ej: separable, finita $\Rightarrow$ teorema el. primitivo

$$E \cong \frac{K[X]}{(f)} \qquad E \otimes_K E \cong \frac{E[X]}{(f)}$$

$$\cong \underbrace{E \times \cdots \times E}_{[E:K]} \cong \bigoplus_{i=1}^{[E:K]} E$$

$$F \otimes_E \left(\bigoplus_{i=1}^{[E:K]} E \right) \otimes_E L = F \otimes_E \bigoplus_{i=1}^{[E:K]} \overbrace{\left(E \otimes_E L \right)}^{L}$$

$$\bigoplus_{i=1}^{[E:K]} F \otimes_E L$$

$$[FL:E] = [F:E][L:E] = \dim_E F \otimes_E L$$

$/\!/$

$\dim_E FL$

$$\varphi : F \times L \longrightarrow FL$$
$$(f,l) \longmapsto fl \qquad E\text{-bilineal}$$

epiyectiva

$\tilde{\varphi} : F \otimes_E L \longrightarrow FL$ epiyectiva

$$\Rightarrow F \otimes_E L \cong FL$$

$$F \otimes_K L \cong \underbrace{FL \times \cdots \times FL}_{[F\cap L : K]}$$

MAS GENERALMENTE SI L/K ES SEPARABLE

$$L = K(\alpha) \cong \frac{K[x]}{(f)}$$

$$F \otimes_K L \cong \frac{F[x]}{(f)} \cong \frac{F[x]}{(f_1)} \times \cdots \times \frac{F[x]}{(f_r)}$$

$$\therefore\ F \otimes_K L \cong F_1 \times \cdots \times F_r \qquad F_i \text{ cuerpo}$$

<u>CONCLUSION</u>: SI B ES UN ALGEBRA $/K$ QUE ES PRODUCTO DE CUERPOS, ENTONCES TAMBIEN LO ES B_L PARA TODA EXTENSION SEPARABLE L/K.

(NO SE NECESITA NINGUNA HIPOTESIS SOBRE F)

Ej: $L/\mathbb{Q}$ EXT. FINITA

$L_{\mathbb{R}} = L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong L_1 \times \cdots \times L_r$ — $\mathbb{R}$-ALGEBRA

$[L:\mathbb{Q}] =$

$L_1 \cong \cdots \cong L_{r_1} \cong \mathbb{R}$ $\quad r_1 + r_2 = r$

$L_{r_1+1} \cong \cdots \cong L_{r_1+r_2} \cong \mathbb{C}$

$[L:\mathbb{Q}] = \dim_{\mathbb{Q}} L = \dim_{\mathbb{R}} L_{\mathbb{R}} = r_1 + 2r_2$

$L \cong L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \hookrightarrow L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$

$\varphi_i : L \longrightarrow L_i$

HAY r_1 INCRUSTACIONES REALES y r_2 INCRUSTACIONES COMPLEJAS.

$\bigoplus_{i=1}^{[E:K]} F \otimes_E L$

$$B \cong \frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^p-1)} \cong \frac{\mathbb{Q}[x]}{((x-1)\Phi_p(x))}$$

$$\cong \frac{\mathbb{Q}[x]}{(x-1)} \times \frac{\mathbb{Q}[x]}{(\Phi_p(x))}$$

$$\cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(\eta_p) \qquad \eta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}$$

MA PIÙ GENERALMENTE

$$B \cong \frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^n-1)} \cong L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_r$$

$1, \eta_n, \eta_n^2, \ldots, \eta_n^{n-1}$

G GRUPO FINITO Y K CUERPO

$$K[G] = \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g \;\middle|\; \alpha_g \in K \right\}$$ ALGEBRA DE GRUPO

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \left(\sum_{g \in G} \beta_g g \right) = \sum_{g \in G} \gamma_g g$$

$$\gamma_g = \sum_{\substack{h, l \in G \\ hl = g}} \alpha_h \beta_l$$

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \left(\sum_{h \in G} \beta_h h \right) = \sum_{g, h \in G} \alpha_g \beta_h gh$$

$$(1+g)(1+2h) = 1 + g + 2h + 2gh$$

Ej G ABELIANO

$$G \cong \prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/(n_i)$$

$$K[\mathbb{Z}/n_i] \cong \frac{K[x]}{(x^{n_i}-1)}$$

$$\mathbb{Z}/(n_i) = \{1, x, x^2, \dots, x^{n_i-1}\}_{x^{n_i}=1}$$

Ejercicio: $K[G_1 \times G_2] \cong K[G_1] \otimes K[G_2]$

Si K tiene característica 0

$$K[G] \cong \frac{K[x]}{(x^{n_1}-1)} \otimes \cdots \otimes \frac{K[x]}{(x^{n_r}-1)}$$

$$K[G] \cong F_1 \times \cdots \times F_s$$

Obs: F/K cuerpo $\quad F \cong \mathbb{M}_1(F)$

Como K-álgebra, F tiene una única rep irreducible y toda rep de F es de la forma

$$\rho : F \longrightarrow \mathbb{M}_n(K)$$

$$\rho(f) = \begin{pmatrix} \rho_1(f) & & & 0 \\ & \rho_1(f) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \rho_1(f) \end{pmatrix}$$

ρ_1 es la única rep. irreducible que corresponde a F como F-módulo

ρ_1 tiene dimensión $[F:K]$

En particular $[F:K]$ divide a la dimensión n de ρ.

Como $K[G] \cong F_1 \times \cdots \times F_s$

Toda representación $\rho : K[G] \longrightarrow M_n(K)$

tiene la forma

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} \rho_1(a) & & & \\ & \rho_2(a) & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \rho_t(a) \end{pmatrix}$$

donde ρ_i es una representación de F_{t_i}

$$\rho_i(a_1, \dots, a_s) = \rho'_i(a_{t_i})$$

$$\rho'_i : F_i \longrightarrow M_{[F_i:K]}(K)$$

En particular, si K es alg. cerrado

$$K[G] \cong \underbrace{K \times \cdots \times K}_{|G|}$$

HAY $|G|$ REPRESENTACIONES DISTINTAS

$\boxed{\text{EJ:}}$ $K = \mathbb{C}$ $\qquad G = C_2 \times C_2$

$$= \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$$

$\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$

$\rho_1 \quad a \longmapsto 1, \quad b \longmapsto 1$

$\rho_2 \quad a \longmapsto 1, \quad b \longmapsto -1$

$\rho_3 \quad a \longmapsto -1, \quad b \longmapsto 1$

$\rho_4 \quad a \longmapsto -1, \quad b \longmapsto -1$

$a \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b \longmapsto \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

$ab = ba$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -z & -w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ z & -w \end{pmatrix} \qquad y = z = 0$$

$$b \longmapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$$

$$b^2 = e \qquad x^2 = w^2 = 1$$

$$b \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \rho_2 & 0 \\ 0 & \rho_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \rho_2 & 0 \\ 0 & \rho_4 \end{pmatrix}$$

μ

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \mu(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1(x) & 0 \\ 0 & \rho_4(x) \end{pmatrix}$$

DEF: el radical de un álgebra de dim finita sobre K es

$$R = \{a \in A \mid aM = 0 \quad \forall M \text{ irreducible}\}$$

Ej: R es un ideal bilátero de A.

DEF: A se dice semisimple si $R = \{0\}$

A se dice simple si no tiene ideales biláteros no triviales

HECHO 1: un álgebra semi-simple es un producto de álgebras simples

HECHO 2: un álgebra simple A es de la forma $A \cong \mathbb{M}_r(D)$ donde D es un álgebra de división.

HECHO 3: si K tiene característica 0, entonces $K[G]$ es semisimple

$$K[G] \cong \mathbb{M}_{n_1}(D_1) \times \cdots \times \mathbb{M}_{n_r}(D_r)$$

en particular si K es alg. cerrado

$$K[G] \cong \mathbb{M}_{n_1}(K) \times \cdots \times \mathbb{M}_{n_r}(K)$$

$$|G| = \sum_{i=1}^{r} n_i^2$$

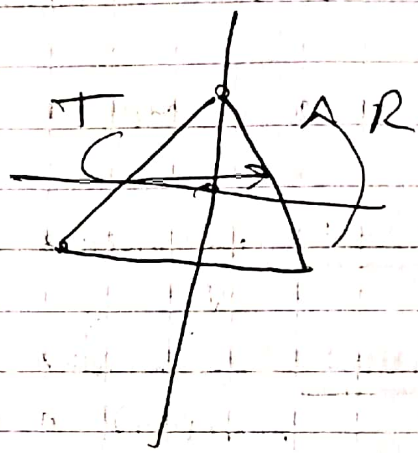
Ej: S_3

$$|G| = 6 = 1+1+4 = 1^2+1^2+2^2$$

S_3 tiene 2 rep. irreducibles de dim 1 y una de dim 2

$\rho_1 : \sigma \longmapsto 1$

$\rho_2 : \sigma \longmapsto \operatorname{sgn} \sigma$



ρ_3 $\quad \rho_3(R) = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\operatorname{sen} 120^\circ \\ \operatorname{sen} 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix}$

$$\rho_3(T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner