6.7

VARIABLE COMPLEJA

Desarrollo Tarea 2S

Integrantes: Javiera Picares M.
Marco Godoy V.

Problema A

Recuerde que una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es conforme si preserva ángulos y preserva orientación. Demuestre que, si identificamos $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, entonces toda transformación lineal conforme $L:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ existe $a\in\mathbb{C}$ tal que para todo $z\in\mathbb{C}$ tenemos $L(z)=az$.

Dem. Si $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ lineal $(\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2)$, entonces existen $a,b\in\mathbb{C}$ tales que:

$$T(z)=az+b\bar{z}$$

Este hecho fue demostrado en clases.

En el caso de que $b=0$, la demostración concluye, al igual que si $T\equiv 0$ $(a=0,\ b=0)$. Ahora debemos demostrar que $a=0$ y $b\neq 0$.

En el caso de que $T(z)=b\bar{z}$ $(b\in\mathbb{C}^*)$, entonces T preserva ángulos pero no orientación. En efecto, por lo visto en clases, si $z=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ (en realidad es una matriz 2×1 en $\mathbb{R}$):

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=|b|\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi\\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}\qquad \left(\bar{z}=\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}\right)$$

pero como $\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, se tiene

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=|b|\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi\\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
$$=|b|\begin{pmatrix}\cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi\\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Tomando $z_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}$, $z_2 = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \operatorname{sen}\beta \end{pmatrix}$,

$\arg z_1 = \alpha$, $\arg z_2 = \beta$;

$$T(z_1) = |b| \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} = |b| \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\alpha + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\varphi\cos\alpha - \cos\varphi\operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}$$

$$= |b| \begin{pmatrix} \cos(\varphi-\alpha) \\ \operatorname{sen}(\varphi-\alpha) \end{pmatrix},$$

Análogamente , $T(z_2) = |b| \begin{pmatrix} \cos(\varphi-\beta) \\ \operatorname{sen}(\varphi-\beta) \end{pmatrix}$.

$\therefore \arg T(z_1) = \varphi - \alpha$, $\arg T(z_2) = \varphi - \beta$. Luego se tiene

$\arg z_1 - \arg z_2 = \alpha - \beta$, $\arg T(z_1) - \arg T(z_2) = \varphi - \alpha - (\varphi - \beta) = \beta - \alpha$;

pero no se cumple que $\arg z_1 - \arg z_2 = \arg T(z_1) - \arg T(z_2)$.

<u>Pd</u>: $b = 0$.

Reescribiendo la expresión de $T(z)$ nos queda de la siguiente forma:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = |a| \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + |b| \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|\cos\theta + |b|\cos\varphi & -|a|\operatorname{sen}\theta + |b|\operatorname{sen}\varphi \\ |a|\operatorname{sen}\theta + |b|\operatorname{sen}\varphi & |a|\cos\theta - |b|\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si queremos que T preserve ángulos, entonces también debe preservar ortogonalidad entre vectores de $\mathbb{R}^2$. Así:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 ,$$

donde $\langle\ ,\ \rangle$ es el producto interno euclideano.

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|a|\cos\theta+|b|\cos\varphi\\|a|\operatorname{sen}\theta+|b|\operatorname{sen}\varphi\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-|a|\operatorname{sen}\theta+|b|\operatorname{sen}\varphi\\|a|\cos\theta-|b|\cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$\left\langle T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle=\left(|a|\cos\theta+|b|\cos\varphi\right)\left(-|a|\operatorname{sen}\theta+|b|\operatorname{sen}\varphi\right)$$
$$+\left(|a|\operatorname{sen}\theta+|b|\operatorname{sen}\varphi\right)\left(|a|\cos\theta-|b|\cos\varphi\right)$$

$$=-|a|^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta+|ab|\cos\theta\operatorname{sen}\varphi-|ab|\cos\varphi\operatorname{sen}\theta+|b|^2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi$$
$$+|a|^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta-|ab|\operatorname{sen}\theta\cos\varphi+|ab|\operatorname{sen}\varphi\cos\theta-|b|^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$$

$$=2|ab|\left(\cos\theta\operatorname{sen}\varphi-\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\right)=2|ab|\operatorname{sen}(\varphi-\theta)$$

$$\Rightarrow\quad\left\langle T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle=0\iff 2|ab|\operatorname{sen}(\varphi-\theta)=0$$
$$\iff |ab|\operatorname{sen}(\varphi-\theta)=0$$

Como $|a|\neq 0$, entonces ó $|b|=0$ ó $\operatorname{sen}(\varphi-\theta)=0$. En el caso de que $\operatorname{sen}(\varphi-\theta)=0$, entonces $\varphi-\theta\in\{0,\pi\}$. Basta descartar ambos casos, suponiendo que $|b|=0$

(i) $\varphi-\theta=0\iff\varphi=\theta$,

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(|a|+|b|)\cos\theta & (-|a|+|b|)\operatorname{sen}\theta\\(|a|+|b|)\operatorname{sen}\theta & (|a|-|b|)\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-|a|+|b|)\operatorname{sen}\theta\\(|a|-|b|)\cos\theta\end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=-T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-(|a|+|b|)\cos\theta+(|b|-|a|)\operatorname{sen}\theta\\-(|a|+|b|)\operatorname{sen}\theta+(|a|-|b|)\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\left\langle T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$= \left[(|a|+|b|)\cos\theta + (|b|-|a|)\operatorname{sen}\theta\right]\left[(|b|-|a|)\operatorname{sen}\theta - (|a|+|b|)\cos\theta\right]$$
$$+ \left[(|a|+|b|)\operatorname{sen}\theta + (|a|-|b|)\cos\theta\right]\left[(|a|-|b|)\cos\theta - (|a|+|b|)\operatorname{sen}\theta\right]$$

$$= (|a|+|b|)(|b|-|a|)\cos\theta\operatorname{sen}\theta - (|a|+|b|)^2\cos^2\theta + (|b|-|a|)^2\operatorname{sen}^2\theta$$
$$-(|b|-|a|)(|a|+|b|)\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$
$$+ (|a|+|b|)(|a|-|b|)\operatorname{sen}\theta\cos\theta - (|a|+|b|)^2\operatorname{sen}^2\theta + (|a|-|b|)^2\cos^2\theta$$
$$- (|a|-|b|)(|a|+|b|)\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$= \cancel{(|b|^2-|a|^2)\cos\theta\operatorname{sen}\theta} - (|a|+|b|)^2\cos^2\theta + (|b|-|a|)^2\operatorname{sen}^2\theta + \cancel{(|a|^2-|b|^2)\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$
$$+ \cancel{(|a|^2-|b|^2)\operatorname{sen}\theta\cos\theta} - (|a|+|b|)^2\operatorname{sen}^2\theta + (|a|-|b|)^2\cos^2\theta$$
$$+ \cancel{(|b|^2-|a|^2)\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$

$$= -(|a|+|b|)^2(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta) + (|b|-|a|)^2(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)$$

$$= -(|a|+|b|) + (|b|-|a|)^2 = -2|ab|$$

$$\therefore \left\langle T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 0 \iff |ab| = 0$$

$$\therefore b = 0 \quad (\Rightarrow\Leftarrow)$$

Análogamente se demuestra que $\varphi - \theta \neq \pi$

$$\therefore b = 0$$

$$\therefore T(z) = az, \quad a \in \mathbb{C}$$

Problema B

La distancia esférica es la distancia en $\overline{\mathbb{C}}$ inducida por la distancia euclideana en $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ cuando identificamos $\overline{\mathbb{C}}$ con

$$S^2=\{(\zeta,h) \mid |\zeta|^2+h^2=1\}$$

(como visto en clases). Escriba la distancia esférica en coordenadas homogéneas.

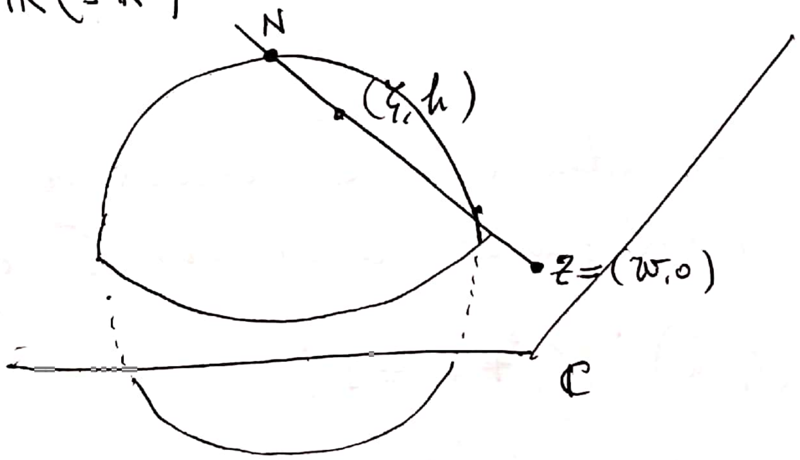
Desarrollo Dados dos puntos $(\zeta,h),(\xi,k)\in S^2$, la distancia esférica $d((\zeta,h),(\xi,k))$ está dada por

$$d((\zeta,h),(\xi,k))=\sqrt{|\zeta-\xi|^2+(h-k)^2}$$
$$=\sqrt{(\zeta_1-\xi_1)^2+(\zeta_2-\xi_2)^2+(h-k)^2}$$

donde $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)$, $\xi=(\xi_1,\xi_2)$.

Primero necesitamos identificar el punto $(\zeta,h)\in S^2$ con su respectivo $z\in\overline{\mathbb{C}}$ mediante la proyección estereográfica.

$\mathbb{C}\times\mathbb{R}\ (\cong\mathbb{R}^3)$



$w = w_1 + i w_2$

$N = (0, 1)$

Los puntos $(\xi, h) \in S^2$ y $z = (w, 0) \in \mathbb{C}$ $(\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}\times\mathbb{R})$ están ligados por la recta

$$\{tN + (1-t)z \ / -\infty < t < \infty\}$$

Dado $z \in \mathbb{C}$:

$tN + (1-t)z = t(0,1) + (1-t)(w,0) = ((1-t)w, t) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}$

Si $((1-t)w, t) \in S^2$, entonces $((1-t)w, t) = (\xi, h)$, donde

$$|\xi|^2 + h^2 = 1$$

es decir,
$$|(1-t)w|^2 + t^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (1-t)^2|w|^2 + t^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow (1-t)^2|w|^2 = 1 - t^2 = (1-t)(1+t)$$
$$\Leftrightarrow (1-t)\left[(1-t)|w|^2 - (1+t)\right] = 0$$

para $t \neq 1$:
$$|w|^2 = \frac{1+t}{1-t}$$

$$\Leftrightarrow (1-t)|w|^2 = 1 + t \Leftrightarrow |w|^2 - 1 = t + t|w|^2 = t(1 + |w|^2)$$

$$\therefore\ t = \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1}$$

Luego,

$$(\zeta, h) = ((1-t)w, t)$$

donde $\zeta = (1-t)w = \left(1 - \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right)w = \frac{2}{|w|^2+1}w$,

$t = \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}$. Considerando que $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$,

$$\zeta_1 = \frac{2w_1}{|w|^2+1} = \frac{w+\bar{w}}{|w|^2+1}, \quad \zeta_2 = \frac{2w_2}{|w|^2+1} = \frac{-i(w-\bar{w})}{|w|^2+1}$$

Ocupando lo anterior, dados (ζ, h), (ξ, k) tenemos vía la proyección estereográfica

$$(\zeta, h) = \left(\frac{2z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$$

$$(\xi, k) = \left(\frac{2w}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right)$$

donde $z, w \in \mathbb{C}$ (no confundir con los z, w anteriores, estos son otros), y su distancia esférica viene dada por

$$d((\zeta,h),(\xi,k))^2 = (\zeta_1-\xi_1)^2 + (\zeta_2-\xi_2)^2 + (h-k)^2$$

$$= \zeta_1^2 + \xi_1^2 + \zeta_2^2 + \xi_2^2 + h^2 + k^2 + 2(\zeta_1\xi_1 + \zeta_2\xi_2 + hk)$$

$$= \underbrace{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + h^2)}_{=1} + \underbrace{(\xi_1^2 + \xi_2^2 + k^2)}_{=1} + 2(\zeta_1\xi_1 + \zeta_2\xi_2 + hk)$$

$$= 2 + 2(\zeta_1\xi_1 + \zeta_2\xi_2 + hk)$$

$$= 2 - 2\left[\frac{z+\bar z}{|z|^2+1}\cdot\frac{w+\bar w}{|w|^2+1} + \frac{(-i)(z-\bar z)}{|z|^2+1}\cdot\frac{(-i)(w-\bar w)}{|w|^2+1} + \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\cdot\frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right]$$

$$= 2 - \frac{2}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}\Big[\cancel{zw} + z\bar w + \bar z w + \cancel{\bar z\bar w} - \cancel{zw} + z\bar w + \bar z w - \cancel{\bar z\bar w} + |zw|^2 - |z|^2 - |w|^2 + 1\Big]$$

$$= \frac{2}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}\Big[\cancel{|zw|^2} + |z|^2 + |w|^2 + \cancel{1} - z\bar w - \bar z w - z\bar w - \bar z w - \cancel{|zw|^2} + |z|^2 + |w|^2 - \cancel{1}\Big]$$

$$= \frac{2}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}\left[2|z|^2 + 2|w|^2 - 2z\bar w - 2\bar z w\right]$$

$$= \frac{4}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}\left[|z|^2 + |w|^2 - z\bar w - \bar z w\right]$$

$$= \frac{4}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}\left[z\bar z + w\bar w - z\bar w - \bar z w\right]$$

$$= \frac{4}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}\left[(z-w)(\bar z-\bar w)\right] = \frac{4}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}(z-w)\overline{(z-w)}$$

$$= \frac{4|z-w|^2}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}$$

Así, $d((\xi,h),(\xi,k)) = \dfrac{2|z-w|}{[(|z|^2+1)(|w|^2+1)]^{1/2}}$

Dado que $S^2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[x:y] / x, y \in \mathbb{C}$ no nulos simultaneamente $\}$

$= \{[1:z] / z \in \mathbb{C}\} \cup \{[0:1]\}$, al punto $(\xi, h) \in S^2 \setminus \{N\}$ le corresponde a z en el plano complejo $\mathbb{C}$ y a $[1:z]$ en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Considerando $[1:z] = [x:y] \iff z = y/x$,

tenemos que

$$z = y/x$$
$$w = y'/x'$$

$\boxed{\text{A } N=(0,1) \text{ le corresponde } [0:1]}$

y

$$\frac{2|z-w|}{[(|z|^2+1)(|w|^2+1)]^{1/2}} = \frac{2\left|\frac{y}{x} - \frac{y'}{x'}\right|}{\left[\left(\left|\frac{y}{x}\right|^2+1\right)\left(\left|\frac{y'}{x'}\right|^2+1\right)\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{2|xy'-x'y|}{[(|x|^2+|y|^2)(|x'|^2+|y'|^2)]^{1/2}}$$

Así, tenemos finalmente:

$$d([x:y],[x':y']) = \frac{2|xy'-x'y|}{[(|x|^2+|y|^2)(|x'|^2+|y'|^2)]^{1/2}}$$

Obs. Notar que cuando se tiene $[x':y'] = [0:1]$

$$d([x:y],[0:1]) = \frac{2|x|}{[(|x|^2+|y|^2)]^{1/2}}$$

① sea, $d(z,\infty) = \dfrac{2}{(1+|z|^2)^{1/2}}$.

Problema C (Principio de Simetría)

Diremos que 2 puntos distintos z y z' de $\overline{\mathbb{C}}$ son simétricos con respecto a un círculo C, si no están en C y si todo círculo que pasa por z y z' es ortogonal a C. Demuestre que si 2 puntos distintos z y z' de $\overline{\mathbb{C}}$ son simétricos con respecto a un círculo C, entonces para toda transformación de Moebius M los puntos $M(z)$ y $M(z')$ son simétricos con respecto a $M(C)$.

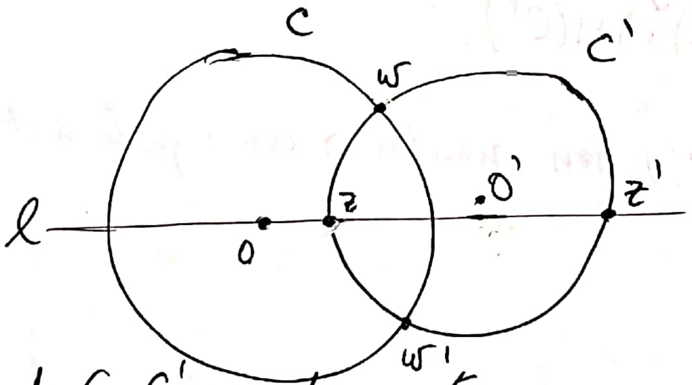
dem.

Primero veamos que dado un círculo C de $\overline{\mathbb{C}}$, entonces para toda transformación de Moebius M, $M(C)$ es un círculo en $\overline{\mathbb{C}}$ (posteriormente este hecho será demostrado).

También notemos que toda transformación $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es holomorfa en su dominio. Lo anterior implica que

"M es conforme".

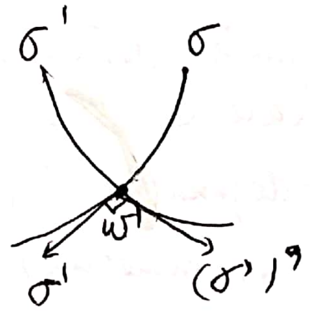
Dados dos círculos C, C' en $\overline{\mathbb{C}}$, donde $z, z' \in C'$ y w, w' son los puntos de intersección con C



z, z' puntos $\notin C$ que cumplen el principio de simetría

O, O' centro de C, C' respectivamente
l recta que que pasa por O y que contiene a z, z' (l es un círculo en $\overline{\mathbb{C}}$).

Podemos parametrizar localmente los arcos que pasan por w y w'



γ, σ caminos de C

γ', σ' caminos de C'

$\gamma, \gamma', \sigma, \sigma' : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ son los respectivos caminos,

$t_0, t_1 \in [0,1]$ tales que $\gamma'(t_0) \perp (\gamma')'(t_0)$, $\sigma'(t_1) \perp (\sigma')'(t_1)$

Notemos que dada transformación de Moebius M, $M(z), M(z') \notin M(C)$ (en caso contrario, $M^{-1}(M(z)), M^{-1}(M(z')) \in M^{-1}(M(C)) = C$, ya que toda transformación de Moebius tiene inversa holomorfa) y $M(z), M(z') \in M(C')$. Además $M \circ \gamma$, $M \circ \gamma'$, $M \circ \sigma$, $M \circ \sigma'$ son respectivos caminos de $M(C)$ y $M(C')$. Luego, como M es conforme, luego

- $(M \circ \gamma)'(t_1) \perp (M \circ \gamma')'(t_1)$
- $(M \circ \sigma)'(t_1) \perp (M \circ \sigma')'(t_1)$

Así se tiene que $M(C)$ y $M(C')$ son ortogonales en $M(w)$. Cabe destacar que $M(w), M(w') \in M(C) \cap M(C')$.

$\therefore$ $M(z), M(z')$ son simétricos con respecto a $M(C)$. $\blacksquare$

Problema D

Demuestre que el grupo de las transformaciones de Moebius está generado por la inversión ($I(z) = 1/z$) y las traslaciones (transformaciones de Moebius de la forma $z \mapsto z + \tau$.)

Dem. Primero escribiremos las transformaciones de Moebius de la forma $M_a(z) = az$ ($a \in \mathbb{C}^*$) como composición de traslaciones $T_\tau(z) = z + \tau$ e inversiones $I(z) = \frac{1}{z}$.

Primero notemos que M_a fija a 0 e ∞, T_τ fija a ∞, $\forall \tau \in \mathbb{C}$; por último I fija a 1 y -1, y se cumple:

$$I(0) = \infty$$
$$I(\infty) = 0$$

Luego consideramos la siguiente sucesión de composiciones (con $\tau \neq 0$):

$$0 \xmapsto{I} \infty \xmapsto{T_\tau} \infty \xmapsto{I} 0 \xmapsto{T_{-1/\tau}} -1/\tau \xmapsto{I} -\tau \xmapsto{T_\tau} 0$$
$$\infty \longmapsto 0 \longmapsto \tau \longmapsto \frac{1}{\tau} \longmapsto 0 \longmapsto \infty \longmapsto \infty$$

Luego:

$$(T_\tau \circ I \circ T_{-1/\tau} \circ I \circ T_\tau \circ I)(z) = (T_\tau \circ I \circ T_{-1/\tau} \circ I \circ T_\tau)\left(\frac{1}{z}\right)$$
$$= (T_\tau \circ I \circ T_{-1/\tau} \circ I)\left(\frac{1}{z} + \tau\right) = (T_\tau \circ I \circ T_{-1/\tau} \circ I)\left(\frac{\tau z + 1}{z}\right)$$
$$= (T_\tau \circ I \circ T_{-1/\tau})\left(\frac{z}{\tau z + 1}\right) = (T_\tau \circ I)\left(\frac{z}{\tau z + 1} - \frac{1}{\tau}\right)$$
$$= (T_\tau \circ I)\left(\frac{\tau z - \tau z - 1}{\tau^2 z + \tau}\right) = (T_\tau \circ I)\left(-\frac{1}{\tau^2 z + \tau}\right)$$
$$= T_\tau(-\tau^2 z - \tau) = -\tau^2 z - \tau + \tau = -\tau^2 z$$

Considerando $\tau = \sqrt{-a}$, se tiene

$$M = T_{\sqrt{-a}} \circ I \circ T_{-1/\sqrt{-a}} \circ I \circ T_{\sqrt{-a}} \circ I$$

Ahora consideremos una transformación de Möebius $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc \neq 0)$ arbitraria.

Si $c=0$: $\quad T(z) = \dfrac{az+b}{d} = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d} = T_{b/d}\left(\dfrac{a}{d}z\right)$

$$= T_{b/d}(M_{a/d}(z))$$

$\therefore \quad T = T_{b/d} \circ M_{a/d}$, donde $T_{b/d}(z) = z + b/d$

$M_{a/d}(z) = \dfrac{a}{d}z$.

Si $c \neq 0$:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{1}{c}\left(\frac{az+b}{z+d/c}\right) = \frac{1}{c}\left(\frac{az+a\,d/c+b-a\,d/c}{z+d/c}\right)$$

$$= \frac{1}{c}\left(\frac{az+a\,d/c}{z+d/c} + \frac{b-a\,d/c}{z+d/c}\right) = \frac{1}{c}\left(a\,\frac{z+\frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}} + \frac{b-a\frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}}\right)$$

$$= \frac{1}{c}\left(a + \frac{b-a\frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}}\right) = \frac{1}{c}\left(a + \left(\frac{z+d/c}{b-a\,d/c}\right)^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{c}\left(a + \left(\frac{1}{b-a\frac{d}{c}}z + \frac{d/c}{b-a\,d/c}\right)^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{c}\left(a + \left(\frac{c}{bc-ad}z + \frac{d}{bc-ad}\right)^{-1}\right)$$

Considerando

$$M_{1/c}(z) = \frac{1}{c} z$$

$$M_{\frac{c}{bc-ad}}(z) = \frac{c}{bc-ad} z$$

$$T_{\frac{d}{bc-ad}}(z) = z + \frac{d}{bc-ad}$$

$$T_a(z) = z+a$$

queda finalmente

$$T = M_{1/c} \circ T_a \circ I \circ T_{\frac{d}{bc-ad}} \circ M_{\frac{c}{bc-ad}}$$

$\boxtimes$

Problema E

Dados 4 puntos $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{C}}$ que son distintos dos a dos, escriba la relación cruzada $R(a,b,c,d)$ en coordenadas homogeneas, y demuestre que para toda transformación de Moebius M tenemos

(1) $$R(M(a), M(b), M(c), M(d)) = R(a,b,c,d)$$

Inversamente, demuestre que si $M : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ es inyectiva y tal que para cada cuarteto de puntos a, b, c, d en $\overline{\mathbb{C}}$ que son distintos 2 a dos tenemos (1), entonces M es una transformación de Moebius.

dem. Recordemos que $\overline{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, donde

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[x:y] \,/\, x, y \in \mathbb{C} \text{ no simultaneamente nulos}\}$$
$$= \{[1:z] \,/\, z \in \mathbb{C}\} \cup \{[0:1]\}$$

En este caso, cada $z \in \mathbb{C}$ se identifica con $[1:z]$ e ∞ se identifica con $[0:1]$.

Para $z \in \mathbb{C}$, tenemos que $[1:z] = [x:y]$ es equivalente a decir $z = y/x$, luego para $R(a,b,c,d) = \dfrac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$

donde $a = a_2/a_1$, $b = b_2/b_1$, $c = c_2/c_1$, $d = d_2/d_1$

$$R([a_1:a_2],[b_1:b_2],[c_1:c_2],[d_1:d_2])$$

$$= \frac{\left(\frac{a_2}{a_1}-\frac{c_2}{c_1}\right)\left(\frac{b_2}{b_1}-\frac{d_2}{d_1}\right)}{\left(\frac{a_2}{a_1}-\frac{d_2}{d_1}\right)\left(\frac{b_2}{b_1}-\frac{c_2}{c_1}\right)} = \frac{\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1c_1}\cdot\frac{b_2d_1-b_1d_2}{b_1d_1}}{\frac{a_2d_1-a_1d_2}{a_1d_1}\cdot\frac{b_2c_1-b_1c_2}{b_1c_1}}$$

$$= \frac{(a_2c_1-a_1c_2)(b_2d_1-b_1d_2)}{(a_2d_1-a_1d_2)(b_2c_1-b_1c_2)}$$

$$= [(a_2d_1-a_1d_2)(b_2c_1-b_1c_2) : (a_2c_1-a_1c_2)(b_2d_1-b_1d_2)].$$

$$\therefore R([a_1:a_2],[b_1:b_2],[c_1:c_2],[d_1:d_2])$$

$$= [(a_2d_1-a_1d_2)(b_2c_1-b_1c_2) : (a_2c_1-a_1c_2)(b_2d_1-b_1d_2)]$$

Por demostrar que si $M:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ es inyectiva y tal que para cada cuarteto de puntos $a,b,c,d\in\overline{\mathbb{C}}$ distintos dos a dos se tiene (1), entonces M es una transformación de Moebius.

dem. Dada $M:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$, podemos suponer que $M(z)=[\alpha(z):\beta(z)]$, donde $\alpha:\overline{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$, $\beta:\overline{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$ y $\alpha(z),\beta(z)$ no cero simultaneamente, $\forall z\in\overline{\mathbb{C}}$. Ahora introduciremos un poco de notación nueva:

$$a=[a_1:a_2],\ b=[b_1:b_2],\ c=[c_1:c_2],\ d=[d_1:d_2],$$
$$M(a)=[\alpha_a,\beta_a],\quad M(b)=[\alpha_b,\beta_b],\ M(c)=[\alpha_c,\beta_c],$$
$$M(d)=[\alpha_d,\beta_d],$$

donde $\alpha_a=\alpha(a)$, $\beta_a=\beta(a)$, $\alpha_b=\alpha(b)$, $\beta_b=\beta(b)$, $\alpha_c=\alpha(c)$, $\beta_c=\beta(c)$, $\alpha_d=\alpha(d)$, $\beta_d=\beta(d)$. Así

$$\begin{aligned}R(M(a),M(b),M(c),M(d))&=R([\alpha_a,\beta_a],[\alpha_b,\beta_b],[\alpha_c,\beta_c],[\alpha_d,\beta_d])\\&=[(\beta_a\alpha_d-\alpha_a\beta_d)(\beta_b\alpha_c-\alpha_b\beta_c):(\beta_a\alpha_c-\alpha_a\beta_c)(\beta_b\alpha_d-\alpha_b\beta_d)]\end{aligned}$$

Si $R(M(a),M(b),M(c),M(d))=R(a,b,c,d)$, es necesario que

$$\begin{aligned}&[(\beta_a\alpha_d-\alpha_a\beta_d)(\beta_b\alpha_c-\alpha_b\beta_c):(\beta_a\alpha_c-\alpha_a\beta_c)(\beta_b\alpha_d-\alpha_b\beta_d)]\\&=[(a_2d_1-a_1d_2)(b_2c_1-b_1c_2):(a_2c_1-a_1c_2)(b_2d_1-b_1d_2)]\end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^*$:

$$\begin{cases} (\beta_a\alpha_d - \alpha_a\beta_d)(\beta_b\alpha_c - \alpha_b\beta_c) = \lambda(a_2d_1 - a_1d_2)(b_2c_1 - b_1c_2) \\ (\beta_a\alpha_c - \alpha_a\beta_c)(\beta_b\alpha_d - \alpha_b\beta_d) = \lambda(a_2c_1 - a_1c_2)(b_2d_1 - b_1d_2) \end{cases}$$

Ahora podemos cambiar a por z (variable) para así estudiar $M(z) = [\alpha(z) : \beta(z)]$. Si $z = [x : y]$ ($x, y \in \mathbb{C}$ no simultaneamente 0) y definiendo

$$A = (\beta_b\alpha_c - \alpha_b\beta_c) \quad ; \quad C = \lambda(b_2c_1 - b_1c_2)$$
$$B = (\beta_b\alpha_d - \alpha_b\beta_d) \qquad D = \lambda(b_2d_1 - b_1d_2)$$

El sistema de ecuaciones anterior queda de la siguiente forma:

$$(\alpha_d\beta_z - \beta_d\alpha_z)A = C(d_1y - d_2x)$$
$$(\alpha_c\beta_z - \beta_c\alpha_z)B = D(c_1y - c_2x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_d A\beta_z - \beta_d A\alpha_z &= C(d_1y - d_2x) \\ \alpha_c B\beta_z - \beta_c B\alpha_z &= D(c_1y - c_2x) \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha_d A & -\beta_d A \\ \alpha_c B & -\beta_c B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_z \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(d_1y - d_2x) \\ D(c_1y - c_2x) \end{pmatrix}$$

Notemos que

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_d A & -\beta_d A \\ \alpha_c B & -\beta_c B \end{pmatrix} = \alpha_c\beta_d AB - \beta_c\alpha_d AB = (\alpha_c\beta_d - \beta_c\alpha_d)AB$$
$$= (\alpha_c\beta_d - \beta_c\alpha_d)(\beta_b\alpha_c - \alpha_b\beta_c)(\beta_b\alpha_d - \alpha_b\beta_d)$$

Si $\alpha_c\beta_d - \beta_c\alpha_d = 0 \iff \alpha_c\beta_d = \beta_c\alpha_d$

Suponiendo $\alpha_c \neq 0$ (α_c, β_c no pueden ser simultaneamente nulos).

$\Rightarrow \beta_d = \beta_c\alpha_d \frac{1}{\alpha_c}$,

$$\Rightarrow [\alpha_d : \beta_d] = [\alpha_d : \beta_c\alpha_d \frac{1}{\alpha_c}] \underset{\alpha_d \neq 0}{=} [1 : \beta_c \frac{1}{\alpha_c}] = [\alpha_c : \beta_c]$$

lo que dice $M(c) = [\alpha_c : \beta_c] = [\alpha_d : \beta_d] = M(d)$ $(d \neq c)$

y esto contradice la inyectividad de M. Análogamente se demuestra que $\beta_d\alpha_c - \alpha_b\beta_c, \beta_b\alpha_c - \alpha_b\beta_c \neq 0$

$$\therefore \begin{pmatrix} \alpha_d A & -\beta_d A \\ \alpha_c B & -\beta_c B \end{pmatrix} \text{ es invertible}$$

Calculando la inversa de esta matriz, nos queda:

$$\begin{pmatrix} \beta_z \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \frac{1}{AB(\alpha_c\beta_d - \beta_c\alpha_d)} \begin{pmatrix} -\beta_c B & \beta_d A \\ -\alpha_c B & \alpha_a A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(d_1y - d_2x) \\ D(c_1y - c_2x) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{AB(\alpha_c\beta_d - \beta_c\alpha_d)} \begin{pmatrix} -\beta_c BC(d_1y - d_2x) + \beta_d AD(c_1y - c_2x) \\ -\alpha_c BC(d_1y - d_2x) + \alpha_d AD(c_1y - c_2x) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Gamma} \begin{pmatrix} (\beta_d ADc_1 - \beta_c BCd_1)y + (\beta_c BCd_2 - \beta_d ADc_2)x \\ (\alpha_d ADc_1 - \alpha_c BCd_1)y + (\alpha_c BCd_2 - \alpha_d ADc_2)x \end{pmatrix}$$

donde $\Gamma = AB(\alpha_c\beta_d - \beta_c\alpha_d)$

Ahora tenemos una expresión para $M(z)$ $(= M[x:y])$.

$$
\begin{aligned}
M(z) &= [\alpha_z : \beta_z] \\
&= \Big[\tfrac{1}{\Gamma}(\alpha_d ADc_1 - \alpha_c BCd_1)y + \tfrac{1}{\Gamma}(\alpha_c BCd_2 - \alpha_d ADc_2)x \\
&\qquad : \tfrac{1}{\Gamma}(\beta_d ADc_1 - \beta_c BCd_1)y + \tfrac{1}{\Gamma}(\beta_c BCd_2 - \beta_d ADc_2)x \Big] \\
&= \Big[(\alpha_d ADc_1 - \alpha_c BCd_1)y + (\alpha_c BCd_2 - \alpha_d ADc_2)x \\
&\qquad : (\beta_d ADc_1 - \beta_c BCd_1)y + (\beta_c BCd_2 - \beta_d ADc_2)x \Big]
\end{aligned}
$$

Por lo visto en clases, una transformación de Möbius T en coordenadas homogeneas es de la forma

$$T[x:y] = [Ax + By : Cx + Dy]$$

donde $AD - BC \neq 0$. Como último paso, debemos verificar que $M(z)$ satisface la condición:

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_c BCd_2 - \alpha_d ADc_2)(\beta_d ADc_1 - \beta_c BCd_1) - (\alpha_d ADc_1 - \alpha_c BCd_1)(\beta_c BCd_2 - \beta_d ADc_2) \\
&= \alpha_c\beta_d c_1d_2 ABCD - \cancel{\alpha_c\beta_c d_1d_2 B^2C^2} - \cancel{\alpha_d\beta_d c_1c_2 A^2D^2} + \beta_c\alpha_d c_2d_1 ABCD \\
&\quad - \left(\beta_c\alpha_d c_1d_2 ABCD - \cancel{\alpha_d\beta_d c_1c_2 A^2D^2} - \cancel{\alpha_c\beta_c d_1d_2 B^2C^2} + \alpha_c\beta_d c_2d_1 ABCD\right) \\
&= \alpha_c\beta_d c_1d_2 ABCD + \beta_c\alpha_d c_2d_1 ABCD - \beta_c\alpha_d c_1d_2 ABCD - \alpha_c\beta_d c_2d_1 ABCD \\
&= ABCD(\alpha_c\beta_d c_1d_2 + \beta_c\alpha_d c_2d_1 - \beta_c\alpha_d c_1d_2 - \alpha_c\beta_d c_2d_1) \\
&= ABCD\left(c_1d_2(\alpha_c\beta_d - \beta_c\alpha_d) + c_2d_1(\beta_c\alpha_d - \alpha_c\beta_d)\right)
\end{aligned}
$$

$$= ABCD(\alpha_c\beta_d - \beta_c\alpha_d)(c_1d_2 - c_2d_1)$$

$$= (\beta_d\alpha_c - \alpha_b\beta_c)(\beta_b\alpha_d - \alpha_b\beta_d)(b_2c_1 - b_1c_2)(b_2d_1 - b_1d_2)(\alpha_c\beta_d - \beta_c\alpha_d)$$
$$(c_1d_2 - c_2d_1)\lambda^2 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

Como ninguno de los factores puede ser cero, entonces la condición sí se cumple y efectivamente $M : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ es una transformación de Moebius.

$\boxtimes$

¿Dónde está la demostración de 1 asumiendo M Moebius?

Problema F: Demuestre que 4 puntos de $\overline{\mathbb{C}}$, que son distintos 2 a 2 están en un mismo círculo si y sólo si su relación cruzada es real.

$\Rightarrow)$ Sean $z, a, b, c \in C$, con C un círculo de $\overline{\mathbb{C}}$ distintos 2 a 2.

Por demostrar: La relación cruzada entre éstos es real.

Demostración: Considerando que el grupo de las transformaciones de Moebius es 3-transitivo, tenemos que existe una única transformación T de Moebius tal que:

$$T(a) = 1, \quad T(b) = 0, \quad T(c) = \infty$$

Por lo tanto, notemos que $1, 0, \infty \in \overline{\mathbb{R}}$, el cual es un círculo en $\mathbb{C}$.

Luego $\overline{\mathbb{R}} = T(C)$, por lo tanto

$$T(z) \in T(C) = \overline{\mathbb{R}}$$

con

$$T(z) = \frac{(z-b)(a-c)}{(z-c)(a-b)} \in \mathbb{R}.$$

Con esto, la relación cruzada es real.

$\Leftarrow)$ Tenemos que:

$$R(z, a, b, c) = \frac{(z-b)(a-c)}{(z-c)(a-b)}$$

es real.

Por demostrar: z, a, b, c están en un mismo círculo.

Demostración: Notemos que $R(z, a, b, c) = \infty \iff z = c$ ó $b = a$ pero z, a, b, c son distintos 2 a 2, por lo que sus valores están únicamente determinados.

Llamemos $S(z) = \dfrac{(z-b)(a-c)}{(z-c)(a-b)}$ y analicemos lo siguiente:

$$R(z,a,b,c) = \infty \iff z = c.$$

$$R(z,a,b,c) = 1 \iff z = a.$$

$$R(z,a,b,c) = 0 \iff z = b$$

Por lo que si $S(z) \in \mathbb{R} \Rightarrow S(z), S(a), S(b), S(c) \in \overline{\mathbb{R}}$
y como S es una transformación de Moebius, su inversa S^{-1} también lo es. Además $S^{-1}(\overline{\mathbb{R}})$ es un círculo, ya que podemos considerar $\overline{\mathbb{R}}$ como un círculo y las transformaciones de Moebius llevan círculos en círculos.

Por lo tanto $z, a, b, c \in S^{-1}(\overline{\mathbb{R}})$.

Problema 6

Dados dos círculos disjuntos C y C' en $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, demuestre que existe una transformación de Moebius M tal que $M(C)$ y $M(C')$ son círculos en $\mathbb{C}$ centrados en 0.

dem. Consideremos los círculos $C(z_0, r_0)$, $C(z_1, r_1)$ en $\overline{\mathbb{C}}$, (más precisamente, en $\mathbb{C}$) sea

$$f_1(z) = \frac{1}{r_0}(z - z_0) \quad ,$$

$f_1(z_0) = \frac{1}{r_0}(z_0 - z_0) = 0$, y dado $z \in C(z_0, r_0)$ $(\Leftrightarrow |z - z_0| = r_0)$,

$$|f_1(z)| = \left|\frac{1}{r_0}(z - z_0)\right| = \frac{1}{r_0}|z - z_0| = \frac{1}{r_0} r_0 = 1$$

$$\therefore \; f_1(C(z_0, r_0)) = C(0, 1)$$

$f_1(z_1) = \frac{1}{r_0}(z_1 - z_0)$; para $z \in C(z_1, r_1)$ $(\Leftrightarrow |z - z_1| = r_1)$

$$|f_1(z) - f_1(z_1)| = \left|\frac{1}{r_0}(z - z_0) - \frac{1}{r_0}(z_1 - z_0)\right|$$

$$= \frac{1}{r_0}\left|z - z_0 - z_1 + z_0\right| = \frac{1}{r_0}|z - z_1| = \frac{r_1}{r_0}$$

$$\therefore \; f_1(C(z_1, r_1)) = C\left(\frac{1}{r_0}(z_1 - z_0), \frac{r_1}{r_0}\right)$$

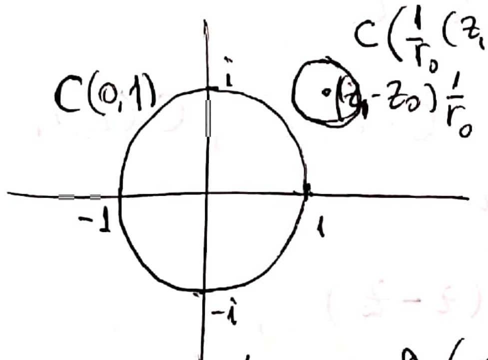
$f_1(C(z_0, r_0))$, $f_1(C(z_1, r_1))$ necesariamente deben ser disjuntos, ya que si $w \in f_1(C(z_0, r_0)) \cap f_1(C(z_1, r_1))$

$\Rightarrow w \in f_1(C(z_0, r_0))$, $w \in f_1(C(z_1, r_1))$

$\Rightarrow w = f(z) = f(z^*)$, donde $z \in C(z_0, r_0)$, $z^* \in C(z_1, r_1)$

$\Rightarrow f^{-1}(w) = z = z^*$ $\therefore$ $C(z_0, r_0) \cap C(z_1, r_1) \neq \phi$.

(i) Supongamos que $\frac{1}{r_0}|z_1 - z_0| > 1$



$\forall z \in C\left(\frac{1}{r_0}(z_1 - z_0), \frac{r_1}{r_0}\right)$,

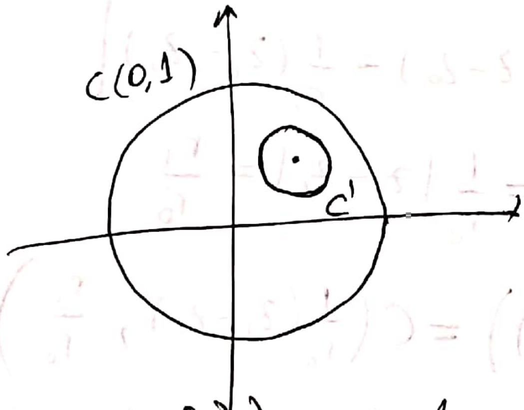
$|z| > 1$

Considerando $f_2(z) = \frac{1}{z}$, $f_2(C(0,1)) = C(0,1)$,

ya que $|f_2(z)| = \frac{1}{|z|}$, entonces

$$|z| = 1 \Rightarrow |f_2(z)| = 1$$

Como $|z| > 1 \Rightarrow |f_2(z)| = \frac{1}{|z|} < 1$:



$C' = f_2\left(C\left(\frac{1}{r_0}(z_1 - z_0), \frac{r_1}{r_0}\right)\right)$. De la misma manera, $C(0,1) \cap C' = \phi$

Como $f_2\left(\frac{1}{r_0}(z_1 - z_0)\right) = \frac{r_0}{z_1 - z_0}$ $\Rightarrow$ $C' = \left(\frac{r_0}{z_1 - z_0}, r'\right)$

(ii) Si $|z_1 - z_0| < 1$, entonces este paso se omite.

Volviendo a (i). Con ayuda del problema H

$$f_3(z) = \frac{z - \frac{r_0}{z_1 - z_0}}{1 - \left(\frac{r_0}{z_1 - z_0}\right) z} \quad , 0 < \left|\frac{r_0}{z_1 - z_0}\right| < 1$$

es transformación de Moebius tal que $f_3\left(\frac{r_0}{z_1 - z_0}\right) = 0$

y $f_3(C(0,1)) = C(0,1)$. Además

$$f_3(C') \cap C(0,1) = \phi .$$

$f_3(C') = C(0, \tilde{r})$

Así, la transformación de Moebius requerida es

$T = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ ($T = f_3 \circ f_1$ cuando ocurre (ii))

Problema H: Sea M una transformación de Möebius tal que $M(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Demuestre que existe $a \in \mathbb{D}$ y $\lambda \in S^1$, tal que para todo $z \in \mathbb{D}$ tenemos

$$M(z) = \lambda . \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

Por demostrar: Existe $a \in \mathbb{D}$ y $\lambda \in S^1$ tal que $\forall z \in \mathbb{D}$.

$$M(z) = \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

Demostración: Sea $a \in \mathbb{D}$, busquemos su simétrico respecto a $\mathbb{D}$. Llamemos α a dicho punto simétrico, luego, si $T(a) = 0$, entonces $T(\alpha) = \infty$; además $|a| = |\alpha| = 1$ y además se debe verificar $\alpha \cdot \bar{a} = 1$, con esto se tiene que $\alpha = \frac{1}{\bar{a}}$ (por propiedad del simétrico)

Bajo, estas condiciones, se construye $T(z)$ de la forma:

$$T(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

donde $T(a) = 0$ y $T\left(\frac{1}{\bar{a}}\right) = \infty$, luego. veamos si $T(z) \in \mathbb{D}$ $\forall z \in \mathbb{D}$.

Sea $z_0 \in \mathbb{D}$, escribimos $z_0 = |z_0| e^{it}$, para cierto $t \in [0, 2\pi)$

Luego

$$|T(z_0)| = \left| \frac{z_0 - a}{1-\bar{a}z_0} \right| = \frac{|z_0 - a|}{|1-\bar{a}z_0|}.$$

con esto

$$|T(z_0)| = \left| \frac{|z_0| e^{it} - a}{1 - \bar{a}\,|z_0| e^{it}} \right|.$$

y como $z_0 \in \mathbb{D}$, $|z_0| < 1$,

$$|T(z_0)| < \left| \frac{e^{it} - a}{1 - \bar{a} e^{it}} \right| = \left| \frac{e^{it} - a}{e^{-it} - \bar{a}} \right| = 1$$

Por tanto $T(z) \in \mathbb{D}$. $\forall z \in \mathbb{D}$, ahora, sea $\lambda \in S^1$, se tiene que $|\lambda| = 1$, en efecto, se construye.

$$M_a(z) = \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

tal que: $|M_a(z)| \leq \max \{ |M_a(w)| : w \in \partial \mathbb{D} \} = 1$.

Ademas como $M_a(z)$ no es constante en $\mathbb{D}$, se tiene que $|M_a(z)| < 1$ $\forall z \in \mathbb{D}$.

Luego $M_a(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$.

Ahora, si tomamos su inversa M_{-a}, se tiene que

$$\mathbb{D} = M_a \circ M_{-a}(\mathbb{D}) \subset M_a(\mathbb{D}.)$$

Por lo tanto $M_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, ya que M_a, M_a son automorfismos del disco unitario.

Problema J: Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y sean $F: U \to \mathbb{R}$, $G: U \to \mathbb{C}$ funciones que son diferenciables en el sentido real en un punto z_0 en U.
Demuestre las siguientes propiedades:

1. $\partial(F\cdot G)(z_0) = \partial F(z_0)\cdot G(z_0) + F(z_0)\cdot \partial G(z_0)$.

2- $\bar\partial(F\cdot G)(z_0) = \bar\partial F(z_0)\cdot G(z_0) + F(z_0)\cdot \bar\partial G(z_0)$.

3- Si $G(z_0) \neq 0$, entonces

$$\partial\left(\frac{F}{G}\right)(z_0) = \frac{\partial F(z_0)\cdot G(z_0) - F(z_0)\partial G(z_0)}{G(z_0)^2}.$$

4- Si $G(z_0)\neq 0$, entonces

$$\bar\partial\left(\frac{F}{G}\right)(z_0) = \frac{\bar\partial F(z_0)\cdot G(z_0) - F(z_0)\bar\partial G(z_0)}{G(z_0)^2}.$$

Solución:

1- sabemos que $\partial = \frac{1}{2}(\partial x - i\partial y)$

Sean $F = u + iv$, $G = r + is$; donde u, v, r, s son funciones reales y diferenciables en $z_0 \in U$ en el sentido real.

Luego $F\cdot G = (ur - vs) + i(vr + us)$, derivando se obtiene:

$$\partial F\cdot G = \partial\left(ur - vs + i(vr+us)\right),$$

$$= \frac{1}{2}\left[\partial x\left(ur - vs + i(vr+us)\right) - i\partial y\left(ur - vs + i(vr+us)\right)\right],$$

$$= \frac{1}{2}\left[u_x r + u r_x - v_x s - v s_x + i v_x r + i v r_x + i u_x s + i u s_x - i u_y r - i u r_y + i v_y s + i v s_y + v_y r + v r_y + u_y s + u s_y\right],$$

$$\partial F\cdot G = \frac{1}{2}\left[r(u_x + i v_x) + s(-v_x + i u_x) + u(r_x + i s_x) + v(-s_x + i r_x) + r(-i u_y + v_y) + s(i v_y + u_y) + u(-i r_y + s_y) + v(i s_y + r_y)\right].$$

Reagrupando lo anterior:

$$\partial(F\cdot G) = \frac{1}{2}\Big[(u_x + i v_x)(r+is) + (u+iv)(r_x + i s_x) + (r+is)(-i u_y + v_y) + (u+iv)(-i r_y + s_y)\Big],$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(r+is)(u_x + i v_x - i u_y + v_y) + (u+iv)(r_x + i s_x - i r_y + s_y)\Big],$$

$$= \frac{1}{2}\Big[G\cdot 2\partial F + F\cdot 2\partial G\Big]$$

$$\partial(F\cdot G) = G\cdot \partial F + F\cdot \partial G \quad \square$$

2.- Sabemos que $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$

Sean $F = u + iv$ y $G = r + is$; $F\cdot G = (ur - vs) + i(vr + us)$

Luego, derivando:

$$\bar{\partial}(F\cdot G) = \bar{\partial}\big(ur - vs + i(vr + us)\big),$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\partial_x\big(ur - vs + i(vr + us)\big) + i\partial_y\big(ur - vs + i(vr + us)\big)\Big],$$

$$= \frac{1}{2}\Big[u_x r + u r_x - v_x s - v s_x + i v_x r + i v r_x + i u_x s + i u s_x + i u_y r + i u r_y - i v_y s - i v s_y - v_y r - v r_y - u_y s - u s_y\Big],$$

$$= \frac{1}{2}\Big[r(u_x + i v_x) + s(i u_x - v_x) + u(r_x + i s_x) + v(i r_x + s_x) + r(i u_y - v_y) + s(-u_y - i v_y) + u(i r_y - s_y) + v(-i s_y - r_y)\Big],$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(r+is)(u_x + i v_x) + (u+iv)(r_x + i s_x) + (r+is)(i u_y - v_y) + (u+iv)(i r_y - s_y)\Big],$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(r+is)(u_x + i v_x + i u_y - v_y) + (u+iv)(r_x + i s_x + i r_y - s_y)\Big],$$

$$= \frac{1}{2}\Big[G\cdot 2\bar{\partial} F + F\cdot 2\bar{\partial} G\Big],$$

$$\bar{\partial}(F\cdot G) = G\cdot \bar{\partial} F + F\bar{\partial} G \quad \square$$

3.- Nuevamente, considerando $F = u + iv$ y $G = r + is$.

Como $\partial = \frac{1}{2}(\partial x - i\partial y)$ y $\frac{F}{G} = \frac{u+iv}{r+is}$, se tiene:

$$\partial\left(\frac{F}{G}\right) = \frac{1}{2}\left[\partial x\left(\frac{u+iv}{r+is}\right) - i\partial y\left(\frac{u+iv}{r+is}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(u_x+iv_x)(r+is) - (r_x+is_x)(u+iv)}{(r+is)^2} - i\left(\frac{(u_y+iv_y)(r+is) - (r_y+is_y)(u+iv)}{(r+is)^2}\right)\right],$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(r+is)(u_x+iv_x - i(u_y+iv_y))}{(r+is)^2} - \frac{(u+iv)(r_x+is_x - i(r_y+is_y))}{(r+is)^2}\right],$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{G\cdot 2\partial F - F\cdot 2\partial G}{G^2}\right],$$

$$\partial\left(\frac{F}{G}\right) = \frac{G\cdot\partial F - F\cdot\partial G}{G^2}. \square$$

4.- Análogamente, como $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial x + i\partial y)$ y tomando $\frac{F}{G} = \frac{u+iv}{r+is}$, se tiene:

$$\bar{\partial}\left(\frac{F}{G}\right) = \frac{1}{2}\left[\partial x\left(\frac{u+iv}{r+is}\right) + i\partial y\left(\frac{u+iv}{r+is}\right)\right],$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(u_x+iv_x)(r+is) - (r_x+is_x)(u+iv)}{(r+is)^2} + i\left(\frac{(u_y+iv_y)(r+is) - (r_y+is_y)(u+iv)}{(r+is)^2}\right)\right],$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(r+is)(u_x+iv_x + i(u_y+iv_y)) - (u+iv)(r_x+is_x + i(r_y+is_y))}{(r+is)^2}\right],$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{G\cdot 2\bar{\partial} F - F\cdot 2\bar{\partial} G}{G^2}\right]$$

$$\bar{\partial}\left(\frac{F}{G}\right) = \frac{G\cdot\bar{\partial} F - F\cdot\bar{\partial} G}{G^2}. \square$$

Problema K: Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y $g: U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en el sentido real. Demuestre que para todo $z_0 \in U$ y todo vector v, el Hesiano $H(g)$ de g satisface

$$[H(g)(z_0)](v,v) = \frac{1}{2}|v|^2 \cdot \Delta g(z_0) + 2\mathbb{R}(\partial^2 g(z_0)\cdot v^2).$$

Demostración: Primero, calculemos el Hesiano $H(g)$, es decir, desarrollaremos el lado izquierdo de la proposición.

Sea $v = a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$; luego

$$[H(g)(z_0)](v,v) = (a \;\; b)\begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$= (ag_{xx} + bg_{yx} \quad ag_{xy} + bg_{yy})\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$[H(g)(z_0)](v,v) = (a^2 g_{xx} + ab g_{yx} + ab g_{xy} + b^2 g_{yy}).$$

Como g es de clase C^2 $\quad g_{yx} = g_{xy}$

Por lo tanto:

$$[H(g)(z_0)](v,v) = a^2 g_{xx} + 2ab\, g_{xy} + b^2 g_{yy}.$$

Ahora, para el lado derecho de la proposición se tiene

$$\frac{1}{2}|v|^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2).$$

$$\Delta g(z_0) = g_{xx} + g_{yy}.$$

Luego

$$\frac{1}{2}|v|^2 \cdot \Delta g(z_0) = \frac{1}{2}(a^2+b^2)(g_{xx}+g_{yy})$$

$$\frac{1}{2}|v|^2 \cdot \Delta g(z_0) = \frac{1}{2}(a^2 g_{xx} + a^2 g_{yy} + b^2 g_{xx} + b^2 g_{yy}).$$

Por otro lado.

$$\partial^2 g(z_0) = \partial(\partial g(z_0)),$$
$$= \partial\left(\frac{1}{2}(\partial_x g - i\partial_y g)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left[\partial_x(\partial_x g - i\partial_y g) - i\partial_y(\partial_x g - i\partial_y)\right]$$

$$\partial^2 g(z_0) = \frac{1}{4}\left[g_{xx} - ig_{xy} - ig_{yx} - g_{yy}\right]$$

Como g es de clase C^2.

$$\partial^2 g(z_0) = \frac{1}{4}\left[g_{xx} - 2ig_{xy} - g_{yy}\right].$$

Luego, tomando $v^2 = a^2 - b^2 + 2abi$:

$$2R(\partial^2 g(z_0)v^2) = \frac{1}{2}R\left(\left[g_{xx} - 2ig_{xy} - g_{yy}\right]\left[a^2 + 2abi - b^2\right]\right),$$

$$2R(\partial^2 g(z_0)v^2) = \frac{1}{2}\left[a^2 g_{xx} - a^2 g_{yy} - b^2 g_{xx} + b^2 g_{yy}\right] + 2ab\,g_{xy}.$$

En efecto:

$$\frac{1}{2}|v|^2 \cdot \Delta g(z_0) + 2R(\partial^2 g(z_0)\cdot v^2) = \frac{a^2 g_{xx}}{2} + \frac{a^2 g_{yy}}{2} + \frac{b^2 g_{xx}}{2} + \frac{b^2 g_{yy}}{2} + \frac{a^2 g_{xx}}{2} - \frac{a^2 g_{yy}}{2} - \frac{b^2 g_{xx}}{2} + \frac{b^2 g_{yy}}{2} + 2ab\,g_{xy}.$$

Reordenando los términos, se obtiene:

$$\frac{1}{2}|v|^2 \cdot \Delta g(z_0) + 2R(\partial^2 g(z_0)\cdot v^2) = a^2 g_{xx} + b^2 g_{yy} + 2ab\,g_{xy}.$$

Por lo tanto

$$[H(g)(z_0)(v,v)] = \frac{1}{2}|v|^2 \cdot \Delta g(z_0) + 2R(\partial^2 g(z_0)\cdot v^2) \#$$

Scanned with CamScanner

Anexos.

(Demostraciones complementarias a los problemas)

Afirmación: El grupo de las transformaciones de Moebius es 3-transitivo sobre $\overline{\mathbb{C}}$.

dem. Sean z_1, z_2, z_3 y $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ distintos dos a dos (para los z_i y w_i respectivamente). Por lo visto en clases, las transformaciones de Moebius

$$M(z) = \frac{(z - z_2)(z_1 - z_3)}{(z - z_3)(z_1 - z_2)} \quad , \quad N(z) = \frac{(z - w_2)(w_1 - w_3)}{(z - w_3)(w_1 - w_2)}$$

son tales que $M(z_1) = N(w_1) = 1$, $M(z_2) = N(w_2) = 0$, $M(z_3) = N(w_3) = \infty$. (Por el problema E, M y N se pueden escribir en coordenadas homogeneas para no tener complicación cuando uno de los puntos sea ∞ y así evitar casos especiales).

Ahora tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \{1, 0, \infty\} \arrow[dr, shift left, "N^{-1}"] & \\
\{z_1, z_2, z_3\} \arrow[ur, "M"] \arrow[rr, "N^{-1} \circ M"'] & & \{w_1, w_2, w_3\} \arrow[ul, shift left, "N"']
\end{tikzcd}$$

Luego $N^{-1} \circ M$ es la transformación de Moebius que mapea $\{z_1, z_2, z_3\}$ en $\{w_1, w_2, w_3\}$. $\blacksquare$

Anexo 1: Una transformación de Moebius envía círculos en círculos.

Sea $G = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ el círculo de centro z_0 y radio r.

Como las transformaciones de Moebius se pueden generar bajo la composición entre $T(z) = z + t$ e $I(z) = \frac{1}{z}$.

Sea $z_1 \in G$, $T(z_1) = z_1 + t$, luego.

$$|T(z_1) - T(z_0)| = |z_1 + t - z_0 - t|,$$

$$= |z_1 - z_0|,$$

$$|T(z_1) - T(z_0)| = r.$$

Por lo tanto $T(G)$ es un círculo.

Ahora, consideremos $I(z) = \frac{1}{z}$ para $z_1 \in G$

$$I(z_1) = \frac{1}{z_1}$$

Luego

$$|I(z_1) - I(z_0)| = \left|\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_0}\right|,$$

$$= \left|\frac{z_0 - z_1}{z_1 \cdot z_0}\right|,$$

$$= \frac{|z_0 - z_1|}{|z_1||z_0|}$$

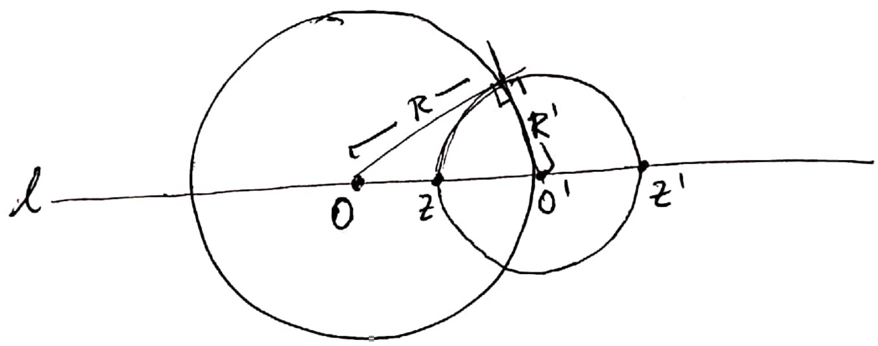
$$|I(z_1) - I(z_0)| = \frac{r}{|z_1||z_0|}.$$

Afirmación: Si $C(0,R)$ es un círculo en $\hat{\mathbb{C}}$ tal que $z, z' \notin C(0,R)$ son simétricos con respecto a $C(0,R)$, entonces se cumple:

$$|0z||0z'| = R^2 ,$$

donde $|0z|, |0z'|$ son las distancias de de z, z' a 0 respectivamente.

dem: Al ser z, z' simétricos con respecto a $C(0,R)$, entonces deben estar en la recta que pasa por el centro de este círculo (ya que esta recta es un círculo en $\hat{\mathbb{C}}$ y debe ser ortogonal al círculo). Consideremos otro círculo $C(0',R')$ tal que $z, z' \in C(0',R')$, entonces se tiene



Podemos suponer que el centro de $C(0',R')$ se encuentra en l

Por teo de Pitágoras,

$$(|0z| + |0'z|)^2 = R^2 + R'^2$$

Además $R' = |0'z| = |0'z'|$

$$\Rightarrow |0z|^2 + |0'z|^2 + 2|0z||0'z| = |0'z|^2 + R^2$$

$$\Rightarrow R^2 = |0z|^2 + 2|0z||0'z|$$

$$\Rightarrow R^2 = |Oz|^2 + 2|Oz|\left(|Oz'| - |Oz| - |zO'|\right)$$

$$= |Oz|^2 + 2|Oz||Oz'| - 2|Oz|^2 - 2|Oz||O'z|$$

$$= 2|Oz||Oz'| - |Oz|^2 - 2|Oz||O'z|$$

$$= 2|Oz||Oz'| - |Oz|\left(|Oz| + 2|O'z|\right)$$

$$= 2|Oz||Oz'| - |Oz|\left(|Oz'|\right)$$

$$= 2|Oz||Oz'| - |Oz||Oz'|$$

$$= |Oz||Oz'|$$

$$\therefore |Oz||Oz'| = R^2 \quad \blacksquare$$

Este resultado en particular sirve para decir que dado $\alpha \in \mathbb{D}$ $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1\}$ entonces su punto simétrico con respecto a $C(0,1)$ es $\frac{1}{\alpha}$.

7 +extra

VARIABLE COMPLEJA

Tarea 2.

Marco Godoy V.
Javiera Picares M.

Problema A

La traza de una transformación de Moebius M dada en coordenadas afines por $M(z) = \dfrac{Az+B}{Cz+D}$, es

$$\tau(M) = \frac{(A+D)^2}{AD-BC}$$

(1) Diremos que dos transformaciones de Moebius M y $\tilde{M}$ son conjugadas, si existe una transformación de Moebius h tal que $M \circ h = h \circ \tilde{M}$. Demuestre que 2 transformaciones de Moebius M y $\tilde{M}$ son conjugadas sí y sólo si $\tau(M) = \tau(\tilde{M})$.

(2) Demuestre que toda transformación de Moebius M tiene un punto fijo en $\overline{\mathbb{C}}$, y que una transformación de Moebius M distinta de la identidad tiene un único punto fijo en $\overline{\mathbb{C}}$ sí y sólo si $\tau(M) = 4$.

dem.

(1) Sean $M, \tilde{M}$ dos transformaciones de Moebius,

($\Rightarrow$) Si $M, \tilde{M}$ son conjugadas, entonces $\exists\, h$ transformación de Moebius tal que $M \circ h = h \circ \tilde{M}$, o de manera equivalente,

$$M = h \circ \tilde{M} \circ h^{-1}$$

Antes de seguir, es necesario hacer notar que en la expresión

$$\tau(M) = \frac{(A+D)^2}{AD-BC}, \quad \text{con} \quad M = \frac{Az+B}{Cz+D}, \quad \text{el término}$$

$A+D$ corresponde a la traza de la matriz $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C})$ y $AD-BC$ es su determinante.

Por esto, sabemos que $\det(h\circ\tilde{M}\circ h^{-1}) = \det(h)\det(\tilde{M})\det(h^{-1})$
$= \det(h)\det(\tilde{M})\det(h)^{-1} = \det(\tilde{M})$

$$\text{Así, } M \text{ y } \tilde{M} \text{ conjugadas} \Rightarrow \det(M) = \det(\tilde{M})$$

Ahora sólo basta calcular la traza de la matriz asociada a la transformación de Moebius $h\circ\tilde{M}\circ h^{-1}$.

Si $\tilde{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow h^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\delta} & -\bar{\beta} \\ -\bar{\gamma} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, donde $\bar{\alpha} = \alpha/\det h$, $\bar{\beta} = \beta/\det h$
$\bar{\gamma} = \gamma/\det h$, $\bar{\delta} = \delta/\det h$

$$\Rightarrow h\circ\tilde{M}\circ h^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{\delta} & -\bar{\beta} \\ -\bar{\gamma} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha A+\beta C & \alpha B+\beta D \\ \gamma A+\delta C & \gamma B+\delta D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{\delta} & -\bar{\beta} \\ -\bar{\gamma} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha A+\beta C)\bar{\delta} - (\alpha B+\beta D)\bar{\gamma} & -(\alpha A+\beta C)\bar{\beta} + (\alpha B+\beta D)\bar{\alpha} \\ (\gamma A+\delta C)\bar{\delta} - (\gamma B+\delta D)\gamma & -(\gamma A+\delta C)\bar{\beta} + (\gamma B+\delta D)\bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

Su traza es
$$(\alpha A+\beta C)\bar{\delta} - (\alpha B+\beta D)\bar{\gamma} - (\gamma A+\delta C)\bar{\beta} + (\gamma B+\delta D)\bar{\alpha}$$

Por lo tanto,

$$\tau(M)=\tau(h\circ\tilde{M}\circ h^{-1})=\frac{(\alpha A\bar{\delta}+\beta C\bar{\delta}-\alpha B\bar{\gamma}-\beta D\bar{\gamma}-\gamma A\bar{\beta}-\delta C\bar{\beta}+\gamma B\bar{\alpha}+\delta D\bar{\alpha})^2}{\det(h\circ\tilde{M}\circ h^{-1})}$$

pero,

$$\alpha A\bar{\delta}+\beta C\bar{\delta}-\alpha B\bar{\gamma}-\beta D\bar{\gamma}-\gamma A\bar{\beta}-\delta C\bar{\beta}+\gamma B\bar{\alpha}+\delta D\bar{\alpha}$$

$$=A(\alpha\bar{\delta}-\gamma\bar{\beta})+B(-\alpha\bar{\gamma}+\gamma\bar{\alpha})+C(\beta\bar{\delta}-\delta\bar{\beta})+D(-\beta\bar{\gamma}+\delta\bar{\alpha})$$

como $\alpha\bar{\delta}-\gamma\bar{\beta}=\dfrac{\alpha\delta}{\det h}-\dfrac{\gamma\beta}{\det h}=\dfrac{1}{\det h}(\alpha\delta-\gamma\beta)=\dfrac{1}{\det h}\cdot\det h$

$$=1$$

$$-\alpha\bar{\gamma}+\gamma\bar{\alpha}=-\frac{\alpha\gamma}{\det h}+\frac{\gamma\alpha}{\det h}=0\ ,\quad \beta\bar{\delta}-\delta\bar{\beta}=\frac{\beta\delta}{\det h}-\frac{\delta\beta}{\det h}=0$$

$\Rightarrow$ la traza de la matriz $h\circ\tilde{M}\circ h^{-1}$ es $A+D$, i.e,

$$A(\alpha\bar{\delta}-\gamma\bar{\beta})+B(-\alpha\bar{\gamma}+\gamma\bar{\alpha})+C(\beta\bar{\delta}-\delta\bar{\beta})+D(-\beta\bar{\gamma}+\delta\bar{\alpha})=A+D$$

$$\therefore\ \tau(M)=\frac{(A+D)^2}{\det(h\circ\tilde{M}\circ h^{-1})}=\frac{(A+D)^2}{\det\tilde{M}}=\frac{(A+D)^2}{AD-BC}$$

$$=\tau(\tilde{M})$$

$$\therefore\ \tau(M)=\tau(\tilde{M}).$$