Movimiento armónico simple forzado y resonancia.

Objetivo: Estudiar la ecuación $x'' + \omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega t)$

Ejemplo. Para el caso sistema bloque-resorte,

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad L(x) = x'' + \omega_0^2 x$$

Ejemplo. Se puede comenzar estudiando la ecuación $x'' + 2x = \cos(t)$, $x = x(t)$.

$x'' + 2x = 0$ tiene por solución general homogenea $x_h = C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t)$

Probamos solución particular $x_p = A\cos(t) + B\operatorname{sen}(t)$

$x_p' = -A\operatorname{sen}(t) + B\cos(t)$

$x_p'' = -A\cos(t) - B\operatorname{sen}(t)$

$L(x_p) = -A\cos(t) - B\operatorname{sen}(t) + 2A\cos(t) + 2B\operatorname{sen}(t) = A\cos(t) + B\operatorname{sen}(t)$

$L(x_p) = \cos(t) \Rightarrow A = 1, \ B = 0$

Luego: $\quad x_p = \cos(t)$

Solución general es $\quad x = x_h + x_p = (A+1)\cos(T) + B\operatorname{sen}(t)$.

Supongamos que $L(x) = \cos(x)$, con $L(x) = x'' + \omega_0^2 x$

Solución homogenea de $x'' + \omega_0^2 x = 0$ es

$$x_h = A\cos(\omega_0 t) + B\operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

x_h es una solución oscilante. ω_0 = frecuencia fundamental de oscilación.

Una solución particular para $L(x) = \cos(t)$ es

$$x_p = C\cos(t) + D\operatorname{sen}(t)$$

$x_p' = -C\operatorname{sen}(t) + D\cos(t)$

$x_p'' = -C\cos(t) - D\operatorname{sen}(t)$

$$L(x_p) = -C\cos(t) - D\,\text{sen}(t) + \omega_0^2 C\cos(t) + \omega_0^2 D\,\text{sen}(t)$$
$$= C(\omega_0^2 - 1)\cos(t) + D(\omega_0^2 - 1)\,\text{sen}(t)$$

$$L(x_p) = \cos(t) \Rightarrow \begin{cases} C(\omega_0^2 - 1) = 1 \\ D(\omega_0^2 - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega_0^2 - 1}, \quad D = 0$$

Solución particular es $x_p = \dfrac{1}{\omega_0^2 - 1}\cos(t)$

Solución general de la ecuación: $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\,\text{sen}(\omega_0 t) + \dfrac{1}{\omega_0^2 - 1}\cos(t)$

(Solución oscilatoria)

Ahora un poco más general:

Supongamos queremos resolver la ecuación:

$$x'' + \omega_0^2 x = F_0\cos(\omega t), \quad \omega \neq \omega_0$$

Siempre se sabe que $x_h = A\cos(\omega_0 t) + B\,\text{sen}(\omega_0 t)$

Probar solución particular $x_p = C\cos(\omega t) + D\,\text{sen}(\omega t)$

$x_p' = -C\omega\,\text{sen}(\omega t) + D\omega\cos(\omega t)$

$x_p'' = -C\omega^2\cos(\omega t) - D\omega^2\,\text{sen}(\omega t)$

$$L(x_p) = -C\omega^2\cos(\omega t) - D\omega^2\,\text{sen}(\omega t) + \omega_0^2 C\cos(\omega t) + \omega_0^2 D\,\text{sen}(\omega t)$$
$$= C(\omega_0^2 - \omega)\cos(\omega t) + D(\omega_0^2 - \omega^2)\,\text{sen}(\omega t)$$

$$L(x_p) = F_0\cos(\omega t) \quad \text{equivale a} \quad \begin{cases} C(\omega_0^2 - \omega) = F_0 \\ D(\omega_0^2 - \omega) = 0 \end{cases}$$

$$C = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad D = 0$$

x_p queda de la forma: $x_p = \dfrac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t)$

Solución general de $x'' + \omega_0^2 x = F_0\cos(\omega t)$ es

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\,\text{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t) \quad \text{(Solución oscilatoria)}$$

Ejercicio: Graficar $x(t)$ para $A = B = F_0 = 1$, $\omega_0 = 2$, $\omega = 3$.

Supongamos que ahora queremos resolver

$$x'' + \omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega_0 t)$$

$x_h = A\cos(\omega_0 t) + B\,\text{sen}(\omega_0 t)$

No sirve proponer $x_p = C\cos(\omega_0 t) + D\,\text{sen}(\omega_0 t)$ porque es la expresión de x_h.

Se puede proponer:

$$x_p = C t\cos(\omega_0 t) + D t\,\text{sen}(\omega_0 t)$$

$x_p' = C\cos(\omega_0 t) - C\omega_0 t\,\text{sen}(\omega_0 t) + D\,\text{sen}(\omega_0 t) + D\omega_0 t\cos(\omega_0 t)$

$x_p'' = -C\omega_0\,\text{sen}(\omega_0 t) - \left(C\omega_0\,\text{sen}(\omega_0 t) + C\omega_0^2 t\cos(\omega_0 t)\right) + D\omega_0\cos(\omega_0 t)$
$\quad + D\left(\omega_0\cos(\omega_0 t) - \omega_0^2 t\,\text{sen}(\omega_0 t)\right)$

$= -C\omega_0\,\text{sen}(\omega_0 t) - C\omega_0\,\text{sen}(\omega_0 t) - C\omega_0^2 t\cos(\omega_0 t) + D\omega_0\cos(\omega_0 t) + D\omega_0\cos(\omega_0 t)$
$\quad - D\omega_0^2 t\,\text{sen}(\omega_0 t)$

$= -2C\omega_0\,\text{sen}(\omega_0 t) + 2D\omega_0\cos(\omega_0 t) - C\omega_0^2 t\cos(\omega_0 t) - D\omega_0^2 t\,\text{sen}(\omega_0 t)$

$L(x_p) = -2C\omega_0\,\text{sen}(\omega_0 t) + 2D\omega_0\cos(\omega_0 t) - \cancel{C\omega_0^2 t\cos(\omega_0 t)} - \cancel{D\omega_0^2 t\,\text{sen}(\omega_0 t)}$
$\quad + \cancel{C\omega_0^2 t\cos(\omega_0 t)} + \cancel{D\omega_0^2 t\,\text{sen}(\omega_0 t)}$

$= -2C\omega_0\,\text{sen}(\omega_0 t) + 2D\omega_0\cos(\omega_0 t)$

$L(x_p) = F_0\cos(\omega_0 t)$ equivalente al sistema $\begin{cases} -2C\omega_0 = 0 \\ 2D\omega_0 = F_0 \end{cases}$

luego: $C = 0$, $D = \dfrac{F_0}{2\omega_0}$

La solución general es $x = A\cos(\omega_0 t) + B\,\text{sen}(\omega_0 t) + \underbrace{\dfrac{F_0}{2\omega_0} t\,\text{sen}(\omega_0 t)}_{\text{término de resonancia}}$

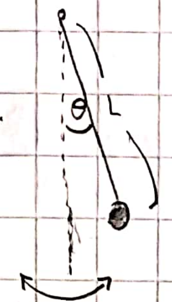
Ejercicio: Graficar la solución $x = x(t)$ para $A = B = 1$, $\omega_0 = 2$, $F_0 = 1$

Las oscilaciones de la solución $x = x(t)$ cada vez se vuelven más "violentas"

Herbert Massmann: Resonancia son respuestas violentas a un estímulo pequeño.

Ejemplo. El problema del péndulo.

$\downarrow \vec{g}$



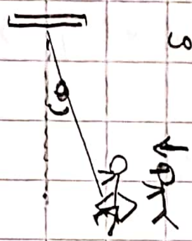
$\vec{g}$: aceleración de gravedad

Para desviaciones θ pequeñas (θ en radianes), $\theta = \theta(t)$ cumple

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Si $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$, entonces $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$

Supongamos

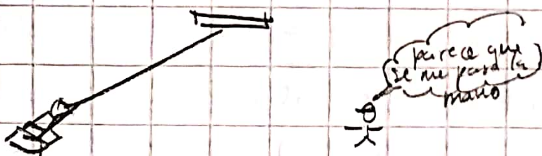


columpio de largo L $\left(\omega_0^2 = \frac{g}{L}\right)$

$\leftarrow F = F_0 \cos(\omega_0 t)$ $\rightarrow$ fuerza periódica con frecuencia ω_0

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + \frac{F}{2\omega_0}\, t\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$$

Finalmente tiempo después:



Ejercicios propuestos ayudantía.

Ejercicio 2.5.4. Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 9y = \cos(3x) + \operatorname{sen}(3x) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Ejercicio. En clases se demostró que para el oscilador armónico $x'' + \omega_0^2 x = 0$, la solución general es $x(t) = C\cos(\omega_0 t - \gamma)$. Ocupe este resultado en el problema "Ejercicio 2.5.4".

Problema. Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} 0.5x'' + 8x = 10\cos(\pi t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Ocupe una identidad trigonométrica adecuada, a saber:

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos B - \cos A,$$

para simplificar su resultado. Grafique.

Ejercicio. Verificar la identidad $2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\beta-\cos\alpha$.

demostración. $\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)+\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)-\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)-\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cancel{\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$+\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cancel{\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)-\text{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)-\text{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos(\beta)=\cos\left(\frac{\beta+\alpha}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha)=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Por lo tanto, se tiene que $\cos(\beta)-\cos(\alpha)=2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$. $\square$

Desarrollo.

Ejercicio 2.5.4. Sea $Ly=y''+9y$. Se tiene $L(y)=\cos(3x)+\text{sen}(3x)$.

Si $L(y_1)=\cos(3x)$, $L(y_2)=\text{sen}(3x)$, entonces $L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)=\cos(3x)+\text{sen}(3x)$

Solución general de la ecuación: $y=y_1+y_2$.

Solución homogénea: $y_h=A\cos(3x)+B\,\text{sen}(3x)$

Para resolver $L(y)=\cos(3x)$ probamos solución particular $y_p=C_1x\cos(3x)+C_2x\,\text{sen}(3x)$

$L(y_p)=y_p''+9y_p \Rightarrow y_p'=C_1(\cos(3x)-3x\,\text{sen}(3x))+C_2(\text{sen}(3x)+3x\cos(3x))$

$y_p''=C_1(-3\,\text{sen}(3x)-3\,\text{sen}(3x)-9x\cos(3x))+C_2(3\cos(3x)+3\cos(3x)-9x\,\text{sen}(3x))$

$=-3C_1(2\,\text{sen}(3x)+3x\cos(3x))+3C_2(2\cos(3x)-3x\,\text{sen}(3x))$

$$L(y_p) = -3C_1\left(2\,\text{sen}(3x) + 3x\cos(3x)\right) + 3C_2\left(2\cos(3x) - 3x\,\text{sen}(3x)\right)$$
$$+ 9C_1 x\cos(3x) + 9C_2 x\,\text{sen}(3x)$$

$L(y_p) = \cos(3x)$ es equivalente a:

$$6C_2\cos(3x) - 6C_1\,\text{sen}(3x) = \cos(3x) \Rightarrow \begin{cases} 6C_2 = 1 \\ -6C_1 = 0 \end{cases} \quad C_1 = 0,\ C_2 = \frac{1}{6}.$$

La primera solución particular es $y_p = \frac{1}{6}x\,\text{sen}(3x)$

Para resolver $L(y) = \text{sen}(3x)$ probamos solución particular $\tilde{y}_p = D_1 x\cos(3x) + D_2 x\,\text{sen}(3x)$

De la misma manera que el caso anterior; $L(\tilde{y}_p) = \text{sen}(3x)$ equivale a:

$$6D_2\cos(3x) - 6D_1\,\text{sen}(3x) = \text{sen}(3x)$$

Sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 6D_2 = 0 \\ -6D_1 = 1 \end{cases}$. Soluciones $D_2 = 0$, $D_1 = -\frac{1}{6}$

Segunda solución particular: $\tilde{y}_p = -\frac{1}{6}x\cos(3x)$

Solución general de la ecuación $L(y) = \cos(3x) + \text{sen}(3x)$ es

$$y = A\cos(3x) + B\,\text{sen}(3x) + \frac{1}{6}x\,\text{sen}(3x) - \frac{1}{6}x\cos(3x)$$

Imponemos condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

$y(0) = 2 = A + B\cdot 0 \Rightarrow A = 2.$

$$y'(x) = -3A\,\text{sen}(3x) + 3B\cos(3x) + \frac{1}{6}\text{sen}(3x) + \frac{1}{2}x\cos(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x) + \frac{1}{2}x\,\text{sen}(3x)$$

$y'(0) = 3B - \frac{1}{6} = 1.$

Sistema de ecuaciones: $\begin{cases} A = 2 \\ 3B - \frac{1}{6} = 1 \end{cases}$ $\quad A = 2$, $B = \frac{7}{18}$

Solución particular: $y = 2\cos(3x) + \frac{7}{18}\text{sen}(3x) + \frac{1}{6}x\,\text{sen}(3x) - \frac{1}{6}x\cos(3x)$

Desarrollo segunda parte:

Tenemos la expresion $2\cos(3x) + \frac{7}{18}\operatorname{sen}(3x) = E_1 \cos(3x - \gamma_1)$,

donde $E_1 = \sqrt{4 + \frac{49}{18^2}} = \frac{\sqrt{1345}}{18} \approx \frac{36.67}{18} \approx 2.04$

Además $\tan(\gamma_1) = \frac{7/18}{2} = \frac{7}{36} = 0.19$

Por otro lado, $\frac{1}{6}x\operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{6}x\cos(3x) = -\frac{1}{6}x\left(\cos(3x) - \operatorname{sen}(3x)\right)$

donde $\cos(3x) - \operatorname{sen}(3x) = E_2 \cos(3x - \gamma_2)$.

$E_2 = \sqrt{2}$, $\tan(\gamma_2) = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \gamma_2 = -\frac{\pi}{4}$

Finalizar el problema es fácil...

$$y = 2.04\cos(3x - \gamma_1) - \frac{\sqrt{2}}{6} x \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Desarrollo último problema. Tenemos el prob. de valores iniciales

$$\begin{cases} 0.5x'' + 8x = 10\cos(\pi t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

La ecuación homogenea asociada es $0.5x'' + 8x = 0 \Leftrightarrow x'' + 16x = 0$.

Solución homogenea: $x_h = A\cos(4t) + B\operatorname{sen}(4t)$

Buscamos solución particular de $0.5x'' + 8x = 10\cos(\pi t)$ del tipo

$$x_p = C_1\cos(\pi t) + C_2 \operatorname{sen}(\pi t)$$

$x_p' = -C_1\pi\operatorname{sen}(\pi t) + C_2\pi\cos(\pi t)$, $x_p'' = -C_1\pi^2\cos(\pi t) - C_2\pi^2\operatorname{sen}(\pi t)$

$$0.5x_p'' + 8x = -\frac{C_1\pi^2}{2}\cos(\pi t) - \frac{C_2\pi^2}{2}\operatorname{sen}(\pi t) + 8C_1\cos(\pi t) + 8C_2\operatorname{sen}(\pi t)$$

$0.5\, x_p'' + 8x_p = 10\cos(\pi t)$ es equivalente a:

$$C_1\left(8 - \frac{\pi^2}{2}\right)\cos(\pi t) + C_2\left(8 - \frac{\pi^2}{2}\right)\operatorname{sen}(\pi t) = 10\cos(\pi t)$$

Se tiene:

$$\begin{cases} C_1\left(8 - \frac{\pi^2}{2}\right) = 10 \\ C_2 = 0 \end{cases} \qquad C_1 = \frac{20}{16-\pi^2}$$

Solución general de la ecuación: $x(t) = A\cos(4t) + B\operatorname{sen}(4t) + \frac{20}{16-\pi^2}\cos(\pi t)$

Más simplificada: $x(t) = C\cos(4t - \gamma) + \frac{20}{16-\pi^2}\cos(\pi t)$

Movimiento armónico amortiguado - forzado
Resonancia práctica.

Interesa resolver la ecuación $mx'' + cx' + kx = F_0 \cos(\omega t)$

Obtenemos la ecuación $x'' + 2p x' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$; $p = \frac{c}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Si $L(x) = x'' + 2px' + \omega_0^2 x$, queda

$$L(x) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

Sabemos que $x = x_p + x_h$, donde x_h es solución de $L(x) = 0$.
La solución depende si $\omega = \omega_0$ ó $\omega \neq \omega_0$.

Supongamos que $\omega \neq \omega_0$.
Las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + 2p\lambda + \omega_0^2 = 0$ son
$\lambda_1, \lambda_2 = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$. Discriminante es $\Delta = p^2 - \omega_0^2$

Supongamos que $\Delta < 0$. $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2}$.
Se tiene que $\lambda = -p \pm \omega_1 i$.
Solución general es $x(t) = e^{-pt}(C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega t))$

Probamos solución particular $x_p = A\cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t)$

$x_p' = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$

$x_p'' = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t)$

$$\begin{aligned} L(x_p) &= -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t) + 2p(-A\omega \operatorname{sen}(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)) \\ &\quad + \omega_0^2 (A\cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t)) \\ &= (A(\omega_0^2 - \omega^2) + 2p\omega B) \cos(\omega t) + (B(\omega_0^2 - \omega^2) - 2p\omega A) \operatorname{sen}(\omega t) \end{aligned}$$

La igualdad $L(x_p) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$ implica el sistema:

$$\begin{cases} B(\omega_0^2-\omega^2) - 2p\omega A = 0 \\ A(\omega_0^2-\omega^2) + 2p\omega B = \frac{F_0}{m} \end{cases}$$

De la primera ecuación: $A = \frac{B(\omega_0^2-\omega^2)}{2p\omega}$

Reemplazando en la segunda: $B\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{2p\omega} + 2p\omega B = \frac{F_0}{m}$

$$B\left((\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4p^2\omega^2\right) = \frac{2p\omega F_0}{m} \qquad \boxed{B = \frac{2p\omega F_0}{4p^2\omega^2 m + (\omega_0^2-\omega^2)^2 m}}$$

Ahora obtenemos el valor de A: $\boxed{A = \frac{F_0(\omega_0^2-\omega^2)}{4p^2\omega^2 m + (\omega_0^2-\omega^2)^2 m}}$

La solución $x_p = A\cos(\omega t) + B\,\text{sen}(\omega t)$ puede quedar de la forma $x_p(t) = C\cos(\omega t - \gamma)$, donde

$$C = \sqrt{A^2+B^2}$$
$$\frac{B}{A} = \tan(\gamma)$$

$$C^2 = \frac{F_0^2(\omega_0^2-\omega^2)^2}{(4p^2\omega^2 m + (\omega_0^2-\omega^2)m)^2} + \frac{4p^2\omega^2 F_0^2}{(4p^2\omega^2 m + (\omega_0^2-\omega^2)m)^2} = \frac{F_0^2\left((\omega_0^2-\omega)^2 + 4p^2\omega^2\right)}{m^2\left(4p^2\omega^2 + (\omega_0^2-\omega^2)^2\right)^2}$$

Luego: $$C = \frac{F_0}{m\sqrt{4p^2\omega^2 + (\omega_0^2-\omega^2)^2}}$$

Ahora: $\tan(\gamma) = \frac{2\omega p}{\omega_0^2-\omega^2}$

Scanned with CamScanner

La solución particular en este caso es:

$$x_p = \frac{F_0}{m\sqrt{4p^2\omega^2 + (\omega_0^2-\omega^2)^2}} \cos(\omega t - \gamma)$$

La solución general de $L(x) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$ es

$$x(t) = e^{-pt}\left(C_1\cos(\omega_1 t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_1 t)\right) + \frac{F_0}{m\sqrt{4p^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}\cos(\omega t - \gamma)$$

Observación. x_h cumple lo siguiente:

$$x_h = e^{-pt}\left(C_1\cos(\omega_1 t) + C_2\operatorname{sen}(\omega_1 t)\right) = e^{-pt} C_3 \cos(\omega_1 t - \gamma_1)$$

$$\begin{aligned} |x_h| &= |e^{-pt} C_3 \cos(\omega_1 t - \gamma_1)| \\ &= |e^{-pt}|\,|C_3|\,|\cos(\omega_1 t - \gamma_1)| \\ &\leq |e^{-pt}|\,|C_3| \end{aligned}$$

Es decir: $\forall t > 0$; $-|e^{-pt}||C_3| \leq x_h \leq |e^{-pt}||C_3|$

Pero $\lim\limits_{t\to\infty} \pm|e^{-pt}|\,|C_3| = 0$. Por el Teorema del Sandwich, se tiene

$$\lim_{t\to\infty} x_h = 0.$$

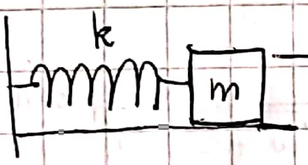
En otras palabras, para $t \gg 1$ (un tiempo muy grande) se tiene que $x(t) \approx x_p(t)$.

$$x(t) = x_p + x_h$$

solución estacionaria   solución transiente

Ejemplo. Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'' + 0.7x' + x = \cos(1.1t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$



$\frac{F_0 \cos(\omega t)}{m}$, donde $k = 1$, $F_0 = 1$, $c = 0.7$, $m = 1$, $\omega = 1.1$.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{1} = 1, \quad p = \frac{c}{2m} = \frac{0.7}{2} = 0.35$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = \sqrt{1 - (0.35)^2} \approx 0.94.$$

$$C(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{4p^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4\cdot(0.35)^2(1.1)^2 + ((0.35)^2 - (1.1)^2)^2}} \approx 0.75$$

Solución general: $x(t) = e^{-0.35t}\left(C_1 \cos(0.94t) + C_2 \operatorname{sen}(0.94t)\right) + 0.75\cos(1.1t - \gamma)$

donde

$$\tan(\gamma) = \frac{2\omega p}{\omega_0^2 - \omega^2} = -0.708 \approx -0.70$$

Calculamos $\tan(\gamma) = -0.7$: $\gamma = \tan^{-1}(-0.7) \approx -0.61$

Así la solución general queda de la forma:

$$x(t) = e^{-0.35t}\left(C_1 \cos(0.94t) + C_2 \operatorname{sen}(0.94t)\right) + 0.75\cos(1.1t + 0.61)$$

$$x(0) = 0 = C_1 + 0.75\cos(0.61) = C_1 + 0.75 \cdot 0.82 = C_1 + 0.62$$

C_1 queda: $C_1 = -0.62$.

$$x'(t) = -0.35e^{-0.35t}\left(C_1\cos(0.94t) + C_2\,\text{sen}(0.94t)\right)$$
$$+ e^{-0.35t}\left(-0.94C_1\,\text{sen}(0.94t) + 0.94C_2\cos(0.94t)\right) - 0.75\cdot 1.1\,\text{sen}(1.1t+0.61)$$

$$x'(0) = 1 = -0.35\left(C_1 + C_2\cdot 0\right) + 0.94C_2 - 0.83\,\text{sen}(0.61)$$
$$= 0.22 + 0.94C_2 - 0.83\cdot 0.57$$
$$= 0.22 + 0.94C_2 - 0.47$$

Se sigue que: $0.94C_2 = 1.25$, equivalentemente $C_2 \approx 1.33$

La solución particular es:

$$x(t) = e^{-0.35t}\left(-0.62\cos(0.94t) + 1.33\,\text{sen}(0.94t)\right) + 0.75\cos(1.1t+0.61)$$

Observación. En este caso, x_h se llama solución transiente y x_p se llama solución estacionaria.

Pregunta. ¿Que ocurre para $x(t)$ con $t = 10^{10}$?

Respuesta.

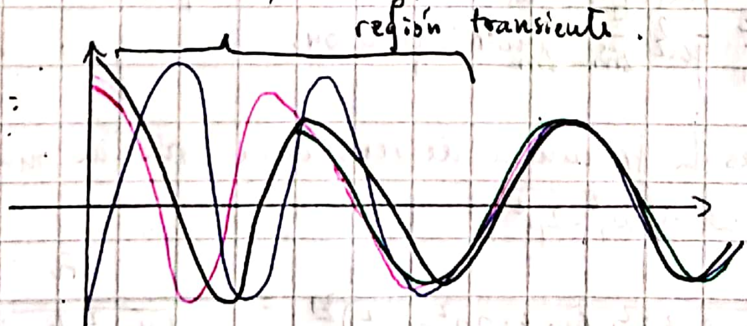
$$x_h(10^{10}) = -8.19\times 10^{-1520030688}$$

$$x_p(10^{10}) = -0.70199$$

$x_h(10^{10})$ es muy pequeño en comparación a $x_p(10^{10})$. Luego

$$x(10^{10}) \approx x(10^{10})$$

Graficamente:



Es decir, a la larga, da lo mismo las condiciones iniciales.

Scanned with CamScanner

Observación. En la solución

$$x = e^{-pt}\left(C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_1 t)\right) + \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2 + (\omega_0^2-\omega^2)^2}} \cos(\omega t - \gamma)$$

el factor $C(\omega) = \dfrac{F_0}{m\sqrt{4\omega^2 p^2 + (\omega_0^2-\omega^2)^2}}$ se llama "amplitud de resonancia práctica"

Pregunta. ¿cuando $C(\omega)$ se maximiza?

Respuesta.

Derivamos $C(\omega)$: $C'(\omega) = -\dfrac{F_0}{2m}\left(4\omega^2p^2 + (\omega_0^2-\omega^2)\right)^{-3/2}\left(8p^2\omega + 2(\omega_0^2-\omega^2)(-2\omega)\right)$

$C'(\omega) = 0$ cuando $8p^2\omega - 4\omega(\omega_0^2-\omega^2) = 0$

$$4\omega\left(2p^2 - (\omega_0^2-\omega^2)\right) = 0$$

$C'(\omega) = 0$ cuando $\omega = 0$ o $2p^2 - \omega_0^2 + \omega^2 = 0$

Como $\omega = 0$ no puede ser, se obtiene que

$$\omega^2 + 2p^2 - \omega_0^2 = 0$$

$$\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2p^2}$$

siempre y cuando $\omega_0^2 - 2p^2 > 0$.

$\omega_0^2 - 2p^2 > 0 \Rightarrow \omega_0 > \sqrt{2}\,p$

la frecuencia natural del sistema tiene que ser un poco más grande que la amortiguación.

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2p^2}$ es la frecuencia de resonancia práctica maximal

Observación: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2p^2}$

$$C(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{4(\omega_0^2-2p^2)p^2 + (\omega_0^2+2p^2-\omega_0^2)^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{4\omega_0^2p^2 - 4p^4}}$$

Scanned with CamScanner

$$C(\omega) = \frac{F_0}{2mp\sqrt{\omega_0^2 - p^2}} = \frac{F_0}{2mp\omega_1}$$

lo anterior responde la siguiente pregunta:

¿Con qué frecuencia se debe forzar el sistema para que termine oscilando con la máxima amplitud posible?

Algunas observaciones:

(i) $\omega = (\omega_0^2 - 2p^2)^{1/2} < \omega_0$

(ii) Para $p \approx 0$, $\omega \approx \omega_0$

Matrices y sistemas lineales

9.2.1 Matrices y vectores

Definición. Una matriz es un arreglo del tipo:

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{fila} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

columna

Forma resumida : $A = (a_{ij})$

Se entiende que si $A = (a_{ij})$ es una matriz de $n \times m$, entonces

(i) $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$

(ii) A Tiene n filas, m columnas.

Un vector columna es una matriz $n \times 1$ siguiente:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) A es una matriz de 2×3

(ii) i: fila i-ésima, j: columna j-ésima

$a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2,3\}$

(iii) $a_{11} = 1$ $\qquad$ $a_{21} = -3$

$a_{12} = 2$ $\qquad$ $a_{22} = 2$

$a_{13} = 3$ $\qquad$ $a_{23} = 1$

Observación. Para $A = (a_{ij})$ matriz de $n \times m$, podemos definir $\vec{v}_1 = (a_{i1})$, $\vec{v}_2 = (a_{i2})$, ..., $\vec{v}_n = (a_{im})$, vectores columna $n \times 1$

$$A = (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_n)$$

Ejemplo. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A = (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3)$$

Pregunta. ¿Cuando 2 matrices A y B son iguales?

Respuesta. (i) A, B Tienen la misma dimensión.

(ii) $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ cumplen $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall i, j$

Ejemplo. (i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = (3 \ 4 \ 5)$ no son iguales porque A es de 2×2, B es de 1×3.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ no son iguales porque $a_{12} = 1$, $b_{12} = -1$ y $a_{12} \neq b_{12}$

Observación. $A = (\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_m)$, $B = (\vec{w}_1 \ldots \vec{w}_{m'})$. $A = B$ ssi

(i) $m = m'$

(ii) $\vec{v}_1$, $\vec{w}_1$ vectores columna $n \times 1$

(iii) $\vec{v}_j = \vec{w}_j$ $\forall j = 1, \ldots, m$

Definición. La traspuesta es la siguiente operación

(i) $\vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ Se tiene $\vec{v}^t = (a_{11} \dots a_{n1})$

Ejemplo. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}^t = (1\ 2\ 3)$

(ii) Para $A = (\vec{v}_1 \dots \vec{v}_m)$ matriz de $n \times m$,

$A^t = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\,t} \\ \vdots \\ \vec{v}_m^{\,t} \end{pmatrix}$ es una matriz $m \times n$

Ejemplo. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

$A = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3)$. $\vec{v}_1^{\,t} = (1\ 4\ 7)$, $\vec{v}_2 = (2\ 5\ 8)$, $\vec{v}_3 = (3\ 6\ 9)$

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\,t} \\ \vec{v}_2^{\,t} \\ \vec{v}_3^{\,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Finalmente: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Ejemplo. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

Operación con matrices.

Suma. Suma de dos vectores columna $\vec{v}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$

$$\vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} \\ \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} \end{pmatrix}$$

En particular, $\vec{v}=(a_{i1})$, $\vec{w}=(b_{i1})$. $\vec{v}+\vec{w}=(a_{i1}+b_{i1})$ $\forall i=1,\dots,n$.

Ejemplo. $\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$. $\vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix} 1+4 \\ 2+5 \\ 3-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

Producto por escalar. $k\in\mathbb{R}$, $\vec{v}=(a_{i1})$

$$k\vec{v}=(ka_{i1})$$

Ejemplo. $\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $k=-2$. $k\vec{v}=-2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

Producto de matrices. $\vec{v}=(a_{i1})$. $\vec{w}=(b_{i1})$

$$\vec{w}^t\vec{v}=(b_{11}\ b_{21}\ \cdots b_{n1})\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}=a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21}+\cdots a_{n1}b_{n1}$$

(Producto escalar. Buscar propiedades)

Ejemplo. $\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$$\vec{w}^t\vec{v}=(6\ 0\ 8)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=6+0+21=27.$$

En el caso general.

(i) Suma. A y B se pueden sumar siempre que tengan la misma dimensión.

$$A = (\vec{v_1}\ \vec{v_2}\ \dots\ \vec{v_m}) \qquad \vec{v_j} = (a_{ij})$$
$$B = (\vec{w_1}\ \vec{w_2}\ \dots\ \vec{w_m}) \qquad \vec{w_j} = (b_{ij})$$

$$A+B = (\vec{v_1}+\vec{w_1}\ \ \vec{v_2}+\vec{w_2}\ \dots\ \vec{v_m}+\vec{w_m})$$

(ii) Producto por escalar. $A = (\vec{v_1} \dots \vec{v_m})$, $k \in \mathbb{R}$

$$kA = (k\vec{v_1} \dots k\vec{v_m})$$

(iii) Producto de matrices.

A y B se pueden multiplicar siempre y cuando A sea matriz de $n \times m$, y B sea matriz de $m \times p$.

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v_1}^t \\ \vec{v_2}^t \\ \vdots \\ \vec{v_n}^t \end{pmatrix}, \quad B = (\vec{w_1}\ \vec{w_2} \dots \vec{w_p})$$

$$AB = \begin{pmatrix} \vec{v_1}^t\vec{w_1} & \vec{v_1}^t\vec{w_2} & \dots & \vec{v_1}^t\vec{w_p} \\ \vec{v_2}^t\vec{w_1} & \vec{v_2}^t\vec{w_2} & \dots & \vec{v_2}^t\vec{w_p} \\ \vdots & & & \\ \vec{v_n}^t\vec{w_1} & \vec{v_n}^t\vec{w_2} & \dots & \vec{v_n}^t\vec{w_p} \end{pmatrix} = (\vec{v_i}^t\,\vec{w_j}), \text{ donde } i \in \{1,\dots,n\},\ j \in \{1,\dots,p\}$$

AB es una matriz de $n \times p$.

Scanned with CamScanner

Ejemplo.

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$.

El producto AB no existe
El producto BA sí existe.

$B = \left(\vec{v}^{\,t}\right)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A = \left(\vec{w}_1 \ \vec{w}_2 \ \vec{w}_3\right)$; $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$BA = \left(\vec{v}^{\,t}\right)\left(\vec{w}_1 \ \vec{w}_2 \ \vec{w}_3\right) = \left(\vec{v}^{\,t}\vec{w}_1 \quad \vec{v}^{\,t}\vec{w}_2 \quad \vec{v}^{\,t}\vec{w}_3\right)$$

$$\vec{v}^{\,t}\vec{w}_1 = (1\ 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 + 6 = 7$$
$$\vec{v}^{\,t}\vec{w}_2 = (1\ 2)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 + 8 = 10$$
$$\vec{v}^{\,t}\vec{w}_3 = (1\ 2)\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 5 + 12 = 17$$

$$BA = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 17 \end{pmatrix}$$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & -8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

El producto BA no existe
El producto AB sí existe.

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\,t} \\ \vec{v}_2^{\,t} \\ \vec{v}_3^{\,t} \end{pmatrix} , \quad B = \left(\vec{w}_1\right)$$

$$AB = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\,t}\vec{w}_1 \\ \vec{v}_2^{\,t}\vec{w}_1 \\ \vec{v}_3\vec{w}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+14 \\ 3+24+35 \\ 6-48+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 62 \\ -35 \end{pmatrix}$$

Observación. Si A matriz de $n \times m$, B matriz de $m \times p$

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\,t} \\ \vdots \\ \vec{v}_n^{\,t} \end{pmatrix}, \quad B = (\vec{w}_1 \ \dots \ \vec{w}_p)$$

$$AB = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\,t}\vec{w}_1 & \vec{v}_1^{\,t}\vec{w}_2 & \dots & \vec{v}_1^{\,t}\vec{w}_p \\ \vec{v}_2^{\,t}\vec{w}_1 & \vec{v}_2^{\,t}\vec{w}_2 & \dots & \vec{v}_2^{\,t}\vec{w}_p \\ \vdots & & & \\ \vec{v}_n^{\,t}\vec{w}_1 & \vec{v}_n^{\,t}\vec{w}_2 & \dots & \vec{v}_n^{\,t}\vec{w}_p \end{pmatrix} = (A\vec{w}_1 \ \ A\vec{w}_2 \ \dots \ A\vec{w}_{w_p})$$

Propiedades.

$$A(BC) = (AB)C$$
$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(A+B)C = AC + BC$$
$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$
$$AI = IA \quad , \ I \text{ matriz identidad.}$$

- A es una matriz cuadrada si tiene dimensión $n \times n$ (nº filas = nº columnas)
- $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n$ vectores columna $n \times 1$

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \hat{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow i\text{-ésima fila.}$$

La matriz identidad es la matriz $A = (\hat{e}_1 \ \hat{e}_2 \dots \hat{e}_n)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

Observación. multiplicación del tipo $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(b_1\, b_2\, b_3)$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dimensión 3×1

$(b_1\, b_2\, b_3)$ dimensión 1×3

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(b_1\, b_2\, b_3) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$$

Si $\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{w}^t = (b_1\, b_2\, b_3)$, entonces $\vec{v}\,\vec{w}^t = (b_1\vec{v} \;\; b_2\vec{v} \;\; b_3\vec{v})$

Más generalmente $\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\vec{w}^t = (b_1 \cdots b_n)$

$$\vec{v}\,\vec{w}^t = (b_1\vec{v} \; \cdots \; b_n\vec{v})$$

Matriz inversa, determinante y sistemas de ecuaciones

Consideremos sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

es equivalente al sistema
$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Si $\exists A^{-1}$, entonces:
$$A\vec{x} = \vec{b} \quad / A^{-1}$$
$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$
$$I\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

la solución del sistema viene dada por el vector $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Pregunta. ¿Cómo se calcula la inversa A^{-1}?

Caso matriz 2×2: Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces
$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Definición: $\det(A) = ad - bc$

Condición para la existencia de A^{-1} es $\det(A) \neq 0$.

Pregunta. ¿Cómo calcular A^{-1} para el caso 3×3?

Sabemos que $AA^{-1}=I$. Si $A^{-1}=(\vec{w_1}\ \vec{w_2}\ \vec{w_3})$, $I=(\hat{e_1}\ \hat{e_2}\ \hat{e_3})$

$$AA^{-1}=(A\vec{w_1}\ A\vec{w_2}\ A\vec{w_3})=(\hat{e_1}\ \hat{e_2}\ \hat{e_3})$$

Luego: $\underbrace{A\vec{w_1}=\hat{e_1},\quad A\vec{w_2}=\hat{e_2},\quad A\vec{w_3}=\hat{e_3}}_{\text{Sistemas de ecuaciones}}$

Técnica para resolver sistema de ecuaciones:

Estudiamos el ejemplo $\begin{cases} 2x+2y+2z=2 \\ x+y+3z=5 \\ x+4y+z=10 \end{cases}$

Definimos la matriz ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 10 \end{array}\right)$

Consideramos las operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to \frac{1}{2}f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 \to f_2 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 \to \frac{1}{2}f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to f_2 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1 \to f_1 - f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to \frac{1}{3}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1 \to f_1 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Las soluciones del sistema son $x=-4$, $y=3$, $z=2$

Para calcular A^{-1} con el sistema anterior, el sistema

$$\begin{cases} A\vec{w}_1 = \hat{e}_1 \\ A\vec{w}_2 = \hat{e}_2 \\ A\vec{w}_3 = \hat{e}_3 \end{cases}$$

se convierte en la matriz ampliada

$$\left(A \;\vdots\; \hat{e}_1 \; \hat{e}_2 \; \hat{e}_3 \right)$$

Ejemplo. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, se convierte en $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to \frac{1}{2} f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 \to f_2 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1/2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 \to \frac{1}{2} f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 \to f_2 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to f_1 - f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 \to \frac{1}{3} f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to f_1 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{12} & -1/2 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

Así $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 11/12 \\ -1/6 \\ -1/4 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$, o de manera equivalente:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 11/12 & -1/2 & -1/3 \\ -1/6 & 0 & 1/3 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobación :

$$\begin{pmatrix} 11/12 & -1/2 & -1/3 \\ -1/6 & 0 & 1/3 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11/12 & -1/2 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{11}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{11-3-2}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 11/12 & -1/2 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{11}{6} - \frac{1}{2} - \frac{4}{3} = \frac{11-3-8}{6} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 11/12 & -1/2 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{11}{6} - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{11-9-2}{6} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1/6 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Ejercicio. Comprobar el producto $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{11}{12} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \\ -1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Chapter 3.3
Linear system of ODES.
Sección ejercicios.

Ejercicio. 3.3.1. Escribir $x_1' = 2x_1 - 3tx_2 + \text{sen}(t)$, $x_2' = e^t x_1 + 3x_2 + \cos(t)$ en la forma $\vec{x}' = P(t)\vec{x} + \vec{f}(t)$

Desarrollo. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$, $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \text{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3t \\ e^t & 3 \end{pmatrix}}_{P(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Ejercicio. 3.3.2.
(a) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$ tiene soluciones $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t}$

Desarrollo. $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t}$, derivando queda $\vec{x}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(4e^{4t}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}e^{4t}$
. $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t}$, derivando queda $\vec{x}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}(-2)e^{-2t} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-2t}$

Fácilmente se comprueba el producto $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}e^{4t}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-2t}$

(b) Escriba la solución general.

Desarrollo: $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ es un conjunto linealmente independiente.

$$a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} a_1e^{4t} + a_2e^{-2t} = 0 \\ a_1e^{4t} - a_2e^{-2t} = 0 \end{cases} \xrightarrow[t=0]{} \begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \end{cases} \therefore a_1 = a_2 = 0$$

. Teorema 3.3.1 (Principio de superposición) dice que la solución general es:
$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 \quad ; \; c_i \in \mathbb{R}$$

(c) Escriba la fórmula general para las soluciones x_1, x_2.

Desarrollo. $x_1 = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t}$, $x_2 = c_1 e^{4t} - c_2 e^{-2t}$.

Ejercicio. 3.3.2. Verifique que $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^t$ y $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^t$ son linealmente independientes.

Desarrollo. $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^t$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^t$

$a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 = \vec{0} \Rightarrow$ sistema de ecuaciones $\begin{cases} a_1e^t + a_2e^t = 0 \\ a_1e^t - a_2e^t = 0 \end{cases}$

$t=0$ tenemos el sistema $\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \end{cases}$ $\therefore a_1 = a_2 = 0$.

Ejercicio. 3.3.5. Verifique que $\begin{pmatrix}t\\t^2\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}e^t\\e^{2t}\end{pmatrix}$ son linealmente independientes

Desarrollo. $\vec{x} = \begin{pmatrix}t\\t^2\end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix}e^t\\e^{2t}\end{pmatrix}$

$a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$ implica $\begin{cases} at + be^t = 0 \\ at^2 + be^{2t} = 0 \end{cases}$ $\forall t$

De $t=0$, queda el sistema $\begin{cases} a\cdot 0 + b\cdot 1 = 0 \\ a\cdot 0 + b\cdot 1 = 0 \end{cases}$ $\therefore b=0$

Si $t \neq 0$, entonces $at=0$ implica $a=0$.

Conclusión: $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son linealmente independientes.

Ejercicio, 3.3.6 Considere el sistema $\begin{cases} x_1' + x_2' = x_1 \\ x_1' - x_2' = x_2 \end{cases}$

(a) Escriba el sistema de la forma $A\vec{x}' = B\vec{x}$

Desarrollo. $\begin{cases} x_1' + x_2' = x_1 \\ x_1' - x_2' = x_2 \end{cases}$ implica el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Como $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, se tiene $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

(b) Calcule A^{-1} y ocúpelo para el sistema anterior quede expresado de la forma $\vec{x}' = P\vec{x}$

La inversa es $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Por otro lado: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ queda de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}}_{\vec{x}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\vec{x}}$$

Ejercicio. 3.3.103. Escribe $x' = 3x - y + e^t$, $y' = tx$ en notación matricial

Desarrollo. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$

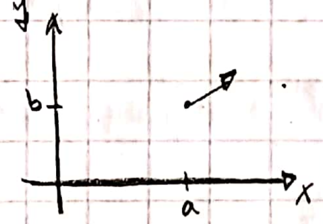
Aplicaciones de valores propios
al desarrollo de sistemas
de ecuaciones.

Partimos con el ejemplo : $\begin{cases} x' = \sqrt{2}x \\ y' = -\sqrt{2}y \end{cases}$

Solución general es $x = x_0 e^{\sqrt{2}t}$, $y' = y_0 e^{-\sqrt{2}t}$

$\begin{cases} x' = \sqrt{2}x \\ y' = -\sqrt{2}y \end{cases}$ equivale a la ecuación vectorial $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \\ & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

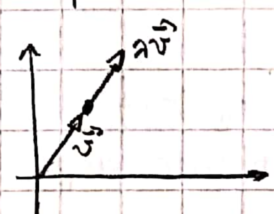
Veamos que $F(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \\ & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\sqrt{2}x, -\sqrt{2}y)$ define un campo vectorial



$(a,b) \xrightarrow{F} (\sqrt{2}a, -\sqrt{2}b)$.

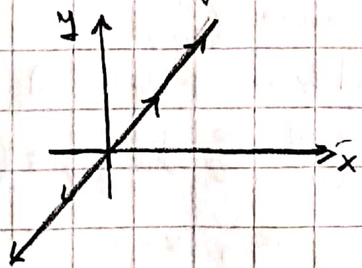
Buscamos $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$

Geométricamente



$\forall \mu \in \mathbb{R}$, se cumple $F(\mu\vec{v}) = \lambda(\mu\vec{v}) = \lambda\mu\vec{v}$

El campo vectorial F deja invariante la recta



Pregunta. ¿Cuantas rectas que pasan por el origen deja invariante F?

Respuesta: Una recta en $\mathbb{R}^2$ es un conjunto del Tipo: $\{\lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Debemos estudiar la ecuación $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \\ & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \\ & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

- $x=0, y=0$ cumple ecuación
- Supongamos $\exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tq $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \\ & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \\ & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \\ & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \\ & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda I \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \\ & -\sqrt{2} \end{pmatrix} - \lambda I\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \sqrt{2}-\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la ecuación matricial $(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ homogenea tiene solución no trivial. luego:

$$\det(A-\lambda I) = 0$$

$$\det(A-\lambda I) = (\sqrt{2}-\lambda)(-\sqrt{2}-\lambda) = 0 \iff \lambda = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

Valores propios de A son $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$.

Buscamos vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = \sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \\ & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R}, \ y = 0$$

$\lambda_1 = \sqrt{2}$ tiene vector propio asociado $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

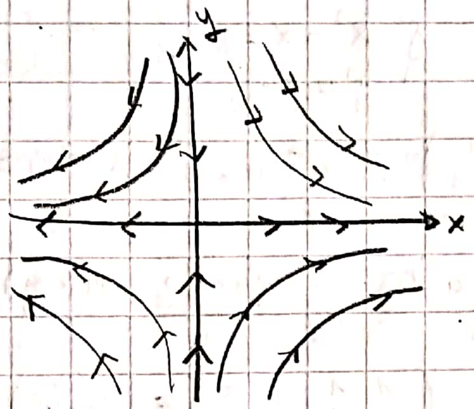
Buscamos vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = -\sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \\ & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\sqrt{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y \in \mathbb{R}, \ x = 0$$

vector propio asociado es $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Luego



Comportamiento de la solución general de $\begin{cases} x' = \sqrt{2}\, x \\ y' = -\sqrt{2}\, y \end{cases}$ desde punto de vista geométrico.

Solución es $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 e^{\sqrt{2}t} \\ y_0 e^{-\sqrt{2}t} \end{pmatrix} = x_0 e^{\sqrt{2}t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + y_0 e^{-\sqrt{2}t} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = x_0 e^{\sqrt{2}t} \hat{e}_1 + y_0 e^{-\sqrt{2}t} \hat{e}_2$

vectores propios.

Supongamos que queremos resolver el PVI:

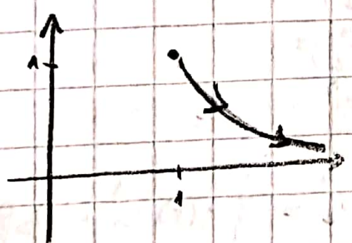
$$\begin{cases} x' = \sqrt{2}\, x & x(0) = 1 \\ y' = -\sqrt{2}\, y & y(0) = 1 \end{cases}$$

Luego $\vec{x}(0) = x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por lo tanto:

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1$$

Vector solución es $\vec{x} = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{2}t} \\ e^{-\sqrt{2}t} \end{pmatrix}$



Ahora veamos el ejemplo : $\begin{cases} x' = x+y \\ y' = x-y \end{cases}$

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Se tiene : $A\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t)$

- Buscamos las rectas invariantes del campo $F(x,y) = (x+y, x-y)$

Resolvemos la ecuación : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
para $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
$\lambda \in \mathbb{R}$

equivalentemente $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$ $= (1-\lambda)(-1-\lambda) - 1$
$= -(1-\lambda^2) - 1 = \lambda^2 - 2$

valores propios $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$

- Sea $\vec{v_i}$ vector propio asociado a valor propio λ_i

Buscamos solución del sistema de la forma

$$\vec{r}(t) = \alpha(t)\,\vec{v_1} + \beta(t)\,\vec{v_2}$$

$$\vec{r}\,'(t) = \alpha'(t)\,\vec{v_1} + \beta'(t)\,\vec{v_2}$$

$$\begin{aligned} A\vec{r}(t) &= A\left(\alpha(t)\vec{v_1} + \beta(t)\vec{v_2}\right) \\ &= A(\alpha(t)\vec{v_1}) + A(\beta(t)\vec{v_2}) \\ &= \alpha(t)(A\vec{v_1}) + \beta(t)(A\vec{v_2}) \\ &= \alpha(t)(\lambda_1\vec{v_1}) + \beta(t)(\lambda_2\vec{v_2}) \\ &= \lambda_1\alpha(t)\,\vec{v_1} + \lambda_2\beta(t)\,\vec{v_2} \end{aligned}$$

la igualdad $\alpha'(t)\vec{v_1} + \beta'(t)\vec{v_2} = \lambda_1\alpha(t)\vec{v_1} + \lambda_2\beta(t)\vec{v_2}$

implica $(\alpha'(t) - \lambda_1\alpha(t))\,\vec{v_1} + (\beta'(t) - \lambda_2\beta(t))\,\vec{v_2} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} \vec{v_1} & \vec{v_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha'(t) - \lambda_1\alpha(t) \\ \beta'(t) - \lambda_2\beta(t) \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \forall t$$

Como $\vec{v_1} \not\parallel \vec{v_2}$, se tiene que $\det(\vec{v_1}\ \vec{v_2}) \neq 0$. De manera equivalente

$$\begin{pmatrix} \alpha'(t) - \lambda_1 \alpha(t) \\ \beta'(t) - \lambda_2 \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir $\alpha'(t) = \lambda_1 \alpha(t)$, $\beta'(t) = \lambda_2 \beta(t)$.

Solucionando el sistema: $\alpha(t) = \alpha_0 e^{\lambda_1 t}$, $\beta(t) = \beta_0 e^{\lambda_2 t}$

Vamos al caso particular de $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$

Buscamos vectores propios:

$\lambda_1 = \sqrt{2}$: $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -1-\sqrt{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1-\sqrt{2} & 0 \\ 1-\sqrt{2} & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to -(1-\sqrt{2})f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se tiene $x + (-1-\sqrt{2})y = 0$

Equivalentemente $x = (1+\sqrt{2})y$

Vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = \sqrt{2}$ es $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -\sqrt{2}$: $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -1+\sqrt{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1+\sqrt{2} & 0 \\ 1+\sqrt{2} & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 \to f_2 - (1+\sqrt{2})f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Solución es $x + (-1+\sqrt{2})y = 0$ (equiv: $x = (1-\sqrt{2})y$)

Vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ es $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

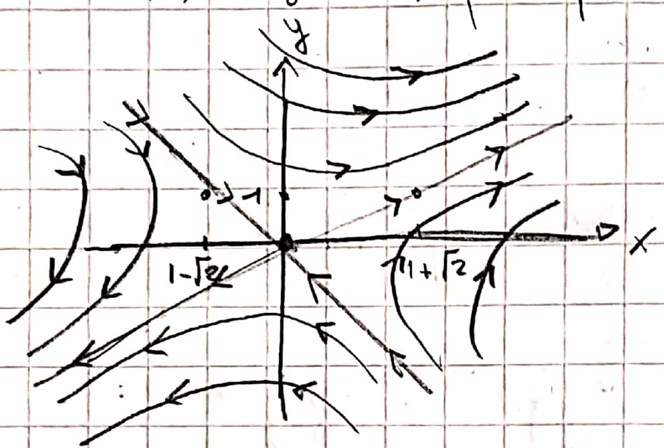
Buscamos solución del tipo $\vec{r}(t) = \alpha(t)\vec{v_1} + \beta(t)\vec{v_2}$

De la misma manera que en el caso anterior:

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'(t) - \sqrt{2}\alpha(t) \\ \beta'(t) + \sqrt{2}\beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1+\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} = -2\sqrt{2} \neq 0$$

soluciones son $\alpha(t) = \alpha_0 e^{\sqrt{2}t}$, $\beta(t) = \beta_0 e^{-\sqrt{2}t}$



Comportamiento de la solución general

de $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}$

La solución general es $\vec{r}(t) = \alpha_0 e^{\sqrt{2}t} \vec{v_1} + \beta_0 e^{-\sqrt{2}t} \vec{v_2}$

$$\vec{r}(t) = \underbrace{\left(e^{\sqrt{2}t} \vec{v_1} \quad e^{-\sqrt{2}t} \vec{v_2} \right)}_{\text{matriz fundamental de la solución}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}}_{\text{vector columna de las constantes.}}$$

Ejemplo. Resolver el PVI:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \alpha_0 \vec{v_1} + \beta_0 \vec{v_2} = \begin{pmatrix} \alpha_0(1+\sqrt{2}) + \beta_0(1-\sqrt{2}) \\ \alpha_0 + \beta_0 \end{pmatrix}$$

Ecuación matricial $\left(\vec{v_1} \quad \vec{v_2}\right) \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Equivalente: $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 \\ -1 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}-1 \\ -1+\sqrt{2}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

3.4.3 Valores propios complejos.

Supongamos que queremos resolver $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
$x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$.

Calculamos valores propios: $p(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \right)$

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$p(\lambda) = 0$ ssi $\lambda = 1 \pm i$.

Calculamos vectores propios para $\lambda_1 = 1+i$, $\lambda_2 = 1-i$

- El caso $\lambda_1 = 1+i$.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \right) \vec{v} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 1-1-i & 1 \\ -1 & 1-1-i \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$$

Para $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, Tomamos la ecuación $-iv_1 + v_2 = 0 \iff v_2 = iv_1$

Así:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ iv_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Tomamos el vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_1 = 1+i$.

- El caso $\lambda_2 = 1-i$.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \right) \vec{v} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 1-1+i & 1 \\ -1 & 1-1+i \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$$

Tomamos la segunda ecuación $-v_1 + iv_2 = 0$, i.e: $iv_2 = v_1$.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iv_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomamos el vector propio $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_2 = 1-i$

la solución general en este caso es:

$$\vec{x} = C_1 e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + C_2 e^{(1-i)t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

En efecto:

$$\vec{x}\,' = (1+i)C_1 e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + (1-i)C_2 e^{(1-i)t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\left(C_1 e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + C_2 e^{(1-i)t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= C_1 e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + C_2 e^{(1-i)t}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= C_1 e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 1+i \\ -1+i \end{pmatrix} + C_2 e^{(1-i)t}\begin{pmatrix} i+1 \\ -i+1 \end{pmatrix}$$

$$= (1+i)C_1 e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + (1-i)C_2 e^{(1-i)t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observar lo siguiente; como $e^{(1+i)t} = e^t(\cos(t) + i\,\text{sen}(t))$, $e^{(1-i)t} = e^t(\cos(t) - i\,\text{sen}(t))$,

$$\vec{x} = C_1 e^t(\cos(t) + i\,\text{sen}(t))\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + C_2 e^t(\cos(t) - i\,\text{sen}(t))\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 e^t(\cos(t)+i\,\text{sen}(t)) + C_2 e^t(\cos(t)-i\,\text{sen}(t))\,i \\ C_1 e^t(\cos(t)+i\,\text{sen}(t))\,i + C_2 e^t(\cos(t)-i\,\text{sen}(t)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 e^t\cos(t) + C_2 e^t\,\text{sen}(t) \\ -C_1 e^t\,\text{sen}(t) + C_2 e^t\cos(t) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} C_1 e^t\,\text{sen}(t) + C_2 e^t\cos(t) \\ C_1 e^t\cos(t) - C_2 e^t\,\text{sen}(t) \end{pmatrix}$$

$$= Re(\vec{x}) + i\,Im(\vec{x})$$

Definimos el conjugado $\overline{\vec{x}} = Re(\vec{x}) - i\,Im(\vec{x})$

$$Re(\vec{x}) = \frac{\vec{x} + \overline{\vec{x}}}{2}, \qquad Im(\vec{x}) = \frac{\vec{x} - \overline{\vec{x}}}{2}$$

Observación. Para la ecuación $(P-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$ donde λ es un valor propio complejo:

$$\vec{0} = \overline{\vec{0}} = \overline{(P-\lambda I)\vec{v}} = (\overline{P}-\overline{\lambda}\,\overline{I})\overline{\vec{v}} = (P-\overline{\lambda}I)\overline{\vec{v}}$$

O sea, $\overline{\vec{v}}$ es vector propio asociado al valor propio $\overline{\lambda}$.

Ejemplo. Para $\lambda_2 = 1-i = \overline{\lambda_1}$, tenemos $\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\vec{w} = \vec{0}$

Para $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i-i \\ -1-i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

La solución general de $\vec{x} = C_1 e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + C_2 e^{(1-i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

$$\vec{x} = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v} + C_2 e^{\overline{\lambda_1} t}\overline{\vec{v}}$$

$$\vec{x} = C_1 \underbrace{e^{\lambda_1 t}\vec{v}}_{\vec{z}} + C_2 \underbrace{\overline{e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1}}_{\overline{\vec{z}}}$$

Observación. $\overline{e^{(a+ib)t}} = \overline{e^{at}e^{bti}} = e^{at}\overline{(\cos(bt)+i\,\text{sen}(bt))}$

$$= e^{at}(\cos(bt) - i\,\text{sen}(bt))$$

$$= e^{at}e^{-bti} = e^{(a-bi)t} = e^{\overline{(a+ib)}t}$$

* En resumen: Son soluciones de $\vec{x}' = P\vec{x}$:

(i) $\vec{x} = C_1\vec{z}_1 + C_2\overline{\vec{z}}$, donde $\vec{z} = e^{\lambda t}\vec{v}$ (Soluciones tipo compleja)

(ii) $\vec{x} = C_1\,\text{Re}(e^{\lambda t}\vec{v}) + C_2\,\text{Im}(e^{\lambda t}\vec{v}_1)$ (Soluciones tipo real)