g)'(p) = \lambda f'(p)$$

$$g'(p) = \lambda (1 - |g(p)|^2|\, f'(p)$$

Si $g(p)=0 \iff g'(p)=\lambda f'(p) \iff |g'(p)|=|f'(p)|$

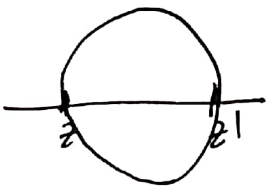
Además, $\phi_{g(p)}(z)=z \iff g(z)=\lambda f(z)$.

Ayudantía especial

Problema A (Tarea 3)

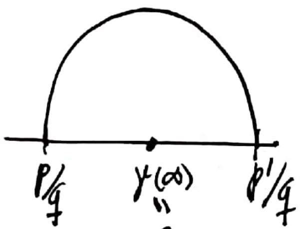
Cada M de Moebius se puede escribir como $\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \sigma\end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} a & 1 \\ & b\end{pmatrix}$.

Problema B (Tarea 3)

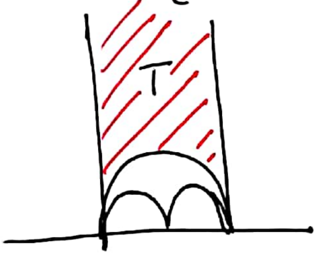


Llevar el trabajo a $R_{-1,1}(z)=\frac{1}{z}$ y después trasladar. (Para conseguir $R_{a,b}$).

Para $\Gamma=\langle R_{0,1}, R_{1,\infty}, R_{0,\infty}\rangle$

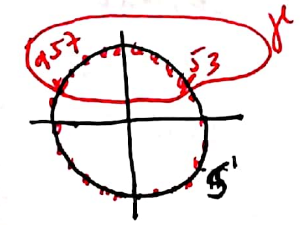


Construir aquellos círculos raros. Se puede conseguir que para un $\gamma\in\Gamma$ apropiado, $\gamma(\infty)=c$.



Blah.

Problema E Queremos calcular $\int_\gamma \frac{1}{z^{2015}-1}\,dz$, donde $\gamma(\theta)=e^{i\theta}+\frac{i}{3}e^{2i\theta}$



γ intersecta a S^1 cuando $|\gamma(\theta)|^2=1 \iff \theta_1=9{,}594°,\ \theta_2=170{,}406°$

$\therefore \int_\gamma \frac{1}{z^{2015}-1}\,dz=\sum Res(f, z_k\in int\,\gamma)$

$$Res(z_k)=\prod_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{2014}\frac{1}{(z_n-1)}$$

Problema G. $P_0(z)=z$
$P_n(z)=P_{n-1}(z)^2+z$

$0\in V$, ya que para $\varepsilon<\frac{1}{4}$. $z\in B(0,\varepsilon) \Rightarrow |P_n(z)|<\frac{1}{2}$

dem por inducción:

$|P_0(z)|=|z|<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$

supongamos que $|P_n(z)|<\frac{1}{2}$. $|P_{n+1}(z)|=|P_n(z)+z^2|\leq |P_n(z)|^2+|z|<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$.

Montel $\Rightarrow$ La familia es normal en $B(0,\varepsilon)$.

$1/4\notin V$.

Supongamos que $\frac{1}{4}\in V \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists a>\frac{1}{4} : a\in B(\frac{1}{4},a)$

$P_n(a)\subseteq\mathbb{R}^+$ es creciente.

Af. $(P_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

dem. Usando inducción. $P_0(a)=a<a^2+a=P_1(a)$. Supongamos que para $n\in\mathbb{N}$, $P_n(a)\leq P_{n+1}(a)$.

$P_{n+1}(a)=P_n(a)^2+a\leq P_{n+1}(a)^2+a=P_{n+2}(a)$ $\therefore$ $P_{n+1}(a)\leq P_{n+2}(a)$.

Si $\{P_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ fuese normal en $B(1/4,\varepsilon)$, entonces existe una subsucesión $\{P_{n_k}(a)\}$ convergente.

$\Rightarrow \{P_n(a)\}$ está acotada superiormente.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P_n(a)$ existe, $l=\lim\limits_{n\to\infty} P_n(a)=\sup\limits_n P_n(a)\in\mathbb{R}^+$

$\therefore$ $P_n(a)=P_{n-1}(a)^2+a \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} l=l^2+a \Rightarrow 0=l^2-l+a \Rightarrow l=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$

$\Rightarrow 1-4a\geq 0 \Rightarrow a\leq\frac{1}{4}$ $(\rightarrow\leftarrow)$

$-1\in V$. Notar que $\forall n$: $P_{2n-1}(-1)=0$.

$z_0=-1+\varepsilon e^{i\theta}$

$P_1(z_0)=(-1+\varepsilon e^{i\theta})^2-1+\varepsilon e^{i\theta}=\varepsilon^2 e^{2i\theta}-2\varepsilon e^{i\theta}+\varepsilon e^{i\theta}=\varepsilon^2 e^{i\theta}-\varepsilon e^{i\theta}$

$=\varepsilon^2 e^{i\theta}-\varepsilon e^{i\theta}=\varepsilon e^{i\theta}(\varepsilon e^{i\theta}-1)=\varepsilon e^{i\theta} z_0$

$|P_1(z_0)|=\varepsilon|z_0|\leq 2\varepsilon$

$$P_2(z) = \varepsilon^2 e^{2i\theta} z_0^2 - 1 + \underbrace{\varepsilon e^{i\theta}}_{z_0} = z_0\left(\varepsilon^2 e^{2i\theta} z_0 - 1\right)$$

$$P_3(z) = \left(\varepsilon^2 e^{2i\theta} z_0^2 + z_0\right)^2 + z_0 = \varepsilon^4 e^{4i\theta} z_0^4 + 2\varepsilon^2 e^{2i\theta} z_0^3 + z_0^2 + z_0 .$$

$$= z_0\left(\varepsilon^4 e^{4i\theta} z_0^3 + 2\varepsilon^2 e^{2i\theta} z_0^2 + z_0 + 1\right)$$

Problema B (Tarea Daleth)

$f: S \to S'$ holomorfa. S, S' sup. de Riemann.

$deg_f(p) := \# f^{-1}(p')$ hecho (ver tarea).

Pd. f propia. $\forall p' \in S'$: $\sum_{p\in f^{-1}(p')} deg_f(p)$ es finito e independiente de p'.

$\sum_{p\in f^{-1}(p')} deg_f(p)$ finito (ok!)

Pd. $\sum_{p\in f^{-1}(p')} deg_f(p)$ no depende de p'.

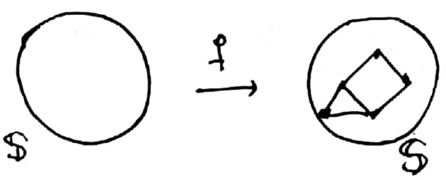
$f^{-1}(p') = \{p_1, \dots, p_n\}$. $deg_f(p_i) = \# f^{-1}(q)$, $p' = f(p_i)$. $q \in V \setminus \{p'\}$

(V vecindad buena). $\Rightarrow$

$\sum_{p\in f^{-1}(p)} deg_f(p)$ es constante en $V\setminus\{p'\}$.

$F: S \to \mathbb{Z}$, $F(p') = \sum_{p\in f^{-1}(p')} deg_f(p)$ es continua (debemos demostrarlo).

Problema C (Tarea Daleth).



$n = deg(f)$. G grafo.

$\chi = v - e + f$ (característica de Euler)

$\chi(S) = 2$.

$$\Big(nv - \underbrace{\sum mult_f(v)}_{B}\Big) - ne + nf = 2 \;\rightarrow\; 2n = B + 2$$

$z^n, g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$
$0 \mapsto 0$

$\sup_{z \in V} d(z^n, g(z)) \leq \varepsilon$. $\sum' \text{mult}_g(c') = \sum' (\deg_g(c') - 1) \text{"="} \deg(z^n) - 1$

$= \underbrace{\deg(g)}_{\text{en } V} - \# \underbrace{\text{ptos críticos}}_{\text{en } V.}$

~~Problema B~~ Desarrollo prueba 2.

Problema B. $k : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Debemos ocupar Rouché en $\varphi_0 = \frac{1}{z} + k(z)$.

$|\varphi_0 - (\varphi_0 + \delta)| = |\delta| \underset{?}{<} |\varphi_0|$ $\leftrightarrow$ ¿Cómo se relaciona con $\sup|\delta'| < \sigma$.

Problema C. $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} z$ es holomorfa y $f'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\to$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sup\{f'(0)\} \leq 1$

Podemos ocupar fórm de Cauchy:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(z-w)^2} \, dw$$

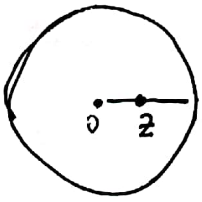
$$|f'(0)| \leq 2\pi \int_\gamma \frac{|f(w)|}{|w|^2} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{|f(re^{it})|}{r^2} r \, dt = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| \, dt \overset{?}{\leq} 1$$

$$g(z) = \frac{z - f(0)}{1 - \overline{f(0)} z} \quad , \quad g \circ f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \; 0 \mapsto 0 \quad \overset{\text{Schwarz}}{\Longrightarrow} \begin{cases} |g \circ f(z)| < |z| \\ \dfrac{|f'(0)|}{1 - |f(0)|^2} < 1 \end{cases} \quad \ldots \text{blah!}$$

• Un poco de geometría hiperbólica.

$$\rho(z) = \frac{2}{1 - |z|^2} dz \qquad \gamma : [a,b] \to \mathbb{D} \text{ diff.}$$

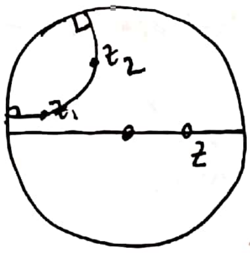
$\gamma(a) = 0$
$\gamma(b) = z$



$$\ell(\gamma(t)) = \int_a^b \frac{2}{1 - |\gamma(t)|^2} |\gamma'(t)| \, dt = \int_a^b \frac{2\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{1 - (x(t)^2 + y(t)^2)} dt$$

$$\geq \int_a^b \frac{2|x'(t)|}{1 - |x(t)|} dt = \log\left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|}\right) = 2 \tanh^{-1}(|z|)$$

Caso general:



ρ es invariante bajo elementos de $Aut(\mathbb{D})$. Sea $T \in Aut(\mathbb{D})$

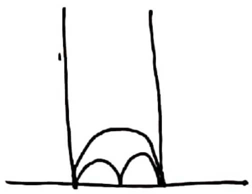
$T(z_1) = 0$, $T(z) = \left(\frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \right) \lambda$

$T(z_2) > 0$

$$d(z_1, z_2) = d(T(z_1), T(z_2)) = \log\left(\frac{1 + |T(z_2)|}{1 - |T(z_2)|} \right) = 2 \tanh^{-1}(|T(z_2)|)$$

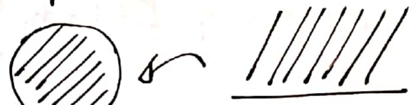
$$\tanh\left(\frac{1}{2} d(z_1, z_2)\right) = |T(z_2)| = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$$

Problema. Queremos dar geometría hiperbólica al conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.



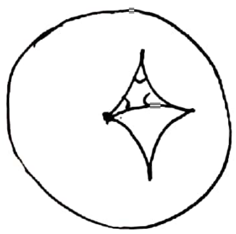
$\downarrow$ j-invariant.

$\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$



$$PSL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Big/ ad - bc = 1 \right\} \Big/ \{\pm Id\}$$

Grupos Fuschianos:



Tomar un triángulo y reflejarlo en todas sus direcciones

$$\Gamma_{n,m,l} = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^n = x_2^m = x_3^l = 1 = x_1 x_2 x_3 \rangle$$

grupo triangular (Fuschiano).

$R_0 = -\bar{z}$, $R_L = M^{-1} \circ R_0 \circ M$

$\Gamma_{2,2,2} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$\mathbb{H}/\Gamma_{n,m,l}$ superficie de Riemann.

$R_1(z) = -\bar{z}$

$R_2(z) = \dfrac{\bar{z}}{2\bar{z}-1}$

$R_3(z) = -\bar{z}+2$

$X_1 = R_3 \circ R_1 = z+2$ fija ∞

$X_2 = R_1 \circ R_2 = \dfrac{-z}{2z-1}$ fija 0

$X_3 = R_2 \circ R_3 = \dfrac{-z+2}{-2z+3}$ fija 1.

$\Gamma_{\infty,\infty,\infty} = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle$, $X_1 X_2 X_3 = 1$.

$\Gamma_{\infty,\infty,\infty} \cong PSL(2,\mathbb{Z})$ grupo modular.

$$\mathbb{H}/\Gamma_{\infty,\infty,\infty} \cong \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$$

$\pi_1(\bar{\mathbb{C}}\setminus\{0,1,\infty\}, p) \cong \Gamma_{\infty,\infty,\infty}$

Núcleo de Poisson.

$$P(w,z) = \operatorname{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right) \qquad P(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

Propiedades:

(a) $P(z)$ es armónica en $\mathbb{D}$.

(b) Si $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \Rightarrow P(re^{i\theta}) = \dfrac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2}$

(c) $\forall z \in \mathbb{D}: P(z) > 0$

(d) $P(z) = P(\bar{z}) \quad z \in \mathbb{D}$.

(e) $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$

$$P(re^{i\theta}) = P(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(z^n + \bar{z}^n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}$$

$$\frac{1+z}{1-z} = (1+z)\frac{1}{1-z} = (1+z)\sum_{n\geq 0} z^n = \sum_{n\geq 0} z^n + \sum_{n\geq 1} z^n$$

$$P(z) = Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+z}{1-z} + \frac{1+\bar z}{1-\bar z}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0} z^n + \sum_{n\geq 1} z^n + \sum_{n\geq 0}\bar z^n + \sum_{n\geq 1}\bar z^n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + 2\sum_{n\geq 1} z^n + 1 + 2\sum_{n\geq 1}\bar z^n\right) = 1 + \sum_{n\geq 1}(z^n + \bar z^n) = 1 + \sum_{n\geq 1}(r^n e^{in\theta} + r^n e^{-in\theta})$$

$$= 1 + \sum_{n\geq 1} r^{|n|}e^{in\theta} + \sum_{n\leq -1} r^{|n|}e^{in\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta}.$$

(f) $0\leq r<1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,r)} \frac{P(z)}{z}dz \underset{z=re^{i\theta}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(re^{i\theta})\,d\theta = 1$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(re^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta}d\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{r^{|n|}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}d\theta$$

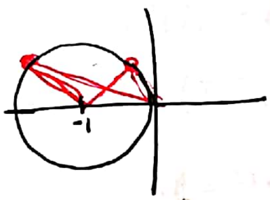
$$n\neq 0,\quad \left.\frac{e^{in\theta}}{in}\right|_0^{2\pi} = 1$$

$$\underset{n=0}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = 1.$$

(g) $0<r<1$, $0<|\delta|<|\theta|<\pi$, $\delta,\theta\in[-\pi,\pi]$

Entonces $P(re^{i\theta}) < P(re^{i\delta})$

dem. $0<|\delta|<|\theta|<\pi \Rightarrow |1-re^{i\theta}| > |1-re^{i\delta}|$



$$P(re^{i\theta}) = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2}$$

(h) $0<\delta<\pi$, $\varepsilon>0$

Entonces existe $0<\rho<1$ tal que para todo $\rho<r<1$ y todo $\delta<|\theta|<\pi$ se tiene $P(re^{i\theta})<\varepsilon$.

$$P(re^{i\delta}) \xrightarrow[r\to 1]{} 0$$

$\exists \rho>0 :\ \rho<r<1 \to P(re^{i\delta})<\varepsilon$

Por (g) $\forall \delta<|\theta<\pi \to P(re^{i\theta})<P(re^{i\delta})<\varepsilon$.

- Desigualdades de Harnack.

(a) $U\subseteq \mathbb{C}$ dominio. Sea $\varphi: U\to[0,\infty)$ armónica. Suponga que $B(p,R)\subseteq U$. Sea $0<r<R$. Demuestre que para todo $z\in B(p,r)$

$$\frac{R-r}{R+r}\varphi(p)\leq \varphi(z)\leq \frac{R+r}{R-r}\varphi(p).$$

Fórmula integral de Poisson.

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-|z-p|^2}{|Re^{it}-(z-p)|^2}\varphi(Re^{it}+p)\,dt \qquad \text{para todo } z\in B(p,r)$$

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|}\varphi(e^{it})\,dt$$

cambio de variable $z\mapsto \frac{z-p}{R}$.

Notar que: $R-|z-p|\leq |Re^{it}-(z-p)|\leq R+|z-p|$

luego:

$$\frac{R-r}{R+r}\leq\frac{(R-|z-p|)(R+|z-p|)}{(R+|z-p|)^2}$$

$$\leq \frac{R^2-|z-p|^2}{|Re^{it}-(z-p)|^2}\leq\frac{(R-|z-p|)(R+|z-p|)}{(R-|z-p|)^2}\leq\frac{R+r}{R-r}$$

Propiedad del promedio: $\varphi(p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(Re^{it}+p)\,dt$

$$\frac{R-r}{R+r} \leq \frac{R^2-|z-p|^2}{|Re^{it}-(z-p)|^2} \leq \frac{R+r}{R-r} \quad \Big/ \cdot \varphi(Re^{it}+p)$$

$$\frac{R-r}{R+r}\varphi(p) \leq \varphi(z) \leq \frac{R+r}{R-r}\varphi(p) .$$

(b) Usar (a) para probar que una función armónica $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ acotada superiormente o inferiormente es constante.

dem. $\varphi \leq M \to 0 \leq M-\varphi$ es armónica

$M \leq \varphi \to 0 \leq \varphi - M$ es armónica

Sin pérdida de generalidad, asumimos que $\varphi \geq 0$.

$0 < r < R$

$\forall z \in B(p,r)$

$$\frac{R-r}{R+r}\varphi(p) \leq \varphi(z) \leq \frac{R+r}{R-r}\varphi(p)$$

Si $R \to \infty \Rightarrow \varphi(p) \leq \varphi(z) \leq \varphi(p) \Rightarrow \varphi(z) = \varphi(p)$

$\therefore$ φ es constante en $B(p,R)$

y φ es constante en todas partes.

(c) Demuestre (b) reduciendo el problema anterior al caso $\varphi \leq 0$, encontrando f entera con $Re(f) = \varphi$ y estudiando e^f.

$\varphi \leq M \to \varphi - M \leq 0$

$M \leq \varphi \to M - \varphi \leq 0$

Asumimos $\varphi \leq 0$.

$\mathbb{C}$ abierto simplemente conexo, luego existe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entera tal que

$Re(f) = \varphi$, $|e^f| = e^{\varphi} \leq 1$

Por Liouville, e^f es constante

$\Rightarrow f$ es constante

$\Rightarrow \varphi$ es constante.

Obs: $M \min_{z \in \partial B(0,r)} \varphi(z) \geq \max_{z \in \partial B(0,r)} \varphi(z)$

$$\frac{R-r}{R+r}\varphi(0) \leq \varphi(z) \leq \frac{R+r}{R-r}\varphi(0)$$

$$r = \frac{R}{2}$$

$$\frac{1}{3}\varphi(0) \leq \varphi(z) \leq 3\varphi(0)$$

$\forall z \in B(0, R/2)$

$$\max_{z \in \partial B(0, R/2)} \varphi(z) \leq 3\varphi(0), \quad \min_{z \in \partial B(0, R/2)} \varphi(z) \geq \frac{1}{3}\varphi(0)$$

$$9 \min_{\partial B(0, R/2)} \varphi(z) \geq \max_{z \in \partial B(0, R/2)} \varphi(z)$$

Problema para el lunes:

φ armónica en D, con $\varphi(e^{i\theta}) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\theta) + b_k \operatorname{sen}(k\theta))$

(1) Demostrar que φ existe y es única

(2) Encuentre la solución de $\Delta \varphi = 0$, $\varphi(e^{i\theta}) = \cos^2\theta$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{5 - 3\cos t}\, dt$.

- Sea $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \supseteq \{0 < r_1 \leq |z| \leq r_2\}$. Sea $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Sea $s = \dfrac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1}$. Demuestre que $M(r) \leq M(r_1)^s M(r_2)^{(1-s)}$ $\forall r_1 < r < r_2$.

dem. Sea $\varphi(z) = a \log|z| + \log|f(z)|$, con $a \in \mathbb{R}$ a determinar. $\varphi(z)$ es armónica fuera de los ceros de f.

Cerca de los ceros de f, $\varphi(z) \ll 0$.

Por el principio del máximo para funciones reales:

$$\varphi(z) \leq \max\{a \log r_1 + \log M(r_1), a \log r_2 + \log M(r_2)\}$$

Escogemos $a \in \mathbb{R}$ para que: $a \log r_1 + \log M(r_1) = a \log r_2 + \log M(r_2)$

$$a = \frac{\log M(r_1) - \log M(r_2)}{\log r_2 - \log r_1}$$

Luego:

$$\underbrace{a \log r + \log M(r)}_{= \sup_{|z|=r} \varphi(z)} \leq a \log r_2 + \log M(r_2)$$

$$\log M(r) \leq a(\log r_2 - \log r) + \log M(r_2)$$

$$\log M(r) \leq s \log M(r_1) + (1-s) \log M(r_2)$$

$$M(r) \leq M(r_1)^s M(r_2)^{(1-s)}$$

- (Principio de Harnack).

Considere una sucesión de funciones (armónicas) $u_n : \Omega_n \to \mathbb{R}$ $[0,\infty)$ recorrido, Ω_n dominios. Sea Ω un dominio tal que para todo punto en Ω, existe una vecindad contenida en todos salvo finitos Ω_n.

Suponga que en esta vecindad $u_n(z) \leq u_{n+1}(z)$ para todo n suficientemente grande. Demuestre que hay sólo dos opciones:

(a) $u_n(z)$ converge uniformemente a $+\infty$ en todo compacto de Ω.

(b) $u_n(z)$ converge a una función armónica en Ω, uniformemente en compactos.

dem. $z_0 \in \Omega$, $\exists r, m$ tales que

$B(z_0, r) \subseteq \Omega$ salvo finitos n

$u_n(z_0) \leq u_{n+1}(z_0) \quad \forall n \geq m$. ($\longrightarrow u_n - u_m \geq 0$ en $B(z_0, r)$)

$\lim_{n\to\infty} u_n(z_0) = \infty$

$$\frac{r-r'}{r+r'}(u_n - u_m)(z_0) \leq (u_n - u_m)(z) \leq \frac{r+r'}{r-r'}(u_n - u_m)(z_0)$$

$\forall z \in B(z_0, r') \quad r' < r$.

$\Rightarrow u_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \quad \forall z \in B(z_0, r')$

Si en cambio $\lim_{n\to\infty} u_n(z) < \infty \Rightarrow u_n(z)$ es una sucesión acotada $\forall z \in B(z_0, r')$

$A = \{z \in \Omega \,/\, \lim_{n\to\infty} u_n(z) = \infty\}$, $B = \{z \in \Omega \,/\, \lim_{n\to\infty} u_n(z) < \infty\}$

obs: A, B abiertos en Ω.

$\Omega = A \cup B \Rightarrow$ conexidad: A o $B = \emptyset$

- $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ armónica, $\varphi(e^{i\theta}) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(k\theta) + b_k \operatorname{sen}(k\theta))$

$\varphi(re^{i\theta}) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} r^k (a_k \cos(k\theta) + b_k \operatorname{sen}(k\theta))$

$\Delta\varphi = 0$, $\varphi(e^{i\theta}) = \cos^2\theta = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$

$\varphi(re^{i\theta}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r^2\cos(2\theta)$

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\varphi(e^{it})\,dt$$

$$\varphi(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}\varphi(e^{i\theta})\,d\theta$$

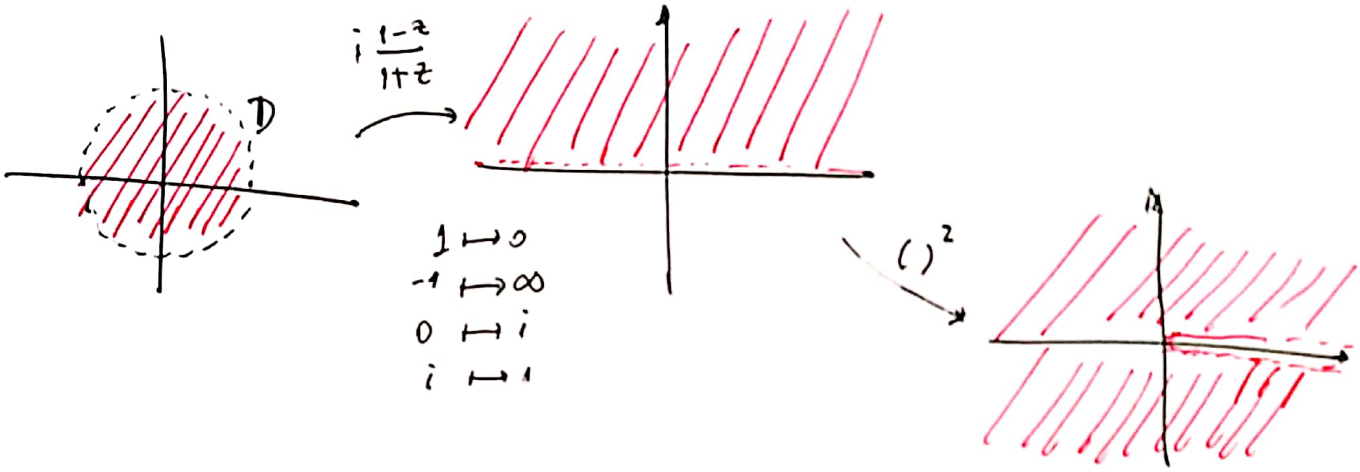
$$\therefore \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)\cos^2(\theta)}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}\,d\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r^2\cos(2t)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{5-3\cos t}\,dt = \dots$$

Ayudantía de Variable Compleja.

P1] $f(z) = -\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2$. Describa la imagen de $\mathbb{D}$ bajo f.

dem. $f(z) = \left(i\,\frac{1-z}{1+z}\right)^2$



P2] Sea $\varphi = \mathrm{Im}(f)$. Demuestre que si $p \in \partial\mathbb{D}$, $p \neq -1$, entonces $\lim_{z\to p} \varphi(z) = 0$

dem. Como $f(p) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \Rightarrow \mathrm{Im}(f(p)) = 0$

$\Rightarrow \lim_{z\to p} \varphi(z) = 0$ ctp $p \neq 1$

P3] Demuestre que si $\{z_n\}$ tiende a -1 radialmente, entonces $\lim_{n\to\infty} \varphi(z_n) = 0$.

dem. → Entonces parece que $\varphi(z)$ es cero en $\partial\mathbb{D}$ pero no es cero en $\mathbb{D}$

¿Esto contradice la fórmula de Poisson?

Resp: No, porque φ no es continua en $\partial\mathbb{D}$ y esto es una de las hipótesis.

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,\varphi(e^{it})\,dt$$