$\left(\frac{u,\pi}{K}\right)$

Hemos probado que, si π uniformizante entonces existe $h \in K$ tal que:

$$\left(\frac{\pi,\Delta}{K}\right) \text{ álg. matrices}, \quad h = \Delta$$

<u>Por ver</u>: Si u unidad, $h \notin O_K^{*2} \cup \Delta O_K^{*2} \Rightarrow \exists\, a \in K^*$ tal que

$$\left(\frac{h,a}{K}\right) \text{ de división.}$$

<u>obs</u>: Si $h \in O_K^{*2} \Rightarrow \left(\frac{h,a}{K}\right)$ de matrices y si $h \in \Delta O_K^{*2}$ entonces

$$\left(\frac{h,a}{K}\right) = \begin{cases} \text{división}, & \text{si } v(a) \text{ impar} \\ \text{matrices}, & \text{si } v(a) \text{ par}. \end{cases}$$

<u>Proposición</u>: Si $u \in O_K^*$ que no es un cuadrado o Δ por un cuadrado entonces: $\left(\frac{u,\Delta-u}{K}\right)$ es un álgebra de división.

<u>Demostración</u>: Si no $\Delta - u \in N_{L/K}(L^*)$, con $L = K(\sqrt{u})$.

Luego: $x^2 - uy^2 = \Delta - u$ tiene solución en L.

ed: $x^2 - uy^2 - (\Delta - u)z^2 = 0$ tiene solución en L, no trivial.

Por lo tanto $[u] \perp [\Delta - u]$ representa a 1.

Además simple $[u] \perp [\Delta - u]$ representa Δ, pues:

$$u \cdot 1^2 + (\Delta - u)\cdot 1^2 = \Delta.$$

<u>obs</u>: Podemos suponer que $u \equiv 1 \pmod{\pi}$. Esto pues $\varepsilon^2 \equiv a \pmod{\pi}$ tiene solución. Por ello $\bar{\varepsilon}^2 = \bar{a}$.

Luego $u = 1 + h$. Si $v(h) = \text{par} = 2r$ entonces

$u = b^2 \pmod{\pi^{2r+1}}$ tiene solución.

Podemos suponer que $v(h)$ es impar y menor a $v(4) = v(\widetilde{\Delta}^2 - 1)$

Luego $\Delta - u = (1+2) - (1+h) = 2 - n$ ($\Delta = 5$ en $\mathbb{Q}_2$ y luego ext).
$\therefore v(\Delta - u) = v(h)$ impar. $=$ Por principio de dominancia.

Por lo tanto $[u] + [\Delta - u]$ no puede de representar a 1 y Δ al mismo tiempo.
Usando lema previo.

Obs: La proposición dice que $\left(\frac{u, \pi}{K}\right) =$ div. Para cierto π uniformizante.

Ejemplo: En $K = \mathbb{Q}_2$

① $\left(\frac{a, -a}{K}\right) \cong \mathbb{M}_2(K)$

② $\left(\frac{1, a}{K}\right) \cong \mathbb{M}_2(K)$

Luego $\left(\frac{1,7}{K}\right) \cong \left(\frac{1,2}{K}\right) \cong \left(\frac{1,3}{K}\right) \cong \left(\frac{1,5}{K}\right) \cong \left(\frac{1,10}{K}\right) \cong \left(\frac{1,6}{K}\right) \cong \left(\frac{1,14}{K}\right) \cong \mathbb{M}_2(K)$

Además $\left(\frac{2,14}{K}\right) \cong \left(\frac{5,3}{K}\right) \cong \left(\frac{6,10}{K}\right) \cong \mathbb{M}_2(K)$, por ②

③ $\left(\frac{3,2}{K}\right) = \left(\frac{7,14}{K}\right) = -1$, por prop. anterior. (División), $\Delta = 5$.

③ $\left(\frac{a, 1-a}{K}\right) \cong \mathbb{M}_2(K)$

Luego $\left(\frac{3,14}{K}\right) \cong \mathbb{M}_2(K)$.

Por ello $\left(\frac{u, \pi}{K}\right)$ puede ser alg. de división o de matrices.

Sea $V = K^*/K^{*2}$ grupo abeliano de exponente 2. Podemos definir

$$\left(\frac{\cdot,\cdot}{K}\right) : V \times V \to (-1)^{\mathbb{F}_2}$$

Forma bilineal no degenerada en $\mathbb{F}_2$.

Para $v \in V$: $\dim v^\perp = \dim V - 1$. Esto era válido en general, pues V es no degenerado.

Luego $[\Delta]^\perp = O_K^*/O_K^* K^{*2}$ (*). Luego como $[u]^\perp \neq [\Delta]^\perp$ $\Rightarrow \exists v \in V$ unidad no cuadrada con $\left(\frac{u,v}{K}\right) = -1$!

(Existe $u \in O_K^*/O_K^{*2}$ tal que $v \notin [u]^\perp$, $\left(\frac{v,u}{K}\right) = -1$)

(*) Esto pues $\left(\frac{u,\Delta}{K}\right) \cong M_2(K)$ y $\left(\frac{\pi,\Delta}{K}\right) \cong$ división.

Vimos que $[a] \perp [b]$ isotrópica ss. $\operatorname{dis}([a] \perp [b]) = ab = -1 \pmod{K^{*2}}$

Sea W e. cuadrático ternario ($\dim W = 3$).

$W \cong [c] \perp [a'] \perp [b']$. Sea $a = \frac{a'}{c}$, $b = \frac{b'}{c}$

Salvo multiplicar por q por $\frac{1}{c}$ podemos suponer que

$$W \cong [1] \perp [a] \perp [b] \quad \left(\begin{matrix}\text{Salvo} \\ \text{Reescalamiento}\end{matrix}\right).$$

esta última forma es isotrópica ss. $b \in N_{L/K}(L^*)$, $L = K(\sqrt{a})$

[Da un criterio para formas cuad. ternarias]

__Afirmación__: Sean $v, w \in V$, $v \neq w \neq 0$.

$\Rightarrow v^\perp \neq w^\perp$

Por ello $\exists z \in V$ tal que $\left(\frac{v,z}{K}\right) \cong \left(\frac{w,z}{K}\right)$.

(*)

Por lo tanto dos elementos que están en la misma clase de $\square$ tienen subgrupos de normas distintos (ninguno contiene al otro).
(pues $\exists z$ que está en un subgrupo de norma y no en otro y viceversa)

Proposición: Si W es un espacio cuadrático anisotrópico de dimensión 4 sobre K entonces:

$$W \cong \left(\left(\frac{\pi, \Delta}{K}\right), N\right) = W_0$$

Demostración: Re-escalando, supongamos que W representa 1.

$$W \cong [1] \perp [a] \perp [b] \perp [c]$$

Como $W' = [1] \perp [a] \perp [b]$ es anisotrópica (si tiene vect iso $\Rightarrow$ W tiene)
$\Rightarrow$ $b \notin N_{L/K}(L^*)$, $L = K(\sqrt{a})$. Si $\overline{c/b} \neq \overline{a}$ $(\mathrm{mod}\, K^{*2})$

Sea: $W'' = [1] \perp [c/b]$ forma de norma de $F = K(\sqrt{d})$

para $d \doteq b/c$. $W'' \ncong [1] \perp [a]$ pues tienen distinto discriminante.

Por (*) existe $l \in K^*$ tal que $-l$ es norma de F pero no de L, $l \notin K^{*2}$.

$$-l = x^2 + \frac{c}{b} y^2,$$

$$-lb = x^2 b + c y^2.$$

Luego $\left(\frac{-a, -b}{K}\right) = -1$, $\left(\frac{-a, -l}{K}\right) \cong -1$, por ello $\left(\frac{-a, +lb}{K}\right) = 1$.

$\therefore \exists r, s$ tales que $r^2 + a s^2 = lb$. Por ello

$$r^2 + a s^2 + b x^2 + c y^2 = 0 \qquad (\neq *)$$

Por lo tanto $W \cong [1] \perp [a] \perp [b] \perp [-ab] \cong W_0$

Esto prueba que toda f. bilineal anisotrópica de dim 4 es un reescalamiento de W_0 (de un alg. división, luego es W_0).

La proposición se puede: $[a_0] \to [1]$

$$N(ff') = N(f)N(f'), \quad (\text{primer factor queremos que sea norma})$$

Lema: W_0 es universal.

Demostración: $W_0 \cong [1] \perp [-\Delta] \perp [\pi] \perp [-\pi\Delta]$

Por lo tanto $[1] \perp [-\Delta]$ representa todas las unidades y
$[\pi] \perp [-\pi\Delta]$ " parámetros unif.

$\therefore$ W_0 universal.

Corolario: Toda forma cuadrática de dim 4 es universal

Demostración: Si es anisotrópico lo tenemos por el lema, si no es anisotrópico $\mathbb{H} \subseteq V$ con $\mathbb{H}$ universal.

Corolario: Todo e. cuadrático de dim 5 es isotrópico.

Demostración: $W \perp [b]$ isotrópico $\Leftrightarrow$ W representa $-b$.

- Si no diádico $[u_1] \perp [u_2] \perp [u_3]$ isotrópico si u_1, u_2, u_3 unidades.

Ejemplo: $\left(\frac{3,7}{\mathbb{Q}_2}\right) = -1$, por ello $[1] \perp [-3] \perp [-7]$ anisotrópico.

- Basta encontrar sol de $u_1 x^2 + u_2 y^2 = -u_3$, lo pasamos al cuerpo residual.

Proposición: Si $\alpha, \beta, m \in K^*$ entonces:

$$\left(\frac{\alpha,\beta}{K}\right)\otimes\left(\frac{\alpha,m}{K}\right)\cong\left(\frac{\alpha,\beta m}{K}\right)\otimes\left(\frac{1,-1}{K}\right).$$

Demostración: Sea $A_1=\left(\frac{\alpha,\beta}{K}\right)$, $A_2=\left(\frac{\alpha,m}{K}\right)$

Entonces A_1 tiene base $\{1, x_1, x_2, x_3\}$ y A_2 tiene base $\{1, y_1, y_2, y_3\}$ (Base canónica). Sea $X=\left(\frac{\alpha,\beta m}{K}\right)$ e $Y=\left(\frac{-1,+1}{K}\right)$ [Veremos]

Sea X con base $\{1\otimes 1, x_1\otimes 1, x_2\otimes y_2, x_3\otimes y_2\}$ e Y con base $\{1\otimes 1, 1\otimes y_2, x_1\otimes y_3, m(x_1\otimes y_1)\}$. Observe que

$$(x_1\otimes 1)^2=\alpha\otimes 1$$

$$(x_2\otimes y_2)=\beta\otimes m=\beta m$$

y:

$$(x_1\otimes 1)(x_2\otimes y_2)=x_1x_2\otimes y_2=x_3\otimes y_2$$

$$=-x_2x_1\otimes y_2=-(x_2\otimes y_2)(x_1\otimes 1).$$

Por ello $X\cong\left(\frac{\alpha,\beta m}{K}\right)$. Por otro lado

$$(1\otimes y_2)^2=1\otimes y_2^2=m$$

$$(x_1\otimes y_3)^2=\alpha\otimes -\alpha m=-\alpha^2 m$$

$$(1\otimes y_2)(x_1\otimes y_3)=x_1\otimes y_2y_3=-x_1\otimes y_3y_2=-(x_1\otimes y_3)(1\otimes y_2)$$

Pero $y_2y_3=y_2y_1y_2=-my_1$ por ello $(1\otimes y_2)(x_1\otimes y_3)=x_1\otimes my_1$.

Por ello $Y\cong\left(\frac{1,-1}{K}\right)\cong\left(\frac{m,-\alpha^2 m}{K}\right)$.

Por otro lado:

$$(x_1\otimes 1)(1\otimes y_2)=x_1\otimes y_2=(1\otimes y_2)(x_1\otimes 1)$$

$$(x_2\otimes y_2)(1\otimes y_2)=x_2\otimes y_2^2=(1\otimes y_2)(x_2\otimes y_2)$$

$$(x_1\otimes 1)(x_1\otimes y_3)=x_1x_1\otimes y_3=(x_1\otimes y_3)(x_1\otimes 1)$$

$$(x_2\otimes y_2)(x_1\otimes y_3)=x_2x_1\otimes y_2y_3=x_1x_2\otimes y_3y_2$$

$$=(x_1\otimes y_3)(x_2\otimes y_2)$$

Así tenemos $\phi: X \otimes_K Y \longrightarrow A = A_1 \otimes A_2$ Epimorfismo de álgebras.

$x \otimes y \longmapsto xy$

Como $X \otimes_K Y$ es central simple $\Rightarrow$ ϕ inyectiva. Por igual dimensión $\rightarrow$ ϕ isomorfismo.

Volvemos a formas sobre cuerpos locales.

Proposición: Si K no es diádico y $u_1, u_2, u_3 \in K^*$ entonces $[u_1] \perp [u_2] \perp [u_3]$ es isotrópica.

Demostración: Podemos suponer que $u_1 = 1$ reescalando por $1/u_1$. Entonces tenemos $[1] \perp [u_2] \perp [u_3]$. Podemos suponer $u_2 \in \{1, \Delta\}$.

Caso 1: $u_2 = \Delta$. Entonces $[1] \perp [\Delta] \perp [u_3]$, $u_3 \in \{-1, -\Delta\}$. En ambos casos es isotrópica.

Caso 2: Si $u_1 = 1$, $u_2 = 1$. Tenemos $[1] \perp [1] \perp [u_3]$.

Observación: No toda suma de cuadrados en O_K es cuadrado. Esto pues $|\mathbb{F}_K| = f$ impar y $|\mathbb{F}_K^{*2} \cup \{0\}| = \frac{f+1}{2}$, y $\mathbb{F}^{*2} \cup \{0\}$ no es subgrupo. Por ello hay dos $\square$ tales que su suma no es $\square$.

Luego

$[1] \perp [1] \perp [u_3] \cong [\Delta] \perp [\Delta] \perp [u_3]$ por discriminante, esto porque al debe tener el mismo valor de la f.c.

Como $u_3 \in \{-1, -\Delta\}$ se tiene que hay un p. hiperbólico. $\therefore$ la forma es isotrópica.

Formas anisotrópicas:

1) $\dim V = 1$, $V = [a_1]$

2) $\dim V = 2$, $V = [a_1] \perp [a_2]$. Luego $V \cong [1] \perp [a_2 a_1]$
esta es la forma de norma de $K(\sqrt{-a_2 a_1})$. Salvo si $a_2 a_1 = -1 K^{*2}$
En cuyo caso $V \cong \mathbb{H}$ isotrópico. Si no es anisotrópica.

3) $\dim V = 3$. V es isotrópica, $[1] \perp [a_1] \perp [a_2]$, con $(a_1, a_2) = -1$.
Con $(a_1, a_2) = -1$ ... Si $(a_1, a_2) = -1 \Rightarrow [1] \perp [a_1] \perp [a_2] \subseteq \left(\frac{a_1, a_2}{K}\right)$
de división $\Rightarrow$ es anisotrópica. Si no $(a_1, a_2) = 1$
entonces $[1] \perp [a_1] \perp [a_2] \subseteq \mathbb{M}_2(K)$ tiene un s. de dim max
isotrópico de dim $= 2$ por ello intersecta a V en $v \in V - \{0\}$

4) $\dim V = 4$, V anisotrópico $\Rightarrow V \cong (D, N)$, $D \cong \left(\frac{\pi, a}{K}\right)$

5) $\dim V \geq 5$, V es isotrópico, ya se vio.

Definición: Si $V \cong [a_1] \perp \dots \perp [a_n]$ el invariante de Hasse de V es
$$S_\beta(V) = \prod_{i<j} (a_i, a_j) \in \{\pm 1\}.$$
(V tiene base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$, $f(v_i) = a_i$)

Prop: $S_\beta(V)$ es indep. de la base.

Lema: Si $V = U \perp W$, $U = \langle \beta \rangle$, β base, $W = \langle \gamma \rangle$ entonces
$$S_{\beta \cup \gamma}(V) = S_\beta(U) S_\gamma(W) (\operatorname{dis} U, \operatorname{dis} W).$$

Scanned with CamScanner

Demostración: Sea $\beta = \{v_i \mid i \le N\}$, $M = \{v_i \mid i < N\}$

Entonces

$$S_{\beta \cup M}(V) = \prod_{i<j}(a_i, a_j) = \prod_{i<j\le N}(a_i,a_j)\prod_{i\le N<j}(a_i,a_j)\prod_{N<i<j}(a_i,a_j)$$

$$= S_\beta(V)\, S_\gamma(W)\, (\operatorname{dis}(V), \operatorname{dis}(W))_{2,\omega}$$

Demostración de la proposición por inducción: Si $n=2$:

Supongamos que $[a_1]\perp[a_2] \cong [b_1]\perp[b_2]$, entonces

$(a_1,a_2)=1 \iff [a_1]\perp[a_2]$ rep. α

$\iff [b_1]\perp[b_2]$ rep. α

$\iff (b_1,b_2)=1$.

Supongamos lo cierto para $n=K$. Para $K+1$ tenemos

$$V = \underbrace{[a_1]}_{v_1}\perp\underbrace{[a_2]}_{v_2}\perp\dots\perp\underbrace{[a_{k+1}]}_{v_{k+1}} \cong [b_1]\perp\underbrace{\dots\perp}_{V_0}[b_{k+1}]$$

Si $w_{k+1} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k+1}v_{k+1}$.

Sea $w_{k+1}' = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$. Supongamos que $\alpha_{k+1}\ne 0$ o cambiamos el orden.

$f(w_{k+1}') = b_{k+1}'$, pero $w_{k+1}' \perp v_{k+1}$. Entonces

$$V \cong \underbrace{[b_{k+1}]\perp[a_{k+1}]}_{V_1}\perp U_1, \quad U_1 = [d_1]\perp\dots\perp[d_{k-1}].$$

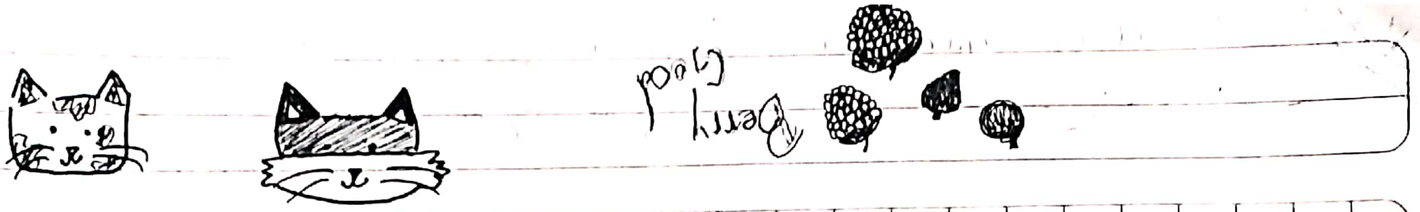
Sea:

$$V_2 \cong [b_{k+1}]\perp[c]\perp U_1$$

Luego $S(V) = S([a_1]\perp\dots\perp[a_k])\,(a_1\cdots a_k, a_{k+1})$

Como por eliminación de Witt, $[a_1]\perp\dots\perp[a_k] \cong [b_{k+1}']\perp U_1$

$S(V) = S([b_{k+1}]\perp U_1)\,(b_{k+1}\operatorname{dis}(U_1), a_{k+1})$



Por lo tanto:

$$S(V) = S(U_1)(b'_{k+1}, \operatorname{dis}(U_1))(b'_{k+1}, \operatorname{dis}(U_1), a_{k+1})$$
$$= S(U_1)(b'_{k+1} a_{k+1}, \operatorname{dis}(U_1))(a_{k+1}, b'_{k+1})$$

Por el mismo cálculo:

$$S(V_0) = S(V_2)$$
$$= S(U_1)(b_{k+1} c, \operatorname{dis}(U_1))(c, b_{k+1}).$$

Observe que $\operatorname{dis}([b'_{k+1}] \perp [a_{k+1}]) = b'_{k+1} a_{k+1} = b_{k+1} c = \operatorname{dis}([b_{k+1}] \perp [c])$.

Por otro lado $(b_{k+1}, c) = S([b_{k+1}] \perp [c]) = S([a_{k+1}] \perp [b'_{k+1}]) = (a_{k+1}, c)$ $\boxed{\xi}$

Proposición: Sean W, V e.v. cuadráticos sobre K cuerpo local. Entonces

$V \cong W$ ssi
1. $\dim V = \dim W$
2. $\operatorname{disc}(V) = \operatorname{dis}(W)$
3. $S(V) \cong S(W)$.

Demostración:

Caso 1: $\dim V = \dim W = 1$. Basta el discriminante

Caso 2: $\dim V = \dim W = 2$. $V \cong [a_1] \perp [a_2]$, $W \cong [b_1] \perp [b_2]$.

Con $a_1 a_2 = b_1 b_2 \ (\text{mód } K^{*2})$ y $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$.

Si representa a c entonces

$$V \cong [c] \perp [c']$$
$$W \cong [c] \perp [c'']$$

$\operatorname{disc}(V) = \dim(W) \Rightarrow c' = c'' \ (K^{*2}) \Rightarrow V \cong W$.

También V isotrópico $\Leftrightarrow$ W isotrópico.

Sup. que son anisotrópicos (si no son p. hiperbólicos). Tenemos

$$V \cong (L_1, \alpha N), \quad W \cong (L_2, \beta N)$$

Por discriminante $L_1 = L_2$. Reescalando ambos suponemos $\alpha = 1 - \beta . 1$.

Entonces, V representa -1 ($N(1) = +1 \Rightarrow f(1) = -1$) $\Leftrightarrow [x] \perp [y]$ rep. -1.

Como $\delta(V) = (x, y)$ $\Rightarrow \delta(V) = 1 \Rightarrow \delta(W) = 1 \Rightarrow W$ rep. $a - 1$.

Por lo tanto $1 \in \beta N_{L_2/k}(L_2^*)$. Así $(-1) N(L_2) = \alpha N(L_2) = \beta N(L_2)$

Sea $V^\alpha = V$ con f: cuadrática, $f_\alpha(v) = \alpha f(v)$. Así

$$V^\alpha = [\alpha a_1] \perp [\alpha a_2]$$

$$W^\alpha = ([\alpha b_1]) \perp [\alpha b_2]$$

$$\Rightarrow \delta(V^\alpha) = (\alpha a_1, \alpha a_2) = (\alpha, \alpha)(\alpha, a_1 a_2)\, \delta(V) \qquad \text{Como } a_1 a_2 = b_1 b_2 \ (F^{*2})$$

$$= (\alpha, \alpha)(\alpha, b_1 b_2)\, \delta(W)$$

$$= \delta(W^\alpha)$$

PIZZA

3) $\dim U = \dim V = 3$

$$U = [b_1] \perp [b_2] \perp [b_3] \quad , V = [a_1] \perp [a_2] \perp [a_3]$$

Sea $-V = [-a_1] \perp [-a_2] \perp [-a_3]$, así $U \perp -V$ isotrópico pues tiene dimensión 6.

Caso 1: $\exists r \in K-(0)$: U, V representa a r. Como $U \perp -V$ es isotrópico $\exists u, v$ tq $\tilde{f}(u,v) = f(u) - f(v) = 0$. Luego $r = f(u) = f(v)$. Así:

$$U = [r] \perp [b_1'] \perp [b_2'] = [r] \perp U_1$$
$$V = [r] \perp [a_1'] \perp [a_2'] = [r] \perp V_1$$

Así $\dim U_1 = \dim V_1 = 2$, $\operatorname{dis} U_1 = \operatorname{dis} V_1 = d/r$ y el invariante de hasse:

$$S(U) = (r, d/r)\, S(U_1)$$
$$S(V) = (r, d/r)\, S(V_1)$$

Por ello $S(U_1) = S(V_1)$. Luego $U_1 \cong V_1 \Rightarrow U \cong V$.

Caso 2: $\nexists w \in U$ tal que $f(w) \neq 0$. Entonces

$$U \cong [c] \perp \mathbb{H} \text{ y } V \cong [a_1] \perp [a_2] \perp [a_3].$$

U representa a a_1, pues $\mathbb{H}$ rep. a a_1. Luego

$$U \cong [a_1] \perp [b_1'] \perp [c_1']$$

y se concluye como antes.

4) $\dim U = \dim V \geq 4$.

En este caso $\hat{U} = U \perp [-1]$ isotrópico. Luego

$U \cong [1] \perp U_1$ (pues 1 es rep. por U_1 ya que $\hat{U}$ es isotrópico)

Por lo mismo $V \cong [1] \perp V_1$

Se concluye como antes pues $\dim U_1 = \dim V_1 = 3$.

Dominio de Dedekind:

K cuerpo. $\Pi(K)$ = conjunto de valores absolutos no equivalentes.
ρ_1, ρ_2 valores absolutos en $\Pi(K)$ se dicen equivalentes
$\rho_1 \equiv \rho_2$ ssi: $\rho_1(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \iff \rho_2(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

observación: $\rho_1(a) < 1 \iff \rho_1(a^n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Definimos $B_{0,\rho}(1) = \{x : \rho(x) < 1\}$. Así $\rho_1 \equiv \rho_2$ ssi:
$B_{0,\rho_1}(1) = B_{0,\rho_2}(1)$.
Supongamos que $B_{0,\rho_1}(1) = B_{0,\rho_2}(1)$. Sean $a, b \in K^*$. Supongamos que
$\rho_1(a), \rho_1(b), \rho_2(a), \rho_2(b) > 0$ y que $\dfrac{\log \rho_1(a)}{\log \rho_1(b)} < \dfrac{\log \rho_2(b)}{\log \rho_2(b)}$

Así: $\dfrac{\log \rho_1(a)}{\log \rho_1(b)} < p/q < \dfrac{\log \rho_2(a)}{\log \rho_2(b)}$

Por lo tanto: $\log \rho_1(a)^q < \log \rho_1(b)^p \Rightarrow \rho_1(a)^q < \rho_1(b)^p$
$\Rightarrow \rho_1(a^q/b^p) < 1$, por la otra desigualdad: $\rho_2(a^q/b^p) > 1$.
Luego $\dfrac{\log \rho_1(a)}{\log \rho_2(a)} = \lambda \Rightarrow \rho_1(a) = \rho_2(a)^\lambda$.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
1. ρ, ρ' definen la misma topología,
2. $\rho(a) = \rho'(a)^\lambda$, $\forall a \in K$,
3. $B_{0,\rho}(1) = B_{0,\rho'}(1)$.

CLASE L. ARE_S

ρ se dice no arquimediano si $\rho(a+b) \leq \max\{\rho(a), \rho(b)\}$
o equivalentemente $\rho(n)$ es acotado.

Ejemplo: En $\mathbb{Q}$ existen salvo equivalencia $|\cdot|_\infty$ y $|\cdot|_p$.

Supongamos que $\rho \in \Pi_f \Rightarrow \rho$ no arquimediano.

$\mathcal{O}_\rho = \{x \in K : \rho(x) \leq 1\}$ es un anillo.

ρ se dice **discreto** si $\rho(K^*) = c^{\mathbb{Z}}$, $0 < c < 1$. Vamos a suponer que $m_\rho = \{x \in K : \rho(x) < 1\}$

con $\mathcal{O}_\rho / m_\rho$ finito.

Definición: $\mathcal{O}_\pi = \{x \in K : \rho(x) \leq 1, \forall \rho \in \Pi_f\}$ (Es un anillo por ser int. de anillos). Supondremos que $K = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{\pi_f})$

Ejemplo: $K = \mathbb{F}_2(t)$. Sea $\Pi_f = \begin{cases} |\cdot|_p & , p \in \mathbb{F}_2[t] \text{ primo} \\ |\cdot|_\infty & , \text{donde } |f/g|_\infty = (1/2)^{\deg f - \deg g} \end{cases}$

Sea $\lambda = f/g$, $f, g \in \mathbb{F}_2[t]$ rel. primos. Entonces $|\lambda|_p \leq 1 \Leftrightarrow v_p(\lambda) \geq 0$.

Así si $\lambda \in \Pi_f \Rightarrow \deg \lambda \leq 1 \Rightarrow \deg \lambda = 0 \quad \therefore \lambda = cte.$

Luego $K \neq \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{\pi_f}) = \mathbb{F}_2$.

$v_\infty(\lambda) = \deg g - \deg f \geq 0$

para $q \mid g$, $\deg g \geq \deg f$

$|\lambda|_q \geq 1$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

$\therefore g \in \mathbb{F}_2$

Un dominio de Dedekind del cuerpo local K es $\mathcal{O}_{\pi_f}$.

Ejemplo: $K = \mathbb{Q}$, $\Pi_f = \{p : p \neq 2\}$. En este caso $\mathcal{O}_{\pi_f} = \mathbb{Z}[1/2]$.

Notación: $\mathcal{O}_{\pi_f} = \mathcal{O}_K$, cuando no haya confusión.

Definimos K_ρ = Completado de K respecto de ρ. Si K cuerpo conv. a se tiene que K_ρ cuerpo y $\rho(K_\rho^*) = \rho(K^*) = c^{\mathbb{Z}}$.

Definimos $\hat{O}_p = \{x \in K_p : p(x) \leq 1\}$ y $\hat{m}_p = \{x \in K_p : p(x) < 1\}$

Entonces $\hat{O}_p / \hat{m}_p \cong O_p/m_p$ = cuerpo finito.

Luego K_p es un cuerpo completo loc. compacto, es decir es un cuerpo local.

Ejemplos básicos:

① $K = \mathbb{Q}$, $O_K = \mathbb{Z}$, $\Pi_f = \{|\cdot|_p : p \text{ primo}\}$

② $K = \mathbb{F}_q(t)$, $O_K = \mathbb{F}_p[t]$, $\Pi_f = \{|\cdot|_p \mid \mathbb{F}_p[t]\}$

Sea $L|K$ extensión algebraica separable y finita. Sea $p \in \Pi_f$. Definimos

$$L_p = L \otimes_K K_p$$

Sabemos que $L = K(\theta) \cong K[x]/(f(x))$. Así

$$L_p \cong K_p[x]/(f(x))$$

Indagar a mayor detalle

Por T. Chino de los restos:

$$L_p \cong \frac{K_p[x]}{(f_1)} \times \dots \times \frac{K_p[x]}{(f_m)}$$

Introducimos la notación

$L_{p_i} \cong K_p[x]/(f_i)$ es un completado de L y los factores dan todas las ext. de las completaciones de p.

Así $L \otimes_K K_p \cong L_{p_1} \times \dots \times L_{p_m}$

con $p_1, \dots, p_m$ ext. de p a L.

En L definimos $\Pi_f^L = \{p' \mid p' \text{ lugar sobre } p, \text{ p algún lugar sobre } \Pi_f\}$.

lugares que extienden a los lugares de Π_f

Hecho: $O_L = O_{\Pi_f^L}$ es la clausura entera de O_K en L.

ok

Proviene de $O_{p'} \subseteq L_{p'}$ es la clausura entera de O_p en K_p.

Esto pues $\lambda \in L$, $\operatorname{irr}_{\lambda,K}(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, luego $\lambda \in \mathcal{O}_L \iff a_i \in \mathcal{O}_K$

$\frac{1}{[L:K]}$

obs: $\rho'(\lambda) = \rho(N_{L|K}(\lambda))$, luego si λ es entero
$\Rightarrow \operatorname{irr}_{L,\lambda}(x)$ tiene coef entero $\Rightarrow |N_{L|K}(\lambda)|_p \leq 1$.

Ejemplo: $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(i)$. Sea $\rho = |\cdot|_p$, p primo. Partamos por

① $p = 3$:

$$L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_3 \cong \mathbb{Q}_3(i), \text{ cuerpo pues } -1 \notin \mathbb{Q}_3^{*2}.$$

En este caso hay un solo v. absoluto sobre $\mathbb{Q}_3$. $\quad \mathbb{Q}(i) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_3 = \frac{\mathbb{Q}_3[x]}{(x^2+1)}$

Luego si $p|3 \Rightarrow \quad \rho = |a^2+b^2|_3$

valor absoluto que extiende a 3.

② Si $p = 5$: $\quad L \otimes \mathbb{Q}_5 \cong L_1 \times L_2 \cong \mathbb{Q}_5 \times \mathbb{Q}_5$.

Sea $\alpha = \sqrt{-1} \in \mathbb{Q}_5$. Entonces (5 es lugar des compuesto).

Hensel

$$\rho_1(a+bi) = |a+b\alpha|_5$$
$$\rho_2(a+ib) = |a-b\alpha|_5$$

observe pues $\rho_1(3+i) < 1$ y $\rho_2(3+i) = 1$, si $\alpha \equiv 2 \pmod 5$.

Esta frase no se entiende

E|F ext. de cuerpos locales tienen índice de ramificación: $\pi_F \quad \pi_E^e$

$e = e(E|F)$ def por $\rho(E) = c^{\mathbb{Z}}$, $\rho(F) = c^{e\mathbb{Z}}$

y un grado de inercia $f = f(E|F) = [\mathbb{E}:\mathbb{F}]$, cumplen con $ef = [E:F]$.

Corolario: $p \in \Pi_f^K$ entonces: $[L:K] = \sum_{p' \text{ sobre } p} e(L_{p'}|K_p) f(L_{p'}|K_p) = \sum_{p'|p} [L_{p'}:K_p]$.

viene de la descomposición en producto

observación: $[L:K] = 2$

$2 = 1\cdot1 + 1\cdot1 =$ descompuesto (5)

$2 = 2\cdot1 =$ ramificado (2)

$2 = 1\cdot2 =$ inerte p. (3)

Cuerpos Globales

$$K \rightsquigarrow (K_p)_{p\in\Pi}$$

Si K cuerpo de números, $\Pi_K = \Pi_f \cup \Pi_\infty$. Sea $S \subseteq \Pi_f$. Si K cuerpo de funciones $S \subsetneq \Pi$. $\mathcal{O}_{K,S}$ S-enteros

$$\mathcal{O}_S = \mathcal{O}_K = \{f \in K,\ |f|_p \le 1,\ \forall p \in S\}.$$

$\mathcal{O}_K$ es anillo, pues $|f+g|_p \le \max\{|f|_p, |g|_p\}$, $\forall p \in S$. Considere un ideal maximal:

$$\tilde{m}_p = \{f \in \mathcal{O}_K \mid |f|_p < 1\} \qquad \tilde{m}_{p,S} = \{f \in \mathcal{O}_{K,S} \mid |f|_p < 1\ \forall p \ldots$$

De hecho:

$$\mathcal{O}_K/\tilde{m}_p \cong \mathcal{O}_p/m_p;\quad m_p = \{f \in K_p : |f|_p < 1\}.$$

Cuando $K = \mathbb{Q}$, la identidad anterior nos dice que

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p.$$

Si $p \in \Pi(K)$ entonces considere L/K separable. De manera que $L = K(\alpha) \cong \frac{K[x]}{(p(x))}$
Entonces

$$L_p = L \otimes_K K_p \cong \frac{K_p[x]}{(p(x))} \cong \frac{K_p[x]}{(f_1(x))} \times \cdots \times \frac{K_p[x]}{(f_r(x))}$$

$[L_p : K_p] = [L:K]$ $= \text{producto de cuerpos completos}$
$= L_{p_1'} \times \cdots \times L_{p_r}$

Completos respecto a un v. absoluto $|\ |_{p_i}$ que extiende p y estas son todas las ext. posibles.

(Para saber las L_p int. sobre un cuerpo de números aplicamos $\otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$).

Ejemplo: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2-2)} \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ hay dos ext. del v. abs. infinito

$$|a+b\sqrt{2}|_{\infty_1} = |a+b\sqrt{2}|$$
$$|a+b\sqrt{2}|_{\infty_2} = |a-b\sqrt{2}|$$

$$\begin{array}{ccc} \infty_2 & & \infty_1 \\ & \diagdown\ \diagup & \\ & \infty & \end{array}$$

Ejemplo: $\mathbb{Q}(i)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}\cong\mathbb{C}$ hay sólo una ext. del v. absoluto

Ejemplo: $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}\cong\dfrac{\mathbb{R}[x]}{(x^3-2)}\cong\dfrac{\mathbb{R}[x]}{(x-\sqrt[3]{2})}\times\dfrac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})}$

$$\cong\mathbb{R}\times\mathbb{C}$$

Por lo tanto el v. absoluto se extiende de dos maneras distintas.

De la descomposición: $\sum_{i=1}^{r}[L_{\mathfrak{P}_i}:K_{\mathfrak{p}}]=[L:K]$. Por otro lado se puede probar que:

$$[L_{\mathfrak{P}_i}:K_{\mathfrak{p}}]=e(L_{\mathfrak{P}_i}|K_{\mathfrak{p}})\,f(L_{\mathfrak{P}_i}|K_{\mathfrak{p}})$$

donde $e(L_{\mathfrak{P}_i}|K_{\mathfrak{p}})=[L^*_{\mathfrak{P}_i}:K^*_{\mathfrak{p}}]$ y $f(L_{\mathfrak{P}_i}|K_{\mathfrak{p}})=[\bar{L}_{\mathfrak{P}_i}:\bar{K}_{\mathfrak{p}}]$.

Así para $\mathfrak{p}\in\Pi(K)$ no arquimediano

$$[L:K]=\sum_{i=1}^{r}e(L_{\mathfrak{P}_i}/K_{\mathfrak{p}})\,f(L_{\mathfrak{P}_i}|K_{\mathfrak{p}})$$

Ejemplo:

$2=1\cdot1+1\cdot1$ descompuesto

$2=2\cdot1$ ramificado

$2=1\cdot2$ inerte

no se entiende

Si $L=K(\sqrt{d})$ entonces $L\otimes_K K_{\mathfrak{p}}\cong K_{\mathfrak{p}}\times K_{\mathfrak{p}}$ $\therefore$ $\sqrt{d}\in K_{\mathfrak{p}}$ en el caso descompuesto. En los otros casos $L\otimes_K K_{\mathfrak{p}}\cong L_{\mathfrak{P}}$. Sea $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}=\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}[\omega]$. Si el caso es ramificado $\bar{L}_{\mathfrak{P}}=\bar{K}_{\mathfrak{p}}$ (es decir $\bar{\theta}\in\bar{K}_{\mathfrak{p}}^2$). Si es inerte, $\bar{L}_{\mathfrak{P}}\neq\bar{K}_{\mathfrak{p}}$, es decir $\bar{\theta}\notin\bar{K}_{\mathfrak{p}}^2$.

pendiente

Ejemplo: $L=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathcal{O}_L=\mathbb{Z}\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$. Así $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ satisface $\omega^2+\omega-1=0$ irred. sobre $\mathbb{F}_2$. Por ello L tiene un solo lugar sobre 2 y este es no ramificado.

Ejemplo: $L=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathcal{O}_L=\mathbb{Z}(\sqrt{3}i)$. Así $\omega = \sqrt{3}i$ satisface $\omega^2-3=0 \to \bar{\omega}^2-1=0$ satisface residualmente en $\mathbb{F}_2$, pues la ext. ramifica. Y hay un único lugar sobre 2.

Reticulados

$\Lambda \subseteq \mathbb{Q}^n$ reticulado si $\Lambda \cong \mathbb{Z}^n$ como $\mathbb{Z}$-módulo.

Ejemplo: Si K es un cuerpo de números entonces $\mathcal{O}_K$ es un reticulado en $K \cong \mathbb{Q}^n$, $n=[K:\mathbb{Q}]$.

De hecho: Λ reticulado $\Leftrightarrow \mathbb{Q}\Lambda=\mathbb{Q}^n$ y $\Lambda \subseteq \frac{1}{m}\mathbb{Z}^n$ algún m.
(Usando esto se puede probar el ejemplo).

Si V es un K-espacio vectorial ($\dim V<\infty$) (K = cuerpo de números)
$\Lambda \subseteq V$ se dice $\mathcal{O}_K$-reticulado si es un reticulado / $\mathbb{Z}$ y $\mathcal{O}_K\Lambda \subseteq \Lambda$.

Si $\mathcal{O}_K$ es un DIP entonces todo $\mathcal{O}_K$-reticulado tiene una base (aquí se usa que Λ es t.f. y libre de torsión), no es cierto en general este hecho.

No es cierto en general lo anterior.

Ejemplo: $O_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $I = (3, 4+\sqrt{-5})$

Entonces:

$$\frac{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]}{I} \cong \frac{\mathbb{Z}[x]}{(3, 4+x, x^5+1)} \cong \frac{\mathbb{F}_3[x]}{(1+x, x^2-1)} \cong \mathbb{F}_3.$$

(pasándonos al cuerpo)

I tiene a lo más un generador y como no es principal no tiene base.

$\Rightarrow I \times O_K$ no tiene base. Pero $I \times I \cong O_K \times O_K$ tiene base (ejercicio).

Ejemplo: Si O_K es DIP, $[L:K]=2$

$\Rightarrow O_L$ es un O_K-reticulado libre $\Rightarrow O_L = O_K[\omega] = O_K \oplus O_K\omega$.

Definición: $\Lambda \subseteq \mathbb{Q}^n$ reticulado. Definimos $\Lambda_p := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \subseteq V_p = V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$.

Sea Λ un O_K-reticulado y sea $\Lambda_p = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$. Luego como:

$$\Lambda = \Lambda \otimes_{O_K} O_K$$

Se tiene que:

$$\Lambda_p = \Lambda \otimes_{O_K} (O_K \otimes \mathbb{Z}_p)$$

Pero $O_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ es un reticulado en $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \cong K_{\mathfrak{P}_1} \times \dots \times K_{\mathfrak{P}_r}$. Se puede probar que $O_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \cong O_{\mathfrak{P}_1} \times \dots \times O_{\mathfrak{P}_r}$. Así:

$$\Lambda_p = \Lambda_{\mathfrak{P}_1} \times \dots \times \Lambda_{\mathfrak{P}_r}, \text{ donde } \Lambda_{\mathfrak{P}_i} = \Lambda \otimes_{O_K} O_{\mathfrak{P}_i}$$

?

Proposición: Sean Λ, L reticulados.

1. $\Lambda_p = L_p$ para casi todo p.
2. $\Lambda_p = L_p$ para todo $p \Leftrightarrow \Lambda = L$
3. Si $\Gamma(p)$ es una familia de reticulados locales tal que $\Gamma(p) = \Lambda_p$ para casi todo p y Λ fijo.

Entonces existe Π tal que $\Gamma(p) = \Pi_p$, $\forall p$.

$\exists \Lambda$, $[\Lambda]$, $O_{\mathfrak{P}_i}$

Obs: Basta probarlo para $O_K = \mathbb{Z}$.

Demostración:

① Podemos suponer que $\Lambda = \mathbb{Z}^n$ y $L = \bigoplus_{i=1} \mathbb{Z} v_i$. Tomamos $T: e_i \to v_i$. Así $L = T\Lambda$. Luego $L_p = T\Lambda_p$.
Pero $L_p = \Lambda_p$ si $T \in \mathbb{Z}_p$ y $\det T \in \mathbb{Z}_p^*$. [$T: \Lambda_p \to L_p$ da inclusión y es iso.]

② Si $\Lambda = L$ ssi $T \in M_n(\mathbb{Z})$, $\det T = \{\pm 1\}$ (Pues $L = T\Lambda = \Lambda$).
$\Leftrightarrow$ $T \in M_n(\mathbb{Z}_p)$, $\det T \in \mathbb{Z}_p^*$, $\forall p$
$\Leftrightarrow$ $\Lambda_p = L_p$.

③ $\Lambda = \mathbb{Z}^r$. Luego $L(p) = \mathbb{Z}_p^n$, para casi todo p. Es decir $\exists p_1, \dots, p_r$ tal que:

$$L(q) = \mathbb{Z}_p^n, \quad \forall p \neq p_1, \dots, p_r$$

Sea p_i como antes.

$$L(p_i) \cong \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{Z}_p v_{j_i}, \quad v_j \in \mathbb{Q}_{p_i}^n$$

Podemos escoger $\tilde{v}_{j_i} \sim v_{j_i}$ tal que $\tilde{v}_{j_i} \in \mathbb{Q}$.
Pero si $\{\tilde{v}_{j_i}\}_j \subseteq L(p_i) / p_i L(p_i)$ generan $\Leftrightarrow$ $\{v_{j_i}\}_j$ generan $L(p_i)$
(Lema de Nakayama). Sea

$$\Pi_i = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{Z} \alpha_{ij} \tilde{v}_{ij}, \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{Z}, \ |\alpha_{ji}|_{p_i} = 1, \ |\alpha_f|_p << 1$$
en cada p tal que $\tilde{v}_{ji} \notin L(p)$

Podemos suponer que

$$\Pi_{ip} \subseteq L(p), \quad \forall p \neq p_i$$
$$\Pi_{ip_i} = L(p_i) \quad \text{por definición.}$$

Definimos $L = \sum_{i=1}^{r} M_i + (p_1 \cdots p_t)^N \mathbb{Z}^n$, $N >> 1$.

Afirmación: $L(p) = L_p, \forall p$.

Demostración: ① Si $p = p_i$ en este caso $M_j\, p_i = L(p_i)$ y $(p_1 \cdots p_t)^N \mathbb{Z}_{p_i}^n \subseteq L(p_i)$
$\Rightarrow L_p \subseteq L(p)$

② Si $p \neq p_1, \ldots, p_n$. En este caso $M_i\, p \subseteq L(p)$ y
$(p_1 \cdots p_t)^N \mathbb{Z}_p^n = \mathbb{Z}_p^n = L(p)$

$\boxtimes$

observación: $O_K \Lambda = \Lambda \iff (O_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p) = (\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p), \forall p \in \Pi_f(\mathbb{Q})$.

O_K = anillo de enteros $\iff (O_{p_1} \times \cdots \times O_{p_r})(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p) = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$

Sobre K cuerpo de números $\iff \begin{cases} \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p = \Lambda_{p_1} \times \cdots \times \Lambda_{p_r} \\ O_{p_i} \Lambda_{p_i} = \Lambda_{p_i} \end{cases}$

Aproximación fuerte:

Sean $p_1, \ldots, p_r \in \Pi_f(K)$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ con $\alpha_i \in K_{p_i}$ y sea $\varepsilon > 0$. entonces existe $\alpha \in K$ tal que:

① $|\alpha - \alpha_i|_{p_i} \leq \varepsilon$, $\forall i = 1, \ldots, r$.

② $|\alpha|_{\wp} \leq 1$, $\forall \wp \neq p_1, \ldots, p_r$, $\wp \in \Pi_f(K)$.

Demostración:

① Caso 1: $|\alpha_i|_{p_i} \leq 1$, $\forall i$. Entonces la condición 1 dice que:

$$\alpha \equiv \alpha_i \ (\bmod\ m_{p_i}^N)$$

y la condición 2 dice que: $\alpha \in O_K$.

Existe por T.C. de los restos en O_K. (que de reemplazarse 1) por 1)')

$\alpha \equiv \alpha'_i \ (\bmod\ \bar{m}_{p_i}^N)$ pues O_K es denso en O_{p_i})

② α_i cualquiera. $\exists \beta \in O_K$ tal que $|\beta\alpha_i|_{p_i} \leq 1$, $\forall p_i$ y se aplica el caso anterior.

Hecho: $\exists N \in \mathbb{N}$: $\bar{m}_p^N = (\alpha)$, en O_K.

Así $\exists N \in \mathbb{N}$: $\bar{m}_{p_i}^N = (\pi_i)$ en O_K. Sea $\beta = (\prod_{i=1}^{r} \pi_i)^M$, $M >> 1$.

β tiene la prop. de que: $|\beta| = 1$, $p \neq p_1, \dots, p_r$

Así tenemos α: $|\beta\alpha_i - \beta\alpha| \leq |\beta|\varepsilon_{p_i}$ $\Rightarrow$ $|\alpha - \alpha_i|_{p_i} \leq \varepsilon_i$

$|\beta\alpha|_p \leq 1$ $\qquad$ $|\alpha|_p \leq 1$.

obs: Sea $p \neq q$ $\Rightarrow$ $\bar{m}_p + \bar{m}_q = O_K$

Lema: $(\bar{m}_p)_q = \begin{cases} m_p, & q = p \\ O_q, & q \neq p \end{cases}$ (Supongámoslo demostrado)

Demostración: $(\bar{m}_p + \bar{m}_q)_{p'} = O_{p'}$, si $p' \neq p, q$

$(\bar{m}_p + \bar{m}_q)_p = O_p = (\bar{m}_p + \bar{m}_q)_q$.

$\therefore$ $\bar{m}_p + \bar{m}_q = O_K$ por teo. de reticulados.

Dem. del Lema: $\bar{m}_p = \{x \in K : |x|_p < 1, |x|_q \leq 1, q \neq p\}$. Considere

$\hat{m}_p$ = reticulado en K tal que

$(\hat{m}_p)_q = \begin{cases} m_p, & q = p \\ O_q & q \neq p \end{cases}$ Es O_K-reticulado.

Scanned with CamScanner

ed: $\hat{m}_p$ es un ideal de O_K

Si $x \in \hat{m}_p \Rightarrow x \in (\hat{m}_p)_p, \forall p$ $\quad \forall x \in m_p, x \in O_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p} \neq p$

$\therefore |x|_p \leq 1, |x| \leq 1$ $\quad \therefore x \in \overline{m}_p$

$\therefore \hat{m}_p \subseteq \overline{m}_p \subseteq O_K$

① $\mathfrak{p} \neq p$ Se tiene que $O_{\mathfrak{p}} = (\hat{m}_p)_{\mathfrak{p}} \subseteq (\overline{m}_p)_{\mathfrak{p}} \subseteq O_{\mathfrak{p}}$. Luego
$(\overline{m}_p)_{\mathfrak{p}} = O_{\mathfrak{p}}, \forall \mathfrak{p} \neq p$

② Si $m_p = (\hat{m}_p)_p \subseteq (\overline{m}_p)_p \subseteq O_p \Rightarrow (\overline{m}_p)_p = O_p \Rightarrow \overline{m}_p = O_K$ (*) pues
$1 \notin \overline{m}_p \Rightarrow (\overline{m}_p)_p = (\hat{m}_p)_p$

$\therefore (\overline{m}_p)_p = (\hat{m}_p)_p$

$\therefore \overline{m}_p = \hat{m}_p$

$\boxtimes$

Del Lema:

Proposición: Definimos $I_K = \{$ideales fraccionales en $K\}$.

$$\Rightarrow I_K = \bigoplus_{p \in \mathrm{Spec}(K)} \overline{m}_p^{\mathbb{Z}}$$

Demostración: J: ideal fraccional ssi

① $J_p \subseteq K_p$, $\forall p$ (ideal fraccional) $\Rightarrow J_p = m_p^{r_p}$, $r_p \in \mathbb{Z}$

② $J_p = m_p$, $\forall p$. $\Rightarrow r_p = 0, \forall p$.

Luego $J = \prod_p \overline{m}_p^{r_p}$.

Definimos: $\varphi: K \to I_K$, $\alpha \mapsto (\alpha)$ y $P_K = \varphi(K) \subseteq I_K$.

El grupo de Clase: $I_K / P_K = C_K$

Afirmación: El grupo de clase es finito.

Así: $[m_p]^{|C_K|} = [(1)]$ ed: $m_p^{|C_K|} = (\alpha)$, cierto $\alpha \in K$.

Proposición: Sea $J \in I_K$ entonces $J = O_K\alpha + O_K\beta$ con $\alpha, \beta \in K$.
(Sobre un anillo de enteros)

Demostración: Sea $\alpha \in J$. Sean $p = p_1, \dots, p_r$ los lugares con $J_p \neq \alpha O_p$. (Por ① se tiene). Luego $J_{p_i} = \alpha\beta_i O_{p_i}$. Sea β tal que $\beta \sim \beta_i$, $|\beta|_p \leq 1$ $\forall p \neq p_1, \dots, p_r$. **Afirmación:** $J = \alpha O_K + \alpha\beta O_K$.

Demostración: ① $p = p_i$:

$$\alpha O_{p_i} + \alpha\beta O_{p_i} = (\alpha O_K + \alpha\beta O_K)_{p_i}$$
$$\alpha O_{p_i} + \alpha\beta_i O_{p_i} =$$
$$J_{p_i} =$$

② $p \neq p_i$: Entonces $\alpha O_p + \alpha\beta O_p = \alpha O_p + \alpha O_p = J_p$ $\boxed{\text{L}}$

Proposición: Sean $A_1, \dots, A_n$ con $A_i \in Sl_2(K_{p_i})$ entonces existe $A \in Sl_2(K)$ tal que:

① $|A - A_i|_{p_i} \leq \varepsilon$, $i = 1, \dots, n$

② $|A|_p \leq 1$, $p \neq p_1, \dots, p_n$, donde $|A|_p = \max\{|a_{ij}|_p : (a_{ij}) = A\}$.

Observación: L un reticulado, $L_p \cong O_p^2$, $\forall p$. Sea $\Lambda = O_K^2$ entonces
$L_p = A_p \Lambda_p$ $(A_p = id, \forall p)$

Sea $B_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det A_p \end{pmatrix}$. Así $L_p = (A_p B_p^{-1}) B_p \Lambda_p$. Como $A_p B_p^{-1}$ se aproxima por C global, tenemos que

$(C^{-1}L)_p = B_p\Lambda_p, \forall p$

Si $B_p\Lambda_p = \Lambda_p \Rightarrow C^{-1}L = \Lambda$. Observe que $\Lambda_p \cong \mathcal{O}_p \times \det A_p \mathcal{O}_p \cong \mathcal{O}_p \times J_p$ donde: $J_p = \det A_p \mathcal{O}_p$. Así $\exists$ ideal fraccional tal que:

$J_p = \mathcal{O}_p, \forall p$

$\Lambda \cong \mathcal{O}_K \times J$. Luego: $C^{-1}L \cong \mathcal{O}_K \times J \Rightarrow L \cong \mathcal{O}_K \times J$. (Libre salvo en la última coordenada) ∴ Se necesitan $n+1$ gen. para determinar un reticulado en K^2.

Ejemplo: $J^{-1} \times J$ cumple con $J_p = a_p\mathcal{O}_p$, $J_p^{-1} = a_p^{-1}\mathcal{O}_p$, $\forall p \in \Pi(f)$.

$\Rightarrow J^{-1} \times J = \begin{pmatrix} a_p & 0 \\ 0 & a_p^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K$, $a_p = 1$ casi todo p.

Así $\exists T$: $T \sim \begin{pmatrix} a_p & 0 \\ 0 & a_p^{-1} \end{pmatrix} \in Sl_2(K_p)$. Por ello $J^{-1} \times J = T(\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K)$

$\Rightarrow J^{-1} \times J \cong \mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K$ como $\mathcal{O}_K$-módulos.

Aproximación fuerte para Sl_2:

K cuerpo global y $\varepsilon > 0$.

Sean $p_1, \ldots, p_n \in \Pi_f(K)$. Sea $K_{p_1}, \ldots, K_{p_n}$ sus completados. Sea $\alpha_i \in K_{p_i}$

pd: $\exists \alpha \in Sl_2(K)$ tal que

① $|\alpha - \alpha_i| < \varepsilon$, $\forall i = 1, \ldots, n$

② $\alpha \in Sl_2(\mathcal{O}_f)$, $\forall f \in \Pi_f(K)$, $f \neq p_1, \ldots, p_n$

(Basta que α fije $\mathcal{O}_f$, pues $\det(\alpha) = 1$).

Demostración: Tenemos

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \prod_{i=1}^{n} Sl_2(K_{p_i}) = S.$$

Basta probarlo para un conjunto generador de S. (Pues la mult. es continua)

Podemos suponer $\alpha_i = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $i \neq 1$ (reordenando) y

$\alpha_1 \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda \in K_{p_1}, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}, \lambda \in K_{p_1}^{*} \text{ o } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Aproximaremos

los generadores.

① Si $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sea $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde $|t-\lambda|_{p_1} < \varepsilon$ y $|t|_{p_i} < \varepsilon$, $i = 2, \dots, n$, $|t|_{\mathfrak{p}} \leq 1$, $\mathfrak{p} \neq p_1, \dots, p_n$.

② Si $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sea p tal que $|p|_{p_1} \leq \varepsilon$ y $|p-1|_{p_i} \leq \varepsilon$, $\forall i = 2, \dots, n$. y $p \in O_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p} \neq p_1, \dots, p_n$ (Aproximación fuerte en K). Sea $q \in K$: $|q-1|_{p_1} \leq \varepsilon$, $|q|_{p_i} \leq \varepsilon$, $\forall i = 2, \dots, n$ y además $|q|_{\mathfrak{q}} = 1$ $\forall \mathfrak{p}$ tal que $|p|_{\mathfrak{q}} < 1$. Tomamos $\varepsilon < 1$.

obs: $(p) + (q) = 1$. (Pues $\varepsilon < 1$) (siempre hay algún ideal de v.ab. uno)
implica: $(p^2) + (q^2) = 1$. [Si $I + J = (1)$, $I + J' = (1) \Rightarrow a + b = 1$, $a' + b' = 1$
$\Rightarrow 1 = a'a + a'b + b'a + bb' \in I + JJ'$ $\therefore I + JJ' = (1)$]
Por lo tanto $p^2 t + q^2 r = 1$ tiene soluciones en O_K.
Sea $\alpha = \begin{pmatrix} p & -qr \\ q & pt \end{pmatrix} \in Sl_2(K)$.
Sea $s \in \mathbb{N}$: $|\pi_{p_1}^{s}|_{p_1} \leq \varepsilon < |\pi_{p_1}^{s-1}|_{p_1}$. Así las condiciones anteriores se reescriben como:

$$p \equiv 0 \quad (\pi_{p_1}^{s})$$
$$q \equiv 1 \quad (\pi_{p_1}^{s})$$

Luego $\alpha \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pmod{\pi_{p_1}^{s}}$. (pues el det no cambia al reducir)
$\therefore$ $|\alpha - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}| \leq \varepsilon$
Sea $i \in \{2, \dots, n\}$ fijo entonces:

$$\alpha \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\text{mod } \pi_{p_i}^{l}) \quad (\text{por determinante})$$

donde $|\pi_{p_i}^{l}| \leq \varepsilon < |\pi_{p_i}^{l-1}|$. Luego

$$\left|\alpha - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right|_{p_i} \leq \varepsilon.$$

__obs__: $p, q \in O_K$. Por ello $\alpha \in Sl_2(O_K)$. En particular $\alpha \in Sl_2(O_p)$, $p \neq p_1, \dots, p_n$.

__Caso III__: Si $\alpha_1 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$, $x \in O_{p_1}^*$.

Necesitamos $p \in O_K$ tal que $|p - x|_{p_1} \leq \varepsilon$, $|p-1|_{p_i} \leq \varepsilon$, $i = 2, \dots, n$.
$\exists q \in O_K$ tal que $|q|_{p_i} \leq \varepsilon$, $\forall i = 1, \dots, n$ rel. primo con p.
Entonces $(p)+(q) = (1) \Rightarrow (p)^2 + (q)^2 = (1)$. Por ello tenemos

$$p^2 t + q^2 r = 1, \quad t, r \in O_K$$

Sea $\alpha = \begin{pmatrix} p & -qr \\ q & -pt \end{pmatrix} \in Sl_2(O_K)$.

Si $s \in \mathbb{N}$: $|\pi_{p_1}^{s}|_{p_1} \leq \varepsilon < |\pi_{p_1}^{s-1}|_{p_1}$. Así

$$p \equiv x \ (\pi_{p_1}^{s})$$
$$q \equiv 0 \ (\pi_{p_1}^{s})$$

Así $\alpha \equiv \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} (\text{mod } \pi_{p_1}^{s}) \Rightarrow \left|\alpha - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}\right|_{p_1} \leq \varepsilon$.
Del mismo modo: $\left|\alpha - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right|_{p_i} \leq \varepsilon$, $\forall i = 2, \dots, n$.

__Caso IV__: Si $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi^{-1} \end{pmatrix}$, $\pi = \pi_{p_1}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi^{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi^{-1} - \pi^{-1} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 1 - \pi^{-1} & \pi^{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Scanned with CamScanner

$$\begin{pmatrix} & 0 \\ \pi^{-1}-\pi^{-2} & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \pi & \pi \\ 1-\pi^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \pi^{-1} & -\pi \\ \pi^{-1}-\pi^{-2} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-\pi^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Por lo tanto $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-\pi^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^{-1} & -\pi \\ \pi^{-1}-\pi^{-2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y $\begin{pmatrix} \pi^{-1} & -\pi \\ \pi^{-1}-\pi^{-2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi^{-1}-\pi^{-2} & 1 \end{pmatrix}$. Es así como obtenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-\pi^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi^{-1}-\pi^{-2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi^{-1}-\pi^{-2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-\pi^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi^{-1} \end{pmatrix}$$

Se remite a los casos anteriores.

<u>Corolario</u>: Si $\epsilon > 0$ y $p_1, \dots, p_n \in \Pi_f(K)$ y $\alpha_i \in Sl_n(K_{p_i})$, $\forall i = 1, \dots, n$ existe $\alpha \in Sl_n(K)$ tal que

1. $|\alpha - \alpha_i|_{p_i} \leq \epsilon$, $\forall i = 1, \dots, n$
2. $\alpha \in Sl_n(\mathcal{O}_p)$, $p \neq p_1, \dots, p_n$.

<u>Demostración</u>: $Sl_n(K_p)$ está gen. por copias de $Sl_2(K_p)$.

<u>Hecho</u>: Si G es un grupo algebraico "semi-simple", G tiene un recubrimiento universal

$$0 \to F \to \tilde{G}_K \to G_K \to 0$$

finito (grupo fundamental)

recubrimiento universal es simplemente conexo

G tiene aproximación fuerte ssi ① $G = \tilde{G}$ simplemente conexo.
② $\prod_{p\in\infty} G_{K_p}$ no es compacto.

Ejemplo: $G = Sl_1(\mathcal{O}) = \{ p \in \mathcal{O} : N(p) = 1 \}$, $\mathcal{O}$ alg. cuaterniones y $K = \mathbb{Q}$, entonces:

$$G_{\infty} = \begin{cases} Sl_2(\mathbb{R}), & si \quad \mathcal{O}_{\infty} = M_2(\mathbb{R}) \\ Sl_2(\mathbb{H}), & si \quad \mathcal{O}_{\infty} = \mathbb{H} \end{cases}$$

Esfera S^3, No se puede aproximar fuertemente si pasa esto.

Supongamos que fuese cierto:
Sea $\varepsilon > 0$, $\forall p_1, \ldots, p_n \in \Pi f(K)$, $\alpha_i \in K_{p_i}^*$ $\exists \alpha \in K^*$ tal que
① $|\alpha - \alpha_i| < \varepsilon$, $\forall i = 1, \ldots, n$.
② $\alpha \in \mathcal{O}_p^*$, $\forall p \neq p_1, \ldots, p_n$.

Definimos I por $I_{p_i} = (\alpha_i)$, $I_p = \mathcal{O}_p$, $p \neq p_1, \ldots, p_n$ (reticulado global). Así $I = (\alpha)$. Escogiendo α_i todo ideal se puede obtener así. Por ello todo ideal es principal.
(*) [por ejemplo si $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$].

Ejemplo: Aún así si I fuese principal, aún así no se puede aproximar. Sea $K = \mathbb{Q}$, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}$.
Sea $\alpha_5 = 2$, $\varepsilon < 1$, $p_1 = 5$.

Así $|\alpha-2|_5 < 1$ y $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$, $p \neq 5$. Luego α unidad localmente
$\therefore \alpha \in \mathbb{Z}^*$
$\therefore |\alpha-2|_5 \not< 1$.

· Ejemplo: Tomando determinante, no puede aproximar fuertemente en $Gl_2(K)$. Tomando $Gl_2(O_p) = \{A \in M_2(O_p) : \det A \in O_p^*\}$.

Sea $\Lambda \subseteq K^n$ un O_K-reticulado, le asociamos:

$$\Lambda \rightsquigarrow (\Lambda_p)_{p \in \Pi f(K)}.$$

Sea $\Lambda = O_K^n$. $\Lambda_p = T_p \Lambda_{0p}$, algún $T_p \in Gl_n(K_p)$. Pero $T_p = T_p' S_p$ donde:

$$S_p = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det T_p \end{pmatrix}$$

Luego $\Lambda_{0p}' = S_p \Lambda_{0p}$. Se puede demostrar que

$$\{\Lambda_{0p}'\} \xrightarrow[\text{se pega}]{} \Lambda_0' \quad (X)$$

Esto pues $\Lambda_p = \Lambda_{0p}$ casi todo p (pues dos ret. son iguales c.t.p)
$\Rightarrow \det T_p \in O_p^*$ $\quad \therefore S_p \in Gl_n(O_p) = Stab_{Gl_n(K_p)}(\Lambda_{0p})$
$\therefore (X)$ es coherente.
De hecho: $\Lambda_0' = O_K^{n-1} \times I$, $I_p = (\det T_p)$. $T_p' \in Sl_n(K_p)$
Se aproxima por $T \in Sl_n(K)$:

$$T \Lambda_{0p}' = T_p \Lambda_{0p}' = \Lambda_p \quad \left(\begin{array}{l}\text{en los lugares en que} \\ T_p \notin Gl_n(O_p) \text{ que} \\ \text{son finitos}\end{array}\right)$$

$\therefore T \Lambda_0' = \Lambda$
Como módulo $\Lambda_0' \cong \Lambda$.

ADELES:

$\mathbb{A} \subseteq \prod_{p\in\Pi(K)} K_p$, $a \in \mathbb{A} \Rightarrow a = (a_p)_{p\in\Pi(K)}$, donde $a \in \mathbb{A} \Leftrightarrow a_p \in \mathcal{O}_p$ para casi todo $p \in \Pi(K)$.

$\mathbb{A}_S = \mathcal{O}_{\mathbb{A},S} \subseteq \mathbb{A}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{A},S} = \{a \in \mathbb{A} : a_p \in \mathcal{O}_p, \forall p \in S\}$

Se define:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A},S} = \prod_{p\notin S} K_p \times \prod_{p\in S} \mathcal{O}_p$$

$\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ s tiene la top. producto. Definimos $\mathbb{A} = \bigcup_{\substack{S \supseteq \infty \\ S\text{ fin}}} \mathcal{O}_{\mathbb{A},S}$ — es cubrimiento para unos pocos.

La top. adélica en $\mathbb{A}$ es la única top. tal que:

caracterización de la topología adélica

① $\varphi_x : \mathcal{O}_{\mathbb{A},S} \to \mathbb{A}$, $\varphi_x(a) = x + a$, $a \in \mathcal{O}_{\mathbb{A},S}$, $x \in \mathbb{A}$ es una incrustación.

depende solo de uno.

② $\varphi_x(\mathcal{O}_{\mathbb{A},S}) = x + \mathcal{O}_{\mathbb{A},S} \subseteq \mathbb{A}$, $\forall x \in \mathbb{A}$

Si $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{A}$, $a_n \to a$ si:

① $\forall p : a_{n,p} \to a_p$ (convergencia puntual); ② $\exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow a - a_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{A},S}$

$a_n(p) = a_{n,p}$ no va. ??? ¿cual S? $a - a_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}}^c$

__Observación__: Si $S \subseteq S'$ tenemos que:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A},S} = \prod_{p\notin S'} K_p \times \prod_{\substack{p\notin S \\ p\in S'}} K_p \times \prod_{p\in S} \mathcal{O}_p$$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A},S'} = \prod_{p\notin S'} K_p \times \prod_{\substack{p\notin S \\ p\in S'}} \mathcal{O}_p \times \prod_{p\in S} \mathcal{O}_p.$$

__Obs__: $\mathbb{A}$ es localmente compacto.

Basta ver, por ①, que $\mathcal{O}_{\mathbb{A},S}$ es loc. compacto y lo es pues en inf. coord. es compacto y en finitas es loc. compacto.

familia compacta $\Rightarrow$ producto compacto.

$$\mathbb{A} = \bigcup_{\substack{T\subseteq\Pi(K) \\ |T|<\infty}} \left(\prod_{p\in I-T} \mathcal{O}_p \times \prod_{p\in T} K_p\right)$$

Topología de $\mathbb{A}$ coinducida familia

$I = \Pi(K) = \{\text{lugares de } K\}$

$i_T : \prod_{p\in I-T} \mathcal{O}_p \times \prod_{T} K_p \hookrightarrow \mathbb{A}$

Para $\mathbb{A}^*$ se ocupa otra topología: top inducida por $\phi: \mathbb{A}^* \to \mathbb{A}\times\mathbb{A}$, $x \mapsto (x, x^{-1})$

$$\mathbb{A}^* = \{(a_p)_p \mid a_p \in \mathcal{O}_p^* \ \forall p\}$$

Consideremos $a \in \mathbb{A}^*$, e.d.: $a_p \neq 0$, $\forall p$ y $a_p, a_p^{-1} \in \mathcal{O}_p$ casi todo p. Luego $a_p \neq 0$, $\forall p$ y $a_p \in \mathcal{O}_p^*$ para casi todo p.

Por ello $\mathbb{A}^*$ son un grupo topológico, con la topología:
$a_n \to a$ en $\mathbb{A}^*$ significa $a_n \to a$ y $a_n^{-1} \to a^{-1}$ en $\mathbb{A}$.

Ejemplo: $K = \mathbb{Q}$ entonces $a \in \mathbb{A}$: $a = (a_\infty, a_2, a_3, \dots)$

Sea $a_1 = (1, 2, 1, \dots)$

$a_2 = (1, 1, 3, 1, \dots)$

$a_p = (1, \dots, p, \dots)$

Entonces $a_n \to (1, \dots, 1, \dots) = \mathbb{1}$. Pero si a_n^{-1} conv $a_n^{-1} \to \mathbb{1}$

$a_1^{-1} = (1, 1/2, 1, \dots)$

$a_2^{-1} = (1, 1, 1/3, \dots)$

Si $S \subseteq \Pi(\mathbb{Q})$ con S^c finito, no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:
$$\mathbb{1} - a_n^{-1} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A},S}$$

Por ello $a_n^{-1} \not\to \mathbb{1}$.

Definimos $J_K := \mathbb{A}^*$ y $J_K^S = \{a \in J_K : a \in \mathcal{O}_p^* \ \forall p \in S\} = \mathcal{O}_{K,S}^*$

1. $J_K^S \subseteq J_K$ es abierto
2. $\varphi_x : J_K^S \to xJ_K^S \subset J_K$ es una incrustación, $\forall x \in J_K$.
$a \mapsto ax$

Ejercicio: Escribir los detalles.

$\mathbb{A}$ anillo adélico.
$\mathbb{A}^* = \mathbb{J}_K$

$$\varphi : \mathbb{J}_K \to \mathbb{I}_K$$
$$a \mapsto (a)$$

$\mathbb{J}_K$ se denomina grupo de ideales.

Definimos $(a) = I$ ideal como $I_\mathfrak{p} = (a_\mathfrak{p}) \in K_\mathfrak{p}$, bien definido
$I_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_\mathfrak{p}$ si $a_\mathfrak{p} \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}^*$ para casi todo $\mathfrak{p}$.

De la misma forma $(a) = I$ es un S-ideal generado por a, $I_\mathfrak{p} = (a_\mathfrak{p})$, $\forall \mathfrak{p} \in S$.
Recordemos que $\mathcal{O}_{K,S} := \{a \in K : |a|_\mathfrak{p} \leq 1, \forall \mathfrak{p} \in S\}$.

Podemos incrustar diagonalmente: $K \hookrightarrow \mathbb{A}$, $a \mapsto (a)$ y $K^* \hookrightarrow \mathbb{J}_K = \mathbb{A}^*$
$|a|_\mathfrak{p} \leq 1 \ \forall \mathfrak{p}$

preguntar porque no se entiende nada

Observe que si $a \in K^*$ entonces (a) tiene el significado usual.
Definimos: $\varphi : \mathbb{J}_K \to \mathbb{I}_K$ = ideales fraccionales de K.
Es un homo. de grupos pues $(a)(b) = (ab)$ ya que localmente lo es.
Definimos $P_K := \{(a) : a \in K^*\}$ entonces $P_K = \varphi(K^*)$
Luego:
grupo de clase de K
$$C_K := \mathbb{I}_K / P_K = \varphi(\mathbb{J}_K) / \varphi(K^*) \cong \mathbb{J}_K / K^* \ker\varphi$$

donde: $a \in \ker\varphi \iff a_\mathfrak{p} \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}^*, \forall \mathfrak{p} \in S$
$\iff a \in \mathbb{J}_K^S$

Luego: $C_K \cong \mathbb{J}_K / K^* \mathbb{J}_K^S$. $\leftarrow$ respecto de los S-ideales.

Ejercicio: $\exists S$ con S^c finito tal que $C_K \cong \mathbb{J}_K / K^* \mathbb{J}_K^S$ sea fcf.

Definimos $M_n(\mathbb{A}) := M_n(K) \otimes_K \mathbb{A}$. Entonces

$$M_n(\mathbb{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{A} \right\} \cong \text{tupla de matrices.}$$

Podemos hacer actuar $\mathbb{M}_n(\mathbb{A})$ en $\mathbb{A}^n := \mathbb{A} \otimes_k k^n$.
(Pues $\mathbb{A}$ es una k-álgebra).
Como espacio k-vectorial $\mathbb{M}_n(\mathbb{A}) \cong \mathbb{A}^{n^2}$ tiene la top producto.
En esta topología:

se parece a la condición de convergencia en $\mathbb{A}$

$A_n \to A$ si $A_{np} \to A_p$ para todo p y $\exists N \in \mathbb{N}$ y $S \subseteq \Pi(k)$, S^c finito tal que $A_{np} \in \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_p)$, $\forall p \in S$ (podemos suponer $A_p \in \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_p)$ haciendo S pequeño).

¿¿ $A_p \in \mathbb{M}_n(k_p)$??

Definimos $\mathbb{M}_n(\mathbb{A})^* = Gl_n(\mathbb{A})$ donde:

$$A_n \to A \text{ en } Gl_n(\mathbb{A}) \text{ ss. } \begin{cases} A_n^{-1} \to A^{-1} \text{ en } \mathbb{M}_n(\mathbb{A}) \\ A_n \to A \text{ en } \mathbb{M}_n(\mathbb{A}) \end{cases}$$

$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{A})$
$A = (A_p)_{p \in \Pi}$

__Observación:__ $A \in Gl_n(\mathbb{A})$ ssi $(A_p)_p \in Gl_n(k_p)$, $\forall p$ y $A_p \in Gl_n(\mathcal{O}_p)$, para casi todo p.

$\det(A) \in \mathbb{A}$

$$Sl_n(\mathbb{A}) = \{ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{A}) : \det A = 1 \} \subseteq Gl_n(\mathbb{A})$$

Observe que:

$$A^{-1} = \mathrm{Adj}(A) \leftarrow \text{polinomios en cada coord.}$$

$\therefore A_n \to A \Rightarrow A_n^{-1} \to A^{-1}$

$\therefore Sl_n(\mathbb{A}) \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{A})$ cerrado

$Gl_n(\mathbb{A})$ no cerrado.

__Observación:__ $A \in Gl_n(\mathbb{A})$ cumple con $A \in Sl_n(\mathbb{A})$ ssi $\forall p$: $A_p \in Sl_n(k_p)$.

tomar como ejemplo $n = 2$.

Scanned with CamScanner

Tomamos $\Lambda_0 = \mathcal{O}_K^n \subset K^n$ un reticulado. Para $T \in Gl_n(\mathbb{A})$

$T = (T_p)_p$, define un reticulado por:

$$(T\Lambda_0)_p = T_p \Lambda_{0p} \ , \forall p \in S$$

Como $\forall p$: $T \in Gl_n(\mathcal{O}_p)$ $(T\Lambda_0)_p = \Lambda_{0p}$, casi todo p.

y cada reticulado en K^n es de este tipo, pues K_p es un DIP y $\forall \tilde{\Lambda}$ reticulado $\tilde{\Lambda}_p = \Lambda_p$ casi todo p, en los otros lugares tomamos T_p: $T_p \Lambda_{0p} = \tilde{\Lambda}_{0p}$.

Sea $G \subseteq Gl_n(K)$ un grupo algebraico ed: Un grupo definido por ec. algebraicas

Ejemplo: $O(K) = \{T \in Gl_n(K) : TT^t = I\}$
$Sl_n(K) = \{T \in Gl_n(K) : \det A = 1\}$

$G_{\mathbb{A}} \subseteq Gl_n(\mathbb{A})$ es el grupo definido por las mismas ecuaciones de $G_K = G$

$$G = G_K \hookrightarrow G_{\mathbb{A}} = G_K \otimes \mathbb{A}$$

$G_{\mathbb{A}}$ actúa en el conj. de reticulados $\Phi = \left\{ \begin{array}{c} \text{reticulados en} \\ K \end{array} \right\}$, pues $Gl_n(\mathbb{A})$ lo hace.

$$T \cdot \Lambda = L$$
$$T_p \Lambda_p = (T\Lambda)_p = L_p, \ \forall p \in S$$

Como G actúa en el conj. de reticulados:

$$G \cdot \Lambda = \mathcal{O}_G(\Lambda)$$

Se llama G-clase de Λ y

$$G_{\mathbb{A}} \cdot \Lambda = \mathcal{O}_G(\Lambda)$$

es el G-género de Λ.

Para el G-género:

$$G\text{-género de } \Lambda \text{ órbita} \longleftrightarrow G_{\mathbb{A}} / G_{\mathbb{A}}^{\Lambda}$$

$G_{\mathbb{A}}^{\Lambda} = Stab_{G_{\mathbb{A}}}(\Lambda)$. Luego el conj de clases en un género

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Clases en} \\ \text{un género} \end{array} \right\} \longleftrightarrow G_F \backslash G_{\mathbb{A}} / G_{\mathbb{A}}^{\Lambda}$$

<u>Obs</u>: Nide equiv. local módulo equiv. global

Para seguir la notación del libro $F^* = P_F \subset J_F$.
$a = (a_p)_p \in J_F$ es unidad de p si $a_p \in \mathcal{O}_p^*$.

J_F^S = Conjunto de ideles que son unidades en S
$= \{ a \in J_F : a_p \in \mathcal{O}_p^* \ \forall p \in S \}$

Además $P_F^S = J_F^S \cap P_F$ grupo de S-unidades

<u>Ejemplo</u>: ① Si $S = \{\infty\}^c$, $F = \mathbb{Q}$
$P_F^S = \{\pm 1\}$

② Si $S = \{\infty\}^c$, $F = \mathbb{Q}[i]$
$P_F^S = \{\pm 1, \pm i\}$

③ $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $S = \{\infty_1, \infty_2\}^c$
$P_F^S = \{ \pm h^n : n \in \mathbb{Z} \}$, $h = 1 + \sqrt{2}$

④ $F = \mathbb{Q}$ $S = \{\infty, 2, 3\}^c$
$P_F^S = \{ \pm 2^n 3^m : n, m \in \mathbb{Z} \}$

Por otro lado $P_F^S = \{\alpha \in F : |\alpha|_p = 1, \forall p \in S\}$. Sea $\Omega = \Pi(F)$ todos los lugares.

$$P_F^{\Omega} = \{\alpha \in F \mid |\alpha|_p = 1, \forall \alpha \in \Omega\}$$

Hecho: $P_F^{\Omega} = \{\text{raíces de la unidad}\} \cap F$.

Uno tiene un homomorfismo:

$$\varphi : P_F^S \longrightarrow (\mathbb{R}^+)^{|S|}$$
$$\alpha \longmapsto (|\alpha|_{p_1}, \dots, |\alpha|_{p_s}) \quad , S^c = \{p_1, \dots, p_s\}$$

Dicho homo. cumple con $\ker \varphi = P_F^{\Omega} = \{\text{raíces de la unidad en } F\}$.

Si tomamos L/F extensión, si $\mathfrak{P}$ y es un lugar sobre p en L, se tiene que:

$$|\alpha|_{\mathfrak{P}} = |N_{L_{\mathfrak{P}}/K_p}(\alpha)|_p$$

Pero además: $\prod_{\mathfrak{P}|p} N_{L_{\mathfrak{P}}/K_p}(\alpha_{\mathfrak{P}}) = N_{L/F}(\alpha)$, donde $\alpha = (\alpha_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P}|p}$

$\in \prod L_{\mathfrak{P}} = L \otimes_F F_p$.

En $\mathbb{Q}$: Sea $\alpha \in \mathbb{Q}$ y tomemos:

$$\prod_{p \in \Omega} |\alpha|_p = 1.$$

Para $\alpha \in F$ cualquiera:

$$\prod_{p \in \Omega_F} |\alpha|_p = \prod_{p \in \Omega_{\mathbb{Q}}} |N_{\mathbb{Q}/F}(\alpha)|_p = 1 \text{, donde}$$

$N : F \to \mathbb{Q}$ se extiende $N : F \otimes \mathbb{Q}_p \to \prod_{\mathfrak{P}|p} F_{\mathfrak{P}}, (\alpha_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P}} \mapsto \prod_{\mathfrak{P}|p} N_{F_{\mathfrak{P}}/\mathbb{Q}_p}(\alpha_{\mathfrak{P}})$

+56968355334

Por lo tanto
$$\mathrm{Im}\,\varphi \subseteq \{(x_1,\dots,x_s) : x_1\cdots x_s = 1\}$$

Luego $\log\varphi : P_F^S \to \mathbb{R}^S$ cumple con
$$\mathrm{Im}(\log\varphi) \subseteq H \subseteq \mathbb{R}^S$$
$$H = \{(x_1,\dots,y_s) : \sum y_i = 0\}$$

Hecho: $\mathrm{Im}(\log\varphi)$ es un retículo de rango $s-1$.

Hecho: $P_F \hookrightarrow J_F$ discreto pero su imagen en $\prod_{p\in\Omega} K_p$ es densa.

T = raíces de la unidad en F^*, $T \cong C_m$ cíclico.
(F cuerpo de números)

Luego
$$P_F{}^S \cong C_m \times \mathbb{Z}^{S-1}$$

Pues
$$1 \to C_m \to P_F{}^S \rightleftarrows \mathbb{Z}^{S-1} \to 1, \text{ por ello } C_m \times \mathbb{Z}^{S-1} \cong P_F{}^S.$$

Corolario: $(P_F{}^S : (P_F{}^S)^2) = 2^S$

Dem: $(P_F{}^S)^2 \cong \frac{2\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \times (2\mathbb{Z})^{S-1} \Rightarrow P_F{}^S / P_F{}^{S^2} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^S.$

Definición: $J_F{}^{S,2} = \{ a \in J_F{}^S \mid a$ es cuadrado fuera de $S\}$

cd: $a_p \in F_p^{*2}$ si $p \notin S$.

Definición: $K_F{}^S = \{a \in J_F{}^S \mid a = 1$ fuera de $S\}$

Claramente $K_F{}^S \subseteq J_F{}^{S,2}$.

Tenemos:
$$\tilde{\pi} : J_F^S \longrightarrow \prod_{p\in\Omega-S} F_p^*$$
$$(a_p)_p \longmapsto (a_p)_p$$

donde $\ker\tilde{\pi} = K_F^S$ con $\tilde{\pi}$ sobreyectiva.

y $\tilde{\pi}(J_F^{S,2}) = \prod_{p\in\Omega-S} F_p^{*2}$

Luego:
$$J_F^S / J_F^{S,2} \cong \prod_{p\in\Omega-S} F_p^* / F_p^{*2}.$$

Pero:
$$|F_p^*/F_p^{*2}| = \begin{cases} 4, & \text{si } F_p \text{ no arquim, no diádico} \\ 2, & \text{si } \text{real} \\ 1, & \text{si } \text{Complejo} \\ 4\,(N_p)^{v_p(2)}, & \text{si } F_p \text{ es diádico} \end{cases}$$
N_p nº de elementos de $\mathbb{F}_p$

<u>Proposición</u>: $[J_F^S : J_F^{S,2}] = 4^S$

<u>Demostración</u>: ① F cuerpo de funciones con car $k \neq 2$, entonces los lugares son no diádicos y no arquim y $|\Omega - S| = n$.

② F cuerpo de números. Supongamos que hay r lugares reales, c lugares reales, n lugares no diádicos y d lugares diádicos.

Entonces:
$$(J_F^S : J_F^{S,2}) = 4^n 2^r \cdot 4^d \prod_{p\ \text{diád}} N(p)^{v(2)}$$

observe que $(Np)^{v_p(2)} = |2|_p^{-1} = (|\pi|_p^{-1})^{v_p(2)}$, pues $|\pi|_p = \frac{1}{N(p)}$.

Así:
$$\prod_{p\ \text{diád}} N(p)^{v(2)} = \prod_{p\ \text{no arquim}} |2|_p^{-1} \leftarrow \text{en los demás da } 1.$$

Luego
$$(J_F^S ; J_F^{S,2}) = 4^r 2^r 4^d \prod_{p\ \text{no arquim}} |2|_p^{-1}, \quad 1 = \prod_{p\ \text{todos}} |2|_p,$$
$$= 4^r 2^r 4^d \prod_{p\ \text{arquim}} |2|_p$$