Claudio Abraham Bravo Castillo.

Teoría de Representaciones.
Tarea 1

Entrega: Junio 30, 2016

1. Probar que un álgebra de quaterniones $D = K \oplus iK \oplus jK \oplus ijK$, con $i^2 = a \in K$ y $j^2 = b \in K$, es isomorfa al álgebra de matrices $\mathbb{M}_2(K)$ si y sólo si existen elementos $x, y, z \in K$ tales que $x^2 - ay^2 = b$.

2. Sean D_1 y D_2 dos algebras de quaterniones de división sobre un cuerpo K. Probar que si existe una extensión cuadrática L que se incrusta en D_1 y D_2 simultaneamente, entonces $D_1 \otimes_K D_2 \cong \mathbb{M}_2(D_3)$ para algún álgebra de cuaterniones (de división o no) sobre K.

3. Sea $K = \mathbb{Q}(x, y)$ el cuerpo de funciones racionales en dos variables. Probar que un álgebra de quaterniones $D = K \oplus iK \oplus jK \oplus ijK$, con $i^2 = x \in K$ y $j^2 = y \in K$ es un álgebra de división.

4. Encuentre todas las representaciones irreducibles del álgebra $A = \mathbb{C}[i, j | i^2 = j^3 = 1, iji = j^2]$.

5. Probar que para cada elemento g de un grupo finito G, y cada caracter complejo χ, el valor $\chi(g)$ es un entero algebraico.

6. Encuentre la tabla de caracteres del grupo no abeliano de órden 21.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \beta c & \beta d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \beta b \\ \alpha c & \beta d \end{pmatrix}$$

Tarea N°1

Claudio Abraham Bravo

Álgebras y Representaciones

Problema 1. Probar que el álgebra de cuaterniones $D = K\oplus iK\oplus jK\oplus ijK$, con $i^2=a,\ j^2=b\in K,\ ij=-ji$ es isomorfa a $M_2(K)$ ssi $\exists x,y\in K$ tales que $x^2-ay^2=b$.

Demostración: En clases demostramos que si $\mathfrak{A}$ es una K-álgebra central simple de dimensión 4 si y solamente si:

i) Si $\operatorname{car} K\neq 2$: $\mathfrak{A}\cong\langle i,j : i^2=a,\ j^2=b,\ ij=-ji\rangle$

ii) Si $\operatorname{car} K=2$: $\mathfrak{A}\cong\langle i,j : i^2=a,\ j^2=b,\ ij=-ji\rangle$

En particular $D=\mathfrak{A}$ es un K-álgebra central simple. Además sabemos que toda K-álgebra central simple cumple con: $D\cong M_n(D')$, D' alg división sobre K.

Así $\dim_K D = 4 = n^2\dim D'$ $\therefore$ $D\cong M_2(K)$ o D alg división sobre K. Por ello es importante este criterio pues nos permite discriminar entre ambos casos.

Definimos el conjugado de $x=a_1+a_2i+a_3j+a_4ij$ por $\bar{x}=a_1-a_2i-a_3j-a_4ij$. Además definimos la norma por:

$$N(x)=x\bar{x}=(a_1+a_2i+a_3j+a_4ij)(a_1-a_2i-a_3j-a_4ij)$$

Pues $(ij)(ij)=-i^2j^2=-ab$:

$$\begin{aligned}
&= a_1^2-a_2^2a-a_3^2b+a_4^2ab-a_1a_2i-a_1a_3j-a_1a_4ij\\
&\quad +a_1a_2i-a_2a_3ij-a_2a_4aj+a_1a_3j-a_3a_2ji\\
&\quad -a_3a_4jij+a_4a_1ij-a_4a_2iji-a_4a_3bi\\
&= a_1^2-aa_2^2-ba_3^2+aba_4^2\in K.
\end{aligned}$$

Como $ij=-ji$:

$$\bar{x}x=N(\bar{x})=a_1^2-a(-a_2)^2-b(-a_3)^2+ab(-a_4)^2=N(x)=x\bar{x}.$$

Observe que $\bar{\bar{x}}=x$, así:

Por lo tanto si $N(x)\neq 0$ entonces: $y=\bar{x}/N(x)$ cumple con: $yx=\frac{\bar{x}x}{N(x)}=1$, $xy=\frac{x\bar{x}}{N(x)}=1$.

Así $x\in D^*$. Observe que si x invertible entonces $\exists y\in D: xy=1$.

pd: $N(xy)=N(x)N(y)=1$

Demostración: Si $x = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 ij$, $y = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 ij$.

Así: $xy = a_0b_0 + a_0b_1 i + a_0 b_2 j + a_0 b_3 ij + a_1 b_0 i + a_1 b_1 a + a_1 b_2 ij + a_1 b_3 aj$
$+ a_2 b_0 j + a_2 b_1 ji + a_2 b_2 b + a_2 b_3 jij + a_3 b_0 ij + a_3 b_1 iji + a_3 b_2 bi$
$- a_3 b_3 ab$

$= (a_0b_0 + a_1b_1 a + a_2 b_2 b - a_3 b_3 ab) + i(a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_2 b_3 b + a_3 b_2 b)$
$+ j(a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_1 b_3 a - a_3 b_1 a) + ij(a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0)$

Por ello: $N(xy) = (a_0b_0 + a_1b_1a + a_2b_2b - a_3b_3ab)^2 - a(a_0b_1 + a_1b_0 - a_2b_3b + a_3b_2b)^2$
$- b(a_0b_2 + a_2b_0 + a_1b_3a - a_3b_1a)^2 + ab(a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)^2$

Desarrollando:
$= N(x)N(y)$

Por lo tanto si $xy = 1 \Rightarrow N(x)N(y) = N(1) = 1 \therefore N(x) \neq 0$.

Esto prueba que $N(x) \neq 0$ $(\forall x \in D-\{0\}) \Leftrightarrow D$ alg. de división ed: $\Leftrightarrow D \ncong \mathbb{M}_2(K)$.

observación: $N(x) = 0$, para cierto $x \in D-\{0\} \Leftrightarrow \exists\, a_0, a_1, a_2, a_3 \in K$ no todos nulos tales que
$a_0^2 - a a_1^2 - b a_2^2 + ab a_3^2 = 0$ ssi (1) $a_0^2 - a a_1^2 - b a_2^2 + ab a_3^2 = 0$

ed: $\exists\, a_0, a_1, a_2, a_3 \in K$ no todos nulos tales que $\varphi(i)^2 = \begin{pmatrix} a & \\ & a \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(i^{-1}) = \begin{pmatrix} 1/a & \\ & 1/a \end{pmatrix}$
$\varphi(i)\varphi(i)\varphi(i)^{-1} = \varphi(i i i^{-1}) = \varphi(i)$
$D \cong \mathbb{M}_2(K)$.

$D \cong \mathbb{M}_2(K) \Leftrightarrow \exists x, y \in K : x^2 - ay^2 = b$

Pd: $D \cong \mathbb{M}_2(K) \Leftrightarrow$

Demostración: $\Leftarrow]$ observe que $x^2 - ay^2 - b(1)^2 + ab(0)^2 = 0$, con $1 \neq 0$, por ello existe un cero no trivial de la norma. Luego $D \cong \mathbb{M}_2(K)$ usando lo ya mencionado en (1).

$\Rightarrow]$ Supongamos que $D \cong \mathbb{M}_2(K)$. Entonces $\exists\, a_0, a_1, a_2, a_3 \in K$ no todos nulos tales que: $a_0^2 - a a_1^2 - b a_2^2 + ab a_3^2 = 0$ (2)

Si $a_2 \neq 0$: $\left(\frac{a_0}{a_2}\right)^2 - b = a\left(\frac{a_1^2 - b a_3^2}{a_2^2}\right)$

observe que: $a_0^2 - b a_2^2 = a(a_1^2 - b a_3^2)$

Luego: $a(a_1^2 - b a_3^2)^2 = (a_1^2 - b a_3^2)(a_0^2 - b a_2^2)$
$= a_1^2 a_0^2 - b a_3^2 a_0^2 - b a_2^2 a_1^2 + b^2 a_3^2 a_2^2$
$= (a_1 a_0 + b a_3 a_2)^2 - b(a_3 a_0 + a_2 a_1)^2$

Observe que si $\begin{cases} a_1^2 = b a_3^2 \\ a_1 a_0 + b a_3 a_2 = 0 \\ a_3 a_0 + a_2 a_1 = 0 \end{cases}$,

Si $a_3 \neq 0$ entonces: $\left(\frac{a_1}{a_3}\right)^2 = b$, por ello $\left(\frac{a_1}{a_3}\right)^2 - a(0)^2 = b$ tiene solución y se prueba lo pedido. Si $a_3 = 0$ entonces $a_1 = 0$, así:

$a_0^2 - b a_2^2 = 0$ por (2)

Si $a_2 \neq 0$ entonces $\left(\frac{a_0}{a_2}\right)^2 - a(0)^2 = b$ tiene solución y se prueba lo pedido.

Si $a_2 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ ($\Rightarrow\Leftarrow$).

Por lo tanto si no queremos soluciones triviales como las previas, algún x, y, z es no nulo en: $a y^2 = x^2 - b z^2$, $x = a_1 a_0 + b a_3 a_2$, $z = a_3 a_0 + a_2 a_1$, $y = a_1^2 - b a_3^2$.

Por casos:

1) Si $z = 0$: $x^2 = a y^2$, entonces $y, x \neq 0$, pues alguno no es nulo $\Rightarrow$ luego $a \in K^2$.

Por lo tanto debemos encontrar una solución de $u^2 - a v^2 = b$, $x, y \in K$

Como $a \in K^2$, $a = k^2 \Rightarrow u = \frac{b+1}{2}$, $v = \frac{b-1}{2k}$ cumple con:

$u^2 - a v^2 = \frac{b^2 + 2b + 1}{4} - a\left(\frac{b^2 - 2b + 1}{4k^2}\right) = b$. (Se puede pues car $K \neq 2$)

$\therefore$ Se tiene una solución de la ecuación requerida.

2) Si $z \neq 0$: entonces $a\left(\frac{y}{z}\right)^2 = \left(\frac{x}{z}\right)^2 - b$, luego: $b = \left(\frac{x}{z}\right)^2 - a\left(\frac{y}{z}\right)^2$ y entonces se tiene lo pedido.

Observación: Lo mencionado en este problema prueba que es equivalente:

1) $D \cong M_2(K)$
2) existe solución no trivial a $x^2 - a y^2 - b z^2 + ab w^2 = 0$
3) existe solución no trivial a $a y^2 = x^2 - b z^2$
4) existe solución a $x^2 - a y^2 = b$.

pues 1) $\Leftrightarrow$ 2) se probó en un principio y en lo que sigue se demostró 2) $\Rightarrow$ 4) y claramente 4) $\Rightarrow$ 3) y 4) $\Rightarrow$ 2) ed: (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (4) y 4) $\Rightarrow$ 3) y tomando $w = 0$: 3) $\Rightarrow$ 2) $\therefore$ (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4).

$Z(D_1 \otimes D_2) = Z(D_1) \otimes Z(D_2)$

$\subseteq$

$D^1 \subseteq D_1$
$D^2 \subseteq D_2$ $\Rightarrow$ $D^1 \otimes D^2 \subseteq D_1 \otimes D_2$

$a \otimes b = a' \otimes b' \Rightarrow a \otimes b - a' \otimes b' = 0$

Scanned with CamScanner

problema 2: Sean D_1 y D_2 dos álgebras de cuaterniones de división sobre un cuerpo K.
Probar que si existe una extensión cuadrática L de K que se incrusta en D_1 y D_2 simultaneamente, entonces $D_1 \otimes_K D_2 \cong \mathbb{M}_2(D_3)$, D_3 = álg. de cuaterniones.

Demostración: Sabemos que D_1, D_2 son álgebras centrales simples sobre K (Además son álgebras de división) tales que $\dim_K D_i = 4$, $i=1,2$.

Recordemos que en clase vimos que si $\mathcal{A}, C$ son K-algebras C.S entonces $\mathcal{A}\otimes_K C$ es C. simple (Así estaba bien definido el producto en el grupo de Brauer).

Así $D_1 \otimes_K D_2$ es una K-álgebra central simple con $\dim_K D_1\otimes_K D_2 = \dim_K(D_1)\dim_K(D_2) = 16$.

Usaremos ahora que existe $L \overset{i_1,i_2}{\hookrightarrow} D_1, D_2$, L/K extensión cuadrática.

Observe que si $L \xrightarrow{i_1} D_1$, $L \xrightarrow{i_2} D_2$ es homomorfismo entonces existe:

$$L\times L \xrightarrow{i_1\otimes i_2} D_1\otimes D_2$$
$$(l_1,l_2) \longmapsto i_1(l_1)\otimes i_2(l_2)$$

K-bilineal. Por la p. universal del p. tensorial, existe

$$I: L\otimes L \longrightarrow D_1\otimes D_2.$$
$$l_1\otimes l_2 \longmapsto i_1(l_1)\otimes i_2(l_2)$$

Observe que si: Como L es un K-módulo

$\Rightarrow L$ es libre$/K$, pues K cuerpo, y así $0\to L\xrightarrow{i_j} D_j$ sigue siendo exacta si tensorizamos:

$$0\to L\otimes L \xrightarrow{id\otimes i_2} L\otimes D_2$$ i_2 inyectiva?

$$L\otimes D_2 \xrightarrow{i_1\otimes id} D_1\otimes D_2$$

Como D_1 es un K-módulo libre también (de dimensión 4), se tiene que también es inyectiva. Así $I = i_1\otimes id \circ id\otimes i_2$ es inyectiva.

$$\boxed{L\otimes_K L \overset{i_1\otimes i_2}{\hookrightarrow} D_1\otimes_K D_2.}$$ $\to$ importante resaltar este hecho

Por lo tanto

Ahora bien, como $L \cong \frac{K[x]}{(p(x))}$, $p(x)\in K[x]$ irred de grado 2, se tiene que:

$$L\otimes_K L \cong \frac{L[x]}{((p(x)))} = \frac{L[x]}{((x-a)(x-b))}$$, ciertos a y b en L raíces de $p(x)$

observe que $\overline{(x-a)} \in \frac{L[x]}{((x-a)(x-b))}$ es no nulo, pues $(x-a)(x-b) \nmid (x-a)$, pero $\overline{(x-a)}\,\overline{(x-b)} = \overline{0}$

Por lo tanto en (.0.) hay divisores de cero.

Por otro lado $D_1 \otimes_K D_2$ es un álgebra central simple sobre K, de dimensión 16, por lo tanto:

$$D_1 \otimes_K D_2 \cong \begin{cases} D_4, & D_4 \text{ alg. división} \\ \mathbb{M}_2(D_3), & D_3 \text{ alg. división sobre } K \text{, de dimensión } 4 \\ \mathbb{M}_4(k) \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{M}_2(K)) \end{cases}$$

observe que estos dos últimos casos corresponden a lo pedido ed: $D_1 \otimes D_2 \cong \mathbb{M}_2(D_3)$, D_3 K-álg. central simple de dimensión 4 ed: D_3 álg. de cuaterniones. (En clase se vió que las K-alg. c. simples de dimensión 4 son las de cuaterniones, incluyendo las cíclicas en caso de característica 2). (*)

PD: $D_1 \otimes_K D_2 \cong D_4$, D_4 alg. división

observe que en $D_1 \otimes_K D_2$ existen divisores de cero, pues en $1 \otimes_K L \xhookrightarrow{i_1 \otimes i_2} D_1 \otimes_K D_2$ hay div. de cero. Luego si $D_1 \otimes D_2$ fuese de división, para xy: $xy = 0$, $x, y \neq 0$, existe x^{-1}: $xx^{-1} = x^{-1}x = 1 \Rightarrow x^{-1}(xy) = 0 \Rightarrow (x^{-1}x)y = 0 \Rightarrow y = 0$ (→←).

$\therefore D_1 \otimes_K D_2$ no es alg. división. $L_1 L_2 = L_1 \otimes_K L_2 \longrightarrow D_1 \otimes_K D_2$ [cuerpo]

$\varphi(a, b) = \varphi(a', b')$

$\rightarrow i_1(a) \otimes i_2(b) = i_1(a') \otimes i_2(b')$

$\therefore D_1 \otimes_K D_2 \cong \mathbb{M}_2(D_3)$, D_3 alg de cuaterniones.

$i_1(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) \otimes i_2(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2)$

$= \alpha_1 \beta_1 i_1(a_1) \otimes i_2(a_1) + \alpha_1 \beta_2 i_1(a_1) \otimes i_2(a_2)$

$+ \alpha_2 \beta_1 i_1(a_2) \otimes i_2(a_1) + \alpha_2 \beta_2 i_1(a_2) \otimes i_2(a_2)$

$0 = (\alpha_1\beta_1 - \alpha_1'\beta_1') i_1(a_1) \otimes i_2(a_1) + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_1'\beta_2') i_1(a_1) \otimes i_2(a_2)$

$+ (\alpha_2\beta_1 - \alpha_2'\beta_1') i_1(a_2) \otimes i_2(a_1) + (\alpha_2\beta_2 - \alpha_2'\beta_2') i_1(a_2) \otimes i_2(a_2)$

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_1\beta_1 - \alpha_1'\beta_1' = 0 \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_1'\beta_2' = 0 \\ \alpha_2\beta_1 - \alpha_2'\beta_1' = 0 \\ \alpha_2\beta_2 - \alpha_2'\beta_2' = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \alpha_1(\beta_1 - \beta_2) - \alpha_1'(\beta_1' - \beta_2') = 0 \\ \underline{\alpha_2(\beta_1 - \beta_2) - \alpha_2'(\beta_1' - \beta_2')} = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) = (\alpha_1' - \alpha_2')(\beta_1' - \beta_2')$

<u>Observación</u>: Si D_1 o D_2 no fuese de división, entonces $D_1 \cong \mathbb{M}_2(K)$ o $D_2 \cong \mathbb{M}_2(K)$ (pues son central es simples y este es el único caso que resta)

$\tilde{\varphi}: L \otimes L \rightarrow D_1 \otimes D_2$

$a \otimes 1$

SPG: $D_1 \cong \mathbb{M}_2(K)$. Entonces:

$$D_1 \otimes D_2 \cong \mathbb{M}_2(K) \otimes_K D_2 \cong \mathbb{M}_2(D_2)$$

y el resultado se sigue.

<u>Ejemplo</u>: Sabemos que $Br(\mathbb{R}) \cong C_2$, luego como $\mathbb{H} = \left(\frac{-1, -1}{\mathbb{R}}\right) \ncong \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, por ser alg. de división, se tiene que $\operatorname{ord}([\mathbb{H}]) = 2$ ed: $\langle [\mathbb{H}] \rangle = Br(\mathbb{R})$. Por lo tanto:

$$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{M}_4(\mathbb{R}) \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})),$$

con $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ alg. de cuaterniones.

Demostración de un hecho : $M_2(D) \cong M_2(k) \otimes_k D$.

Considere : $\phi : M_2(k) \times D \longrightarrow M_2(D)$. Claramente ϕ es k-bilineal
$((a_{ij}), d) \longmapsto (a_{ij} d)$

Luego existe $\hat{\phi} : M_2(k) \otimes D \longrightarrow M_2(D)$ k-lineal
$(a_{ij}) \otimes d \longmapsto (a_{ij} d)$

observe que $\hat{\phi}$ es sobreyectiva pues $\hat{\phi}((e_{ij}) \otimes d) = \begin{array}{cc} & j \\ i \to & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & d & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ $\forall d \in D$.

y como $\dim M_2(D) = 4 \dim_k D = \dim M_2(k) \otimes D$, se tiene que $\hat{\phi}$ es isomorfismo.

La misma demostración prueba que : $M_n(k) \otimes_k D \cong M_n(D)$, $\forall D$ k-alg. de dimensión finita.

(*) faltó lo siguiente :

① $M_2(k)$ sabemos que es un k-álgebra central simple de dimensión 4 $\Rightarrow M_2(k)$ es un álgebra de cuaterniones

② Si $M \cong M_2(D_3)$, $\dim D_3 = 4$, D_3 alg. div. entonces D_3 es simple, pues

Si $I \subseteq D_3$ ideal , $I \neq (0) \Rightarrow \exists x \in I$, $x \neq 0 \Rightarrow 1 = x^{-1}x \in I \Rightarrow I = D_3$.

Además D_3 central pues $k\mathbb{I} = Z(M_2(D_3)) \cong Z(D_3)\mathbb{I}$, por ello $k = Z(D_3)$

Luego D_3 k-alg. c. simple de dimensión 4 $\Rightarrow$ D_3 álg. de cuaterniones sobre k.

Problema 3: $K = \mathbb{Q}(x,y)$. Probar que un álgebra de cuaterniones $D = K \oplus iK \oplus jK \oplus ijK$ con $i^2 = x$, $j^2 = y \in K$ es un álgebra de división.

Demostración: Supongamos que no. Por lo mostrado en el problema 1 esto es equivalente a que existan $p(x,y), f(x,y), r(x,y) \in K$ no todos nulos tales que:

(2) $p(x,y)^2 - x f(x,y)^2 = y r(x,y)^2$. (Multiplicando por el cuadrado del mcd de los denominadores el SPG: $p, f, r \in \mathbb{Q}[x,y]$)

1) Si $r(x,y) = 0$ entonces: (4) $p(x,y)^2 = x f(x,y)^2$, luego como son no todas nulas $p, f \neq 0$

Luego $(p/f)^2 = x$. Observe que $p(x,y) = a_0(x) + y a_1(x) + \dots + y^n a_n(x)$
$f(x,y) = b_0(x) + y b_1(x) + \dots + y^m b_m(x)$

$p(x,y)^2 = a_0(x)^2 + \sum_{i=1}^{n} y^i \tilde{a}_i(x) = x f(x,y)^2 = x b_0(x)^2 + \sum_{i=1}^{m} x y^i \tilde{b}_i(x)$

Entonces: $a_0(x)^2 = x b_0^2(x)$, pero $a_0(x)^2$ tiene término libre y $x b_0^2(x)$ no.

Viendo los términos libres

Así: $x \mid a_0(x) \Rightarrow x^2 \hat{a}_0(x) = x b_0^2(x) \Rightarrow x \hat{a}_0(x) = b_0^2(x)$ y aplicamos lo mismo que ya se dijo para $b_0(x)$: $x \mid b_0(x)$. Por inducción seguimos eliminando los términos de $a_0(x), b_0(x) \Rightarrow a_0(x) = b_0(x) = 0$.

Luego: $y \mid p(x,y)$, $y \mid f(x,y)$. Dividiendo por y^2 en (4) tenemos que $\hat{p}(x,y) = x \hat{f}(x,y)$, $\partial_y \hat{p} < \partial_y p$, $\partial_y \hat{f} < \partial_y f$ grado

y repetimos el proceso, podemos seguir eliminando términos $\Rightarrow p(x,y) = f(x,y) = 0$ ($\Rightarrow\!\Leftarrow$).

2) Si $r(x,y) \neq 0$ entonces: $p(x,y)^2 - x f(x,y)^2 = y r(x,y)^2$ (3)

Si expandimos en polinomios en y: $p(x,y)^2 = a_0(x)^2 + \sum y^i \tilde{a}_i(x)$, $p(x,y) = a_0(x) + \text{t.o.s}$

$f(x,y)^2 = b_0(x)^2 + \sum y^i \tilde{b}_i(x)$, $f(x,y) = b_0(x) + \text{t.o.s}$

Así $y \mid a_0(x)^2 - x b_0(x)^2$. (pues divide todos los otros términos en (3))

Lo anterior sucede ssi $a_0(x)^2 = x b_0(x)^2$. Por lo anterior $\Rightarrow a_0(x) = b_0(x) = 0$.

Así $p(x,y) = y\, p_1(x,y)$, $f(x,y) = y\, f_1(x,y)$ $\Rightarrow y \mid r(x,y)^2 \Rightarrow$ término libre de $r(x,y) = 0$ (respecto a la expansión de y) e.d. $r_0(x) = 0$, donde $r(x,y) = r_0(x) + \text{t.o.s}$

$\Rightarrow r(x,y) = y\, r_1(x,y) \Rightarrow y\, r_1^2(x,y) = p_1^2(x,y) - x f_1^2(x,y)$. Por inducción llegamos a que $r_1(x,y) = p_1(x,y) = f_1(x,y) = 0$ (pues bajamos en 1 el grado en cada paso).

$\therefore$ No hay soluciones de (2) no triviales $\therefore$ D es álgebra de división.

Observación: Una forma sencilla de argumentar que no existen sol. no triviales de (2) es la siguiente. Si existieran los polinomios $p(x,y), q(x,y), r(x,y)$ no todos nulos tales que:

$$p(x,y)^2 - x\, q^2(x,y) - y\, r^2(x,y) = 0$$

$q^2(x,y), r^2(x,y), p^2(x,y) \neq 0$ ed: tienen

Entonces y satisfacería un polinomio no trivial, (pues algún coeficiente, que es un polinomio en la variable x, no nulo) con coef. en x. Así y algebraico sobre $\mathbb{R}(x)$, pero $\mathbb{R}(x,y)/\mathbb{R}(x)$ es una extensión trascendente. (*).

Luego $r(x,y) = 0$ y los polinomios $p(x,y) = p(x)$, $q(x,y) = q(x)$ tienen por variable sólo x.

Así:

$$p^2(x) - x\, q^2(x) = 0$$

$\therefore$ x es algebraico sobre $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $p(x) = q(x) = 0$ (*)

$\therefore$ no hay soluciones no triviales para (2)

$\therefore$ D álgebra de división.

Problema 4: Encuentre todas las representaciones irreducibles del álgebra
$$\mathfrak{A} = \mathbb{C}[i,j : i^2 = j^3 = 1,\ iji = j^2].$$

Desarrollo: observe que
$$\mathbb{C}(D_6) = \mathbb{C}[i,j : i^2=j^3=1,\ ji = ij^{-1}]$$
$$= \mathbb{C}[i,j : i^2=j^3=1,\ iji = j^{-1} = j^2],\ \text{pues } i^{-1}=i,\ j^{-1}=j^2$$

e.d: $\mathbb{C}(D_6) \cong \mathfrak{A}$. ✓

Observe que encontrar morfismos de $\mathbb{C}$-álgebras $\mathfrak{A} \xrightarrow{\varphi} M_n(\mathbb{C})$ es lo mismo que encontrar morfismos multiplicativos de: $D_6 \xrightarrow{\varphi} M_n(\mathbb{C})^*$ y extenderlos linealmente. ✓

Lema: Existe una biyección entre $\{\varphi : G \to \mathbb{C}^* \mid \varphi \text{ irreducible}\} \xleftrightarrow{\text{biy}} \{\varphi : G_{ab} \to \mathbb{C}^* \mid \varphi \text{ ired}\}$

Demostración: observe que $\varphi : G \to \mathbb{C}^*$, irreducible $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \varphi(h)\varphi(g)$, pues

$\mathbb{C}^*$ abeliano $\Rightarrow$ $\varphi(gh) = \varphi(hg)$. Por lo tanto φ se factoriza por

$\bar{\varphi} : G/[G:G] = G_{ab} \longrightarrow \mathbb{C}^* = GL_1(\mathbb{C})$ | $\bar{\varphi}$ representación de dimensión 1

$\bar{g} \longmapsto \varphi(g)$ ✓

$\bar{\varphi}(\bar{g}) \bar{\varphi}(\bar{h})$. Claramente $\bar{\varphi}$ irreducible pues

Representación, pues $\bar{\varphi}(\overline{gh}) = \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \bar{\varphi}(\bar{g})\bar{\varphi}(\bar{h})$. Inversamente dado un morfismo

el módulo $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{C}$-módulo irreducible (es simple).

$\bar{\varphi} : G_{ab} \longrightarrow \mathbb{C}^*$

tenemos:
$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$$
$$g \longmapsto \bar{\varphi}(\bar{g})$$
ok.

observe que $\varphi(\overline{gh}) = \varphi(\bar{g}\bar{h}) = \varphi(\bar{g})\varphi(\bar{h})$. $\therefore$ φ rep. de grado $1 \Rightarrow \varphi$ rep. irreducible de G. ✓

(pues $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{C}$-módulo irreducible). Observe que si tomamos $\bar{\varphi} : G_{ab} \to \mathbb{C}^*$, la levantamos a $\varphi : G \to \mathbb{C}^*$ y luego la restringimos al cociente obtenemos $\hat{\varphi} = \bar{\varphi}$, lo mismo si restringimos al cociente G_{ab} y luego levantamos. $\therefore$ Son func. inversas $\therefore$ hay biyección.

Corolario: $\#\{\varphi : G \to \mathbb{C}^* \mid \varphi \text{ ired}, \varphi \text{ rep}\} = \#\{\varphi : G_{ab} \to \mathbb{C}^* \mid \varphi \text{ rep, ired}\} = |G_{ab}|$

Demostración: Sabemos que $\#\{\varphi : G_{ab} \to M_n(\mathbb{C})^* \mid \varphi \text{ ired}\} = \#$ clases de conj. de G_{ab} $= |G_{ab}|$ ✓

pues G_{ab} es abeliano. Además las rep. complejas de un grupo abeliano son de dimensión 1

Complejas: $\bar{K} = K$ ... $K[G] \cong \prod_{i=1}^{n} K$ ... $n = |G|$ $\bar{K} = K \Rightarrow K[G] = \prod_{i=1}^{n} K$ $n = |G|$

$$\boxed{\begin{array}{c|c} [r,e]=e & [r^2,e]=e \\ [r,s]=r^2 & [r^2,s]=e \end{array}}$$

$$\begin{array}{c|c|c} [s,e]=e & [r,r]=e & \therefore [D_3,D_3]=\langle r\rangle \\ [s,r]=r & [r^2,r^2]=e & \\ [s,r^2]=r & [s,s]=e & \end{array}$$

Corolario: $\# \{ \varphi : D_6 \to \mathbb{C}^* \mid \varphi \text{ rep} \} = 2$

Demostración: observe que $[D_6,D_6] = \langle iji^{-1}j^{-1}, \; jij^{-1}i^{-1} \rangle$

$[G,G] = \langle [g,h] / g,h \in G \rangle \mid [g,h]=ghg^{-1}h^{-1}$ $\quad = \langle ijij^{-1}, \; jij^2 i \rangle$

$D_3 = \langle r,s / r^3 = s^2 = e, \; srs = r^2 \rangle \quad sr = r^2 s$ $\quad = \langle j, j^2 \rangle = \langle j \rangle$ ok

Así $D_6 / [D_6,D_6] = \langle \bar{i} \mid \bar{i}^2 = 1 \rangle \cong C_2.$

$[r,s] = rsr^{-1}s^{-1} = rsr^2 s = rssr = r^2$ $\;\Big|\;$ $[r^2,s] = r^2 s r^{-2} s^{-1} = r^2 srs = srr^2 s = e$

$[r,e]=e$ $\qquad$ $[s,r] = srsr^{-1} = srsr^2 = r^2 ssr^2 = r$

$[s,e]=e$ $\qquad$ $[s,r^2] = sr^2 sr^{-2} = sr^2 sr = sr^2 r^2 s = srs = r^2$

Observación: Sabemos que $\#$ rep. irreducibles de $G = \#$ Clases de Conjugación. Pero $D_6 \cong S_3$ y en S_3 hay solo 3 clases de conjugación, a saber $\{[id], [(12)], [(123)]\}$.

$|G| = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$; $h_i = \dim \varphi_i$, φ_i = rep. irreducible de D_6

Luego como $\quad 6 = 1 + 1 + h_3^2 \Rightarrow h_3 = 2.$

Por ello nos queda encontrar una rep. de dimensión 2 y las dos de dimensión 1.

Observe que: $S_3 = \langle (12), (123) \mid (12)^2 = e = (123)^3, \; (12)(123)(12) = (132) = (123)^{-1} \rangle$

ie: S_3 satisface las mismas rel. que D_6 (satisfacen iguales rel. en los mismos generadores) $\therefore$ Por la p. universal, existe $\phi : S_3 \xrightarrow{\cong} D_6$

Así tenemos dos representaciones de dimensión 1 distintas (pues tienen distintos caracteres)

$$\chi_0 = \varphi_0 : \begin{array}{l} D_6 \longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ i \longmapsto +1 \\ j \longmapsto 1 \end{array}$$

En dimensión 1

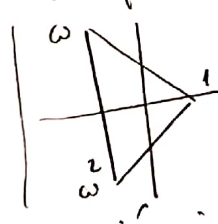
caracter = representación

$$\chi_1 = \varphi_1 : \begin{array}{l} D_6 \longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ i \longmapsto -1 \\ j \longmapsto 1 \end{array}$$

$\{1, \omega\}$ base de $\mathbb{C}$

Por último observe que D_6 actúa sobre el triángulo (de hecho transitivamente, $D_6 = \mathrm{Sim}(\Delta)$)

Luego:



$1 + \omega + \omega^2 = 0$

$T_r(1) = \omega$
$T_r(\omega) = \omega^2 = -1 - \omega$
$T_r(\omega^2) = 1$

$T_r(1) = \omega$
$T_r(\omega) = -1 - \omega$

$$\varphi_2 : \begin{array}{l} D_6 \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^* \\ j \longmapsto \text{rotación en } 120^\circ = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & -\sin(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) & \cos 2\pi/3 \end{pmatrix} \\ i \longmapsto \text{reflexión entorno al eje } X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

es la otra representación irreducible ($\mathbb{C}$ fa de grado 2)

(irred)

$T_r(\omega^2) = T_r(-1-\omega) = -1 - T_r(\omega) = -1 - (-1-\omega) = \omega$

$$[T_r] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Otra forma de Encontrar la representación de grado 2, irreducible, es la siguiente:

Sabemos que en $D_6 \cong S_3$ hay 3 clases de conjugación, a saber $\{[id],[(12)],[(123)]\}$

Luego la tabla de caracteres de $S_3 \cong D_6$ es la siguiente:

		χ_0	χ_1	χ_{φ_2}
(1)	id	1	1	2
(3)	(12)	1	-1	x
(2)	(123)	1	1	y

Esto pues $\chi_{\varphi_2}(id) = tr\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = 2$. Luego por las relaciones de ortogonalidad entre caracteres tenemos que:

$$0 = \langle \chi_1, \chi_{\varphi_2}\rangle = \frac{1}{6}\left(2 - 3x + 2y\right)$$
$$0 = \langle \chi_0, \chi_{\varphi_2}\rangle = \frac{1}{6}\left(2 + 3x + 2y\right)$$

Por lo tanto: $x = 0,\ y = -1$, ed: la tabla de caracteres irred. de $D_6 \cong S_3$ es:

		χ_0	χ_1	χ_{φ_2}
(1)	id	1	1	2
(3)	(12)	1	-1	0
(2)	(123)	1	1	-1

Luego, como sabemos, $\langle(123)\rangle \cong C_3$ abeliano, por lo tanto sus rep. irreducibles son todas de dimensión uno en $\mathbb{C}$ (pues $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$), así: $\boxed{\varphi_2(123) = \begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}}$ — visto en clases! ole ole ok, pues $\varphi_2|_{\langle(123)\rangle} : C_3 \longrightarrow M_2(\mathbb{C})^*$ representación.

Luego como $\varphi_2(123)^3 = \varphi_2(id) = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, se tiene que $\alpha^3 = \beta^3 = 1$ por ello $\alpha, \beta \in \{1, \omega, \omega^2\}$, $\omega = e^{2\pi i/3}$. Por otro lado como $\omega^2 + \omega = -1$ tenemos que en este caso $\chi_{\varphi_2}(123) = -1$ y sólo en este caso, pues si: $\alpha = 1,\ \beta = \omega$ o $\omega^2 \Rightarrow \alpha+\beta = \chi_{\varphi_2}(123) = 1+\omega \neq$

y si fueran iguales $\alpha = \beta = 1$ o ω o $\omega^2 \Rightarrow$ $\alpha+\beta = \chi_{\varphi_2}(123) = 2\cdot\alpha \neq -1$.

Por lo tanto en alguna base:

$$\varphi_2(123) = \begin{pmatrix}\omega&0\\0&\omega^2\end{pmatrix}.$$ la única posibilidad

Ahora bien como $\boxed{(12)(123)(12) = (123)^{-1}}$, tenemos que si: $A = \varphi_2(12)$ entonces

$$A\begin{pmatrix}\omega&0\\0&\omega^2\end{pmatrix}A^{-1} = \begin{pmatrix}\omega^2&0\\0&\omega\end{pmatrix},\quad A^2 = id$$

Por lo tanto si: $A = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ entonces:

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^2\end{pmatrix}$$

ed:
$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} aw & bw^2 \\ cw & dw^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} adw-bcw^2 & abw^2-baw \\ cdw-cdw^2 & adw^2-cbw\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^2\end{pmatrix}$$

por lo tanto: $\begin{cases} abw^2 = baw \Rightarrow ba=0 \\ cdw = cdw^2 \Rightarrow cd=0 \\ adw-bcw^2 = w \\ adw^2-bcw = w^2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ o bien $a=d=0$ o $b=c=0$, pues $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \neq 0$

1) Si $b=c=0 \Rightarrow ad=1$, pero $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow a^2=d^2=1$, $ad=1$

$\Rightarrow A = \pm id$, en este caso $\varphi_2 : \mathbb{C}(D_6) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, $\sum z_i g_i \mapsto$ matriz diagonal, pues $\varphi_2((12)), \varphi_2((123)), \varphi_2(id)$

son diagonales.

Luego φ_2 se descompone como suma de dos rep. irred. de dimensión 1 (⟹⟸).

2) Si $a=d=0$ entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0\end{pmatrix}$, pero $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ed:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

todo esto se puede omitir

$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0\end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{C}^\times$. Si tomamos $b=1$, tenemos que:

$$\varphi_2 : D_6 \longrightarrow \mathbb{M}_2^*(\mathbb{C})$$
$$id \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$(12) \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$(123) \longrightarrow \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^2\end{pmatrix}.$$

observación: Es irreducible pues $\varphi_2(\mathbb{C}(D_6)) = \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ y $\mathbb{C}^2$ es un $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ - módulo irreducible.

Esto pues $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \varphi_2(id), \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = \varphi_2(12), \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^2\end{pmatrix} = \varphi_3(123), \varphi((12)(123)) = \begin{pmatrix} 0 & w^2 \\ w & 0\end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto l.i en $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, luego son base, por ello con c.l de estos obtenemos $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$

$\therefore \varphi_2(\mathbb{C}(D_6)) = \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

$\therefore \varphi_2$ irreducible.

Problema 5: Probar que cada elemento $\rho \in G$, G grupo finito y cada caracter complejo, el valor $\chi(\rho)$ es un entero algebraico.

Demostración: Considere $\varphi: G \to \mathbb{M}_n(K)^*$ representación asociada a χ

ed: $tr(\varphi(\rho)) = \chi(\rho)$, $\forall \rho \in G$.

Considere la matriz $\varphi(\rho) \in \mathbb{M}_n(K)^*$. Entonces en alguna base: bloque con 1 y 0's.

$$A\varphi(\rho)A^{-1} = [\varphi(\rho)]_{\text{en otra base}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ddots & 1,0 & & & \\ & \ddots & \lambda_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_s & 1,0 \\ & 0 & & & \ddots & \lambda_s \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{M}_n(K)$$

$\varphi(\rho)$ tiene su forma de Jordan. Observe que y para $n = |G|$

$$(A\varphi(\rho)A^{-1})^n = A\varphi(\rho^n)A^{-1} = A\varphi(id)A^{-1} = id$$

Por otro lado:

$$(A\varphi(\rho)A^{-1})^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \ddots & 1,0 & & & \\ & \ddots & \lambda_1^n & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_s^n & 1,0 \\ & 0 & & & \ddots & \lambda_s^n \end{pmatrix}$$

De esto se sigue que: $\lambda_1^n = 1, \ldots, \lambda_s^n = 1$ ed: los λ_i's son raices de la unidad.

Luego:

$$\chi(\rho) = tr(\varphi(\rho)) = tr(A\varphi(\rho)A^{-1}) = \alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_s\lambda_s$$
$$= \text{Suma de raices de la unidad.}$$

En particular, como las raices de la unidad son enteros algebraicos, pues satisfacen el polinómico $x^r - 1 = 0$, cierto $r \in \mathbb{N}$ y el conj. de enteros alg. es un anillo, $\chi(\rho)$ es un entero algebraico.

Scanned with CamScanner

Problema 6 : Encuentre la tabla de caracteres del grupo no abeliano de orden 21.

Desarrollo: ① Encontremos dicho grupo.

Desarrollo: Como $|G| = 3\cdot 7$ y $n_7 | 3$, $n_7 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow n_7 = 1$. $\therefore \exists P$ un 7-Sylow

$P \trianglelefteq G$. Sea S un 3-Sylow entonces $S = \langle a \rangle$, $P = \langle b \rangle$. Por la normalidad

de P: $a P a^{-1} = P$ ed, $aba^{-1} = b^i$, $i \in \{1, \dots, 6\}$.

observe que: $a b^n a^{-1} = (aba^{-1})^n = b^{in}$, por lo mismo $a^n b a^{-n} = a^{n-1}(aba^{-1})a^{-n+1}$

$= a^{n-1}(b^i)a^{-n+1} = a^{n-2}(ab^ia^{-1})a^{-n+2} = a^{n-2} b^{i^2} a^{-n+2} = \dots = b^{i^n}$.

Luego como $b = a^3 b a^{-3} = b^{i^3}$ se tiene que $i^3 \equiv 1 \pmod 7$. ed: $i \in \{1, 2, 4\}$.

observe que $SP = \langle a, b \rangle \subseteq G$ con $|SP| = \dfrac{|S||P|}{|S \cap P|} = 21 = |G|$, pues si: $x \in S \cap P$

$\Rightarrow |x| \mid 3, 7 \Rightarrow |x| = 1$.

Por ello $SP = \langle a, b \rangle = G$.

i) Si $i = 1$: entonces $G = \langle a, b : a^3 = b^7 = 1, ab = ba \rangle$ = abeliano y este grupo no es el que buscamos. De hecho $G \cong C_{21}$.

$aba^{-1} = b^2$

$ba^{-1} = a^{-1}b^2$

$ba^{-1}b^{-1} = a^{-1}b$

$bab^{-1} = ba$

ii) Si $i = 2$: $G = \langle a, b : a^3 = b^7 = 1, aba^{-1} = b^2 \rangle$

iii) Si $i = 4$: $G = \langle a, b : a^3 = b^7 = 1, aba^{-1} = b^4 \rangle$

observe que tanto a como a^2 generan S, por lo tanto si decimos que $x = a^2$ en (ii) se tiene que:

$G = \langle x, b : x^3 = b^7 = 1, xbx^{-1} = a^2ba^{-2} = b^{2^2} = b^4 \rangle$.

$\therefore$ ii) e iii) Dan grupos isomorfos (mismos gen. e iguales relaciones)

$\therefore$ $G \cong \langle a, b : a^3 = b^7 = 1, aba^{-1} = b^2 \rangle$, si G no abeliano y $|G| = 21$.

$\boxed{aba^{-1}b^{-1} = b}$

$r^{-1}srs^{-1} = r \Rightarrow r^{-1} = rsr^{-1}s^{-1}$

r^2

(2) Encontremos las clases de conjugación en G.

Desarrollo: Primero escribamos G por extensión

$$G = \{1, \dots, b^6, a, ab, \dots, ab^6, a^2, a^2b, \dots, a^2b^6\}.$$

Estos son 21 elementos en G todos distintos pues si $a^ib^j = a^xb^y \Rightarrow a^{i-x} = b^{y-j}$ $(*)$.

i) observe que $(a^ib^j)(b^x)(b^{-j}a^{-i}) = a^ib^xa^{-i} = (a^iba^{-i})^x = (b^{2^i})^x = b^{2^i \cdot x}$

Luego si $x \neq 0$, como $i \in \{0,1,2\}$ entonces: $[b^x] = \{b^x, b^{2x}, b^{4x}\}$.

Por ello $[id] = \{id\}$, $[b] = \{b, b^2, b^4\}$, $[b^3] = \{b^3, b^6, b^5\}$.

ii) Calculemos la clase de conjugación de $a \in G$. Observe que:

$$(a^ib^j)a(a^ib^j)^{-1} = a^ib^j\underline{a}b^{-j}a^{-i}$$

Analicemos el término b^ja. Observemos que $ab = b^2a$, así $ba = b^8a = b^6b^2a = b^6ab = b^4ab^2 = ab^4$

$$b^ja = b^{j-1}(ba) = b^{j-1}ab^4 = b^{j-2}bab^4 = b^{j-2}ab^{4\cdot 2} = \dots = ab^{4j}.$$ Además:

Por lo tanto $ba^x = ba(a^{x-1}) = ab^4a^{x-1} = a\underline{b^4a}a^{x-2} = a^2b^{4^2}a^{x-2} = \dots = a^xb^{4^x}$.

Por lo tanto:

$$(a^ib^j)a(a^ib^j)^{-1} = a^iab^{4j}b^{-j}a^{-i} = a^{i+1}b^{3j}a^{-i} =$$

pero $b^{3j}a^{-i} = b^{3j-1}ba^{-i} = b^{3j-1}a^{-i}b^{4^{-i}} = \dots = a^{-i}b^{3j4^{-i}}$. Esto nos dice que:

$$(a^ib^j)a(a^ib^j)^{-1} = a^{i+}b^{3j}a^{-i} = ab^{3j4^{i}}$$

b^jab^{-j} recorre: $\{a, ab^3, ab^6, ab^2, ab^5, ab, ab^4\}$

Si $i = 0$, entonces

$\therefore$ $[a] = \{a, ab^3, ab^6, ab^2, ab^5, ab, ab^4\}$.

iii) Por último la clase de conjugación a^2. En efecto:

$$(a^ib^j)a^2(a^ib^j)^{-1} = (a^ib^jab^{-j}a^{-i})^2$$

pero $a^ib^jab^{-j}a^{-i} = ab^{\alpha}$, para $\alpha = 3j4^{-i}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}(a^ib^j)a^2(a^ib^j)^{-1} &= ab^{\alpha}ab^{\alpha} \\ &= a^2b^{4\alpha}b^{\alpha} = a^2b^{5\alpha} \\ &= a^2b^{15j4^{-i}} = a^2b^{j4^{-i}}\end{aligned}$$

Si $i = 0$, entonces: $[a^2] = \{a^2, a^2b, a^2b^2, a^2b^3, a^2b^4, a^2b^5, a^2b^6\}$

Luego las clases de conjugación en G son:

	# elementos
$[id]$	1
$[b]$	3
$[b^3]$	3
$[a]$	7
$[a^2]$	7

Lo que nos dice que G tiene 5 rep. irreducibles distintas.

③ Calculemos el nº de representaciones de dimensión 1 y cuales son.

<u>Desarrollo</u>: Sabemos que # rep. de dimensión 1 = # Rep. de dimensión 1 en $G/[G,G] = |G/[G,G]|$.

observe que $[G,G] = \{a^i b^j a^{-i} b^{-j} \mid j \in \{0,\dots,6\}, i \in \{0,\dots,2\}\}$. Pero $a^i b^j a^{-i} = (a^i b a^{-i})^j = b^{2^i j}$

Por lo tanto $[G,G] = \{b^{2^i j - j} \mid j \in \{0,\dots,6\}, i \in \{0,\dots,2\}\} = \langle b \rangle$, pues si $i=1, j=1$, tenemos que $b \in [G,G]$.

por ello $G/[G,G] = \langle \bar{a}, \bar{b} : \bar{b} = 1 = \bar{a}^3 : \bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1} = \bar{b} \rangle \cong C_3$. Por ello existen 3 rep. de dimensión 1.

observe que siempre entre las 3 rep. irred de dimensión 1 tenemos la trivial.

$$\chi_0 : G \to \mathbb{C}^\times$$
$$a, b \mapsto 1$$

Por lo visto en el problema 4, las representaciones de G de dimensión 1 son las rep. de Gab de dim 1.
Como $\bar{b} = \bar{b}^3 = id$ en Gab, estas tienen asociado el mismo número, para las rep. de dim. 1
$\chi_i(id) = 1$, por ser $\chi_i = \rho_i$ un homo de grupos, para ρ_i rep. de dimensión distintas de la trivial. Observe que

Así tenemos:

#	Clases	χ_0	χ_1	χ_2
1	$[id]$	1	1	1
3	$[b]$	1	1	1
3	$[b^3]$	1	1	1
7	$[a]$	1	x	x'
7	$[a^2]$	1	y	y'

por la ortogonalidad de los caracteres

$$0 = \langle \chi_0, \chi_1 \rangle = \frac{1}{21}(1 + 3\cdot 1 + 3\cdot 1 + 7x + 7y)$$

Observe que $a^{-1} = a^2$, $b^{-1} = b^6 \in [b^3]$, por ello:

$$1 = \langle \chi_1, \chi_1 \rangle = \frac{1}{21}(1 + 3 + 3 + 7xy + 7xy)$$

Es decir:

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

Luego x cumple con la ecuación : $x^2+x+1=0$ $\Rightarrow x = \omega$ ó ω^2, $\omega = e^{2\pi i/3}$, Como y cumple con la misma ecuación.
[en el caso $k=\mathbb{C}$, en otro caso es una raíz cúbica de la unidad no trivial.]

$\therefore x=\omega,\ y=\omega^2$ ó $x=\omega^2,\ y=\omega$.

Observe que si tomamos caracteres distintos entonces tenemos representaciones irred. distintas.
Por lo tanto la tabla de caracteres (que coincide con las rep irreducibles, pues estamos en dimensión 1) es:

#		χ_0	χ_1	χ_2
(1)	[id]	1	1	1
(3)	[b]	1	1	1
(3)	[b3]	1	1	1
(7)	[a]	1	ω	ω^2
(7)	[a²]	1	ω^2	ω

Esto pues los tres caracteres son distintos, luego las rep. son distintas y sabemos que hay 3.

__Observación__ : $\langle \chi_1,\chi_2\rangle = \frac{1}{21}\left(1+3+3+7\omega^2+7\omega\right) = \frac{1}{21}\left(7(\omega+\omega^2+1)\right) = 0$.

Esto concuerda con lo predicho teóricamente

__Observación__ : $21 = |G| = 1^2+1^2+1^2+h_1^2+h_2^2$, a, b = dim de las rep. irred de dimensión >1.

$h_1^2+h_2^2=18$, $a,b\geq 2$ $\Rightarrow h_1=h_2=3$. (única solución posible)

Así :

$\therefore$ las dos rep. restantes tienen dimensión 3.

Luego la tabla de caracteres se completa a :

#		χ_0	χ_1	χ_2	χ_{φ_1}	χ_{φ_2}
(1)	[id]	1	1	1	3	3
(3)	[b]	1	1	1	?	?
(3)	[b3]	1	1	1	?	?
(7)	[a]	1	ω	ω^2	?	?
(7)	[a²]	1	ω^2	ω		

donde φ_1, φ_2 son las rep. irred. de dimensión 3. Esto pues $\chi_{\varphi_i}(id) = tr(\varphi_i(id)) = tr\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right) = 3$.

Observe que φ_1 , $\varphi_1\otimes\chi_1$, $\varphi_1\otimes\chi_2$ son rep. de dimensión 3 irreducibles, por lo visto en clase.
Luego entre las 3 rep. de dim 3 dos deben ser iguales.

Por lo tanto $\chi_{\varphi_1}(a) = \omega\chi_{\varphi_1}(a)$ ó $\omega^2\chi_{\varphi_1}(a)$, $\chi_{\varphi_1}(a^2) = \omega\chi_{\varphi_1}(a)$ ó $\omega^2\chi_{\varphi_1}(a^2)$

$\Rightarrow$ $\chi_{\varphi_1}(a) = \chi_{\varphi_1}(a^2) = 0$. El mismo argumento para φ_2 prueba que

$\chi_{\varphi_2}(a) = \chi_{\varphi_2}(a^2) = 0$.

Por lo tanto tenemos que

		χ_0	χ_{φ_1}
1	[id]	1	3
3	[b]	1	x
3	[b^3]	1	y
7	[a]	1	0
7	[a^2]	1	0

Por las relaciones de ortogonalidad:

$$0 = \langle \chi_0, \chi_{\varphi_1} \rangle = \frac{1}{21}(3+3x+3y)$$
$$1 = \langle \chi_{\varphi_1}, \chi_{\varphi_1} \rangle = \frac{1}{21}(9+3x\bar{y}+3x\bar{y}).$$

Así:

$$x+y+1 = 0, \quad xy = 2$$

Luego: $x^2+x+2=0$. Por ello $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$ [en $\mathbb{C}$, en otro cuerpo es una solución o raíz de dicho polinomio, la hay pues $\bar{E} = K$

Lo mismo vale para y pues las ecuaciones son simétricas. Por ello.

$$x = \frac{-1+\sqrt{-7}}{2}, \; y = \frac{-1-\sqrt{-7}}{2} \quad ó \quad x = \frac{-1-\sqrt{-7}}{2}, \; y = \frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$$

Como estas dos alternativas determinan caracteres distintos, estos valores están asociados a las dos rep. de dimensión 3 de G. Así completamos la tabla:

#		χ_0	χ_1	χ_2	χ_{φ_1}	χ_{φ_2}
(1)	[id]	1	1	1	3	3
(3)	[b]	1	1	1	α	$\bar{\alpha}$
(3)	[b^3]	1	1	1	$\bar{\alpha}$	α
(7)	[a]	1	ω	ω^2	0	0
(7)	[a^2]	1	ω^2	ω	0	0

donde $\alpha, \bar{\alpha}$ son las raíces de $x^2+x+2=0$ en K.

En $\mathbb{C}$: $\alpha = \frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$.

y ω es una raíz cúbica de la unidad no trivial en K.

Observación: $\langle \chi_{\varphi_1}, \chi_{\varphi_2} \rangle = \frac{1}{21}\left(9 + 3x^2 + 3y^2\right) = \frac{1}{21}\left(9 - 3x - 6 - 3y - 6\right)$, pues $x^2 = -x-2$. Así $\langle \chi_{\varphi_1}, \chi_{\varphi_2} \rangle = \frac{1}{21}\left(-3-3x-3y\right) = -\frac{1}{7}(x+y+1) = 0$.

Lo que ya sabíamos de la teoría general.

Observación: Si φ_1 es una rep. irreducible de dimensión 3, entonces si χ es una rep de dimensión 1, tenemos que

$$\varphi_1 \otimes \chi : \mathbb{C}(G) \longrightarrow Aut(\mathbb{C}^3 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}) \cong Aut(\mathbb{C}^3) \equiv M_3(\mathbb{C}) \quad (*)$$
$$g \longmapsto \varphi_1(g) \otimes \chi(g) \mapsto \chi(g)\varphi_1(g)$$

observe que $\varphi_1 \otimes \chi(id) = \chi(id)\varphi_1(g) = id_{M_3(\mathbb{C})}$ y $\varphi_1 \otimes \chi(gh) = \chi(g)\chi(h)\varphi_1(g)\varphi_1(h)$

Como $\chi(g), \chi(h) \in \mathbb{C}$ elemento conmutativo, se tiene que:

$$\varphi_1 \otimes \chi(gh) = \chi(g)\varphi_1(g)\chi(h)\varphi_1(h) = \varphi_1 \otimes \chi(g) \; \varphi_1 \otimes \chi(h).$$

$\therefore$ $\varphi_1 \otimes \chi$ es una representación de G de dimensión 3.

Además $\varphi_1 \otimes \chi\left(\frac{g}{\chi(g)}\right) = \varphi_1(g)$, $\forall g \in G$, donde $\frac{g}{\chi(g)} \in \mathbb{C}[G]$. Por lo tanto $Im\, \varphi_1 \otimes \chi = Im\, \varphi_1 \subseteq M_3(\mathbb{C})$, esto pues $\varphi_1 \otimes \chi(g) = \chi(g)\varphi_1(g) \in \langle \varphi_1(g) \rangle$ siempre

$\therefore$ $Im\, \varphi_1 \otimes \chi \subseteq Im\, \varphi_1$ y la contensión contraria se prueba usando la igualdad anterior.

Como φ_1 irreducible $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}^3$ es un $Im\,\varphi_1$-módulo irreducible, tenemos que $\mathbb{C}^3$ es un $Im(\varphi_1 \otimes \chi)$-módulo irreducible $\quad \therefore$ $\varphi_1 \otimes \chi$ es una rep. irreducible de grado 3 como se había afirmado previamente.

$(*)$ observe que

$$\varphi_1(g) \otimes \chi(g) : \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}$$
$$z \otimes w \longmapsto \varphi_1(g)(z) \otimes \chi(g)(z)$$

. Luego:

$$\varphi_1(g) \otimes \chi(g) : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$$
$$zw \longmapsto \varphi_1(g)(z)\chi(g)(z) = \varphi_1(g)\chi(g)(z)$$

Por ello $\varphi_1(g) \otimes \chi(g) = \varphi_1(g)\chi(g)$.

Scanned with CamScanner