Universidad de Chile
Topología Algebraica
Martes 14, 2019.

Caminos.

Un camino es una función $\alpha : [0,1] \to X$ continua. Se dice que α es un camino de x a y si además:

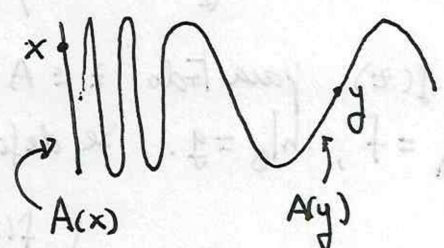
$$\alpha(0) = x \quad , \quad \alpha(1) = y .$$

Definición. $\Pi_{x,y}(X) = \{$ caminos de x a y en $X \}$.

Proposición. Si $A(x)$ es la componente camino-conexa, entonces

$$A(x) = A(y) \iff \Pi_{x,y} \neq \phi .$$

Ejemplo. Los siguientes e.t no son camino-conexos



$A(y)$ abierto
$A(x)$ cerrado (no abierto)

Observación. (i) L.A.C = Localmente arco-conexo.
(ii) arco = camino.

Observación. Si X es l.a.c, entonces

$\forall x \in X$, $\exists V$ abierto (vecindad) tal que $x \in V \subset A(x)$

V arco-conexo. Por lo tanto $A(x)$ es abierto.

Definición. Si $\alpha \in \Pi_{x,y}$, $\beta \in \Pi_{y,z}$, entonces $\alpha * \beta$ definido por

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1), & t \geq 1/2 \end{cases}$$

es un camino de x a z.

Proposición. Si $X = A \cup B$ unión de cerrados y $f: X \to Y$ satisface $f|_A$, $f|_B$ continuas, entonces f es continua.

Observación. $A, B \subseteq X$ cerrados, $X = A \cup B$.

$$f: A \to Y$$
$$g: B \to Y$$

$f(z) = g(z)$ para todo $z \in A \cap B$. Entonces existe $\exists! h: X \to Y$ continua con $h|_A = f$, $h|_B = g$. Se define h de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

Demostración de la Proposición.

$\tilde{F}$ un filtro en X, $\tilde{F} \to x$.

Si $\exists F \in \tilde{F}$ con $F \subseteq A$, $\forall G \in \tilde{F}$, $G \cap F \subseteq A$

Luego: " $G \cap F \in \tilde{F}$.

El filtro $\mathcal{F}$ puede escribirse de la forma

$$\mathcal{F} = \langle \mathcal{F}_A \rangle_X \quad (\text{filtro generado en } X)$$

donde $\mathcal{F}_A = \{ H \in \mathcal{F} \mid H \subseteq A \}$. En particular $\mathcal{F}_A \to x$ ($x \in A$ porque A cerrado).

f continua en A implica:

$$\begin{aligned} h(\mathcal{F}) &= \{ T \subseteq Y \mid h^{-1}(T) \in \mathcal{F} \} \\ &\supseteq \{ T \subseteq Y \mid f^{-1}(T) \in \mathcal{F}_A \} \\ &= f(\mathcal{F}_A) \to f(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto: $h(\mathcal{F}) \to f(x) = h(x)$

Lo mismo ocurre si $\exists F \in \mathcal{F}$ con $F \subseteq B$.

Si no, $\forall F \in \mathcal{F}$: $F \cap A^c \neq \phi$, $F \cap B^c \neq \phi$

$X = A \cup B \Rightarrow A^c \subseteq B$, $B^c \subseteq A$

Por lo tanto: $F \cap B \neq \phi$, $F \cap A \neq \phi$

Definimos: $\tilde{\mathcal{F}}_A = \{ F \cap A \mid F \in \mathcal{F} \}$, $\tilde{\mathcal{F}}_B = \{ F \cap B \mid F \in \mathcal{F} \}$

filtros en A y B respectivamente, con

$$\langle \tilde{\mathcal{F}}_A \rangle_X \supseteq \mathcal{F} \to x$$

$$\therefore \langle \tilde{\mathcal{F}}_A \rangle_X \to x$$

$$\therefore x \in A$$

y de hecho : $\tilde{\mathcal{F}}_A \to x$ en A

Como f es continua : $f(\tilde{\mathcal{F}}_A) \to f(x) = h(x)$,

de mismo modo, $x \in B$ y

$$g(\tilde{\mathcal{F}}_B) \to g(x) = h(x)$$

$\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists F \in f(\tilde{\mathcal{F}}_A)$ tal que $F \subseteq V$.

Existe $F' \in g(\tilde{\mathcal{F}}_B)$ con $F' \subseteq V$.

$$f^{-1}(F) \in \tilde{\mathcal{F}}_A$$
$$f^{-1}(F) = F_1 \cap A \ , \ F_1 \in \tilde{\mathcal{F}}$$
$$g^{1}(F') = F_2 \cap B \ , \ F_2 \in \tilde{\mathcal{F}}$$

$$\begin{aligned} h^{1}(F \cup F') = h^{-1}(F) \cup h^{-1}(F') \supseteq f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F') &= (F_1 \cap A) \cup (F_2 \cap B) \\ &\supseteq (F_3 \cap A) \cup (F_3 \cap B) \\ &= F_3 \cap (A \cup B) \end{aligned}$$

con $F_3 = F_1 \cap F_2 \in \tilde{\mathcal{F}}$.

Por lo tanto, $F \cup F' \in h(\tilde{\mathcal{F}})$

Definiendo $F'' = F \cup F' \subseteq V$

$$F'' \in h(\tilde{\mathcal{F}}) \text{ con } F'' \subseteq V$$

$\therefore h(\tilde{\mathcal{F}}) \to x$

$\square$

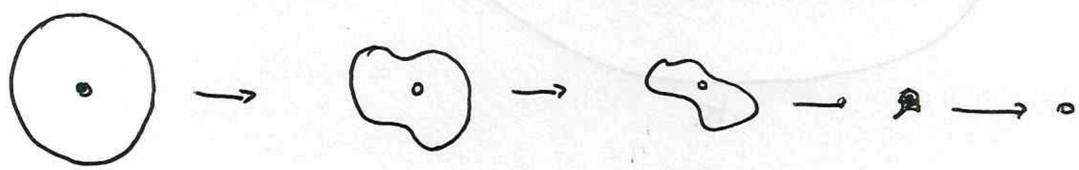
Definición. Dos funciones continuas $f,g : X \to Y$ se dicen homotópicas si existe una función continua $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que

$$H(x,0) = f(x) \quad , \quad H(x,1) = g(x) \qquad \forall x \in X .$$

En ese caso se dice que H es una homotopía entre f y g.

Observación. $\forall t \in [0,1]$: $X \to Y$, $x \mapsto H(x,t)$

Ejemplo. $\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$, $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C} - \{0\}$



¿Son o no son homotópicas?
Intuición : No

Conjetura (por ahora). No existe una homotopía entre la identidad y la función constante.

Proposición. La homotopía es una relación de equivalencia

Obs. $f \sim g$ quiere decir f homotópica a g.

Demostración. Por demostrar que $f \sim f$.

$$H : X \times [0,1] \to Y \quad , \quad H(x,t) = f(x)$$

$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[r, "\rho"', "\substack{\text{proy} \\ \text{(continua)}}"'] \arrow[rr, bend right, "\text{continua}"'] & X \arrow[r, "f"', "\text{(continua)}"'] & X \end{tikzcd} \qquad \rho(x,t) = x$$

Por demostrar que $f \sim g \Rightarrow g \sim f$

$$f \sim g \Rightarrow \exists H : X \times [0,1] \to Y$$

$$H(x,0) = f(x), \quad H(x,1) = g(x)$$

$\Rightarrow$ $K(x,t) := H(x, 1-t)$ continua tq $K(x,0) = H(x,1) = g(x)$

$K(x,1) = H(x,0) = f(x)$

$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "K"'] & X \times [0,1] \arrow[r, "H"'] & Y \end{tikzcd}$$

$$(x,t) \longmapsto (x, 1-t)$$

Por demostrar: $f \sim g$, $g \sim h \Rightarrow f \sim g$

$H_1 : X \times [0,1] \to Y$ $\qquad H_1(x,0) = f(x)$

$H_2 : X \times [0,1] \to Y$ $\qquad H_1(x,1) = H_2(x,0) = g(x)$

$\qquad H_2(x,1) = h(x)$

Definimos K de la siguiente manera:

$$K(x,t) = \begin{cases} H_1(x,t), & t \leq 1/2 \\ H_2(x, 2t-1), & t \geq 1/2 \end{cases}$$

$K(x,0) = H_1(x,0) = f(x)$

$K(x,1) = H_2(x,1) = h(x)$

K continua $\Rightarrow f \sim h$

$$\tilde{H}_1 : X \times [0, 1/2] \to Y$$
$$\tilde{H}_2 : X \times [1/2, 1] \to Y$$

$$\tilde{H}_1(x,t) = H_1(x, 2t)$$
$$\tilde{H}_2(x,t) = H_2(x, 2t-1)$$

$$A = X \times [0, 1/2] \overset{c}{\subset} X \times [0,1]$$
$$B = X \times [1/2, 1] \overset{c}{\subset} X \times [0,1]$$

Además: $\tilde{H}_1 : A \to Y$, $\tilde{H}_2 : B \to Y$ continuas

Para $z \in A \cap B$, $z = (x,t)$

$$t \leq 1/2 \quad (z \in A)$$
$$t \geq 1/2 \quad (z \in B)$$
$$t = 1/2 \quad z = (x, 1/2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{H}_1(x, 1/2) = g(x) \\ \tilde{H}_2(x, 1/2) = g(x) \end{array}\right\} \text{ bien definida}$$

Luego $K : X \times [0,1] \to Y$ función continua.

$$\therefore f \sim h$$

$\square$

Ejemplo. $X = \{p\}$; $f, g : X \to Y$

$$f \sim g \iff A_Y(f(p)) = A_Y(g(p))$$

Si $\exists\, \alpha \in \Pi_{f(p), g(p)}(Y)$, $\alpha : [0,1] \to Y$

$$\alpha(0) = f(p) \quad , \quad \alpha(1) = g(p)$$

$H(p,t) = \alpha(t)$ continua.

$$H(p,0) = \alpha(0) = f(p)$$
$$H(p,1) = \alpha(1) = g(p)$$

Por lo tanto: $f \sim g$.

Si $f \sim g$ y H es una homotopía de f a g,

$$\alpha(t) = H(p,t)$$

satisface $\alpha(0) = H(p,0) = f(p)$, $\alpha(1) = H(p,1) = g(p)$

Por lo tanto, $\alpha \in \Pi_{f(p),g(p)}(Y)$

Observación. Más generalmente, si $f,g : X \to Y$ son homotópicas, entonces para todo $x \in X$, $f(x)$ y $g(x)$ están en la misma componente arco-conexa.

$$\alpha : [0,1] \to Y \quad \text{por} \quad \alpha(t) = H(x,t)$$