si $\tau(M) = \tau(\tilde{M})$

Por demostrar: M y $\tilde{M}$ son conjugadas.

Demostración:

Sea A y $\tilde{A}$ las representaciones matriciales de M y $\tilde{M}$ respectivamente.

Luego como $\tau(M) = \tau(\tilde{M})$ se tiene que.

$$\frac{(tr(A))^2}{det(A)} = \frac{(tr(\tilde{A}))^2}{det(\tilde{A})}$$

Ahora veamos los polinomios característicos de A y $\tilde{A}$

$$p_A(x) = x^2 - tr(A)x + det(A)$$

$$p_{\tilde{A}}(x) = x^2 - tr(\tilde{A})x + det(\tilde{A})$$

Luego

$$x_A = \frac{tr(A) \pm \sqrt{(tr(A))^2 - 4det(A)}}{2}.$$

$$x_{\tilde{A}} = \frac{tr(\tilde{A}) \pm \sqrt{(tr(\tilde{A}))^2 - 4det(\tilde{A})}}{2}.$$

Supongamos que $\dfrac{(tr(A))^2}{det(A)} = \dfrac{(tr(\tilde{A}))^2}{det(\tilde{A})} + 4$

Entonces

$$x_A = \frac{tr(\tilde{A})}{2}\sqrt{\frac{det(A)}{det(\tilde{A})}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(tr(\tilde{A}))^2 \frac{det(A)}{det(\tilde{A})} - 4det(A)},$$

$$x_A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{det(A)}{det(\tilde{A})}}\left(tr(\tilde{A}) \pm \sqrt{(tr(\tilde{A}))^2 - 4det(\tilde{A})}\right)$$

Con esto $\tilde{A}$ es diagonalizable, por lo que existe P invertible tal que
$$\tilde{A} = P^{-1} D P$$

Luego
$$A = Q^{-1} \lambda D Q = Q^{-1} D Q$$

y
$$D = P \tilde{A} P^{-1} \Rightarrow A = Q^{-1} P \tilde{A} P^{-1} Q.$$

Por ende A y $\tilde{A}$ son conjugadas y así M y $\tilde{M}$ también lo son

Ahora, si
$$\frac{(tr(A))^2}{det(A)} = \frac{(tr(\tilde{A}))^2}{det(\tilde{A})} = 4$$

Entonces $p_A(x)$ y $p_{\tilde{A}}(x)$ tienen valor propio de multiplicidad dos.
Luego la matriz sería de la forma $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Pero en este caso no se cumple lo pedido pues.
$M(z) = z$ y $\tilde{M}(z) = z+1$ verifican $\tau(M) = \tau(\tilde{M}) = 4$
y no son conjugadas.

Observación: si $M = Id$, entonces es conjugada consigo misma.
pues $h \circ I \circ h^{-1} = I$, esto justifica que en lo anterior M y $\tilde{M}$ no sean conjugadas.

(2) Sea $M = \dfrac{az+b}{cz+d}$ una transformación de Moebius $(ad-bc \neq 0)$

Que M tenga un punto fijo $z \in \overline{\mathbb{C}}$ significa que $M(z)=z$, o sea,

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$

$$\Leftrightarrow \quad az+b = (cz+d)z = cz^2+dz$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = cz^2+dz-az-b$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = cz^2+(d-a)z-b \qquad (*)$$

Primero veamos el caso $c=0$. Según esto y $(*)$ obtenemos

$$0 = (d-a)z-b$$

si $d-a \neq 0$, la transformación $M(z) = \frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$ fija a $z = \dfrac{b}{d-a}$ y a ∞. Ahora si $a=d$, $M(z)=z+b$, y en ese caso $M(\infty)=\infty$ (ya que no es necesario que b siempre tenga que ser 0).

Ahora en el caso $c \neq 0$, $(*)$ siempre tiene una solución $z_0 \in \mathbb{C}$ por teorema fundamental del álgebra, i.e;

$$M(z_0) = z_0$$

Así, toda transformación de Moebius $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ posee un punto fijo en $\overline{\mathbb{C}}$.

Pd: $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ de Moebius posee un único punto fijo en $\overline{\mathbb{C}}$ ssi $\tau(M) = 4$

<u>dem</u>.

($\Rightarrow$) Si $c=0 \Rightarrow M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ y ya vimos que fija a $\frac{b}{d-a}$ y ∞. Para que fije sólo un punto de $\overline{\mathbb{C}}$ (en este caso a ∞) debe cumplirse que $a=d$, o sea,

$$M(z) = z + \frac{b}{d}$$

Luego $M = \begin{pmatrix} 1 & b/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\tau(M) = \frac{(1+1)^2}{1\cdot 1 - 0\cdot b/d} = \frac{2^2}{1} = 4$$

Si $c \neq 0$, ocupamos $(*)$,

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

Se sabe que $(*)$ tiene solución único (en otras palabras, M tiene un único punto fijo en $\mathbb{C}$) ssi su discriminante es igual a cero,

$$0 = (d-a)^2 + 4cb$$
$$0 = d^2 + a^2 - 2ad + 4bc$$
$$0 = (a+d)^2 - 2ad - 2ad + 4bc$$
$$0 = (a+d)^2 - 4ad + 4bc$$
$$0 = (a+d)^2 - 4(ad - bc)$$

Scanned with CamScanner

$$\Leftrightarrow \quad 4(ad-bc) = (a+d)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(a+d)^2}{ad-bc} = 4$$

pero $\quad \tau(M) = \dfrac{(a+d)^2}{ad-bc}$

$$\therefore \quad \tau(M) = 4$$

$(\Leftarrow)$ Sea $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ de Moebius, tal que $\tau(M) = 4$.

Si $c \neq 0$, entonces

$$\tau(M) = \frac{(a+d)^2}{ad-bc} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad (a+d)^2 - 4(ad-bc) = 0$$

y esto, como vimos, es el discriminante de $(*)$, igual a 0

$\therefore$ $(*)$ tiene solución única

$\therefore$ $M(z)$ tiene un único punto fijo.

Si $c = 0$, entonces $M(z) = \dfrac{a}{d} z + \dfrac{b}{d}$

$$4 = \tau(M) = \frac{(a+d)^2}{ad}$$

$$\Rightarrow \quad 4ad = (a+d)^2 = a^2 + d^2 + 2ad$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 - 2ad + d^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-d)^2 = 0$$

$$\therefore \quad a - d = 0$$

$$\therefore \quad a = d$$

Como ya vimos, $a=d \Rightarrow M(z) = z + \frac{b}{d}$, fijando únicamente a ∞

$\therefore \ \mathcal{C}(M)=4 \Rightarrow M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ posee único punto fijo en $\overline{\mathbb{C}}$.

Problema B. 7

Dada una función $g: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ de clase C^2, demuestre que para cada función holomorfa $h: U \to \mathbb{C}$ tenemos

$$\partial\bar{\partial}(g \circ h) = \left((\partial\bar{\partial} g) \circ h\right)|h'|^2$$

dem. Para $g: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ de clase C^2, tenemos

$$\bar{\partial} g = \frac{1}{2}(\partial_x g + i \partial_y g),$$

$$\begin{aligned}
\partial\bar{\partial} g &= \frac{1}{2}(\partial_x \bar{\partial} g - i \partial_y \bar{\partial} g) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_x\left[\frac{1}{2}(\partial_x g + i\partial_y g)\right] - i\partial_y\left[\frac{1}{2}(\partial_x g + i\partial_y g)\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left[\partial_x^2 g + i\partial_x\partial_y g\right] - \frac{1}{2}i\left[\partial_y\partial_x g + i\partial_y^2 g\right]\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\partial_x^2 g + i\partial_x\partial_y g - i\partial_y\partial_x g + \partial_y^2 g\right)
\end{aligned}$$

Como $g \in C^2$, $\partial_x\partial_y g = \partial_y\partial_x g$

$$\therefore \partial\bar{\partial} g = \frac{1}{4}(\partial_x^2 g + \partial_y^2 g)$$

$\forall h: U \to \mathbb{C}$ holomorfa,

$$(\partial\bar{\partial} g) \circ h = \frac{1}{4}\left((\partial_x^2 g) \circ h + (\partial_y^2 g) \circ h\right)$$

Además, $h' = \partial h = \frac{1}{2}(\partial_x h - i\partial_y h)$. Al considerar $h: U \to \mathbb{C}$ como $h = h_1 + ih_2$; $h_1, h_2 : U \to \mathbb{R}$

$$h' = \partial h = \frac{1}{2}(\partial_x h - i\partial_y h)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\partial_x(h_1 + ih_2) - i\partial_y(h_1 + ih_2)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\partial_x h_1 + i\partial_x h_2 - i\partial_y h_1 + \partial_y h_2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\partial_x h_1 + \partial_y h_2 + i(\partial_x h_2 - \partial_y h_1)\right)$$
$$\Rightarrow |h'|^2 = \frac{1}{4}\left[(\partial_x h_1 + \partial_y h_2)^2 + (\partial_x h_2 - \partial_y h_1)^2\right]$$
$$= \frac{1}{4}\Big[(\partial_x h_1)^2 + (\partial_y h_2)^2 + 2(\partial_x h_1)(\partial_y h_2) + (\partial_x h_2)^2 + (\partial_y h_1)^2 - 2(\partial_x h_2)(\partial_y h_1)\Big]$$

Al ser $h : U \to \mathbb{C}$ holomorfa, h_1, h_2 satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\partial_x h_1 = \partial_y h_2$$
$$\partial_y h_1 = -\partial_x h_2$$

$$\Rightarrow |h'| = \frac{1}{4}\left[(\partial_x h_1)^2 + (\partial_x h_1)^2 + 2(\partial_x h_1)^2 + (\partial_x h_2)^2 + (\partial_x h_2)^2 + 2(\partial_x h_2)^2\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[4(\partial_x h_1)^2 + 4(\partial_x h_2)^2\right] = (\partial_x h_1)^2 + (\partial_x h_2)^2 .$$

$$\Rightarrow \left((\partial\bar{\partial} g)\circ h\right)|h'|^2 = \frac{1}{4}\left((\partial_x^2 g)\circ h + (\partial_y^2 g)\circ h\right)\left((\partial_x h_1)^2 + (\partial_x h_2)^2\right)$$

Por otro lado,

$$\partial\bar{\partial}(g\circ h) = \frac{1}{4}\left(\partial_x^2(g\circ h) + \partial_y^2(g\circ h)\right).$$

pero,

$$\partial_x(g\circ h) = ((\partial_x g)\circ h)\,\partial_x h_1 + ((\partial_y g)\circ h)\,\partial_x h_2$$

$$\partial_x^2(g\circ h) = \partial_x\big(((\partial_x g)\circ h)\,\partial_x h_1\big) + \partial_x\big(((\partial_y g)\circ h)\,\partial_x h_2\big)$$

$$= \big(\partial_x((\partial_x g)\circ h)\big)(\partial_x h_1) + ((\partial_x g)\circ h)(\partial_x^2 h_1)$$

$$+ \big(\partial_x((\partial_y g)\circ h)\big)(\partial_x h_2) + ((\partial_y g)\circ h)(\partial_x^2 h_2)$$

$$= \Big[((\partial_x^2 g)\circ h)(\partial_x h_1) + ((\partial_y\partial_x g)\circ h)(\partial_x h_2)\Big](\partial_x h_1) + ((\partial_x g)\circ h)(\partial_x^2 h_1)$$

$$+ \Big[((\partial_x\partial_y g)\circ h)(\partial_x h_1) + ((\partial_y^2 g)\circ h)(\partial_x h_2)\Big](\partial_x h_2) + ((\partial_y g)\circ h)(\partial_x^2 h_2)$$

De la misma manera se calcula $\partial_y^2(g\circ h)$

$$\partial_y(g\circ h) = ((\partial_x g)\circ h)(\partial_y h_1) + ((\partial_y g)\circ h)(\partial_y h_2)$$

$$\partial_y^2(g\circ h) = \partial_y\big(((\partial_x g)\circ h)(\partial_y h_1)\big) + \partial_y\big(((\partial_y g)\circ h)(\partial_y h_2)\big)$$

$$= \big(\partial_y((\partial_x g)\circ h)\big)(\partial_y h_1) + ((\partial_x g)\circ h)(\partial_y^2 h_1)$$

$$+ \big(\partial_y((\partial_y g)\circ h)\big)(\partial_y h_2) + ((\partial_y g)\circ h)(\partial_y^2 h_2)$$

$$= \Big[((\partial_x^2 g)\circ h)(\partial_y h_1) + ((\partial_y\partial_x g)\circ h)(\partial_y h_2)\Big](\partial_y h_1) + ((\partial_x g)\circ h)(\partial_y^2 h_1)$$

$$+ \Big[((\partial_x\partial_y g)\circ h)(\partial_y h_1) + ((\partial_y^2 g)\circ h)(\partial_y h_2)\Big](\partial_y h_2) + ((\partial_y g)\circ h)(\partial_y^2 h_2)$$

$$\Rightarrow \partial_x^2(g\circ h) + \partial_y^2(g\circ h)$$

$$= ((\partial_x^2 g)\circ h)(\partial_x h_1)^2 + ((\partial_y\partial_x g)\circ h)(\partial_x h_2)(\partial_x h_1) + ((\partial_x g)\circ h)(\partial_x^2 h_1)$$

$$+ ((\partial_x\partial_y g)\circ h)(\partial_x h_1)(\partial_x h_2) + ((\partial_y^2 g)\circ h)(\partial_x h_2)^2 + ((\partial_y g)\circ h)(\partial_x^2 h_2)$$

$$+ ((\partial_x^2 g)\circ h)(\partial_y h_1)^2 + ((\partial_y\partial_x g)\circ h)(\partial_y h_2)(\partial_y h_1) + ((\partial_x g)\circ h)(\partial_y^2 h_1)$$

$$+ ((\partial_x\partial_y g)\circ h)(\partial_y h_1)(\partial_y h_2) + ((\partial_y^2 g)\circ h)(\partial_y h_2)^2 + ((\partial_y g)\circ h)(\partial_y^2 h_2)$$

$$((\partial_x\partial_y g)\circ h)(\partial_x h_1)(\partial_x h_2) + ((\partial_x\partial_y g)\circ h)(\partial_y h_1)(\partial_y h_2).$$

$$= ((\partial_x\partial_y g)\circ h)(\partial_x h_1)(\partial_x h_2) + ((\partial_x\partial_y g)\circ h)(-\partial_x h_2)(\partial_x h_1)$$

$$= 0$$

$$((\partial_y\partial_x g)\circ h)(\partial_x h_2)(\partial_x h_1) + ((\partial_y\partial_x g)\circ h)(\partial_y h_2)(\partial_y h_1)$$

$$= ((\partial_y\partial_x g)\circ h)(\partial_x h_2)(\partial_x h_1) + ((\partial_y\partial_x g)\circ h)(\partial_x h_1)(-\partial_x h_2)$$

$$= 0$$

$$((\partial_x g)\circ h)(\partial_x^2 h_1) + ((\partial_x g)\circ h)(\partial_y^2 h_1) = ((\partial_x g)\circ h)[\underbrace{\partial_x^2 h_1 + \partial_y^2 h_1}_{=0}]$$

Recordatorio: h holomorfa $\Rightarrow \Delta h_1 = \Delta h_2 = 0$, donde $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

$$((\partial_y g)\circ h)(\partial_x^2 h_2) + ((\partial_y g)\circ h)(\partial_y^2 h_2)$$
$$= ((\partial_y g)\circ h)\left[\cancel{\partial_x^2 h_2 + \partial_y^2 h_2}\right] = 0$$

Después de todas estas cancelaciones,

$$\partial_x^2(g\circ h) + \partial_y^2(g\circ h)$$
$$= ((\partial_x^2 g)\circ h)(\partial_x h_1)^2 + ((\partial_y^2 g)\circ h)(\partial_x h_2)^2 + ((\partial_x^2 g)\circ h)(\partial_y h_1)^2 + ((\partial_y^2 g)\circ h)(\partial_y h_2)^2$$

$$= ((\partial_x^2 g)\circ h)(\partial_x h_1)^2 + ((\partial_y^2 g)\circ h)(\partial_x h_2)^2 + ((\partial_x^2 g)\circ h)(\partial_x h_2)^2 + ((\partial_y^2 g)\circ h)(\partial_x h_1)^2$$

$$= \left((\partial_x^2 g)\circ h + (\partial_y^2 g)\circ h\right)\left[(\partial_x h_1)^2 + (\partial_x h_2)^2\right]$$

$$\therefore \frac{1}{4}\left(\partial_x^2(g\circ h) + \partial_y^2(g\circ h)\right) = \left((\partial_x^2 g)\circ h + (\partial_y^2 g)\circ h\right)\left[(\partial_x h_1)^2 + (\partial_x h_2)^2\right]$$

$$\therefore \quad \partial\bar\partial(g\circ h) = ((\partial\bar\partial g)\circ h)\,|h'|$$

$\blacksquare$

Problema C: Encuentre una función $g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que

$$\partial\bar{\partial} g(z) = \frac{1}{(1-|z|^2)^2}.$$

B

Solución: Tenemos que

$$\partial\bar{\partial} g(z) = \frac{1}{4}\Delta g(z)$$

Tomando $r = \sqrt{x^2+y^2}$, y derivando respecto a r, se tiene que

$$\Delta g = g'' + \frac{1}{r} g' = \frac{1}{(1-r^2)^2}$$

Sea $u = g'$
$u' = g''$

$$u' + \frac{1}{r} u = \frac{1}{(1-r^2)^2}$$

$$(ru)' = \frac{r}{(1-r^2)^2}.$$

Integrando

$$ru + c = \int \frac{r}{(1-r^2)^2} dr,$$

$$ru + c = \frac{1}{2(1-v)}, \quad \text{con } v = r^2$$

Luego

$$g'r + c = \frac{1}{2(1-r^2)},$$

$$g' = \frac{1}{2r(1-r^2)} - \frac{c}{r}.$$

Luego

$$g' = \frac{1}{2r} - \frac{1}{4(1+r)} + \frac{1}{4(1-r)} - \frac{c}{r}.$$

tomando $c = \frac{1}{2}$

$$g' = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-r)} - \frac{1}{(1+r)}\right),$$

$$g = \frac{1}{4}\left[\int \frac{1}{(1-r)}\,dr - \int \frac{1}{(1+r)}\,dr\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\ln(1-r) - \ln(1+r)\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left(1-r^2\right)$$

$$g = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{1-r^2}\right), \quad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

pero como $\partial\bar{\partial} g(z) = \frac{1}{4}\Delta g(z)$, tenemos que

$$g(z) = -\ln\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right).$$

Problema D: La sucesión de Fibonacci $(F_n)_{n=1}^{+\infty}$ está definida inductivamente por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y para cada $n \geq 2$ por $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$. Calcule el radio de convergencia R de la serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n z^n .$$

Demuestre que para cada $\theta \in (0, 2\pi)$, la función f admite una extensión holomorfa a una vecindad de $z = R\exp(i\theta)$.

P

Solución: Calculemos el radio de convergencia.

Sea $R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{F_n}{F_{n+1}} \right| = \frac{1}{\phi}$, con $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Luego $R = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Por otro lado

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) z^n,$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-2} z^n,$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} F_n z^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n z^{n+2} + z,$$

$$f(z) = f(z)(z + z^2) + z,$$

$$f(z) = \frac{z}{1-z-z^2}.$$

Ahora $z^2 + z - 1 = 0$ si $z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, considerando $z_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, luego para una vecindad de $Re^{i\theta}$, $\theta \in (0, 2\pi)$ es posible hallar una extensión holomorfa para f. ¿porqué?

Problema E: Demuestre que para cada $\theta \in \mathbb{R}$, no existe ninguna vecindad de $z = \exp(i\theta)$ en $\mathbb{C}$ donde la función

$$g(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} z^{n!}$$

se extienda de manera holomorfa.

<u>Solución.</u> Notemos que si $z \to 1$, $g(z) \longrightarrow \infty$, por lo que para z tendiendo a una raiz n-ésima de la unidad, $g(z)$ tiende a infinito.

Sea $\{e^{2\pi i r}\}_{r\in\mathbb{Q}}$, este conjunto es denso en el círculo unitario.

Sea $z_{p,q} = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$, con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{Z}^+$.

Luego, tomando $0<t<1$, construimos $w_{p,q} = t z_{p,q}$ y

$$g(w_{p,q}) = \sum_{n=1}^{\infty} (t z_{p,q})^{n!},$$

$$= \sum_{n=1}^{q-1} (t z_{p,q})^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} (t z_{p,q}),$$

$$g(w_{p,q}) = \sum_{n=1}^{q-1} (t z_{p,q})^{n!} + t^{q!} + t^{(q+1)!} + \dots$$

Esto pues $(z_{p,q})^{q!} = e^{2\pi i \frac{p}{q}\cdot q!} = e^{2\pi i p (q-1)!} = 1$, por lo que

$$(z_{p,q})^{n!} = 1 \quad \text{para } n \geq q.$$

Entonces

$$\lim_{t\to 1} |g(t z_{p,q})| = \infty \quad \forall\, p \in \mathbb{Z} \text{ y } q \in \mathbb{Z}^+.$$

Por lo tanto, g no se puede extender de manera holomorfa fuera del disco unitario $\mathbb{D}$.

Problema F:

Sea $K: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$K(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

Demuestre que K es inyectiva y que $K(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -\frac{1}{4}]$.

dem: Sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \forall z \in \mathbb{D} \quad (|z| < 1)$$

como $\frac{1}{1-z}$ es holomorfa en $\mathbb{D}$, podemos calcular su derivada

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

Redefiniendo $K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$, $|z| < 1$, tomamos $z, w \in \mathbb{D}$ tales que $K(z) = K(w)$,

$$K(z) = K(w) \iff \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{w}{(1-w)^2}$$

$$\iff z(1-w)^2 = w(1-z)^2$$

$$\iff z(1+w^2-2w) = w(1+z^2-2z)$$

$$\iff z + zw^2 - 2wz = w + wz^2 - 2zw$$

$$\iff z - w + zw^2 - wz^2 = 0$$

$$\iff z - w + zw(w-z) = 0$$

$$\iff (z-w)(1-zw) = 0$$

Si $1 - zw = 0$, entonces $zw = 1$; pero como $z, w \in \mathbb{D}$
$|z|, |w| < 1$

$$\therefore \quad 1 > |z||w| = |zw| = 1 \quad (\Longleftrightarrow \Leftarrow)$$

Luego se concluye que $z = w$, lo cual dice que K es inyectiva.

Pd: $K(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -\frac{1}{4}]$

dem. Sea $w \in \mathbb{C}$. Queremos resolver la ecuación $K(z) = w$, donde $z \in \mathbb{D}$,

$$K(z) = w \iff \frac{z}{(1-z)^2} = w$$

$$\iff z = w(1+z^2-2z) \iff z = w + z^2 w - 2zw$$

$$\iff wz^2 - (2w+1)z + w = 0 \qquad (*)$$

Ocupando la ecuación $(*)$, buscamos las condiciones sobre w.

Primero, si $w=0$, basta tomar $z=0$ para que $K(z) = K(0) = 0 = w$.

Segundo salvo para $z=1$ $(\theta = 0)$, K está definida para todo $e^{i\theta}$, donde $\theta \in (0, 2\pi)$ (o al menos podemos extender K al conjunto $\{e^{i\theta} / \theta \in (0, 2\pi)\}$), Dicho lo anterior,

$$K(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}}{(1-e^{i\theta})^2} = \frac{e^{i\theta}}{(1-e^{i\theta})^2} \cdot \frac{(1-e^{-i\theta})^2}{(1-e^{-i\theta})^2} \qquad \boxed{\overline{1-e^{i\theta}} = 1-e^{-i\theta}}$$

$$= \frac{e^{i\theta}}{|1-e^{i\theta}|^4}\left[1 + e^{-2i\theta} - 2e^{-i\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{|1-e^{i\theta}|^4}\left[e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 2\right]$$

$$= \frac{1}{|1-e^{i\theta}|^4}\left[2\cos(\theta) - 2\right] = \frac{2}{|1-e^{i\theta}|^4}\left[\cos(\theta) - 1\right]$$

Notar que $\forall \theta \in (0, 2\pi)$, $K(e^{i\theta}) < 0$. Es más:

$$K(e^{i\theta}) = \frac{2(\cos\theta - 1)}{|1 - e^{i\theta}|^2} = \frac{2(\cos\theta - 1)}{|1 - \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta|^2}$$

$$= \frac{2(\cos\theta - 1)}{\left((1-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta\right)^2} = \frac{2(\cos\theta - 1)}{(1 + \cos^2\theta - 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta)^2}$$

$$= \frac{2(\cos\theta - 1)}{(2 - 2\cos\theta)^2} = \frac{1}{2} \frac{(\cos\theta - 1)}{(1 - \cos\theta)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos\theta - 1}$$

$$\therefore K(e^{i\theta}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos\theta - 1}$$

$K(e^{i\theta})$ alcanza un máximo en $\theta = \pi$ $\left(K(e^{i\pi}) = -\frac{1}{4}\right)$ y $\lim_{\theta \to 0} K(e^{i\theta}) = -\infty$. Notar que $K(e^{i\theta})$ es continua con respecto a θ. Con esto, K manda sobreyectivamente a $\partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ al intervalo $(-\infty, -\frac{1}{4}]$ (Visto desde la esfera de Riemann, $K(1) = \infty$).

Ahora, $\forall w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -\frac{1}{4}]$, $w \neq 0$. Ocupando (*) y el teorema fundamental del álgebra, $\exists z \in \mathbb{C}$ tal que

$$K(z) = w$$

$$\iff wz^2 - (2w+1)z + w = 0$$

Pero por el mismo teo. fundamental del álgebra, $\exists z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tales que $K(z_1) = K(z_2) = w$

$$w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4] \implies |z_1|, |z_2| \neq 1$$

Por la fórmula clásica para resolver ecuaciones de segundo grado, z_1, z_2 deben ser de la forma:

$$z_1 = \frac{2w + 1 + \sqrt{1+4w}}{2w}$$

$$z_2 = \frac{2w + 1 - \sqrt{1+4w}}{2w} .$$

Además cumplen $z_1 z_2 = 1$, $z_1 + z_2 = \frac{2w+1}{2w}$.

Como $z_1 z_2 = 1 \implies |z_1 z_2| = 1$, entonces necesariamente $|z_1| < 1$ ó $|z_2| < 1$, i.e, dado $w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $K(z_1) = K(z_2) = w$,

$$z_1 \in \mathbb{D} \quad \text{ó} \quad z_2 \in \mathbb{D}$$

Sólo uno de los dos, ya que si $z_1, z_2 \in \mathbb{D} \implies |z_1||z_2| = |z_1 z_2| = 1$, pero $|z_1||z_2| < 1 \cdot 1 = 1$.

$$\therefore \forall w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -\tfrac{1}{4}], \exists z \in \mathbb{D} : K(z) = w$$

Se concluye así que $K(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -\frac{1}{4}]$.

Problema 6.

Dada una función analítica $f: S^1 \to \mathbb{C}$, demuestre que existen funciones continuas $\nu^+: \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, $\nu^-: \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ que son holomorfas en $\mathbb{D}$, y que satisfacen

$$\nu^+|_{S^1} + \nu^-|_{S^1} = f$$

Demuestre además que, con el requerimiento adicional $\nu^+(0) = 0$, las funciones ν^+ y ν^- están únicamente determinadas por f.

dem. $f: S^1 \to \mathbb{C}$ analítica $\Rightarrow \exists\, r, r' > 0 : f$ analítica en $A(r, r')$,

$A(r, r') = \{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < r' \}$

f tiene expansión en serie de Laurent, a saber:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n \leq -1} a_n z^n$$

$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, donde $f_1(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $f_2(z) = \sum_{n \leq -1} a_n z^n$.

f_1 es analítica en $|z| < r'$, f_2 es analítica en $r < |z|$

Tomando $f_2(z) = \sum_{n \leq -1} a_n z^n$, consideramos

$$r < |z| \Rightarrow \left| \frac{1}{z} \right| < \frac{1}{r}$$

Haciendo el cambio de variable $w = \frac{1}{z}$, $f_2(w) = \sum_{n \leq -1} a_n w^n$

$= \sum_{n \geq 1} a_{-n} w^{-n}$ es analítica en $|w| < \frac{1}{r}$ ...

Observación: $r < 1 < r' \Rightarrow r' > 1$ y $\frac{1}{r} > 1$. Esto implica que f_1, f_2 son continuas en $|z| \leq 1$.

Ahora definimos $v_+, v_- : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ por

$$v_+(z) = f_1(z)$$
$$v_-(z) = \sum_{n \geq 1}' \overline{a_{-n}} z^n$$

las cuales son holomorfas en $\mathbb{D}$ y continuas en $\overline{\mathbb{D}}$.

Pd: $v_+|_{S^1} + \overline{v_-}|_{S^1} = f$.

dem. Sea $z = e^{i\theta} \in S^1$ $(\theta \in [0, 2\pi))$

$$v_+|_{S^1}(z) + \overline{v_-}|_{S^1}(z) = v_+(e^{i\theta}) + \overline{v_-(e^{i\theta})}$$

$$= f_1(e^{i\theta}) + \overline{\sum_{n \geq 1}' \overline{a_{-n}} e^{i\theta}}$$

$$= f_1(e^{i\theta}) + \sum_{n \geq 1}' a_{-n} e^{-i\theta} = f_1(e^{i\theta}) + \sum_{n \leq -1}' a_n e^{i\theta}$$

$$= f_1(e^{i\theta}) + f_2(e^{i\theta})$$

$$\therefore \; v_+|_{S^1} + v_-|_{S^2} = f.$$

Problema H: para cada $a \in \mathbb{C}$, calcule la integral.

$$\int_0^1 \log|\exp(2\pi i\theta) - a|\, d\theta.$$

Solución:

Para $a \neq 0$.

$$I = \int_0^1 \log|\exp(2\pi i\theta) - a|\, d\theta,$$

$$I = \int_C \log|z - a|\, dz \left(\frac{-i}{2\pi z}\right).$$

esto tomando $z = e^{2\pi i\theta}$.

$$I = \frac{-i}{2\pi} \int_C \frac{\log|z-a|}{z}\, dz$$

?

Luego $\log(\xi) = \log|\xi| + i\arg(\xi)$

y

$$\log|\xi| = \operatorname{Re}(\log(\xi))$$

Entonces

$$I = \operatorname{Re}\left(\frac{-i}{2\pi} \int_C \log\frac{(z-a)}{z}\, dz\right)$$

Caso 1: Si $|a| \neq 1 \to C$ círculo unitario

Caso 2. Si $|a| = 1 \to C$ círculo unitario con una hendidura en $z = a$.

Luego, por fórmula integral de Cauchy en $z_0 = 0$

$$\int_C \frac{\log(z-a)}{z}\, dz = 2\pi i \log(-a)$$

Scanned with CamScanner

$$\int_C \frac{\log(z-a)}{z} dz = 2\pi i \left(\log|a| + i\arg(a)\right),$$

$$\int_C \frac{\log(z-a)}{z} dz = -2\pi \arg(a) + 2\pi i \log|a|.$$

Reemplazando

$$I = Re\left(\frac{-i}{2\pi}\left(-2\pi \arg(a) + 2\pi i \log|a|\right)\right),$$

$$I = Re\left(\log|a| + i\arg(a)\right),$$

$$I = \log|a|.$$

Ahora si $a=0$

$$\int_0^1 \log|e^{2\pi i\theta}|d\theta = 0.$$

pues $|e^{2\pi i\theta}| = 1.$

Scanned with CamScanner

Problema I.

Sea γ una curva de Jordan en $\mathbb{C}$, sea B un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, y sea $g: \gamma \times B \to \mathbb{C}$ una función continua, tal que para z en γ la función $w \mapsto g(z,w)$ es analítica en el sentido complejo. Demuestre

$$\partial_w\left(\int_\gamma g(z,w)\,dz\right) = \int_\gamma \partial_w g(z,w)\,dz \quad , \quad \bar{\partial}_w\left(\int_\gamma g(z,w)\,dz\right) = \int_\gamma \bar{\partial}_w g(z,w)\,dz$$

dem.

Por las definiciones de derivada holomorfa y antiholomorfa en w,

$$\partial_w\left(\int_\gamma g(z,w)\,dz\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_x \int_\gamma g(z,w)\,dz - i\,\partial_y \int_\gamma g(z,w)\,dz\right)$$

$$\bar{\partial}_w\left(\int_\gamma g(z,w)\,dz\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_x \int_\gamma g(z,w)\,dz + i\,\partial_y \int_\gamma g(z,w)\,dz\right)$$

Esto quiere decir que debemos solamente estudiar

$$\partial_x \int_\gamma g(z,w)\,dz \quad , \quad \partial_y \int_\gamma g(z,w)\,dz$$

pero $g = g_1 + i g_2$, donde $g_1, g_2 : \gamma \times B \to \mathbb{R}$
(g_1 parte real de g, g_2 parte imaginaria de g)

$$\Rightarrow \int_\gamma g(z,w)\,dz = \int_\gamma g_1(z,w)\,dz + i \int_\gamma g_2(z,w)\,dz$$

$$\Rightarrow \quad \partial_x \int_\gamma g(z,w)\,dz = \partial_x \int_\gamma g_1(z,w)\,dz + i\,\partial_x \int_\gamma g_2(z,w)\,dz$$

$$\partial_y \int_\gamma g(z,w)\,dz = \partial_y \int_\gamma g_1(z,w)\,dz + i\,\partial_y \int_\gamma g_2(z,w)\,dz$$

El objetivo es tratar de demostrar:

$$\partial_x \int_\gamma g_1(z,w)\,dz = \int_\gamma \partial_x g_1(z,w)\,dz$$

$$\partial_y \int_\gamma g_1(z,w)\,dz = \int_\gamma \partial_y g_1(z,w)\,dz$$

Resultados análogos para $\partial_x \int_\gamma g_2(z,w)\,dz$, $\partial_y \int_\gamma g_2(z,w)\,dz$.

<u>Afirmación</u>. $\partial_x \int_\gamma g_1(z,w)\,dz = \int_\gamma \partial_x g_1(z,w)\,dz$, $\partial_y \int_\gamma g_1(z,w)\,dz = \int_\gamma \partial_y g_1(z,w)\,dz$

<u>dem</u>.

Considerando $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de Jordan (diferenciable C^1 en (a,b)),

$$\int_\gamma g_1(z,w)\,dz = \int_a^b g_1(\gamma(t),w)\,\gamma'(t)\,dt$$

Para $w = x+iy = (x,y)$, $\forall z \in \gamma$:

$$\partial_x g_1(z,w) = \lim_{h\to 0} \frac{g_1(z, x+h+iy) - g_1(z, x+iy)}{h}$$

existe

Pd: $\lim_{h\to 0} \dfrac{\int_\gamma g_1(z, x+h+iy)\,dz - \int_\gamma g_1(z, x+iy)\,dz}{h}$

existe y vale $\int_\gamma \partial_x g_1(z, x+iy)\,dz$.

<u>dem</u> $\forall h \neq 0$

$$\left| \frac{\int_\gamma g_1(z, x+h+iy)\,dz - \int_\gamma g_1(z, x+iy)\,dz}{h} - \int_\gamma \partial_x g_1(z, x+iy)\,dz \right|$$

$$= \left| \int_\gamma \frac{g_1(z, x+h+iy) - g_1(z, x+iy)}{h}\,dz - \int_\gamma \partial_x g_1(z, x+iy)\,dz \right|$$

$$= \left| \int_a^b \frac{g_1(\gamma(t), x+h+iy) - g_1(\gamma(t), x+iy)}{h}\gamma'(t)\,dt - \int_a^b \partial_x g_1(\gamma(t), x+iy)\gamma'(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_a^b \left[\frac{g_1(\gamma(t), x+h+iy) - g_1(\gamma(t), x+iy)}{h} - \partial_x g_1(\gamma(t), x+iy)\right]\gamma'(t)\,dt \right|$$

Si consideramos $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ (parte real e imaginaria de $\gamma(t)$ respectivamente, $\forall t \in [a,b]$).

$$\int_a^b \left[\frac{g_1(\gamma(t), x+h+iy) - g_1(\gamma(t), x+iy)}{h} - \partial_x g_1(\gamma(t), x+iy)\right]\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \left[\frac{g_1(\gamma(t), x+h+iy) - g_1(\gamma(t), x+iy)}{h} - \partial_x g_1(\gamma(t), x+iy)\right]\left[\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)\right]dt$$

$$= \int_a^b \left[\frac{g_1(\gamma(t), x+h+iy) - g_1(\gamma(t), x+iy)}{h} - \partial_x g(\gamma(t), x+iy) \right] \gamma_1'(t)\, dt$$

$$+ i \int_a^b \left[\frac{g_1(\gamma(t), x+h+iy) - g_1(\gamma(t), x+iy)}{h} - \partial_x g(\gamma(t), x+iy) \right] \gamma_i'(t)\, dt$$

y estas integrales son del tipo Riemann (Más sencillas para trabajar).
Ocupando desigualdad triangular, obtenemos:

$$\left| \int_a^b \left[\frac{g_1(\gamma(t), x+h+iy) - g_1(\gamma(t), x+iy)}{h} - \partial_x g_1(\gamma(t), x+iy) \right] \gamma'(t)\, dt \right|$$

$$\leq \left| \int_a^b \left[\frac{g_1(\gamma(t), x+h+iy) - g_1(\gamma(t), x+iy)}{h} - \partial_x g_1(\gamma(t), x+iy) \right] \gamma_1'(t)\, dt \right|$$

$$+ \left| \int_a^b \left[\frac{g_1(\gamma(t), x+h+iy) - g_1(\gamma(t), x+iy)}{h} - \partial_x g_1(\gamma(t), x+iy) \right] \gamma_2'(t)\, dt \right|$$

pero notemos que podemos seguir acotando, de la manera siguiente:

$$\left| \int_a^b \left[\frac{g_1(\gamma(t), x+h+iy) - g_1(\gamma(t), x+iy)}{h} - \partial_x g_1(\gamma(t), x+iy) \right] \gamma_1'(t)\, dt \right|$$

$$\leq \int_a^b \left| \frac{g_1(\gamma(t), x+h+iy) - g_1(\gamma(t), x+iy)}{h} - \partial_x g_1(\gamma(t), x+iy) \right| |\gamma_1'(t)|\, dt$$

Como γ_1 es de Clase C^1, γ_1' es continua en $[a,b]$ luego $\sup_{t\in[a,b]} |\gamma_1'(t)| = \sigma_1 < \infty$. Esto se debe a que γ es de clase C^1.

$$< \int_a^b \frac{\varepsilon\,\sigma_1}{2\max\{\sigma_1,\sigma_2\}(b-a)}\,dt + \int_a^b \frac{\varepsilon\,\sigma_2}{2\max\{\sigma_1,\sigma_2\}(b-a)}\,dt$$

$$= \frac{\varepsilon\,\sigma_1}{2\max\{\sigma_1,\sigma_2\}(b-a)}\int_a^b dt + \frac{\varepsilon\,\sigma_2}{2\max\{\sigma_1,\sigma_2\}(b-a)}\int_a^b dt$$

$$= \frac{\varepsilon\,\sigma_1\,(b-a)}{2\max\{\sigma_1,\sigma_2\}(b-a)} + \frac{\varepsilon\,\sigma_2\,(b-a)}{2\max\{\sigma_1,\sigma_2\}(b-a)}$$

$$= \frac{\varepsilon\,\sigma_1}{2\max\{\sigma_1,\sigma_2\}} + \frac{\varepsilon\,\sigma_2}{2\max\{\sigma_1,\sigma_2\}}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\boxed{\therefore\ \partial_x \int_\gamma g_1(z,w)\,dz = \int_\gamma \partial_x\, g_1(z,w)\,dz}$$

Exactamente, de la misma manera se demuestra que

$$\partial_y \int_\gamma g_1(z,w)\,dz = \int_\gamma \partial_y\, g_1(z,w)\,dz$$

con la diferencia de

$$\partial_y\, g_1(z,w) = \lim_{h\to 0} \frac{g_1(z, x+i(y+h)) - g_1(z, x+iy)}{h}$$

(variación en la parte imaginaria. El trabajo es análogo al anterior).

También γ_2 es de clase C^1, lo que nos dice

$$\sup_{t\in[a,b]} |\gamma_2'(t)| = \sigma_2 < \infty$$

Además, $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ tal que $|h|<\delta$ implica

$$\left| \frac{g_1(\gamma(t), x+h+iy) - g_1(\gamma(t), x+iy)}{h} - \partial_x g_1(\gamma(t), x+iy) \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2\max\{\sigma_1,\sigma_2\}(b-a)}$$

Entonces para $|h|<\delta$:

$$\left| \frac{\int_\gamma g_1(z, x+h+iy)dz - \int_\gamma g_1(z, x+iy)dz}{h} - \int_\gamma \partial_x g_1(z, x+iy)dz \right|$$

$$\leq \left| \int_a^b \left[\frac{g_1(\gamma(t), x+h+iy) - g_1(\gamma(t), x+iy)}{h} - \partial_x g_1(\gamma(t), x+iy) \right] \gamma_1'(t)\,dt \right|$$

$$+ \left| \int_a^b \left[\frac{g_1(\gamma(t), x+h+iy) - g_1(\gamma(t), x+iy)}{h} - \partial_x g_1(\gamma(t), x+iy) \right] \gamma_2'(t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_a^b \left| \frac{g_1(\gamma(t), x+h+iy) - g_1(\gamma(t), x+iy)}{h} - \partial_x g_1(\gamma(t), x+iy) \right| |\gamma_1'(t)|\,dt$$

$$+ \int_a^b \left| \frac{g_1(\gamma(t), x+h+iy) - g_1(\gamma(t), x+iy)}{h} - \partial_x g_1(\gamma(t), x+iy) \right| |\gamma_2'(t)|\,dt$$

Como consecuencia, se tienen las igualdades restantes:

$$\partial_x \int_\gamma g_2(z,w)\,dz = \int_\gamma \partial_x g_2(z,w)\,dz$$

$$\partial_y \int_\gamma g_2(z,w)\,dz = \int_\gamma \partial_y g_2(z,w)\,dz$$

Ahora podemos terminar el trabajo:

$$\partial_{\bar{w}}\left(\int_\gamma g(z,w)\,dz\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_x \int_\gamma g(z,w)\,dz - i\,\partial_y \int_\gamma g(z,w)\,dz\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\partial_x \int_\gamma g_1(z,w)\,dz + \partial_x \int_\gamma g_2(z,w)\,dz - i\left[\partial_y \int_\gamma g_1(z,w)\,dz + i\,\partial_y \int_\gamma g_2(z,w)\,dz\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_\gamma \partial_x g_1(z,w)\,dz + \int_\gamma \partial_x g_2(z,w)\,dz - i\left[\int_\gamma \partial_y g_1(z,w)\,dz + i\int_\gamma \partial_y g_2(z,w)\,dz\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_\gamma \partial_x g_1(z,w)\,dz + \partial_x g_2(z,w)\,dz - i\int_\gamma \partial_y g_1(z,w)\,dz + i\,\partial_y g_2(z,w)\,dz\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_\gamma \partial_x g(z,w)\,dz - i\int_\gamma \partial_y g(z,w)\,dz\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_\gamma \left(\partial_x g(z,w)\,dz - i\,\partial_y g(z,w)\right) dz \right)$$

$$= \int_\gamma \frac{1}{2}\left(\partial_x g(z,w) - i\,\partial_y g(z,w)\right) dz$$

$$= \int_\gamma \partial_w g(z,w)\,dz$$

De igual manera,

$$\bar{\partial}_w \int_\gamma g(z,w)\,dz = \int_\gamma \bar{\partial}_w g(z,w)\,dz$$

Se concluye,

$$\partial_w \int_\gamma g(z,w)\,dz = \int_\gamma \partial_w g(z,w)\,dz$$

$$\bar{\partial}_w \int_\gamma g(z,w)\,dz = \int_\gamma \bar{\partial}_w g(z,w)\,dz$$

∎

Problema J

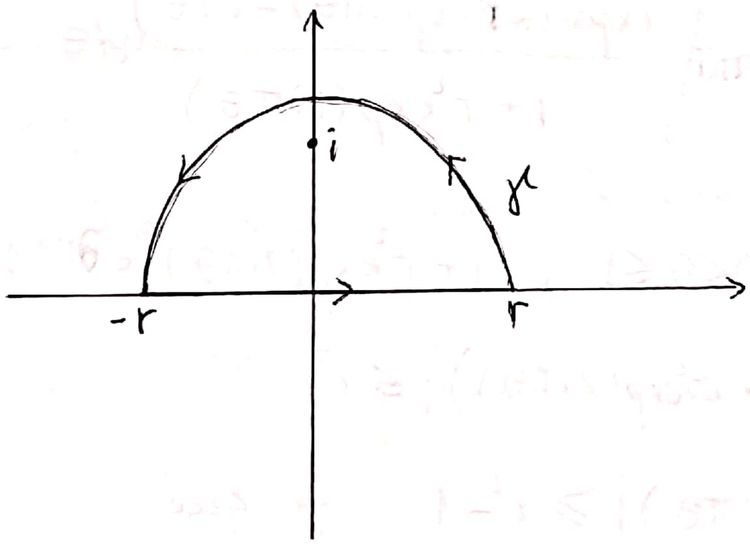
Para cada entero $k \in \mathbb{Z}$, calcule las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikx)}{1+x^2}\,dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx)\,\frac{1-\exp(x)}{1+\exp(x)}\,dx$$

Desarrollo

(a) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikx)}{1+x^2}\,dx$$

La función $f(z) = \dfrac{\exp(ikz)}{1+z^2}$ posee polos simples en $z \in \{i, -i\}$. Sea γ el camino considerado por la siguiente figura:



γ es la unión de los caminos γ_r y $\tilde{\gamma}_r$, donde $r > 1$

$\gamma = \gamma_r \sqcup \tilde{\gamma}_r$, donde $\gamma_r : [-r, r] \to \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) = t$,

$\tilde{\gamma}_r : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\tilde{\gamma}_r(\theta) = r\exp(i\pi\theta)$

Por teorema de los residuos, $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz = \mathrm{Res}(f,i)$,

donde $\mathrm{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} (z-i)f(z) = \lim_{z\to i} \frac{\exp(ikz)}{z+i} = \frac{\exp(-k)}{2i}$

. Por otro lado,

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_r} f(z)\,dz + \int_{\tilde{\gamma}_r} f(z)\,dz$$

$$= \int_{-r}^{r} \frac{\exp(ikx)}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{\exp(ik\tilde{\gamma}_r(\theta))}{1+\tilde{\gamma}_r(\theta)}\,\tilde{\gamma}_r'(\theta)\,d\theta$$

$$= \int_{-r}^{r} \frac{\exp(ikx)}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{\exp(ik\,r\exp(i\pi\theta))}{1+r^2\exp(2i\pi\theta)}\,r\pi i\exp(i\pi\theta)\,d\theta$$

$$= \int_{-r}^{r} \frac{\exp(ikx)}{1+x^2}\,dx + r\pi i\int_0^1 \frac{\exp(ikr\exp(i\pi\theta)+i\pi\theta)}{1+r^2\exp(2i\pi\theta)}\,d\theta$$

Notemos que para $0\leq\theta\leq 1$, $1+r^2\exp(2i\pi\theta) \in \partial B(1,r^2)$.

i.e, $|1-(1+r^2\exp(2i\pi\theta))| = r^2$

$\Rightarrow |1+r^2\exp(2i\pi\theta)| \geq r^2-1$, ya que

$$\underbrace{|1-(1+r^2\exp(2i\pi\theta))|}_{=\,|r^2\exp(2i\pi\theta)| = |r^2|\,|\exp(2i\pi\theta)| = r^2} \leq |1+r^2\exp(2i\pi\theta)| + 1$$

También,

$$\exp(ikr\exp(i\pi\theta)+i\pi\theta) = \exp(ikr(\cos(\pi\theta)+i\,\mathrm{sen}(\pi\theta))+i\pi\theta)$$
$$= \exp(ikr\cos(\pi\theta) - kr\,\mathrm{sen}(\pi\theta)+i\pi\theta)$$
$$= \exp(-kr\,\mathrm{sen}(\pi\theta)+i(kr\cos(\pi\theta)+\pi\theta))$$
$$= \exp(-kr\,\mathrm{sen}(\pi\theta))\exp(i(kr\cos(\pi\theta)+\pi\theta))$$

$$\Rightarrow |\exp(ikr\exp(i\pi\theta)+i\pi\theta)| = |\underbrace{\exp(-kr\,\mathrm{sen}(\pi\theta))}_{\in\mathbb{R}}|\,\underbrace{|\exp(i(kr\cos(\pi\theta)+\pi\theta))|}_{=1}$$
$$= \exp(-kr\,\mathrm{sen}(\pi\theta))$$
$$\leq 1 \quad \text{, ya que } r>0,\ \theta\in[0,1]$$

obs. Estamos asumiendo $k\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ (Más tarde veremos qué ocurre cuando $k\in\mathbb{Z}^-$)

Con todo lo anterior, podemos acotar la siguiente integral

$$\left| r\pi i\int_0^1 \frac{\exp(ikr\exp(i\pi\theta)+i\pi\theta)}{1+r^2\exp(2\pi i\theta)}\,d\theta \right|$$
$$\leq r\pi\int_0^1 \left|\frac{\exp(ikr\exp(i\pi\theta)+i\pi\theta)}{1+r^2\exp(2\pi i\theta)}\right| d\theta$$

Como $|1+r^2\exp(2i\pi\theta)| \geq r^2-1$

$$\Rightarrow \frac{1}{|1+r^2\exp(2i\pi\theta)|} \leq \frac{1}{r^2-1}$$

$$\Rightarrow \left| r\pi i \int_0^1 \frac{\exp(ikr\exp(i\pi\theta)+i\pi\theta)}{1+r^2\exp(2i\pi\theta)} d\theta \right|$$

$$\leq r\pi \int_0^1 \left| \frac{\exp(ikr\exp(i\pi\theta)+i\pi\theta)}{1+r^2\exp(2i\pi\theta)} \right| d\theta$$

$$\leq r\pi \int_0^1 \frac{1}{r^2-1} d\theta$$

$$= \frac{r\pi}{r^2-1}\int_0^1 d\theta = \frac{r\pi}{r^2-1}$$

Como $\lim_{r\to\infty} \frac{r\pi}{r^2-1} = 0 \Rightarrow \lim_{r\to\infty} r\pi i \int_0^1 \frac{\exp(ikr\exp(i\pi\theta)+i\pi\theta)}{1+r^2\exp(2\pi i\theta)} d\theta$

es igual a 0, o sea, $\lim_{r\to\infty} \int_{\tilde{\gamma}_r} f(z)dz = 0$.

En resumen,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikx)}{1+x^2}dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} \frac{\exp(ikx)}{1+x^2}dx = \lim_{r\to\infty}\int_{\gamma} f(z)dz - \lim_{r\to\infty}\int_{\tilde{\gamma}_r} f(z)dz$$

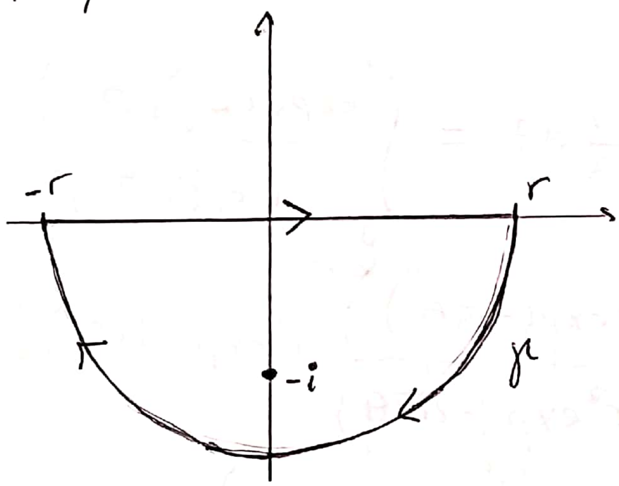
$$= \lim_{r\to\infty} 2\pi i \operatorname{Res}(f,i) - 0 = 2\pi i \operatorname{Res}(f,i) = 2\pi i \frac{\exp(-k)}{2i}$$

$$= \pi\exp(-k)$$

$\therefore\ \forall k \in \mathbb{Z}^+ : \quad \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikx)}{1+x^2}\,dx = \pi \exp(-k)$

La deuda pendiente: ¿Qué ocurre cuando $k \in \mathbb{Z}^-$?

En ese caso, hay que tomar una curva de Jordan γ que rodee al otro polo simple $-i$, i.e:



γ es la unión de los caminos γ_r y $\tilde{\gamma}_r$, donde $r > 1$

$\gamma = \gamma_r \sqcup \tilde{\gamma}_r$, donde $\gamma_r : [-r, r] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) = t$

$\tilde{\gamma}_r : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\tilde{\gamma}_r(\theta) = r\exp(-i\pi\theta)$. Por teorema de los residuos,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \operatorname{Res}(f,-i)$$

donde $\operatorname{Res}(f,-i) = \lim\limits_{z\to -i} (z+i) f(z) = \lim\limits_{z\to -i} \dfrac{\exp(ikz)}{(z-i)}$

$$= \frac{\exp(ik(-i))}{(-i-i)} = \frac{\exp(k)}{-2i}$$

$$\therefore \int_\gamma f(z)\,dz = -\pi\exp(k)$$

Por otro lado,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{-r}^{r} \frac{\exp(ikx)}{1+x^2}dx + \int_{\tilde{\gamma}_r} f(z)dz$$

Al igual que en el caso anterior, nuestro objetivo es demostrar que $\lim_{r\to\infty} \int_{\tilde{\gamma}_r} f(z)dz = 0$.

$$\int_{\tilde{\gamma}_r} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}_r} \frac{\exp(ikz)}{1+z^2}dz = \int_0^1 \frac{\exp(ik\tilde{\gamma}_r(\theta))}{1+(\tilde{\gamma}_r(\theta))^2}\tilde{\gamma}_r'(\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^1 \frac{\exp(ikr\exp(-i\pi\theta))}{1+r^2\exp(-2i\pi\theta)} r\exp(-i\pi\theta)(-i\pi)\,d\theta$$

$$= -i\pi r \int_0^r \frac{\exp(ikr\exp(-i\pi\theta))}{1+r^2\exp(-2i\pi\theta)}\exp(-i\pi\theta)d\theta$$

$$= -i\pi r \int_0^1 \frac{\exp(ikr\exp(-i\pi\theta)-i\pi\theta)}{1+r^2\exp(-2i\pi\theta)}d\theta$$

Tenemos, $|1+r^2\exp(-2i\pi\theta)| \geq r^2-1$

$$\exp(ikr\exp(-i\pi\theta)-i\pi\theta)$$
$$= \exp(ikr(\cos(-\pi\theta)+i\,\mathrm{sen}(-\pi\theta))-i\pi\theta)$$
$$= \exp(ikr\cos(\pi\theta)+kr\,\mathrm{sen}(\pi\theta)-i\pi\theta)$$
$$= \exp(kr\,\mathrm{sen}(\pi\theta))\exp(i(kr\cos(\pi\theta)-\pi\theta))$$

$\therefore \left| \exp(ikr\exp(-i\pi\theta) - i\pi\theta) \right| = \exp(kr \operatorname{sen}(\pi\theta))$

Que quede claro que $\exp(kr\operatorname{sen}(\pi\theta)) \leq 1$, ya que $k<0$, $r>1$, $\operatorname{sen}(\pi\theta) > 0 \ \forall \theta \in [0,1]$

Así,

$$\left| \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz \right| = \left| -i\pi r \int_0^1 \frac{\exp(ikr\exp(-i\pi\theta) - i\pi\theta)}{1 + r^2\exp(-2i\pi\theta)}\,d\theta \right|$$

$$\leq \pi r \int_0^1 \left| \frac{\exp(ikr\exp(-i\pi\theta) - i\pi\theta)}{1 + r^2\exp(-2i\pi\theta)} \right| d\theta$$

$$\leq \pi r \int_0^1 \frac{1}{r^2-1}\,d\theta$$

$$= \frac{\pi r}{r^2-1}$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\pi r}{r^2-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{r\to\infty} \left| \int_{\tilde{\gamma}_r} f(z)\,dz \right| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to\infty} \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = 0$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikx)}{1+x^2}\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{\exp(ikx)}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma} f(z)\,dz - \lim_{r\to\infty} \int_{\tilde{\gamma}_r} f(z)\,dz$$

$$= \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma} f(z)\,dz$$

$$= \lim_{r\to\infty} \operatorname{Res}(f, -i)$$

$$= \operatorname{Res}(f, -i)$$

$$= -\pi \exp(k)$$

$$\therefore\ \forall k \in \mathbb{Z}^- : \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikx)}{1+x^2}\,dx = -\pi \exp(k).$$

Conclusión:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikx)}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \pi \exp(-k), & k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \\ -\pi \exp(k), & k \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$$

VARIABLE COMPLEJA

Tarea Gimel

Javiera Picares M
Marco Godoy V.

Problema A

Demuestre que para toda transformación de Moebius M y todo entero $n \geq 2$, existe una transformación de Moebius $\tilde{M}$ tal que

$$\underbrace{\tilde{M} \circ \tilde{M} \circ \dots \circ \tilde{M}}_{n\text{-veces}} = M$$

Demostración. Haremos la demostración de este problema en varias partes, a saber:

Parte 1: Demostraremos el problema para un subconjunto particular de transformaciones de Moebius: traslaciones y dilataciones

Parte 2: Demostraremos que si una transformación de Moebius M cumple con lo enunciado en el problema, entonces su conjugado HMH^{-1} también lo cumple.

Parte 3: Demostraremos que toda transformación de Moebius es conjugada a una dilatación o a una traslación particular.

Parte 4: Concluir con la demostración del problema ocupando partes 1, 2 y 3.

Comencemos con la demostración.

Parte 1. Sean $T(z) = az+b$, $D(z) = \alpha z$ transformaciones de Moebius. T es una traslación y D es una dilatación.
Notar que cuando $a=1$, $b=0 \Rightarrow T(z) = z$ y en ese caso $\forall n \in \mathbb{N}$ $T^n = T$. También si $\alpha = 1$, $D(z) = z$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n = D$.
En ambos casos el problema concluye.