Universidad de Chile
Topología Algebraica I
Marzo 12, 2019.

Filtros y redes.

Sucesión es $\{x_n\}$ tq $f : \mathbb{N} \to X$, $f(n) = x_n$.

Lo que se sabe por cursos de análisis:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } n > N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

Notación: $x_n \to x$

O también: Para toda sucesión $x_n \to x$, se tiene $f(x_n) \to f(x)$.
(Continuidad en un punto).

Las sucesiones "funcionan" cuando la topología de X no tiene muchos abiertos.

Pregunta: ¿Qué ocurre cuando hay demasiados abiertos?

Ejemplo. $\tilde{\Omega}$ = conjunto no numerable bien ordenado, y con orden total.

$$\phi \neq A \subseteq \tilde{\Omega} \quad \exists a \in A \ (b \in A \Rightarrow a \leq b)$$

$$a = \min A.$$

Existe $z \in \tilde{\Omega}$ con la siguiente propiedad

$z = \min \{ r \mid [0, r) \text{ es no numerable} \}$ (llamamos este conjunto Ω^c) (puede ser vacío)

Observación. $[a, b) = \{ x \in \tilde{\Omega} / a \leq x < b \}$

$$0 = \min \tilde{\Omega}.$$

$z = \min\{ r \mid [0,r) \text{ no numerable} \}$
$\Omega = [0,z) = \bigcup_{a\in\Omega} [0,a]$
Ω no numerable por definición de z,
si $r \in \Omega \Rightarrow r < z \Rightarrow [0,r)$ numerable.

Sea $\Omega = [0,z)$, afirmamos que Ω es no numerable.

Como $r \in \Omega \Rightarrow [0,r)$ numerable.

Definimos la topología τ como la siguiente:

menos fina = más pequeña.
mientras más fina, mayor cantidad de abiertos.

Ejemplo de definición de Subbase de τ.

τ = topología menos fina en la cual cada intervalo abierto es abierto

$(a,b) \in \tau$ (intervalos abiertos forman una subbase).

Subbase = subcollection de τ que genera a τ.
Todas las intersecciones finitas de estos abiertos forman una base de τ

Observación. Ω^c puede ser vacío.

En la topología τ: Base $\neq$ subbase
Base: $\mathcal{B} \subset \tau$ tq son equivalentes: i) $X = \bigcup \mathcal{B}$
ii) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ tq $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

Si $\Omega^c = \phi \Rightarrow \tilde{\Omega} = \Omega$

si $\Omega^c \neq \phi \Rightarrow \Omega = [0,z)$ agregar. Puede ocurrir que z no exista, en ese caso lo agrego.

En ese caso z pudiera no existir. En ese caso:

$[0,z] = \bar{\Omega} = \Omega \cup \{z\}$ $(z \geq r \ \forall r)$ (z último elemento).

$[0,z]$ no numerable.

En ese caso, para que V sea una vecindad de z, debe cumplirse $(r,z] \subseteq V$.

Afirmación. $\exists r' \in (r,z] \subseteq V$, tal que $r' \in \Omega$.

Demostración. $[0,z)$ no numerable.
$[0,r]$ numerable.
$[0,z) \supsetneq [0,r]$ implica $\exists r' \in [0,z)$ tq $r' \notin [0,r]$
luego: $z > r' > r$
Por lo tanto: $r' \in \Omega$.

En otras palabras, $\bar{\Omega}$ es la clausura de Ω en la nueva topología.

Observar lo siguiente: $\forall \{x_n\}$, $\lim_{n\to\infty} x_n \neq z$.

Demostración. Considere la unión numerable $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, x_n]$ (numerable).

Luego existe $r \in \Omega$ tq $r \notin A$.

Afirmación. $A \subseteq [0,r)$

demostración. $a \in A \Rightarrow a \in [0,x_n] \Rightarrow [0,a] \subseteq [0,x_n]$

$\Rightarrow [0,a] \subseteq A \Rightarrow r \notin [0,a]$

$\Rightarrow a < r \Rightarrow a \in [0,r)$

Así, para $x_n \in A$, $A \cap (r,z] = \phi$.

Por lo tanto: $x_n \notin (r,z]$

Es decir: $x_n \not\to z$. ◻

Las sucesiones son demasiado "cortas" para llegar al punto final.

Para remediar esto:

Consideremos la función $f : \Omega \to \Omega$, $x_r = f(r) = r$

Ahora podemos definir $\lim\limits_{r \to \infty} x_r = z$, de la siguiente manera:

$\forall\, V$ vecindad de z, $\exists\, r_0 \in \Omega$ tq $r > r_0 \Rightarrow x_r \in V$.

Pregunta: Cambiando el conjunto de subíndices ¿Cómo me aseguro de que las sucesiones son lo suficientemente largas?

Una respuesta parcial es cambiando $\mathbb{N}$ por conjunto de vecindades. Aunque las vecindades presentan dificultades con respecto al orden.

Podemos exigir menos al conjunto de índices.

Definición. X espacio topológico

Para $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ es el conjunto de vecindades de x en X.

$(\Lambda, \leq)$ es un conjunto dirigido si $\leq$ es un orden en Λ y

$\forall \lambda, \lambda'$, $\exists \lambda''$ tal que $\lambda'' \geq \lambda, \lambda'$.

Observar que $V, V' \in \mathcal{V}(x)$, se tiene que $V \cap V' \in \mathcal{V}(x)$.

Ejemplo. $(\mathcal{V}(x), \supseteq)$ es un conjunto dirigido:

$$V \leq V' \iff V' \subseteq V.$$

Propiedad: Si $x_V \in V$ $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, entonces $x_V \to x$

Definición de convergencia es: $\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists \lambda_0 \in \Lambda$ tq $\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in V$

Consideremos la red $\{x_V\}_V$, donde $x_V \in V$ $\forall V$.

Se demuestra que: $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ $\exists V_0 \in \mathcal{V}(x)$ tal que $W \leq V_0 \Rightarrow x_W \in V$

Escogemos $V_0 = V$.

$W \subseteq V \Rightarrow x_W \in V$. Luego $x_W \in W \subseteq V$.

Falta estudiar el caso cuando el conjunto dirigido tiene punto final.

Consecuencia: En cualquier espacio topológico se puede construir una red que converja a un punto.

Podemos ocupar esto para estudiar la clausura de un conjunto:

Sea $x \in \bar{A}$, $a_n \in A$ tq $a_n \to x$ siempre y cuando

$\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists a_n \in V \cap A \subseteq V$.

Se puede entender la clausura de un conjunto ocupando redes.

Aplicamos la definición de clausura a la red $\{x_V\}_V$, $x_V \in V$:

$$a_V \in V \Rightarrow a_V \to x$$

por otro lado, $a_V \in A$.

Observación.

1º Recordar la definición de clausura como concepto topológico

2º Definición de clausura ocupando la red $\{x_V\}_V$

3º Son equivalentes?

Ejemplo. ¿Qué ocurre cuando la red tiene último elemento?

$\Lambda = \{\lambda_\infty\}$

Observación. Si la red tiene último elemento, entonces sólo importa el último elemento.

* Para $x_{\lambda_\infty} \to x$ significa que $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $x_{\lambda_\infty} \in V$

Podemos considerar $y = x_{\lambda_\infty} \to x$. $y \to x$

Problema: Demostrar que son equivalentes: $y = x_{\lambda_\infty} \to x$, y | $y \to x$

y es la red constante

También se cumple: $z \to y \to x \Rightarrow z \to x$

Afirmación. $\left\{ \begin{matrix} x \to y \\ y \to x \end{matrix} \right\} \Rightarrow \mathcal{V}(x) = \mathcal{V}(y)$ Problema: ¿Son equivalentes?

Definición. X es T_0 si $\forall x, y \in X$, $\exists U$ abierto tal que $x \in U$, $y \notin U$ o bien $y \in U$, $x \notin U$.

Si X es T_0 "$x \to y$" es una relación de orden.

Definición. X es T_1 si $\forall x, y \in X$, $\exists U$ abierto tal que $x \in U$, $y \notin U$

$$y \not\to x$$

Si X es T_1, entonces "$x \to y$" es la igualdad.

Podemos definir la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim y \iff \left(\begin{matrix} x \to y \\ y \to x \end{matrix} \right) \iff \mathcal{V}(x) = \mathcal{V}(y)$$

$X/\sim$ es la T_0-identificación de X.

Pregunta: ¿Qué ocurre entremedio de T_0 y T_1?

Ejemplo. Casos de conjuntos finitos

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr] & & b \arrow[dl] & e \arrow[d] \\ & c \arrow[d] & & f \\ & d & & \end{tikzcd}$$

Vecindades: $\{d, a, b, c\}$, $\{f, e\}$, $\{e\}$, $\{c, a, b\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a\} \cup \{b\}$, etc...

Ejemplo. ¿Qué ocurre cuando la red tiene último elemento?

$\Lambda = \{\lambda_\infty\}$

Para $x_\lambda \to x$ significa que $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ $x_{\lambda_\infty} \in V$

Podemos considerar $y = x_{\lambda_\infty} \to x$ $\quad y \to x$

También se cumple: $z \to y \to x \Rightarrow z \to x$

Afirmación. $\left\{ \begin{array}{l} x \to y \\ y \to x \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{V}(x) = \mathcal{V}(y)$

Definición. X es T_0 si $\forall x,y \in X$, $\exists U$ abierto tal que $x \in U, y \notin U$ o bien $y \in U$, $x \notin U$.

Si X es T_0 "$x \to y$" es una relación de orden.

Definición. X es T_1 si $\forall x,y \in X$, $\exists U$ abierto tal que $x \in U$, $y \notin U$
$y \neq x$

Si X es T_1 entonces "$x \to y$" es la igualdad.

Podemos definir la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim y \iff \left(\begin{array}{l} x \to y \\ y \to x \end{array} \right) \iff \mathcal{V}(x) = \mathcal{V}(y)$$

$X/\sim$ es la T_0-identificación de X.

Pregunta: ¿Qué ocurre entremedio de T_0 y T_1?

Ejemplo. Casos de conjuntos finitos

$a, b \quad c$ $\quad$ Vecindades $= \{\{a,b,c\}, \{f,c\}, \{c\}, \{a,b\}, \{f\}, \{b\},$
$\{a\} \cup \{b\}, \emptyset, \ldots$

Definición. Una red $\{x_\lambda\}$ es eventualmente constante si $\exists \lambda_0 \in \Lambda$ tq $\forall \lambda, \lambda' \geq \lambda_0$, $x_\lambda = x_{\lambda'}$.

Ejercicio. Si $\{x_\lambda\}$ es eventualmente constante, igual a y, converge a x ssi $\boxed{y \to x}$

$\left\{ \begin{array}{l} y \to x \text{ ssi:} \\ \forall V \in \mathcal{V}(x),\ y \in V \end{array} \right\}$

$(\Rightarrow)$ supongamos que $x_\lambda \to x$

$\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists \lambda_0$ tq $\forall \lambda \geq \lambda_0$

$x_\lambda = y$, $x_\lambda \in V$

$\Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x)$, $y \in V$.

$(\Leftarrow)$ Sea $\lambda_0 \in \Lambda$ tq $\forall \lambda \geq \lambda_0 : x_\lambda = y$

$\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $y \in V$

$\therefore \exists \lambda_0$ tq $\forall \lambda \geq \lambda_0 :\ x_\lambda \in V$

$\therefore x_\lambda \to x$.

Ejemplo. Si X es indiscreto. Sea $x \in X$, $\mathcal{V}(x) = \{X\}$. Así:

$\forall V\ \exists \lambda_0 \in \Lambda$ tq $\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in V$,

equivalentemente: $\exists \lambda_0 \in \Lambda$, $\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in X$

Así, $x_\lambda \to x$ $\forall \{x_\lambda\}$ y todo $x \in X$.

En la topología indiscreta, una red $\{x_\lambda\}_\lambda$ converge a todos los puntos de X

Ejemplo. X discreto, $x_\lambda \to x \in X$ quiere decir:

$\forall V\ \exists \lambda_0$ tal que $\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in V$.

Tomando $V = \{x\}$, $\exists \lambda_0$ tq $\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda = x$

Conclusión. X discreto $\Rightarrow$ $\forall \{x_\lambda\}$ convergente es eventualmente constante.

Ejemplo. X infinito con Topología cofinita

Vecindad $V = \{x_1, \dots, x_n\}^c$, $x \neq x_i$ $\forall i = 1, \dots, n$

Notamos que $x_\lambda \to x$ ssi:

$\forall y \neq x$, $\exists \lambda_0 \in \Lambda$ tq $\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \neq y$

Definición. $\{x_\lambda\}$ toma el valor x tan lejos como se quiera si $\forall \lambda_0$, $\exists \lambda \geq \lambda_0$ tq $x_\lambda = x$.

$x_\lambda \to x$ ssi no existe $y \neq x$ tq $\{x_\lambda\}$ tome el valor y tan lejos como se quiera. Ok

Si existe un único $x \in X$ tq $\{x_\lambda\}$ toma el valor x tan lejos como se quiera, x es el único límite de tal red.

Supongamos que $x_\lambda \to y$ $(y \neq x)$. Para $V = \{x\}^c$

$y \in V \Rightarrow \exists \lambda_0 \in \Lambda$ tq $\forall \lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in V$

Por lo tanto: $\forall \lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \neq x$.

Si no existe $x \in X$ tq $\{x_\lambda\}$ toma el valor x tan lejos como se quiera, todo x es el límite de la red.

Si $\{x_\lambda\}$ toma dos valores distintos tan lejos como se quiera, la red no tiene límite.

Ejemplo. En $\mathbb{R}$ consideramos $\Lambda = \{$ conjuntos finitos de $\mathbb{R}\}$. $(T \leq T' \Leftrightarrow T \subseteq T')$.

Se define:
$$\chi_T(x) = \begin{cases} 1, & x \in T \\ 0, & x \notin T \end{cases}$$

Consideramos la topología usual de $\mathbb{R}$.

Afirmación: $\lim \chi_T(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Afirmación: $\{\chi_T(x)\}_T$ es eventualmente constante. Tenemos $T_0 = \{x_0\}$

$$T \geq T_0 \Rightarrow x \in T \Rightarrow \chi_T(x) = 1$$

Ejemplo. En $\mathbb{Z}$ definimos la topología profinita como la topología menos fina que contiene a $a\mathbb{Z}+b$, $\forall (a,b) \in (\mathbb{Z}\setminus\{0\}) \times \mathbb{Z}$.

$$\mathcal{V}(x) \text{ tiene base } \{a\mathbb{Z}+b \mid a \neq 0\}$$

$x_\lambda \to x$ quiere decir:

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $\exists \lambda_0$ tq $\forall \lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \equiv x \pmod n$

a. $\Lambda = \mathbb{N}$, $x_n = n$. Se tiene $x_n \to x$ $\forall x$.

De converger, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \equiv n \pmod 2$, $x_{n+1} \not\equiv x \pmod 2$

Ejercicio. $n! \to 0$.

b. $\Lambda = \mathbb{N}$, (orden: $a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$).

La red $x_n = n$, cumple $x_n \to 0$. En efecto:

$\forall n$, $\exists \lambda_0$ tq $\lambda_0 \mid \lambda \Rightarrow x_n = \lambda \equiv 0 \pmod n$)

Usamos $\lambda_0 = n$.

$n \mid \lambda$ implica $\lambda \equiv 0 \pmod n$.

Así, $x_n \to 0$.

Subredes

Consideramos la función $\Psi : \Lambda' \to \Lambda$.

Λ' es una subred de Λ, si Ψ es creciente, y se dice cofinal si:

$$\forall \lambda \in \Lambda \, , \; \exists \lambda' \in \Lambda' \text{ tq } \Psi(\lambda') \geq \lambda .$$

$\{ x_{\Psi(\lambda')} \}_{\lambda' \in \Lambda'}$ es una subred.

Proposición. Si $x_\lambda \to x$ y $\Psi : \Lambda' \to \Lambda$ es creciente y cofinal, $x_{\Psi(\lambda')} \to x$

Demostración. Sea V una vecindad de x.

Existe λ_0 tal que $\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in V$.

Sea λ_0' es tal que $\Psi(\lambda') \geq \lambda_0$. $\lambda' \geq \lambda_0 \Rightarrow \Psi(\lambda') \geq \Psi(\lambda_0') \geq \lambda_0 \Rightarrow x_{\Psi(\lambda')} \in V$.

Ejemplo. $T_n = \{1, \dots, n\}$.

$$x_{T_n}\left(\tfrac{1}{2}\right) \to 0$$

$$x_T\left(\tfrac{1}{2}\right) \to 0 \text{ en el ejemplo anterior}$$

Esto muestra que la condición de ser cofinal es importante.

Sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x)$ una base de vecindades

$$\forall V \in \mathcal{V}(x) \; \exists B \in \mathcal{B} \text{ tq } B \subset V$$

La función $i : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{V}(x)$ es cofinal.

Sea $\{x_B\}_{B\in\mathcal{B}}$ una red. Se cumple:

$$x_B \in B \ \ \forall B \implies x_B \longrightarrow x.$$

Por ejemplo, si X es un espacio métrico, $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B_n = B(x, 1/n)$,

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots \qquad (\mathcal{B} \approx \mathbb{N})$$

Proposición. Si Λ es numerable, existe $\psi : \mathbb{N} \to \Lambda$ creciente y cofinal.

Demostración. $\Lambda = \{A_0, A_1, \dots, A_n, \dots\}$.

Consideramos $B_n \geqslant A_0, A_1, \dots, A_n, B_{n-1}$.

En particular: $B_n \geqslant B_{n-1} \geqslant \dots \geqslant B_0$. Con esto es creciente, y como $B_n \geqslant A_n$, $\psi : n \longmapsto B_n$ es cofinal. $\square$

Definición. X es primero contable si para todo $x \in X$, existe una base $\mathcal{B}$ numerable para $\mathcal{V}(x)$

En ese caso, la función $\psi : \mathbb{N} \to \mathcal{B}$ es creciente y cofinal.

Sea $A \subseteq X$ y $x \in \bar{A}$. Existe $a_\lambda \to x$, $a_\lambda \in A$.

Para $\Lambda = \mathcal{V}(x)$, $\exists \psi : \mathbb{N} \to \mathcal{B} \to \mathcal{V}(x)$

$$a_{\psi(n)} \longrightarrow x.$$

Ejercicio. $\Lambda'' \xrightarrow{\psi'} \Lambda' \xrightarrow{\psi} \Lambda$. Si ψ, ψ' son crecientes y cofinales, entonces $\psi \circ \psi'$ es creciente y cofinal.

Proposición. X es Hausdorff ssi toda red en X tiene a lo más un límite.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que $x_\lambda \to x$, $x_\lambda \to y$

$\exists (U, V) \in (\mathcal{V}(x) \times \mathcal{V}(y))$, $U \cap V = \phi$.

Por otro lado: $\exists \lambda_0, \lambda_0'$ tq $\lambda \geq \lambda_0, \lambda_0'$, $x_\lambda \in U$, $x_\lambda \in V$ $(\rightarrow\leftarrow)$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que X no es Hausdorff:

$\exists\, x, y \in X$ tq $\forall U \in \mathcal{V}(x)$, $\forall V \in \mathcal{V}(y)$: $U \cap V \neq \phi$.

Tomamos $\Lambda = \mathcal{V}(x) \times \mathcal{V}(y)$, con

$$(U, V) \leq (U', V') \iff U \supseteq U' \text{ y } V \supseteq V'$$

$\forall (U, V) \in \Lambda$ escogemos $x_{(U,V)} \in U \cap V$.

Afirmamos que $x_{(U,V)} \to x$, $x_{(U,V)} \to y$

$\forall U_0 \in \mathcal{V}(x)$, basta tomar $\lambda_0 = (U_0, V_0)$

$$\lambda = (U, V) \geq (U_0, V_0) \Rightarrow U \subseteq U_0, \quad x_\lambda = x_{(U,V)} \in U \subseteq U_0$$

Por lo tanto $x_\lambda \to x$.

Para y es análogo.

$\square$

Ejercicio. Si X es primero contable y no Hausdorff, probar que existe una subsucesión con más de un límite.

(Hint: Similar a la última parte de la proposición. Tomando una base de vecindades numerable respectivamente)

Ejemplo. La integral $\int_a^b f(x)dx$ se define con respecto a la partición

$$P = \{x_0, \dots, x_n\}$$

donde $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$. La suma de Riemann es

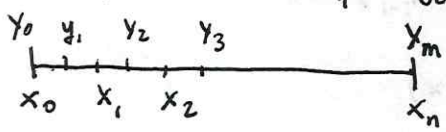
$$S(f,P,P^*) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists P_0$ partición tal que P más fina que $P_0 \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx - S(f,P,P^*) \right| < \varepsilon$

Para entender esta convergencia como red, basta ver

$$\Lambda = (P, P^*) \quad , \quad P = \{x_0, \dots, x_n\}, \quad P^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}, \quad x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]. \text{ (a)}$$

P más fina que P_1 significa $P \supseteq P_1 = \{y_0, \dots, y_m\}$. Geométricamente:



$m > n$.

Definición. P estrictamente más fina que P_1 si $P \supsetneq P_1$

$\Lambda \succcurlyeq \Lambda_1$ si P es estrictamente más fina que P_1, o bien $\Lambda = \Lambda_1$.

$\Lambda = (P, P^*)$, $\Lambda_1 = (P_1, P_1^*)$

Definimos la integral de Riemann como $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Lambda \in L} S(f, \Lambda)$, donde $L = \{(P, P^*) \text{ que satisfacen (a)}\}$.

Consideramos la sucesión $S_n(f) = S(f, \Lambda_n)$, donde $\Lambda_n = (P_n, P_n^*)$, y:

$$ {}_n = \left\{ a,\ a+\frac{b-a}{n},\ a+2\,\frac{b-a}{n},\ \dots,\ b \right\} $$

$$ x_i^* = a + \left(i - \tfrac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n} $$

Por resultados de análisis, se tiene $S_n(f) \to \int_a^b f$ (Convergencia dominada).

Para ver que la subred no es cofinal, se considera:

$$ P = \left\{ a,\ a+\frac{1}{\sqrt{2}}(b-a),\ b \right\} $$

Ningún P_n es más fina que P.

Consecuencia: $S_n(f) \to \int_a^b f$ no se puede deducir solamente usando redes.

Consideremos las redes

$$ M(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) $$

$$ M_i = \mathop{}\limits_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) $$

La función $P \to M(f,P)$ es decreciente:

$$ P_1 \le P \Rightarrow M(f,P_1) \geq M(f,P) $$

La integral superior se define como:

$$ \lim_{P \in \wp} M(f,P) = \overline{\int_a^b} f, $$

$\wp = \{$ particiones de $[a,b]\}$

Ejercicio. Si $\{x_\lambda\}_\lambda$ es una red creciente en $\mathbb{R}$, acotada superiormente, entonces tiene un límite.

Filtros.

Los filtros es otra manera de generalizar las sucesiones.

Partimos con $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{F}$ es una colección de subconjuntos de X.

Definición. $\mathcal{F}$ es un filtro si cumple

1. $\mathcal{F} \neq \phi$
2. $\phi \notin \mathcal{F}$
3. $F \in \mathcal{F}$, $F \subseteq F' \Rightarrow F' \in \mathcal{F}$
4. $F, F' \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cap F' \in \mathcal{F}$

Ejemplo: Λ conjunto dirigido. Tomamos los conjuntos

$$[\lambda, \infty) = \{ \lambda' \in \Lambda \,/\, \lambda' \geq \lambda \}$$

Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Lambda)$, definido por $\mathcal{F} = \{ A \,/\, \exists \lambda \text{ tq } [\lambda, \infty) \subseteq A \}$ es un filtro.

Definición. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X. Diremos que $\mathcal{F}$ converge a $x \in X$, si $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}$.

Ejemplo. Sea la red $\{x_\lambda\} = \tilde{x}$,

Definimos: $F_\lambda = \{ x_{\lambda'} \,/\, \lambda' \in [\lambda, \infty) \} = \{ x_{\lambda'} \,/\, \lambda' \geq \lambda \}$

Afirmamos que $\mathcal{F}_{\tilde{x}} = \{ A \subseteq X \mid F_\lambda \subseteq A \text{, algún } \lambda \}$ es un filtro.

Ejemplo. $\mathcal{B}=\{B_n\}$, donde $B_n=\{\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\dots\}$. Se tiene $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n=\phi$, pero $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}\longrightarrow 0$.

Ejemplo. Sea $A\subseteq X$. Definimos

$$\mathcal{F}_A=\mathcal{F}_{\{A\}}=\{F\subseteq X\,/\,A\subseteq F\}$$ filtro principal generado por A.

El filtro más básico es $\mathcal{F}_{\{x\}}$. Se cumple que $\mathcal{F}_{\{x\}}\longrightarrow x$.

Observación. Buscamos significado de $\mathcal{F}_A\to x$.

$V\in\mathcal{F}_A$, $\forall V\in\mathcal{V}(x)$. Se tiene que $A\subseteq V$ $\forall V\in\mathcal{V}(x)$

Luego: $A\subseteq\bigcap_{V\in\mathcal{V}(x)} V$

De manera equivalente: $a\longrightarrow x$ $\forall a\in A$.

Definición. $\mathcal{F}'$ es subfiltro de $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}'$ y además es filtro.

Observación. $\mathcal{V}(x)\subseteq\mathcal{F}\implies\mathcal{V}(x)\subseteq\mathcal{F}'$. Lo que implica $\mathcal{F}\to x\implies\mathcal{F}'\to x$

$\mathcal{B}$ filter basis.

$\mathcal{F}(\mathcal{B})$ filter generated by $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{F}(\mathcal{B}) = \{F \mid \exists B \in \mathcal{B},\ B \subseteq F\}$$

For $A \subseteq X$: $\quad \mathcal{F}(A) = \{F \subseteq X \mid A \subseteq F\}$.
For $\mathcal{B} = \{A\}$ filter basis,

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A) \qquad \text{filter in } A.$$

For $\tilde{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\tilde{\mathcal{F}}$ filter basis in X. we call $\mathcal{F}_X$ its filter generated.
More,

$$\mathcal{F}_X = \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{F}})$$

Let $x \in \bar{A}$.

Question. When is x in the frontier of A in terms of the filter?

Proposition. $x \in \bar{A}$ iff $\exists \tilde{\mathcal{F}}$ filter in A such That $\tilde{\mathcal{F}}_X \to x$.

Observation. $\mathcal{V}(x) \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_X$

Proof. suppose that $x \in \bar{A}$, exists a net $\tilde{x} = \{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ such that:

$$x_\lambda \in A, \qquad x_\lambda \to x.$$

Let $\tilde{\mathcal{F}}_A$ be the filter asociated in A to the net.

$$\tilde{\mathcal{F}}_A = \mathcal{F}_A(F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda), \quad \tilde{\mathcal{F}}_X = \mathcal{F}_X(F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$$

$F_\lambda = \{x_{\lambda'} \mid \lambda' \geq \lambda\}$

So, $\quad x_\lambda \to x \Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_X \to x$

thus, $\quad \tilde{\mathcal{F}}_X = (\tilde{\mathcal{F}}_A)_X$.

Suppose that $\tilde{F}$ filter basis in A satisfies $\tilde{F}_x \to x$

Observation. F filter, $F \to x$

$\{x_F\}_{F \in F}$ with $x_F \in F$ satisfies $x_F \to x$ (being net)

The following lemma can help:

Lemma. Let $\mathcal{B}$ be a filter basis, $\{x_B\}_{B \in \mathcal{B}}$ net that satisfies $x_B \in B$, then if $F(\mathcal{B}) \to x$, then $x_B \to x$.

Proof. Exercise for the reader.

Let $\{x_F\}_{F \in \tilde{F}}$ be a net with $x_F \in F \subseteq A$ and $\tilde{F}_x \to x$, so $x_F \to x$

thus:

$$x \in \overline{A}.$$

$\square$

Exercise. Give a demostration using the definition of convergence of filters.

Definition (Remember). τ topology on X, (X, τ) topological space.
τ is finer than τ' if $\tau' \subseteq \tau$.

Proposition. τ is finer than τ' iff every net $\{x_\lambda\}_\lambda$ satisfies:

$$x_\lambda \xrightarrow[\tau]{} x \Rightarrow x_\lambda \xrightarrow[\tau']{} x.$$

Proof. ($\Rightarrow$) Suppose $\{x_\lambda\}_\lambda$ with the property $x_\lambda \xrightarrow[\tau]{} x$.

Let $V \in \mathcal{V}_{\tau'}(x) \subseteq \mathcal{V}_\tau(x)$

$$\{x\} \subseteq \underset{\text{open}}{U} \subseteq V, \quad V \in \mathcal{V}_\tau(x)$$

Thus, $\exists\, \lambda_0 \in \Lambda$ such that $\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in V$.

We know that $V \in \mathcal{V}_{\tau'}(x)$ is arbitrary, then $x_\lambda \to x$.

($\Leftarrow$) Suppose that $x_\lambda \xrightarrow[\tau]{} x \Rightarrow x_\lambda \xrightarrow[\tau']{} x$ for all net $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

We can affirm that $\tau' \subsetneq \tau$ (we must find a net not convergent)

Affirmation. $\exists A \subseteq X$ such that A is closed in τ' but isnot closed in τ.

$\tau' \nsubseteq \tau \Rightarrow \exists U \in \tau', U \notin \tau$. Being $A = U^c$ closed in τ' but not in τ.

there exists $x \in X$ such that:

1. $x \notin A$
2. $x \in \bar{A}$ (in τ).

Proof using filters, i.e: τ is finer than τ' iff for all net in X satisfies:

$$\mathcal{F} \xrightarrow[\tau]{} x \Longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow[\tau']{} x.$$

($\Rightarrow$) Suppose $\tau \supseteq \tau'$,

$$\mathcal{F} \xrightarrow[\tau]{} x \Rightarrow \mathcal{F} \supseteq \mathcal{V}_\tau(x)$$
$$\supseteq \mathcal{V}_{\tau'}(x)$$

Thus: $\mathcal{F} \xrightarrow[\tau']{} x$.

($\Leftarrow$) Suppose $\tau' \nsubseteq \tau$

Affirmation: $\exists x$ such that $\mathcal{V}_\tau(x) \supseteq \mathcal{V}_{\tau'}(x)$

$$\mathcal{V}_\tau(x) \underset{\tau'}{\not\longrightarrow} x \quad \text{but} \quad \mathcal{V}_\tau(x) \xrightarrow[\tau]{} x$$

Let $U \in \tau'$, $U \notin \tau$. $A = U^c$ closed in τ', but not closed in τ

$\exists x \in X$, $x \notin A$, $x \in \bar{A}^\tau$

Then: $U \notin \mathcal{V}_\tau(x)$, (why it's open)

Affirmation. $U \in \mathcal{V}_\tau(x)$, $x \in \bar{A}^\tau \Leftrightarrow x \notin \mathring{U}^{(\tau)}$ (interior of U).

Definiton. two topologies coincide if define the same notion of convergence in sense of nets or/and filters.

Definition. We said a net $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ is far away from a element $x\in X$ if $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ such that $\lambda_0 \in \Lambda$, such that $x_\lambda \notin V$, $\forall \lambda \geq \lambda_0$.

Proposition. If $\{x_\lambda\}_\lambda$ is far away from x, then there is not subnet of $\{x_\lambda\}$ convergent to x.

Proof. Let $\varphi: M \to \Lambda$ be a crescent function cofinal with $x_{\varphi(\mu)} \to x$.

$\exists V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists \lambda_0 \in \Lambda$ such that $x_\lambda \notin V$ $\forall \lambda \geq \lambda_0$

Using cofinality: $\exists \mu_0$ such that $\varphi(\mu_0) \geq \lambda_0$.

Now: $\mu \geq \mu_0 \Rightarrow \varphi(\mu) \geq \varphi(\mu_0) \geq \lambda_0 \Rightarrow x_{\varphi(\mu)} \notin V$ $(*)$

$x_{\varphi(\mu)} \to x \Rightarrow \exists \mu_1 \in M$ such that $\mu \geq \mu_1 \Rightarrow x_\mu \in V$ $(**)$

Let $\mu \geq \mu_0, \mu_1$ (μ exists because Λ is directed set)

Thus: $(*) \Rightarrow x_{\varphi(\mu)} \notin V$

$(**) \Rightarrow x_{\varphi(\mu)} \in V$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

$\square$

Definition. x is said accumulation point of the net $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ is $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ and $\forall \lambda_0 \in \Lambda$, $\exists \lambda \geq \lambda_0$ such that $x_\lambda \in V$.

observation. x accumulation point of $\{x_\lambda\}$ iff $\{x_\lambda\}$ isn't far away from x.

Observation.

$$\{ \{x_\lambda\} \text{ is far away from } x \} \Rightarrow \{ \text{there isn't subnet convergent} \}$$

$$\{\text{Some subnet converges to } x\} \Rightarrow \{ x \text{ accumulation point} \}$$

Proposition. If x is an accumulation point of the net $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, then there exists a subnet that converges to x.

Observation. Let $\tilde{\Lambda} = \mathcal{V}(x) \times \Lambda$ be a directed set, with $\tilde{\lambda} = (V, \lambda)$.

$$y_{\tilde{\lambda}} = x_\lambda, \quad \lambda = \pi_2(V, \lambda)$$

$\pi_2 : \tilde{\Lambda} \to \Lambda$ crescent and cofinal. We have:

$$\tilde{\lambda} \leq \tilde{\lambda}_1 \iff V \supseteq V_1 \wedge \lambda \leq \lambda_1$$

Proof (of the proposition). Consider the set

$$\hat{\Lambda} = \{ \tilde{\lambda} = (V, \lambda) \in \tilde{\Lambda} \mid x_\lambda \in V \}$$

and $\pi_2 : \hat{\Lambda} \to \Lambda$ crescent.

Affirmation. $\hat{\Lambda}$ directed set, and $\pi_2 : \hat{\Lambda} \to \Lambda$ cofinal, and more, $\pi_1 : \hat{V} \to \mathcal{V}(x)$ crescent and cofinal.

[Aff. π_1 cofinal $\Rightarrow$ convergence)

Let $V \in \mathcal{V}(x)$ be a neighborhood, $\exists \hat{\lambda}_a \in \hat{\Lambda}$ such that $\pi_1(\hat{\lambda}_a) = V_a \subseteq V$ (because π_1 is cofinal).

$\hat{\lambda} \geq \hat{\lambda}_a$ implies $y_{\hat{\lambda}} \in \pi_1(\hat{\lambda}) \subseteq \pi_1(\hat{\lambda}_a) \subseteq V$

Then: $\qquad y_{\hat{\lambda}} \to x.$

Let $\hat{\lambda}_1 = (\lambda_1, V_1)$, $\hat{\lambda}_2 = (\lambda_2, V_2) \in \hat{\Lambda}$ be indices.

$x_{\lambda_1} \in V_1$, $x_{\lambda_2} \in V_2$.

Define: $\quad V_3 = V_1 \cap V_2$, $\quad \lambda_3 \geqslant \lambda_1, \lambda_2$

Define again: $\quad \bar{\lambda}_3 = (V_3, \lambda_3)$

[Observation. We don't know if $x_{\lambda_3} \in V_3$]

$$\exists \lambda_3' \geqslant \lambda_3 \quad \text{with } x_{\lambda_3} \in V_3.$$

$$\hat{\lambda}_3 = (V_3, \lambda_3') \in \hat{\Lambda}.$$

Excercise. Composition of cofinals is cofinal.

$$\begin{tikzcd} \hat{\Lambda} \arrow[r, "\gamma"] & \Lambda \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \mathcal{V}(x) \\ & & \Lambda \end{tikzcd}$$

cofinal.

$(V, \lambda) \in \tilde{\Lambda}$, $\exists \lambda' \geqslant \lambda$ such that $x_{\lambda'} \in V$

$\hat{\lambda} = (V, \lambda') \geqslant (V, \lambda) = \tilde{\lambda}$, $\quad \hat{\lambda} \in \Lambda$ and $\hat{\lambda} \geqslant \tilde{\lambda}$.

Thus: $\qquad \gamma$ is cofinal.