Cohomología y cuerpos de Clase
Desarrollo Tarea nº 1
Marco Godoy V.

<u>Teorema</u> (Cup products) Sea G un grupo. Para M, N G-módulos, escribimos $M \otimes N$ para denotar a $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$, dotado de la estructura de G-módulo mediante

$$g(m \otimes n) = gm \otimes gn \ ; \quad g \in G, \ m \in M, \ n \in N.$$

Existe una, y sólo una familia de funciones $\mathbb{Z}$-lineales:

6,6

$$\cup : H^r(G,M) \otimes H^s(G,N) \longrightarrow H^{r+s}(G, M \otimes N)$$
$$m \otimes n \longmapsto m \cup n$$

definidas sobre los G-módulos M y N y para todos los enteros $r, s \geq 0$, y que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) Es functorial en cada variable.

(ii) Para $r = s = 0$, esta función es igual a

$$M^G \otimes N^G \longrightarrow (M \otimes N)^G$$
$$m \otimes n \longmapsto m \otimes n$$

(iii) Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta de G-módulos tal que $0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ es exacta (como G-módulos), entonces

$$(\delta m'') \cup n = \delta(m'' \cup n) \ , \quad m'' \in H^r(G, M''), \ n \in H^s(G,N),$$

donde δ denota el homomorfismo conector $H^r(G,M'') \to H^r(G,M')$ o $H^{r+s}(G, M'' \otimes N) \to H^{r+s+1}(G, M' \otimes N)$, dependiendo del caso.

(d) Si $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ es sucesión exacta de G-módulos tal que $0 \to M\otimes N' \to M\otimes N \to M\otimes N'' \to 0$ es exacta, entonces

$$m \cup \delta n'' = (-1)^r \delta(m \cup n''), \quad m \in H^r(G,M), \quad n'' \in H^s(G,N'')$$

<u>demostración</u>. La unicidad del cup producto ya fue explicada en clases. Sólo queda demostrar la existencia.

Antes de realizar la demostración, procedemos a explicar unos detalles y resultados previos; además de introducir la notación necesaria.

Para la sucesión exacta de G-módulos $0 \to M' \xrightarrow{z} M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0$,

tenemos $0 \to M'\otimes N \xrightarrow{z\otimes id} M\otimes N \xrightarrow{\pi\otimes id} M''\otimes N \to 0$ donde

$(z\otimes id)(m'\otimes n) = z(m')\otimes n$, $(\pi\otimes id)(m\otimes n) = \pi(m)\otimes n$. Análogamente, para $0 \to N' \xrightarrow{z} N \xrightarrow{\pi} N'' \to 0$, $0 \to M\otimes N' \xrightarrow{id\otimes z} M\otimes N \xrightarrow{id\otimes\pi} M\otimes N'' \to 0$,

$(id\otimes z)(m\otimes n') = m\otimes z(n')$, $(id\otimes\pi)(m\otimes n) = m\otimes\pi(n)$. Si $z\otimes id$, $\pi\otimes id$, $id\otimes z$, $id\otimes\pi$ se extienden por $\mathbb{Z}$-linealidad, es evidente que son homomorfismos de G-módulos.

(mas adelante se usa como hipótesis que es exacta)

¿suc. escindida o N plano?

Para trabajar con los grupos $H^r(G,M)$, usaremos co-cadenas, es decir, $\forall r \geq 0$ entero positivo, $C^r(G,M) = \{\varphi : G^r \to M\}$ como grupo abeliano,

$d^r_M : C^r(G,M) \to C^{r+1}(G,M)$,

$$(d^r_M\varphi)(g_1,\dots,g_{r+1}) = g_1\varphi(g_2,\dots,g_{r+1}) + \sum_{i=1}^{r}(-1)^i\varphi(g_1,\dots,g_ig_{i+1},\dots g_{r+1})$$
$$+(-1)^{i+1}(g_1,\dots,g_r)$$

Cumple con ser $\mathbb{Z}$-lineal y $d^{r+1}_M \circ d^r_M = 0$. Al complejo de cocadenas $\dots \xrightarrow{d^{r-1}_M} C^r(G,M) \xrightarrow{d^r_M} C^{r+1}(G,M) \xrightarrow{d^{r+1}_M} C^{r+2}(G,M) \to \dots$, lo denotamos por $C^\bullet(G,M)$

Para $M \xrightarrow{\alpha} N$ homomorfismo de G-módulos, existe $\forall r \geq 0$ entero, $\alpha^r : C^r(G,M) \to C^r(G,N)$ homo de grupos, abelianos, tal que

$$d_N^r \circ \alpha^r = \alpha^{r+1} \circ d_M^r$$

. En particular, para la sucesión exacta de G-módulos $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0$,

$$0 \to C^r(G,M') \xrightarrow{i^r} C^r(G,M) \xrightarrow{\pi^r} C^r(G,M'') \to 0$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos.

El r-ésimo grupo de Cohomología de M se define en este caso, como $H^r(G,M) := Z^r(G,M) / B^r(G,M)$, donde $Z^r(G,M) = \ker(d_M^r)$,

$B^r(G,M) = \operatorname{Im}(d_M^{r-1})$ $\left(d_M^r \circ d_M^{r-1} = 0 \iff B^r(G,M) \subseteq Z^r(G,M) \right)$.

Se tiene que $H^0(G,M) = M^G$.

Un resultado importante que nos ayudará a entender el comportamiento del cup producto es el siguiente:

Dada $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0$ exacta corta de G-módulos, existe una sucesión exacta de grupos abelianos

$$0 \to M'^G \xrightarrow{i_*^0} M^G \xrightarrow{\pi_*^0} M''^G \xrightarrow{\delta^0} H^1(G,M') \xrightarrow{i_*^1} H^1(G,M) \xrightarrow{\pi_*^1} H^1(G,M'') \xrightarrow{\delta^1} H^2(G,M')$$

$$\xrightarrow{i_*^2} H^2(G,M) \xrightarrow{\pi_*^2} H^2(G,M'') \xrightarrow{\delta^2} \cdots \xrightarrow{\pi_*^{i-1}} H^{i-1}(G,M'') \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(G,M') \xrightarrow{i_*^i} H^i(G,M) \xrightarrow{\pi_*^i} H^i(G,M'')$$

$$\xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(G,M') \xrightarrow{i_*^{i+1}} H^{i+1}(G,M) \xrightarrow{\pi_*^{i+1}} H^{i+1}(G,M'') \xrightarrow{\delta^{i+1}} \cdots$$

donde $\iota^i_*([\alpha']) = [\iota^i(\alpha')]$, $\pi^i_*([\beta]) = [\pi^i(\beta)]$ y δ^i es el homomorfismo conector. Para estudiar δ^i recordemos que tenemos

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & {} \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & {} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C^i(G,M') \arrow[r, "\iota^i"] \arrow[d, "d^i_{M'}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C^i(G,M) \arrow[r, "\pi^i"] \arrow[d, "d^i_M"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C^i(G,M'') \arrow[r] \arrow[d, "d^i_{M''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{i+1}(G,M') \arrow[r, "\iota^{i+1}"] \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\circlearrowleft"] & C^{i+1}(G,M) \arrow[r, "\pi^{i+1}"] \arrow[d] & C^{i+1}(G,M'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

donde $d^i_M \circ \iota^i = \iota^{i+1} \circ d^i_{M'}$, $d^i_{M''} \circ \pi^i = \pi^{i+1} \circ d^i_M$. La manera de definir δ^i es la siguiente: dado $\varphi'' \in Z^i(G,M'')$ representante de $m'' \in H^i(G,M'')$, existe un levantamiento $\varphi \in C^i(G,M)$ de φ'' ($\pi^i(\varphi'') = \varphi$). Como $\pi^{i+1}(d^i_M(\varphi)) = d^i_{M''}(\pi^i(\varphi)) = d^i_{M''}(\varphi'') = 0$, entonces $d^i_M(\varphi) \in \ker(\pi^{i+1}) = \mathrm{Im}(\iota^{i+1})$. Luego $d^i_M(\varphi)$ es la imagen de un elemento $z \in C^{i+1}(G,M')$ mediante ι^{i+1} ($\iota^{i+1}(z) = d^i_M(\varphi)$).

Como ι^{i+1} es inyectiva, tal z es único. Notar que

$$\iota^{i+2}(d^{i+1}_{M'}(z)) = d^{i+1}_M(\iota^{i+1}(z)) = d^{i+1}_M(d^i_M(\varphi)) = 0$$

$$\therefore\ d^{i+1}_{M'}(z) \in \ker(\iota^{i+2})$$

Como ι^{i+2} es inyectiva, $d^{i+1}_{M'}(z) = 0$. Luego $z \in Z^{i+1}(G,M')$

Ahora si $\varphi, \tilde{\varphi} \in C^i(G,M)$ cumplen $\pi^i(\varphi) = \pi^i(\tilde{\varphi}) = \varphi''$, entonces existen únicos $z, \tilde{z} \in Z^i(G,M')$ tales que

$$\iota^{i+1}(z) = d^i_M(\varphi)$$
$$\iota^{i+1}(\tilde{z}) = d^i_M(\tilde{\varphi})$$

Scanned with CamScanner

$i^{i+1}(z-\tilde{z}) = d_M^i(\varphi-\tilde{\varphi}) = d_M^i(\varphi) - d_M^i(\tilde{\varphi}) = \varphi'' - \varphi'' = 0$. Así $z-\tilde{z} \in \ker i^{i+1}$, como i^{i+1} es inyectiva, $z = \tilde{z}$.

Con lo anterior, tenemos que si $\varphi'' \in Z^i(G,M'')$ es un representante de $m'' \in H^i(G,M'')$, entonces z es el único representante de $\delta^i(m'')$ en $H^{i+1}(G,M')$. Así es cómo se define δ^i. Resumimos lo anterior en el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & C^i(G,M) \arrow[r] \arrow[d] & C^i(G,M'') \\
 & \varphi \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & \varphi'' \in Z^i(G,M'') \\
C^{i+1}(G,M') \arrow[r] & C^{i+1}(G,M) & \\
z \arrow[r, mapsto] & d_M^i(\varphi) = i^{i+1}(z) &
\end{tikzcd}
$$

Ahora procedemos a estudiar el cup producto.

Para M, N G-módulos, definimos la siguiente operación a nivel de co-cadenas:

$$
\begin{array}{ccc}
C^r(G,M) \otimes C^s(G,N) & \xrightarrow{\cup} & C^{r+s}(G, M\otimes N) \\
\varphi \otimes \psi & \longmapsto & \lambda
\end{array}
$$

donde $\lambda(g_1, \ldots, g_{r+s}) = \varphi(g_1, \ldots, g_r) \otimes g_1 \cdots g_r \, \psi(g_{r+1}, \ldots, g_{r+s})$ (Todos los tensores son sobre $\mathbb{Z}$), luego extendemos la definición por $\mathbb{Z}$-linealidad. Denotemos $\lambda = \varphi \cup \psi$.

Esta operación cumple la siguiente propiedad a nivel de co-cadenas

<u>Afirmación</u>. Para $\varphi \in C^r(G,M)$, $\psi \in C^s(G,N)$ se cumple la igualdad

$$d^{r+s}_{M\otimes N}(\varphi\cup\psi) = d^r_M(\varphi)\cup\psi + (-1)^r d^s_N(\psi)$$

<u>dem.</u> $\varphi\cup\psi \in C^{r+s}(G, M\otimes N)$. para $(g_1,\dots,g_{r+s})$

g_{r+s+1}

$$d^{r+s}_{M\otimes N}(\varphi\cup\psi)(g_1,\dots,g_{r+s}) = g_1(\varphi\cup\psi)(g_2,\dots,g_{r+s})$$

$$+ \sum_{l=1}^{r+s}(-1)^l(\varphi\cup\psi)(g_1,\dots,g_l g_{l+1},\dots,g_{r+s}) + (-1)^{r+s+1}(\varphi\cup\psi)(g_1,\dots,g_{r+s})$$

$+1$ $\quad 2$

$$= g_1\varphi(g_2,\dots,g_{r+1})\otimes g_1\cdots g_{r+1}\psi(g_{r+1},\dots,g_{r+s})$$

$$+ \sum_{l=1}^{r}(-1)^l\varphi(g_1,\dots,g_l g_{l+1},\dots,g_{r+1})\otimes g_1\cdots g_{r+1}\psi(g_{r+2},\dots,g_{r+s+1})$$

$$+ \sum_{l=r+1}^{r+s}(-1)^l\varphi(g_1,\dots,g_r)\otimes g_1\cdots g_r\psi(g_{r+1},\dots,g_l g_{l+1},\dots,g_{r+s+1})$$

$$+(-1)^{r+s+1}\big(\varphi(g_1,\dots,g_r)\otimes g_1,\dots,g_r\psi(g_{r+1},\dots,g_{r+s})\big)$$

Por otro lado,

$$(d^r_M(\varphi)\cup\psi)(g_1,\dots,g_{r+s+1}) = d^r_M(\varphi)(g_1,\dots,g_{r+1})\otimes g_1\cdots g_{r+1}\psi(g_{r+2},\dots,g_{r+s+1})$$

$$= g_1\varphi(g_2,\dots,g_{r+1})\otimes g_1\cdots g_{r+1}\psi(g_{r+2},\dots,g_{r+s+1})$$

$$+ \sum_{l=1}^{r}(-1)^r\varphi(g_1,\dots,g_l g_{l+1},\dots,g_{r+1})\otimes g_1\cdots g_{r+1}\psi(g_{r+2},\dots,g_{r+s+1})$$

$$+(-1)^{r+1}\varphi(g_1,\dots,g_r)\otimes g_1\cdots g_{r+1}\psi(g_{r+2},\dots,g_{r+s+1})$$

O.K

$$\varphi \cup d_N^s(\psi)(g_1,\dots,g_{r+s+1}) = \varphi(g_1,\dots,g_r)\otimes g_1\cdots g_r\, d_N^s(\psi)(g_{r+1},\dots,g_{r+s+1})$$

$$= \varphi(g_1,\dots,g_r)\otimes g_1\cdots g_{r+1}\psi(g_{r+2},\dots,g_{r+s+1})$$
$$+ \sum_{l=r+1}^{r+s}(-1)^{l-r}\varphi(g_1,\dots,g_r)\otimes g_1\cdots g_r\psi(g_{r+1},\dots,g_l g_{l+1},\dots,g_{r+s+1})$$
$$+(-1)^{s+1}\varphi(g_1,\dots,g_r)\otimes g_1\cdots g_r\psi(g_{r+1},\dots,g_{r+s})$$

$$\Rightarrow (-1)^r\varphi\cup d_N^s(\psi)(g_1,\dots,g_{r+s+1}) = (-1)^r\varphi(g_1,\dots,g_r)\otimes g_1\cdots g_{r+1}\psi(g_{r+2},\dots,g_{r+s+1})$$
$$+\sum_{l=r+1}^{r+s}(-1)^{l}\varphi(g_1,\dots,g_r)\otimes g_1\cdots g_r\psi(g_{r+1},\dots,g_l g_{l+1},\dots,g_{r+s+1})$$
$$+(-1)^{r+s+1}\varphi(g_1,\dots,g_r)\otimes g_1\cdots g_r\psi(g_{r+1},\dots,g_{r+s})$$

obs: $d_N^s(\psi)(g_{r+1},\dots,g_{r+s+1}) = g_{r+1}\psi(g_{r+2},\dots,g_{r+s+1}) + \sum_{l=r+1}^{r+s}(-1)^{l-r}\psi(g_{r+1},\dots,g_l g_{l+1},\dots,g_{r+s+1})$
$+(-1)^{s+1}\psi(g_{r+1},\dots,g_{r+s})$

Como

$$(-1)^r\varphi(g_1,\dots,g_r)\otimes g_1\cdots g_{r+1}\psi(g_{r+2},\dots,g_{r+s+1}) + (-1)^{r+1}\varphi(g_1,\dots,g_r)\otimes g_1\cdots g_{r+1}\psi(g_{r+2},\dots,g_{r+s+1}) = 0,$$

se cumple la igualdad

$$d_{M\otimes N}^{r+s}(\varphi\cup\psi)(g_1,\dots,g_{r+s+1}) = d_M^r(\varphi)\cup\psi(g_1,\dots,g_{r+s+1}) + (-1)^r\varphi\cup d_N^s(\psi)(g_1,\dots,g_{r+s+1})$$

para todo $(g_1,\dots,g_{r+s+1})\in G^{r+s+1}$

$$\therefore\ d_{M\otimes N}^{r+s}(\varphi\cup\psi) = d_M^r(\varphi)\cup\psi + (-1)^r\varphi\cup d_N^s(\psi)$$

De la igualdad $d^{r+s}_{M\otimes N}(\varphi\cup\psi) = d^r_M(\varphi)\cup\psi + (-1)^r\varphi\cup d^s_N(\psi)$

se deduce que si $\varphi\in Z^r(G,M)$, $\psi\in Z^s(G,N)$, entonces $d^r_M(\varphi)=0$, $d^s_N(\psi)=0$. Luego $d^{r+s}_{M\otimes N}(\varphi\cup\psi)=0$, o sea, $\varphi\cup\psi\in Z^{r+s}(G,M\otimes N)$. Si $\varphi\in Z^r(G,M)$, $\psi\in B^s(G,N)$, existe $\psi'\in C^{s-1}(G,N)$ tal que $d^{s-1}_N(\psi')=\psi$ y

$$d^{r+s-1}_{M\otimes N}(\varphi\cup\psi') = \overset{0}{\cancel{d^r_M(\varphi)}}\cup\psi' + (-1)^r\varphi\cup d^{s-1}_N(\psi')$$
$$= (-1)^r\varphi\cup\psi$$
$$\Rightarrow \quad \varphi\cup\psi = d^{r+s-1}_{M\otimes N}((-1)^r(\varphi\cup\psi'))$$
$$\therefore \ \varphi\cup\psi\in B^{r+s}(G,M\otimes N)$$

Análogamente, si $\varphi\in B^r(G,M)$ y $\psi\in Z^s(G,N)$, $\varphi\cup\psi\in B^{r+s}(G,M\otimes N)$.

Sean $\varphi+\hat{\varphi}$, $\psi+\hat{\psi}$ representantes de $m\in H^r(G,M)$ y $n\in H^s(G,N)$ respectivamente ($\varphi\in Z^r(G,M)$, $\hat{\varphi}\in B^r(G,M)$, $\psi\in Z^s(G,N)$, $\hat{\psi}\in B^s(G,N)$)

$$(\varphi+\hat{\varphi})\cup(\psi+\hat{\psi})(g_1,\dots,g_{r+s})$$
$$= (\varphi+\hat{\varphi})(g_1,\dots,g_{r+s})\otimes g_1\cdots g_r(\psi+\hat{\psi})(g_{r+1},\dots,g_{r+s})$$
$$= \left(\varphi(g_1,\dots,g_{r+s})+\hat{\varphi}(g_1,\dots,g_{r+s})\right)\otimes\left(g_1\cdots g_r\psi(g_{r+1},\dots,g_{r+s})+g_1\cdots g_r\hat{\psi}(g_{r+1},\dots,g_{r+s})\right)$$
$$= \varphi(g_1,\dots,g_{r+s})\otimes g_1\cdots g_r\psi(g_{r+1},\dots,g_{r+s}) + \varphi(g_1,\dots,g_{r+s})\otimes g_1\cdots g_r\hat{\psi}(g_{r+1},\dots,g_{r+s})$$
$$+\hat{\varphi}(g_1,\dots,g_{r+s})\otimes g_1\cdots g_r\psi(g_{r+1},\dots,g_{r+s}) + \hat{\varphi}(g_1,\dots,g_{r+s})\otimes g_1\cdots g_r\hat{\psi}(g_{r+1},\dots,g_{r+s})$$

es decir, $(\varphi+\hat{\varphi})\cup(\psi+\hat{\psi}) = \varphi\cup\psi+\varphi\cup\hat{\psi}+\hat{\varphi}\cup\psi+\hat{\varphi}\cup\hat{\psi}$,

donde $\varphi\cup\psi\in Z^{r+s}(G,M\otimes N)$ y $\varphi\cup\hat{\psi}+\hat{\varphi}\cup\psi+\hat{\varphi}\cup\hat{\psi}\in B^{r+s}(G,M\otimes N)$.

Luego, a nivel de cohomología, $[\varphi\cup\psi] = [(\varphi+\hat{\varphi})\cup(\psi+\hat{\psi})]$

De lo anterior podemos concluir que el cup producto a nivel de co-cadenas, induce un cup producto a nivel de cohomología:

$$H^r(G,M)\otimes H^s(G,N) \xrightarrow{\;\cup\;} H^{r+s}(G,M\otimes N)$$

donde, si φ es representante de $m\in H^r(G,M)$ y ψ es representante de $n\in H^s(G,N)$, $\varphi\cup\psi$ es representante de $m\cup n\in H^{r+s}(G,M\otimes N)$.
Dicho de otro modo, podemos definir $[\varphi]\cup[\psi]$ como

$$[\varphi]\cup[\psi]=[\varphi\cup\psi].$$

Como el producto tensorial y tomar clase de equivalencia respetan la suma, este cup producto pasa a ser homomorfismo de grupos abelianos.

—o—

Vamos a demostrar que el cup producto es functorial en cada variable.
Sean $f:N\to N'$, $\tilde f=id\otimes f: M\otimes N\to M\otimes N'$, $m\otimes n\longmapsto m\otimes f(n)$ homomorfismos de G-módulos. Tenemos los morfismos de cadenas correspondientes

$$f^\bullet: C^\bullet(G,N)\longrightarrow C^\bullet(G,N')$$
$$\tilde f^\bullet: C^\bullet(G,M\otimes N)\longrightarrow C^\bullet(G,M\otimes N')$$

que hacen los siguientes cuadrados conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
C^r(G,N) \arrow[r, "f^r"] \arrow[d, "d_N^r"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C^r(G,N') \arrow[d, "d_{N'}^r"] \\
C^{r+1}(G,N) \arrow[r, "f^{r+1}"'] \arrow[d] & C^{r+1}(G,N') \arrow[d] \\
\vdots & \vdots
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
C^r(G,M\otimes N) \arrow[r, "\tilde f^r"] \arrow[d, "d_{M\otimes N}^r"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C^r(G,M\otimes N') \arrow[d, "d_{M\otimes N'}^r"] \\
C^{r+1}(G,M\otimes N) \arrow[r, "\tilde f^{r+1}"'] \arrow[d] & C^{r+1}(G,M\otimes N) \arrow[d] \\
\vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

Scanned with CamScanner

y los homomorfismos de cohomología

$$f_* : H^r(G,N) \longrightarrow H^r(G,N') \qquad\qquad \tilde{f}_* : H^r(G,M\otimes N) \longrightarrow H^r(G,M\otimes N')$$
$$[\varphi] \longmapsto [f^r(\varphi)] \qquad\qquad [\beta] \longmapsto [\tilde{f}^r(\beta)]$$

Para $[\varphi]\in H^s(G,N)$, $[\psi]\in H^0(G,M)$,

$$f_*([\varphi]) = [f^s(\varphi)] = [f\circ\varphi] \in H^s(G,N')$$
$$[\psi]\cup[f^s(\varphi)] = [\psi\cup f^s(\varphi)] \in H^s(G,M\otimes N')$$

Por otro lado,

$$[\psi]\cup[\varphi] = [\psi\cup\varphi] \in H^s(G,M\otimes N)$$
$$\tilde{f}_*([\psi]\cup[\varphi]) = \tilde{f}_*([\psi\cup\varphi]) = [\tilde{f}^s(\psi\cup\varphi)] \in H^s(G,M\otimes N')$$

pero $\tilde{f}^s(\psi\cup\varphi)(g_1,\dots,g_s) = \tilde{f}\circ(\psi\cup\varphi)(g_1,\dots,g_s)$

$$= \tilde{f}(\psi(\star)\otimes\varphi(g_1,\dots,g_s)) = \psi(\star)\otimes f(\varphi(g_1,\dots,g_s))$$
$$= \psi(\star)\otimes(f\circ\varphi)(g_1,\dots,g_s) = \psi\cup f\circ\varphi(g_1,\dots,g_s) = (\psi\cup f^s(\varphi))(g_1,\dots,g_s)$$

$$\therefore\ \tilde{f}^s(\psi\cup\varphi) = \psi\cup f^s(\varphi)$$

$$\therefore\ [\tilde{f}^s(\psi\cup\varphi)] = [\psi\cup f^s(\varphi)]$$

Así, el cuadrado siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^s(G,N) & \xrightarrow{f_*} & H^s(G,N') \\ {\scriptstyle [\psi]\cup -}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [\psi]\cup -} \\ H^s(G,M\otimes N) & \xrightarrow[\tilde{f}_*]{} & H^s(G,M\otimes N') \end{array}$$

obs. $\psi\in Z^0(G,M)$ donde $G^0=\{\star\}$ y $\psi(\star)\in M$

De la misma manera, si $f: M \longrightarrow M'$ y $\tilde{f} = f \otimes id : M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N$
$m \otimes n \longmapsto f(m) \otimes n$

son homomorfismo de G-módulos, entonces el cuadrado siguiente

$$\begin{tikzcd} H^r(G,M) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\_ \cup [\psi]"'] & H^r(G,M') \arrow[d, "\_ \cup [\psi]"] \\ H^r(G,M\otimes N) \arrow[r, "\tilde{f}_*"'] & H^r(G,M'\otimes N) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Se tiene así la parte (i) del teorema.

Para $r=s=0$, $H^0(G,M) = M^G$, $H^0(G,N) = N^G$, entonces

$\cup : H^0(G,M) \otimes H^0(G,N) \longrightarrow H^0(G,M\otimes N) = (M\otimes N)^G$. Sea

$\varphi \in Z^0(G,M)$ un representante de $m \in H^0(G,M)$ y $\psi \in Z^0(G,N)$ representante de $n \in H^0(G,N)$,

$$(\varphi \cup \psi)(*) = \varphi(*) \otimes \psi(*) = (\varphi \otimes \psi)(*)$$

$\Rightarrow$ $\varphi \otimes \psi$ es representante de $m \cup n \in H^0(G, M\otimes N)$

$\therefore$ $\varphi \otimes \psi \longmapsto \varphi \cup \psi = \varphi \otimes \psi$ a nivel de cocadenas

$\therefore$ A nivel de cocadenas, el cup producto es la identidad.

Como $\ker d_M^0 = M^G$, $\ker d_N^0 = N^G$, $m = \varphi(*) + \{0\}$, $n = \psi(*) + \{0\}$,

podemos asumir $m = \varphi(*)$, $n = \psi(*)$

$\Rightarrow$ $(\varphi \cup \psi)(*) = m \otimes n$

$\therefore$ $\underbrace{m \otimes n}_{\text{a nivel de clase}} = \varphi(*) \otimes \psi(*) + \{0\} = \underbrace{m \otimes n}_{\in M\otimes N} + \{0\}$

Así, a nivel de cohomología $H^0(G,M) \otimes H^0(G,N) \longrightarrow H^0(G,M\otimes N)$ es la identidad.
$m \otimes n \longmapsto m \otimes n$.

Scanned with CamScanner

Falta demostrar las propiedades que involucran al homomorfismo conector δ.

Para $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0$ y $0 \to M'\otimes N \xrightarrow{i\otimes id} M\otimes N \xrightarrow{\pi\otimes id} M''\otimes N \to 0$ exactas de G-módulos, sean $\varphi \in Z^r(G, M'')$ y $\psi \in Z^s(G,N)$ representantes de $m'' \in H^r(G,M'')$ y $n \in H^s(G,N)$ respectivamente, existe único $z \in Z^{r+1}(G,M')$ representante de $\delta(m'') \in H^{r+1}(G,M')$.

Además,

$$\delta(m'') \in H^{r+1}(G,M'),\ n \in H^s(G,N) \Rightarrow \delta(m)\cup n \in H^{r+s+1}(G,M'\otimes N)$$

con representante $z \cup \psi$.

Como φ tiene un levantamiento $\varphi' \in C^r(G,M)$ por π^r ($\pi^r(\varphi') = \varphi$), se tiene que $\forall (g_1,\dots,g_{r+s}) \in G^{r+s}$

$$\begin{aligned}
(\pi\otimes id)^{r+s}(\varphi'\cup\psi)(g_1,\dots,g_{r+s}) &= (\pi\otimes id)(\varphi'\cup\psi)(g_1,\dots,g_{r+s}) \\
&= (\pi\otimes id)(\varphi'(g_1,\dots,g_r)\otimes g_1\cdots g_r\psi(g_{r+1},\dots,g_{r+s})) \\
&= \pi(\varphi'(g_1\dots g_r))\otimes g_1\cdots g_r\psi(g_{r+1},\dots,g_{r+s}) \\
&= \pi^r(\varphi')(g_1\dots g_r)\otimes g_1\cdots g_r\psi(g_{r+1},\dots,g_{r+s}) \\
&= \varphi(g_1,\dots,g_r)\otimes g_1\cdots g_r\psi(g_{r+1},\dots,g_{r+s}) \\
&= (\varphi\cup\psi)(g_1,\dots g_{r+s})
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\varphi'\cup\psi$ es un levantamiento de $\varphi\cup\psi$ por $(\pi\otimes id)^{r+s}$

Además $\varphi'\cup\psi$ cumple

$$\begin{aligned}
d^{r+s}_{M\otimes N}(\varphi'\cup\psi) &= d^r_M(\varphi')\cup\psi + (-1)^r\varphi'\cup \cancel{d^s_N(\psi)}^{\,0} \\
&= d^r_M(\varphi')\cup\psi
\end{aligned}$$

Por otro lado, $z \cup \psi \in Z^{r+s+1}(G, M' \otimes N)$ cumple

$$(\imath \otimes id)^{r+s+1}(z \cup \psi) = (\imath \otimes id) \circ (z \cup \psi)$$
$$= (\imath \circ z) \cup \psi \quad (\text{mismo argumento que } (\pi \otimes id)^{r+s}(\varphi' \cup \psi) = \varphi \cup \psi)$$
$$= \imath^{r+1}(z) \cup \psi$$

Como $\imath^{r+1}(z) = d_M^r(\varphi')$,

$$d_{M \otimes N}^{r+s}(\varphi' \cup \psi) = (\imath \otimes id)^{r+s+1}(z \cup \psi)$$

Ahora, si $\tilde{z}$ es el único representante de $\delta(m'' \cup n) \in H^{r+s+1}(G, M' \otimes N)$, debe cumplirse que $(\imath \otimes id)^{r+s+1}(\tilde{z}) = d_{M \otimes N}^{r+s}(\varphi' \cup \psi)$. Así,

$$(\imath \otimes id)^{r+s+1}(\tilde{z}) = (\imath \otimes id)^{r+s+1}(z \cup \psi)$$

como $(\imath \otimes id)^{r+s+1} : C^{r+s+1}(G, M' \otimes N) \longrightarrow C^{r+s+1}(G, M \otimes N)$ es inyectiva, $\tilde{z} = z \cup \psi$. A nivel de cohomología en $H^{r+s+1}(G, M' \otimes N)$

$$\delta(m'' \cup n) = \delta(m'') \cup n$$

Queda con esto demostrada la propiedad (iii) del cup producto.

Ahora para $0 \to N' \xrightarrow{\imath} N \xrightarrow{\pi} N'' \to 0$ y $0 \to M \otimes N' \xrightarrow{id \otimes \imath} M \otimes N \xrightarrow{id \otimes \pi} M \otimes N'' \to 0$ exactas, sean $\varphi \in Z^r(G, M)$, $\psi \in Z^s(G, N'')$ representantes de $m \in H^r(G, M)$ y $n'' \in H^s(G, N'')$ respectivamente.

$\varphi \cup \psi \in Z^{r+s}(G, M \otimes N'')$ es representante de $m \cup n'' \in H^{r+s}(G, M \otimes N)$.

Por el mismo argumento que en (iii), $\varphi \cup \psi' \in C^{r+s}(G, M \otimes N)$ es levantamiento de $\varphi \cup \psi$ mediante $(id \otimes \pi)^{r+s}$, donde ψ' es levantamiento de ψ por π^s.

$\varphi \cup \varphi'$ cumple con

$$d_{M\otimes N}^{r+s}(\varphi\cup\varphi') = \cancel{d_M^r(\varphi)}\cup\varphi' + (-1)^r\varphi\cup d_N^s(\varphi')$$

$$= (-1)^r\varphi\cup d_N^s(\varphi')$$

$$\Leftrightarrow \quad d_{M\otimes N}^{r+s}((-1)^r\varphi\cup\varphi') = \varphi\cup d_N^s(\varphi')$$

Si $z\in Z^{s+1}(G,N')$ es el representante de $\delta(n'')\in H^{s+1}(G,N')$, $\varphi\cup z$ es representante de $m\cup\delta(n'')\in H^{r+s+1}(G,M\otimes N')$. Además como $\iota^{s+1}(z) = d_N^s(\varphi')$,

$$(id\otimes\iota)^{r+s+1}(\varphi\cup z) = \varphi\cup\iota^{s+1}(z) = \varphi\cup d_N^s(\varphi')$$

Si $\tilde{z}$ es el representante de $\delta(m\cup n'')\in H^{r+s+1}(G,M\otimes N')$,

$$(id\otimes\iota)^{r+s+1}(\tilde{z}) = d_{M\otimes N}^{r+s}(\varphi\cup\varphi')$$

$$\Rightarrow \quad (id\otimes\iota)^{r+s+1}(\tilde{z}) = (-1)^r\varphi\cup d_N^s(\varphi')$$

$$= (-1)^r(id\otimes\iota)^{r+s+1}(\varphi\cup z)$$

$$= (id\otimes\iota)^{r+s+1}((-1)^r(\varphi\cup z))$$

Como $(id\otimes\iota)^{r+s+1}: C^{r+s+1}(G,M\otimes N')\longrightarrow C^{r+s+1}(G,M\otimes N)$ es inyectiva,

$$\tilde{z} = (-1)^r(\varphi\cup z)$$

Por lo tanto, en $H^{r+s+1}(G,M\otimes N')$

$$\delta(m\cup n'') = [(-1)^r(\varphi\cup z)]$$

$$= (-1)^r[\varphi\cup z]$$

$$= (-1)^r m\cup\delta(n'').$$

$$\therefore \quad \delta(m\cup n'') = (-1)^r m\cup\delta(n'')$$

Con esto queda demostrado (iv).