$\Rightarrow$ m

26 de Abril

(a) $\Sigma \models \varphi \Rightarrow \Sigma \vdash \varphi$ (es consecuencia semántica) se puede demostrar)

$\Sigma \nvdash \varphi \Rightarrow \Sigma \nvdash \varphi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es consistente

$\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es consistente.

ya que si no

$\Sigma \cup \neg\varphi \vdash \neg(p \to p)$
$\Sigma \vdash \neg\varphi \to \neg(p \to p)$
$\Sigma \vdash (p \to p) \to \varphi$ luego φ es demostrable y

Teorema / $\mathit{4)}$ contable

si Δ es consistente $\Rightarrow$ Δ es satisfacible

Demostración: $\leftarrow$ es contable si es contable

$\langle \theta_i \mid i \in \omega \rangle$ una enumeración de $F'(P)$ $\leftarrow$ contable

sea $\Sigma_0 = \Delta$

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\theta_n\} & \text{si es consistente} \\ \Sigma_n \cup \{\neg\theta_n\} & \text{si aún es consistente} \end{cases}$$

Lema:

si Δ consistente, φ fórmula ($\varphi \in F'$)

$\Rightarrow$ $\Delta \cup \{\varphi\}$ o $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ es consistente (o ambos)

si ambos fueran inconsistentes

$\Delta \cup \varphi \vdash \neg(p \to p)$, $\Delta \cup \neg\varphi \vdash \neg(p \to p)$

$\Rightarrow$ $\Delta \vdash \varphi \to \neg(p \to p)$, $\Delta \vdash \neg\varphi \to \neg(p \to p)$

(1) (2)

Sabemos

$(\alpha \to \mu) \to (\beta \to \mu) \to (\alpha \vee \beta) \to \mu$

$\alpha \to \mu,\ \beta \to \mu \vdash (\alpha \vee \beta) \to \mu$

Luego por (1), (2)

$\Delta \vdash (\varphi \vee \neg\varphi) \to \neg(p \to p)$

$\Delta \vdash (p \to p) \to \neg(\varphi \vee \neg\varphi)$

$\Delta \vdash \neg(\varphi \vee \neg\varphi)$

~~Luego Σ_{n+1} está bien definido.~~

sea $\Sigma_i = \bigcup \Sigma_n$

Σ_i es maximal consistente

esto es si $\varphi \in F^1$ $\Rightarrow$ $\varphi = \theta_r$ algún r.

o bien $\theta_r \in \Sigma_{r+1}$ o bien $\neg\theta_r \in \Sigma_{r+1}$

$\overset{\shortparallel}{\neg\varphi}$

Luego sea

$v : P \to \{0,1\}$ con $v(p) = \begin{cases} 1 & p \in \Sigma_i \\ 0 & p \notin \Sigma_i \end{cases}$

$\bar{v}_s(\varphi) = 1 \iff \varphi \in \Sigma_i$ (por inducción sobre la complejidad de la fórmula)

Luego Δ es satisfacible

Introducción a la lógica matemática

E. Mendelson

Demostración de Kalmar

Integrante lógica algebraica

Otra demostración del

Δ es consistente, y es maximal entre los

si no

$P = \{ \Sigma \supseteq \Delta \mid \Sigma$ es consistente $\}$

$\langle P, \subseteq \rangle$ conjunto ordenado (Zorn)

si Σ_i con $i \in I$ una cadena

sea $\Delta \subseteq \bigcup \Sigma_i$ es consistente

si no lo fuera tengo una demostración de algo falso

pero las demostraciones tienen finitos pasos luego

esa demostración estaría en un Σ_i $\Rightarrow$※

luego hay un conjunto consistente maximal //

luego tenemos $\Sigma \models \varphi \iff \Sigma \vdash \varphi$

Teorema de compacidad

si $\Sigma \subseteq Form(P)$ y para todo $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$

Σ_0 finito es satisfacible

$\Rightarrow \Sigma$ es satisfacible

Demostración si Σ no es satisfacible

$\Rightarrow \Sigma$ es inconsistente

$\Rightarrow \Sigma \vdash \neg(p \to p)$

hay una demostración de eso

$\Sigma_0 \vdash \neg(p \to p)$

luego Σ_0 es inconsistente, luego es insatisfacible $\Rightarrow$※

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS /MAYO 2014

CURSO : LÓGICA ALGEBRAICA ABSTRACTA
TRADUCCIÓN : ABSTRACT ALGEBRAIC LOGIC
SIGLA : MAT
CREDITOS :
MODULOS :
REQUISITOS :
EQUIVALENCIA : SIN EQUIVALENCIAS
CARACTER : OPTATIVO
DISCIPLINA : MATEMÁTICA

I. DESCRIPCION

En este curso se establecen las conexiones entre sistemas deductivos, o lógicas, y familias de álgebras a través de las teorías desarrolladas en la última parte del siglo pasado. El mayor interés de este tema es establecer una relación entre ambos campos que permita traspasar los resultados de uno (lógica) al otro (álgebra) y viceversa.

II. OBJETIVOS

1. Adquirir las herramientas algebraicas básicas para analizar sistemas deductivos.
2. Comprender los sistemas deductivos desde una perspectiva de su estructura general.
3. Conocer áreas en las que se desarrolla la investigación acerca del álgebra de la lógica.

III. CONTENIDOS

1. Introducción al álgebra Universal
1.1 Álgebras
1.2 Las construcciones básicas. Variedades
1.3 Productos subdirectos. Teorema de Birhhoff
1.4 Álgebras libres

2. Sistemas Deductivos
2.1 Lógica. Sistemas deductivos.
2.2 Lógica ecuacional
2.3 Semáticas algebraicas
2.4 Semáticas matriciales

3. Álgebrización de Sistemas Deductivos
3.1 Método de Lindenbaum-Tarski
3.2 Método de Rasiowa-Sikorski
3.3Método de Blok-Pigozzi
3.4 Otros desarrollos

4. Aplicaciones
4.1 Lógica clásica
4.2 Lógica intuicionista
4.3 Lógica multivaluada
4.4 Otros ejemplos

VI. METODOLOGIA

Las clases se desarrollarán a través de exposiciones a cargo del profesor y de los alumnos.

VII. EVALUACION

Se evalúa a través de tareas, interrogaciones parciales y un examen.

VIII. BIBLIOGRAFIA

Bibliografía Mínima:

Blok, W. J. and Pigozzi, D., *Algebraizable Logics*, Memoirs of the A.M.S., 77 Nr. 396 (1989).

Burris, S., and Sankappanavar, H. P., *A Course in Universal Algebra,* Springer--Verlag, New York, 1981.

Czelakowski, J., *Protoalgebraic Logics*, Kluwer Academic Publishers, 2001.

Bibliografía Complementaria:

Herrmann, B., *Equivalential and Algebraizable Logics*, Studia Logica 57 (1997), 419--436.

Herrmann, B., *Characterizing Equivalential and Algebraizable Logics and Definability by the Leibniz Operator*, Studia Logica 58 (1997), 305--323.

Rasiowa, R., *An Algebraic Approach to Non--Classical Logics*, North--Holland Pub. Co., Amsterdam, 1974.

Rasiowa, R. and Sikorski, R., *The Mathematics of Metamathematics*, Polska Akademia Nauk, Warsawa, 1963.

Tarski, A., Logic, *Semantics, and Metamathematics, papers from 1923 to 1938*,
Hackett Pub. Co., Indianapolis, Indiana, 1983.

la correspondencia

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \longleftrightarrow \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots\}$$

establece una biyección entre B_n y D_n, los D_n son disjuntos, los B_n también y $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ luego D es equivalente a $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$, una unión numerable de conjuntos numerables.

Sea $u = \{\xi_k\} \in l_1$ arbitrario, sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|$. Como $u \in l_1$ tenemos que la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge a un límite S, lo cual, dado $\epsilon > 0$, implica la existencia de un valor N tal que $S - S_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k| < \frac{\epsilon}{2}$.

Puesto que $\mathbb{C} = \overline{A}$, para cada $k = 1, 2, \ldots, N$ existe $\xi'_k \in A$ tal que $|\xi_k - \xi'_k| < \frac{\epsilon}{2N}$. Si llamamos u' a la sucesión

$$u' = \{\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n, 0, 0, \ldots\} \in D$$

tenemos que

$$\|u - u'\|_1 = \sum_{k=1}^{N} |\xi_k - \xi'_k| + \sum_{k=1}^{N} |\xi_k| < \sum_{k=1}^{N} \frac{\epsilon}{2N} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

luego para todo $u \in l_1$ y todo $\epsilon > 0$ hay $u' \in D$ tal que $\|u - u'\|_1 < \epsilon$, esto es, $\overline{D} = l_1$.

Por lo tanto, l_1 es separable.

Teorema 2.12 *Sea X un espacio de Banach. Si X^* es separable entonces X es separable.*

Este teorema demuestra que si $l_\infty^* = l_1$ entonces l_∞ sería separable, y dado que no es separable se llegaría a una contradicción.

Demostración: Si X^* es separable hay un subconjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X^*$ numerable y denso.

$\|f_n\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f_n(x)|}{\|x\|}$ luego hay $x_n \in X$ tal que

$$\frac{|f_n(x_n)|}{\|x_n\|} \geq \frac{1}{2}\|f_n\| \quad \Rightarrow \quad \left| f_n\left(\frac{x_n}{\|x_n\|\|f_n\|}\right)\right| \geq \frac{1}{2}$$

Sea $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \frac{1}{\|f_n\|}$, entonces $|f_n(y_n)| \geq \frac{1}{2}$ y $\|y_n\| = \frac{1}{\|f_n\|}$ para cada n.

Sea $A_n = \{\lambda y_n : \lambda \in A\}$. Llamemos $B_n = \{\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n : \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in A\}$.

la función $\Phi : \prod_{i=1}^{n} A_i \to B_n$ dada por

$$\Phi(\lambda_1 y_1, \lambda_2 y_2, \ldots, \lambda_n y_n) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_n y_n$$

es sobreyectiva. Como $\prod_{i=1}^{n} A_i$ es numerable (es producto finito de numerables) se tiene que cada B_n es numerable.

Sea $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, D es numerable. Sea $S = < y_1, y_2, \dots > = \{\sum_{k=1}^{n} \nu_k y_k : \nu_k \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de los vectores y_k. S es un subespacio vectorial de X y $S \subset \overline{D}$. En efecto, si $x = \sum_{k=1}^{n} \nu_k y_k \in S$, puesto que $\nu_k \in \mathbb{C} = \overline{A}$, existe, para cada $\epsilon > 0$ y cada $k = 1, 2, \dots, n$, un $\lambda_k \in A$ tal que

$$|\lambda_k - \nu_k| < \frac{\epsilon}{\max\limits_{k=1,\dots,n} \|y_k\|} \frac{1}{n}$$

luego $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k \right\| < \epsilon$, lo cual demuestra que todo elemento de S tiene un elemento de D arbitrariamente cercano a él.

X es separable porque D es numerable y denso en X. De no ser así habría $x_0 \notin \overline{D}$ y como $S \subset \overline{D} \Rightarrow \overline{S} \subset \overline{D} \Rightarrow x_0 \notin \overline{S}$. Por el teorema de Hahn - Banach (ver sección siguiente) habría $f \in X^*$, $f \neq 0$ tal que $f \equiv 0$ en $\overline{S}$ y $f(x_0) \neq 0$. En particular se tendría que $f(y_n) = 0$ para todo n.

Como $f \in X^* = \overline{\{f_n : n \in \mathbb{N}\}}$ habría n tal que $\|f - f_n\| \leq \frac{\|f\|}{4}$. De este modo

$$|f(y_n) - f_n(y_n)| \leq \|f - f_n\| \|y_n\| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq |f_n(y_n)| \leq \|f - f_n\| \frac{1}{\|f_n\|}$$

Luego

$$\|f - f_n\| \geq \frac{\|f_n\|}{2} \geq \frac{1}{2}(\|f\| - \|f - f_n\|) \geq \frac{3}{8}\|f\|$$

de lo cual se obtiene una contradicción puesto que $\|f\| > 0 \Rightarrow \frac{3}{8}\|f\| > \frac{1}{4}\|f\|$ ∎

2.7 Teorema de Hahn - Banach

Sea X un conjunto no vacío. Sea $\preceq$ un orden parcial en X (relación refleja, antisimétrica y transitiva). $(X, \preceq)$ se dice parcialmente ordenado. Un orden parcial $\preceq$ se dice lineal si cada vez que $x, y \in X$ entonces $x \preceq y$ o bien $y \preceq x$.

Principio Maximal de Haussdorff: Sea $(X, \preceq)$, $X \neq \emptyset$ entonces existe un subconjunto $S \subset X$ que es maximal y que está linealmente ordenado, i.e.

- S está linealmente ordenado por $\preceq$
- Si $S \subset T \subset X$ y T está linealmente ordenado por $\preceq$ entonces $S = T$.

Teorema 2.13 (Teorema de Hahn - Banach) *Sea X un espacio vectorial real. Sea $\rho : X \to \mathbb{R}^1$ tal que $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, $\rho(\alpha x) = \alpha\rho(x)$ $\alpha \geq 0$.*

Ayudantia $N2$ Análisis II
José Torres

1. (Problema Pendiente)Sea $T : [0, \sqrt{2}] \to \{t(1,1) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1]\}$ dada por $T(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1)t$ y defina la medida $\mu(A) := \lambda(T^{-1}(A))$. Calcule $\overline{D\mu}$ y $\underline{D\mu}$.

2. Sean μ y ν medidas finita y σ-finita respectivamente en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Suponga que $\mu \ll \nu$ y $\nu \ll \mu$, y sea f la derivada de Radon-Nikodym de μ con respecto $\mu + \nu$. Demeustre que $0 \leq f < 1$ ν-c.t.p y calcule $\frac{d\mu}{d\nu}$. ¿Es necesaria la hipotesis $\nu \ll \mu$?

3. Sea f una función integrable en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda)$. Calcule

$$\frac{d}{dr} \int_{B_r(0)} f(x) d\lambda(x) .$$

4. Sea A un conjunto medible con medida positiva y defina

$$A' := \left\{ x \in A : \lim_{r \to 0} \frac{\lambda(A \cap B_r(x))}{\lambda(B_r(x))} = 1 \right\} .$$

¿Es A' abierto en A?

5. Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz y $A \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto de medida 0. Muestre que $f(A)$ posee medida 0.

6. Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función localmente Lipschitz y sea $Z = \{x \in \mathbb{R}^m : f(x) = 0\}$. Muestre que $Df(x) = 0$ para casi todo punto en Z.

Sol: Basta demostrar lo anterior para $n = 1$ (ejercicio).
Por hipotesis tenemos que f es localmente diferenciable para casi todo punto en $\mathbb{R}^m$. Luego escogemos $x_0 \in Z$ tal que $Df(x_0)$ existe y que

$$\lim_{r \to 0} \frac{\lambda(Z^c \cap B_r(x_0))}{\lambda(B_r(x_0))} = 0 .$$

Como $Df(x_0)$ existe, se tiene que para los $y \to x_0$,

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x_0) + \langle Df(x_0), (y - x_0) \rangle_{\mathbb{R}^m} + o(\|y - x_0\|_{\mathbb{R}^m}) \\ &= \langle Df(x_0), (y - x_0) \rangle_{\mathbb{R}^m} + o(\|y - x_0\|_{\mathbb{R}^m}) . \end{aligned}$$

Supongamos por contradicción que $Df(x_0) = a \neq 0$, y definimos

$$S := \left\{ v \in \partial B_1(0) \ : \langle a, v \rangle \geq \frac{1}{2} |a| \right\} .$$

Notar que para cada $v \in S$ y $t > 0$, tomando $y = x_0 + tv$ en lo anterior nos queda que para los $|t| \to 0$,

$$\begin{aligned} f(x_0 + tv) &= \langle a, tv \rangle + o(|t|) \\ &\geq \frac{t\,|a|}{2} + o(|t|) . \end{aligned}$$

Por tanto existe un t_0 tal que $f(x_0 + tv) > 0$ para todo $t < t_0$ y $v \in S$. Esto quiere decir que $\frac{1}{3}B_r(x_0) \setminus \{x_0\} \subset Z^c$ para $r < t_0$, pues el ángulo entre $v \in S$ y a está entre $\left[\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right]$.

Por otro lado existe r_0 tal que si $r < r_0$, se tendrá que

$$\lambda\left(Z^c \cap B_r(x_0)\right) < \frac{1}{4^m}\lambda\left(B_r(x_0)\right) \ .$$

Luego tomando $r < \max\{t_0, r_0\}$, se tendrá que $\lambda(B_r(x_0)) < \left(\frac{3}{4}\right)^m \lambda\left(B_r(x_0)\right)$ teniendo así una contradicción. Por tanto $Df(x_0) = 0$.

Ayudantía N4
Prof: Duvan Henao
Ayu: José Torres

1. (a) ¿Existe una medida de borel con signo μ en el $[0,1]$ tal que

$$p'(0) = \int_{[0,1]} p(x)d\mu(x) \, ,$$

para todo polinomio $p(x)$ con coeficientes reales de orden a lo más 19?

<u>Sol:</u> Sea $p(x) = \sum_{i=0}^{19} \alpha_i x^i$ un polinomio de orden 19 con coeficientes reales. Si existe una medida μ que satisface el enunciado tendremos que

$$\alpha_1 = \sum_{i=0}^{19} \alpha_i \int_{[0,1]} x^i d\mu(x) \, ,$$

para toda 20-tupla $(\alpha_0, \dots, \alpha_{19})$. Esto implica que

$$\int_{[0,1]} x^i d\mu(x) = \begin{cases} 0, & i \neq 1 \\ 1, & i = 1 \end{cases} .$$

En este caso estamos pensando en una medida discreta del tipo

$$\mu = \sum_{i=0}^{19} a_i \delta_{x_i} \, ,$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ y $x_i \in [0,1]$. De esta forma, tenemos la condición para los x_i dada por

$$\sum_{j=0}^{19} a_i x_i^j = \delta_1^i \, , \forall \, i = 0, \dots, 19 \, .$$

Por ejemplo, tomando $x_j = 2^{-j}$, el sistema anterior se traduce a resolver

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_1 & \dots & x_{19} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^{19} & \dots & x_{19}^{19} \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{19} \end{pmatrix} = (0,1,0,\dots,0) \, .$$

Pero esto es posible pues la matrix A es invertible.

(b) ¿Existe una medida de borel con signo μ en el $[0,1]$ tal que

$$p'(0) = \int_{[0,1]} p(x)d\mu(x) \, ,$$

para todo polinomio $p(x)$ con coeficientes reales?

Sol: Supongamos que existe dicha medida μ de borel con signo. Notar que

$$\mu([0,1]) = \int_{[0,1]} 1\, d\mu(x) = 0\,,$$

por tanto $\mu([0,1])^+ = \mu([0,1])^-$ y ambas son finitas. Con esto se tiene que $|\mu|\,([0,1]) < \infty$ y por tanto el mapa

$$p \to \int_{[0,1]} p d\mu$$

con dominio en el conjunto de polinomios se puede extender por densidad al espacio $C\,([0,1])$. Si consideramos

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}\,,$$

tal que f_n sea suave en $[0,1]$. Entonces tendremos que $|f_n'(0)| \leq 2\mu([0,1])^+\,||f_n||_\infty$, pero esto es una contradicción ya que $\lim_{n\to\infty} |f_n'(0)| = \infty$.

2. Sea

$$S := \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R})\ :\ |f(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} \text{ c.t.p.} \right\}.$$

Cual de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

(a) La clausura de S es compacta con la topología fuerte(norma).

Sol: Falsa. Considere

$$f_n = \frac{1}{x^2+1}\chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}\,.$$

Claramente $f_n \in S$, y notar que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_{n+k}(x)| &= \frac{1}{1+x^2}\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]\Delta[\frac{1}{n+k+1},\frac{1}{n+k}]} \\ &\geq \frac{n^2}{n^2+1}\,. \end{aligned}$$

Así vemos que no posee ninguna subsucesión de Cauchy.

(b) S es cerrado con la topología fuerte.

Sol: Verdadera. En efecto si $f_n \to f$ en $L^\infty(\mathbb{R})$ con $f_n \in S$, entonces

$$|f(x)| \leq ||f - f_m||_{L^\infty} + |f_m(x)| \leq ||f - f_m||_{L^\infty} + \frac{1}{1+x^2}\,.$$

(c) La clausura de S es compacta con la topología *-débil.

Sol: Verdadera. Utilizar Banach Alaoglu y que $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$.

3. Sea $(f_\alpha)_\alpha$ la familia de funciones dada por

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Encuentre todos los valores de α para que:

(a) f_α es continua.

So: Como $\left|x^\alpha \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|^\alpha$, tenemos que f_α es continua para los $\alpha > 0$.

(b) f_α es absolutamente continua.

Sol: Para los $x > 0$, tenemos que $f_alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\cos(x^{-1}) + x^{\alpha-2}\sin(x^{-1})$. Luego, por el teorema del valor medio

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C(\alpha) h\, |x|^{\alpha-2}.$$

Tomamos el caso $\alpha > 1$. Para cualquier partición $\mathcal{P} := \{0 = x_0 < x_1 \ldots < x_n = 1\}$, la variación de f estará acotada por

$$\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)x_i^{\alpha-2} \leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{[x_i,x_{i+1}]} x^{\alpha-2}dx \leq \int_{[} 0,1]x^{\alpha-2}dx < \infty.$$

Por tanto para los $\alpha > 1$ es de variación acotada.
Para los $\alpha \leq 1$, consideramos la partición

$$\mathcal{P} = \left\{0, \frac{1}{2\pi m}, \frac{1}{2\pi(m-1), \ldots, 1}\right\}.$$

(c) f_α es de variación acotada.

4. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $f \in L^p(X)$ para algún $p < \infty$. Muestre que

$$\lim_{p\to 0} ||f||_p = \exp\left(\int_X \ln(|f|)\, d\mu\right).$$

Sol: Supongamos primero que $f \geq 0$. Notar que por la desigualdad de Jensen con la funcion $\varphi(t) = e^{pt}$, se tiene que

$$||f||_p = \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X e^{p\ln(f)}d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\varphi\left(\int_X \ln(f)\, d\mu\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \exp\left(\int_X \ln(|f|)\, d\mu\right).$$

Por tanto $\liminf_{p\to 0} ||f||_p \geq \exp\left(\int_X \ln(|f|)\, d\mu\right)$.
Por otro lado, como

$$\ln(t) \leq c_p t^p, \ \forall t \geq 0,$$

se tiene que $\int\limits_X \ln(f)^+ d\mu < \infty$. Sea q tal que

$$\int\limits_X f^q \ln(f)^2 d\mu < \infty \,.$$

Recordar que

$$e^t \leq 1 + t + \frac{t^2}{2} e^t, \; t \geq 0$$
$$e^t \leq 1 + t + \frac{t^2}{2}, \; t < 0 \,.$$

Supongamos que $0 < p < q$. Si existe un conjunto de medida positiva donde $f = 0$, entonces por Hölder, $||f||_p \to 0$ cuando $p \to 0$. Si no, asumimos que $f > 0$ μ-c.t.p y sea g tal que $f = e^g$. Llamamos $E = \{g \geq 0\}$ y $F = E^c$. Luego,

$$\int\limits_E f^p d\mu = \int\limits_E e^{pg} d\mu \leq \int\limits_E \left(1 + pg + \frac{p^2 g^2}{2} f^p\right) d\mu \leq \int\limits_E \left(1 + pg + \frac{p^2 g^2}{2} f^q\right) d\mu$$

$$\int\limits_F f^p d\mu = \int\limits_F e^{pg} d\mu \leq \int\limits_F \left(1 + pg + \frac{p^2 g^2}{2}\right) d\mu \,.$$

Por tanto

$$||f||_p^p \leq 1 + p \int\limits_X \ln(f) d\mu + \frac{p^2}{2} \left(\int\limits_X (1 + f^q) \ln(f)^2 d\mu \right) \,.$$

Por tanto $\limsup\limits_{p\to 0} ||f||_p \leq \exp\left(\int\limits_X \ln(f) d\mu\right)$.

5. Sea $f \in L^\infty([0,1])$ con $||f||_\infty > 0$. Muestre que

$$\lim_{p\to\infty} \left(\frac{||f||_\infty}{||f||_p}\right)^p = \frac{1}{\lambda(E)} \,,$$

donde $E := \{x \in [0,1] \,:\, |f(x)| = ||f||_\infty\}$.

<u>Sol:</u> Si llamnos $M = ||f||_\infty$, la expresión del enunciado nos queda como

$$\left(\frac{M}{||f||_p}\right)^p = M^p \left(\int\limits_{[0,1]} |f|^p \, d\lambda\right)^{-1} = M^p \left(\int\limits_E |f|^p \, d\lambda + \int\limits_{[0,1]\setminus E} |f|^p \, d\lambda\right)^{-1}$$

$$= M^p \left(M^p \lambda(E) + M^p \int\limits_{[0,1]\setminus E} |f M^{-1}|^p \, d\lambda \right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\lambda(E) + \int\limits_{[0,1]\setminus E} |f M^{-1}|^p \, d\lambda} \,.$$

Afirmamos que

$$\lim_{p\to\infty} \int_{[0,1]} \underbrace{\left|\frac{f}{M}\right|^p \chi_{E^c}}_{=g_p} d\lambda = 0 : .$$

Notar que en $[0,1] \setminus E$, $|f(x)| < M$ λ-c.t.p. Luego g_p está dominada por la función integrable 1. Y como para casi todo punto

$$\lim_{p\to\infty} g_p(x) = 0 ,$$

el resultado se sigue del teorema de convergencia dominada.

August 6, 2015

Analysis II

Set of problems # 1

1. Let $\mu, \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ be finite signed measures. Prove that if they are differentiable at x then $D(\mu \pm \nu) = D\mu \pm D\nu$.

2. Prove Vitali's covering theorem for families of balls instead of cubes.

3. Let $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Show that for every $q \in \mathbb{R}$ and a.e. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$

$$\fint_{B(\mathbf{x},\varepsilon)} |f(\mathbf{z}) - q| \,\mathrm{d}\mathbf{z} \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} |f(\mathbf{x}) - q|.$$

   Prove that

$$\fint_{B(\mathbf{x},\varepsilon)} |f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})| \,\mathrm{d}\mathbf{z} \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 0 \ . \tag{1}$$

   for a.e. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ (take a sequence of rational numbers approximating $f(\mathbf{x})$).

4. Let $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

   (a) We say that $\mathbf{x}$ is a Lebesgue point of f if eq. (1) is satisfied. Show that if $\mathbf{x}$ is a Lebesgue point then the blow-up maps $f_\varepsilon(\mathbf{z}) := f(\mathbf{x}_0 + \varepsilon\mathbf{z})$ converge in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ to the constant function $\mathbf{z} \mapsto f(\mathbf{x}_0)$.

   (b) We say that f is approximately differentiable at $\mathbf{x}$ if there exists a vector $\nabla f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^d$ for which

$$\fint_{B(\mathbf{x},\varepsilon)} \frac{|f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{x})|}{\varepsilon} \,\mathrm{d}\mathbf{z} \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 0.$$

   Show that if f is approximately differentiable at $\mathbf{x}$ then the maps $\mathbf{z} \mapsto \dfrac{f(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})}{\varepsilon}$ converge in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ to the linear map $\mathbf{z} \mapsto \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{z}$.

5. Let $f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Evaluate $\overline{D}f(0)$ and $\underline{D}f(0)$.

6. Let $f(x) := x^2 \sin \frac{\pi}{x^2}$. Show that $\int_\varepsilon^1 f'(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 0$ but that the Lebesgue integral $\int_{(0,1)} f$ is undefined.

7. Show that $f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ has unbounded variation, and that it is continuous but not absolutely continuous.

8. Show that Cantor's ternary function g is increasing, continuous and such that the inequality $\int g' \leq g(1) - g(0)$ is strict. Show that Cantor's ternary function is not absolutely continuous (do it directly, using the definition).

9. Show that absolutely continuous functions have bounded variation.

10. Show that the set of all absolutely continuous functions form a vector space.

Lieb, Loss. ANALYSIS

2.17 LEMMA (Separability of $L^p(\mathbb{R}^n)$)

There exists a fixed, countable set of functions $\mathcal{F} = \{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ (which will be constructed explicitly) with the following property: For each $1 \le p < \infty$ and for each measurable set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, for each function $f \in L^p(\Omega)$ and for each $\varepsilon > 0$ we have $\|f - \phi_j\|_p < \varepsilon$ for some function ϕ_j in $\mathcal{F}$.

PROOF. It suffices to prove this for $\Omega = \mathbb{R}^n$ since we always can extend $f \in L^p(\Omega)$ to a function in $L^p(\mathbb{R}^n)$ by setting $f(x) = 0$ for $x \notin \Omega$.

To define $\mathcal{F}$ we first define a countable family, Γ, of sets in $\mathbb{R}^n$ as the collection of cubes $\Gamma_{j,m}$, for $j = 1, 2, 3, \dots$ and for $m \in \mathbb{Z}^n$, given by

$$\Gamma_{j,m} = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{-j} m_i < x_i \le 2^{-j}(m_i + 1),\ i = 1, \dots, n\}.$$

For each j, the $\Gamma_{j,m}$'s obviously cover the whole of $\mathbb{R}^n$ as m ranges over $\mathbb{Z}^n$, the points in $\mathbb{R}^n$ with integer coordinates. The family Γ is a countable family (here we use the fact that a countable family of countable families is countable).

Next, we define the family of functions $\mathcal{F}_j$ to consist of all functions f on $\mathbb{R}^n$ with the property that $f(x) = c_{j,m} =$ constant for $x \in \Gamma_{j,m}$ and, moreover, the numbers $c_{j,m}$ are restricted to be rational complex numbers. Again this family $\mathcal{F}_j$ is countable. $\mathcal{F}$ is defined to be $\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_j$, which is again countable.

Given $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, we first use Theorem 2.16 to replace f by a continuous function $\widetilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ such that $\int |f - \widetilde{f}|^p < \varepsilon/3$. Thus, it suffices to find $f_j \in \mathcal{F}$ such that $\int |\widetilde{f} - f_j|^p < 2\varepsilon/3$. We can also assume (as in the proof of 2.16) that $\widetilde{f}(x) = 0$ for x outside some large cube γ of the form $\{x : -2^J \le x_i < 2^J\}$ for some integer J.

For each integer j we define

$$\widetilde{f}_j(x) = 2^{-nj} \int_{\Gamma_{j,m}} \widetilde{f}(y)\, dy \quad \text{for } x \in \Gamma_{j,m},$$

i.e., $\widetilde{f}_j$ is the average of $\widetilde{f}$ over $\Gamma_{j,m}$. Since $\widetilde{f}$ is continuous, it is uniformly continuous on γ. This means that for each $\varepsilon' > 0$ there is a $\delta > 0$ such that $|\widetilde{f}(y) - \widetilde{f}(x)| < \varepsilon'$ whenever $|x - y| < \delta$. Therefore, if j is large enough so that $\delta \ge \sqrt{n} 2^{-j}$, we have

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}_j(x)|^p\, dx \le \text{volume}(\gamma)(2\varepsilon')^p.$$

We can choose ε' to satisfy $(2\varepsilon')^p$ volume$(\gamma) < \varepsilon/3$. Thus, $\int |f - \widetilde{f}_j|^p < \varepsilon/3$.

The final step is to replace $\widetilde{f}_j$ by a function $\widehat{f}_j$ that assumes only rational complex values in such a way that $\int |\widetilde{f}_j - \widehat{f}_j|^p < \varepsilon/3$. This is easy to do since only finitely many cubes (and hence only finitely many values of $\widetilde{f}_j$) are involved. Since $\widehat{f}_j \in \mathcal{F}$, our goal has been accomplished. ∎

● The next theorem is the **Banach–Alaoglu theorem**, but for the special case of L^p-spaces. As such, it predates Banach–Alaoglu (although we shall continue to use that appellation). For the case at hand, i.e., L^p-spaces, the axiom of choice in the realm of the uncountable is *not* needed in the proof.

2.18 THEOREM (Bounded sequences have weak limits)

Let $\Omega \in \mathbb{R}^n$ be a measurable set and consider $L^p(\Omega)$ with $1 < p < \infty$. Let $f^1, f^2, \dots$ be a sequence of functions, bounded in $L^p(\Omega)$. Then there exist a subsequence $f^{n_1}, f^{n_2}, \dots$ (with $n_1 < n_2 < \cdots$) and an $f \in L^p(\Omega)$ such that $f^{n_i} \rightharpoonup f$ weakly in $L^p(\Omega)$ as $i \to \infty$, i.e., for every bounded linear functional $L \in L^p(\Omega)^*$

$$L(f^{n_i}) \to L(f) \quad \text{as } i \to \infty.$$

PROOF. We know from Riesz's representation theorem, Theorem 2.14, that the dual of $L^p(\Omega)$ is $L^q(\Omega)$ with $1/p + 1/q = 1$. Therefore, our first task is to find a subsequence f^{n_j} such that $\int f^{n_j}(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu$ is a convergent sequence of numbers for every $g \in L^q(\Omega)$. In view of Lemma 2.17 (separability of $L^p(\mathbb{R}^n)$), it suffices to show this convergence only for the special countable sequence of functions ϕ^j given there.

Cantor's diagonal argument will be used. First, consider the sequence of numbers $C_1^j = \int f^j\phi_1$, which is bounded (by Hölder's inequality and the boundedness of $\|f^j\|_p$). There is then a subsequence (which we denote by f_1^j) such that C_1^j converges to some number C_1 as $j \to \infty$. Second, starting with this new sequence $f_1^1, f_1^2, \dots$, a parallel argument shows that we can pass to a further subsequence such that $C_2^j = \int f^j\phi_2$ also converges to some number C_2. This second subsequence is denoted by $f_2^1, f_2^2, f_2^3, \dots$. Proceeding inductively we generate a countable family of subsequences of subsequences so that for the k^{th} subsequence (and all further subsequences) $\int f_k^j\phi_k$ converges as $j \to \infty$. Moreover, f_ℓ^j is somewhere in the sequence $f_k^1, f_k^2, \dots$ if $k \le \ell$.

Cantor told us how to construct one convergent subsequence from all these. The k^{th} function in this new sequence f^{n_k} (which will henceforth be called F^k) is defined to be the k^{th} function in the k^{th} sequence, i.e., $F^k := f_k^k$. It is a simple exercise to show that $\int F^k\phi_\ell \to C_\ell$ as $j \to \infty$.

September 16, 2015

Analysis I
Problems sheet # 3

1. Show that if $f_j \to f \in L^1$ then (f_j) is equiintegrable (show it directly, without resorting to Dunford-Pettis).

2. Let $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Show that if the distributional derivative $D_3 u$ vanishes then u (coincides a.e. with a function that) depends only on x_1, x_2. medida vectorial finita

3. Show that $C(K)$ is separable for every compact set $K \subset \mathbb{R}^n$. variación acotada

4. Show that $C_c(\Omega)$ is separable for every open set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. μ regular ($|\mu|$ regular)

5. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ and $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Let $(\rho_\delta)_{\delta>0}$ be a standard sequence of mollifiers. Show that $\boldsymbol{\mu} * \rho_\delta(x) := \int_{x \in \Omega_\delta} \rho_\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{y})$ converges weakly* in $\mathcal{M}(\Omega)$ to $\boldsymbol{\mu}$ and $\|\boldsymbol{\mu} * \rho_\delta\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \to \|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$ as $\delta \to 0$.

6. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Define $BD(\Omega) := \{\boldsymbol{u} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^n) : E\boldsymbol{u} \in \mathcal{M}(\Omega)\}$ where the strain $E\boldsymbol{u}$ is defined as $E\boldsymbol{u} := \dfrac{D\boldsymbol{u} + D\boldsymbol{u}^T}{2}$, the derivatives D being understood in the distributional sense. Prove that $E\boldsymbol{u}$ can be recovered as the $\mathcal{M}(\Omega)$-weak* limit of $E\boldsymbol{u}_\delta$, with $\boldsymbol{u}_\delta := \boldsymbol{u} * \rho_\delta$, as $\delta \to 0$.

7. Let ω be an open bounded set of $\mathbb{R}^2$. Let $\Omega := \omega \times (0,1)$. Let $\bar{\boldsymbol{g}} : \omega \to \mathbb{R}^2$ and $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}', x_3) = (\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x}'), 0)$, $\boldsymbol{x}' \in \omega$, $x_3 \in (0,1)$. Suppose that $\bar{\boldsymbol{g}} \in BD(\omega)$. Given a measure $\boldsymbol{\mu}$ and a function $f \in L^1(\Omega, |\boldsymbol{\mu}|)$ denote by $f\boldsymbol{\mu}$ the measure $E \mapsto \int_E f\, d\boldsymbol{\mu}$.

   (a) Let $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{M}(\omega; \mathbb{R}^2)$, $\nu \in \mathcal{M}((0,1))$. Prove that $|\boldsymbol{\mu} \times \nu| = |\boldsymbol{\mu}| \times |\nu|$.

   (b) Let $f \in L^\infty((0,1))$. Define $\tilde{f}(x_1, x_2, x_3) = f(x_3)$. Show that $\boldsymbol{g} \in BD(\Omega)$ and $\tilde{f} E\boldsymbol{g} = (E\bar{\boldsymbol{g}}) \times (f\mathcal{L}^1)$, where $\mathcal{L}^1$ denotes the one-dimensional Lebesgue measure.

   (c) Show that for a.e. $\boldsymbol{x}' \in \omega$ and a.e. $x_3 \in (0,1)$

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{|\tilde{f} E\boldsymbol{g}|(B'(\boldsymbol{x}', \rho) \times (x_3 - \rho, x_3 + \rho))}{\rho^2} = |f(x_3)| \lim_{\rho \to 0} \frac{|E\bar{\boldsymbol{g}}|(B'(\boldsymbol{x}', \rho))}{\rho}.$$

   Conclude that if $\lim_{\rho \to 0} \dfrac{|\tilde{f} E\boldsymbol{g}|(B(\boldsymbol{x}, \rho))}{\rho^2} = 0$ for some $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}', x_3)$ with $f(x_3) \neq 0$ then

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{|E\bar{\boldsymbol{g}}|(B'(\boldsymbol{x}', \rho))}{\rho} = 0.$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Segundo Semestre de 2015

Análisis II - MPG3101
Prospecto del curso

Horario de clases

Cátedra	Ayudantía
Duvan Henao	José Gabriel Torres
dhenao@mat.puc.cl	jgtorre1@mat.puc.cl
Lunes y Miércoles 10:00-11:20am, sala 1	Miércoles 2:00-3:20pm, sala 1

Evaluación

Se realizarán dos interrogaciones y un examen final:

$\mathbf{I_1}$: miércoles 30 de septiembre, 5:00-8:00pm
$\mathbf{I_2}$: miércoles 18 de noviembre, 5:00-8:00pm
$\mathbf{E}$: miércoles 2 de diciembre, 5:00-8:00pm

Se entregarán también tareas lo largo del semestre.

- Si $\mathbf{NI} := \frac{\mathbf{I_1}+\mathbf{I_2}}{2} \geq 4$ y se han entregado a tiempo todas las tareas, obteniendo una calificación de 5,5 en cada una de ellas, el alumno tiene la opción de no rendir el examen, aprobando el curso con nota final **NI**.
- En el caso en que $\mathbf{NI} < 4$, es necesario haber entregado a tiempo todas las tareas, obteniendo una calificación de 5,5 en cada una de ellas, para poder rendir el examen. En caso de no cumplir con este requisito, el alumno será reprobado con nota final **NI**.
- En todos los otros casos, la nota final del curso será $\frac{3}{10}\mathbf{I_1} + \frac{3}{10}\mathbf{I_2} + \frac{4}{10}\mathbf{E}$.

September 16, 2015

Analysis II

Set of problems # 2

1. Show that $C([0,1])$ is separable but $L^\infty((0,1))$ is not.

2. Let S be a closed subspace of a normed vector space X. Suppose that $x_0 \in X \setminus S$. Show that $s + \lambda x_0 \mapsto \lambda$ belongs to $(S + \langle x_0 \rangle)^*$.

3. Suppose that u_j is a Cauchy sequence in L^p that converges a.e. to a measurable function u. Prove that $u_j \to u$ in L^p.

4. Suppose that u_j is bounded in L^p and converges a.e. to a measurable function u. Prove that $u_j \rightharpoonup u$ in L^p.

5. Suppose that f_j is bounded in L^p, $f_j \rightharpoonup f$ in L^p and $g_j \to g$ in L^q, $1 \le p < \infty$ (or that $f_j \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in L^p if $p = \infty$). Prove that $\int f_j g_j \to \int fg$.

6. Let be W is convex and continuous. Let $\{u_j\} \subset L^p(\Omega)$. Suppose that $\{\int W(u_j)\}_j$ converges, and that for each j there exists an increasing sequence $\{n_j\}_j \subset \mathbb{N}$ and a sequence $v_j = \displaystyle\sum_{i=n_j}^{\infty} \alpha_{ij} u_i$ of convex combinations of the elements of the sequence $\{u_i\}$ such that v_j converges in L^p to some u, $p > 1$. Suppose also that $|W(s)| \le c(1 + s^p)$ for some $c > 0$. Prove that $\int W(u) \le \lim \int W(u_j)$.

7. (a) Show that a linear operator $T : X \to Y$ between two Banach spaces X, Y is continuous if and only if the image of every bounded set in X is bounded in Y.

   (b) Show that if an operator $T : X \to Y$ between two Banach spaces X, Y is compact (it is a linear and the image $T(\mathcal{F})$ of every bounded family $\mathcal{F} \subset X$ is relatively compact in Y) then it is necessarily continuous.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PRIMER SEMESTRE DE 2015
PROFESOR: DUVAN HENAO.
AYUDANTE: ÁLVARO FERRADA.

Análisis I (Postgrado).
Guía 3.

1. Let (X, d_1), (Y, d_2) be two metric spaces. Let $f : X \to Y$ be a continuous and surjective function such that

$$d_1(x_1, x_2) \leq d_2(f(x_1), f(x_2)), \quad \text{for all } x_1, x_2 \in X.$$

Which of the following statements are true?
a) If X is complete, then Y is complete.
b) If Y is complete, then X is complete.

2. Let (X, d_1), (Y, d_2) be two metric spaces, where Y is compact. Let $D \subset X$ be a dense set on X and $f : D \to Y$ be an uniformly continuous function. Show that there is a unique $F : X \to Y$ uniformly continuous function such that $F(x) = f(x)$, for every $x \in D$.

3. Let (X, d) be a complete metric space.
a) Let $\{U_i\}_{i=1}^n$ be an open covering of the space X. Show that there is an open covering $\{V_i\}_{i=1}^n$ of the space X such that $\overline{V_i} \subset U_i$, for every $i = 1, 2 \ldots, n$.
b) Let $f : X \to \mathbb{R}$ be a function. We define the support of f by

$$supp(f) = \overline{\{x \in X \,:\, f(x) \neq 0\}}.$$

Show that there is a family of functions $\varphi_i : X \to [0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, such that $supp(\varphi_i) \subset U_i$, for every $i = 1, 2, \ldots, n$, and

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = 1, \quad \text{for all } x \in X.$$

4. Show that a connected normal space having more than one point is uncountable.

Arzelà - Ascoli

(i) Arzelà - Ascoli (Versión 1).

X espacio métrico separable, $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R}^d)$ familia infinita ($d \in \mathbb{N}$), equicontinua y puntualmente acotada:

(a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \forall f \in \mathcal{F} : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

(b) $\forall x_0 \in X : \sup\{|f(x_0)| / f \in \mathcal{F}\} < \infty$.

$\Rightarrow \exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{F}$ puntualmente convergente:

$$\forall x \in X : \lim_{n \to \infty} f_n(x) \text{ existe}$$

~~(ii) X métrico, compacto, separable~~.

(ii) Arzelà - Ascoli (Versión 2).

X métrico, compacto, separable, $\mathcal{F} \in C(X, \mathbb{R}^d)$ infinito tq

- $\mathcal{F}$ equicontinua uniformemente.
- $\mathcal{F}$ puntualmente acotada.

$\Rightarrow \exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{F}$ uniformemente convergente a $f \in C(X, \mathbb{R}^d)$.

$R := [\tau - a, \tau + a] \times [\xi - b, \xi + b]$

$f : R \to \mathbb{R}$ continua.

$W = C([\tau - a, \tau + a], [\xi - b, \xi + b])$

$\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ suc en W, $\varphi_n \rightrightarrows \varphi \in W$

Pd: (i) $\{s \mapsto f(s, \varphi_n(s))\}_{n \in \mathbb{N}}$

$\rightrightarrows s \mapsto f(s, \varphi(s))$

(ii) $\int_\tau^t f(s, \varphi_n(s))\,ds \longrightarrow \int_\tau^t f(s, \varphi(s))\,ds$

$\forall t \in [\tau - a, \tau + a]$

—o—

dem: $H_n(s) = f(s, \varphi_n(s))$

$H(s) = f(s, \varphi(s))$

$|H_n(s) - H(s)| = |f(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi(s))|$

$\{\varphi_n\} \rightrightarrows \varphi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall s \in [\tau - a, \tau + a] : n \geq n_0 \Rightarrow |\varphi_n(s) - \varphi(s)| < \varepsilon$

f continua en $R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |\varphi_n(s) - \varphi(s)| < \delta \Rightarrow |f(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi(s))| < \varepsilon$

Aplicamos convergencia uniforme en $|\varphi_n(s) - \varphi(s)| < \delta$ $\therefore H_n \rightrightarrows H$. En particular dem

$\overline{F}$ relo. compacto $\Leftrightarrow$ $\overline{F}$ compacto $\underset{W\text{-métrico}}{\Leftrightarrow}$ $\forall \{f_n\} \subset \overline{F}$

$(\Rightarrow)$ $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F \Rightarrow \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{F}$ $(F \subset \overline{F})$

$\Rightarrow \exists \{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tq $f_{n_k} \to f$ en $\overline{F} \subset W$

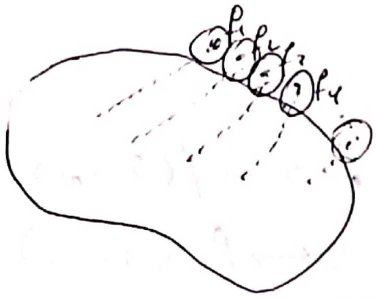
(W es métrico
$\overline{F}$ compacto).

$(\Leftarrow)$ Sea $F \subset W$ tal que se cumple la propiedad.

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\overline{F}$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists \{g_m^{(n)}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset F$: $g_m^{(n)} \xrightarrow{m\to\infty} f_n$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists \{g_{m_k}^{(n)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset F$: $g_{m_k}^{(n)} \xrightarrow{k\to\infty} f_n$



Tomar $\{f_{n_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$

Sea $B^n(f_n, 1)$ bolas con centro en f_n y radio 1

$\forall n$, $\exists g^{(n)} \in F$ tq $B^n(f_n, 1) \ni g^{(n)}$

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $\overline{F}$

$\forall n\in\mathbb{N}$ sea $B(f_n, 1/n)$, bola de radio $\frac{1}{n}$ centrada en f_n

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists g_n \in F$: $g_n \in B(f_n, 1/n)$

Por propiedad, $\exists \{g_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tq

$g_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} g \in \tilde{F}$

Af. $f_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} g$ $\Big|$ $|f_{n_k} - g| \leq |f_{n_k} - g_{n_k}| + |g_{n_k} - g|$

$\leq \frac{1}{n_k} + |g_{n_k} - g| \xrightarrow{n_k\to\infty} 0$

(1) (X,d_1), (Y,d_2) espacios métricos

$f: X \to Y$ continua y epi

$$d_1(x,y) \leq d_2(f(x), f(y)) \qquad (*)$$

(a) ¿X completo $\Rightarrow$ Y completo?

$\{y_n\} \subseteq Y$ de Cauchy

$f(x_n) = y_n$, $\{x_n\} \subseteq X$ es de Cauchy por $(*)$

X completo $\Rightarrow \exists x \in X : x_n \longrightarrow x$

$y_n = f(x_n) \longrightarrow f(x)$ (f continua)

(a) $X = \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\} \leq \mathbb{R}$

$Y = \{n / n \in \mathbb{N}\}$ con métrica $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$

y $f: X \to Y$, $f(\frac{1}{n}) = n$

(2) (X,d_1), (Y,d_2) , Y compacto

D