Observe que se deduce, a partir de ahí, el siguiente *sistema de ecuaciones homogeneo*:

$$\begin{aligned} 30x + 10y + 20z &= 0 \\ x + 30z &= 0 \\ 10x + 10y + 20z &= 0 \end{aligned}$$

Observación: Es muy importante observar que un sistema de ecuaciones homogeneo (o ecuación matricial homogenea) siempre tiene al menos una solución. Cuál es? De la observación anterior, tenemos lo siguiente:

a. Si $\det(A) \neq 0$, entonces hay solución única $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

b. Si $\det(A) = 0$, entonces hay infinitas soluciones.

Ejercicio: determine los valores de k para que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ 2x + ky &= 0 \end{aligned}$$

a. Tenga solución única. Como ya sabemos que la solución es $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ocupe la Regla de Cramer para verificar este resultado.

b. Tenga infinitas soluciones.

Universidad de las Américas.
Algebra II, MAT141
Abril 5, 2019

Determinante de una matriz, Matriz inversa

El determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ es

$$\det(A) = x_{11} \det\begin{pmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} - x_{12} \det\begin{pmatrix} x_{21} & x_{23} \\ x_{31} & x_{33} \end{pmatrix} + x_{13} \det\begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix},$$

mientras que el determinante de $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es:

$$\det(B) = ad - bc$$

Ejemplo. Resolver la ecuación $\det\begin{pmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 7 & x-5 & 1 \\ 6 & -6 & x+2 \end{pmatrix} = 0$

Desarrollo.

$$\det\begin{pmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 7 & x-5 & 1 \\ 6 & -6 & x+2 \end{pmatrix} = (x+3)\det\begin{pmatrix} x-5 & 1 \\ -6 & x+2 \end{pmatrix} + 1\det\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & x+2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 7 & x-5 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= (x+3)\left[(x-5)(x+2)+6\right] + \left[7(x+2)-6\right] + \left[-42-6(x-5)\right]$$

$$= (x+3)\left[x^2-3x-10+6\right] + \left[7x+8\right] + \left[-42-6x+30\right]$$

$$= (x+3)(x-4)(x+1) + x-4$$

$$= (x-4)\left[(x+3)(x+1)+1\right]$$

$$= (x-4)(x^2+4x+4) = (x-4)(x+2)$$

Luego, $\det(A)=0$ ssi $x=4,2$.

Teorema. A es invertible ssi $\det(A) \neq 0$, En ese caso:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{Adj}(A) ,$$

donde $\operatorname{Adj}(A) = \left((-1)^{i+j} \det A_{ij} \right)^T$

Ejemplo. Encuentre la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Desarrollo. Primero calculamos el determinante:

$$\det(A) = 2 \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - 1 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 3 \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= 2(2-4) - 1(-2-1) + 3(4+1) = -4 + 3 + 15 = 14$$

Ahora calculamos la adjunta de A:

$$\operatorname{Adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det A_{11} = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 2-4 = -2$$

$$C_{12} = (-1)^3 \det A_{12} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -(-2-1) = 3$$

$$C_{13} = \det A_{13} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 4+1 = 5$$

$$C_{21} = -\det A_{21} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 2+12 = 14$$

$$C_{22} = \det A_{22} = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -4-3 = -7$$

$$C_{23} = -\det A_{23} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -8+1 = -7$$

$$C_{31} = \det A_{31} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1+3 = 4$$

$$C_{32} = -\det A_{32} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2+3 = 1$$

$$C_{33} = \det A_{33} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2-1 = -3$$

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 14 & -7 & 7 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

La inversa en ese caso es:

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 & 1 & 2/7 \\ 3/14 & -1/2 & 1/14 \\ 5/14 & -1/2 & -3/14 \end{pmatrix}$$

Regla de Cramer.

Sea A una matriz de $n \times n$ (2×2, 3×3). Para cualquier $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, la única solución de $A\vec{x} = \vec{b}$, donde $\vec{x} = (x_{i1})$ es

$$x_{i1} = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det(A)},$$

donde $A_i(\vec{b}) = [\vec{a_1} \ \dots \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{columna } i}}{\vec{b}} \ \dots \ \vec{a_n}]$

Universidad de las Américas
Algebra II, MAT141
Abril 26, 2019.

Introducción a la programación lineal
Ejemplos Resueltos.

Problema. Compañía $\longrightarrow$ Fabrica de pinturas $\begin{cases} \nearrow \text{Interiores (E)} \\ \searrow \text{Exteriores (I)} \end{cases}$

Materias primas: A, disp. máxima 6 ton/diarias
B, disp. máxima 8 ton/diarias

	Interior (I)	Exterior (E)	Disp. materia prima
Materia prima A	2	1	6
Materia prima B	1	2	8

Necesidad diaria de materias primas.

x : cantidad de pintura de interiores (toneladas/diarias)
y : cantidad de pintura de exteriores (ton/diarias)

De la tabla: $\begin{cases} 2x + y \leq 6 \\ x + 2y \leq 8 \end{cases}$

Además: $x \leq y + 1$
$x \leq 2$

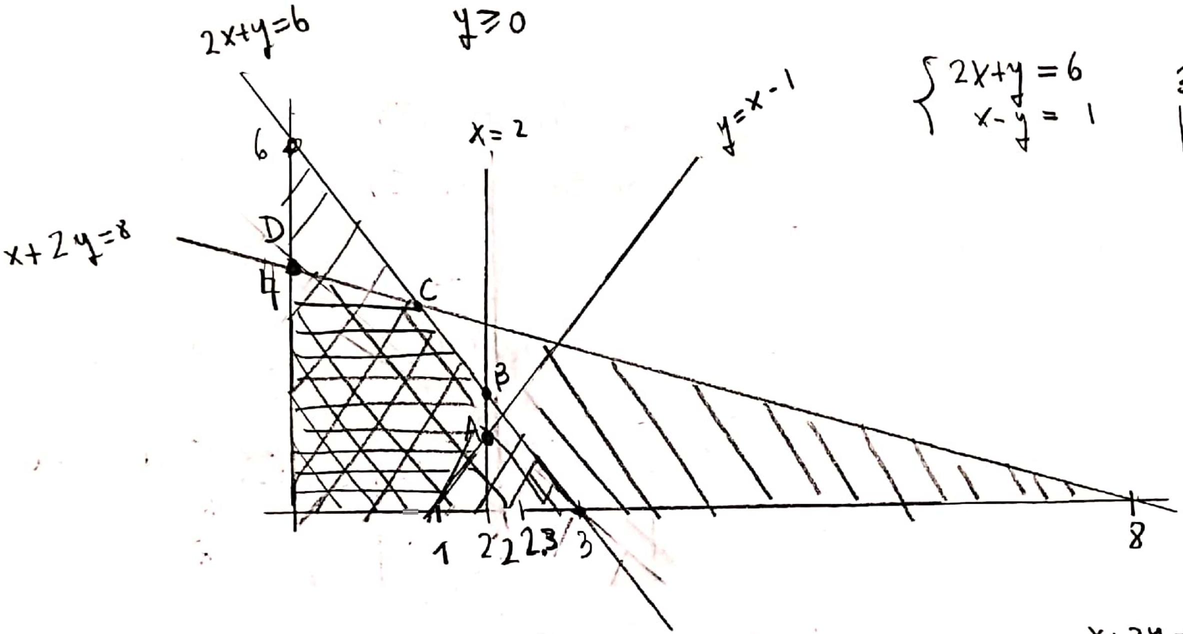
FO: $z = 2000x + 3000y$

En resumen:

FO: $z = 2000x + 3000y$

Restricciones:

$$2x + y \leq 6$$
$$x + 2y \leq 8$$
$$x \leq y + 1$$
$$x \leq 2$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$



$$\begin{cases} 2x+y=6 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$3x = 7$

$\boxed{x = \frac{7}{3} \approx 2{,}3}$

A: $\begin{cases} y = x-1 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow y = 1 \quad \therefore A = (2,1)$

D: $\begin{cases} x+2y = 8 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 4$

$\therefore D = (0,4)$

B: $\begin{cases} 2x+y=6 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow y = 2 \quad \therefore B = (2,2)$

C: $\begin{cases} x+2y=8 \\ 2x+y=6 \end{cases} \rightarrow x = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}, \quad y = \frac{-10}{-3} = \frac{10}{3}$

$z(2,1) = 4000 + 3000 = 7000$

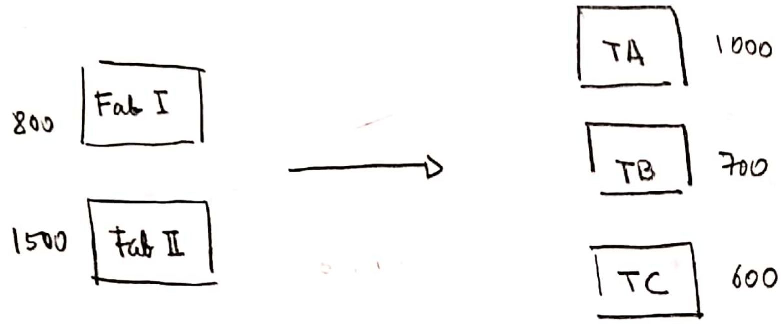
$z(2,2) = 4000 + 6000 = 10000$

$z\left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right) = \frac{8000}{3} + 10000 = \frac{38000}{3} \approx 12667$

$z(0,4) = 12000$

Respuesta: La función se maximiza en $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{10}{3}$. $z\left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right) \approx 12667$.

Problema



	Tienda A	Tienda B	Tienda C
Fábrica I	3	7	1
Fábrica II	2	2	6

x_1: cantidad piezas fab. I en tienda A
x_2: " " " I " B
x_3: " " " I " C

Se cumple: $x_1 + x_2 + x_3 = 800$

$$x_3 = 800 - x_1 - x_2$$

y_1: cantidad piezas fab II en tienda A
y_2: " " " II " B
y_3: " " " II " C

Se cumple: $y_1 + y_2 + y_3 = 1500$

Además: $\begin{cases} x_1 + y_1 = 1000 \\ x_2 + y_2 = 700 \\ x_3 + y_3 = 600 \end{cases}$ equiv: $\begin{cases} y_1 = 1000 - x_1 \\ y_2 = 700 - x_2 \\ y_3 = 600 - x_3 = 600 - 800 + (x_1 + x_2) \\ \quad = -200 + x_1 + x_2 \end{cases}$

	TA	TB	TC	
F(I)	x_1	x_2	$800-(x_1+x_2)$	800
F(II)	$1000-x_1$	$700-x_2$	$-200+(x_1+x_2)$	1500
	1000	700	600	

Cálculo de la función de Costo $C = C(x_1, x_2)$

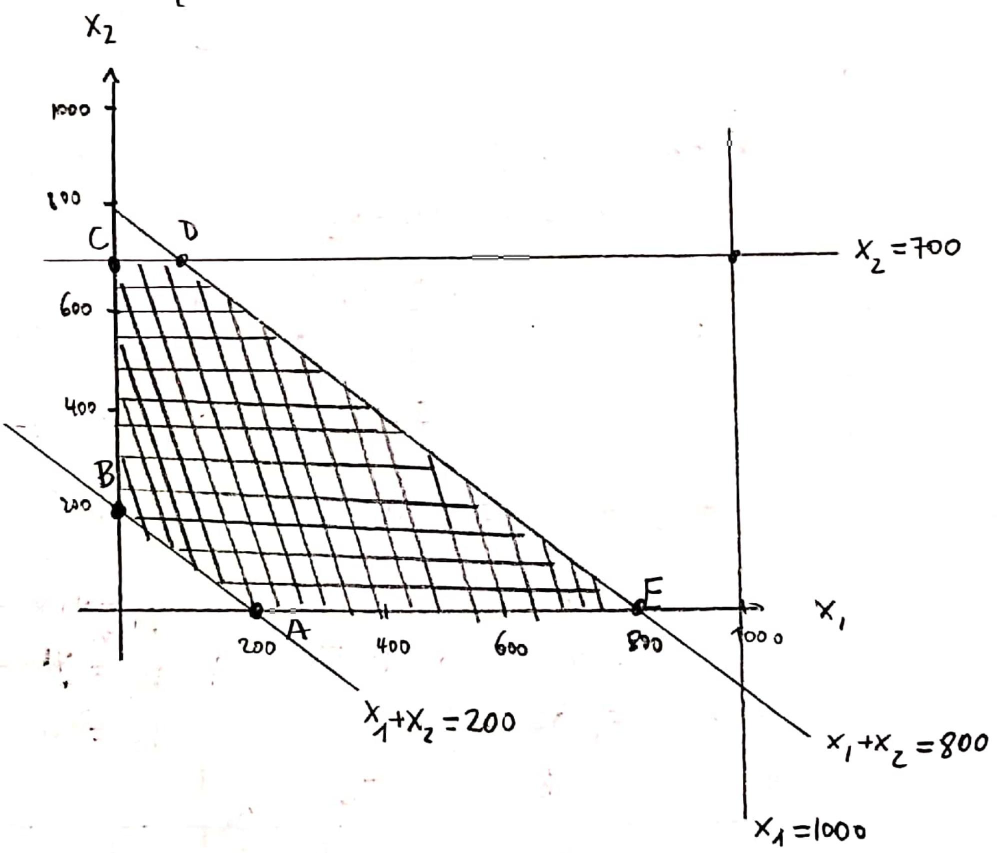
$$C(x_1,x_2) = 3x_1 + 7x_2 + 800 - (x_1+x_2) + 2(1000-x_1) + 2(700-x_2) + 6(-200+x_1+x_2)$$

$$= 3x_1 + 7x_2 + 800 - x_1 - x_2 + 2000 - 2x_1 + 1400 - 2x_2 - 1200 + 6x_1 + 6x_2$$

$$= 6x_1 + 10x_2 + 3000$$

Restricciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ 800 - (x_1+x_2) \geq 0 \\ 1000 - x_1 \geq 0 \\ 700 - x_2 \geq 0 \\ -200 + x_1 + x_2 \geq 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 800 \\ x_1 \leq 1000 \\ x_2 \leq 700 \\ x_1 + x_2 \geq 200 \end{array}\right.$$



$A = (200,0)$

$B = (0,200)$

$C = (0,700)$

$D: \begin{cases} 0x_1 + x_2 = 700 \\ x_1 + x_2 = 800 \end{cases} \rightarrow (x_1, x_2) = (100, 700)$

$E = (800,0)$

Buscamos dónde se reduce el costo de envío:

$C(200,0) = 4000$ $\quad$ $C(0,700) = 7000$ $\quad$ $C(800,0) = 7800$.

$C(0,200) = 5000$ $\quad$ $C(100,700) = 10600$

El costo se reduce cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 200$.

	T. A	T. B	T. C	
F. I	200	0	600	800
F. II	800	700	0	1500
	1000	700	600	

II

Universidad de las Américas
Algebra II , MAT141
Mayo 24 , 2019.

Subespacios generados

Para $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\} \subseteq V$ el conjunto S :

$$S = \{\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_r \vec{v}_r \mid \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}\}$$

es un subespacio vectorial de V.

Ejemplo. $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x+3y \\ 2x+5y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Todo $\vec{w} \in S$ se puede escribir de la forma :

$$\vec{w} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 \text{ , donde } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Pregunta : ¿ $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S$?

Respuesta : $\vec{w} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 \iff \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 \end{pmatrix}$$

Sistema de ecuaciones : $\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 = -1 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 5 - 6 = -1 \neq 0$$

$$\alpha_1 = 8 \quad , \quad \alpha_2 = -3$$

Por lo tanto : $\vec{w} = 8\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2$.

Ejemplo. $V = \mathbb{R}^3$, $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Veamos que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ es linealmente independiente:

$$\alpha \vec{v_1} + \beta \vec{v_2} = \vec{0} \iff \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, $\alpha = \beta = 0$ ($\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ es linealmente independiente)

Importante: $S \subsetneq V$, porque $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ no alcanza ser una base de V, pero:

$$S = \{\alpha \vec{v_1} + \beta \vec{v_2} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \text{ subespacio de } V.$$

Teorema. Si W subespacio de V, entonces $\dim W \leq \dim V$.

Del teorema anterior se deduce que $\dim W = 2$.

Ejercicio. Clasifique todos los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

Teorema. Si W subespacio de V y $\dim W = \dim V$, entonces:

$$W = V$$

Universidad de las Américas
Algebra II, MAT141
Mayo 24, 2019.

Transformaciones lineales

V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, $T: V \to W$ una función.

$T: V \to W$ transformación lineal si

$$T(\vec{v}+\vec{w}) = T(\vec{v}) + T(\vec{w})$$
$$T(\alpha \vec{v}) = \alpha T(\vec{v})$$

Ejemplo. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$A(\vec{x}) = A\vec{x}$$

es una transformación lineal.

Ejemplo. Si $V = \{$ funciones diferenciables en $\mathbb{R}\}$, $T = \frac{d}{dx}$:

$$T: V \to V$$

es una transformación lineal :

$$T(f+g) = \frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} = T(f) + T(g)$$
$$T(\alpha f) = \frac{d}{dx}(\alpha f) = \alpha \frac{df}{dx} = \alpha T(f)$$

Ejemplo: $V = \{$ funciones integrables en $[a,b]\}$, $T = \int dx$. $T: V \to V$

$$T(f+g) = \int (f+g)(x)\,dx = \int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$
$$= T(f) + T(g)$$
$$T(\alpha f) = \alpha T(f).$$

Sea $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_r\}$ una base de V:

$$\forall \vec{w}\in V : \quad T(\vec{w}) = T\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i \vec{v}_i\right)$$
$$= T\left(\alpha_1\vec{v}_1+\dots+\alpha_r\vec{v}_r\right)$$
$$= T(\alpha_1\vec{v}_1)+\dots+T(\alpha_r\vec{v}_r)$$
$$= \alpha T(\vec{v}_1)+\dots+\alpha_r T(\vec{v}_r)$$

Ejemplo. Determine la fórmula de la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(1,0,0)=(0,0,1)$$
$$T(0,1,0)=(2,1,-1)$$
$$T(0,0,1)=(1,-1,3)$$

Determine $T(10,-6,8)$.

Scanned with CamScanner

VICERRECTORÍA ACADEMICA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, FÍSICA Y ESTADÍSTICA
ÁREA DE MATEMÁTICA-CICLO INICIAL

CÁTEDRA 2

ALGEBRA II (MAT-141)

Tiempo: 90 minutos

NOTA

NOMBRE: Marco Godoy V **NRC:**

RUN: 17.022.457-4 **FECHA:**

CARRERA: **SECCIÓN:**

Problema	Puntaje
Total	

Indicaciones

- Complete los datos solicitados en la prueba.
- Puntaje ideal de la prueba 60 puntos.
- Nota final=Puntaje_obtenido+1,0
- No se aceptan consultas una vez iniciada la prueba. Salvo que sean de enunciado.
- Sólo podrá salir de la sala después de 30 min de iniciada la prueba.
- Puede utilizar para sus cálculos calculadora pero no su celular ni otros artículos tecnológicos.
- Deberá devolver todas las hojas de la prueba. La ausencia de alguna de ellas desvalidará la evaluación.
- Si requiere hojas adicionales solicitarlas al profesor.

"Declaro haber revisado y recibir conforme la prueba y la nota indicada arriba"

Firma: ....

Profesor: Instituto de Matemática, Física y Estadística

Resultados de Aprendizaje

(a) Determinar bases asociadas a distintos espacios vectoriales, por ejemplo: $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$.

(b) Modelar situaciones aplicadas a la ingeniería, a través de un problema de programación lineal, resolviéndolo con el método gráfico.

Problemas

Nombre del alumno: ....

NOTA

Prob. 1 (15 ptos.) Maximizar la función $f(x, y) = 2x + 3y$, de acuerdo a las restricciones:

$$x + y \leq 50$$
$$2x + y \leq 80$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0.$$

a. **(7.5 ptos.)** Represente gráficamente la región solución del sistema de restricciones.

b. **(7.5 ptos.)** Identifique las coordenadas que maximizan la función dada.

Desarrollo:

La recta $x+y=50$ corta eje X en $(50,0)$
" eje Y en $(0,50)$

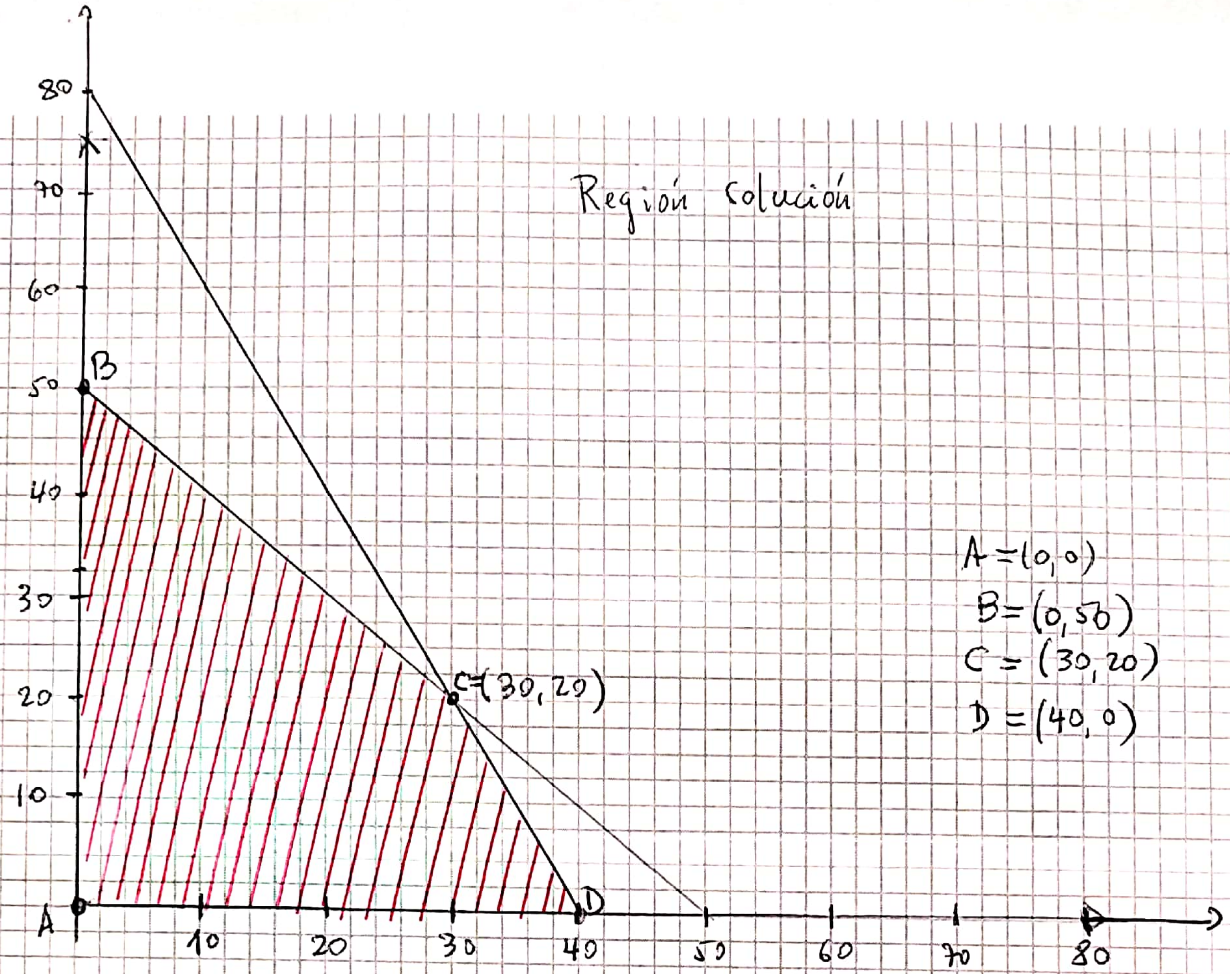
La recta $2x+y=80$ corta eje X en $(40,0)$
" $2x+y=80$ " " Y en $(0,80)$

Intersección entre rectas $\begin{cases} x+y=50 \\ 2x+y=80 \end{cases}$

Cramer : $x = \dfrac{\det\begin{pmatrix} 50 & 1 \\ 80 & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} = \dfrac{-30}{-1} = 30$

$y = \dfrac{\det\begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 2 & 80 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} = \dfrac{-20}{-1} = 20$.

El punto $(0,0)$ cumple desigualdades $x+y \leq 50$, $2x+y \leq 80$.
$(0,0)$ forma parte de la región solución del sistema de restricciones.



Buscamos dónde se maximiza $f(x,y) = 2x+3y$

$f(0,0)=0$

$f(0,50) = 0 + 3\cdot 50 = 150$

$f(30,20) = 60+60 = 120$

$f(40,0) = 80$

La función $f(x,y) = 2x+3y$ se maximiza en el punto $(0,50)$

Prob. 2 **(20 ptos.)** Para recorrer un determinado trayecto, una compañía desea ofertar, a lo sumo **5000** plazas de dos tipos: T (Turista) y P (Primera). La ganancia correspondiente a cada plaza de tipo T es de **30** euros, mientras que la ganancia de tipo P es de **40** euros. El número de plazas de tipo T no puede exceder de **4500** y el del tipo P, debe ser como máximo, la tercera parte de las ganancias del tipo T que se oferten.

a. **(10 ptos.)** Represente gráficamente la región solución del sistema de restricciones.

b. **(10 ptos.)** Determinar el número de plazas de cada tipo que tienen que ofertarse para que la ganancia sea máxima.

Desarrollo:

T : Turista , P : Primera

a.) Sea x : nº de plazas de tipo T

y : nº de plazas de tipo P

Función objetivo: $G(x,y) = 30x + 40y$

Conjunto de restricciones del problema:

$$x + y \leq 5000$$
$$x \leq 4500$$
$$y \leq \frac{30x}{3} = 10x \qquad (-10x + y \leq 0)$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

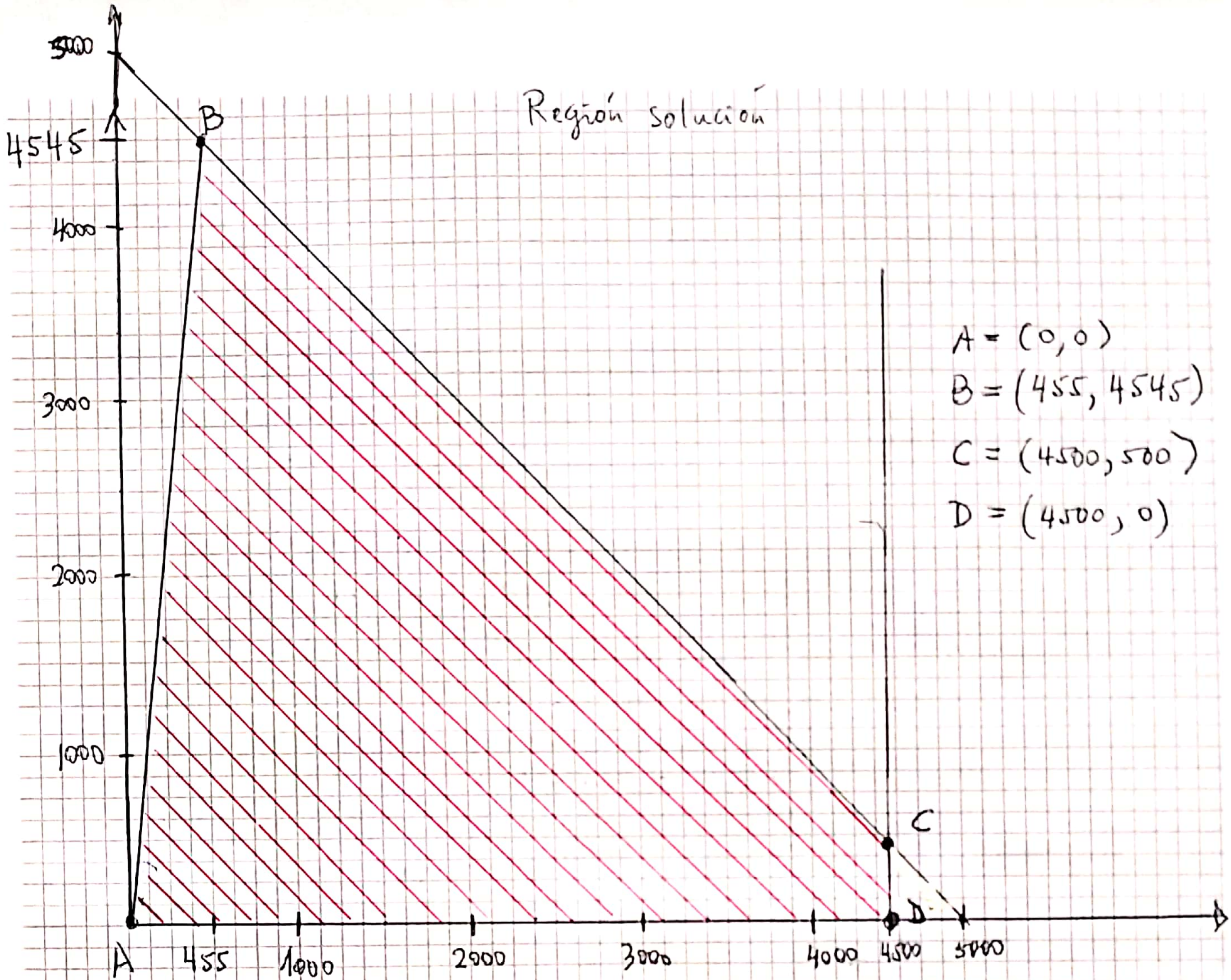
Buscamos punto de intersección entre las rectas $x+y=5000$, $-10x+y=0$

Cramer:

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 5000 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{5000}{11} \approx 455$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 5000 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{50000}{11} \approx 4545$$

El punto $(0,0)$ satisface todas las desigualdades, luego forma parte de la región solución.



Calculamos C: $\begin{cases} x = 4500 \\ x+y = 5000 \end{cases} \longrightarrow y = 500$

b) Buscamos dónde se maximiza $G(x,y) = 30x + 40y$

$G(0,0) = 0$

$G(455, 4545) = 195450$

$G(4500, 500) = 155000$

$G(4500, 0) = 135000$

Por lo tanto:

La Ganancia se maximiza cuando se venden 455 plazas de Tipo T y 4545 plazas de Tipo P.

Prob. 3 (20 ptos.) Demuestre que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Desarrollo:

(i) El vector $(0,0,0)$ pertenece a W porque cumple con la igualdad

$$0 + 0 - 0 = 0$$

(ii) Sean (x,y,z), (u,v,w) vectores que pertenecen a W

$$(x,y,z) + (u,v,w) = (x+u, y+v, z+w)$$

$$\begin{aligned}(x+u) + (y+v) - (z+w) &= x+u+y+v-z-w \\ &= \underbrace{(x+y-z)}_{=0} + \underbrace{(u+v-w)}_{=0} \\ &= 0\end{aligned}$$

$x+y-z=0$, $u+v-w=0$ porque (x,y,z), (u,v,w) pertenecen a W.
Luego la suma $(x,y,z)+(u,v,w)$ pertenece a W.

(iii) Supongamos que (x,y,z) pertenece a W. Hay que demostrar que $\lambda(x,y,z)$ pertenece a W, donde $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

$$\lambda x + \lambda y - \lambda z = \lambda(\underbrace{x+y-z}_{=0}) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

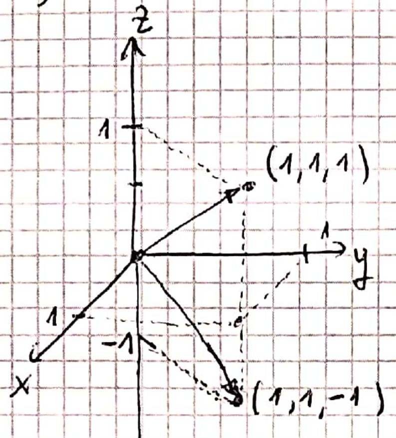
Luego $\lambda(x,y,z)$ pertenece a W.

Conclusión: W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Prob. 4 Construya una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga a los vectores $(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})$ y $(\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1})$. Verifique que efectivamente su elección es una base.

Desarrollo:

Primero buscamos un vector que no sea combinación lineal de $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$



Basta tomar el vector $(0,1,0)$. Probemos que $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(0,1,0)$ son linealmente independientes:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -1\cdot 2 + 1\cdot 0 = -2 \neq 0$$

Como el determinante es distinto de 0, los vectores son linealmente indep.

Como $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$, la cantidad máxima de vectores linealmente independientes que hay en $\mathbb{R}^3$ es 3.

Por lo tanto: $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(0,1,0)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Universidad de las Américas
Algebra II MAT141
Junio 14, 2019.

Representación matricial de una transformación lineal

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal

Objetivo: Asociar T a una matriz

Requisito: Se necesita una base $\mathcal{B}$ de V.

Observación: El tamaño (dimensión) de la matriz está sujeta a $\dim V, \dim W$

Ejemplo. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x+y, x-y+z, 2x+z)$

$\mathcal{B} = \{(1,0,0), (1,1,0), (-3,2,1)\}$

Calcular $T(1,0,0)$, $T(0,1,0)$, $T(0,0,1)$

$$T(1,0,0) = (1,1,2)$$
$$T(0,1,0) = (1,-1,0)$$
$$T(0,0,1) = (0,1,1)$$

Escribir $(1,1,2), (1,-1,0), (0,1,1)$ como combinación lineal c/r a la base $\mathcal{B}$:

$$(1,1,2) = \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(-3,2,1)$$

$$1 = \alpha + \beta - 3\gamma$$
$$1 = \beta + 2\gamma$$
$$2 = \gamma$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos $\begin{pmatrix}1&1&-3\\ &1&2\\ &&1\end{pmatrix}^{-1}$ con operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-3&1&0&0\\ &1&2&0&1&0\\ &&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{f_2-2f_3\to f_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-3&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&-2\\ 0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1+3f_3\to f_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&3\\ 0&1&0&0&1&-2\\ 0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{f_1-f_2\to f_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&5\\ 0&1&0&0&1&-2\\ 0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

Luego: $\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&5\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&5\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1+10\\1-4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-3\\2\end{pmatrix}$$

O sea: $(1,1,2)=10(1,0,0)-3(1,1,0)+2(-3,2,1)$

Hacer lo mismo con los vectores $(1,-1,0)$ y $(0,1,1)$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&5\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\qquad(\text{para } (1,-1,0))$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&5\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}\qquad(\text{para } (0,1,1))$$

Es decir:

$$(1,1,2)=10(1,0,0)-3(1,1,0)+2(-3,2,1)$$
$$(1,-1,0)=2(1,0,0)-(1,1,0)+0(-3,2,1)$$
$$(0,1,1)=4(1,0,0)-(1,1,0)+1(-3,2,1)$$

$A=[T]_{\mathcal{B}}$: matriz asociada a T con respecto a la base $\mathcal{B}$

$$A=\begin{pmatrix}10&2&4\\-3&-1&-1\\2&0&1\end{pmatrix}$$

Supongamos que en $\mathcal{C} = \{ \underbrace{(1,0,0)}_{\hat{e}_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{\hat{e}_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{\hat{e}_3} \}$ se tiene:

$$T(x,y,z) = (x+y,\ x-y+z,\ 2x+z)$$

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,1,2) \\ T(0,1,0) &= (1,-1,0) \\ T(0,0,1) &= (0,1,1) \end{aligned} \Rightarrow [T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, sea $\mathcal{B} = \{ (1,1,2), (1,1,0), (-3,2,1) \}$

$$(1,1,2) = 1\hat{e}_1 + 1\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3$$

$$(1,1,0) = 1\hat{e}_1 + 1\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

$$(-3,2,1) = -3\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + 1\hat{e}_3$$

$$[Id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ matriz cambio de base $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$

Proposición. $[Id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \left([Id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \right)^{-1}$

$$[Id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & -1/10 & 1/2 \\ 3/10 & 7/10 & -1/2 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposición. Para calcular $[T]_{\mathcal{B}}$

$$[T]_{\mathcal{B}} = [Id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} [T]_{\mathcal{C}} [Id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/10 & -1/10 & 1/2 \\ 3/10 & 7/10 & -1/2 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6/5 & -11/5 \\ 0 & -2/5 & -3/5 \\ 0 & -2/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$[T]_{\mathcal{C}} = [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} [T]_{\mathcal{B}} [Id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= ($$

Ejemplo. Supongamos ahora que queremos expresar T en la base canónica $\mathcal{C} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ es decir: } \begin{cases} \hat{e}_1 = [1,0,0]_{\mathcal{B}} \\ \hat{e}_2 = [4,-1,2]_{\mathcal{B}} \\ \hat{e}_3 = [5,-2,1]_{\mathcal{B}} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{e}_1 = 1(1,0,0) + 0(1,1,0) + 0(-3,2,1)$$
$$\hat{e}_2 = 4(1,0,0) - (1,1,0) + 2(-3,2,1)$$
$$\hat{e}_3 = 5(1,0,0) - 2(1,1,0) + 1(-3,2,1)$$

$$[Id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ matriz de cambio de base $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

Proposición. $[Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = [Id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}^{-1}}$

Calculamos: $[Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 & -1/3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 1 & -4/3 & -8/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 & -1/3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 + 4/3 - 10/3 & -1 + 8/3 - 5/3 \\ 0 & -1/3 + 4/3 & -2/3 + 2/3 \\ 0 & 2/3 - 2/3 & 4/3 - 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(4,2,6) = [\,32\,,-10\,,6\,]_{\mathcal{B}}$

Calcular $T(4,2,6)$ es lo mismo que calcular $[T]_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}-24\\-10\\6\end{pmatrix}$

$$[T]_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}32\\-10\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & 2 & 4\\-3 & -1 & -1\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}32\\-10\\6\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-324\\-92\\70\end{pmatrix} \longrightarrow$$ coordenadas de $T(4,2,6)$ c/r a la base $\mathcal{B}$.

$$-324(1,0,0) - 92(1,1,0) + 70(-3,2,1)$$
$$= (-324,0,0) + (-92,-92,0) + (-210,140,70)$$
$$= (-32,2,-42)$$

Invalido
eliminar esta parte.

Calcular $T(4,2,6)$ es lo mismo que calcular $[T]_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}$

$$[T]_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & 2 & 4\\-3 & -1 & -1\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}68\\-20\\14\end{pmatrix}}$$

coordenadas de $T(4,2,6)$ con respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$68(1,0,0) - 20(1,1,0) + 14(-3,2,1)$$
$$= (68-20-42\,,\,-20+28\,,\,14) = (6,8,14)$$

Objetivo: Dar una interpretación de $T(\vec{v})$ en términos de matrices.

$$(1,0,0) = 1(1,0,0)+0(1,1,0)+0(-3,2,1)$$
$$(1,1,0) = 0(1,0,0)+1(1,1,0)+0(-3,2,1)$$
$$(-3,2,1) = 0(1,0,0)+0(1,1,0)+1(-3,2,1)$$

$$(1,0,0) = [1,0,0]_{\mathcal{B}}$$
$$(1,1,0) = [0,1,0]_{\mathcal{B}}$$
$$(-3,2,1) = [0,0,1]_{\mathcal{B}}$$

$$T(1,0,0) = (1,1,2) \quad \longleftrightarrow \quad A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & 2 & 4\\ -3 & -1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-3\\2\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$: vector coordenadas de $(1,1,2)$ c/r a la base $\mathcal{B}$

$\begin{pmatrix}10\\-3\\2\end{pmatrix}$: vector coordenadas de $(1,1,2)$ c/r a la base $\mathcal{B}$.

Ejercicio: Interprete $T(4,2,6)$ en términos de matrices.

Desarrollo. $T(4,2,6) = (6,8,14)$

Hay que escribir las coordenadas de $(4,2,6)$ y $(6,8,14)$ en términos de $\mathcal{B}$.

$$[4,2,6]_{\mathcal{B}} = (4,2,6) = 4(1,0,0)+2(1,1,0)+6(-3,2,1)$$

$$\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 5\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}32\\-10\\6\end{pmatrix}$$

$$(4,2,6) = 32(1,0,0) - 10(1,1,0) + 6(-3,2,1)$$

Universidad de las Américas
Algebra I
Junio 15, 2019.

Proyecto Taller 4

$\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $\mathcal{B} = \{(-1,0,0),(1,1,0),(0,0,2)\}$

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x,0,x+z)$, $v = (1,4,5)$

a. $[v]_{\mathcal{B}} = [\alpha,\beta,\gamma] \iff v = \alpha(-1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,0,2)$

$$(1,4,5) = \alpha(-1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,0,2)$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5/2 \end{pmatrix} \to \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 4 \\ \gamma = 5/2 \end{cases}$$

Por lo tanto: $[v]_{\mathcal{B}} = [3,4,5/2]$

b. $w \in \mathbb{R}^3$, $[w]_{\mathcal{B}} = [1,1,1]$

$$w = 1(-1,0,0) + 1(1,1,0) + 1(0,0,2)$$
$$= (0,1,2)$$
$$w = (0,1,2) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 2(0,0,1)$$

Por lo tanto: $[w]_{\mathcal{C}} = [0,1,2]$

c. Partimos calculando $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$:

$$(-1,0,0) = -1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$$
$$(1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$$
$$(0,0,2) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 2(0,0,1)$$

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Para calcular $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, ocupamos $[I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \left([I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$ por el cálculo anterior.

$$[I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

d. Primero calculamos $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$

$T(x,y,z) = (x,0,x+z)$

$$T(1,0,0) = (1,0,1) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)$$
$$T(0,1,0) = (0,0,0) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$$
$$T(0,0,1) = (0,0,1) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

Luego: $$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ mediante el producto: $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego: $$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

e. $T(v) = T(1,4,5) = (1,0,1+5) = (1,0,6)$

$$T(v) = (1,0,6)$$

Mediante la matriz de cambio de base $[I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ Tenemos:

$$[I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[T(v)]_{\mathcal{C}} = [T(v)]_{\mathcal{B}}$$

Como $T(v) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 6(0,0,1)$

$$[T(v)]_{\mathcal{C}} = [1,0,6]$$

Luego: $[T(v)]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[T(v)]_{\mathcal{C}}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Es decir: $[T(v)]_{\mathcal{B}} = [-1,0,3]$

f. Calculamos el producto $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}$

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3/2 + 4/2 + 5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Efectivamente se verifica la igualdad $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}}$

Universidad de las Américas
Algebra II, MA141
Junio 21, 2019.

Valores y vectores propios

Objetivo: Para una matriz cuadrada A, queremos estudiar la ecuación

$$(A-\lambda I)\vec{x}=\vec{0} \quad (*)$$

$\lambda\in\mathbb{R}$. Si existe $\vec{x}\neq 0$ solución de $(*)$, $\vec{x}$ se llama vector propio asociado al valor propio λ.

Condición: $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ debe cumplir $\det(A-\lambda I)=0$.
Las raíces de $p(\lambda)=0$ son los valores propios de A.

Ejemplo. Encontrar los valores propios de $A=\begin{pmatrix}2&3\\3&-6\end{pmatrix}$.

Desarrollo. $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}2-\lambda&3\\3&-6-\lambda\end{pmatrix}$

$p(\lambda)=(2-\lambda)(-6-\lambda)-9=-12-2\lambda+6\lambda+\lambda^2-9=\lambda^2+4\lambda-21$

$$p(\lambda)=0 \quad \text{ssi} \quad \lambda=\frac{-4\pm\sqrt{16+4\cdot 21}}{2}=\frac{-4\pm 10}{2}=3,-7$$

Valores propios: $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-7$.

Ejercicio. Encontrar un vector propio de $A=\begin{pmatrix}2&3\\3&-6\end{pmatrix}$ asociado a $\lambda_1=3$

Desarrollo. Sea $\vec{x}=(a,b)$ v.p de A asociado a $\lambda_1=3$:

Se cumple: $(A-\lambda_1 I)\vec{x}=\vec{0} \iff \begin{pmatrix}-1&3\\3&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Pivoteando:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -1a+3b=0$$

$$a=3b$$

Se puede tomar $a=3$, $b=1$

Vector propio: $\vec{x}=(3,1)$.

Ejercicio: Encuentre un vector propio de A asociado a $\lambda_2=-7$

Ejemplo. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Polinomio característico: $p(\lambda)=\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 & 3 \\ -4 & -6-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$=(2-\lambda)\det\begin{pmatrix} -6-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}-4\det\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}+3\det\begin{pmatrix} -4 & -6-\lambda \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$=(2-\lambda)\left((6+\lambda)(\lambda-1)+9\right)-4\left(4(\lambda-1)+9\right)+3\left(-12+18+3\lambda\right)$

$=(2-\lambda)\left(6\lambda-6+\lambda^2-\lambda+9\right)-4\left(4\lambda+5\right)+9\lambda+18$

$=(2-\lambda)\left(\lambda^2+5\lambda+3\right)-16\lambda-20+9\lambda+18$

$=2\lambda^2+10\lambda+6-\lambda^3-5\lambda^2-3\lambda-7\lambda-2$

$=-\lambda^3-3\lambda^2+$

$p(\lambda)=-\lambda^3-3\lambda^2+4$.

Observación. Buscamos soluciones en $\mathbb{Q}$ para $p(\lambda)$

$\lambda=\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ es solución de $p(\lambda)=0 \Rightarrow$ a divide a 4
b divide a -1

Posibles soluciones: $\{\pm1,\pm2,\pm4\}$

$p(1)=-1^3-3\cdot1^2+4=-1-3+4=-4+4=0$ ✓

Hecho. Si $p(\lambda_0)=0$, entonces $(\lambda-\lambda_0)$ divide a $p(\lambda)$

Para dividir polinomios ocupamos el método de Ruffini:

	-1	-3	0	4
1	-1	-4	-4	0

resto.

$$p(\lambda):(\lambda-1) = -1\lambda^2-4\lambda-4$$

O de otra manera: $(-\lambda^2-4\lambda-4)(\lambda-1) = -\lambda^3-3\lambda^2+4$

Comprobación: $(-\lambda^2-4\lambda-4)(\lambda-1) = -\lambda^3+\lambda^2-4\lambda^2+4\lambda-4\lambda+4 = -\lambda^3-3\lambda^2+4 = p(\lambda)$

Ahora resolvemos: $-\lambda^2-4\lambda-4=0$ (equiv: $\lambda^2+4\lambda+4=0$)

$$\lambda = +2$$

Luego: $p(\lambda) = -(\lambda+2)^2(\lambda-1)$

Los valores propios de A son $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$.

Ejercicio: Encontrar 1 vector propio asociado a $\lambda_1=-2$

Desarrollo. Hay que resolver la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 4 & 3 \\ -4 & -6-\lambda_1 & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda_1=-2)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -4 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 3 & 0 \\ -4 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc} 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \\ z=0 \end{array}$$

Un vector propio de A asociado a $\lambda_1 = -2$ es

$$\vec{v} = (1, -1, 0)$$

Universidad de las Américas
Algebra II, MA141
junio 17, 2019

Propuesta Cátedra III

Problema 1. $T(x,y,z) = (x+y+2z,\ 2x+5y-2z,\ 5x+2y+16z)$

a). $(x,y,z) \in \ker(T)$ siempre y cuando $T(x,y,z) = (0,0,0)$

$$(x+y+2z,\ 2x+5y-2z,\ 5x+2y+16z) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x+5y-2z=0 \\ 5x+2y+16z=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ 5 & 2 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicamos operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 0 \\ 5 & 2 & 16 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-5f_1 \to f_3]{f_2-2f_1 \to f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2+f_3 \to f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 \to \frac{1}{3}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1-f_2 \to f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Así: $\begin{cases} x+4z=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} x=-4z \\ y=-2z \end{array}$

$(x,y,z) = (-4z,-2z,z) = z(-4,-2,1)$

Una base de $\ker(T)$ es $\{(-4,-2,1)\}$.

b. $T(x,y,z) = (x+y+2z,\ 2x+5y-2z,\ 5x+2y+16z)$

$= (x, 2x, 5x) + (y, 5y, 2y) + (2z, -2z, 16z)$

$= x(1,2,5) + y(1,5,2) + z(2,-2,16)$

Luego $Im(T) = \langle (1,2,5), (1,5,2), (2,-2,16) \rangle$

Buscamos una base aplicando operaciones elementales a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 16 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 - 2f_1 \to f_3]{f_2 - f_1 \to f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 + 2f_2 \to f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 \to \frac{1}{3} f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 - 2f_2 \to f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, una base de $Im(T)$ es $\{(1,0,7), (0,1,-1)\}$.

c. $\text{nulidad}(T) = \dim(\ker(T)) = 1$

$\text{rango}(T) = \dim(Im(T)) = 2$

Observación: Se cumple el teorema de la dimensión:

$\dim(\mathbb{R}^3) = \text{rango}(T) + \text{nulidad}(T)$

$3 = 2 + 1$.

Problema 2.

$$T(1,0,0) = (5,-3,8)$$
$$T(0,1,0) = (0,-8,6)$$
$$T(0,0,1) = (-4,10,-1)$$

$$\begin{aligned}
T(x,y,z) &= T(x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)) \\
&= x\,T(1,0,0)+y\,T(0,1,0)+z\,T(0,0,1) \\
&= x(5,-3,8)+y(0,-8,6)+z(-4,10,-1) \\
&= (5x,-3x,8x)+(0,-8y,6y)+(-4z,10z,-z) \\
&= (5x-4z,-3x-8y+10z,8x+6y-z)
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $T(x,y,z) = (5x-4z,-3x-8y+10z,8x+6y-z)$

Problema 3.

$\mathcal{C} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$\mathcal{B} = \{(-1,0,0), (1,1,0), (0,0,2)\}$

a.

$(-1,0,0) = -1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$

$(1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$

$(0,0,2) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 2(0,0,1)$

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $[I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \left([I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to \frac{1}{2} f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1 - f_2 \to f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to -f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$[I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b. $v = (1,5,10)$, $w = (-2,7,-9)$

$$[v]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad [v]_{\mathcal{B}} = [4,5,5]$

$$[w]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [w]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -9/2 \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad [w]_{\mathcal{B}} = [9,7,-9/2]$

c. $v+w = (1,5,10)+(-2,7,-9) = (-1,12,1)$

$$[v+w]_{\mathcal{E}} = [-1,12,1]$$

$$[v+w]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}[v+w]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore [v+w]_{\mathcal{B}} = [13,12,1/2]$$

Ahora:

$$[v]_{\mathcal{B}}+[w]_{\mathcal{B}} = [4,5,5]+[9,7,-9/2] = [13,12,5-9/2]$$
$$= [13,12,1/2]$$

Se cumple la igualdad $[v]_{\mathcal{B}}+[w]_{\mathcal{B}} = [v+w]_{\mathcal{B}}$

Así : $v = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} , 1 \right)$

es un vector propio asociado a $-1 + 3\sqrt{3}$

Sea $w = (x,y)$ un vector propio asociado al valor propio $-1-3\sqrt{3}$:

$$\begin{pmatrix} 2-(-1-3\sqrt{3}) & 3 \\ 6 & -4-(-1-3\sqrt{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3+3\sqrt{3} & 3 \\ 6 & -3+3\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3+3\sqrt{3} & 3 & 0 \\ 6 & -3+3\sqrt{3} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[f_2 \to \frac{1}{6} f_2]{f_1 \to \frac{1}{3} f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1+\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2-(1+\sqrt{3})f_1 \to f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 1-(1+\sqrt{3})(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}) & 0 \end{array} \right)$$

$$(1+\sqrt{3})\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Luego :
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Así : $w = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} , -1 \right)$

es un vector propio asociado al valor propio $-1 + 3\sqrt{3}$.

Problema 4.

a. Polinomio característico $p(\lambda)=\det\begin{pmatrix}2-\lambda & 3\\ 6 & -4-\lambda\end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix}2-\lambda & 3\\ 6 & -4-\lambda\end{pmatrix} = (2-\lambda)(-4-\lambda)-18 = -8-2\lambda+4\lambda+\lambda^2-18$$
$$= \lambda^2+2\lambda-26$$

$$p(\lambda)=0 \iff \lambda^2+2\lambda-26=0$$
$$\lambda = \frac{-2\pm\sqrt{4+104}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{108}}{2} = \frac{-2\pm 6\sqrt{3}}{2} = -1\pm 3\sqrt{3}$$

Los valores propios de A son $-1+3\sqrt{3}$ y $-1-3\sqrt{3}$.

b. Sea $v=(x,y)$ vector propio asociado al valor propio $-1+3\sqrt{3}$

$$\begin{pmatrix}2-(-1+3\sqrt{3}) & 3\\ 6 & -4-(-1+3\sqrt{3})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3-3\sqrt{3} & 3\\ 6 & -3-3\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}3-3\sqrt{3} & 3 & 0\\ 6 & -3-3\sqrt{3} & 0\end{array}\right) \xrightarrow[f_2\to\frac{1}{3}f_2]{f_1\to\frac{1}{3}f_1} \left(\begin{array}{cc|c}1-\sqrt{3} & 1 & 0\\ 2 & -1-\sqrt{3} & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2\leftrightarrow f_1} \left(\begin{array}{cc|c}2 & -1-\sqrt{3} & 0\\ 1-\sqrt{3} & 1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{f_1\to\frac{1}{2}f_1} \left(\begin{array}{cc|c}1 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 1-\sqrt{3} & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2-(1-\sqrt{3})f_1\to f_2} \left(\begin{array}{cc|c}1 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 1-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-\sqrt{3}) & 0\end{array}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-\sqrt{3}) = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Finalmente: $\left(\begin{array}{cc|c}1 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$

Universidad de las Américas
Algebra II, MAT141
Junio 26, 2019

Desarrollo Cátedra recuperativa

Problema 1.

x : unidades de carga de tipo A
y : unidades de carga de tipo B
z : unidades de carga de tipo C

Sistema de ecuaciones :

$$\begin{aligned} 5x + 2y + 4z &= 1050 \\ 2x + 3y + z &= 550 \\ 10x + 40y + 60z &= 13500 \end{aligned}$$

Ecuación matricial asociada : $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 10 & 40 & 60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1050 \\ 550 \\ 13500 \end{pmatrix}$

Calcular la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 10 & 40 & 60 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 40 & 60 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 40 & 60 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1 \to \frac{1}{10} f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1/10 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 - 5f_1 \to f_3]{f_2 - 2f_1 \to f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1/10 \\ 0 & -5 & -11 & 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & -18 & -26 & 1 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 - \frac{18}{5} f_2 \to f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1/10 \\ 0 & -5 & -11 & 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & \frac{68}{5} & 1 & -\frac{18}{5} & 11/50 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 + \frac{55}{68} f_3 \to f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1/10 \\ 0 & -5 & 0 & 55/68 & -65/34 & -3/136 \\ 0 & 0 & \frac{68}{5} & 1 & -18/5 & 11/50 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_3 \to \frac{5}{68} f_3]{f_2 \to -\frac{1}{5} f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1/10 \\ 0 & 1 & 0 & -11/68 & 13/34 & 3/680 \\ 0 & 0 & 1 & 5/68 & -9/34 & 11/680 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 - 6f_3 \to f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & -15/34 & 27/17 & 1/340 \\ 0 & 1 & 0 & -11/68 & 13/34 & 3/680 \\ 0 & 0 & 1 & 5/68 & -9/34 & 11/680 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1-4f_2\to f_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/34 & 1/17 & -1/68 \\ 0 & 1 & 0 & -11/68 & 13/34 & 3/680 \\ 0 & 0 & 1 & 5/68 & -9/34 & 11/680 \end{array}\right)$$

luego: $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 10 & 40 & 60 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7/34 & 1/17 & -1/68 \\ -11/68 & 13/34 & 3/680 \\ 5/68 & -9/34 & 11/680 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/34 & 1/17 & -1/68 \\ -11/68 & 13/34 & 3/680 \\ 5/68 & -9/34 & 11/680 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1050 \\ 550 \\ 13500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Luego:

$x = 50$
$y = 100$
$z = 150$

Conclusión: se transportaron 50 unidades de carga de Tipo A, 100 unidades de carga de Tipo B y 150 unidades de carga de Tipo C.

Scanned with CamScanner

Problema 2.

x : nº bolsas de fertilizante "Crece rápido"

y : nº bolsas de fertilizante "Crece fácil"

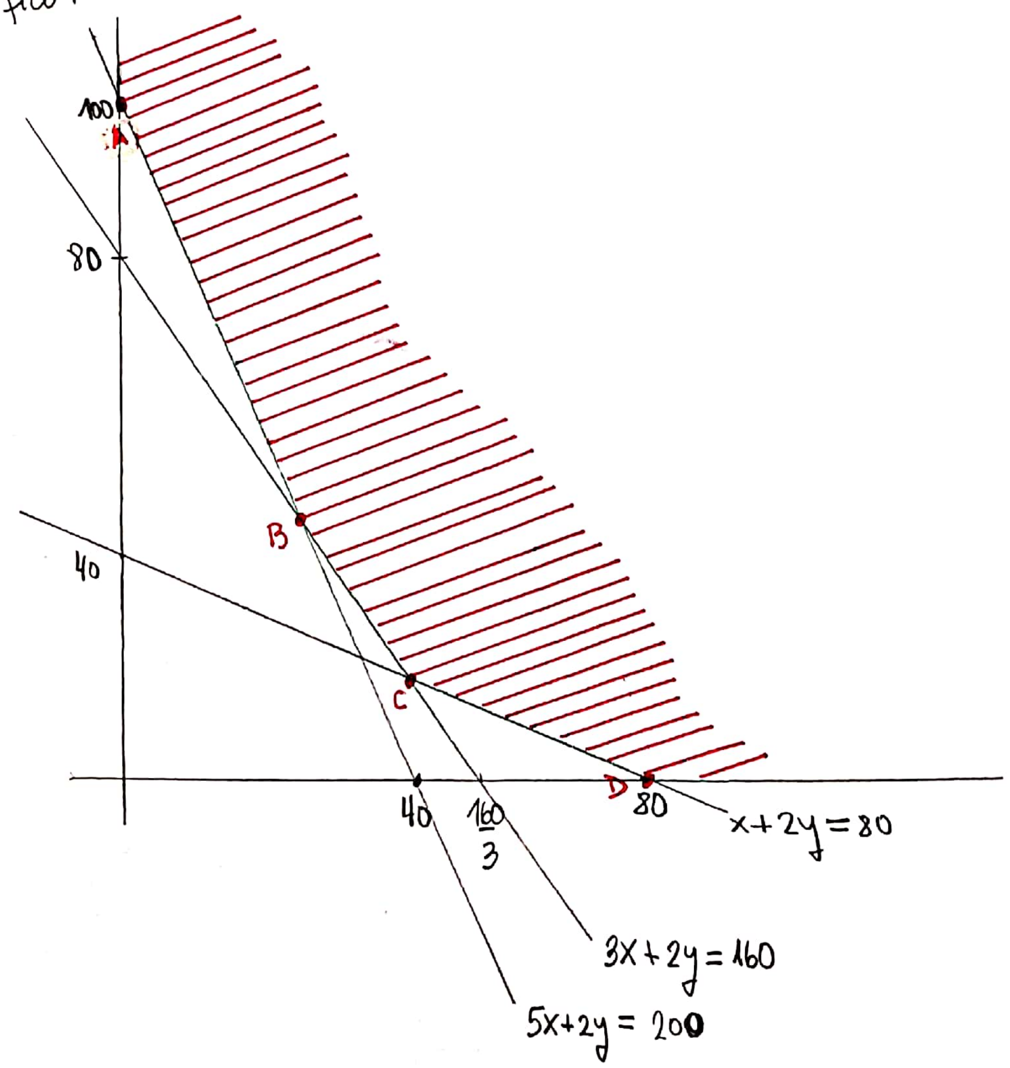
C = C(x,y) : Costo que debe pagar el agricultor por x bolsas de "crece rápido" e y bolsas de "crece fácil"

Función objetivo: $C = 8x + 6y$

Restricciones:

$$3x + 2y \geq 160$$
$$5x + 2y \geq 200$$
$$x + 2y \geq 80$$
$$x \geq 0 ,\ y \geq 0$$

Buscamos la región solución del conjunto de restricciones mediante el método gráfico:



Vértices de la región solución:

$A = (0, 100)$

B: Pto. intersección de $\begin{cases} 3x + 2y = 160 \\ 5x + 2y = 200 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 50 \end{cases} \Rightarrow B = (20, 50)$

C: Pto. intersección de $\begin{cases} x + 2y = 80 \\ 3x + 2y = 160 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 20 \end{cases} \Rightarrow C = (40, 20)$

$D = (80, 0)$

Evaluamos en la función objetivo:

$$C(0,100) = 8 \cdot 0 + 6 \cdot 100 = 600$$
$$C(20,50) = 8 \cdot 20 + 6 \cdot 50 = 460$$
$$C(40,20) = 8 \cdot 40 + 6 \cdot 20 = 440$$
$$C(80,0) = 8 \cdot 80 + 6 \cdot 0 = 640$$

Conclusión: Para minimizar el costo, el agricultor debe comprar 40 bolsas de "crece rápido" y 20 bolsas de "crece fácil". El precio que debe pagar por todo es $\$440$.

Como $(3,3,1) \neq (0,0,0)$, necesariamente es l.i

$\therefore$ $\{(3,3,1)\}$ es una base para $\ker(T)$

b. $Nul(T)$: nulidad de T (nº elementos de una base de $\ker T$)

$$Nul(T) = 1$$

c. $Rang(T)$: Rango de T.

Teorema de la dimensión dice que :

$$\dim \mathbb{R}^3 = Nul(T) + Rang(T)$$

$$3 = 1 + Rang(T)$$

$$\therefore \quad Rang(T) = 2$$

Problema 3.

a. $T(x,y,z) = (x-3z, -3x+y+6z, 2x-2y)$

$(x,y,z) \in \ker(T)$ siempre y cuando $T(x,y,z) = (0,0,0)$

Es decir:

$$(x-3z, -3x+y+6z, 2x-2y) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3z = 0 \\ -3x+y+6z = 0 \\ 2x-2y = 0 \end{cases}$$

Ecuación matricial asociada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicamos operaciones elementales a la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-2f_1 \to f_3]{f_2+3f_1 \to f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3+2f_2 \to f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 3z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = 3z \end{cases}$$

Luego: $(x,y,z) \in \ker(T) \Rightarrow (x,y,z) = (3z, 3z, z) = z(3,3,1)$

$$\therefore \ker(T) = \langle (3,3,1) \rangle$$