(d) Volumen del sólido obtenido al rotar la región R de la parte (a), en torno al semi-eje OY.

M 59. Considere la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ con dominio $(0, 1]$.

(a) Determine la existencia de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(b) Determine si el volumen obtenido por la rotación del área anterior en torno al semi-eje OY es finita.

60. Determinar los valores de $n \in \mathbb{N}$ para los cuales la integral $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^3(1-x)}}dx$ es convergente, y establezca una fórmula recursiva para la sucesión I_n.

M 61. Sea f una función definida sobre el intervalo $(a, +\infty)$, acotada y con derivada continua. Demuestre que la integral $\displaystyle\int_a^\infty \frac{f'(x)}{x^\alpha}dx$ existe si $\alpha > 0$.

L 62. (a) Mostrar que $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}dx$ y $J = \displaystyle\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{1+x}$ existen.

(b) Expresar J en función de I.

63. Sea $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

(a) Demuestre que I converge.

(b) Si se sabe que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, demuestre que $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = 1$, cuando f es una función definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$, donde σ y μ son constantes.

(c) Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 dx$

64. Determine los posibles valores de la constante C, de modo que la siguiente integral sea convergente.

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1}\right)dx$$

M 65. Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ función continua, positiva y monótona creciente. Pruebe que si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es convergente entonces $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,f(x) = 0$.

66. Pruebe que la función Gamma $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}dx$ es convergente.

67. Pruebe que si $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ es convergente entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ es convergente.

68. Sean $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ converge y para todo $x \in [a, b)$ se verifica $|f(x)| \le k\ g(x),\ k > 0$ constante. Pruebe que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge absolutamente.

Nombre: Marco Godoy V.
Carrera: Lic. en Matemática.

Universidad de Chile

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencia

Recorregir pregunta 1 (procedimiento bueno pero mal cambio en valores de x e y)

Prueba 2

Segundo Semestre 2010

Cálculo II

Prof. Verónica Poblete

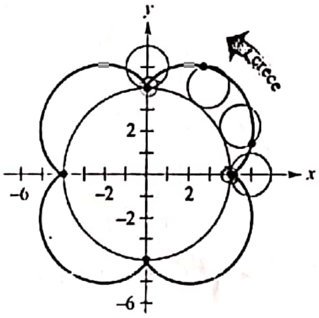
1. Calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $\cancel{x} = 1$ en torno al eje Y. **(1.2 puntos)**

2. Un círculo de radio 1 gira alrededor de otro de radio 4. La epicicloide descrita por un punto de la circunferencia del círculo de menor radio es

$$x = 5cos(t) - cos(5t), \quad y = 5sen(t) - sen(5t).$$

$0 = 0 - 0$

$= \boxed{t = \frac{\pi}{2}}$



$y =$

$y = 0 \Rightarrow t = 0$

$y = 4 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$y \in [0,4]$

Hallar la distancia recorrida por el punto en una vuelta completa alrededor del círculo de mayor radio. **(1.2 puntos)**

3. Demuestre que la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^x}{x^x}\,dx$ converge. **(1.2 puntos)**

4. Sea (a_n) una sucesión tal que $0 \leqslant a_n \leqslant 9$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, 10^{-n}$ converge y que su valor está entre 0 y 1. **(1.2 puntos)**

5. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n\, n!}{n^n}$ es incondicionalmente convergente. **(1.2 puntos)**

Desarrollo Prueba 2

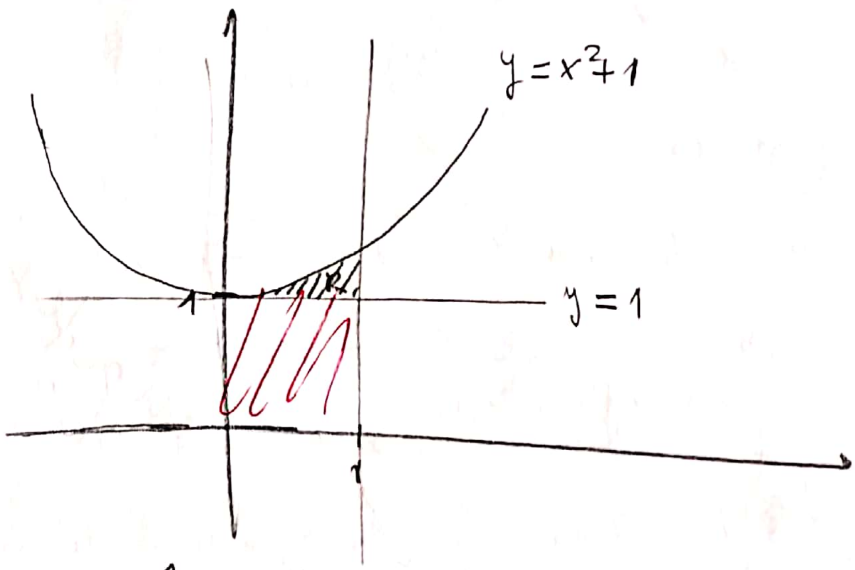
Cálculo II

Nombre: Marco Godoy

4,7

1	0,8
2	1,0
3	0,7
4	1,2
5	0,0

1) Tenemos $y = x^2+1$, $y=0$, $x=0$, $y=1$. La gráfica de la región R viene dada por la figura 1:



$$\therefore\ A = 2\pi \int_0^1 x y \, dx - 2\pi \int_0^1 x \, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x(x^2+1)\,dx - 2\pi \int_0^1 x\,dx$$

$$= 2\pi \left[\int_0^1 (x^3+x)\,dx - \int_0^1 x\,dx \right] = \cancel{\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} = \frac{1}{4}}$$

$$= 2\pi \left[\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 \right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] = 2\pi \left[\frac{1}{4} \right] = \frac{\pi}{2}$$

2) Ecuación en coordenadas paramétricas

$$\begin{cases} x = 5\cos t - \cos 5t \\ y = 5\,\text{sen}\, t - \text{sen}\, 5t \end{cases} \quad , t \in [0, 2\pi]$$

Primeramente, tenemos la gráfica de la epicicloide como y en función de x, o sea

$$y = y(x)$$

Sea L la distancia recorrida en el intervalo $[a,b]$, entonces tenemos que:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx \qquad (1)$$

hipótesis

como $y = y(x) = y(x(t))$ entonces, por la regla de la cadena tenemos que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \qquad (2)$$

y además;

$$x = x(t) \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = x'(t) \Rightarrow dx = \frac{dx}{dt}\,dt$$

$$\Rightarrow dt = \frac{dt}{dx}\,dx \qquad (3)$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos que:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \Big/ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\; dx$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\; \frac{dt}{dx}\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\; dt$$

donde $a = x(t_1)$ y $b = x(t_2)$

Como la curva es simétrica en cada cuadrante, sólo basta calcular la longitud en el intervalo $[0,1]$

Por otro lado, para $x \in [0,1]$ $y = y(t)$ varía entre $0 \leq y(t) \leq 4$, entonces se tiene que $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Con lo anterior, la distancia recorrida por la epicicloide es:

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dt$$

donde: $\frac{dx}{dt} = -5\,\text{sen}\,t + 5\,\text{sen}(5t)$

$$\frac{dy}{dt} = 5\cos t - 5\cos(5t)$$

$$\therefore L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(25\cos^2 t + 25\cos^2 5t - 50(\cos t)(\cos 5t) + 25\,\text{sen}^2 t + 25\,\text{sen}^2 5t - 50\,\text{sen}\,t\,\text{sen}\,5t\right)}\, dt$$

$$\therefore L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{25+25-50\left(\cos t\cos 5t + \text{sen}\,t\,\text{sen}\,5t\right)}\, dt$$

$$\therefore L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{50\left(1-\left(\cos(5t-t)\right)\right)}\, dt$$

$$\therefore L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{50\left(1-\cos 4t\right)}\, dt$$

$$\therefore L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{50\left(1-\left(\cos^2 2t - \text{sen}^2 2t\right)\right)}\, dt$$

$$\therefore L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{50\left(2\,\text{sen}^2 2t\right)}\, dt$$

$$\therefore L = 40\int_0^{\pi/2} \text{sen}\,2t\, dt = 40\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$\therefore L = 40\left(-\frac{\cos 2\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\cos 0}{2}\right) = 40\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 40$$

3) P.d: $\int_1^\infty \frac{e^x}{x^x}\,dx$ converge

Demostración:

Sea $f:[1,\infty[$, definida por $f(x)=\frac{e^x}{x^x}$, procedemos a definir la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como $a_n=\frac{e^n}{n^n}$ donde $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=f(n)$.

Con lo anterior tenemos la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^n}$$

Si logramos demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^n}$ es convergente, entonces por el criterio de la integral (que es del tipo "$\Leftrightarrow$"), $\int_1^\infty \frac{e^x}{x^x}$ es convergente. Se sabe que para n suficientemente grande, a_n es decreciente, y en particular, f es decreciente para $x>x_0$ donde $x_0\in[1,\infty[$

debe probar f decreciente

Por el criterio de d'Alembert tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{e^n}{n^n}}=\frac{n^n e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}e^n}=\frac{e\,n^n}{(n+1)(n+1)^n}=\frac{e}{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Cuando $n\to\infty$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\longrightarrow e$ y $\frac{1}{n+1}\longrightarrow 0$

$\therefore\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\longrightarrow 0 \qquad \therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^n}$ es convergente

$\therefore\ \int_1^\infty \frac{e^x}{x^x}\,dx$ es convergente.

Scanned with CamScanner

4) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión tal que $0 \leq a_n \leq 9$,

para todo $n \in \mathbb{N}$.

P.d: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ converge y que su valor está entre 0 y 1

Sea $m = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ entonces tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots \leq \frac{m}{10} + \frac{m}{10^2} + \frac{m}{10^3} + \ldots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{10^n} = m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$$

Si $b_n = \frac{1}{10^n}$ entonces $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{10^{n+1}}}{\frac{1}{10^n}} = \frac{10^n}{10^n 10} = \frac{1}{10} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{10} < 1$

entonces, por el criterio de d'Alambert, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{10^n}$ converge y

como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{10^n}$, entonces por el criterio de comparación,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ también es convergente

---

como $0 \leq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es evidente que

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(0 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i}\right)$$

en particular $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \geq 0$

Por otro lado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots \leq \frac{m}{10} + \frac{m}{10^2} + \frac{m}{10^3} + \ldots \leq \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots$$

ya que $m \leq 9$

Por otro lado:

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots + \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = \frac{9}{10} \sum^{n-1} \frac{1}{10^i}$$

Además sabemos que

$$\left(1+\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}$$

$$\therefore \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{10^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{10^{i-1}} = \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{\frac{9}{10}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{10^{i-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{\frac{10}{9}} = \frac{10}{9}$$

$$\therefore \frac{9}{10} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} \leq 1$$

$\therefore$ se ha demostrado que $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} \leq 1$

---

5) No sé ☹

6 Series

Tarea!!

87. Estudiar la convergencia o divergencia de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1}}{6n^2+3n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen((-1)^{n+1})}{\sqrt{4n-3}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(1+\frac{1}{n})^{2n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n - sen(n)}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n!}{n^n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n}{n^2+1}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})^n$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} cos(n\pi)$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen((-1)^n)}{\sqrt{n}}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} sen(\pi\,\sqrt{1+n^2})$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n!}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-2\sqrt{2}\,n+1}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos^2(n!)}{n!+n}$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2}{(1+a^2)^n}$

(p) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{sen(n!)}{2\,n\,ln(n)}$

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$

(r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, cos(n\pi)$

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

(t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$

(u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

(w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n 3^n$

(x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$

(y) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n}$

(z) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)^n}$

88. Determine si las siguientes series son absolutamente convergentes o condicionalmente convergentes

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{ln(n)}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{n^3-1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n\,\pi)}{n+1}$

89. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n^2}{(n+1)^2}$ es divergente.

90. Dadas las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tales que $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ y $b_n = log(1-\frac{1}{n})$, demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Calcule las $n-$ésimas sumas parciales s_n y t_n de dichas series y demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$, luego las series dadas son divergentes.

91. Sea s_n la $n-$ésima suma parcial de la serie armónica. Pruebe que para $n = 2^m$ se tiene $s_n > 1 + \frac{m}{2}$ y concluya que la serie armónica es divergente.

92. Demuestre que si $r > 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\log n)^r}$ converge.

M 93. Pruebe que si $a_1 \geq \cdots \geq a_n \cdots$ y la serie $\sum a_n$ converge entonces $\lim\limits_{n\to\infty} n\, a_n = 0$.

94. Si $\sum a_n$ es convergente y $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces la serie $\sum a_n x^n$ es absolutamente convergente para todo $x \in [-1, 1]$. Además, pruebe que

$$\sum a_n\, sen(nx), \qquad \sum a_n\, cos(nx)$$

son absolutamente convergentes para todo $x \in \mathbb{R}$.

95. Si $\sum a_n$ es absolutamente convergente y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, escriba $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$. Pruebe que $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

M 96. Si $\sum a_n$ es absolutamente convergente, pruebe que $\sum a_n^2$ converge.

97. Si $\sum a_n^2$ y $\sum b_n^2$ convergen, pruebe que $\sum a_n\, b_n$ converge absolutamente.

98. Si $0 < a < b < 1$, la serie $a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$ es convergente. Demuestre que el criterio de Cauchy nos lleva a este resultado y que, sin embargo, el criterio de d'Alambert nada nos permite concluir.

99. Determine si la serie $\sum (\frac{\log n}{n})^n$ es convergente usando los criterios de d'Alambert y Cauchy.

100. Determine para qué valores de x converge cada una de las siguientes series.

(a) $\sum n^k x^n$ (b) $\sum n^n x^n$ (c) $\sum \frac{x^n}{n^n}$ (d) $\sum n!\, x^n$ (e) $\sum \frac{x^n}{n^2}$

Teoremas Clásicos del Cálculo Integral

26) Calcular la derivada de las siguientes funciones. Use el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena.

a) $F(x) = \int_1^x \cos^2 t\, dt$

$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x \cos^2 t\, dt = \cos^2 x$

b) $G(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \operatorname{arcsen} t\, dt$

Sea $F(x) = \int_0^x \operatorname{arcsen} t\, dt$ y $H(x) = \operatorname{sen} x$ entonces

$G(x) = F(H(x))$, donde $G'(x) = F'(H(x))\, H'(x)$

$\therefore G'(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) \cos x = x \cos x$

c) $H(x) = \frac{1}{2}\int_x^{2x} t^3\, dt$

sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $x < c < 2x$ entonces

$$H(x) = \frac{1}{2}\left[\int_x^c t^3 dt + \int_c^{2x} t^3 dt\right] = \frac{1}{2}\left[\int_c^{2x} t^3 dt - \int_c^{x} t^3 dt\right]$$

$$H'(x) = \frac{1}{2}\left[(2x)^3 \cdot 2 - x^3\right] = \frac{1}{2}\left[16x^3 - x^3\right] = \frac{15}{2}x^3$$

27) Calcular

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^{x^2}(e^{-t^2}-e^{-1})dt}{x\sqrt{x}}$

Evaluando en $x=0$ tenemos una forma $\frac{0}{0}$. Entonces tenemos que ocupar regla de L'hôpital

$$\int_0^{x^2}(e^{-t^2}-e^{-1})dt = \int_0^{x^2} e^{-t^2}dt - e^{-1}\int_0^{x^2} dt$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2}(e^{-t^2}-e^{-1})dt\right) = e^{-x^4}2x - e^{-1}2x = 2x\left(e^{-x^4}-e^{-1}\right)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2}(e^{-t^2}-e^{-1})dt}{x\sqrt{x}} = \frac{2x(e^{-x^4}-e^{-1})}{\sqrt{x}+\frac{1}{2}xx^{-1/2}} = \frac{2x(e^{-x^4}-e^{-1})}{\sqrt{x}(1+\frac{1}{2})} = \frac{4\sqrt{x}}{3}\left(e^{-x^4}-e^{-1}\right)$$

$$= 0$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$

como $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x e^{t^2}dt = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x e^{2t^2}dt = \infty$ entonces aplicamos regla de L'hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\int_0^x e^{2t^2}dt} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$, hacemos el cambio de variable $x=\frac{1}{h}$

Entonces $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x} = \lim\limits_{h\to\infty} h\left[\left(1+\frac{1}{h}\right)^h - e\right]$, donde tenemos una forma $\infty\cdot 0$

$$\lim_{h\to\infty} h\left[\left(1+\frac{1}{h}\right)^h - e\right] = \lim_{h\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{h}\right)^h - e}{\frac{1}{h}}$$

Usamos la Regla de L'hôpital
Para Calcular $\frac{d}{dh}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h$ tenemos

$$y = \left(1+\frac{1}{h}\right)^h \Rightarrow \ln y = h\ln\left(1+\frac{1}{h}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{y}y' = \ln\left(1+\frac{1}{h}\right) + h\left(1+\frac{1}{h}\right)^{-1}\cdot\left(-\frac{1}{h^2}\right)$$

$$\frac{1}{y}y' = \ln\left(1+\frac{1}{h}\right) - \frac{h^2}{1+h}\cdot\frac{1}{h^2} = \ln\left(1+\frac{1}{h}\right) - \frac{1}{1+h}$$

$$y' = y\left(\ln\left(1+\frac{1}{h}\right) - \frac{1}{1+h}\right) = \left(1+\frac{1}{h}\right)^h\left(\ln\left(1+\frac{1}{h}\right) - \frac{1}{1+h}\right)$$

$$\therefore \lim_{h\to\infty} h\left[\left(1+\frac{1}{h}\right)^h - e\right] = \lim_{h\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{h}\right)^h \ln\left(1+\frac{1}{h}\right) - \frac{1}{1+h}\left(\frac{1+h}{h}\right)^h}{\frac{1}{h^2}}$$

$$\lim_{h\to\infty} \frac{h^2}{1+h}\left(\frac{1+h}{h}\right)^h - \left(1+\frac{1}{h}\right)\ln\left(\left(1+\frac{1}{h}\right)^{h^2}\right)$$

$$\lim_{h\to\infty} \frac{(1+h)^{h-1}}{h^{h-2}}$$

28) Calcular el límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde
$$x_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

Desarrollo.

$$x_n = \frac{1^\alpha+2^\alpha+\dots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{n}\,\frac{1^\alpha+2^\alpha+\dots n^\alpha}{n^\alpha} = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha + \left(\frac{2}{n}\right)^\alpha + \dots 1\right]$$

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^\alpha = \sum_{i=1}^{n} f(x^*)\,\frac{1}{n} \quad \text{donde } f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^\alpha$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \int_0^1 x^\alpha\,dx = \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}$$

---

31) Sean $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua y $\alpha,\beta: I\longrightarrow[a,b]$ funciones derivables en el intervalo abierto I. Defina $\varphi: I\longrightarrow\mathbb{R}$ por
$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$$

Pruebe que φ es derivable y que $\varphi'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$

Desarrollo

Como para todo $x\in I$ se tiene que $\alpha(x),\beta(x)\in[a,b]$ y además

$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt = \int_{\alpha(x)}^{c} f(t)\,dt + \int_c^{\beta(x)} f(t)\,dt$$

$$\varphi(x) = \int_c^{\beta(x)} f(t)\,dt - \int_c^{\alpha(x)} f(t)\,dt$$, en donde f es continua

en $[a,b]$, con $a\leq\alpha(x)<c<\beta(x)\leq b$, por el Teorema fundamental del cálculo se tiene que φ es derivable en $[a,b]$ y

$$\varphi'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

32) Dada $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con derivada integrable, sea $m = \frac{a+b}{2}$.
Pruebe que

$$f(a) + f(b) = \frac{2}{b-a} \int_a^b [\, f(x) + f(x-m)\, f'(x) \,]\, dx$$

Scanned with CamScanner

34) Pruebe que $\lim_{x \to 0} x \ln(x) = 0$

Evaluando en $x=0$ tenemos la forma $0 \cdot \infty$ entonces ocupamos L'hôpital

$$\lim_{x \to 0} x \ln(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

---

36) Suponga que f es una función que satisface $f''(x) + f(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que existen constantes A y B tales que $f(x) = A\cos(x) + B\,\mathrm{sen}(x)$

Tenemos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, $f''(x) + f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ y ademas

$$f(0) = A$$
$$f'(0) = B$$

Por otro lado

$$f''(x) + f(x) = 0$$
$$f'(x)f''(x) + f(x)f'(x) = 0$$
$$\left(f^2(x) + (f'(x))^2\right)' = 0$$

por lo tanto $f^2 + (f')^2$ es una función constante

$$f^2(x) + (f'(x))^2 = K \Rightarrow f^2(0) + (f'(0))^2 = A^2 + B^2$$

$$\therefore f^2(x) + (f'(x))^2 = A^2 + B^2 =$$

$$f^2(x) = A^2\cos^2 x + B^2\,\mathrm{sen}^2 x + 2AB\,\mathrm{sen}\,x\cos x$$
$$(f'(x))^2 = A^2\,\mathrm{sen}^2 x + B^2\cos^2 x - 2AB\,\mathrm{sen}\,x\cos x$$

Scanned with CamScanner

38) Para $n \in \mathbb{N}$, se define $I_n = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^n dx$

a) Calcular I_0, I_1 y demostrar que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

b) Demostrar que $\lim_{n \to \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$

Desarrollo

a) $I_n = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^n dx$, $I_0 = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^0 dx = \int_0^{\pi/2} dx = x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$

$I_1 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 0 + 1 = 1$

$I_n = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^n dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^{n-1} x \, dx$

$I_n = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int \cos^2 x \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$

Scanned with CamScanner

$$I_n = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

$$I_n = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

$$I_n = +(n-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n} x\,dx$$

$\therefore$ $I_n(1+n-1) = n-1\, I_{n-2} \Rightarrow \therefore I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

$\therefore$ $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

b) Vemos que $\frac{I_n}{I_{n-2}} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$; $\frac{I_n}{I_{n+2}} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$

$\therefore$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{I_n}{I_{n-2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}} \Longrightarrow \therefore \forall n \in \mathbb{N}, \frac{I_{2n}}{I_{2n-2}} \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+2}}$

I_n es decreciente

ya que, $\forall x \in [0, \pi/2]$, $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \operatorname{sen}^n(x) \in [0,1]$

para $m > n \Longrightarrow \operatorname{sen}^m(x) < \operatorname{sen}^n(x) \Longrightarrow \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m(x)dx < \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n(x)dx$

como I_n es acotada entonces existe $L = \lim_{n\to\infty} I_n$

Como I_{2n} y I_{2n+1} son subsucesiones de I_n, entonces

$\lim_{n\to\infty} I_{2n} = L \wedge \lim_{n\to\infty} I_{2n+1} = L$ $\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$

$\therefore$

40) Demuestre que si f es una función integrable entonces

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx.$$

Tomamos la partición $P = \{ t_{i-1} = (a+c) + \frac{b-a}{n}(i-1) : i \in \mathbb{N} \}$

Como f es integrable entonces

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1}-c)\frac{b-a}{n} \Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}(i-1)\right)\frac{b-a}{n}$$

donde S_n es una suma de Rieman de f

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

---

39) Sabiendo que $\int_0^{\pi} f(t)\,dt = 2\pi$, encuentre los puntos extremos de la función:

$$F(x) = \left[\int_0^{\pi} (f(t)-x)^2\,dt \right]^{1/2}$$

Tenemos que

$$F(x) = \left[\int_0^{\pi} (f(t)-x)^2\,dt \right]^{1/2} = \left[\int_0^{\pi} (f^2(t) + x^2 - 2x f(t))\,dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\int_0^{\pi} f^2(t)\,dt + x^2 \int_0^{\pi} dt - 4\pi x \right]^{1/2} = \left[\int_0^{\pi} f^2(t)\,dt + \pi x^2 - 4\pi x \right]^{1/2}$$

$$\therefore F'(x) = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} f^2(t)\,dt + \pi x^2 - 4\pi x \right]^{-1/2} \left(2x\pi - 4\pi \right)$$

$$\therefore F'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\pi - 4\pi = 0 \Rightarrow 2x\pi = 4\pi \Rightarrow x = 2$$

42) Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ para cada una de las siguientes funciones

a) $y = \displaystyle\int_1^x \sqrt{1+2t^2}\,dt$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+2x^2}$$

b) $y = \displaystyle\int_x^b \frac{dt}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{1+x^2+\operatorname{sen}^2 x}$

c) $y = \displaystyle\int_a^b \frac{x}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\,dx$, $\dfrac{dy}{dx} = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\,dt$

---

43) Dada una función g que cumple $g(1) = 5$ y $\int_0^1 g(x)dx = 2$ y una función definida por

$f(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x (x-t)^2 g(t)\,dt$, calcular $f''(1)$ y $f'''(1)$

Tenemos :

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x^2+t^2-2xt)\,g(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[x^2\int_0^x g(t)dt + \int_0^x t^2 g(t) - 2x\int_0^x t g(t)dt\right]$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{2}\left[2x\int_0^x g(t)\,dt + x^2 g(x) + x^2 g(x) - 2\int_0^x t g(t)\,dt - 2x^2 g(x)\right]$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left[2\int_0^x g(t)dt + \cancel{2xg(x)} + \cancel{4xg(x)} + \cancel{2x^2 g'(x)} - \cancel{2xg(x)} - \cancel{4xg(x)} - \cancel{2x^2 g'(x)}\right]$$

$$\therefore f''(x) = \int_0^x g(t)\,dt \Rightarrow f''(1) = \int_0^1 g(t)dt = 2 \qquad \therefore f''(1) = 2$$

$$f'''(x) = g(x) \Rightarrow \therefore f'''(1) = g(1) = 5$$

44) La siguiente ecuación define implícitamente a y en función de x. Calcule $\frac{dy}{dx}$,

$$x \operatorname{sen}(xy) + \int_{\sqrt{y}}^{x^2 \operatorname{sen} y} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = 1$$

Desarrollo:

Tenemos $$x \operatorname{sen}(xy) + \int_{\sqrt{y}}^{x^2 \operatorname{sen} y} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = 1$$

Sea $F(x) = x \operatorname{sen}(xy) \Rightarrow F'(x) = \operatorname{sen}(xy) + x\cos(xy)\left[y + xy'\right]$

$$G(x) = \int_{\sqrt{y}}^{x^2 \operatorname{sen}\sqrt{y}} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \Rightarrow G(x) = \int_{\sqrt{y}}^{c} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt + \int_{c}^{x^2 \operatorname{sen} y} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

$$\therefore G'(x) = -\frac{\operatorname{sen}\sqrt{y}}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' + \frac{\operatorname{sen}(x^2 \operatorname{sen} y)}{x^2 \operatorname{sen} y}\left[2x \operatorname{sen} y + x^2 \cos y\, y'\right]$$

$$\therefore \operatorname{sen}(xy) + x\left[y + xy'\right]\cos(xy) - y'\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{y}}{y} + \frac{\operatorname{sen}(x^2 \operatorname{sen} y)}{x^2 \operatorname{sen} y}\left[2x \operatorname{sen} y + x^2 y' \cos y\right] = 0$$

$$\therefore y'\left[x^2\cos(xy) - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{y}}{y} + \frac{\operatorname{sen}(x^2 \operatorname{sen} y)}{\tan y}\right] = -\operatorname{sen}(xy) - xy\cos(xy) - 2\frac{\operatorname{sen}(x^2 \operatorname{sen} y)}{x}$$

$$\therefore y' = -\frac{2\left(x\operatorname{sen}(xy) + x^2 y\cos(xy) + 2\operatorname{sen}(x^2 \operatorname{sen} y)\right) y \tan y}{2yx^3\cos(xy)\tan y - x\operatorname{sen}\sqrt{y}\tan y + 2yx\operatorname{sen}(x^2 \operatorname{sen} y)}$$

45) Determine las constantes a y b de manera que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{bx - \operatorname{sen} x} \int_0^x \frac{t^2\,dt}{\sqrt{a+t}} = 1$$

Evaluando en $x=0$ tenemos una expresión del tipo $\frac{0}{0}$, en ese caso ocupamos Regla de L'hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{bx-\operatorname{sen}x} \int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{a+t}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{b-\cos x}\,\frac{x^2}{\sqrt{a+x}} = \frac{1}{b-1}\,0 = 0$$

si $b=1$ tenemos nuevamente una forma $\frac{0}{0}$. Usamos L'hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{b-\cos x}\,\frac{x^2}{\sqrt{a+x}} = \frac{1}{-\operatorname{sen}x}\;\frac{2x\sqrt{a+x} - \frac{1}{2}x^2(\sqrt{a+x})^{-1}}{a+x} = \frac{\frac{4x(a+x)-x^2}{\sqrt{a+x}}}{a+x}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{1}{b-\cos x}\,\frac{x^2}{\sqrt{a+x}} = \lim_{x\to 0} -\frac{x(4a+4x-x)}{\operatorname{sen}x\,(a+x)\sqrt{a+x}} = -\frac{(4a+3x)}{\sqrt{a+x}\,(a+x)}\;\frac{x}{\operatorname{sen}x}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{-(4a+3x)}{\sqrt{a+x}\,(a+x)}\;\cancel{\frac{x}{\operatorname{sen}x}}^{\,1} = -\frac{4a}{\sqrt{a}\;a} = -\frac{4}{\sqrt{a}} = 1 \implies \frac{16}{a} = 1$$

$$\therefore\quad a = \frac{1}{16} \;\wedge\; b = 1$$

---

46) Se definen $I = \int e^{ax}\cos(bx)\,dx$ y $J = \int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$, demuestre que:

$$\arctan\left(\frac{J}{I}\right) + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = bx$$

tenemos

$$\tan bx = \tan\left(\arctan\left(\frac{J}{I}\right) + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right) = \frac{\frac{J}{I} + \frac{b}{a}}{1 - \frac{b}{a}\frac{J}{I}} = \frac{\frac{aJ+bI}{aI}}{\frac{aI-bJ}{aI}}$$

$$\tan bx = \frac{aJ+bI}{aI-bJ} \implies bx = \arctan\left(\frac{aJ+bI}{aI-bJ}\right)$$

$$I = \int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx - \frac{a}{b}\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx$$

$$\therefore\ bI + aJ = \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx$$

También:

$$J = \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax} \cos bx$$

$$\therefore\ aI - bJ = \frac{1}{b} e^{ax} \cos bx$$

$$\therefore\ \frac{aJ + bI}{aI - bJ} = \frac{\frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx}{\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx} = \tan bx$$

$$\therefore\ \arctan\left(\frac{J}{I}\right) + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = bx$$

3.3) Pruebe que la sucesión cuyo n-ésimo término es $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$ es decreciente y acotada por lo tanto converge

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \quad \wedge \quad \log n = \int_1^n \frac{1}{t}\,dt$$

Expresamos $\log n$ mediante suma de Riemann. Tomamos la partición

$$P = \left\{ t_{k-1} = 1 + \frac{n-1}{m}(k-1) : k \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\int_1^n \frac{1}{t}\,dt = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1 + \frac{n-1}{m}k} \cdot \frac{n-1}{m} = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} (n-1) \frac{1}{(n-1)\left(k + \frac{m}{n-1}\right)}$$

$$\int_1^n \frac{1}{t}\,dt = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k + \frac{m}{n-1}}$$

$$\therefore\ x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k + \frac{m}{n-1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - (n-1) \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(n-1) + m}$$

47) Si f es una función continua e invertible tal que $\int f(x)\,dx = F(x)$, demuestre que

$$\int f^{-1}(x)\,dx = x\,f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))$$

Demostración:

Si $\int f(x)\,dx = F(x) \Rightarrow f(x) = F'(x) \Rightarrow x = f^{-1}(F'(x))$

$\Rightarrow x = f^{-1}(y)$ con $y = F'(x)$

$$\int f^{-1}(y)\,dy = y\,f^{-1}(y) - \int y\,(f^{-1}(y))'\,dy$$

$$(f^{-1}(y))' = f^{-1\,\prime}(y)\,y' = 1 \Rightarrow f^{-1\,\prime}(y) = \frac{1}{y'}$$

$$\int f^{-1}(y)\,dy = y.f^{-1}(y) - \int y\,\frac{1}{y'}\,dy$$

Por otro lado:

$$\frac{dy}{dx} = F''(x) \Rightarrow dy = F''(x)\,dx \Rightarrow dy = y'\,dx$$

$$\therefore \int f^{-1}(y)\,dy = y\,f^{-1}(y) - \int F'(x)\,dx = y\,f^{-1}(y) - F(x)$$

$$\therefore \int f^{-1}(y)\,dy = y\,f^{-1}(y) - F(f^{-1}(y))$$

Cambiando a variable x tenemos

$$\therefore \int f^{-1}(x)\,dx = x\,f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))$$

Ejercicios

1. Analice la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^5+7n^4+1}{n^7+1810}$ CV.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3+1}$ CV.

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$ CV.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}+1}$ DV

2. a) Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$ es telescópica y halle su suma.

b) Determine el valor de la suma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+7^n}{35^n}$.

3. Analice la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n}{e^{n^2}}$ CV

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} e^{-n} n!$ DV.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

4. Determine si la serie dada en cada caso es convergente o divergente:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ CV razón.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ CV. Leibniz

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$ CV raíz

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ CV. razón o cociente.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{a_n}$ sabiendo que $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ converge, con $a_n \geq 0$, para todo $n \in IN$.

CV. Comparación.

5. Decida si la serie dada en cada caso es convergente o divergente:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 3n^2 e^{-n^3}$ CV. razón.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ DV.

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n}+n^{5/2}}$ CV.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$ DV.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) - \ln\left(\frac{n+2}{2n+2}\right)\right)$ CV.

6. Pruebe que la sucesión de funciones $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$ converge puntualmente a $f:[0,1] \to IR$ tal que $f(x) = 0$, para todo $x \in [0,1]$ y compruebe que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx$$

7. Demuestre que la sucesión de funciones definida por $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, converge puntualmente pero no uniformemente sobre IR.

8. Demuestre que la sucesión de funciones definida por $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{n}}$ es uniformemente convergente en IR, sin embargo, la sucesión de las derivadas f_n' no converge en IR.

9. Demuestre que la sucesión $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$ converge uniformemente a una función f y que f_n' converge a f' ,salvo en $x = 0$.

10. Suponga que $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones acotadas que converge uniformemente en un conjunto D a una función f. Demuestre que f es acotada en D.

11. Si $(f_n)_n$ y $(g_n)_n$ son uniformemente convergentes en un conjunto $D \subseteq IR$, pruebe que $(f_n + g_n)_n$ converge uniformemente a la suma de los límites.

12. ¿Es cierto que si $(f_n)_n$ y $(g_n)_n$ son uniformemente convergentes en un conjunto $D \subseteq IR$, entonces $(f_n g_n)_n$ converge uniformemente al producto de los límites?

13. ¿Qué puede decir sobre la pregunta del ejercicio anterior si además los términos de las sucesiones $(f_n)_n$ y $(g_n)_n$ son acotados?

14. Si $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones integrables según Riemann en el intervalo $[a,b]$ y converge uniformemente a una función f en $[a,b]$, demuestre que f es integrable según Riemann en $[a,b]$.

15. Si f es continua en $[a,b]$, demuestre que existe una sucesión de funciones escalonadas, definidas en $[a,b]$, que converge uniformemente a f en $[a,b]$.

16. Demuestre que las siguientes series son uniformemente convergentes en IR:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{5^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\left(1+n^2x^2\right)}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n(n+1)}$

17. Si $\sigma > 0$, demuestre:

   a) Que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+(x+n\sigma)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+(x-n\sigma)^2}$ está bien definida, para todo $x \in IR$.

   b) Que f es una función continua en IR.

   c) Que f es periódica, de período σ.

18. Pruebe que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ está bien definida para todo $x > 0$ y que define una función continua $f : IR^+ \Rightarrow IR$. Calcule $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx$.

19. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n\pi x}{n^3}$ es uniformemente convergente sobre la recta real a una función continua f. ¿Es posible la derivación término a término? Justifique cuidadosamente su respuesta; en caso de ser afirmativa, encuentre la derivada.

20. Halle el polinomio de Taylor del grado que se indica en los siguientes casos:

   a) $f(x) = \cos x^2$, de grado 4, en $x_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

   b) $f(x) = \arctan x$, de grado 3, en $x_0 = 1$.

   c) $f(x) = ax^2 + bx + c$, de grado 2, en $x_0 = 0$.

21. Escriba los siguientes polinomios en potencias de $x-1$:

   a) $p(x) = x^2 + x + 1$

   b) $q(x) = x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$

   c) $r(x) = x^3 - 12x + 3$

22. Si $x \le 0$ demuestre que $\left| \int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n\, dt \right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

23. Si $-1 < x \le 0$ demuestre que $\left| \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(1+x)(n+1)}$.

24. ¿Cuántos términos de la serie de Taylor de sen son suficientes para hallar sen 1 con un error menor que 10^{-5}? ¿Y para hallar una aproximación mediante polinomios de Taylor para e con un error menor que 0,0001?

a) Si $f''(x_0)$ existe, demuestre la siguiente igualdad: $f''(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$

Indicación: Use el polinomio de Taylor de grado 2 con $x=x_0+h$ y $x=x_0-h$.

b) Si $f(x)=x^2$ para $x\geq 0$ y $f(x)=-x^2$ para $x\leq 0$, pruebe que aunque $f''(0)$ no existe, el siguiente límite existe:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)+f(0-h)-2f(0)}{h^2}$$

25. Use el teorema de Taylor con resto para demostrar que si $p(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que *n*, en potencias de $x-a$ entonces $p(x)=P_{n,a,p}(x)$.

26. Encuentre la serie de Maclaurin de $f(x)=\ln(1+x)$ y demuestre que:

    a) *f* está representaxda por su serie de Maclaurin en el intervalo $[0,1]$. Para esto use el resto de Lagrange.

    b) *f* está representada por su serie de Maclaurin en el intervalo $]-1,0]$. En este caso use el resto de Cauchy.

27. Use la fórmula de Cauchy del resto para demostrar que

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k,$$

donde $\binom{\alpha}{k}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}$ y $\binom{\alpha}{0}=1$.

Indicación: Pruebe que para *n* suficientemente grande $|R_{n,0}(x)|\leq\left|\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}\right|$ y que esta última expresión tiende a 0 cuando *n* tiende a infinito.

28. a) Si $|x|<1$ demuestre que se tiene el siguiente desarrollo:

$$(1-x^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4+...+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^{2n}+R_n(x)$$

con $0\leq R_n(x)\leq\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\cdot\dfrac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) Use integración para deducir que

$$\operatorname{arcsen} x=x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+...+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+S_n(x),$$

donde $|S_n(x)|\leq\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\cdot\dfrac{|x|^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}$, siempre que $|x|<1$.

Deduzca que para $|x| < 1$ se tiene:

$$\operatorname{arcsen} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

29. Encuentre el intervalo de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias:

CV en $|x|<1$.

$r = \frac{1}{e}$

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(x-3)^n$ DV.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[n\,(x+2)]^n}{n!}$. CV , con $r = \ldots$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} [n\,(x-1)]^n$ DV.

e) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n}$ CV, $r=1$.

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} (x+1)^n$ CV , $r=1$.

30. Use series de potencias para hallar los desarrollos en serie de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(1+x)$

b) $f(x) = \arctan x$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $f(x) = \arccos x$

f) $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$

31. Demuestre que para $|x| < 1$ se verifica:

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

Tarea:

Investigar dominio, recorrido y gráfico de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$

(b) $g(x) = \log_a(x)$, $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$

(c) $s(x) = \operatorname{sen}(x)$

(d) $t(x) = \tan(x)$

Desarrollo:

(a) Definimos la función:

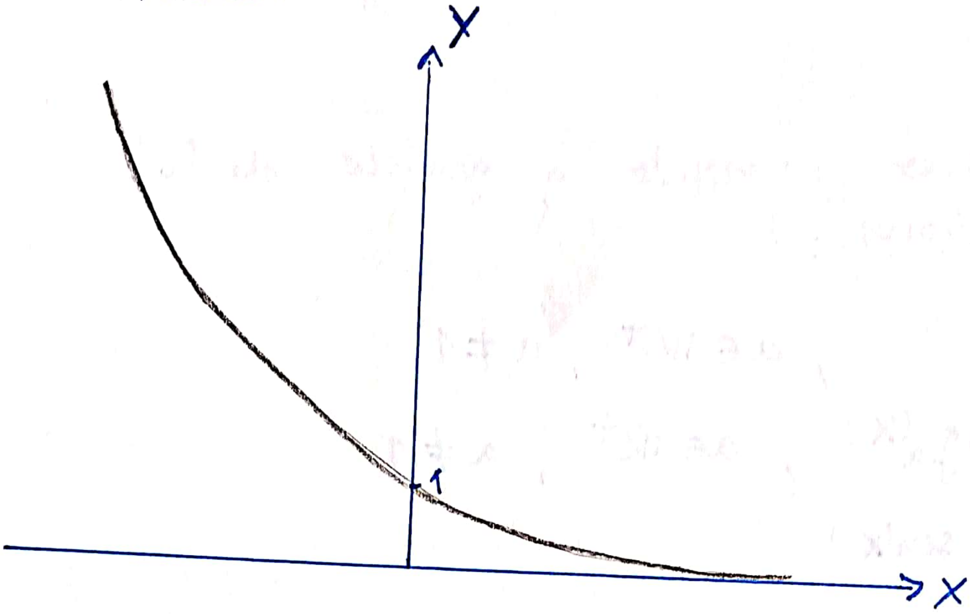
$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por: $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

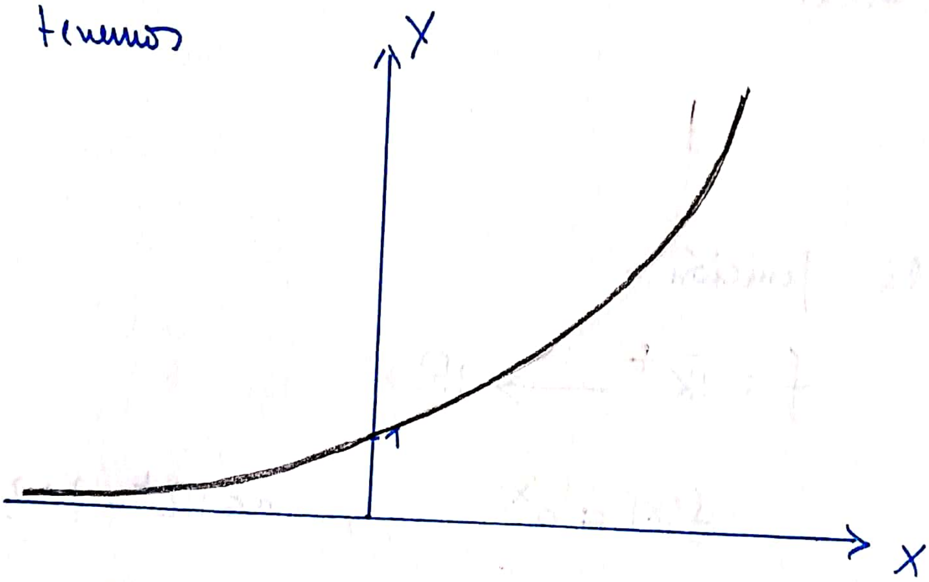
dom $f = \mathbb{R}$

rec $f = \mathbb{R}^+$

Si $0 < a < 1$ tenemos



Si $a > 1$ tenemos



(b) Se define la función:

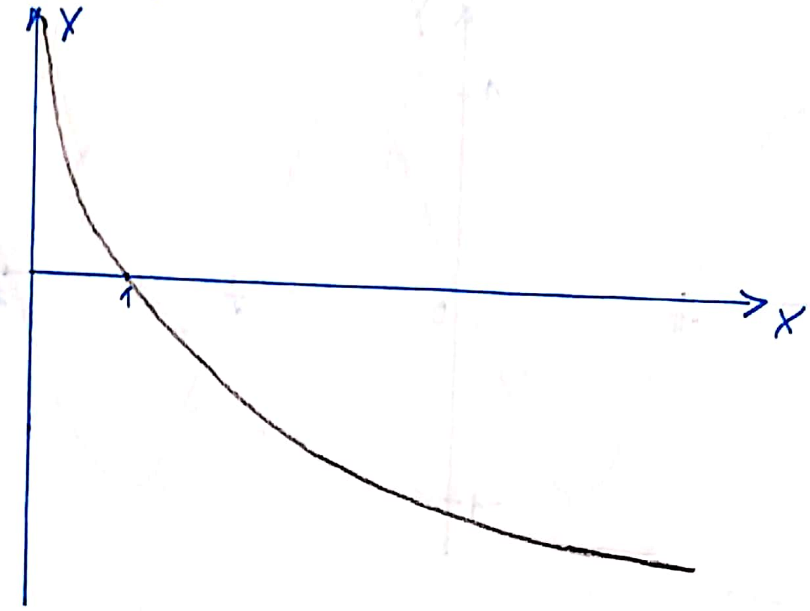
$$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por: $g(x) = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

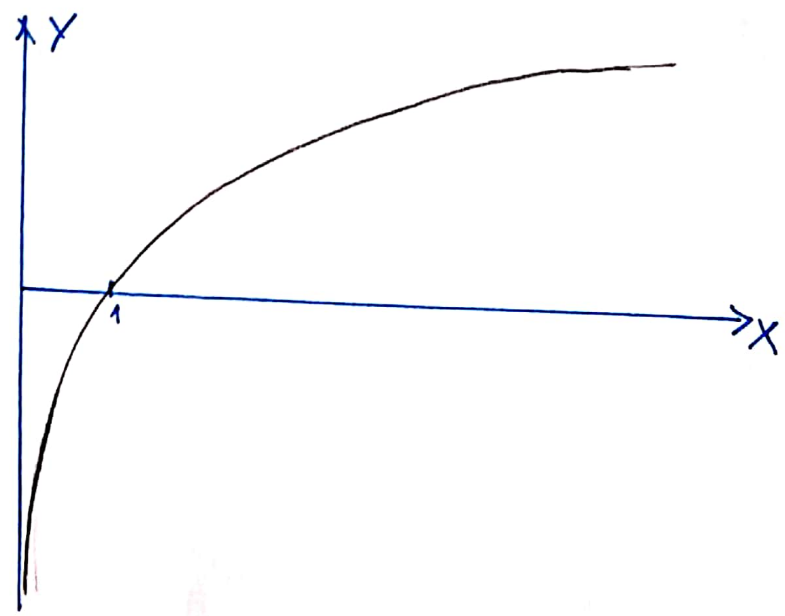
$\text{dom } g = \mathbb{R}^+$

$\text{rec } g = \mathbb{R}$

Si $0 < a < 1$ tenemos



Si $a > 1$ tenemos



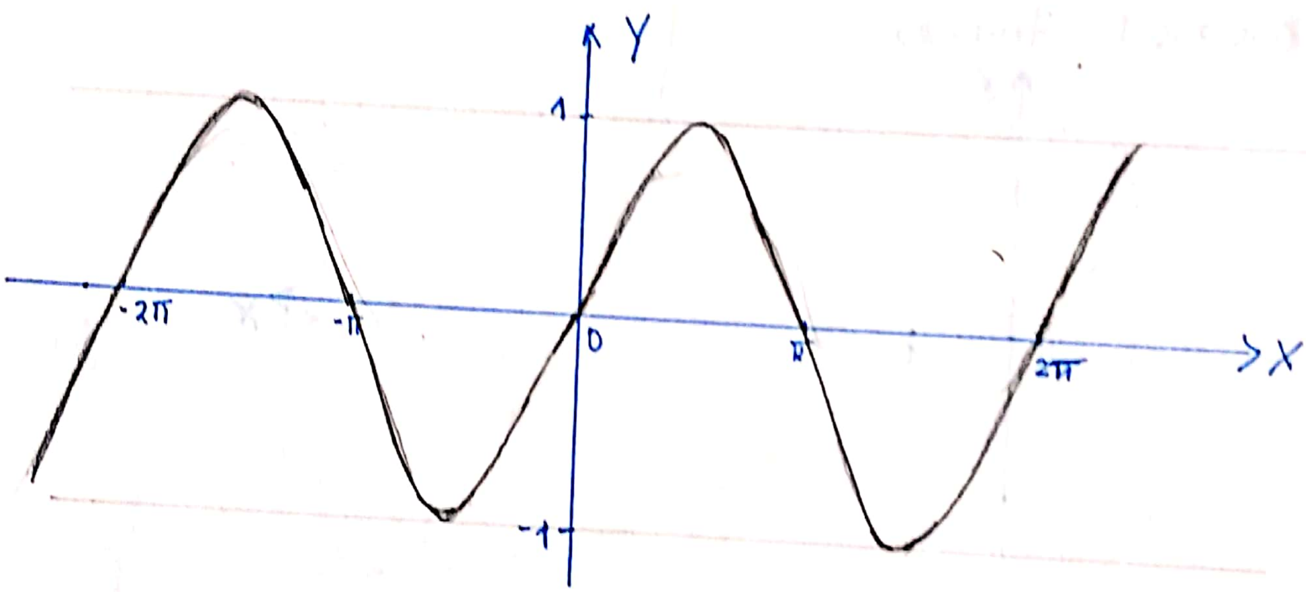
(c) Se define la función:

$$s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

dada por: $s(x) = \text{sen}(x)$

dom $s = \mathbb{R}$

rec $s = [-1, 1]$



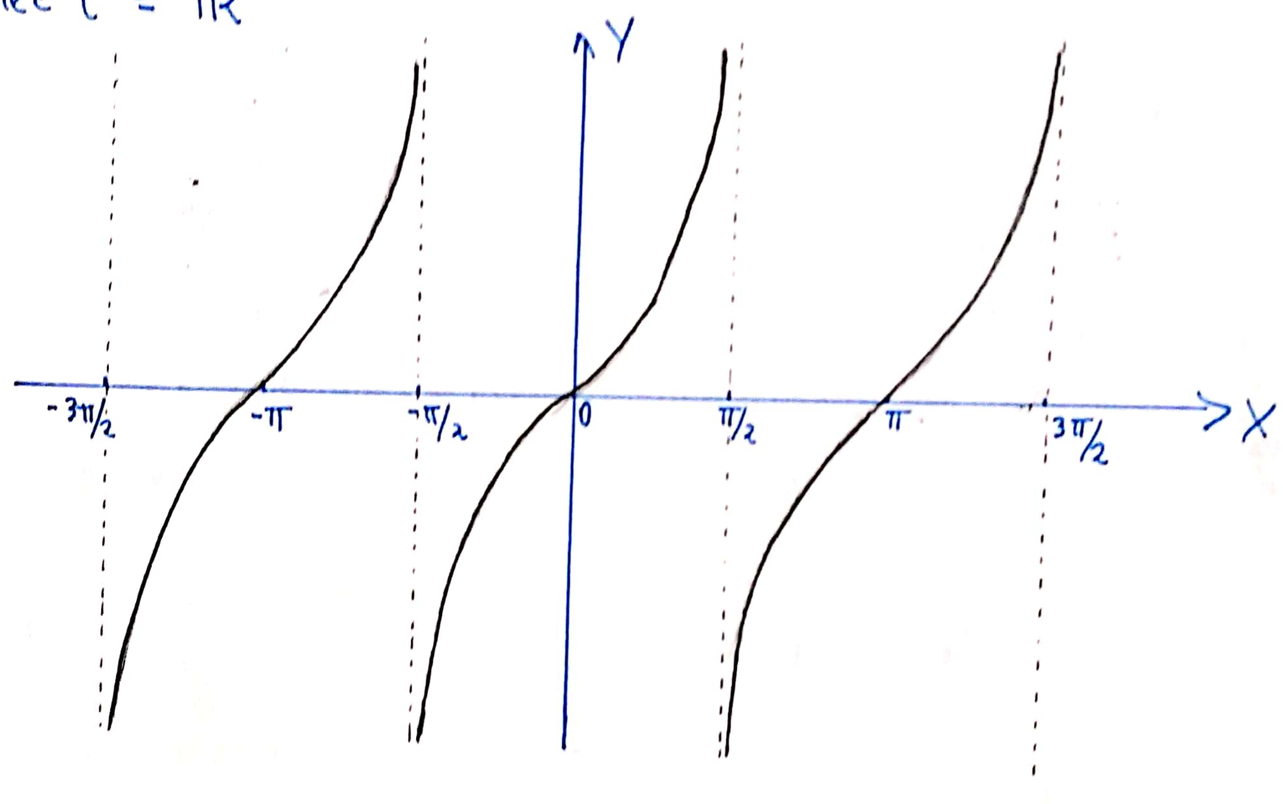
(d) Se define la función:

$$t : \mathbb{R} - \{(2n-1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por: $t(x) = \tan(x)$

$\operatorname{dom} t = \mathbb{R} - \{(2n-1)\pi/2 : n \in \mathbb{Z}\}$

$\operatorname{rec} t = \mathbb{R}$



2 Relaciones y Funciones

1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$. Dé un ejemplo de:
   (a) Una relación en A refleja pero no transitiva.
   (b) Una relación en A refleja y simétrica pero no transitiva.
   (c) Una relación en A simétrica y transitiva pero no refleja.
   (d) Una relación en A refleja y transitiva pero no simétrica.
   (e) Una relación en A de equivalencia y muestre la partición que ella genera en A.

$R_1 = \{(a,a),(b,b)\}$

2. Demuestre que si una relación R es transitiva entonces la relación R^{-1} también es transitiva.
3. Demuestre detalladamente que la relación de congruencia módulo n, para un entero positivo n, es relación de equivalencia.
4. Determine si es de equivalencia la relación en $\mathcal{P}(A)$, para $A \neq \varnothing$, dada por A relacionado con B cuando $(A \cap B) = \varnothing$.
5. Sea R la relación en $\mathcal{P}(K)$, con $K \neq \varnothing$, dada por

$$A\,R\,B \text{ exactamente cuando } A \cap B = A \text{ y } A \cup B = A, \qquad \text{donde } A \subseteq K \text{ y } B \subseteq K$$

   Demuestre que R es relación de equivalencia en $\mathcal{P}(K)$.
6. Sea R una relación en $X \times X$. Muestre que R es simétrica si y sólo si $R = R^{-1}$.
7. Se define el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$. Determine todas las particiones del conjunto A y las relaciones de equivalencias correspondientes.
8. Determine cuales de la siguiente relaciones son funciones, obteniendo en esos casos también sus dominios y recorridos (imagenes):
   (a) $R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a^2 = b\}$
   (b) $R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a = b^2\}$
   (c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 + y^2 = 10\}$
   (d) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x + y = 8\}$
   (e) $R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : xy = 24\}$

$xRy \Rightarrow yRx$
$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
$\Rightarrow xRx$

9. Determine todas las funciones posibles de $A = \{1, 2, 3\}$ en $B = \{5, 6\}$.
10. Determine la composición $f \circ g$.
    (a) Si $g : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{Z}$ y $f : \{a \in \mathbb{Z} : 1 \leq a \leq 15\} \to \mathbb{Z}$ están definidas por $g(x) = 2x + 1$ y $f(x) = 1 - 3x$.
    (b) Si $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ y $f : \{a \in \mathbb{Z} : 1 \leq a \leq 15\} \to \mathbb{Z}$ están dadas por $g(x) = 2x + 1$; y $f(x) = 1 - 3x$.
    (c) Si $g : \{a \in \mathbb{Q} : \frac{1}{2} < a \leq \frac{10}{3}\} \to \mathbb{Q}$ y $f : \{x \in \mathbb{Q} : 2 \leq x \leq 5\} \to \mathbb{Q}$ son definidas por $g(x) = 2 + \frac{1}{x}$ y $f(x) = 1 + \frac{3}{x}$.
11. Considere la función $f : A \to B$ y $C \subset A$. Calcule $f[C] := \{y \in B : \text{ existe } x \in C \text{ con } y = f(x)\}$ si:
    (a) $C = \{1, 2\}$, $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dada por $f(x) = x + 2$.
    (b) $C = \{x \in \mathbb{Z} : -7 \leq x < 5\}$, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 3x - 5$.
    (c) $C = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x \leq 56\}$, $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 5 - 3x$.
    (d) $C = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x < 2\}$, $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ dada por $f(x) = 3 + \frac{5}{x+1}$.

Consultas: $f^{-1}[B_1]$, donde $f : A \to B$ y $B_1 \subseteq B$,
resp. ejercicio 12.

12. Considere la función $f : A \to B$ y $D \subseteq B$. Calcule $f^{-1}[D] = \{x \in A : f(x) \in D\}$ si:

(a) $D = \{2, 3, 4\}$, $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dada por $f(x) = x + 2$
(b) $D = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x \leq 6\}$, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 2x + 5$
(c) $D = \{x \in \mathbb{Z}^+ : 1 < x \leq 5\}$, $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 3 - x$
(d) $D = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x < 2\}$, $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ dada por $f(x) = 3 + \frac{5}{x+1}$

$(x,y) \in R^{-1} \Rightarrow (x,y) \in R$

13. Clasifique las siguientes funciones en inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas:

(a) $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 5x + 4$.
(b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ definida por $f(x) = x^2 + 1$.
(c) $f : \mathbb{Q}^+ \to \{r \in \mathbb{Q} : r < 1\}$ dada por $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$.
(d) $f : \mathbb{Q}^+ \to \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 1\}$ dada por $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

14. Demuestre que si $C_1 \subseteq A$ y $C_2 \subseteq A$ y $f : A \to B$, entonces:

(a) Si $C_1 \subseteq C_2$ implica $f[C_1] \subseteq f[C_2]$
(b) $f[C_1 \cap C_2] \subseteq f[C_1] \cap f[C_2]$. ¿Bajo qué condiciones ocurre la igualdad? Justifique.
(c) $f[C_1 \cup C_2] = f[C_1] \cup f[C_2]$

15. Demuestre que si $D_1 \subseteq B$ y $D_2 \subseteq B$ y $f : A \to B$, entonces:

(a) $D_1 \subseteq D_2$ implica $f^{-1}[D_1] \subseteq f^{-1}[D_2]$
(b) $f^{-1}[D_1] \subset f^{-1}[D_2]$ implica $(D_1 \cap Rec(f)) \subset (D_2 \cap Rec(f))$
(c) $f^{-1}[D_1 \cap D_2] = f^{-1}[D_1] \cap f^{-1}[D_2]$
(d) $f\left[f^{-1}[D_1]\right] \subseteq D_1$.
(e) $f\left[f^{-1}[D_1]\right] = (D_1 \cap Rec(f))$

16. Demuestre:

(a) La composición de funciones inyectivas es inyectiva.
(b) Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son sobreyectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es sobreyectiva.
(c) Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son biyectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es biyectiva.

17. Dada la función $f : A \to B$, pruebe que

(a) Para todo $X, Y \subset A$ se tiene que $f(X) - f(Y) \subset f(X - Y)$.
(b) Si f es inyectiva entonces $f(X) - f(Y) = f(X - Y)$ para cualesquiera $X, Y \subset A$.
(c) $f^{-1}(f(X)) \supset X$ para todo $X \subset A$.
(d) f es inyectiva si y sólo $f^{-1}(f(X)) = X$ para todo $X \subset A$.
(e) Para todo $Z \subset B$ se tiene $f(f^{-1}(Z)) \subset Z$.
(f) f es sobreyectiva si y sólo si $f(f^{-1}(Z)) = Z$ para todo $Z \subset B$.

$y \in B \ \exists x \in A \ f(x) = y$
$\forall x \in A \ f(x) \neq y$

18. Muestre que una función $f : A \to B$ es inyectiva si y sólo si $f(A) - f(X) = f(A - X)$ para todo $X \subset A$.

$y \in f(X) - f(Y)$

$y \in f(X) \wedge y \notin f(Y)$

$\Rightarrow \exists\, a \in X \,/\, f(a) = y \ \& \ \forall\, b \in Y \ f(b) \neq y$

$\Rightarrow \quad a \notin Y \ \& \ a \in X$

$\Rightarrow \quad y = f(a) \quad a \in X - \cancel{Y}$

$\Rightarrow \quad y \in f(X - Y)$

k) $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\, dx$

Usamos sustitución trigonométrica

$w = \operatorname{sen} x \Rightarrow dw = \cos x\, dx \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos x} dw$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x} dx = \int \cos^3 x \frac{1}{w^4} \frac{1}{\cos x} dw = \int \cos^2 x \frac{1}{w^4} dw = \int \frac{1-w^2}{w^4} dw$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x} dx = -\frac{1}{3} w^{-3} + w^{-1} + C = \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x} + C$$

---

l) $\int \frac{1}{\sec x \tan x} dx$

$$\int \frac{1}{\sec x \tan x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} dx$$

Sustitución $y = \operatorname{sen} x$

$y = \cos x \Rightarrow dy = -\operatorname{sen} x\, dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} dy$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} dx = -\int \frac{-y^2}{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\operatorname{sen} x} dy = -\int \frac{-y^2}{1-y^2} dy = \int \frac{1-y^2-1}{1-y^2} dy$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} dx = \int dy - \int \frac{-1}{1-y^2} dy = \int dy - \left[\int \frac{1-y}{1-y^2} dy + \int \frac{y}{1-y^2} dy \right]$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} dx = y - \ln(1+y) + \frac{1}{2} \ln(1-y^2) + C$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} dx = \cos x - \ln(1+\cos x) + \frac{1}{2} \ln(1-\cos^2 x) + C$$

m) $\int \operatorname{sen}^2(\pi x)\cos^4(\pi x)\,dx$

$$\int \operatorname{sen}^2(\pi x)\cos^4(\pi x)\,dx = \int \left(1-\cos^2(\pi x)\right)\cos^4(\pi x)\,dx$$

$$\int \operatorname{sen}^2(\pi x)\cos^4(\pi x)\,dx = \int \cos^4(\pi x)\,dx - \int \cos^6(\pi x)\,dx$$

Por un lado

$$\int \cos^4(\pi x)\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2\pi x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2\pi x+\cos^2(2\pi x)\right)dx$$

$$\int \cos^4(\pi x)\,dx = \frac{1}{4}\left[x+\frac{2}{2\pi}\operatorname{sen}(2\pi x)+\int \frac{1+\cos(4\pi x)}{2}\,dx\right]$$

$$\int \cos^4(\pi x)\,dx = \frac{1}{4}\left[x+\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(2\pi x)+\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{4\pi}\operatorname{sen}(4\pi x)\right]\right]$$

Por otro lado

$$\int \cos^6(\pi x)\,dx = \int \left(\cos^2(\pi x)\right)^3 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2\pi x}{2}\right)^3 dx$$

$$\int \cos^6(\pi x)\,dx = \frac{1}{8}\int \left(1+3\cos 2\pi x+3\cos^2 2\pi x+\cos^3 2\pi x\right)dx$$

$$\int \cos^6(\pi x)\,dx = \frac{1}{8}\left[x+\frac{3}{2\pi}\operatorname{sen} 2\pi x+3\int \frac{1+\cos 4\pi x}{2}\,dx+\int \cos^3 2\pi x\,dx\right]$$

$$\int \cos^6(\pi x)\,dx = \frac{1}{8}\left[x+\frac{3}{2\pi}\operatorname{sen} 2\pi x+\frac{3}{2}\left[x+\frac{1}{4\pi}\operatorname{sen} 4\pi x\right]+\int \cos^3 2\pi x\,dx\right]$$

Además:

$$\int \cos^3(2\pi x)dx$$

Usamos sustitución $u = \text{sen}\, 2\pi x$

$$u = \text{sen}\, 2\pi x \Rightarrow du = 2\pi \cos(2\pi x)dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2\pi\cos(2\pi x)}du$$

$$\int \cos^3(2\pi x)dx = \int \cos^3(2\pi x)\frac{1}{2\pi\cos(2\pi x)}du = \frac{1}{2\pi}\int \cos^2(2\pi x)du = \frac{1}{2\pi}\int(1-u^2)du$$

$$\int \cos^3(2\pi x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[u - \frac{u^3}{3}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\text{sen}\, 2\pi x - \frac{1}{3}\text{sen}^3 2\pi x\right]$$

$$\therefore \int \text{sen}^2 \pi x \cos^4 \pi x\, dx = \frac{1}{4}\left[x + \frac{1}{\pi}\text{sen}\, 2\pi x + \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{4\pi}\text{sen}\, 4\pi x\right]\right]$$

$$-\frac{1}{6}\left[x + \frac{3}{2\pi}\text{sen}\, 2\pi x + \frac{3}{2}\left[x + \frac{1}{4\pi}\text{sen} 4\pi x\right] + \frac{1}{2\pi}\left[\text{sen}\, 2\pi x\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{3}\text{sen}^3 2\pi x\right]\right] + C$$

---

n) $\int \sec^2(3x)\tan^2(3x)\,dx$

Usando sustitución trigonométrica

$$u = \tan 3x \Rightarrow du = 3\sec^2 3x\, dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3\sec^2 3x}du$$

$$\int \sec^2(3x)\tan^2(3x)dx = \int \sec^2(3x)\tan^2(3x)\frac{1}{3\sec^2 3x}du$$

$$\int \sec^2(3x)\tan^2(3x)dx = \frac{1}{3}\int u^2 du = \frac{1}{9}u^3 + C = \frac{1}{9}\tan^3 3x + C$$

o) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos x}\, dx$

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos x}\, dx = \int \frac{1 - 2\cos^2 x}{\cos x}\, dx = \int \frac{1}{\cos x}\, dx - 2\int \cos x\, dx$$

Ocupando resultado del ejercicio 49.l tenemos

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos x}\, dx = \ln\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right) - 2\operatorname{sen} x + C$$

---

p) $\displaystyle\int \sec^2 u \sqrt{\tan u}\, du$

por consecuencia de la regla de la cadena

$$\int \sec^2 u \sqrt{\tan u}\, du = \frac{2}{3}(\tan u)^{3/2} + C$$

---

q) $\displaystyle\int \cos^7 x\, dx$

Vamos a calcular la fórmula de reducción de $I_n = \int \cos^n x\, dx$, $n \in \mathbb{N}$

$$\int \cos^n x\, dx = \int \cos x \cos^{n-1} x\, dx$$

$$\int \cos^n x\, dx = \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + \int (\operatorname{sen}^2 x)(n-1)\cos^{n-2} x\, dx$$

$$\int \cos^n x\, dx = \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\, dx$$

$$\int \cos^n x\, dx = \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1)\int (\cos^{n-2} x - \cos^n x)\, dx$$

$$I_n = \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} + (1-n) I_n$$