Álgebras de División

- **Af.** $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son las únicas álgebras de división (finito dimensional) sobre $\mathbb{R}$ tales que son conmutativas y con unidad.

Obs. Consideremos A $\mathbb{R}$-álgebra normada $|\cdot|$ $(A \cong \mathbb{R}^n)$

Def. A $\mathbb{R}$-álgebra $\equiv \begin{cases} A \ \mathbb{R}\text{-espacio vectorial} \\ \exists B : A \times A \to A \text{ bilineal } (B(x,y) = xy). \end{cases}$

Def. A álgebra de división $\Leftrightarrow \begin{cases} ax = b \\ xa = b \end{cases}$ tienen solución $x \in A$ $(\forall a, b \in A,\ a \neq 0)$.

equiv: $x \mapsto ax$, $x \mapsto xa$ epiyectivas $\forall a \neq 0$

$x \mapsto ax \Rightarrow \ker(x \mapsto ax) = 0 \Leftrightarrow A$ no tiene divisores de cero.

Interludio: Ejemplos de Álgebras $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ bla bla (leer después).

dem. Supongamos $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$-álgebra de división.

~~def f: S^{n-1} ...~~

Si $n = 1 \Rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}$, quedamos listos.

Si $n > 1$, def.: $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$, $f(x) = x^2/|x|^2$

Af. f bien definida. $x = y \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow |x|^2 = |y|^2 \Rightarrow f(x) = f(y)$.

f es continua. Ya que $(x,y) \mapsto B(x,y) = xy$ es continua en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

• $f(-x) = f(x) \ \forall x \in S^{n-1} \Rightarrow \exists \bar{f} : \mathbb{R}P^{n-1} \to S^{n-1}$

Af. $\bar{f}$ inyectiva.

Sea $x, y \in S^{n-1}$ tq $\bar{f}([x]) = \bar{f}([y]) \Rightarrow f(x) = f(y)$.

$$\Rightarrow \frac{x^2}{|x|^2} = \frac{y^2}{|y|^2} \Rightarrow x^2 = \frac{|x|^2}{|y|^2} y^2 \Rightarrow x^2 = \alpha^2 y^2$$

tq $\alpha = \dfrac{|x|}{|y|} > 0$

$$x^2 = \alpha^2 y^2 \Leftrightarrow x^2 - \alpha^2 y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha y)(x + \alpha y) = 0.$$
$$\Leftrightarrow x = \alpha y \ \vee \ x = -\alpha y. \Leftrightarrow x = \pm \alpha y$$

$$|x| = |\alpha| \, |y| \to |\alpha| = 1$$

Como $x, y \in S^{n-1} \Rightarrow |x| = |y| = 1 \Rightarrow$ $\underset{1}{|x|} = |\alpha| \underset{1}{|y|}$

$$\therefore \ x = \pm y$$
$$\therefore \ [x] = [y].$$

Por lo tanto, $\bar{f}$ es inyectiva.

Acá hay que ocupar Corolario 2B.4 (Hatcher).

Corolario 2B.4: M n-variedad compacta, N n-variedad conexa

$\Rightarrow$ toda incrustación $h : M \to N$ es epiyectiva, luego [homeomorfa]

Del corolario 2B.4 se tiene que $\bar{f} : \mathbb{R}P^{n-1} \to S^{n-1}$ es un homeo cuando $n \neq 1$ ($\mathbb{R}P^{n-1}$, S^{n-1} espacios hausdorff compactos).

$$\therefore \ \mathbb{R}P^{n-1} \simeq S^{n-1} \qquad (n \neq 1)$$

pero $H_k(\mathbb{R}P^{n-1}) \neq H_k(S^{n-1})$ (averiguar cuál es cuál) cuando $n > 2$.

Pd: A $\mathbb{R}$-algebra conmutativa 2-dimensional con identidad es isomorfa a $\mathbb{C}$.

dem: Supongamos 1 es la identidad de A.

Supongamos que ~~A ≠ R 1~~ $j \in A$ no es escalar real (j multiplo de $1 \in A$). Escribimos $j^2 = a + bj$

$A \cong \mathbb{R} \oplus j\mathbb{R}$ ← debe ser así

$$j^2 = a + bj \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow j^2 - bj = a \Leftrightarrow j^2 - bj + \frac{b^2}{4} = a + \frac{b^2}{4} \Rightarrow \left(j - \frac{b}{2}\right)^2 = a + \frac{b^2}{4}$$

$$\cancel{j' = j - \frac{b}{2} \Rightarrow j'^2 = j^2 - bj + \frac{b^2}{4} = a + \frac{b^2}{4}}$$

$$\left(j - \frac{b}{2}\right)^2 = a + \frac{b^2}{4} \Rightarrow \begin{cases} j - \frac{b}{2} = j' \\ a + \frac{b^2}{4} = a' \end{cases} \Rightarrow j'^2 = a'$$

Sup que $a' > 0 \Rightarrow j'^2 = a' = c^2 \Rightarrow (j' - c)(j + c) = 0$

$\therefore j' \in \{\pm c\}$, $c \in \mathbb{R}$ ($\Rightarrow \Leftarrow$)

~~tomando $j'' = j'/\sqrt{a}$, se tiene que $j''^2 =$~~

$$\therefore j'^2 = -c^2$$

tomando $j'' = j'/c$ se obtiene $j''^2 = -1$

■

Scanned with CamScanner

Teo. de Borsuk-Ulam.

Af. $f: S^n \to S^n$ tq $f(-x) = -f(x)$ $\forall x$, tiene grado impar

—o—

cubrimiento de dos hojas : $p: \tilde{X} \to X$

$$\cdots \to H_n(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau_*} H_n(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_*} H_n(X, \mathbb{Z}_2) \to H_{n-1}(X, \mathbb{Z}_2) \to \cdots$$

proviene de :

$$0 \to C_n(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau} C_n(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_\#} C_n(X, \mathbb{Z}_2) \to 0.$$

Afirmación: τ inyectiva, $p_\#$ sobreyectiva.

- $p_\#$ epiyectiva ya que todo símplice $\sigma: \Delta^n \to X$ siempre se puede levantar a $\tilde{X}$, ya que Δ^n simplemente-conexo.

Hablando un poco de esto:

Prop 1.31. $p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ inducida por $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ es inyectiva. La imagen de $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ en $\pi_1(X, x_0)$ consiste en las clases de homotopías de loops en X con base en x_0 tq se levantan a $\tilde{X}$ partiendo en $\tilde{x}_0$ que son loops.

Prop 1.32 El nº de hojas de $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ es igual al índice $[\pi_1(X, x_0) : p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))]$.

$X, \tilde{X}$ camino-conexos

Prop 1.33 $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ espacio de cubrimiento y $f: (Y, y_0) \to (X, x_0)$ con Y camino-conexo y localmente camino-conexo. Entonces un levantamiento $\tilde{f}: (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ existe ssi $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$

Prop 1.34 Dado $p: \tilde{X} \to X$ y $f: Y \to X$, si 2 levantamientos $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2: Y \to \tilde{X}$ de f coinciden en un punto de Y & Y es conexo, entonces $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ coinciden en todo Y.

$\therefore$ $\sigma : \Delta^n \to X$ continua, Δ^n s.c $\Leftrightarrow$ $\pi_1(\Delta^n, y) = 0$

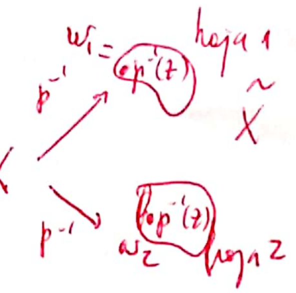
$\Rightarrow f_*(\pi_1(\Delta^n, y)) = 0 \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$

prop 1.33 $\Rightarrow \exists\ \tilde{\sigma} : \Delta^n \to \tilde{X}$ levantamiento de $\sigma : \Delta^n \to X$.

Pd: existen 2 levantamientos de σ

$\hookrightarrow$ pensar en prop 1.34. $f : Y \to X$ $f(y) = z$

$y \xmapsto{f} z \in X$



tomar $\tilde{\sigma}_1 : \Delta^n \to \tilde{X}$ donde $\tilde{\sigma}_1(\Delta^n) \subseteq U_1 \leftarrow$ hoja 1

$\tilde{\sigma}_2 : \Delta^n \to X$ donde $\tilde{\sigma}_2(\Delta^n) \subseteq U_2 \leftarrow$ hoja 2.

$\forall \tilde{\sigma}_3$ levantamiento de σ, debe coincidir en algún punto con $\tilde{\sigma}_1$ y/o $\tilde{\sigma}_2$.

—o—

- ker $p_\#$ generado por sumas $\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$ (ok) porque estoy generando sobre $\mathbb{Z}_2$

definimos $\tau : \sigma : (\Delta^n \to X) \mapsto \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$ $\left(\tau : C_n(X, \mathbb{Z}_2) \to C_n(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2) \right)$

obviamente Im σ = ker $p_\#$.

Evidente que τ es inyectiva. (¡Evidente! $\sigma \neq 0 \Rightarrow \exists$ levantamiento no nulo $\tilde{\sigma}$)

$\therefore\ 0 \to C_n(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau} C_n(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_\#} C_n(X, \mathbb{Z}_2) \to 0$

secuencia exacta.

[illegible]

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(X,\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "\tau_{n+1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C_n(X,\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\tau_n"] & C_{n-1}(X,\mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(\tilde{X},\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "(p_\#)_{n+1}"] & C_n(\tilde{X},\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "(p_\#)_n"] & C_{n-1}(\tilde{X},\mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d, "(p_\#)_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(X,\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d] & C_n(X,\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d] & C_{n-1}(X,\mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$$\tau_n \partial_{n+1}(\sigma) = \tau_n \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \sigma \circ d_i = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \tau_n(\sigma d_i) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i(\tau_n \sigma) d_i$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i(\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2) d_i = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \tilde{\sigma}_1 d_i + \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \tilde{\sigma}_2 d_i$$

$$\partial_{n+1}\tau_{n+1}(\sigma) = \partial_{n+1}(\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i(\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2) d_i$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \tilde{\sigma}_1 d_i + \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \tilde{\sigma}_2 d_i \quad \checkmark$$

$\therefore \tau_n \sigma_{n+1} = \partial_{n+1}\tau_{n+1}$

$$(p_\#)_n \partial_{n+1}(\tilde{\sigma}) = (p_\#)_n\left(\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \tilde{\sigma} d_i\right) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i (p_\#)_n \tilde{\sigma} d_i = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i p(\tilde{\sigma} d_i)$$

$$\partial_{n+1}(p_\#)_{n+1}(\tilde{\sigma}) = \partial_{n+1}(p\tilde{\sigma}) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i (p\tilde{\sigma}) d_i \quad \checkmark$$

$\therefore (p_\#)_n \partial_{n+1} = \partial_{n+1}(p_\#)_{n+1}.$

$\therefore$ Se tiene que existe sucesión exacta larga de homologías.

ok.

demostración de la proposición 2B.6.

Usamos el cubrimiento $p: S^n \to \mathbb{R}P^n$

tenemos:

$$\cdots \to H_n(P^n) \xrightarrow{\tau_*} H_n(S^n) \xrightarrow{p_*} H_n(P^n) \longrightarrow H_{n-1}(P^n) \xrightarrow{\tau_*} H_{n-1}(S^n) \xrightarrow{p_*} H_{n-1}(P^n)$$

$$\to \cdots \to H_i(P^n) \xrightarrow{\tau_*} H_i(S^n) \xrightarrow{p_*} H_i(P^n) \longrightarrow \cdots$$

$$\to H_1(P^n) \xrightarrow{\tau_*} H_1(S^n) \xrightarrow{p_*} H_1(P^n) \longrightarrow H_0(P^n) \xrightarrow{\tau_*} H_0(S^n) \xrightarrow{p_*} H_0(P^n) \to 0$$

Afirmación: $H_{n+1}(P^n, \mathbb{Z}_2) = 0$.

dem: P^n es CW complex n-dimensional.

Afirmación: $H_i(S^n) = 0 \quad \forall\, 0 < i < n$

- Según wikipedia $H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, n \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$

Hatcher pag 97: S^n n-sphere, $H_i(S^n)$ es isomorfo al grupo de homotopía $\pi_i(S^n)$ para $1 \leq i \leq n$. $H_i(S^n) = 0$ para $i > n$

Corolario (Hatcher pag 114): $\tilde{H}_n(S^n) \approx \mathbb{Z}$, $\tilde{H}_i(S^n) = 0$, $i \neq n$

Ejercicio 2.42 (Hatcher, pág 144): $H_k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0 \text{ y } k = n \text{ impar} \\ \mathbb{Z}_2 & k \text{ impar}, 0 < k < n \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$

Hatcher (pág. 153). (Homology with coefficients). $\tilde{H}_n(S^k; G) = G \quad n = k$

$\tilde{H}_n(S^k; G) = 0$ para $n \neq k$.

Scanned with CamScanner

Ejemplo 2.50 (Hatcher, pág, 154). Calcular la homología de $\mathbb{R}P^n$ cuando G es elegido en un cuerpo. La cadena de complejo celular es

$$\cdots \xrightarrow{0} F \xrightarrow{2} F \xrightarrow{0} F \xrightarrow{2} F \xrightarrow{0} F \longrightarrow 0$$

$\therefore$ Si $\operatorname{char} F = 2$, example : $F = \mathbb{Z}_2$, $H_k(\mathbb{R}P^n, F) \cong F$ para $0 \leq k \leq n$.

~~Te~~ Teorema 2A.1 (Hatcher pág 166). "By regarding loops as singular 1-cycles", obtenemos homomorfismo $h : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$. &

- X camino conexo $\Rightarrow$ h epiyectiva, con kernel $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$

$$\therefore H_1(X) \cong \pi_1(X, x_0) / [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)].$$

grupo abelianizado.

- Hatcher empieza demostración para $n > 1$.

$\underline{n=1}$ | $H_1(S^n, \mathbb{Z}_2) = ?$ debe ser $H_1(S^n, \mathbb{Z}_2) = 0$ (???)

$H_1(P^n, \mathbb{Z}_2) =$ debe ser $H_1(P^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ (???).

~~Especif~~ (Especificar lo anterior).

$f : S^n \to S^n$ impar $f(-x) = -f(x)$.

$$S^n \xrightarrow{f} S^n \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^n$$
$$x \longmapsto f(x) \longmapsto [f(x)]$$
$$-x \longmapsto -f(x) \longmapsto [-f(x)] = [f$$

$\hat{f} : S^n \to \mathbb{R}P^n$, $\hat{f}(x) = [f(x)] = [-f(x)] = [f(-x)] = \hat{f}(-x)$

$\therefore \exists \bar{f} : \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$,

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "p\circ f"'] & \mathbb{R}P^n \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & \mathbb{R}P^n \end{tikzcd}$$

$\bar{f} p = p f$

- Comparamos f, $\bar{f}$ | $f : S^n \to S^n$, $\bar{f} : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$.

Tenemos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C_i(P^n) & \xrightarrow{\tau} & C_i(S^n) & \xrightarrow{p_\#} & C_i(P^n) & \to & 0 \\ & & \downarrow \bar{f}_\# & & \downarrow f_\# & & \downarrow \bar{f}_\# & & \\ 0 & \to & C_i(P^n) & \xrightarrow{\tau} & C_i(S^n) & \xrightarrow{p_\#} & C_i(P^n) & \to & 0 \end{array}$$

conmuta porque $pf = \bar{f}p$

demostrar que conmuta: i-símplice singular $\sigma : \Delta^i \to P^n$ se puede levantar a $\tilde{\sigma}_1$ y $\tilde{\sigma}_2$, $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2 : \Delta^i \to S^n$

- Los dos levantamientos de $\bar{f}\sigma$ son $f\tilde{\sigma}_1$ y $f\tilde{\sigma}_2$ ya que f toma antipodal points a puntos antipodales.

$\Delta^i \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}P^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}P^n$ | $pf\tilde{\sigma}_1 = \bar{f}p\tilde{\sigma}_1 = \bar{f}\sigma$

$pf\tilde{\sigma}_2 = \bar{f}p\tilde{\sigma}_2 = \bar{f}\sigma$

ok (igual falta comprender \ queda un poco ambiguo.

pd: f_*, $\bar{f}_*$ isomorfismos.

tenemos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C_i(P^n) & \xrightarrow{\tau} & C_i(S^n) & \xrightarrow{p_\#} & C_i(P^n) & \to & 0 \\ & & \downarrow \bar{f}_\# & & \downarrow f_\# & & \downarrow \bar{f}_\# & & \\ 0 & \to & C_i(P^n) & \xrightarrow{\tau} & C_i(S^n) & \xrightarrow{p_\#} & C_i(P^n) & \to & 0 \end{array}$$

$\downarrow$

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \to & H_k(P^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau_*} & H_k(S^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{p_*} & H_k(P^n, \mathbb{Z}_2) & \to & \cdots \\ & & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow f_* & & \downarrow \bar{f}_* & & \\ \cdots & \to & H_k(P^n, \mathbb{Z}_2) & \to & H_k(S^n, \mathbb{Z}_2) & \to & H_k(P^n, \mathbb{Z}_2) & \to & \cdots \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & H_0(P^n) \arrow[l] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & H_0(S^n) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "f_*"] & H_0(P^n) \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & H_1(P^n) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & H_1(S^n) \arrow[l] \arrow[d, "f_*"] & H_1(P^n) \arrow[l] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & \cdots \arrow[l] \\
0 & H_0(P^n) \arrow[l] & H_0(S^n) \arrow[l, "\cong"] & H_0(P^n) \arrow[l, "0"] & H_1(P^n) \arrow[l, "\cong"] & H_1(S^n) \arrow[l] & H_1(P^n) \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ $f_*: H_n(S^n, \mathbb{Z}_2) \to H_n(S^n, \mathbb{Z}_2)$ es isomorfismo.

Por lema 2.49 f_* es ~~la~~ multiplicar por $\deg(f) \bmod 2$; luego $\deg(f)$ debe ser impar.

Lema 2.49: Si $f: S^k \to S^k$ tiene grado m, entonces $f_*: H_k(S^k, G) \to H_k(S^k, G)$ es multiplicar por m.

---

* Grado: $f: S^n \to S^n$ con $n > 0$. $\Rightarrow$ $f_*: \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cong}{H_n(S^n)}} \to \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cong}{H_n(S^n)}}$ es tal que

$f_*(\alpha) = d\alpha$, donde d depende solamente de f. d es el grado de f.

Borsuk-Ulam: para toda función $g: S^n \to \mathbb{R}^n$ existe un punto $x \in S^n$ con $g(x) = g(-x)$.

dem. Sea $f(x) = g(x) - g(-x)$

f impar: $f(-x) = g(-x) - g(-(-x)) = g(-x) - g(x) = -(g(x) - g(-x))$

$\therefore$ $f(-x) = -f(x)$.

Pd: $\exists x$; $f(x) = 0$

Sup que $f(x) \neq 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow \hat{f}(x) = \dfrac{f(x)}{|f(x)|}$, $\hat{f} : S^n \to S^{n-1}$ si p. $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$

$|\hat{f}(x)| = 1$.

. $\hat{f}$ es una función impar.

S^{n-1} es el ecuador de S^n.

$\Rightarrow f|_{S^{n-1}}$ tiene grado impar por proposición 2B.6

$f|_{\cancel{\partial} S^- \cup S^{n-1}}$

Thm. 2.10. Si dos funciones $f, g : X \to Y$ son homotópicos, entonces inducen el mismo homomorfismo $f_* = g_* : H_n(X) \to H_n(Y)$

(Hatcher) ~~Nullhomotopic~~ :

Contractible : espacio que tiene el tipo de homotopía de un punto

tipo de homotopía : Espacios X e Y que son homotópicamente equivalentes

nullhomotopic . $id : X \to X$ homotópico al mapeo constante.

Topología y Geometría

Aplicaciones clásicas de los grupos de homología.

Tema 1 Clasificación de las álgebras de división

Teo 2B.6 (Hatcher). $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son las únicas algebras finito-dimensionales sobre $\mathbb{R}$, de división tq son conmutativas, normadas y con unidad.

$*$ A $\mathbb{R}$-algebra $\equiv \begin{cases} A \ \mathbb{R}\text{-espacio vectorial (en este caso, } A \cong \mathbb{R}^n) \\ \exists B : A \times A \to A \text{ bilineal } (B(x,y) = xy \end{cases}$

A alg. de división $\equiv \begin{cases} x \mapsto ax \\ x \mapsto xa \end{cases}$ epiyectivas $\forall a \neq 0$

$\therefore$ A no tiene divisores de cero

dem del teo 2B.6. Supongamos que $A \cong \mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$-algebra de división, conmutativa, normada y con unidad.

$n=1 \Rightarrow \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}$ ✓

$n>1$: def $f: S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ $(S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n)$ $f(x) = x^2/|x|^2$

- f está bien definida y es continua. ($(x,y) \mapsto xy$ continua)
- $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in S^{n-1}$ $\longrightarrow \exists \bar{f} : \mathbb{R}P^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ $(\mathbb{R}P^n \cong S^n/_{x\sim -x})$

Afirmamos que $\bar{f}$ es inyectiva.

$x, y \in S^{n-1}$: $\bar{f}([x]) = \bar{f}([y]) \Rightarrow f(x) = f(y)$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{|x|^2} = \dfrac{y^2}{|y|^2} \Rightarrow x^2 = \Big(\underbrace{\dfrac{|x|}{|y|}}_{\alpha}\Big)^2 y^2 \Rightarrow x^2 = \alpha^2 y^2$

$\Rightarrow (x-\alpha y)(x+\alpha y) = 0$

$\Rightarrow x = \pm\alpha y$

$\Rightarrow 1 = |x| = |\alpha||y| = |\alpha|$

$\therefore |\alpha| = 1$

$\therefore \alpha = 1$

$\therefore x = \pm y$ $(\Leftrightarrow [x] = [y])$

Scanned with CamScanner

Corolario 2B.4 (Hatcher) : M n-variedad compacta, N n-variedad conexa $\Rightarrow$ toda incrustación $f: M \to N$ es epiyectiva, luego homeomorfismo.

. Corolario 2B.4 (Hatcher) $\Rightarrow$ $\bar{f}$ es un homeomorfismo

$$\therefore \quad \mathbb{R}P^{n-1} \cong S^{n-1}$$

pero $H_k(\mathbb{R}P^{n-1}) \neq H_k(S^{n-1})$ cuando $n > 2$

$$\therefore \quad \underline{n = 2}.$$

<u>Afirmación</u>. A $\mathbb{R}$-algebra conmutativa 2-dimensional con identidad es isomorfa a $\mathbb{C}$.

<u>dem</u>. 1 identidad de A. $\quad \mathbb{R} \hookrightarrow A$

Sea $j \notin \mathbb{R} \subset A$ tq $\quad A \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}j$.

$$j^2 = a + bj \Rightarrow (\underbrace{j - \tfrac{b}{2}}_{\in A})^2 = \underbrace{a + \tfrac{b^2}{4}}_{\in \mathbb{R}}$$

mediante cambio de variable, SPG : $j^2 = a$

$$a > 0 \Rightarrow j^2 = a = c^2 \Rightarrow j = \pm c \in \mathbb{R} \ (\Rightarrow \Leftarrow)$$

$$\therefore \quad j^2 < 0$$

SPG : $j^2 = -1$ (por cambio de variable).

$\blacksquare$

$\boxed{\text{Tema 2}}$ Demostración del teorema de Borsuk-Ulam.

Corolario 2B.7 (Borsuk-Ulam) para toda función $g : S^n \to \mathbb{R}^n$, existe $x \in S^n$, tq $g(x) = g(-x)$.

Proposición 2B.6 (Hatcher). Una función impar $f : S^n \to S^n$ $\left(f(-x) = -f(x) \ \forall x \in S^n \right)$ debe tener grado impar.

Grado de $f : S^n \to S^n$ es $f_* : \underbrace{H_n(S^n)}_{\cong \mathbb{Z}} \longrightarrow \underbrace{H_n(S^n)}_{\cong \mathbb{Z}}$
$1 \longmapsto \deg(f)$.

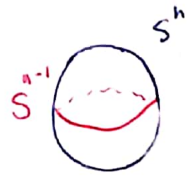
---

dem. definimos $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) := g(x) - g(-x)$.

- f es impar.

Pd: $f(x) = 0$, para algún $x \in S^n$

- Si $f \neq 0 \Rightarrow \hat{f} : S^n \to S^{n-1}$, $\hat{f}(x) := \dfrac{f(x)}{|f(x)|}$. $\hat{f}$ es impar.



$\hat{f}|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ es impar

Por prop 2B.6, $\deg(\hat{f}|_{S^{n-1}})$ impar.

Prop. $f : X \to Y$ null-homotopic $\Leftrightarrow \exists\, \hat{f} : CX \to Y$ extensión de f

dem. Basta ver que $X \hookrightarrow CX := X \times I / (x,1) \sim (x',1)$ y luego estudiar el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[rrd, "f"'] & X \times I \arrow[r, "p"] \arrow[rd, "h"] & CX \arrow[d, "\hat{f}"] \\ & & Y \end{tikzcd}$$

notar que $h(x,1) = h(x',1)$ $\forall x, x'$.

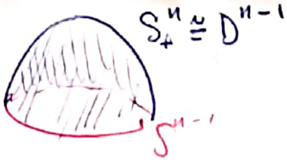
$X \hookrightarrow CX$ mediante $X \cong X \times \{0\}$.

Prop. • Si $S^n \to S^n$ es constante $\to \deg = 0$.

- $f \sim g \Rightarrow \deg f = \deg g$. (ya que $f_* = g_*$)
- $CS^{n-1} \cong D^{n-1}$

$\hat{f}|_{S^{n-1}}$ es null-homotópica, ya que $\hat{f}|_{S^{n-1}}$ es la restricción de $\hat{f}|_{S^n_+} : S^n_+ \to S^{n-1}$ a S^{n-1}

$S^n_+ \cong D^{n-1} \cong CS^{n-1}$



$\therefore \deg(\hat{f}|_{S^{n-1}}) = 0 \quad (\rightarrow\leftarrow).$

$\therefore \exists x \in S^n$ tq $f(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow g(-x) = g(x))$

~~Prop 23~~

dem prop 23.6

Consideramos el cubrimiento universal $p: S^n \to \mathbb{R}P^n$

$f: S^n \to S^n$ impar $\Rightarrow \exists \bar{f}: \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$ inducida por f.

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "p \circ f"'] & \mathbb{R}P^n \arrow[d, "\bar{f}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
& \mathbb{R}P^n
\end{tikzcd} \qquad \bar{f} p = p f.$$

Se puede construir

$$\forall i \qquad \begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_i(P^n) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\bar{f}_\#"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C_i(S^n) \arrow[r, "p_\#"] \arrow[d, "f_\#"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C_i(P^n) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}_\#"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_i(P^n) \arrow[r] & C_i(S^n) \arrow[r] & C_i(P^n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

exacta

exacta

$p_\#$ ~~existe~~ epiyectiva: i-símplice singular $\sigma: \Delta^i \to P^n$ ~~se puede~~ $\exists\, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ levantamientos $\Delta^i \to S^n$ (Prop 1.33, 1.34)

($C_i(P^n)$, $C_i(S^n)$ generados sobre $\mathbb{Z}_2$)

τ existe: $\tau: \sigma \longmapsto \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$

. τ inyectiva y $\operatorname{Im} \tau = \ker p_\#$

Se puede demostrar que los diagramas son conmutativos.

Se tiene que:

$$\begin{tikzcd}
0 & H_0(P^n) \arrow[l] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & H_0(S^n) \arrow[l, "p_*"'] \arrow[d, "f_*"] & H_0(P^n) \arrow[l, "\tau_*"'] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & H_1(P^n) \arrow[l] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & H_1(S^n) \arrow[l, "p_*"'] \arrow[d, "f_*"] & H_1(P^n) \arrow[l, "\tau_*"'] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & \cdots \arrow[l] \\
0 & H_0(P^n) \arrow[l] & H_0(S^n) \arrow[l, "p_*"] & H_0(P^n) \arrow[l, "\tau_*"] & H_1(P^n) \arrow[l] & H_1(S^n) \arrow[l, "p_*"] & H_1(P^n) \arrow[l, "\tau_*"] & \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$H_{n+1}(P^n, \mathbb{Z}_2) = 0$ (P^n CW-complejo).

$H_i(S^n) = 0 \quad \forall\, 0 < i < n$

$H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \quad 0 \leq k \leq n$ (prop 2.50)

~~0 [illegible]~~

Las homologías que son no nulas, son $\mathbb{Z}_2$

+ exactitud

$\Rightarrow$ morfismos son cero o isomorfismos

$\therefore$ Por inducción sobre k, $\bar{f}_*, f_*$ isomorfismos

Lema 2.49 (Hatcher), $f_* : H_n(S^n, \mathbb{Z}_2) \to H_n(S^n, \mathbb{Z}_2)$ es multiplicar por $\deg(f)$ mod 2.

$\therefore$ $\deg(f)$ impar.

$$0 \to H_n(P^n) \underset{\approx}{\xrightarrow{\tau_*}} H_n(S^n) \underset{0}{\xrightarrow{p_*}} H_n(P^n) \underset{\approx}{\longrightarrow} H_{n-1}(P^n) \to 0 \to \cdots \to 0 \to H_i(P^n) \underset{\approx}{\longrightarrow} H_{i-1}(P^n) \to 0 \to \cdots$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & H_1(P^n) \arrow[r, "\approx"'] \arrow[d] & H_0(P^n) \arrow[r, "0"'] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & H_0(S^n) \arrow[r, "p_*", "\approx"'] \arrow[d, "f_*"] & H_0(P^n) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & 0 \\
 & & \cdots & H_0(P^n) \arrow[r, "0"'] & H_0(S^n) \arrow[r, "\approx"'] & H_0(P^n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$f_*, \bar{f}_*$ isomorfismos por inducción finita sobre la

Se parte de $f_*: H_0(S^n) \to H_0(S^n)$

$\bar{f}_*: H_0(P^n) \to H_0(P^n)$

Martes 20 de Octubre.

Segunda prueba Álgebra 2 de postgrado

Para cada ejercicio escoja entre (a) y (b)

1. (a) Demuestre que si una ecuación de grado 3 con coeficientes racionales tiene a $\mathbb{Z}_3$ como grupo de Galois, entonces sus raíces son todas reales.

   (b) Demuestre que una extensión galoisiana $K \subseteq L$ tiene como grupo de Galois a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ entonces $L = K(\alpha, \beta)$ donde $\alpha^2, \beta^2 \in K$.

2. (a) Hallar en cada item todos los cuerpos intermedios de la extensión $\mathbb{Q} \subseteq L$, donde L es el cuerpo de descomposición del polinomio dado.

   i. $x^4 + 5x^2 + 5$ ii. $x^4 - 14x^2 + 9$

   (b) Determine el cuerpo de descomposición del polinomio

$$f(x) = (x^{12} - 16)(x^3 - 2) \in \mathbb{Q}[x]$$

   y su grado sobre $\mathbb{Q}$.

3. (a) Demuestre que el polinomio $f(x) = x^4 + 1$ es reducible en $\mathbb{F}_p[x]$ para cualquier primo p.

   (b) Sea p un primo. Demuestre que si el polinomio $f(x) = x^{p^n} - x + 1$ es irreducible en $\mathbb{F}_p$, entonces $n = 1 \vee n = p = 2$. Ayuda: Intente probar que si $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_p}$ es una raíz de f, entonces $\mathbb{F}_{p^n} \subseteq \mathbb{F}_p(\alpha)$ y demuestre que $[\mathbb{F}_p(\alpha) : \mathbb{F}_{p^n}] = p$.

Martes 24 de Noviembre.

Tercera prueba Álgebra 2 de postgrado

1. Sea R un anillo y sea V un $R-$módulo.
   anillo conmutativo con 1.
   (a) Demuestre que existe $Sym \in \mathcal{L}(V \otimes V)$ dada por $Sym(v \otimes w) = v \otimes w + w \otimes v$.
   (b) Demuestre que si V es un espacio vectorial de dimensión 1, entonces Sym es epiyectiva o nula.
   (c) Considere $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}-$módulo. Demuestre que Sym no es epiyectiva y no es nula.

2. Sea G un grupo y x un elemento de orden 2 en el grupo. Sea (V, ρ) una representación compleja representación de dimensión 2. Demuestre que $\chi_\rho(x) \in \{2, 0, -2\}$.

3. Recuerde que para todo grupo G su derivado es el subgrupo normal

$$G' = \langle xyx^{(-1)}y^{(-1)} \mid x, y \in G \rangle.$$

   Demuestre que para todo grupo G existe una biyección entre el conjunto de representaciones de dimensión 1 de G y el conjunto de representaciones de dimensión 1 de su abelianizado G/G'.

4. Sea (V, ρ) una representación compleja de dimensión finita e irreducible de un grupo finito G. Sea $Z(G)$ el centro de G.
   ? (a) Demuestre que si $z \in Z(G)$, entonces $\chi_\rho(z) = n\omega$ donde $n = dim(V)$ y ω es una raíz k-ésima de la unidad, para algún k.
   (b) Demuestre que si ρ es fiel (inyectiva), entonces $Z(G)$ es cíclico.
   (c) Demuestre que si G es abeliano entonces $G/ker(\rho)$ es cíclico.

   Ayuda: Lema de Schur.

tensor algebra : $T(V) = \bigoplus_{n\geq 0} T^n(V) \quad \Big| \quad T^n(V) \cong \underbrace{V\otimes \cdots \otimes V}_{n\text{-veces}}$.

prop. universal : ~~ite~~ $i : V \hookrightarrow T(V)$

$\forall f : V \to A$ homo de espacios vectoriales

$\exists!\ \tilde{f} : T(V) \to A$ homo de algebras tq

$\tilde{f} \circ i = f$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & T(V) \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Espacio tensorial $T^{r,s}(V)$ $\qquad T^{r,s}(V) := T^r(V) \otimes T^s(V^*)$

$$T^{\bullet,\bullet}(V) := \bigoplus_{r,s\geq 0} T^{r,s}(V).$$

Symmetric tensor powers. ~~$S^n f$~~

$S^n(E,F) = \{ f : E^n \to F \mid f$ multilineal simétrica $\}$.

$\mathrm{Sym}^n(E) = T^n(E)/C_n \qquad C_n = \langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_n - u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(n)} \rangle_{\substack{\sigma\in S_n \\ u_i \in E}}$

$$\begin{tikzcd} E^n \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[dr, "f"'] & T^n(E) \arrow[d, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "p"] & \\ & F & T^n(E)/C \arrow[l, dotted, "\bar{f}"] \end{tikzcd}$$

$\varphi_0(u_1, \dots, u_n) = u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$

f simétrica

$\tilde{f}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = f(u_1, \dots, u_n)$

$\tilde{f}(u_2 \otimes \cdots \otimes u_n) = f(u_2, u_1, \dots, u_n)$

$\therefore \tilde{f}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n - u_2 \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = 0$

f simétrica $\Rightarrow \tilde{f}(z) = 0\ \forall z \in C_n$

$\therefore \tilde{f}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n - u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(n)}) = 0 \quad \forall \sigma \in S_n$.

$z = \sum' \lambda_{i_1 \dots i_n} u^1_{i_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{i_n}$

$\tilde{f}(z) = \sum' \lambda_{i_1,\dots,i_n} \tilde{f}(u^1_{i_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{i_n}) = \sum \lambda_{i_1,\dots,i_n} f(u^1_{i_1}, \dots, u^n_{i_n})$

Elemental mi querido Watson.

cll

Elemental mi querido Watson.

$\cdot B : E \times F \to K$ bilineal no degenerada.

$\varphi : E \to F^*$ $\quad \varphi(u) \in F^* : \varphi(u)(v) = (u, v)$

$\psi : F \to E^*$

$\varphi(u)$ monomorfismo $\forall u \in E$.

$\varphi(u)(v+w) = (u, v+w) = (u, v) + (u, w)$

$= \varphi(u)(v) + \varphi(u)(w)$

$\Rightarrow$ ~~$\varphi(u) = \varphi$~~ $\varphi(u)$ ~~lineal~~.

$\varphi(u)(\alpha v) = (u, \alpha v) = \alpha (u, v) = \alpha \varphi(u)(v)$

$\therefore \varphi(u)$ lineal $\forall u$.

~~$\forall u : \varphi(u)(v) = 0$~~

$\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$

$\varphi(\alpha u) = \alpha \varphi(u)$

$\varphi(u) = 0 \Rightarrow \varphi(u)(v) = 0 \quad \forall v \Rightarrow (u, v) = 0 \; \forall v \Rightarrow \boxed{u = 0}$

φ inyectiva.

E, F, K finito dimensionales.

$\dim(E) \leq \dim(F^*) = \dim F \leq \dim E^* = \dim E$

$\therefore \dim F = \dim E$.

$\therefore \varphi, \psi$ isomorfismos

---

base de $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$ es $(u^1_{i_1} \otimes \dots \otimes u^n_{i_n})_{(i_1, \dots, i_n) \in I_1 \times \dots \times I_n}$

donde $(u^k_{i_k})_{i_k \in I_k}$ base de E_k

tenemos el mapeo ~~lineal~~ multilineal.

$$(v_1^*,\dots,v_n^*) \overset{L}{\mapsto} L_{v_1^*,\dots,v_n^*}$$

$$L : E_1^* \times \dots \times E_n^* \longrightarrow Hom(E_1\otimes\dots\otimes E_n, K).$$

$$L(v_1^*,\dots,v_n^*) = L_{v_1^*,\dots,v_n^*}$$

$$L(v_1^*+\bar{v}_1^*,\dots,v_n^*) = L_{v_1^*+\bar{v}_1^*,\dots,v_n^*} \quad \text{, donde}$$

$$L_{v_1^*+\bar{v}_1^*,\dots,v_n^*}(u_1\otimes\dots\otimes u_n) = (v_1^*+\bar{v}_1^*)(u_1)\dots v_n^*(u_n)$$
$$= v_1^*(u_1)\dots v_n^*(u_n) + \bar{v}_1^*(u_1)\dots v_n^*(u_n)$$
$$= L_{v_1^*,\dots,v_n^*}(u_1\otimes\dots\otimes u_n) + L_{\bar{v}_1^*,\dots,v_n^*}(u_1\otimes\dots\otimes u_n)$$

$$\therefore L_{v_1^*+\bar{v}_1^*,\dots,v_n^*} = L_{v_1^*,\dots,v_n^*} + L_{\bar{v}_1^*,\dots,v_n^*}$$

$$\therefore L(v_1^*+\bar{v}_1^*,\dots,v_n^*) = L(v_1^*,\dots,v_n^*) + L(\bar{v}_1^*,\dots,v_n^*).$$

$$\Rightarrow \exists! \, \tilde{L} : E_1^*\otimes\dots\otimes E_n^* \longrightarrow Hom(E_1\otimes\dots\otimes E_n, K)$$

$$\tilde{L} \in Hom(E_1^*\otimes\dots\otimes E_n^*, Hom(E_1\otimes\dots\otimes E_n, K)).$$
$$\wr\!\wr$$
$$Hom((E_1^*\otimes\dots\otimes E_n^*)\otimes(E_1\otimes\dots\otimes E_n), K)$$

$\Rightarrow \tilde{L}$ puede verse como $\tilde{L} : (E_1^*\otimes\dots\otimes E_n^*)\otimes(E_1\otimes\dots\otimes E_n) \longrightarrow K$

Como $(E_1^*\otimes\dots\otimes E_n^*\otimes(E_1\otimes\dots\otimes E_n))^* = \cancel{Hom(}$

$$\overset{\Gamma}{\cong} Hom((E_1^*\otimes\dots\otimes E_n^*)\times(E_1\otimes\dots\otimes E_n), K)$$

$\Rightarrow \Gamma(\tilde{L}) \in$ es bilineal.

Af. $\Gamma(\tilde{L})$ es no degenerada.

$D = \mathbb{R}[x,y]$. $F = \mathbb{R}(x,y)$

—— o ——

P2) $\mathrm{Mult}^n(V) = \{ f : \prod_{i=1}^{n} V \to F \ / \ f$ n- lineal $\}$.

$\mathrm{Sym}^n(V) = \{ f \in \mathrm{Mult}^n(V) \ / \ f$ simétrica $\}$

$\mathrm{Alt}^n(V) = \{ f \in \mathrm{Mult}^n(V) \ / \ f$ alternante $\}$ F-espacio vectorial

- $\mathrm{Mult}^n(V) \cong T^n(V)$, $n=2$: $\mathrm{Mult}^2(V) \cong T^2(V) := V \otimes V$

bilineales $V \times V \to F$

$\{v_i\}_{i \in I}$ base de V , $B : V \times V \to F$ bilineal.

$$B\left(\sum_{r=1}^{p}{}' \alpha_i v_{i_r} , \sum_{s=1}^{q} \beta_i v_{i_s} \right) = \sum_{r=1}^{p}{}' \sum_{s=1}^{q}{}' \alpha_i \beta_i \, B(v_{i_r}, v_{q_s})$$

$B \in \mathrm{Mult}^2(V) \Rightarrow B \ V \times V \to F$ bi-lineal $\Rightarrow \exists! \ h : V \otimes V \to F$ lineal

tq $B(v,w) = h(v \otimes w)$

$\mathrm{Bil}(V \times V, F) = \mathrm{Mult}^2(V) \cong \mathcal{L}(V \otimes V, F)$
" $(V \otimes V)^*$
" $V \otimes V$

$j : V \times V \to \mathrm{Mult}^2(V)$
$(v,w) \mapsto B(v,w) : V \times V \to F$
$(x,y) \mapsto$

E_i, F K-e.v.

—— o ——

Propiedad universal del producto tensorial : $\mathrm{Hom}(E_1 \otimes \dots \otimes E_n, F) \cong \mathrm{Hom}(E_1 \times \dots \times E_n, F)$

Cuando $F = K$, $\mathrm{Hom}(E_1 \otimes \dots \otimes E_n, F) \cong (E_1 \otimes \dots \otimes E_n)^*$

Isomorfismos útiles: $\mathrm{Hom}(E \otimes F, G) \cong \mathrm{Hom}(E, \mathrm{Hom}(F,G))$.

— o —

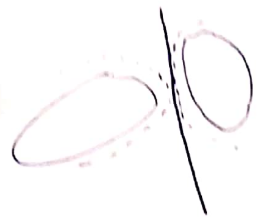
Dualidad $\forall (v_1^*, \dots, v_n^*) \in E_1^* \times \dots \times E_n^*$

$l_{v_1^*, \dots, v_n^*} : E_1 \times \dots \times E_n \to K$
$(u_1, \dots, u_n) \mapsto v_1^*(u_1) \cdot \dots \cdot v_n^*(u_n)$.

Af $l_{v_1^*, \dots, v_n^*}$ multilineal. (obviamente)

PUPT : $\exists! \, L_{v_1^*, \dots, v_n^*} : E_1 \otimes \dots \otimes E_n \to K$ tq

$L_{v_1^*, \dots, v_n^*}(u_1 \otimes \dots \otimes u_n) = l_{v_1^*, \dots, v_n^*}(u_1, \dots, u_n)$.

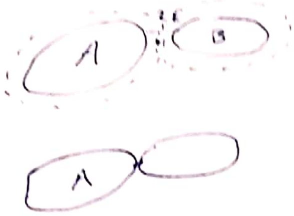


$\exists \{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ creciente

t.q. $y_{n_k} \to y$

$\|x_{n_k} - y\| \leq \|x_{n_k} - y_{n_k}\| + \|y_{n_k} - y\|$

$f(\underbrace{x+\varepsilon z}_{\in A_\varepsilon}) \leq \alpha$



$f_n \rightharpoonup 0$

$$\int_{(0,\frac{1}{n})} f_n = 1.$$

$$f_n = \cancel{\tfrac{1}{n}}\; n\,\chi_{(0,\frac{1}{n})}$$

$$\langle \Lambda_n, \varphi\rangle := \int f_n\varphi = \fint_0^{1/n}\varphi \qquad \varphi\in L^\infty$$

$$|\langle \Lambda_n,\varphi\rangle| \leq \|\varphi\|_\infty$$

$$\|\Lambda_n\|_{(L^\infty)^*} \leq 1$$

$(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en $(L^\infty)^*_1$, que es compacto en la débil-$*$

Si $((L^\infty)^*_1, \underset{\text{top. débil}*}{\downarrow})$ fuera 1^{o}-numerable $\Rightarrow$ $(L^\infty)^*_1$ sería secuencialmente compacto en la top débil-$*$

$\Rightarrow$ $\exists\{n_k\}$ creciente $\exists \Lambda\in(L^\infty)^*_1$ t.q.

$$\langle \Lambda_{n_k},\varphi\rangle \longrightarrow \langle\Lambda,\varphi\rangle \qquad \forall\varphi\in L^\infty$$

Toma $\varphi = \chi_E$:

$$\int_E f_{n_k} \longrightarrow \cancel{\exists}\ \langle\Lambda,\chi_E\rangle \quad \forall E \text{ medible}$$

$\Rightarrow$ por Vitali-Hahn-Saks, $\{f_{n_k}\}$ es equiintegrable $\to\!\leftarrow$

cerrado $\Rightarrow$ sec. cerrado

$x_n \to x$

si $x \notin A$

$\to\leftarrow$.

$\cdot\ \vec{H} \in L^q$

$\langle \Lambda, \varphi \rangle := \int \vec{H} \cdot D\varphi$ $\quad \Lambda = -\operatorname{div} \vec{H}$

$$|\langle \Lambda, \varphi \rangle| \leq \|H\|_{L^q} \underbrace{\|D\varphi\|_{L^p}}_{\|\varphi\|_{W_0^{1,p}}}$$

$$\sup \frac{|\langle \Lambda, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_{W_0^{1,p}}} \leq \|H\|_{L^q}$$

i.e. $\quad \forall \vec{H} \in L^q \quad -\operatorname{div} \vec{H} \in \left(C_c^\infty(\Omega)\right)^{*\,W_0^{1,p}} =: W^{-1,q}$

Análisis I

Anexo desarrollo tarea 2

Marco Godoy Valdebenito

5,5 //.

Problema 3

Suponga que u_j es una sucesión de Cauchy en L^p que converge a.e a una función medible u. Pruebe que $u_j \to u$ en L^p.

dem: L^p completo $(1 \leq p \leq \infty)$ $\Rightarrow$ toda sucesión de Cauchy converge en L^p.

$(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en L^p $\Rightarrow \exists!\, w \in L^p :\ u_j \xrightarrow{j\to\infty} w$ en L^p.

Como $u_j \to w$ en L^p, existe $(u_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$ subsucesión de (u_j) tal que $u_{j_k} \xrightarrow{k\to\infty} w$ ct. x, donde u es medible.

Pero además, $u_j \xrightarrow{j\to\infty} u$ ct. x. Ahora esto implica que toda subsucesión de $(u_j)_j$ también debe converger a u

$$\therefore \quad u = w$$

$\therefore$ $(u_j)_j$ debe converger en L^p a u. ✓ (6,0)

Problema 4

Suponga que u_j es acotada en L^p y que converge a.e a una función medible u. Pruebe que $u_j \to u$ en L^p.

dem. Vamos a separar el problema en casos

$p=1$ Para este caso no se cumple. Basta tomar el ejemplo $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$, donde $u_j = j\,\chi_{(0,1/j)}$

$u_j \xrightarrow{j\to\infty} 0$ ctx

u_j acotadas en L^1. Para $\varphi \in C_c(-1,1)$ se tiene que

$$\int u\varphi = \varphi(0) \neq \lim_{j\to\infty} \int u_j \varphi .$$

$1<p<\infty$ Como (u_j) es acotada en L^p, tenemos

$$(*) \quad \int_E |u_j| = \int |u_j|\,\chi_E \leq \|u_j\|_p \int (\chi_E^{\,q})^{1/q} = \|u_j\|_p \left(\int \chi_E\right)^{1/q}$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \qquad \chi_E^{1/q} = \chi_E$$

$$\leq \|u_j\|_p\,\mu(E)^{1/q} \xrightarrow{\mu(E)\to 0} 0$$

Pd: $\displaystyle\int_\Omega u_j\varphi \xrightarrow{j\to\infty} \int_\Omega u\varphi \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega)$, donde $u_j \xrightarrow{j\to\infty} u$ ctp

Estimando la diferencia

$$\left| \int_\Omega u_j\varphi - \int_\Omega u\varphi \right| = \left| \int_\Omega (u_j - u)\varphi \right| \leq \int_\Omega |u_j - u||\varphi|$$

$$= \int_K |\varphi|\,|u_j - u| \quad , \text{donde } K = \text{soporte}(\varphi)$$

Dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $\forall E \subseteq \Omega$, $\mu(E)<\delta \Rightarrow \displaystyle\int_E |\varphi||u_j-u| < \varepsilon/2$

(Condición (*)).

Por otro lado, usando el teorema de Egoroff, existe $E \subseteq \Omega$ medible tal que $\mu(E) < \delta$ y $u_j \longrightarrow u$ uniformemente en $K \setminus E$

Así,

$$\int_\Omega |u_j - u||\varphi| = \int_K |u_j - u||\varphi| = \int_E |u_j - u||\varphi| + \int_{K\setminus E} |u_j - u||\varphi|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \|u_j - u\|_\infty \|\varphi\|_\infty \mu(K\setminus E)$$

Como $u_j \to u$ uniformemente en $K \setminus E$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall j \geq j_0$, $\|u_j - u\| < \varepsilon / 2\|\varphi\|_\infty \mu(K\setminus E)$

$$\therefore \forall j \geq j_0 : \int_\Omega |u_j - u||\varphi| < \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$$\therefore u_j \rightharpoonup u \text{ en } L^p.$$

Pd: $u_j \rightharpoonup w$ en $L^p \Rightarrow w = u$

Queremos demostrar que toda subsucesión $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que converge débilmente a u.

Como $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es sucesión acotada, podemos aplicar Banach-Alaoglu (en particular, $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada) para encontrar $w \in L^p$ y $(u_{j_{k_m}})_{m\in\mathbb{N}}$ subsucesión de (u_{j_k}) tal que $u_{j_{k_m}} \xrightarrow{m\to\infty} u$ en L^p

Además del punto anterior, $\int u_{j_{k_m}} \varphi \xrightarrow{k\to\infty} \int u \varphi$ $\left.\right\}$ $\Rightarrow \int (u-w)\varphi = 0$
y $\int u_{j_m} \varphi \longrightarrow \int w \varphi$ $\quad \forall \varphi \in C_c(\Omega)$

Como L^p espacio vectorial, $u-w \in L^p$, y $\overline{C_c(\Omega)} = L^q$

$$\therefore \int (u-w) g = 0 . \ \forall g \in L^q.$$

En particular, $\int_K (u-w) = 0$ $\forall K$ compacto (Basta reemplazar $g = \chi_K$)

Como μ es medida regular, $\int_U (u-w) = 0$ $\forall U \subseteq \Omega$ abierto,

Luego $\int_E (u-w) = 0$ para todo $E \subseteq \Omega$ medible.

$$\therefore u - w = 0 \quad ctp$$

$$\therefore u_{j_k} \to u \text{ en } L^p$$

$$\therefore u_j \longrightarrow u \text{ en } L^p$$

$\underline{p=\infty}$, Cambiamos el enunciado por (u_j) acotado en L^∞ y converge a.e a u. Demuestre que $\int u_j g \longrightarrow \int ug$, $\forall g \in L^1$.

En efecto, todo lo que hicimos en el caso anterior puede ser usado nuevamente en este caso, porque

$$\int_E |u_j| \leq \|u_j\|_\infty \mu(E) \quad y \quad \overline{C_c(\Omega)} = L^1.$$

Problema 5

Suponga que $f_j \to f$ en L^p y que $g_j \to g$ en L^q, $1 \leq p < \infty$ (o que $f_j \xrightarrow{*} f$ en L^p si $p = \infty$). Pruebe que $\int f_j g_j \to \int fg$.

dem. Caso $1 \leq p < \infty$

$$\left| \int f_j g_j - \int fg \right| = \left| \int f_j g_j - fg + fg_j - fg_j \right|$$

$$= \left| \int f_j g_j - fg_j + \int fg_j - fg \right|$$

$$\leq \left| \int f_j g_j - fg_j \right| + \left| \int fg_j - fg \right|$$

p, q conjugados de Hölder: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$= \left| \int f_j g_j - fg_j \right| + \int |f||g_j - g|$$

$$\leq \left| \int f_j g_j - fg_j \right| + \|f\|_p \|g_j - g\|_q$$

Como $f_j \to f$ en $L^p \Rightarrow \int f_j g \xrightarrow{j\to\infty} \int fg \quad \forall g \in L^q$

$\Rightarrow \int f_j g_j \xrightarrow{j\to\infty} \int f g_j \quad \forall g_j \in L^q$ } Convergencia débil.

Además, $\|f\|_p < \infty$ y $\|g_j - g\|_q \xrightarrow{j\to\infty} 0$

$$\therefore \left| \int f_j g_j - \int fg \right| \xrightarrow{j\to\infty} 0$$

$$\therefore \int f_j g_j \xrightarrow{j\to\infty} \int fg$$

Caso $p = \infty$.

Cambiamos el enunciado a $f_j \xrightarrow{*} f$ en L^p y $g_j \to g$ en L^1, entonces $\int f_j g_j \xrightarrow{j\to\infty} \int fg$.

dem

$$\left|\int f_j g_j - \int fg\right| \leq \left|\int (f_j g_j - f g_j)\right| + \int |f|\,|g_j - g|$$

$$\left|\int (f_j g_j - f g_j)\right| \xrightarrow{j\to\infty} 0 \quad \forall g_j \in L^1 \quad \text{ya que } f_j \xrightarrow{*} f \text{ en } L^\infty$$

$$\int |f|\,|g_j - g| \leq \|f\|_\infty \underbrace{\int |g_j - g|}_{\xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \text{ convergencia en } L^1}$$

$$\therefore \left|\int f_j g_j - \int fg\right| \xrightarrow{j\to\infty} 0$$

$$\therefore \int f_j g_j \xrightarrow{j\to\infty} \int fg$$

Análisis II
Desarrollo Tarea 3

Problema 1. Marco Godoy Valdebenito. 5,9

Muestre que si $f_i \to f$ en L^1, entonces (f_i) es equiintegrable.

dem.

$\forall j \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \Omega$ A medible

$$\left|\int_A f_j \, d\mu\right| \leq \int_A |f_j| \, d\mu = \int_A |f_j + f - f| \, d\mu$$

$$\leq \int_A (|f_j - f| + |f|) \, d\mu$$

$$= \int_A |f_j - f| \, d\mu + \int_A |f| \, d\mu$$

$$\int_A |f_j - f| \, d\mu \leq \int_\Omega |f_j - f| \, d\mu \xrightarrow{j\to\infty} 0 \Rightarrow f_j \xrightarrow{j\to\infty} f \text{ en } L^1(A)$$

$f \in L^1 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall A \subseteq \Omega$ medible, $\mu(A) < \delta$

$$\Rightarrow \int_A |f| < \varepsilon/2$$

$f_j \xrightarrow{j\to\infty} f$ en $L^1(A) \Rightarrow \exists j_0 \in \mathbb{N}$, $\forall j \geq j_0$: $\int_A |f_j - f| \, d\mu < \varepsilon/2$

$\therefore \forall A \subseteq \Omega$ medible, $\mu(A) < \delta \rightarrow \left|\int_A f_j \, d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\therefore (f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ equiintegrable. (6,0)

Problema 2

Sea $u \in C^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Muestre que si la derivada distribucional $D_3 u$ es cero, entonces u (coincide c.t.p con una función que) depende sólo de x_1, x_2.

dem. Recordemos que si $u \in C^1_{loc}(\Omega)$, entonces su derivada distribucional $D_3 u \left(= \frac{\partial}{\partial x_3} u \right)$ se define como

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_3} u\right)(\varphi) = - \int_\Omega u \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\varphi\right)$$

para todo $\varphi \in C^1_c(\Omega)$

Además, para $u \in C^1_{loc}(\Omega)$, la regularización $(u * \rho_\delta)_{\delta > 0}$ (ρ_δ son los mollifiers standar) convergen ctp a u y uniformemente en compactos. Luego basta estudiar primero el caso $u \in C^1_c(\Omega)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_3} u\right)(\varphi) = - \int u \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\varphi\right) = \int \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\varphi$$

$$\text{Si } \left(\frac{\partial}{\partial x_3} u\right)(\varphi) = 0 \Rightarrow \int \frac{\partial u}{\partial x_3}\varphi = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_3}\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C^1_c(\Omega)$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0 \quad \text{ctp}$$

$$\therefore u \text{ no depende de } x_3 \text{ ctp } x_3 \in \Omega.$$

La idea es la siguiente

$u_\delta := u * \rho_\delta \longrightarrow u$ y además, $\forall \varphi \in C^1_c(\Omega)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_3} u\right)(\varphi) = - \int u \frac{\partial}{\partial x_3}\varphi = - \int \lim_{\delta \to 0} u_\delta \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \lim_{\delta \to 0} - \int u_\delta \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \int \left(\frac{\partial}{\partial x_3} u_\delta\right)\varphi$$

Debemos justificar lo anterior.

Pd: $\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega \frac{\partial u_\delta}{\partial x_3}\varphi = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$

dem $\left|\int_\Omega \frac{\partial u_\delta}{\partial x_3}\varphi - \left(-\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\right| = \left|\int_\Omega \frac{\partial u_\delta}{\partial x_3}\varphi + \int_\Omega u \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right|$

$$= \left|-\int_\Omega u_\delta \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right| = \left|\int_\Omega (u-u_\delta)\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right|$$

$$\leq \int_\Omega |u-u_\delta|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right| \leq \|u-u_\delta\|_1 \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right\|_\infty$$

pero $\int_\Omega \frac{\partial u_\delta}{\partial x_3}\varphi = \int_{K=sop(\varphi)} \frac{\partial u_\delta}{\partial x_3}\varphi$, además $sop\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right) \subseteq sop(\varphi)$

luego hay que demostrar $\lim_{\delta\to 0}\int_K \frac{\partial u_\delta}{\partial x_3}\varphi = -\int_K u\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$

De lo anterior, $\|u-u_\delta\|_1 \xrightarrow{\delta\to 0} 0$ en $L^1_{loc}(\Omega)$, en particular $\|u-u_\delta\| \xrightarrow{\delta\to 0} 0$ sobre $K = sop(\varphi)$. Además, al ser $\varphi\in C^1(\Omega)$ $\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi$ $(i=1,2,3)$ es continua. Luego $\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$ alcanza extremos en K, es decir, $\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right\|_\infty < \infty$

$$\therefore \|u-u_\delta\|_1\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right\|_\infty \xrightarrow{\delta\to 0} 0.$$

$$\therefore \left|\int_\Omega \frac{\partial u_\delta}{\partial x_3}\varphi - \left(-\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\right| \xrightarrow{\delta\to 0} 0.$$

$$\therefore \lim_{\delta\to 0}\int_\Omega \frac{\partial u_\delta}{\partial x_3}\varphi = -\int u\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$$

Si $\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)(\varphi) = 0 = -\int u \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \Rightarrow \lim_{\delta\to 0}\int_\Omega \frac{\partial u_\delta}{\partial x_3}\varphi = 0 \quad \forall\varphi\in C^1_c(\Omega)$

$\Rightarrow \lim_{\delta\to 0}\int_K \frac{\partial u_\delta}{\partial x_3} = 0 \quad \forall K\subseteq\Omega$ compacto. Por regularidad de la medida μ, $\lim_{\delta\to 0}\int_U \frac{\partial u_\delta}{\partial x_3} = 0 \quad \forall U\subseteq\Omega$ abierto, y en particular,

$\lim_{\delta \to 0} \int_E \frac{\partial u_\delta}{\partial x_3} = 0$ para todo $E \subseteq \Omega$ medible.

$$\therefore \lim_{\delta \to 0} \frac{\partial u_\delta}{\partial x_3} = 0 \quad \text{ctp}$$

Se tiene que $\lim_{\delta \to 0} u_\delta = u$ ctp y $\lim_{\delta \to 0} \frac{\partial u_\delta}{\partial x_3} = 0$ ctp, entonces

u no depende de x_3 ctp.

↳ pero u ~~no~~ es C^1 todavia?

(5,5)

Problema 3

Muestre que $C(K)$ es separable para todo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto.

dem. Queremos ocupar el teorema de Stone-Wierstrass en $C(K)$.

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ es Hausdorff compacto.

Consideremos $\mathcal{P}_n = \{ p \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n] \ / \ \deg p \leq n \}$

(ej: $2x_1x_2 + x_1^2 + 4x_1x_2x_3$, $x_1^3 + 6$ son de grado 3, etc).

Es claro que $\mathcal{P}_n$ es numerable. Tomando $\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}$ es numerable ($\mathcal{P}$ es unión numerable de conjuntos numerables).

También tenemos que $\mathcal{P} \subseteq C(K)$ es una subálgebra que contiene funciones constantes y que separa puntos,

Dado $x, y \in K$, $x \neq y \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} : x_i \neq y_i$. Con $\pi(x_1, \dots, x_n) = x_i$ ($\pi \in \mathcal{P}$), se tiene $\pi(x) = x_i \neq y_i = \pi(y)$.

$\therefore$ Stone-Wierstrass $\Rightarrow \overline{\mathcal{P}} = C(K)$

$\therefore$ $C(K)$ es separable. (6,0).

Problema 4

Muestre que $C_c(\Omega)$ es separable para todo abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

dem: Sabemos que para $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, existe familia de compactos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $K_n \subseteq K_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, a saber,

$K_n = \{x\in\Omega \,/\, d(x,\partial\Omega) \geq 1/n\}$. → que pasa si $\Omega = \mathbb{R}^n$? ¿$\partial\Omega = \phi \to d(x,\phi) = \infty \to K_m = \mathbb{R}^n$!

Tenemos $\operatorname{int}(K_n) = \{x\in\Omega \,/\, d(x,\partial\Omega) > 1/n\} \subseteq K_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

y dado $\varphi \in C_c(\Omega) \Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}$ tal que $\operatorname{sop}(\varphi) \subseteq K_n$

En efecto,

$\forall x\in \operatorname{sop}(\varphi)$, $\exists r_x > 0$: $B(x, r_x) \subset \Omega$

$\Rightarrow \exists n_{r_x} \in \mathbb{N}$: $B(x, r_x) \subset \Omega_{n_{r_x}}$

Por compacidad de $\operatorname{sop}(\varphi)$: $\operatorname{sop}(\varphi) \subseteq B(x, r_{x_1}) \cup \ldots \cup B(x_s, r_{x_s})$

$\Rightarrow \operatorname{sop}(\varphi) \subseteq B(x_1, r_{x_1}) \cup \ldots \cup B(x_s, r_{x_s}) \subseteq \Omega_{n_{r_{x_1}}} \cup \ldots \cup \Omega_{n_{r_{x_s}}}$

tomando $\bar{n} = \max\{n_{r_{x_1}}, \ldots, n_{r_{x_s}}\}$: $\Omega_{n_{r_{x_1}}} \cup \ldots \cup \Omega_{n_{r_{x_s}}} \subseteq \Omega_{\bar{n}}$

$\therefore$ $\operatorname{sop}(\varphi) \subseteq \Omega_{\bar{n}}$ → porque se enula en ¿Ω_n?

Con lo anterior, $C_c(\Omega) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C(K_n)$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists A_n \subseteq C(K_n)$ numerable tal que $\overline{A_n} = C(K_n)$

$\Rightarrow A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es numerable. También

$$\bar{A} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C(K_n) = C_c(\Omega)$$

$\therefore$ A es denso en $C_c(\Omega)$

Así, $C_c(\Omega)$ es separable. ✓ (4,0)

Problema 5

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ Sea $(\rho_\delta)_{\delta>0}$ secuencia de mollifiers. Muestre que $\mu * \rho_\delta(x) := \int_\Omega \rho_\delta(x-y)\, d\mu(y)$ converge débil-$*$ en $\mathcal{M}(\Omega)$ a μ y $\|\mu * \rho_\delta\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \longrightarrow \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$ cuando $\delta \to 0$.

dem.

$\mu * \rho_\delta(x)$ función $\Leftrightarrow$ $\mu_\delta(E) = \int_E \mu * \rho_\delta(x)\,dx$ medida asociada

Con esto tenemos la caracterización de convergencia

$$\mu * \rho_\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{*} \mu \Longleftrightarrow \mu_\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{*} \mu \Longleftrightarrow \forall \varphi \in C_c(\Omega) : \langle \mu_\delta, \varphi\rangle \xrightarrow{\delta\to 0} \langle \mu, \varphi\rangle$$

donde $\langle \mu_\delta, \varphi\rangle = \int_\Omega \varphi\, d\mu_\delta$, $\langle \mu, \varphi\rangle = \int_\Omega \varphi\, d\mu$

$$\langle \mu_\delta, \varphi\rangle = \int_\Omega \varphi\, d\mu_\delta = \int_\Omega \varphi(x)(\mu * \rho_\delta)(x)\,dx = \int_\Omega \varphi(x)\left(\int_\Omega \rho_\delta(x-y)\,d\mu(y)\right)dx$$

$$= \int_\Omega \left(\int_\Omega \varphi(x)\rho_\delta(x-y)\,dx\right) d\mu(y)$$

$$= \int_\Omega (\rho_\delta * \varphi)(y)\, d\mu(y)$$

(Fubini, ya que φ tiene soporte compacto. y $\mu * \rho_\delta$ tiene soporte $\subseteq B(0,\delta)$, luego $\varphi \cdot (\mu * \rho_\delta)$ es integrable

Pd: $\langle \mu_\delta, \varphi\rangle \xrightarrow{\delta\to 0} \langle \mu, \varphi\rangle$. $\forall \varphi \in C_c(\Omega)$

Estimando la diferencia

$$|\langle \mu_\delta, \varphi\rangle - \langle \mu, \varphi\rangle| = \left| \int_\Omega (\rho_\delta * \varphi)(y)\,d\mu(y) - \int_\Omega \varphi(y)\,d\mu(y)\right|$$

$$= \left|\int_\Omega \big((\rho_\delta * \varphi)(y) - \varphi(y)\big)\,d\mu(y)\right| \leq \int_\Omega |(\rho_\delta * \varphi)(y) - \varphi(y)|\, d|\mu(y)|$$

Scanned with CamScanner

Sea $\varepsilon>0$. Existe $\delta>0$ tal que $\forall E\subseteq\Omega$ medible con

$\mu(E)<\delta \Rightarrow \displaystyle\int_E |(\rho_\delta * \varphi)(y)-\varphi(y)|\, d|\mu(y)| < \varepsilon/2$

Ocupando la regularidad de la medida μ (por regularidad de $|\mu|$) existe $K\subseteq\Omega$ compacto tal que $|\mu|(\Omega\setminus K)<\delta$. Por otro lado, $\rho_\delta * \varphi \xrightarrow{\delta\to 0} \varphi$ uniformemente sobre K, por eso, existe $\delta_0>0$ tal que $\forall\, \delta<\delta_0$; $\|\rho_\delta * \varphi - \varphi\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{2|\mu|(K)}$.

Con lo anterior obtenemos,

$$
\begin{aligned}
|\langle \mu_\delta, \varphi\rangle - \langle \mu, \varphi\rangle| &\le \int_\Omega |(\rho_\delta * \varphi)(y) - \varphi(y)|\, d|\mu(y)| \\
&= \int_K |(\rho_\delta * \varphi)(y) - \varphi(y)|\, d|\mu(y)| + \int_{\Omega\setminus K} |(\rho_\delta * \varphi)(y) - \varphi(y)|\, d|\mu(y)| \\
&< \|\rho_\delta * \varphi - \varphi\|_\infty \int_K d|\mu(y)| + \varepsilon/2 \\
&= \|\rho_\delta * \varphi - \varphi\|_\infty\, |\mu|(K) + \varepsilon/2 \\
&< \frac{\varepsilon}{2|\mu|(K)}\, |\mu|(K) + \varepsilon/2 = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .
\end{aligned}
$$

$\therefore \langle \mu_\delta, \varphi\rangle \xrightarrow{\delta\to 0} \langle \mu, \varphi\rangle \quad \forall \varphi\in C_c(\Omega)$

$\therefore \mu_\delta \xrightarrow{\delta\to 0} \mu$ débil-$*$ en $\mathcal{M}(\Omega)$.

Pd: $\|\mu * \rho_\delta\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \longrightarrow \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$ cuando $\delta \to 0$.

dem. $\|\mu\| = \sup \left\{ \left| \int_\Omega \varphi \, d\mu \right| \,/\, \varphi \in C_c(\Omega),\ \|\varphi\|_\infty \le 1 \right\}$

, ya que $\|\mu\| = \|\Lambda\|_{(C_c(\Omega))^*}$, donde Λ es el funcional descrito por el teorema de Riesz: $\langle \Lambda, \varphi \rangle = \int_\Omega \varphi \, d\mu \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega)$.

(Notar que $|\langle \Lambda, \varphi \rangle| \le \|\varphi\|_\infty \int_\Omega d|\mu| = |\mu|(\Omega) \|\varphi\|_\infty$, y $|\mu|(\Omega) = \|\mu\| < \infty$ por ser μ una medida vectorial)

$$\forall \varphi \in C_c(\Omega),\ \|\varphi\|_\infty \le 1 : \quad \left| \int_\Omega \varphi \, d\mu \right| = \left| \lim_{\delta \to 0} \int_\Omega \varphi \, d\mu_\delta \right| = \lim_{\delta \to 0} \left| \int_\Omega \varphi \, d\mu_\delta \right|$$

$$= \liminf_{\delta \to 0} \left| \int_\Omega \varphi \, d\mu_\delta \right|$$

Como $\|\varphi\|_\infty \le 1$, $\left| \int_\Omega \varphi \, d\mu_\delta \right| \le \int_\Omega |\varphi| \, d|\mu_\delta| \le \|\varphi\|_\infty |\mu_\delta|(\Omega) \le 1 \, |\mu_\delta|(\Omega) = \|\mu_\delta\|$

$$\therefore \liminf_{\delta \to 0} \left| \int_\Omega \varphi \, d\mu_\delta \right| \le \liminf_{\delta \to 0} \|\mu_\delta\|$$

$$\therefore \|\mu\| \le \liminf_{\delta \to 0} \|\mu_\delta\|$$

Por otro lado, $\forall \varphi \in C_c(\Omega)$, $\|\varphi\|_\infty \le 1$, $\int_\Omega \varphi \, d\mu_\delta = \int_\Omega \varphi(x)(\mu * \rho_\delta)(x) \, dx$, y:

$$\left| \int_\Omega \varphi(x)(\mu * \rho_\delta)(x) \, dx \right| \le \int_\Omega |\varphi(x)(\mu * \rho_\delta)(x)| \, dx \le \|\varphi\|_\infty \int_\Omega |\mu * \rho_\delta(x)| \, dx$$

$$\le \int_\Omega \left| \int_\Omega \rho_\delta(x-y) \, d\mu(y) \right| dx \le \int_\Omega \int_\Omega |\rho_\delta(x-y)| \, d|\mu(y)| \, dx$$

$$\underset{\text{Tonelli}}{=} \int_\Omega \left(\int_\Omega |\rho_\delta(x-y)| \, dx \right) d|\mu(y)| = \int_\Omega 1 \, d|\mu(y)| = |\mu|(\Omega) = \|\mu\|$$

$\int_\Omega |\rho_\delta(x-y)| \, dx = 1$

$$\therefore \|\mu_\delta\| \le \|\mu\|$$

$$\therefore \limsup_{\delta \to 0} \|\mu_\delta\| \leq \|\mu\|$$

Como $\limsup\limits_{\delta \to 0} \|\mu_\delta\| \leq \|\mu\| \leq \liminf\limits_{\delta \to 0} \|\mu_\delta\|$, se concluye que

$\lim\limits_{\delta \to 0} \|\mu_\delta\|$ existe y $\lim\limits_{\delta \to 0} \|\mu_\delta\| = \|\mu\|$.

(6,0).

Problema 6

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos $BD(\Omega) := \{u \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n) \;/\; Eu \in \mathcal{M}(\Omega)\}$ donde $Eu := \dfrac{Du + Du^T}{2}$, las derivadas D deben ser entendidas en el sentido distribucional. Pruebe que Eu puede ser recuperado como límite $\mathcal{M}(\Omega)$ - débil-$*$ de Eu_δ, con $u_\delta := u * \rho_\delta$, cuando $\delta \to 0$.

dem: Para $\varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$\langle Eu, \varphi \rangle = \int_\Omega Eu \cdot \varphi \, dx = \sum_{i,j} \int_\Omega (Eu)_{ij} \varphi_{ij} \, dx$$

Asumes $u \in C^1$?

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_\Omega \left(\frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \right) \varphi_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_\Omega (u_{i,j} \varphi_{ij} + u_{j,i} \varphi_{ij}) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_\Omega (u_i \varphi_{ij,j} + u_j \varphi_{ij,i}) dx \qquad (*)$$

Ahora para ver que $Eu_\delta \xrightarrow{*} Eu$ cuando $\delta \to 0$ tenemos

$\forall \varphi \in C^1_c(\Omega) : \langle Eu_\delta, \varphi \rangle \longrightarrow \langle Eu, \varphi \rangle$ lo cual se tiene por $(*)$.

En efecto,

$$|\langle Eu_\delta, \varphi \rangle - \langle Eu, \varphi \rangle| = \frac{1}{2} \left| \sum_{i,j} \left(\int_\Omega ((u_\delta)_{i,j} + (u_\delta)_{j,i}) \varphi_{ij} + \int_\Omega ((u_i \varphi_{ij,j} + u_j \varphi_{ij,i} \right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int \left| ((u_\delta)_{i,j} + (u_\delta)_{j,i}) \varphi_{ij} + ((u_i \varphi_{ij,j} + u_j \varphi_{ij,i}) \right|$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_\Omega \left| -(u_\delta)_i \varphi_{ij,j} - (u_\delta)_j \varphi_{ij,i} + u_i \varphi_{ij,j} + u_j \varphi_{ij,i} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_\Omega \left| \varphi_{ij,j} (u_i - (u_\delta)_i) + \varphi_{ij,i} (u_j - (u_\delta)_j) \right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\int_\Omega |\varphi_{i,j}|\,|(u_\delta)_i - u_i| + \int_\Omega |\varphi_{i,j,i}|\,|(u_\delta)_j - u_j|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_\Omega |\varphi_{i,j,j}|\,|(u_\delta)_i - u_i| + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_\Omega |\varphi_{i,j,i}|\,|(u_\delta)_j - u_j|$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{i,j}\|\varphi_{i,j,j}\|_\infty \int_\Omega |(u_\delta)_i - u_i| + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\|\varphi_{i,j,i}\|_\infty \int_\Omega |(u_\delta)_i - u_i|$$

Ocupando el mismo argumento que en el problema 5 podemos separar la integral en $\int_\Omega = \int_K + \int_{\Omega \setminus K}$ para un compacto K adecuado y en K $\|(u_\delta)_i - u_i\|_\infty \xrightarrow{\delta\to 0} 0$ $\forall i$, $\underbrace{\int_{\Omega\setminus K} |(u_\delta)_i - u_i| < \frac{\varepsilon}{4C}}$

donde $C = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\|\varphi_{i,j,j}\|_\infty$ $\left(C = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\|\varphi_{i,j,i}\|_\infty \text{ en el segundo caso}\right)$?

$\therefore$ cuando $\delta \to 0$, $|\langle Eu, \varphi\rangle - \langle Eu_\delta, \varphi\rangle| \xrightarrow{\delta\to 0} 0$

$\therefore$ $Eu_\delta \xrightarrow{*} Eu$ en $\mathcal{M}(\Omega)$ cuando $\delta \to 0$ (6,0)

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Segundo semestre de 2015
Robert Auffarth - Álvaro Ferrada.

Seminario de Problemas (Álgebra).
Guía 5.

1. Sea G un grupo de orden $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$. Demuestre que tiene un subgrupo cíclico de índice 3.

2. Sean $f_1, \dots, f_r \in k[t_1, \dots, t_n]$ para k un cuerpo algebraicamente cerrado, y suponga que $f_1(0) = \dots = f_r(0) = 0$. Demuestre que 0 es el único cero común de todos los f_i en k^n si y solamente si el ideal $(f_1, \dots, f_r)$ contiene todos los monomios de grado N para N suficientemente grande.

3. ¿Cuáles son todos los cuerpos que son de la forma $\mathbb{R}[x]/\mathfrak{m}$ para un ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq \mathbb{R}[x]$?

4. Demuestre que en un anillo artiniano todo ideal primo es maximal.

5. Demuestre que hay a lo más 4 grupos de orden 306 que contienen un elemento de orden 9.

6. Demuestre que $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ no es el cuerpo de descomposición de un polinomio en $\mathbb{Q}[x]$.

1. Mostrar que toda $f: S^1 \to S^1$ continua tal que $\deg(f) \neq 1$ tiene un punto fijo.

__dem.__ Por reducción al absurdo. Supongamos que $f: S^1 \to S^1$ no tiene puntos fijos.

Como $f(x) \neq x$ $\forall x \in S^1$, podemos definir $g: S^1 \to S^1 \setminus \{1\}$ por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. g es continua

$g: S^1 \to S^1 \setminus \{1\}$ continua $\Rightarrow$ $g_*: \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1 \setminus \{1\}, g(1))$ homomorfismo de grupos.

pero como $S^1 \setminus \{1\} \cong \mathbb{R}$ (homeomorfo) y $\mathbb{R}$ es simplemente conexo, $\pi_1(S^1 \setminus \{1\}, g(1)) = \{0\}$

$$\therefore \quad g_*([f]) = 0 \quad \forall [f] \in \pi_1(S^1, 1)$$

Por otro lado, $S^1 \xrightarrow{f} S^1$ y $\alpha: 1 \to f(1)$ camino

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, 1) \arrow[d, "f_*"'] \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\
\pi_1(S^1, f(1)) \arrow[r, "\gamma[\alpha]"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

donde $\tilde{f} = \gamma[\alpha] \circ f_*$ homomorfismo de grupos $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $\tilde{f}(1) = \deg(f)$. Como $\deg(f) \neq 1 \to \tilde{f} \neq 1_{\mathbb{Z}}$

~~Por otro lado $\tilde{f}(1) \neq 0$ ya que $\tilde{f}$ homomorfismo de $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ (grupos)~~

Redefiniendo $g_* : \pi_1(S^1, f(1)) \longrightarrow \pi_1(S^1 \setminus \{1\}, g(f(1)))$ obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, 1) \arrow[d, "f_*"'] \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\
\pi_1(S^1, f(1)) \arrow[r, "\gamma[\alpha]"'] \arrow[d, "g_*"'] & \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} \\
\{0\} = \pi_1(S^1 \setminus \{1\}, g(f(1))) \arrow[ur, dashed, "i ="'] &
\end{tikzcd}$$

No entiendo para donde va esto...

???

2. Sea

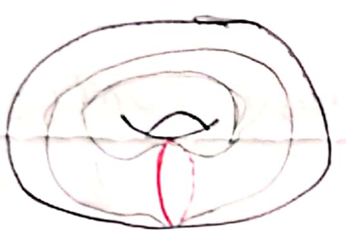
$$X = \left(S^1 \times S^1 \times \{0,1\}\right)/(x,1,0) \sim (x,1,1) \text{ para todo } x \in S^1$$

con la topología cociente. Notar que $\{0,1\}$ son dos puntos.

Calcular $\pi_1(X)$. ¿Será que X es homotópicamente equivalente a $(S^1 \times S^1) \vee (S^1 \times S^1)$?

<u>desarrollo</u>

$X = (S^1 \times S^1 \times \{0,1\})/(x,1,0) \sim (x,1,1)$ puede verse como dos toros, uno dentro del otro, pegados por un círculo transversal

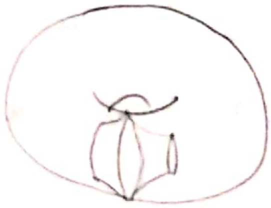


Para calcular $\pi_1(X)$ ocupamos Van-Kampen:

Sean U y V, $U, V \subseteq X$ abiertos dados por

$\boxed{U \cup V = X}$

U



V

$U \cap V$

~~Como~~ $U, V, U \cap V$ son arcoconexos. Como S^1 es un retracto de deformación para $U \cap V$, se tiene que $\pi_1(U \cap V) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

$S^1 \times S^1$ es un retracto de deformación para U y V respectivamente, ~~o sea~~, lo que quiere decir

$\pi_1(U) \cong \pi_1(S^1 \times S^1) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$\pi_1(V) \cong \pi_1(S^1 \times S^1) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$\therefore \quad \pi_1(X) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \Big/ \overline{\langle (i_1)_*(g)(i_2)_*(g)^{-1} \rangle}$$

$$\cong (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) * (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \Big/ \overline{\langle (i_1)_*(g)(i_2)_*(g)^{-1} \rangle}$$

$i_1 : U \cap V \hookrightarrow U$

$i_2 : U \cap V \hookrightarrow V$,

$(i_1)_* : \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\shortparallel}{\pi_1(U \cap V)}} \longrightarrow \underset{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\underset{\shortparallel}{\pi_1(U)}}$

$(i_2)_* : \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\shortparallel}{\pi_1(U \cap V)}} \longrightarrow \underset{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\underset{\shortparallel}{\pi_1(V)}}$

esto es explícito

$$\Rightarrow \pi_1(X) \cong (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) * (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \Big/ \overline{\langle (i_1)_*(1)(i_2)_*(1) \rangle}$$

representar con generadores y palabras

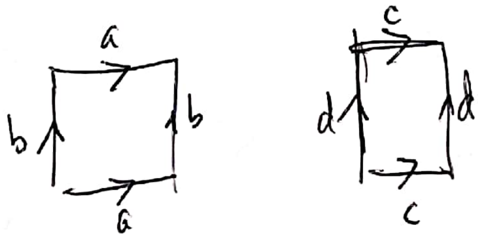
¿qué es eso?

X $\boxed{\text{no}}$ puede ser homotópicamente equivalente a $(S^1 \times S^1) \# (S^1 \times S^1)$

ya que $\pi_1((S^1 \times S^1) \# (S^1 \times S^1)) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \Big/ \overline{\langle aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \rangle}$

ok

donde



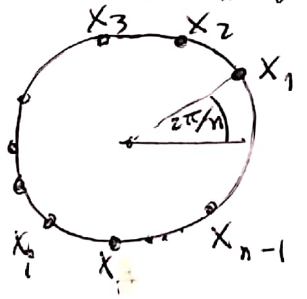
son los toros respectivos.

¿Porqué?

3. Sea $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ polinomio sin raíces en $S^1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$. Mostrar que el número de raíces de $p(z)$, contanto multiplicidades, en $|z| < 1$ es el grado de la función $f\colon S^1 \to S^1$ definida por $f(z) = p(z)/|p(z)|$.

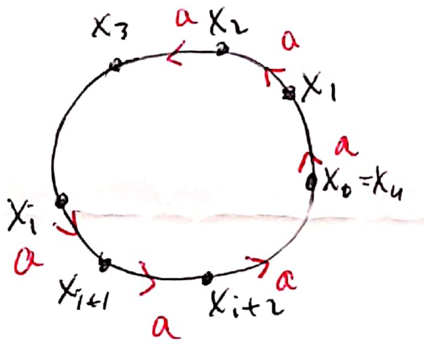
4. Sea G grupo isomorfo a $\mathbb{Z}/n_1 \times \mathbb{Z}/n_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_s$ con $n_i > 1$ enteros. Encontrar espacio topológico X tal que $\pi_1(X) \simeq G$.

dem. Consideremos S^1 mediante la partición:



y

$S^1_{(n)} =$



tiene grupo fundamental (por Van-Kampen) $\pi_1(S^1_{(n)}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Como $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$, podemos considerar

$$X = S^1_{(n_1)} \times S^1_{(n_2)} \times \ldots \times S^1_{(n_s)}$$

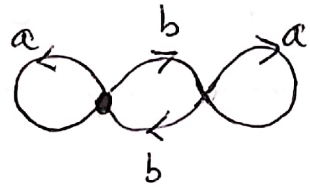
$$\therefore \pi(X) \cong \pi_1(S^1_{(n_1)}) \times \pi(S^1_{(n_2)}) \times \ldots \times \pi(S^1_{(n_s)})$$
$$\cong \mathbb{Z}/n_1 \times \mathbb{Z}/n_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_s$$

5. Sean $x_1, \ldots, x_n$ puntos en S^2. Considere $X = S^2 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $x \in X$.
   a) Calcule $\pi_1(X, x)$ en términos de generadores y relaciones.
   b) ¿Cuántos cubrimientos conexos $p\colon E \to X$ hay con $|p^{-1}(x)| = 2$?

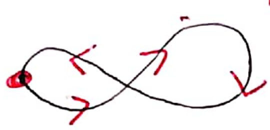
6. Sea $X = S^1 \vee S^1$. Dar un ejemplo de
   a) Un cubrimiento regular de X de grado finito.
   b) Un cubrimiento no regular de X de grado infinito.
   c) Un subgrupo libre en 5 generadores del group libre generado por dos elementos.

dem.

a) Consideramos el cubrimiento: $\tilde{X} =$



generado por $\langle a, b^2, b^{-1}ab^{-1} \rangle$



$\pi_1(\tilde{X})$ en términos de $\pi_1($ a b $)$

$\tilde{X}$ es regular, ya que:

$a^{-1}aa = a$, $b^{-1}ab = (b^{-1}ab^{-1})b^2$, $a^{-1}b^2a$, $b^{-1}b^2b = b^2$,

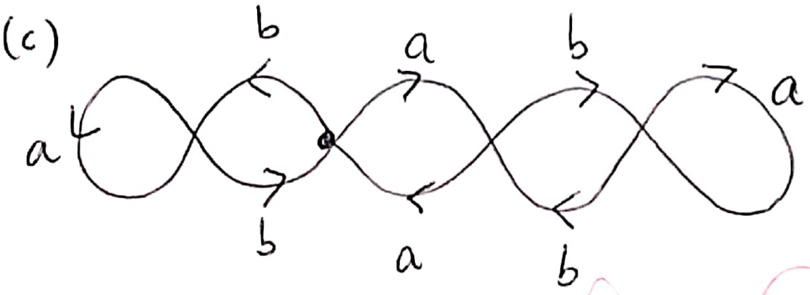
$a^{-1}(b^{-1}ab^{-1})a$, $b^{-1}(b^{-1}ab^{-1})b = b^{-2}a = (a^{-1}b^2)^{-1}$

están en $\tilde{X}$ $\therefore$ $\tilde{X} \trianglelefteq \langle a, b \rangle$?

el cubrimiento tiene grado 2 = índice $\therefore$ es normal.

(b)

(c)



$= X'$

$$X' = \langle a^2, b^2, b^{-1}ab, a^{-1}b^{2}a, a^{-1}b^{-1}a^2ba \rangle \leqslant \langle a, b \rangle$$

ok, pero se debe ser más claro en la respuesta.
Se usa lo que vimos en grafos, etc ...

4/11/2015

<u>teo</u> $f, g : X \to Y$ homotópicas $\Rightarrow f_* = g_* : H_n(X) \to H_n(Y)$

<u>Corolario</u>. $X \sim Y \Rightarrow H_n(X) \xrightarrow{\cong} H_n(Y) \ \forall n$

$$X \sim pto \Rightarrow H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\partial P}_{\text{prisma}} + \underbrace{P\partial}_{\text{prisma}} = g_\# - f_\#$$

<u>Axioma de Escisión</u>. Sea $Z \subseteq A \subseteq X$ con $\overline{Z} \subset \mathring{A} \Rightarrow$ la inclusión

$i : (X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo en homología

$$i_* : H_n(X\setminus Z, A \setminus Z) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A)$$

Equivalentemente, para subespacios $A, B \subset X$ tal que $\mathring{A} \cup \mathring{B} = X$

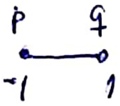
$\Rightarrow (B, A\cap B) \hookrightarrow (X, A)$ induce $H_n(B, A\cap B) \xrightarrow{\cong} H_n(X,A) \ \forall n$.

<u>Ejemplo</u>. $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / \sum_0^n x_i^2 = 1\}$

$$H_n(X \amalg Y) = H_n(X) \oplus H_n(Y)$$

$$H_n(S^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases}$$

Calcular $H_n(D^1, S^0)$

Tenemos $S^0 = \{-1, 1\} \hookrightarrow D^1 =$ 

$$\dots \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H_n(D^1)} \to H_n(D^1, S^0) \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H_{n-1}(S^0)} \to \dots \quad n \geq 2$$

$\Rightarrow H_n(D^1, S^0) = 0 \quad \forall n \geq 2$.

$$\cdots \to \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{H_1(S^0)} \to \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{H_1(D^1)} \to \underset{\substack{\parallel \\ \mathbb{Z}}}{H_1(D^1,S^0)} \to \underset{\substack{\parallel \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}}{H_0(S^0)} \to \underset{\substack{\parallel \\ \mathbb{Z} \\ \parallel \\ \langle p \rangle}}{H_0(D^1)} \to \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{H_0(D^1,S^0)} \to 0$$

$(p,q) \mapsto p+q$

$$0 \to \overset{\text{abeliano}}{G} \to \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0$$

$\Rightarrow G = \mathbb{Z}$

→ Suponer $f, g : X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$

$f(A) \subseteq B$, $g(A) \subseteq B$

Suponer que $f \sim g$ y $f|_A \sim g|_A$ $\Rightarrow$ se puede usar la "homotopía P" (prisma)

con $\partial P + P\partial = f_\# - g_\#$, donde $P : C_n(X,A) \to C_{n+1}(X,A)$

es el inducido por P (pag. 118 ¿Hatcher?)

$\Rightarrow f_* = g_* : H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$. En particular, si $fg \sim 1_Y$, $fg|_B \sim 1_B$

$gf \sim 1_X$, $gf|_A \sim 1_A$

5-lema. Suponer que tenemos el diagrama conmutativo de grupos abelianos

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \to & B & \to & C & \to & D & \to & E \\
\cong\downarrow\alpha & & \cong\downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \cong\downarrow\delta & & \cong\downarrow\varepsilon \\
X & \to & Y & \to & Z & \to & T & \to & U
\end{array}$$

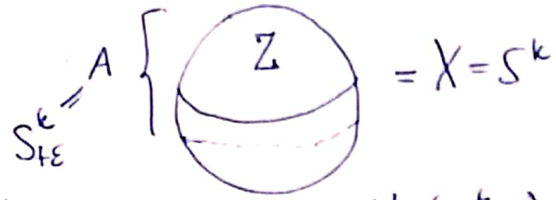
exactas

$\Rightarrow \gamma$ es $\cong$.

Cálculo de $H_n(S^k)$ $\forall n\geq 0$, $\forall k\geq 0$

(1) $S^k_{+\varepsilon}\subset S^k$ $\quad k>0$

$$\Rightarrow \dots \to H_n(S^k_{+\varepsilon}) \to H_n(S^k) \to H_n(S^k, S^k_{+\varepsilon}) \to H_{n-1}(S^k_{+\varepsilon})$$



pero $S^k_{+\varepsilon}$ es contractible $\Rightarrow H_n(S^k_{+\varepsilon}) = 0$ $\forall n>0$ y $H_0(S^k_{+\varepsilon})=\mathbb{Z}$

También: $H_n(S^k)\simeq H_n(S^k,S^k_{+\varepsilon}) \underset{\text{escisión}}{\simeq} H_n(D^k, \square) \simeq H_n(D^k, S^{k-1})$ $\quad n>1$

$$\dots\to \overset{0}{\cancel{H_1(S^k_{+\varepsilon})}} \to H_1(S^k)\to H_1(S^k,S^k_{+\varepsilon}) \to \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{H_0(S^k_{+\varepsilon})}} \to \underset{\mathbb{Z}}{H_0(S^k)} \to H_0(S^k,S^k_{+\varepsilon}) \to 0$$

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}$$

$\therefore H_1(S^k)\simeq H_1(S^k,S^k_{+\varepsilon})$

(2) $S^k \hookrightarrow D^{k+1}$

$$\dots \to H_n(S^k) \to \underbrace{H_n(D^{k+1})}_{=0} \to H_n(D^{k+1},S^k)\to H_{n-1}(S^k)\to 0\to\dots$$

si $k\geq 0$ y $n>1$ $\Rightarrow H_n(D^{k+1},S^k)\cong H_{n-1}(S^k)$

y $\dots\to H_1(S^k)\to \underset{0}{\underset{\parallel}{H_1(D^{k+1})}} \to H_1(D^{k+1},S^k)\to H_0(S^k)\to H_0(D^{k+1})=\mathbb{Z}$

$H_0(S^k)$: $\mathbb{Z}$ $k>0$; $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ $k=0$

$\to \underset{0}{\underset{\parallel}{H_0(D^{k+1},S^k)}} \to 0$

$$H_1(D^{k+1},S^k)=\begin{cases}0, & k>0\\ \mathbb{Z}, & k=0\end{cases}$$

$\therefore$ $H_n(D^{k+1}, S^k) \simeq H_{n-1}(S^k)$ $\forall n \geq 1$ $\forall k \geq 1$

y $H_1(D^1, S^0) = \mathbb{Z}$, $H_0(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$$H_n(S^{k+1}) \simeq H_{n-1}(S^k) \quad \text{si } k \geq 1, \; n > 1$$

$$H_n(S^1) \simeq H_{n-1}(S^0) \quad \text{si } n \neq 1$$

$$H_1(S^1) \simeq H_1(D^1, S^0) \simeq \mathbb{Z} .$$

$H_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases}$. Por inducción, si $k \geq 2$

$$H_n(S^k) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, k \\ 0 & , n \neq 0, k \end{cases}$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Segundo semestre de 2015
Robert Auffarth - Álvaro Ferrada.

Seminario de Problemas (Análisis y Variable Compleja).
Guía 3.

1. Sea f una función analítica en $\{z : 0 < |z| < 1\}$ tal que $|f(z)| \leq \log(1/|z|)$. Demuestre que $f \equiv 0$.
2. Sea f una función analítica en $\mathbb{D}$ y continua en $\overline{\mathbb{D}}$. Sea $I \subset \partial\mathbb{D}$ un arco tal que $f(\zeta) = 0$, $\zeta \in I$. Muestre que $f \equiv 0$.
3. Sea $E = \{P \in \mathbb{R}[x] : P(1) = 0\}$. Muestre que E es denso en $L^2(0, 1)$.
4. Sea X un espacio vectorial normado y $f : X \to \mathbb{R}$ un funcional lineal discontinuo. Muestre que $Ker(f)$ es denso en X.

9/11/2015

P1 Sea K cuerpo, $V := K^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Si $K \subseteq L$ es una extensión, entonces $V \otimes_K L \cong L^n$.

Para V_1, V_2 K-espacios vectoriales, $\max(\dim V_1, \dim V_2) < \infty$, se tiene que $\dim_K (V_1 \otimes V_2) = \dim_K V_1 \cdot \dim_K V_2$.

Af. Para F cuerpo, $F[x] \otimes_F F[y] \cong F[x,y]$

dem $\varphi : F[x] \times F[y] \longrightarrow F[x,y]$ es bilineal.

$$(f(x), g(y)) \longmapsto f(x)g(y)$$

φ induce función lineal (única) $\tilde{\varphi} : F[x] \otimes_F F[y] \longrightarrow F[x,y]$

tal que $\sum a_{ij} x^i \otimes y^j \longmapsto \sum a_{ij} x^i x^j$, cuya inversa es

$\cancel{\sum}$ $x^i y^j \mapsto x^i \otimes x^j$ (se expande por linealidad)

Generalizando: $F[x_1, \dots, x_n] \cong F[x_1] \otimes_F F[x_2] \otimes_F \dots \otimes_F F[x_n]$

Af A, B R-álgebras. $A \otimes_R B$ es R-algebras y $M_n(A) \otimes M_t(B) \cong M_{nt}(A \otimes_R B)$

$M_n(A) \times M_t(B) \longrightarrow M_{nt}(A \otimes B)$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & \\ b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{bmatrix} \right) \mapsto \begin{bmatrix} a_{11} \otimes b_{11} & a_{11} \otimes b_{12} \cdots a_{11} \otimes b_{1t} \cdots a_{nn} \otimes b_{11} \cdots a_{1n} \otimes b_{1t} \\ a_{11} \otimes b_{21} \cdots a_{11} \otimes b_{2t} \cdots a_{1n} \otimes b_{21} \cdots a_{2n} \otimes b_{2t} \end{bmatrix}$$

bilineal

$$A = B = R = \mathbb{Z} \quad \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \right) \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\to$ φ manda la base usual de $M_n(A) \otimes M_t(B)$ en la base usual de $M_{nt}(A \otimes B)$. φ es isomorfismo.

P2 A dominio integral. F cuerpo de fracciones F es A-módulo

Pd:

a) $\Lambda^2 F = \{0\}$

b) Si M es un A-submódulo de F $\forall j \geq 2$: $\Lambda^j M$ es de torsión

c) $\Lambda^j M$ no necesariamente es nulo si $M \subsetneq F$ es A-submódulo.

dem $\Lambda^2 F = F \otimes_A F / \langle v \otimes v \rangle$

$$\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \otimes \frac{bc}{bd} = ad\,bc\left(\frac{1}{bd} \otimes \frac{1}{bd}\right) = \cancel{abcd\,0} = 0.$$

b) M es un A-submódulo de F

$\Lambda^j M$ es de torsión $\iff$ $\forall x \in \Lambda^j M \;\exists a \in A^*: ax = 0$

$w = \frac{a_1}{b_1} \wedge \dots \wedge \frac{a_j}{b_j}$ tomando $a = b_1 \dots b_j$

$$aw = b_1 \dots b_j \left(\frac{a_1}{b_1} \wedge \dots \wedge \frac{a_j}{b_j}\right) = a_1 \wedge \dots \wedge a_j = a_1 \dots a_j (1 \wedge \dots \wedge 1) = 0$$

(c) $A = \mathbb{Q}[X_1, X_2]$, $F = \mathbb{Q}(x_1, x_2)$

$M = \langle \frac{1}{X_1}, \frac{1}{X_2} \rangle$

$$\frac{1}{X_1} \otimes \frac{1}{X_2} = \frac{X_2}{X_1 X_2} \otimes \frac{1}{X_2} = \frac{1}{X_1 X_2} \otimes \frac{X_2}{X_2} = \frac{1}{X_1 X_2} \otimes 1 = \frac{1}{X_1 X_2} \otimes \frac{X_1 X_2}{X_1 X_2}$$

$$= X_1 X_2 \Big(\underbrace{\frac{1}{X_1 X_2} \otimes \frac{1}{X_1 X_2}}_{\notin M} \Big)$$

3) G grupo finito. $|G| = n$

A anillo unitario , $G = \{g_1, \dots, g_n\}$

$$A(G) = \langle \sum_{i=1}^{n} a_i g_i \ / \ a_i \in A \rangle$$

para $A = \mathbb{Z}[G]$, $G = \mathbb{Z}/(2) = \langle e, g \rangle$

$M = \mathbb{Z}^2$

$\sigma(1,0) = (1,2)$ $\qquad$ σ se extiende a M linealmente.

$\sigma(0,-1) = (0,-1)$

Se tiene que $\sigma^2(1,0) = (1,0)$, $\sigma^2(0,1) = (0,1)$ $\Rightarrow$ $\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/(2)$

Esto define una acción de $\mathbb{Z}[G]$ en M, que lo convierte en $\mathbb{Z}[G]$-módulo

Pd: $\Lambda^2 M$ tiene dos elementos.

P2) I conjunto infinito de índices. A anillo conmutativo con 1.

$\{B_i\}_{i\in I}$ familia de A- ~~módulos~~ álgebras unitarias

X parcialmente ordenado. $i,j \in X \to \exists\, k \in X$: $\begin{matrix} i \leq k \\ j \leq k \end{matrix}$

$X = \{ J \subseteq I \,/\, \# J < \infty \}$. $J_1, J_2 \in X \to K = J_1 \cup J_2 \; \left\{ \begin{matrix} J_1 \subseteq K \\ J_2 \subseteq K \end{matrix} \right.$

def: $T_J = \bigotimes_{j\in J} B_j \;\Big|\; J_1 \subseteq J_2 \;:\; T_{J_1} \xrightarrow{\varphi_{J_1,J_2}} T_{J_2}$

$$T_{J_1} = M_{j_1} \otimes M_{j_2} \otimes \cdots \otimes M_{j_r}$$

$$\downarrow$$

$$T_{J_2} = M_{j_1} \otimes M_{j_2} \otimes \cdots \otimes M_{j_r} \otimes \cdots \otimes M_{j_s}$$

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \mapsto a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_r \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

def. $\bigotimes_{i\in I} B_i = \varinjlim_{X,\varphi} T_J := \{ (\omega_j)_J \in \prod_{j\in Y} T_j \;|\; J_1 \subseteq J_2,\ \omega_{J_2} = \varphi_{J_1,J_2}(\omega_{J_1}) \}$

$M_1 \otimes M_2 = M_2 \otimes M_1$

$\bigotimes_{i\in I} B_i$ es una A-álgebra

Propiedad universal: $T_J \xrightarrow{g_J} C$, $J \subseteq J'$:

$$\begin{tikzcd} T_J \arrow[rr, "\varphi_{J,J'}"] \arrow[dr, "g_J"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & T_{J'} \arrow[dl, "g_{J'}"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

$$g : \bigotimes_{i\in I} B_i \to C$$

02/11/2015

$|u_n(x) - u_n(y)| = |u_n'(z)||x-y|$

$\|\nabla u_n\|_{L^\infty} \leq M \Rightarrow \|u_n - u\| \to 0.$

- Semicontinuidad!

- Teo (Mazur).

- Espacios de Hilbert.

Algebra 02/11/2015

Ayudantía Algebra 02/11/2015

1) $T^n = M \otimes M \otimes \cdots \otimes N$

$T = \oplus T_n$

- Producto cuña: $M \wedge M = M \otimes M / N$, $N = \langle x \otimes x / x \in M \rangle$

M libre, $\{x_1, \ldots, x_r\}$ R-base de M, $x_i \otimes x_j - x_j \otimes x_i$ $i \neq j$

genera a M (modo N)

rango $M \wedge M = \binom{n}{2}$. Generalizando: $\Lambda^j(M)$ tiene rango $\binom{n}{j}$.

Problema (1) Sean A, B R-álgebras conmutativas. Sea $f_1 : A \to C$, $f_2 : B \to C$ homomorfismos de R-álgebras. Existe $h : A \otimes B \to C$, $h(a \otimes b) = h(a) \otimes h(b)$

homomorfismos naturales: $\pi_1 : A \to A \otimes B \quad a \mapsto a \otimes 1$

$\pi_2 : B \to A \otimes B \quad b \mapsto 1 \otimes b$

$$f(x) = (x^{12} - 16)(x^3 - 2)$$

$$= (x^6 - 4)(x^6 + 4)(x^3 - 2)$$

$$= \cancel{(x^3 - 4)(x^3 + 4)}$$

$$y = x^2 \Rightarrow y^2 + 5y^2 + 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2}$$

$$f(x) = (x^3 - 2)(x^3 + 2)(x^6 + 4)(x^3 - 2)$$

$$= (x^3 + 2)(x^3 - 2)^2 (x^6 + 4)$$

$(\sqrt[3]{-2}, \omega)$ $\quad$ $\sqrt[3]{2}, \omega$ $\quad$ $\sqrt[6]{4}, \zeta$

$\omega^3 = 1$ $\quad$ $\omega^3 = 1$ $\quad$ $\zeta^6 = 1$

$$\omega = e^{2\pi i/3}$$

$$\zeta = e^{2\pi i/6} = e^{\pi i/3}$$

$$\omega^2 = (e^{2\pi i/3})^2 = e^{4\pi i/3} = e^{3\pi i/3 + \pi i/3}$$

$$= e^{\pi i} e^{\pi i/3}$$

$$\zeta = e^{2\pi i/6} = e^{\pi i/3}$$

$$\zeta^2 = e^{2\pi i/3}$$

$$\zeta^3 = e^{\pi i} = -1$$

$$\zeta^4 = -\zeta$$

$$\zeta^5 = e^{5\pi i/3}$$

$$\zeta^6 = 1$$

$$\boxed{\zeta^2 = \omega}$$

$$\sqrt[6]{-2^2} = (-2)^{2/6} =$$

$$x^6 + 4 = (x^3 - 2i)(x^3 + 2i)$$

$$x^3 = 2i = 2e^{i\pi/2}$$

$$\sqrt[3]{i} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2}\, e^{i\pi/6}$$

$$x^6 = -4$$

$$y = x^3 \Rightarrow \cancel{y^3 - y - 4 \Rightarrow y =}$$

$$y^2 = -4 \Rightarrow y = -2i, 2i$$

Scanned with CamScanner

$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$\delta = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$

$f'(x) = (x-\alpha)(x-\beta) + (x-\alpha)(x-\gamma) + (x-\beta)(x-\gamma)$

$Gal\left(\begin{smallmatrix} \mathbb{K} \\ | \\ K \end{smallmatrix}\right)$ $[\mathbb{K}:K] = 4$ $\quad Gal(\mathbb{K}/K) = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

$Gal(\mathbb{K}/K) = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^2 = \tau^2 = (\sigma\tau)^2 = 1 \rangle$

$= \{1, \sigma, \tau, \sigma\tau\}$

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{K} & & \\ & 2 & | & & \\ K(\alpha) = \mathbb{K}^{\langle\sigma\rangle} & & L^{\langle\tau\rangle} = K(\beta) & & L^{\langle\sigma\tau\rangle} = K(\alpha\beta) \\ & 2 & | \quad /2 & & \\ & & K & & \end{array}$$

$\sigma\tau(\alpha\beta) = \sigma(\tau(\alpha)\tau(\beta)) = \sigma\tau(\alpha)\sigma(\beta) = \tau(\sigma(\alpha))\sigma(\beta)$
$= \tau(\alpha)\sigma(\beta)$

$K(\alpha) \neq K(\beta) \Rightarrow K(\alpha) \cap K(\beta) = \mathbb{K}$

$\alpha = \beta \Rightarrow \sigma(\beta) = \beta \Rightarrow K(\alpha) = K(\beta) \Rightarrow L^{\langle\sigma\rangle} \subseteq L^{\langle\tau\rangle}$

30 $\quad \langle\tau\rangle \subseteq \langle\sigma\rangle$

	0	30	45	60	90
sen $\sqrt{\ }$	0	1	2	3	4
cos	4	3	2	1	0

2

$e^{i\pi/6} = \cos(\pi/6) + i \,\mathrm{sen}(\pi/6) =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

$L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}, i)$

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) & \mathbb{Q}(\sqrt{3}) & \mathbb{Q}(i) \\ & \mathbb{Q} & \end{array}$$

2, 7

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ & |12 & \\ \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) & & \mathbb{Q}(\delta) \\ 3 & \mathbb{Q} & \varphi(12) = 4 \end{array}$$

$\delta = e^{2\pi i/12}$ $\quad \varphi(3)\varphi(4) = 2 \cdot 2 = 4$

$$\mathbb{F}_p[x]/(x^4+1) = \frac{\mathbb{Z}[x]}{(p, x^4+1)}$$

$$\boxed{\alpha^{p^4-9} = 1}$$

$$\boxed{p=3}$$

$$\boxed{\alpha^{3^4-9} = 1}$$

$\exists p : x^4+1$ irred

$\mathbb{F}_p(\alpha)$ $\quad \alpha^4+1=0$ $\quad \boxed{p \neq 2}$

$|4$ $\quad \mathbb{F}_p(\alpha) = \mathbb{F}_{p^4}$ $\quad \alpha^{p^4} = \alpha \;/\; (\alpha^{p^4})^4 = \alpha^4 =$

$\alpha^{p^4} - \alpha^9 = 0 \;\; \mathbb{F}_p$

$\alpha^4 = -1 = p-1$

$\alpha^{p^4-1} = 1$

$4x^3$

$\alpha^{p^4-9} = 1$

$\boxed{\alpha^8 = 1}$

$\operatorname{ord}(\alpha) \mid p^4-1,\; p^4-9$

$\alpha^8 \in \mathbb{F}_p$

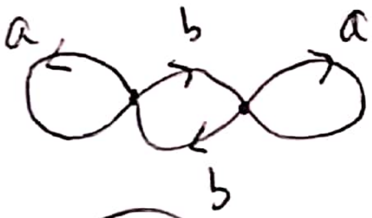
$$\boxed{\alpha^9 = \alpha} \to \alpha^{3^2} - \alpha = 0 \longrightarrow \alpha \in \mathbb{F}_{3^2}$$

$\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 - 2\alpha^2 = 0$

$(\alpha^2+1)^2 = 2\alpha^2$

$\alpha^{p^4} = \alpha^9$

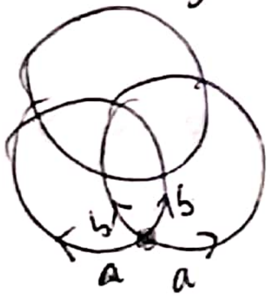
$\alpha^{p^4-1} = 1$



$\langle a, b^2, b^{-1}ab^{-1}\rangle$

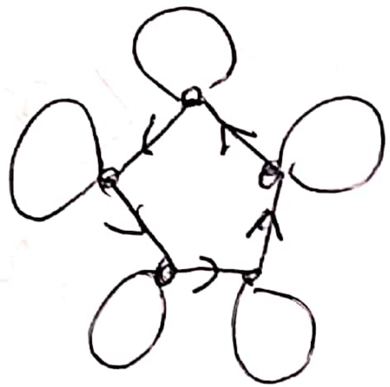
$ba^{-1}b$

$b^{-1}ab = (b^{-1}ab^{-1})b^2$

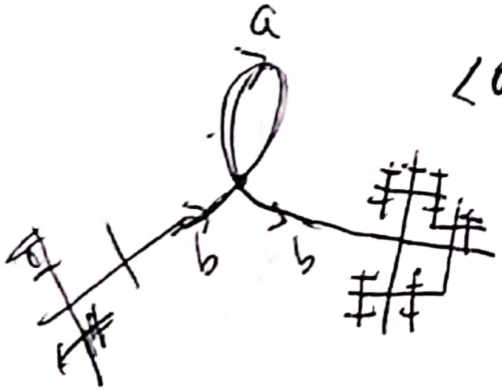


$a^{-1}aa = a$

$b^{-1}b^2b = b^2$



$a^{-1}b^2a = a^{-1}bba$

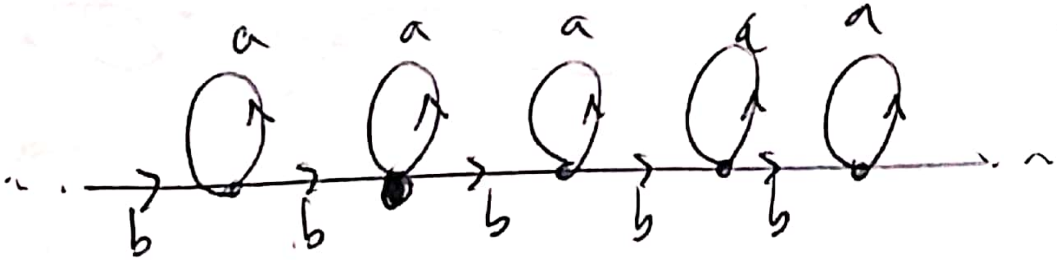


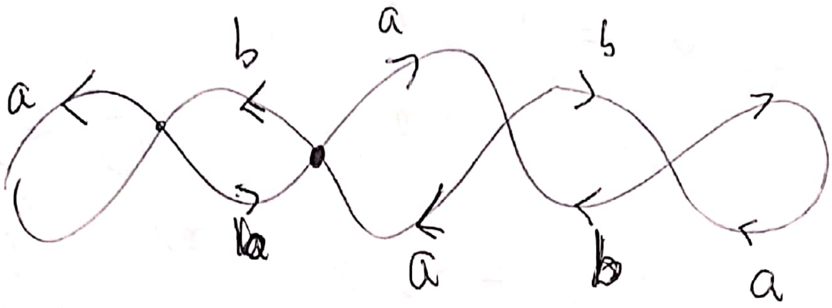
$\langle a\rangle$

$a^{-1}b^{-1}ab^{-1}a =$ ✓

$bb^{-1}ab^{-1}b^{-1} = ab^{-2}$

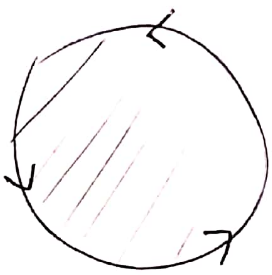
$\langle b^nab^{-n}, a \mid n\in\mathbb{Z}\rangle$





$\langle b^2, a^2, bab, ab^2a, aba^2ba \rangle$

$S^2 =$

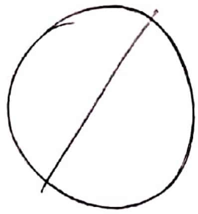


$S^2 \setminus \{x_1\}$

$\simeq$

$\mathbb{Z}$.

$S^2 \setminus \{x_1, x_2\}$:



$S^2 \setminus \{x_1, x_2\}$

$\mathbb{Z}$

$S^2 \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$

$f : S^1 \to S^1$

$$f_* : \pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{f_*} \pi_1(S^1, f(1)) \xrightarrow[\gamma[\alpha]]{\cong} \pi_1(S^1, 1)$$

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$1 \longmapsto \deg(f)$$

$\alpha : 1 \mapsto f(1)$

$f : S^1 \to S^1$

$f(x) \neq x \quad \forall x. \qquad g(x) = f(x) - x \qquad g(x) = \frac{f(x)}{x}$

$g : S^1 \longrightarrow \cancel{S^1 \setminus \{0\}}. \qquad g \neq 1 \ \forall x.$

$g : S^1 \to S^1 \setminus \{1\}$ continua, $g(1) = f(1)$.

$g_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1 \setminus \{1\}, g(1))$ $\qquad S^1 \setminus \{1\} \cong \cancel{(0,1)}\ \mathbb{R}$

$\cancel{\{0\}}\ \{0\}$

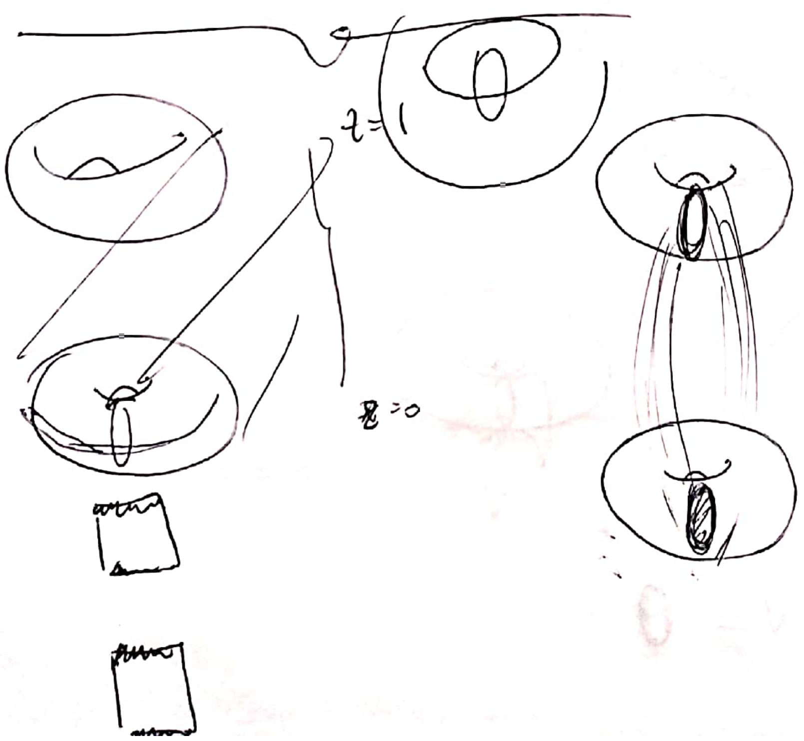
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, 1) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "f_*"] \arrow[dr, "\neq id" , "\text{homomorfismo}"'] & \pi_1(S^1 \setminus \{1\}, g(1)) = \cancel{\{0\}} \cancel{\cong \mathbb{Z}} \arrow[d, dashed] \\
\mathbb{Z} = \pi_1(S^1, f(1)) \arrow[r, "\gamma[\alpha]"'] \arrow[d, "g_*"] & \pi(S^1, 1) = \mathbb{Z} \\
\pi_1(S^1 \setminus \{1\}, g(f(1))) = \{0\} \arrow[ur, dashed, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

$0 \mapsto 0 \qquad 0 \in \gamma[\alpha] \circ f_*(\mathbb{Z})$

$i \circ g_* = \gamma[\alpha]$

$i(g_*(a)) = \gamma[\alpha](a)$

$g_*(a) = \gamma[\alpha](a)$



$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "id_{\mathbb{Z}}"'] & \{0\} \arrow[d, dashed] \\
& \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

$X = S^1 \vee S^1$

$\langle a^3, b^3, b^{-1}a \rangle$

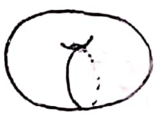
$\langle a^3, b^3, b^{-1}a, b^{-2}a^2, a^{-1}b, a^{-2}b^2 \rangle$

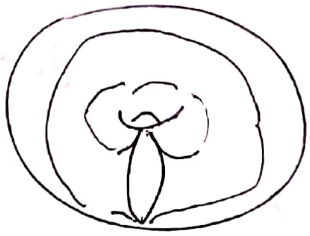
$= \langle a^3, b^3, b^{-1}a \rangle$

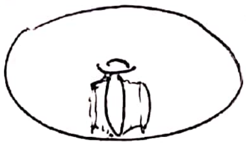
$a b^{-1} a a^{-1} = a b^{-1}$

$(b^{-1}a)^{-1} = a^{-1}b$

$X = (S^1 \times S^1 \times \{0,1\}) / (x,1,0) \sim (x,1,1) \quad \forall x \in S^1$







U

V

$U \cap V = 0$

Interrogación 2 - Análisis II

18/11/2015

Conteste cinco de las siguientes seis preguntas.

1. Sean X e Y espacios de Banach, $T : X \to Y$ una transformación lineal continua y $M \subset X$ un subconjunto cualquiera (podría no ser un subespacio vectorial). Demuestre que si $M + \operatorname{Ker} T$ es cerrado en X entonces $T(M)$ es cerrado en Y.

2. (a) Sean X e Y espacios de Banach. Sea $T : X \to Y$ una transformación lineal. Demuestre que si el gráfico de T es cerrado entonces T es continua.

   (b) Sean B un espacio de Banach y M y N subespacios vectoriales cerrados tales que $B = M \oplus N$. Sea P la proyección

   $$m \in M,\ n \in N \quad \Rightarrow \quad P(m+n) := n.$$

   Demuestre que P es continua.

3. (a) Sean X de Banach y $T : X \to X^*$ lineal tal que

   $$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \forall x, y \in X.$$

   Demuestre que T es continuo.

   (b) Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $p \in (1, \infty)$. Sea $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^p(X,\mu)$. Demuestre que si (f_j) converge en la topología débil de L^p entonces es acotada en L^p.

4. Sea X un espacio de Banach. Enuncie la forma geométrica del teorema de Hahn-Banach (en alguna de sus variantes). Esboce brevemente su demostración (al menos en el caso de un punto x_0 en el exterior de un convexo K abierto que contenga al origen, sin que la separación tenga que ser necesariamente estricta). Demuestre que todo conjunto cerrado y convexo es secuencialmente débilmente cerrado.

5. Sea H un espacio de Hilbert complejo. Sean $M_1, M_2, \ldots$ subespacios cerrados mutuamente ortogonales. Sean $P_1, P_2, \ldots$ las proyecciones ortogonales sobre estos subespacios.

   (a) Demuestre que la proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado de H es un operador continuo. Demuestre que $M_1 + \cdots + M_n$ es cerrado para cada $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Dados $f \in H$ y $N \in \mathbb{N}$, sea $s_N(f) := \sum_{j=1}^{N} P_j f$. Demuestre que $f - s_N(f) \perp M_1 + \cdots + M_N$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Demuestre que $\sum_1^\infty \|P_j f\|^2 \leqq \|f\|^2$. ~~[illegible]~~

   (c) Dados $f, g \in H$, demuestre que $\left| \sqrt{\sum_1^\infty \|P_j f\|^2} - \sqrt{\sum_1^\infty \|P_j g\|^2} \right| \le \|f - g\|$.

6. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Sea $H_0^1(\Omega)$ la clausura en $L^2(\Omega)$ de $C_c^\infty(\Omega)$ con respecto a la norma $\|u\|_{H_0^1} := \|Du\|_{L^2(\Omega)}$. Sea $\boldsymbol{A} \in L^\infty(\Omega; R^{n\times n})$ tal que

   $$\exists \alpha > 0\ \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n\ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \quad \boldsymbol{\xi} \cdot (A(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}) \ge \alpha \|\boldsymbol{\xi}\|^2.$$

   Demuestre que para todo $f \in L^2(\Omega)$ existe un único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\int_\Omega (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) Du(\boldsymbol{x})) \cdot Dv(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega f(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Demuestre que

   $$\frac{1}{\|\boldsymbol{A}\|_{L^\infty(\Omega)}} \sup_{v \in H_0^1(\Omega): v \neq 0} \frac{\int_\Omega f(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\|v\|_{H_0^1}} \le \|Du\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{C}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

   donde $C > 0$ es la constante en la desigualdad de Poincaré $\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \le C \|D\phi\|^2_L(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})\ \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$.

   $\| D\phi \|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})}$

Scanned with CamScanner

$$T : X \to Y$$

Banach (X, Y); lineal (T)

Pd: $Graf(T) = X \times TX$ cerrado $\Rightarrow$ T continua.

T.F.A: $\exists \delta > 0$. $B(0,\delta) \subseteq T(B(0,1))$

$y \in B(0,\delta) \Rightarrow \|y\| < \delta \Rightarrow \exists x \in X, \|x\| < 1$ tq $Tx = y$.

$\|Tx\| < \alpha \|x\|$ H

$$X \xrightarrow[H]{(1,T)} X \times TX \xrightarrow{\pi_2} TX$$

$$x \overset{H}{\underset{(1,T)}{\longmapsto}} (x, Tx) \xrightarrow[\pi_2]{} Tx$$

π_2 epi.

$T = \pi_2 \circ H$ | $T = \Upsilon^{-1}$ ¿Quién es Υ?

$X \times TX \to X$

$\Upsilon : (x, Tx) \mapsto TX$

$\bar{T} \circ \Upsilon(x, Tx) = T(x)$

$\Upsilon \circ \bar{T}(x) = \Upsilon(x, Tx) = X$.

$\tilde{T} : X \to X \times TX$

$x \mapsto (x, Tx)$

$x_j \to x \Rightarrow (x_j, Tx_j) \to (\alpha, \beta)$ .. $\underline{T(\alpha) = \beta}$.

$\subset \tilde{T}$ continua biyectiva

$\Rightarrow \Upsilon$ continua

$\Upsilon : (x, Tx) \to Tx$

Υ

$\Upsilon \circ \Lambda(x) = \Upsilon(x, Tx) = Tx$

~~$\Lambda \circ \Upsilon(x, Tx) =$~~

$T : X \to Y$ (Banach) $\quad M \subseteq X \quad$?

lineal-cont.

Pd: $\underline{M + \ker T} \subseteq X$ cerrado $\Rightarrow$ $T(M) \subseteq Y$ cerrado

$M + \ker T = \bigcup_{m \in M} (m + \ker T)$ cerrado

T cont $\Leftrightarrow$ $X \times TX$ cerrado en $X \times Y$. $\mid$ $M \times TM \subseteq X \times TX$.

$(Tx_j)_j \in TM$ tal que $Tx_j \to y$

$\| Tx_j - Tx_k \| = \| T(x_j - x_k) \| \leq \| T \| \, x_j - x_k \|$

$M + \ker T \subseteq X$ cerrado $\Leftrightarrow$ $(M + \ker T)^c$ abierto.

$T((M + \ker T)^c)$ $\mid$ $T^{-1}(T(M)) \supseteq M + \ker T$

$T(M + \ker T) = T(M)$ $\Rightarrow$ $M \times T(M)$ es cerrado en

$T(\cancel{m_j + e_j})$ $\quad (m_j + e_j)_j \in M + \ker T \subset X$

$\Rightarrow (m_j + e_j, T(m_j + e_j))_j$ suc. en $\cancel{T}\{M + \ker T\} \times T(M)$

$\Downarrow$

$(m_j + e_j, Tm_j)$ $\quad \beta =$

$\downarrow \quad \downarrow$

$\alpha \quad \beta \in$

Scanned with CamScanner

2b) $B = M \oplus N$ banach cerrados. $P(\underset{M}{m} + \underset{N}{n}) = n$

Pd: P continua.

$B \times P(B) = B \times N$

$T : X \to X^*$ lineal $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$
Banach

Pd: T continua

$\| Tx - Tx_j \|^2 = \langle Tx - Tx_j , T$

$(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \in L^p(X, \mu)$ $1 < p < \infty$.

$f_j \to f$ debil $\Rightarrow \forall \varphi \in L^q : \int f_j \varphi \to \int f \varphi$

$\Lambda_j : L^q(X, \mu) \to$ $\Lambda_j(\varphi) = \int f_j \varphi$

$(\Lambda_j.)$ ~~acotado en~~ $\cancel{L^q(X, \mu)}$

Por ~~Banach Steinhaus~~ $\cancel{\to (\Lambda_j)}$

$\forall \varphi \in L^q(X, \mu) : (\Lambda_j(\varphi))_j$ acotado.

Ba-S. $(\Lambda_j)_j$ acotado en $L^q(X, \mu)$

$\exists \delta > 0 : \| \Lambda_j \| < \delta$

$\| \Lambda_j \| = \| f \|_j$

$$T: \overset{\nearrow \text{Banach}}{X} \to X^* \quad \text{lineal} \qquad \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

$x_j \to x$, $(Tx_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en X^*

$$\langle Tx_j, y\rangle = \langle x_j, Ty\rangle = \langle Ty, x_j\rangle$$

$$\|\langle Tx_j, y\rangle - \langle Tx, y\rangle\| = \|\langle Tx_j - Tx, y\rangle\|$$

$$= \|\langle T(x_j - x), y\rangle\|$$

$$= \|\langle x_j - x, Ty\rangle\|$$

$$\leq \|x_j - x\|\|Ty\|$$

lineal continuo.

$$\|\langle Tx_j, y\rangle - \langle T\cancel{x}, y\rangle\| = \|\langle \cancel{T}y, x_j - x\rangle\|$$

$(Tx_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de Cauchy

$$\|\langle Tx_j, y\rangle - \langle Tx_k, y\rangle\| = \|\langle x_j - x_k, Ty\rangle\|$$

$A, B \subseteq X$ → Banach

↓ convexos disjuntos

$x_0 \in X \setminus K$ $\qquad \rho(x) = \inf\{\alpha > 0 \,/\, \frac{1}{\alpha} x \in K\}$

$\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

$\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x) \qquad \forall \lambda > 0.$

$x_0 \longrightarrow \{\lambda x_0\}_\lambda = \langle x_0 \rangle \qquad f(\lambda x_0) = \lambda$ lineal continua

↓ Hahn Banach

$\rho(x) \qquad K = \{x \,/\, \rho(x) < 1\}$

$x \in K \Rightarrow \frac{1}{1/2} x \in K \Rightarrow \rho(x) < 1/2 < 1$ $\qquad \exists F : X \to \mathbb{R}$, $\|f\| = \|F\|$

$\xi = \rho(x) < 1 \Rightarrow \inf\{\alpha > 0 \,/\, \frac{1}{\alpha} x \in K\}$

$\alpha \leq 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

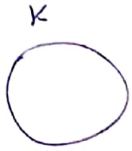
sup $\exists x \in X : \rho(x) \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \in K$ dejan $\alpha \geq 1$

$x_0 - K$ convexo abierto.

$x_0 \in x_0 - K \qquad \rho(x) < f(x_0) = 1$

$x_0 \in \bar{K} \Leftrightarrow \exists f$ lineal continua tq $\rho(x) \geq f(x_0) \neq 0$

$K \qquad x_0 \notin \bar{K}$ $\qquad \exists \Lambda$ lineal



$\Lambda x_0 \neq \Lambda x \quad \forall x$

$\rho(x_0) = r \frac{x_0}{\|x_0\|}$

$H = M \oplus M^{\perp}$

$x_j = y_j + z_j$

$x_j \to x = y + z$

$\| x_j - x \| = \| y_j + z_j - y - z \|$

$\leq \| y_j - y \| + \| z_j - z \|$

es sobreyectiva. Como $\prod_{i=1}^{n} A_i$ es numerable (es producto finito de numerables) se tiene que cada B_n es numerable.

Sea $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, D es numerable. Sea $S = < y_1, y_2, \ldots > = \{\sum_{k=1}^{n} \nu_k y_k \, : \, \nu_k \in \mathbb{C}, \, n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de los vectores y_k. S es un subespacio vectorial de X y $S \subset \overline{D}$. En efecto, si $x = \sum_{k=1}^{n} \nu_k y_k \in S$, puesto que $\nu_k \in \mathbb{C} = \overline{A}$, existe, para cada $\epsilon > 0$ y cada $k = 1, 2, \ldots, n$, un $\lambda_k \in A$ tal que

$$|\lambda_k - \nu_k| < \frac{\epsilon}{\max\limits_{k=1,\ldots,n} \|y_k\|} \frac{1}{n}$$

luego $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k \right\| < \epsilon$, lo cual demuestra que todo elemento de S tiene un elemento de D arbitrariamente cercano a él.

X es separable porque D es numerable y denso en X. De no ser así habría $x_0 \notin \overline{D}$ y como $S \subset \overline{D} \Rightarrow \overline{S} \subset \overline{D} \Rightarrow x_0 \notin \overline{S}$. Por el teorema de Hahn - Banach (ver sección siguiente) habría $f \in X^*$, $f \neq 0$ tal que $f \equiv 0$ en $\overline{S}$ y $f(x_0) \neq 0$. En particular se tendría que $f(y_n) = 0$ para todo n.

Como $f \in X^* = \overline{\{f_n \, : \, n \in \mathbb{N}\}}$ habría n tal que $\|f - f_n\| \leq \frac{\|f\|}{4}$. De este modo

$$|f(y_n) - f_n(y_n)| \leq \|f - f_n\| \|y_n\| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq |f_n(y_n)| \leq \|f - f_n\| \frac{1}{\|f_n\|}$$

Luego

$$\|f - f_n\| \geq \frac{\|f_n\|}{2} \geq \frac{1}{2}[\|f\| - \|f - f_n\|] \geq \frac{3}{8}\|f\|$$

de lo cual se obtiene una contradicción puesto que $\|f\| > 0 \Rightarrow \frac{3}{8}\|f\| > \frac{1}{4}\|f\|$. ■

2.7 Teorema de Hahn - Banach

Sea X un conjunto no vacío. Sea $\preceq$ un orden parcial en X (relación refleja, antisimétrica y transitiva). $(X, \preceq)$ se dice parcialmente ordenado. Un orden parcial $\preceq$ se dice lineal si cada vez que $x, y \in X$ entonces $x \preceq y$ o bien $y \preceq x$.

Principio Maximal de Haussdorff: Sea $(X, \preceq)$, $X \neq \emptyset$ entonces existe un subconjunto $S \subset X$ que es maximal y que está linealmente ordenado, i.e.

- S está linealmente ordenado por $\preceq$
- Si $S \subset T \subset X$ y T está linealmente ordenado por $\preceq$ entonces $S = T$.

Teorema 2.13 (Teorema de Hahn - Banach) *Sea X un espacio vectorial real. Sea $\rho : X \to \mathbb{R}^1$ tal que $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, $\rho(\alpha x) = \alpha \rho(x) \quad \alpha \geq 0$.*

Sea S un subespacio de X y sea f un funcional lineal real definido en S tal que $f(x) \leq \rho(x)$ $\forall x \in S$. Entonces existe un funcional lineal $F : X \to R^1$ tal que $F(x) \leq \rho(x)$ para todo $x \in X$ y tal que $f(x) = F(x)$ $\forall x \in S$.

Demostración: Sea $P = \{(S', f') : S'$ es un subespacio de X, $S' \supset S$ y f' es una extensión lineal de f a S' tal que $f(x) \leq \rho(x)$ $\forall x \in S'$ $\}$. $P \neq \emptyset$ puesto que contiene a (S, f).

En P diremos que $(S', f') \preceq (S'', f'')$ si $S' \subset S''$ y $f''(x) = f'(x)$ $\forall x \in S'$. Es obvio que $\preceq$ es relación de orden parcial. Por el principio maximal de Hausdorff hay subconjunto Ω de P linealmente ordenado por $\preceq$ y maximal.

Sea $\Phi = \{S' : (S', f') \in \Omega\}$. Entonces Φ está linealmente ordenado por inclusión, llamemos $\widehat{S} = \bigcup_{S' \in \Phi} S'$. Nótese que $\widehat{S}$ es un subespacio de X.

En $\widehat{S}$ definamos un funcional F: Sea $x \in \widehat{S}$, entonces $x \in S'$ para algún $S' \in \Phi$, sea $F(x) = f'(x)$. Supongamos que $x \in S''$ donde $(S'', f'') \in \Omega$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $S'' \supset S'$. Entonces $f''(x) = f'(x)$, luego la definición de F es independiente del S' que contenga a x.

F es lineal: Sean $x, y \in \widehat{S}$, $x \in S'$, $y \in S''$. Supongamos $S' \subset S''$. Entonces $\lambda x + \mu y \in S''$,

$$F(\lambda x + \mu y) = f''(\lambda x + \mu y) = \lambda f''(x) + \mu f''(y) = \lambda f'(x) + \mu f''(y) = \lambda F(x) + \mu F(y)$$

$(\widehat{S}, F)$ es extensión maximal: Sea (S, G) extensión de $(\widehat{S}, F)$. Entonces para todo $(S', f') \in \Omega$ se tiene que $(S', f') \preceq (\widehat{S}, F) \preceq (S, G)$ lo cual no puede ser porque Ω es maximal, a menos que $\widehat{S} = S$ y $F = G$.

Queremos demostrar que F está definido para todo $x \in X$, i.e., que $\widehat{S} = X$.

ρ debe cumplir que
$\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$
$\rho(\alpha x) = \alpha \rho(x)$ $\forall \alpha > 0$

Lema: Sea T subespacio propio de X, sea g funcional lineal en T tal que $g(x) \leq \rho(x)$. Entonces g tiene una extensión propia h tal que $h(x) \leq \rho(x)$ $\forall x \in Dom\, h$

Demostración: Sea $y \in X - T$, sea $U = span(T, y)$. Sea $\lambda y + t \in U$, si h es una extensión de g a U debe tenerse que

$$h(\lambda y + t) = \lambda h(y) + g(t)$$

luego solo debemos especificar $h(y)$. Buscamos $h(y)$ tal que

$$\begin{aligned} h(\lambda y + t) &\leq \rho(\lambda y + t) \qquad \forall \lambda > 0 \quad \forall t \in T \\ h(-\lambda y + s) &\leq \rho(\lambda y + s) \qquad \forall \lambda > 0 \quad \forall s \in T \end{aligned}$$

Sea $\alpha = h(y)$. La primera condición equivale a

$$\lambda \left[\alpha + h\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right] \leq \lambda \rho \left(y + \frac{t}{\lambda}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \leq \rho\left(y + \frac{t}{\lambda}\right) - h\left(\frac{t}{\lambda}\right).$$

La segunda condición es equivalente a

$$\lambda \left[-\alpha + h\left(\frac{s}{\lambda}\right)\right] \leq \lambda \rho \left(-y + \frac{s}{\lambda}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \geq -\rho\left(-y + \frac{s}{\lambda}\right) + h\left(\frac{s}{\lambda}\right).$$

Llamemos $t_1 = \frac{t}{\lambda}$, $t_2 = \frac{s}{\lambda}$. Buscamos α tal que

$$h(t_2) - \rho(t_2 - y) \leq \alpha \leq \rho(t_1 + y) - h(t_1) \qquad \forall\, t_1, t_2 \in T\,,$$

y como h es extensión de g la expresión anterior se convierte en

$$g(t_2) - \rho(t_2 - y) \leq \alpha \leq \rho(t_1 + y) - g(t_1)$$

Si demostramos que $g(t_2) - \rho(t_2 - y) \leq \rho(t_1 + y) - g(t_1)$ para todo t_1 y t_2 en T, cualquier elección de α entre $\sup_{t\in T}\{g(t) - \rho(t - y)\}$ e $\inf_{t\in T}\{\rho(t + y) - g(t)\}$ servirá para nuestro propósito. En efecto, si fijamos t_2 tenemos que

$$g(t_2) - \rho(t_2 - y) \leq \inf_{t_1\in T}\{\rho(t_1 + y) - g(t_1)\} \quad \forall\, t_2 \in T$$

luego

$$\sup_{t_2\in T}\{g(t_2) - \rho(t_2 - y)\} \leq \inf_{t_1\in T}\{\rho(t_1 + y) - g(t_1)\}\,.$$

Demostrar que $g(t_1) + g(t_2) \leq \rho(t_1 + y) + \rho(t_2 - y)$ se reduce a notar que

$$g(t_1 + t_2) \leq \rho(t_1 + t_2) = \rho((t_1 + y) + (t_2 - y)) \leq \rho(t_1 + y) + \rho(t_2 - y)\,.$$

Por lo tanto $h(\lambda y + t) \leq \rho(\lambda y + t)$ para todo λ real y $h(\lambda y + \mu t) = \lambda\alpha + \mu g(t)$ es claramente lineal, luego es una extensión propia de g. ■

Se concluye que $\widehat{S} = X$, o de lo contrario F no sería maximal.

Hahn-Banach versión compleja.

Teorema 2.14 *Sea X un espacio vectorial complejo. S subespacio de X, ρ función real definida en X tal que $\rho(x+y) \leq \rho(x)+\rho(y)$ y $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$. Sea f un funcional lineal complejo definido en S tal que $|f(x)| \leq \rho(x)\ \forall\, x \in S$. Entonces hay funcional lineal F definido en X tal que $F(x) = f(x)\ \forall x \in S$ y $|F(x)| \leq \rho(x)\ \forall\, x \in X$.*

En la demostración utilizaremos el siguiente lema, el cual se demuestra en forma trivial.

Lema: Sea $F : X \to \mathbb{C}$ tal que $F(x + y) = F(x) + F(y)\ \forall x, y \in X$ y $F(\lambda x) = \lambda F(x)\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, x \in X$. Entonces $F(\delta x) = \delta F(x)\ \forall\, \delta \in \mathbb{C}$ y $\forall\, x \in X$ si y sólo si $F(ix) = iF(x)\ \forall x \in X$.

Demostración: En S sea $g(x) = Re\, f(x)$, $h(x) = Im\, f(x)$. Entonces g, h son lineales en el sentido real. Pero f es lineal en el sentido complejo luego $\forall\, x \in S$:

$$g(ix) + ih(ix) = f(ix) = if(x) = i(g(x) + ih(x)) = ig(x) - h(x)$$

$g(ix)$ es real, $h(x)$ es real, $ih(ix)$ es imaginario puro, $ig(x)$ es imaginario puro luego para todo $x \in S$ se tiene $-h(x) = g(ix)$.

Como $\forall\, x \in S:\ g(x) \leq |f(x)| \leq \rho(x)$ extendamos g a un funcional G en X que es lineal en el sentido real y tal que $G(x) \leq \rho(x)\ \forall\, x \in X$.

Sea $F(x) = G(x) - iG(ix)$. Entonces si $x \in S$, $F(x) = g(x) + ih(x) = f(x)$. Pero $F(ix) = G(ix) - iG(-x) = i(G(x) - iG(ix)) = iF(x)$ luego F es lineal en el sentido complejo.

Sea $x \in X$, sea $\omega = \frac{|F(x)|}{F(x)}$, $|\omega| = 1$.

$$\begin{aligned} |F(x)|^2 &= |G(x) - i(G(ix))|^2 = G^2(x) + G^2(ix) = G(xG(x)) + G(ixG(ix)) \\ &= G(x(G(x) + iG(ix))) = G(x\overline{F(x)}) = G(x\frac{|F(x)|^2}{F(x)}) = G(x\omega|F(x)|) \\ \Rightarrow \quad |F(x)| &= G(\omega x) \end{aligned}$$

Luego $|F(x)| = G(\omega x) \leq \rho(\omega x) = \rho(x)$. ∎

importante

Teorema 2.15 *Sea X espacio normado, sea S subespacio de X, sea f funcional lineal acotado definido en S. Entonces f puede ser extendido a un funcional lineal acotado F en X y $\|F\| = \|f\|$*

Rudin

Demostración: Elijamos $\rho(x) = \|f\|\|x\|$. $f(x) \leq \rho(x)$ para todo $x \in S$ luego f puede ser extendido a un funcional lineal F definido en X tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in S$ y $|F(x)| \leq \rho(x)$ para todo $x \in X$. Además

$$\|F\| = \sup_{x \in X} \frac{|F(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in S} \frac{|F(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in S} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\|$$

luego $\|F\| = \|f\|$. ∎

Teorema 2.16 *Sea X espacio normado, sea $x_0 \in X$. Entonces existe un funcional lineal acotado F en X tal que $F(x_0) = \|x_0\|$ y $\|F\| = 1$.*

Rudin

Demostración: Sea $S = Span\, x_0$. En S definimos $f(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|$, sea $\rho(x) = \|x\|$. Sea F extensión de f a X tal que $|F(x)| \leq \|x\|$. Se tiene entonces que $\|F\| \leq 1$, pero $F(x_0) = \|x_0\|$ luego $\|F\| = 1$. ∎

Corolario 2.17 *Sea X espacio normado, sea $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Entonces hay $f \in X^*$ tal que $f(x_0) \neq 0$.*

Hecho

(*) **Teorema 2.18** *Sea X espacio normado, sea S subespacio de X. Sea $x_0 \in X$. Entonces $x_0 \in \overline{S}$ si y sólo si no existe un funcional lineal acotado f en X tal que $f(x) = 0\ \forall x \in S$ pero $f(x_0) \neq 0$.*

Hecho

Sale en el Rudin.

Demostración: Supongamos que $x_0 \in \overline{S}$, sea f lineal acotado tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in S$. Sea $\{x_n\}: x_n \in S$ y $x_n \to x_0$, entonces $f(x_n) \to f(x_0) \Rightarrow f(x_0) = 0$.

A la inversa, supongamos que $x_0 \notin \overline{S}$, buscamos $f \in X^*$ que valga cero en S tal que $f(x_0) \neq 0$. Como $x \notin \overline{S}$ hay $\delta > 0: \|x - x_0\| > \delta\ \forall x \in S$. Sea $S' = span\,(S, x_0)$, en S' definimos $f(x + \lambda x_0) = \lambda$ si $x + \lambda x_0 \in S'$. Entonces f es claramente lineal y

$$\|\lambda x_0 + x\| = |\lambda| \left\| x_0 - \left(\frac{-x}{\lambda}\right) \right\| \geq \delta|\lambda|$$

Entonces $\dfrac{|f(\lambda x_0 + x)|}{\|\lambda x_0 + x\|} \leq \dfrac{1}{\delta}$ para todo $\lambda x_0 + x \in S'$, luego en S' se tiene $\|f\| \leq \frac{1}{\delta}$.

consecuencia de lo anterior

$f(x) = 0$ para $x \in S$ y $f(x_0) = 1$. Extendiendo f de S' a X encontramos el funcional buscado. ■

Nota: Si S es subespacio cerrado, $x_0 \notin S$, $dist(x_0, S) = d$ hay f en X^* tal que $f(S) = 0$, $f(x_0) = d$ y $\|f\| = 1$.

En $\mathbb{R}^n$ este resultado se tiene directamente usando la idea de proyección ortogonal. Sea P el punto donde termina el vector x_0 si ubicamos a éste a partir del origen, sea Q la proyección ortogonal de P sobre el subespacio S, sea $\vec{n}$ el vector unitario que apunta en la dirección del vector $\overrightarrow{PQ}$ y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ el funcional lineal definido por $f(x) =< \vec{n}, x >$, donde $< \vec{n}, x >$ representa el producto interno estándar en $\mathbb{R}^n$. Puesto que $\vec{n}$ es unitario $\|f\| = 1$. Dado que $\vec{n}$ es ortogonal a S, f es idénticamente cero en S. Finalmente, dado que $\vec{n}$ está en la dirección de $\overrightarrow{PQ}$ y Q está en S se tiene que

$$f(x_0) =< \vec{n}, \overrightarrow{PQ} >= \|\overrightarrow{PQ}\| = d.$$

F_{x_0} es la evaluación en x_0

Nota: Puesto que $X^* = B(X, \mathbb{C})$, X^* es siempre completo. Sea $x_0 \in X$ fijo, definimos $F_{x_0} : X^* \to \mathbb{C}$ por $F_{x_0}(f) = f(x_0)$. Es trivial que F_{x_0} es lineal, además

$$\|F_{x_0}\| = \sup \frac{|F_{x_0}(f)|}{\|f\|} = \sup_{f \in X^*} \frac{|f(x_0)|}{\|f\|} \le \sup_{f \in X^*} \frac{\|f\|\|x_0\|}{\|f\|} = \|x_0\|$$

Como consecuencia de Hahn-Banach hay $f_0 \in X^*$ tal que $\|f_0\| = 1$ y $f_0(x_0) = \|x_0\|$ luego $\|F_{x_0}\| = \|x_0\|$.

luego se tiene que $\|F_{x_0}\| \le \|x_0\|$ y $\frac{|F_{x_0}(f_0)|}{\|f_0\|} = |f_0(x_0)| = \|x_0\|$ ∴ $\|F_{x_0}\| = \|x_0\|$

Consecuencia: si $F_x \in X^{**}$ es la evaluación $\Rightarrow \|F_x\| = \|x\|$

Sea $h : X \to X^{**}$ dada por $h(x) = F_x$. Entonces

$$\begin{aligned} h(\alpha x_1 + \beta x_2)(f) &= F_{\alpha x_1 + \beta x_2}(f) = f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \\ &= \alpha F_{x_1}(f) + \beta F_{x_2}(f) = (\alpha h(x_1) + \beta h(x_2))(f) \end{aligned}$$

luego h es lineal y es isometría ($\|h(x)\| = \|x\|$). Además $h(x) = 0 \Rightarrow h(x)(f) = f(x) = 0\ \forall f \in X^*$ pero como consecuencia de Hahn - Banach, si $x \neq 0$ hay $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq 0$, luego $x = 0$. h es entonces 1-1, luego módulo isomorfismo podemos decir que $X \subset X^{**}$. X se dice reflexivo si $X = X^{**}$. Como X^{**} es siempre completo se tiene que si un espacio normado X es reflexivo entonces es completo.

ok

Importante: X^{**} es completo!

2.7.1 Formas geométricas del teorema de Hahn - Banach

Definición 2.19 *Sea X un espacio vectorial real normado. Llamaremos* hiperplano *a un conjunto de la forma*

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$$

donde f es un funcional lineal definido en X, f no es idénticamente nulo y α es real. Diremos que el hiperplano H tiene ecuación $f(x) = \alpha$.

Teorema 2.20 *H es cerrado si y sólo si f es un funcional continuo.*

Demostración: Sea f continuo, x punto límite de H. Sea $\{x_n\}$ con $x_n \in H$ tal que $x_n \to x$. Entonces $f(x_n) = \alpha$,

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$$

C. Berge "Topological spaces" Dover

$x_0 \notin H^c \Leftrightarrow x_0 \in H \Leftrightarrow f(x_0) = \alpha$

luego $x \in H$.

Supongamos que H es cerrado. Como f no es el funcional cero, se tiene que $\complement H$ es abierto y no vacío. Sea $x_0 \notin \complement H$ tal que $f(x_0) < \alpha$. Sea $r > 0$ tal que la bola abierta $B(x_0, r)$ esté contenida en $\complement H$. Queremos demostrar que $f(x) < \alpha$ para todo $x \in B(x_0, r)$. Supongamos que hay $x_1 \in B(x_0, r)$ tal que $f(x_1) > \alpha$. El segmento $y = (1-t)x_0 + tx_1$, $0 \le t \le 1$ está contenido en $B(x_0, r)$ luego $f(y) \neq \alpha$, $0 \le t \le 1$.

$B(x_0, r) \cap H = \emptyset$

$\forall x \in B(x_0, r) : f(x) \neq \alpha$

convexidad

Sea $\tau = \dfrac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$, es claro que $0 < \tau < 1$ y el valor de $f(y)$ para $t = \tau$ es

$f(y) = f((1-t)x_0 + tx_1)$
$= (1-t)f(x_0) + t f(x_1)$

$$f(y) = f(x_0) + \tau[f(x_1) - f(x_0)] = \alpha - f(x_0) + f(x_0) = \alpha\,.$$

Se concluye que $f(x_1) < \alpha$. ok

Sea $z \in B(0,1)$, sea $x = x_0 + rz$. Puesto que $x \in B(x_0, r)$, $f(x_0 + rz) < \alpha$ luego $f(z) < \frac{1}{r}(\alpha - f(x_0))$.

ok

Como $-z \in B(0,1)$, $-f(z) < \dfrac{1}{r}(\alpha - f(x_0))$, luego

$$|f(z)| < \frac{1}{r}(\alpha - f(x_0)) \quad \forall z \in B(0,1)\,.$$ equivalentes

Por lo tanto f es continua. $|f(x)| = \left|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \|x\| < \frac{1}{r}(\alpha - f(x_0))\,\|x\|$

Definición 2.21 *Sean* $A \subset X$, $B \subset X$. *Diremos que el hiperplano* H *de ecuación* $f(x) = \alpha$ separa a A y B en sentido amplio *si se tiene* $f(x) \le \alpha$ *para todo* $x \in A$ *y* $f(x) \ge \alpha$ *para todo* $x \in B$.

Diremos que H separa a A y B en sentido estricto *si hay* $\epsilon > 0$ *tal que* $f(x) \le \alpha - \epsilon$ *para todo* $x \in A$ *y* $f(x) \ge \alpha + \epsilon$ *para todo* $x \in B$.

Definición 2.22 *Sea* $K \subset X$ *un convexo abierto tal que* $0 \in K$. *Definimos* $\rho : X \to \mathbb{R}$ *como*

$$\rho(x) = \inf\{\alpha > 0 : \frac{1}{\alpha}x \in K\}$$

Diremos que ρ *es el* aforo *de* K.

Lema:

interesante

i) $\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x) \quad \forall x \in X, \quad \forall \lambda > 0.$

ii) $\rho(x+y) \le \rho(x) + \rho(y) \quad \forall x, y \in X.$

propiedad interesante: se puede ocupar en Hahn-Banach

iii) Hay $M > 0$ tal que $0 \le \rho(x) \le M\|x\| \quad \forall x \in X.$

iv) $K = \{x \in X : \rho(x) < 1\}$.

Demostración: Sea $\lambda > 0$, $\rho(\lambda x) = \{\alpha > 0 : \frac{1}{\alpha}\lambda x \in K\}$. Demostraremos que $\lambda\rho(x) < \alpha$ para todo α tal que $\frac{\lambda}{\alpha}x \in K$. En efecto, sea α tal que $\frac{\lambda}{\alpha}x \in K$, entonces $\frac{1}{\frac{\alpha}{\lambda}}x \in K$, luego $\rho(x) < \frac{\alpha}{\lambda}$. Tenemos entonces que $\lambda\rho(x)$ es cota inferior del conjunto

$\{\alpha > 0 : \frac{\lambda}{\alpha}x \in K\}$.

Sea $\epsilon > 0$, $\rho(x) + \frac{\epsilon}{\lambda} > \rho(x) = \inf\{\alpha > 0 : \frac{1}{\alpha}x \in K\}$, entonces hay $\alpha > 0$ tal que $\frac{1}{\alpha}x \in K$ y $\rho(x) < \alpha < \rho(x) + \frac{\epsilon}{\lambda}$. Multiplicando por λ tenemos que $\lambda\rho(x) + \epsilon > \alpha\lambda$ y $\frac{1}{\alpha\lambda}\lambda x \in K$ luego $\lambda\rho(x) + \epsilon$ no es cota inferior del conjunto $\{\beta > 0 : \frac{1}{\beta}\lambda x \in K\}$ para ningún $\epsilon > 0$, de modo que

$$\lambda\rho(x) = \inf\{\beta > 0 : \frac{1}{\beta}\lambda x \in K\},$$

ok ✓

i.e. $\rho(\lambda x) = \lambda\rho(x)$.

abierto convexo, $0 \in K$

Sea $\alpha > 0$. Si $\rho(x) < \alpha$, de la definición de $\rho(x)$ vemos que hay $\beta < \alpha$ tal que $\frac{1}{\beta}x \in K$, y como $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$ entonces $\frac{1}{\alpha}x$ está en el segmento comprendido entre $\frac{1}{\beta}x$ y el origen, y como K es convexo, se tiene que $\frac{1}{\alpha}x \in K$. A la inversa, si $\frac{1}{\alpha}x \in K$, de la definición de $\rho(x)$ y del hecho que K es abierto, se tiene directamente que $\rho(x) < \alpha$. Por lo tanto, $\rho(x) < \alpha$ si y sólo si $\frac{1}{\alpha}x \in K$ para todo $\alpha > 0$. En particular, $\rho(x) < 1$ si y sólo si $x \in K$.

ρ el aforo de K

$\Rightarrow \rho(x) < \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}x \in K$

¿Se cumple el inverso?

Sea $r > 0$ tal que $B(0,r) \subset K$. Si $y \in X$, $\|y\| = 1$ y $0 < \lambda < r$ se tiene que $\lambda y \in K$, luego para todo $\alpha > \frac{1}{r}$ se tiene que $\frac{1}{\alpha}x \in K$. De la definición de $\rho(y)$ tenemos entonces que $\rho(y) \leq \alpha$ para todo $\alpha > \frac{1}{r}$ luego $\rho(y) \leq \frac{1}{r}$. ✓ ok

$\|\lambda y\| = \lambda\|y\| = \lambda < r$ $\therefore \lambda y \in K$

$\alpha > \frac{1}{r} \Rightarrow \alpha \in A = \{\alpha > 0 / \frac{1}{\alpha}y \in K\}$ $\quad \forall \alpha > \frac{1}{r} \Rightarrow r > \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\alpha}y \in K$

K abierto convexo, $0 \in K$ $\Rightarrow \exists r > 0,\ B(0,r) \subset K$ $\Rightarrow \forall y \in X,\ \|y\| = 1$ se tiene $\rho(y) \leq \frac{1}{r}$

Para $x \in X$, $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$, luego $\forall$

$\rho(y) < \alpha$ $\quad \rho(y) = \inf\{\alpha > 0 / \frac{1}{\alpha}y \in K\}$

el $\frac{1}{r}$ tuvo que buscarse!!!

$$\rho\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq \frac{1}{r} \quad\Rightarrow\quad \rho(x) \leq \frac{1}{r}\|x\| \quad \forall x \in X.$$

$\frac{1}{r} < \rho(y) < \alpha$

Para finalizar, demostremos *ii*). Si $\frac{x}{\alpha}$, $\frac{y}{\beta} \in K$ entonces el segmento que une estos puntos está enteramente contenido en K. Sea $z = s(x+y)$, $-\infty < s < \infty$ la recta de dirección $x+y$ por O. La intersección de ella con el segmento $z = (1-t)\frac{x}{\alpha} + t\frac{y}{\beta}$, $0 \leq t \leq 1$, está dada por

$$s = \frac{1-t}{\alpha} \wedge s = \frac{t}{\beta} \quad\Rightarrow\quad \frac{1-t}{\alpha} = \frac{t}{\beta} \quad\Rightarrow\quad t = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \quad\Rightarrow\quad s = \frac{1}{\alpha+\beta}.$$

Esto implica que $\forall x \in X$, $\rho\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq \frac{1}{r}$ $\Rightarrow \rho(x) \leq \frac{1}{r}\|x\|$ $\Rightarrow \rho(x) \leq M\|x\|$, $\boxed{M = \frac{1}{r}}$

Luego $z_0 = \frac{x+y}{\alpha+\beta} \in K$ siempre que $\frac{x}{\alpha}$, $\frac{y}{\beta} \in K$, esto es,

$$\rho(x+y) < \alpha + \beta \quad \forall \alpha > \rho(x) \quad \forall \beta > \rho(y).$$

✓ ok.

Haciendo tender $\alpha \to \rho(x)$, $\beta \to \rho(y)$ tenemos que $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$. ✓ ■

Lema: Sea $K \subset X$ un convexo abierto no vacío, sea $x_0 \in X$, $x_0 \notin K$. Entonces existe $f \in X^*$ tal que $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in K$. En particular, el hiperplano de ecuación $f(x) = f(x_0)$ separa $\{x_0\}$ y K en sentido amplio.

$G = \langle x_0 \rangle$

Demostración: Supongamos que $0 \in K$, sea $G = \{x \in X : x = tx_0, t \in \mathbb{R}\}$. En G definimos $g(tx_0) = t$, $t \in \mathbb{R}$. Sea $\rho(x)$ el aforo de C. Sea $x \in G$, $x = tx_0$, $\rho(x) = \inf\{\alpha > 0 : \frac{1}{\alpha}tx_0 \in K\}$. Si $t > 0$ entonces $\rho(x) = \rho(tx_0) = t\rho(x_0)$ y como $\rho(x_0) \geq 1$ entonces $\rho(x) \geq t = g(x)$. Si $t \leq 0$, como $\rho(x) \geq 0$ siempre se tiene

Suponer $0 \in K$ ¿por comodidad?

$\rho(x)$ el aforo de K

$\rho(x_0) \geq 1 \Leftrightarrow x_0 \notin K$ ok ✓

$\rho(x_0) \geq 1 \Rightarrow \forall x \in G : \rho(x) = \rho(t x_0) \underset{t>0}{=} t\rho(x_0) \geq t$

$g(x) = g(tx_0) = t$

Moraleja: Si ρ es el aforo de K, $x_0 \notin K$ $\Rightarrow$ dado $g : \langle x_0 \rangle \to \mathbb{R}$, $g(tx_0) = t$ se tiene que $g(x) \leq \rho(x)$ $\forall x \in \langle x_0 \rangle$ $\downarrow$ Hahn-Banach g se levanta a f en X $\Downarrow$ f es lineal continua $f \in X^*$

$g(x) \leq \rho(x)$. Luego para todo $x \in G$ se tiene $g(x) \leq \rho(x)$.

acá se usa Hahn-Banach

Puesto que $\rho(x)$ cumple con las condiciones del teorema de Hahn - Banach y G es un subespacio de X hay funcional lineal f tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in G$ y $f(x) \leq \rho(x)$ para todo $x \in X$.

Sea $x \in K$, entonces por el lema anterior tenemos que $\rho(x) < 1$ y por lo tanto

$$f(x) \leq \rho(x) < 1 = g(x_0) = f(x_0) \quad \forall x \in K$$

$\boxed{f(x) < f(x_0) \ \forall x \in K}$

Si $f(x) \geq 0$, $0 \leq f(x) < \rho(x) \leq M\|x\|$ para algún $M > 0$. Si $f(x) < 0$ se tiene que $-f(x) = f(-x) \leq M\|x\|$ luego

$$|f(x)| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X,$$

luego f es continuo, $f \in X^*$.

Si $0 \notin K$, sea $c \in K$. Sea $K - c = \{x - c : x \in K\}$, sea $y_0 = x_0 - c$. Entonces $y_0 \notin K - c$, $0 \in K - c$ y $K - c$ es convexo y no vacío. Entonces existe $f \in X^*$ tal que $f(y) < f(y_0)$ para todo $y \in K - c$ luego

$$f(x - c) < f(x_0 - c) \ \forall x \in K \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(x_0) \ \forall x \in K.$$

■

Af: K convexo y no vacío $\Rightarrow$ $\forall c \in K$: $K - c$ es convexo y no vacío!

Teorema 2.23 (Teorema de Hahn - Banach, Primera forma geométrica) *Sean $A \subset X$, $B \subset X$ no vacíos, convexos y disjuntos, A abierto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa a A y B en sentido amplio.*

Sale fácil asumiendo todo lo demás.

Demostración: Llamemos $A - B = \{x - y : x \in A, y \in B\}$. Sea $K = A - B$, sean $z_1, z_2 \in K$, entonces $z_1 = x_1 - y_1$, $z_2 = x_2 - y_2$. Sea $\lambda \in (0, 1)$,

$$(1-\lambda)z_1 + \lambda z_2 = (1-\lambda)(x_1 - y_1) + \lambda(x_2 - y_2) = [(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2] - [(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2]$$

A, B convexos $\Rightarrow A - B$ convexo!

Como A es convexo $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in A$, y como B es convexo $(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 \in A$, luego $(1-\lambda)z_1 + \lambda z_2 \in K$. K es convexo.

Como $K = \bigcup_{y \in B} (A - y)$ y cada $A - y = \{x - y : x \in K\}$ es abierto por ser una traslación de A entonces K es abierto. Además, como $A \cap B = \emptyset$ se tiene que $0 \notin K$.

Por el lema anterior hay $f \in X^*$ tal que $f(z) < 0$ para todo $x \in K$ ($x_0 = 0$ y $f(x_0) = 0$). Por lo tanto,

$\rightarrow f$ lineal continua

$$f(x) - f(y) = f(x - y) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y) \quad \forall x \in A \quad \forall y \in B.$$

Sea α real fijo tal que $\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y)$. El hiperplano pedido tiene ecuación $f(x) = \alpha$.

ok ok

■

Teorema 2.24 (Teorema de Hahn - Banach, Segunda forma geométrica) *Sean $A \subset X$, $B \subset X$ no vacíos, disjuntos y convexos. Supongamos que A es cerrado y B es compacto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa a A y B en sentido estricto.*

Demostración: Sea $\epsilon > 0$, sean $A_\epsilon = A + B(0,\epsilon)$, $B_\epsilon = B + B(0,\epsilon)$.

$$A_\epsilon = \bigcup_{x\in A}(x + B(0,\epsilon)) = \bigcup_{x\in A} B(x,\epsilon)$$

luego A_ϵ es abierto y también lo es B_ϵ. Tal como en la demostración del teorema anterior, A_ϵ y B_ϵ son convexos. Si ϵ es lo suficientemente pequeño, A_ϵ y B_ϵ son disjuntos. En efecto, supongamos que para todo $\epsilon > 0$ $A_\epsilon \cap B_\epsilon \neq \emptyset$ y tomemos $\epsilon = \frac{1}{2n}$, sea $z_n \in A_\epsilon \cap B_\epsilon$. Como $A_\epsilon = \bigcup_{x\in A} B(x,\epsilon)$ entonces podemos escribir

$z_\epsilon \in A_\epsilon \cap B_\epsilon$
$\epsilon = 1/2n$

$$z_n = x_n + h, \quad x_n \in A, \quad \|h\| < \epsilon$$

y análogamente

$$z_n = y_n + h', \quad y_n \in B, \quad \|h'\| < \epsilon.$$

Restando las dos expresiones obtenemos $\|x_n - y_n\| = \|h - h'\| < 2\epsilon = \frac{1}{n}$. Como B es compacto, hay subsucesión convergente de $\{y_n\}$ que converge a algún $y \in B$, y como A es cerrado y $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$ hay subsucesión de $\{x_n\}$ que converge a y luego $y \in A$. Pero A y B son disjuntos luego esto no puede ser. ✓

Por el teorema anterior hay hiperplano de ecuación $f(x) = \alpha$, $f \in X^*$ que separa a A_ϵ y B_ϵ. Sea $x \in A$, para todo $z \in B(0,1)$, $x+\epsilon z \in B(x,\epsilon) \subset A_\epsilon$ luego $f(z) \leq \frac{1}{\epsilon}(\alpha - f(x))$; también $x - \epsilon <\in A_\epsilon$ y $-f(z) \leq \frac{1}{\epsilon}(\alpha - f(x))$. Se concluye que

¿de dónde sale?

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\epsilon}(\alpha - f(z)) \quad \forall z \in B(0,1) \quad \Rightarrow \quad \|f\| = \sup_{\|z\|<1} |f(z)| \leq \frac{1}{\epsilon}(\alpha - f(x))$$

luego $f(x) \leq \alpha - \epsilon\|f\|$ para todo $x \in A$.

Análogamente $f(y) \geq \alpha + \epsilon\|f\|$ para todo $y \in B$. ■

todo subespacio es un conjunto convexo!

Corolario 2.25 *Sea $S \subset X$ subespacio tal que $\overline{S} \neq X$. Entonces existe $f \in X^*$ no idénticamente cero tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in S$.*

Demostración: Por la segunda forma geométrica del teorema de Hahn - Banach, si $x_0 \in X - \overline{S}$ hay $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in X^*$, $f \neq 0$, tal que el hiperplano de ecuación $f(x) = \alpha$ separa en sentido estricto $\overline{S}$ de $\{x_0\}$ i.e.

$\overline{S}$ cerrado
$\{x_0\}$ compacto.

$$f(x) < \alpha < f(x_0) \quad \forall x \in S.$$

Como $\lambda x \in S$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $x \in S$, $\lambda f(x) < \alpha$ para todo λ luego $f(x) = 0$ para todo $x \in S$. ok ✓ ■

2.7.2 Algunas aplicaciones del teorema de Hahn - Banach

Notación: Sea X un espacio vectorial normado, sea $\varphi : X \to (-\infty,\infty]$. Designaremos por

$$\begin{aligned} D(\varphi) &= \{x \in X : \varphi(x) < \infty\} \\ \operatorname{epi}\varphi &= \{(x,\lambda) \in X \times \mathbb{R} : \varphi(x) \leq \lambda\} \end{aligned}$$

18/11/2015

$G \times G \to G$

$(g,h) \mapsto \cancel{h g h} \; ghg^{-1}$

$\rho: G \to Gl(V) \qquad \chi_\rho(g) = \chi_\rho(h) \quad \forall h \in \mathcal{O}(g)$

En efecto, $h \in \mathcal{O}(g) \Rightarrow h = igi^{-1}$, $i \in G$

$$\chi_\rho(h) = \chi_\rho(igi^{-1}) = \text{traza}(\rho(igi^{-1})) = \text{traza}(\rho(i)\rho(g)\rho(i)^{-1})$$
$$= \text{traza}(\rho(g)) = \chi_\rho(g)$$

$\chi : KG \to K$ lineal (puede verse χ de esa manera)

$$\chi\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \delta_{g_i}\right) = \sum_{1}^{n} r_i\, \chi(g_i) \quad , \quad \chi \in (KG)^*$$

Problema $G = C_p$. Calcular todos los caracteres irreducibles

(V,ρ) representación irreducible $\Rightarrow \dim V = 1$

(falta alguna hipótesis?).

$K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$

$$\rho : C_p \to GL_2(\mathbb{R})$$
$$\rho(\bar{t}) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi t}{p}\right) & -\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{p}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{p}\right) & \cos\left(\frac{2\pi t}{p}\right) \end{pmatrix}$$

$p = 2$, $\{0, 1\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \qquad W = \langle (1,0) \rangle$

es reducible

$p \neq 2 \quad \rho(\bar{1}) v \notin \langle v \rangle \quad \forall v \neq 0.$

ρ es irreducible.

Ahora, si $\rho : C_p \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$

$$\rho(\bar{t}) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi t}{p}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{p}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{p}\right) & \cos\left(\frac{2\pi t}{p}\right) \end{pmatrix}$$

$\exists (w_1, w_2) = B$ base de vectores propios

$$[\rho(\bar{t})]_B = \begin{pmatrix} e^{2\pi i t/p} & \\ & e^{-2\pi i t/p} \end{pmatrix}$$

$$\rho = \rho_1 \oplus \rho_{-1}$$

$\rho_1, \rho_{-1} : C_p \longrightarrow GL_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$

$$\rho_1(\bar{t}) = e^{2\pi i t/p}$$

$$\rho_{-1}(t) = e^{-2\pi i t/p}$$

Conclusión. La hipótesis que falta es que K sea algebraicamente cerrado.

Sea $g \in G$, tal que $\rho(g) \neq id$, $\exists \xi$ valor propio de $\rho(g)$ tal que $\rho(g) v = \xi v$

$$\rho(g)(\rho(h) v) = \rho(h) \rho(g) v = \rho(h) \xi v = \xi \rho(h) v$$

$$V_\xi = \ker(\rho(g) - \xi\, id)$$

V_ξ es subrepresentación.

Scanned with CamScanner

$V_\xi \neq \{0\}$, $v \in V_\varrho$ $\Rightarrow V_\varrho = V$

$\forall g \quad \exists \xi(g) \quad \varrho(g) = \xi(g)\, id$

$$\varrho(g) = \begin{pmatrix} \xi(g) & & & \\ & \xi(g) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi(g) \end{pmatrix} \qquad \dim V = 1.$$

$\varrho : C_p \to GL(V)$ irreducible ; $k = \overline{k}$

$\Rightarrow V = k$, $\varrho(g)1 = \chi_\varrho(g)$

$\chi : C_p \to k^*$

si $\chi = \chi_\varrho$, algún ϱ

$$\chi(g+h) = \varrho(g+h) = \varrho(g)\varrho(h) = \chi(g)\chi(h)$$

$$\chi(g)^p = \chi(p \cdot g) = \chi(0) = 1$$

$$\chi : C_p \to \mathbb{C}^*$$
$$\bar{1} \mapsto e^{2\pi i t/p} \qquad t \in \{0, \dots, p-1\}$$

$$\varrho_t : C_p \to GL(\mathbb{C})$$
$$\bar{1} \mapsto \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto e^{2\pi i t/p} z$$

$\{\varrho_0, \dots, \varrho_{p-1}\}$ son todas las representaciones irreducibles de C_p en $\mathbb{C}$

bla!

Problema 3

- D dominio de integridad, $F = \mathrm{Quot}(D)$.

(a) F D-modulo. Pd: $\Lambda^2 F = 0$.

$$v \wedge w \in \Lambda^2 F : \quad v = \frac{a}{b}, \; w = \frac{c}{d}, \quad a,b,c,d \in_0 D$$

$$v \wedge w = \frac{a}{b} \wedge \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \wedge \frac{cb}{db} = abcd \left(\cancel{\frac{1}{bd} \wedge \frac{1}{bd}} \right) = 0$$

$$\therefore \Lambda^2 F = 0.$$

(b) I un D-submódulo de F. Pd: $\Lambda^n I$ es de torsión.

$\Lambda^n I$ es un D-módulo generado por $\{ v_{\alpha_1} \wedge v_{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge v_{\alpha_n} \}_{\alpha_k \in A}$

~~donde: $v_{\alpha_k} \in B$ $\forall \alpha_k$ B base de F~~, donde $v_{\alpha_k} \in I$ $\forall \alpha_k$

$$v_{\alpha_k} = \frac{a_{\alpha_k} \in D}{b_{\alpha_k} \in D^*} . \quad \beta = b_{\alpha_1} \ldots b_{\alpha_n} \in D$$

$$\beta \left(v_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge v_{\alpha_m} \right) = b_{\alpha_1} \ldots b_{\alpha_n} \left(\frac{a_{\alpha_1}}{b_{\alpha_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{a_{\alpha_n}}{b_{\alpha_n}} \right)$$

$$= a_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge a_{\alpha_n} = \cancel{a_{\alpha_1} \wedge \ldots}$$

$$= a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_n} \left(\cancel{1 \wedge \ldots \wedge 1} \right) = 0 .$$

$$\therefore \Lambda^n I \text{ es de torsión } \forall n \in \mathbb{N}.$$

(c) $D = \mathbb{R}[x]$, $F = \mathrm{Quot}(D) = \mathbb{R}(x)$

$F = I = \left(1, \frac{1}{x}\right)$, $\quad 1 \wedge \frac{1}{x} = 0$.

$I = (x)$, $\quad x^2 \wedge x = x(x \wedge x) = 0$.

~~$D = \mathbb{R}[x,y]$, $F = \mathrm{Quot}(D) = \mathbb{R}(x,y)$~~

~~$I = \mathbb{R}[x]$~~ $\quad D = \mathbb{R}[x,y]$, $F = \mathrm{Quot}(D) = \mathbb{R}(x,y)$.

$$\begin{tikzcd}
& S^2(V) \arrow[d, hook] \arrow[dr, dashed] & \\
V \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[rr, bend left=80, "\text{simétrica}"] \arrow[rr, bend right=80, "\text{antisimétrica}"'] & S^2(V)\oplus\Lambda^2(V) \arrow[r, dashed] & W \\
& \Lambda^2(V) \arrow[u, hook] \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& S^2(V)\oplus\Lambda^2(V) & & W \\
S^2(V) & & \Lambda^2(V) & \\
& V \arrow[ul] \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[uurr] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& & W \arrow[d, hook] \\
V \arrow[r, "B"] \arrow[urr, "B_2"] \arrow[drr, "B_1"'] & W \arrow[r, leftrightarrow] & W\oplus W \\
& & W \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

$B : V\times V \longrightarrow W$ bilineal

$B(x,y) = B_1(x,y) + B_2(x,y)$

$\exists\, h_1 : S^2(V) \longrightarrow W\ ,\ h_2 : \Lambda^2(V) \longrightarrow W$

lineales

$B_1(x,y) = h_1(x\odot y) + \cancel{h_2(x\wedge y)}$

$B_2(x,y) = h_2(x\wedge y)$

$\therefore\ B(x,y) = h_1(x\odot y) + h_2(x\wedge y)$

$= h_1(p_1(x\otimes y)) + h_2(p_2(x\otimes y))$

$= h_1\circ p_1(x\otimes y) + h_2\circ p_2(x\otimes y) = (\underbrace{h_1\circ p_1 + h_2\circ p_2}_{\text{lineal}})(x\otimes y)$

$\therefore\ S^2(V)\oplus\Lambda^2(V)$ cumple propiedad universal.

$\therefore\ S^2(V)\oplus\Lambda^2(V) \cong T^2(V)$

Scanned with CamScanner

P1| V F-espacio vectorial. Pd: $T^2(V) \cong S^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$

$$T^2(V) = V \otimes_F V \,, \quad S^2(V) = \underbrace{T^2(V) / \langle v\otimes w - w \otimes v\rangle_F}_{C_2^1} \,, \quad \Lambda^2(V) = \underbrace{T^2(V) / \langle v\otimes w + w \otimes v\rangle_F}_{C_2^2}$$

$$\begin{tikzcd}
& S^2(V)\oplus\Lambda^2(V) & \\
S^2(V) \arrow[ur] & & \Lambda^2(V) \arrow[ul] \\
& T^2(V) \arrow[ul] \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

σ

$$\varphi : T^2(V) \to S^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$$
$$v\otimes w \mapsto (v \otimes w + C_2^1 , v\otimes w + C_2^2)$$
$$= (v \odot w , v \wedge w)$$

$$\varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} k_i v_i \otimes w_i\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{n} k_i (v_i \odot w_i), \sum_{i=1}^{n} k_i (v_i \wedge w_i)\Big) = \sum_{i=1}^{n} k_i (v_i \odot w_i , v_i \wedge w_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} k_i \,\varphi(v_i \otimes w_i) \quad (\varphi \text{ F-lineal})$$

- φ monomorfismo? $\varphi(v\otimes w) = (v \odot w, v\wedge w) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} v\odot w = 0 \\ v \wedge w = 0 \end{cases}$

$$v \odot w = 0 \Leftrightarrow v\otimes w + C_2^1 = 0 + C_2^1 \Leftrightarrow v \otimes w \in C_2^1$$
$$\Leftrightarrow \text{se tiene que } v\otimes w = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j (v_j \otimes w_j - w_j \otimes v_j)$$

Analogamente: $v\otimes w = \sum_{l=1}^{s} \beta_l (v_l \otimes w_l + w_l \otimes v_l)$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j (v_j \otimes w_j - w_j \otimes v_j) - \sum_{l=1}^{s} \beta_l (v_l \otimes w_l + w_l \otimes v_l) \quad (\text{Sup}: r \geq s)$$

V F-espacio vectorial $\Rightarrow \exists \underbrace{\{v_i\}_{i\in I}}_{\mathcal{B}}$ base de V.

$v_i, v_j \in \mathcal{B}$: $v_i \wedge v_j = 0 \Rightarrow v_i \otimes v_j = \sum_{t=1}^{s} \alpha_{l_t} (v_{l_t} \otimes w_{l_t} + w_{l_t} \otimes v_{l_t})$

$$v_i \otimes v_j = \sum_{t=1}^{s} \alpha_{l_t} (v_{l_t} \otimes w_{l_t}) + \sum_{t=1}^{s} \alpha_{l_t} (w_{l_t} \otimes v_{l_t})$$

$\{v_i\}_{i\in I}$ base de V.

$$v\otimes w - w\otimes v = \left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j v_{i_j}\right)\otimes\left(\sum_{r=1}^{n}\beta_r v'_{i_r}\right) - \left(\sum_{r=1}^{n}\beta_r v'_{i_r}\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j v_{i_j}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}\alpha_j\beta_r\,(v_{i_j}\otimes v'_{i_r}) - \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_r\alpha_j\,(v'_{i_r}\otimes v_{i_j})$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}\alpha_j\beta_r\left(v_{i_j}\otimes v'_{i_r} - v'_{i_r}\otimes v_{i_j}\right)$$

—, —

Forma Bilineal: $B : V\times V \longrightarrow W$

$B(x,y) = B_1(x,y) + B_2(x,y)$ — B_1 simétrica, B_2 antisimétrica

$$B_1(x,y) = \frac{B(x,y)+B(y,x)}{2}, \quad B_1(y,x) = \frac{B(y,x)+B(x,y)}{2} = B_1(x,y)$$

$$B_2(x,y) = \frac{B(x,y)-B(y,x)}{2}, \quad B_2(y,x) = \frac{B(y,x)-B(x,y)}{2} = -B_2(x,y)$$

$\therefore\ B(x,y) = B_1(x,y) + B_2(x,y)$.

Unicidad: $B_1(x,y) + B_2(x,y) = \bar{B}_1(x,y) + \bar{B}_2(x,y)$

$$\Rightarrow \underbrace{B_1(x,y) - \bar{B}_1(x,y)}_{\text{simétrica}} = \underbrace{\bar{B}_2(x,y) - B_2(x,y)}_{\text{Antisimétrica}}.$$

$S(x,y) = A(x,y) \Rightarrow S(x,y) = S(y,x) = A(x,y) = -A(y,x)$

$$\left\{\begin{array}{l} S(x,y) = A(x,y) \\ S(x,y) = -A(y,x) \end{array}\right.$$

~~Sup.~~

$A(x,y) = S(x,y) = S(y,x) = +A(y,x) = -A(x,y)$

$\Rightarrow \underline{S(x,y) = 0}$ $\therefore$ Unicidad (cuando char $F \neq 2$)

Problema. $\phi : (V, \rho) \to (W, \lambda)$ función de entrelazamiento.

P.d. $(V,\rho)/(\ker\phi, \rho|_{\ker\phi}) \cong (\operatorname{Im}\phi, \lambda|_{\operatorname{Im}\phi})$

dem $\phi\ V \to W$ es k-lineal (V, W k-espacios vectoriales)

1° teo. Isom: $V/\ker\phi \underset{\bar\phi}{\cong} \operatorname{Im}(\phi)$, $\bar\phi : V/\ker\phi \longrightarrow \operatorname{Im}\phi$

$v + \ker\phi \longmapsto \phi(v)$.

Ahora,

$$\begin{tikzcd} V/\ker\phi \arrow[r, "\bar\rho(g)"] \arrow[d, dotted, "\bar\phi"'] & V/\ker\phi \arrow[d, dotted, "\bar\phi"] \\ \operatorname{Im}\phi \arrow[r, "\lambda|_{\operatorname{Im}\phi}(g)"'] & \operatorname{Im}\phi \end{tikzcd}$$

P.d: $\forall g \in G$,

$\bar\phi \circ \bar\rho(g) = \lambda|_{\operatorname{Im}\phi}(g) \circ \bar\phi$

$\bar\rho(g) : V/\ker\phi \longrightarrow V/\ker\phi$

$v + \ker\phi \longmapsto \rho(g)(v) + \ker\phi$.

$\pi : V \longrightarrow V/\ker\phi$ entrelaza a $\rho(g)$ y $\bar\rho(g)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho(g)"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V \arrow[d, "\pi"] \\ V/\ker\phi \arrow[r, dashed, "\bar\rho(g)"'] & V/\ker\phi \end{tikzcd}$$

$\bar\phi \circ \bar\rho(g) = \cancel{\bar\phi \circ (\pi \circ \rho)(g)}$

$\bar\phi \circ \bar\rho(g)(v + \ker\phi)$

$= \bar\phi(\bar\rho(g)(v + \ker\phi))$

$= \bar\phi(\rho(g)v + \ker\phi)$ $\qquad \rho(g) : V \to V$, $\rho(g)v \in V$

$= \phi(\rho(g)v)$

$= \lambda(g)(\phi(v))$

$= \lambda(g)|_{\operatorname{Im}(\phi)}(\phi(v)) = \lambda(g)|_{\operatorname{Im}\phi} \circ \phi(v)$

$\cancel{\therefore \lambda(g)|_{\operatorname{Im}\phi} \circ \phi = \bar\phi}$

$= \lambda(g)|_{\operatorname{Im}\phi}(\bar\phi(v + \ker\phi))$

$= \lambda(g)|_{\operatorname{Im}\phi} \circ \bar\phi(v + \ker\phi)$ $\qquad \therefore\ \bar\phi \circ \bar\rho(g) = \lambda(g)|_{\operatorname{Im}\phi} \circ \bar\phi$

$\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2\}$ $\quad$ $\mathcal{B} = \{(e_1, f_1), (e_1, f_2), (e_1, f_3)$
$\mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2, f_3\}$ $\quad$ $(e_2, f_1), (e_2, f_2) \quad (e_2, f_3)\}$.

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(e_1, f_1) = (\alpha_{11}(g) e_1 + \alpha_{21}(g) e_2) \otimes (\beta_{11}(g) f_1 + \beta_{21}(g) f_2 + \beta_{31}(g) f_3)$$

$$= \alpha_{11}(g)\beta_{11}(g)(e_1 \otimes e_1) + \alpha_{11}(g)\beta_{21}(g)(e_1 \otimes f_2) + \alpha_{11}\beta_{31}(e_1 \otimes f_3)$$

$$+ \alpha_{21}\beta_{11}(e_2 \otimes f_1) + \alpha_{21}\beta_{21}(e_2 \otimes f_2) + \alpha_{21}\beta_{31}(e_2 \otimes f_3)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & \alpha_{11}\beta_{12} & \alpha_{11}\beta_{13} & \alpha_{12}\beta_{11} & \alpha_{12}\beta_{12} & \alpha_{12}\beta_{13} \\ \alpha_{11}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{22} & \alpha_{11}\beta_{23} & \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{12}\beta_{22} & \alpha_{12}\beta_{23} \\ \alpha_{11}\beta_{31} & \alpha_{11}\beta_{32} & \alpha_{11}\beta_{33} & \alpha_{12}\beta_{31} & \alpha_{12}\beta_{32} & \alpha_{12}\beta_{33} \\ \alpha_{21}\beta_{11} & \alpha_{21}\beta_{12} & \alpha_{21}\beta_{13} & \alpha_{22}\beta_{11} & \alpha_{22}\beta_{12} & \alpha_{22}\beta_{13} \\ \alpha_{21}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{22} & \alpha_{21}\beta_{23} & \alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{22}\beta_{22} & \alpha_{22}\beta_{23} \\ \alpha_{21}\beta_{31} & \alpha_{21}\beta_{32} & \alpha_{21}\beta_{33} & \alpha_{22}\beta_{31} & \alpha_{22}\beta_{32} & \alpha_{22}\beta_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{Traza} = \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{11}\beta_{22} + \alpha_{11}\beta_{33} + \alpha_{22}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{22} + \alpha_{22}\beta_{33}$$

$$= \alpha_{11}(\beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33}) + \alpha_{22}(\beta_{11} + \cancel{\alpha_{22}}\,\beta_{22} + \beta_{33})$$

$$= (\alpha_{11} + \alpha_{22})(\beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33}) \checkmark$$

$=$

$e_1 \otimes f_1$

$e_1 \otimes f_2$

$e_1 \otimes f_3$

$e_2 \otimes f_1$

$e_2 \otimes f_2$

$e_2 \otimes f_3$

P5] G grupo finito, $g \in G$. χ carácter complejo.

Pd: $\chi(g)$ es un entero algebraico.

---

dem. $\chi_\varphi : G \to \mathbb{C}$, $\varphi : \mathbb{C}[G] \to M_n(\mathbb{C})$ representación compleja

$\chi_\varphi(g) = tr(\varphi(g))$.

$\varphi(g) \in M_n(\mathbb{C})$. $ord(g) = m$, $g^m = e$

$\chi_\varphi(e) = tr(\varphi(e)) = n = tr\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$\chi_\varphi(e) = \chi_\varphi(g^m) = tr(\varphi(g^m)) = tr(\varphi(g)^m)$

$\varphi(g) = BJB^{-1}$, J matriz de Jordan.

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots \lambda_1 & & & & \\ & & \lambda_2 & & & \\ & & & \ddots \lambda_2 & & \\ & & & & \lambda_\ell & \\ & & & & & \ddots \lambda_\ell \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\chi_\varphi(g) = n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \dots + n_\ell\lambda_\ell}$$

$$J^m = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \ddots \lambda_1^m & & \\ & & \lambda_\ell^m & \\ & & & \ddots \lambda_\ell^m \end{pmatrix}$$

$\chi_\varphi(g^2) = n_1\lambda_1^2 + n_2\lambda_2^2 + \dots + n_\ell\lambda_\ell^2$

Sup $G = \{1, g\}$: $\chi_\varphi(g)^2 = n_1^2\lambda_1^2 + \dots + n_\ell^2\lambda_\ell^2 + 2(n_1n_2\lambda_1\lambda_2 + \dots + n_{\ell-1}n_\ell\lambda_{\ell-1}\lambda_\ell)$

$$\begin{aligned} \chi_\varphi(g) + \chi_\varphi(g^2) + \dots + \chi_\varphi(g^m) &= n_1(\lambda_1 + \dots + \lambda_1^m) + n_2(\lambda_2 + \dots + \lambda_2^m) + \dots + n_\ell(\lambda_\ell + \dots + \lambda_\ell^m) \\ &= \chi_\varphi(g + g^2 + \dots + g^m) \qquad \boxed{g^m = e} \\ &= \chi_\varphi(e + g + \dots + g^{m-1}) \end{aligned}$$

$\chi_\varphi(g) = n_1\lambda_1 + \dots + n_\ell\lambda_\ell$, λ_i enteros algebraicos (raíces m^{ta} de la unidad)

$\therefore$ $\chi_\varphi(g)$ entero algebraico.

(enteros algebraicos forman un anillo)

[4] Buscar representaciones irreducibles del álgebra $A = \mathbb{C}[i,j \mid i^2 = j^3 = 1,\ iji = j^2]$

$iji = j^2 \iff ij^2 = ji$

$A = \{a + bi + cj + dj^2 + eij + fij^2 \mid a,b,c,d,e,f\}$

$\dim_{\mathbb{C}} A = 6.$

$i \in A$ es tal que $i^2 - 1 = 0$. (?).

$D_3 = \langle i,j \mid i^2 = j^3 = e,\ iji = j^2 \rangle$

$\mathbb{R}[D_3] \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

$\mathbb{C}[D_3] = \mathbb{R}[D_3] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \oplus \mathbb{R} \otimes \mathbb{C} \oplus \mathbb{R} \otimes \mathbb{C}$

$= \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$

$\varphi : \mathbb{C}[D_3] \longrightarrow A$ homo de $\mathbb{C}$-álgebras. epimorfismo

$i \longmapsto i$

$j \longmapsto j$ $\qquad \mathbb{C}[D_3]/_{R} \cong A.$

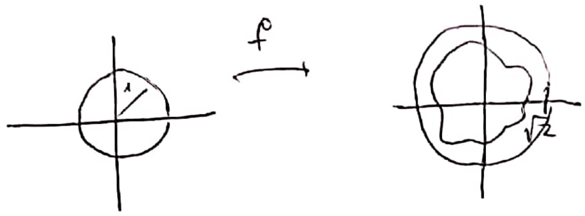
$e \longmapsto 1$

$\mathbb{C}[D_3]$ es álgebra central-simple

$|f(z)| \leq \sqrt{1+|z|}$ $\quad$ f entera no constante.

$|z| \to 0$: $\quad \lim_{z\to 0} |f(z)| \leq 1 \quad \Rightarrow \boxed{|f(0)| \leq 1}$

$\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$: $\quad |f(z)| \leq \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \leq \sqrt{2}$



f entera no constante $\Rightarrow$ f abierta.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})\, rie^{i\theta}}{re^{i\theta} - z}\,d\theta$$

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|\,r}{|re^{i\theta} - z|}\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r\sqrt{1+r}}{|re^{i\theta} - z|}\,d\theta$$

$$\leq \frac{r\sqrt{r+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|re^{i\theta} - z|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left|\frac{re^{i\theta}}{r\sqrt{r+1}} - \frac{z}{r\sqrt{r+1}}\right|} \xrightarrow{r\to\infty} 0 \; ?$$

$\underline{\text{No!}}$

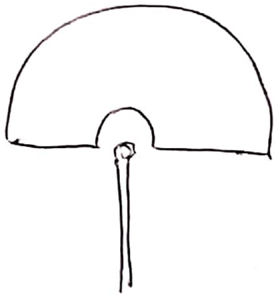
pero

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})\, rie^{i\theta}\,d\theta}{(re^{i\theta} - z)^2}$$

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r\sqrt{1+r}\,d\theta}{|re^{i\theta} - z|^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r\sqrt{1+r}}{r^2}\,\frac{d\theta}{\left|e^{i\theta} - \frac{z}{r^2}\right|}$$

$$\frac{r\sqrt{r+1}}{r^2} = \frac{\sqrt{r^3+r^2}}{\sqrt{r^4}} = \sqrt{\frac{r^3+r^2}{r^4}} = \sqrt{\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}} \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

$\therefore \; f'(z) = 0 \quad \forall z \quad \square.$



$\mathbb{C} \setminus \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0 , \operatorname{Im} z \in (-\infty, 0] \}$

$\mathbb{C} \setminus \{ ri \,/\, r \leq 0 \}$

$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \qquad z = re^{i\theta}$

$f(z) = \dfrac{\log z}{z^2 + a^2}$ tiene polos simples en ai, $-ai$

$\log(re^{i\pi}) = \log r + i\pi$

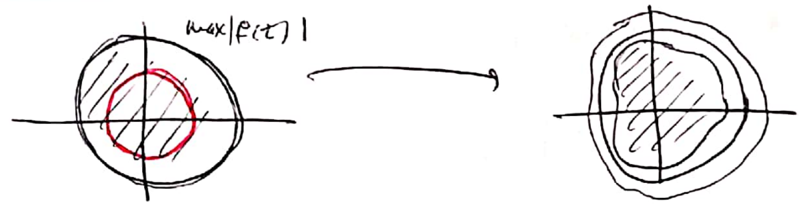
$\log(-r) = \log r + i\pi$

$\varepsilon \log \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 0$

$\varepsilon \log \varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{1/\log \varepsilon} = \dfrac{\log \varepsilon}{1/\varepsilon} \xrightarrow{L'H} \dfrac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} =$

$\boxed{| f(e^{i\theta}) - e^{i\theta} | < 1/10 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}}$, $| f(\tfrac{1}{2} e^{i\theta}) - e^{2i\theta} | < 1/10$

$\longrightarrow f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.



$| f(z) - z | < \frac{1}{10} < 1 < |z|$

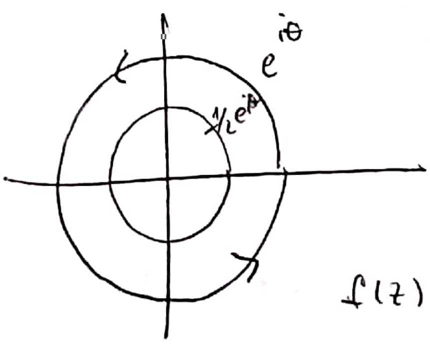
f tiene un cero en $\mathbb{D}$

$| f(\tfrac{1}{2}z) - z^2 | < \frac{1}{10} < |z|^2$

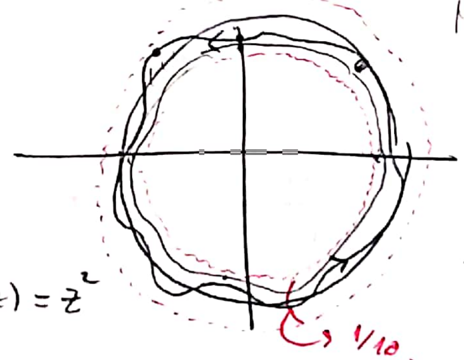
$z = e^{i\theta}$

$f(\tfrac{1}{2} z)$ tiene 2 ceros

$f(\tfrac{1}{2} w) = 0$ y $f(w) \neq 0$



f



$f(z) - z$, $f(z) = z^2$

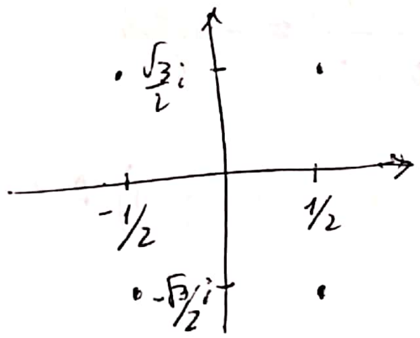
(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2+1}$

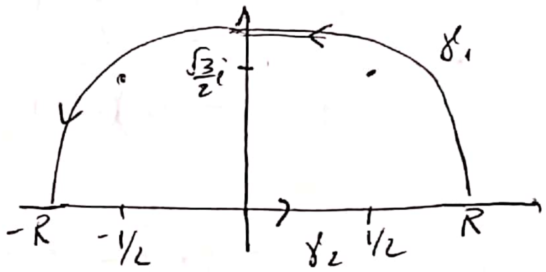
$x^4+x^2+1 = \cancel{\ldots}$ $\qquad \Delta = \sqrt{1-4} = \sqrt{5}i$ → No! $\Rightarrow x^2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$$(x^4+x^2+1) = \left(x^2 - \frac{-1+\sqrt{5}i}{2}\right)\left(x^2 - \frac{-1-\sqrt{5}i}{2}\right)$$

$$x^4+x^2+1 = (x^4+2x^2+1) - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2+1+x)(x^2-x+1)$$

$$= \left(x - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$





$R \geq 2.$

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+z^2+1}, \qquad \int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\left(Res\left(f, \tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) + Res\left(f, -\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$$

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2+1} + \int_0^{\pi} \frac{R^2e^{2it}}{R^4e^{4it}+R^2e^{2it}+1} Rie^{it}dt$$

$$\left|\int_0^{\pi} \frac{R^2e^{2it}}{R^4e^{4it}+R^2e^{2it}+1} Rie^{it}dt\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R^3}{|R^4e^{4it}+R^2e^{2it}+1|}dt$$

$$|R^4e^{4it}+R^2e^{2it}+1| \geq \left||R^4e^{4it}+R^2e^{2it}|-1\right| = \left|R^2|R^2e^{2it}+1|-1\right|$$

$= R^2|R^2e^{2it}+1|-1$ (para R suf. grande)

$$\geq R^2|R^2-1|-1 \qquad \Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{R^3}{|R^4e^{4it}+R^2e^{2it}+1|}dt \geq \int_0^{\pi} \frac{R^3}{R^2|R^2-1|-1}dt \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Scanned with CamScanner

$$|R^4 e^{4it} + R^2 e^{2it} + 1| \geq \big||R^4 e^{4it} + 1| - R^2\big| \quad \text{etc.}$$

Por otro lado,

$$\operatorname{Res}\left(f, \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \lim_{z \to \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \left(z - \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) f(z)$$

$$= \lim_{z \to \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \frac{z^2}{\left(z - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z - \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}{1\,(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}i)} = \frac{(1+\sqrt{3}i)}{4 \cdot \sqrt{3}i} =$$

$$\operatorname{Res}\left(f, -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \lim_{z \to -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \left(z - \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) f(z)$$

$$= \lim_{z \to -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \frac{z^2}{\left(z - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z - \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z - \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)} = \frac{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}{-(\sqrt{3}i)(1)(-1+\sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{(-1+\sqrt{3}i)}{-4\sqrt{3}i}$$

Como $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,dx = 2\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,dx$

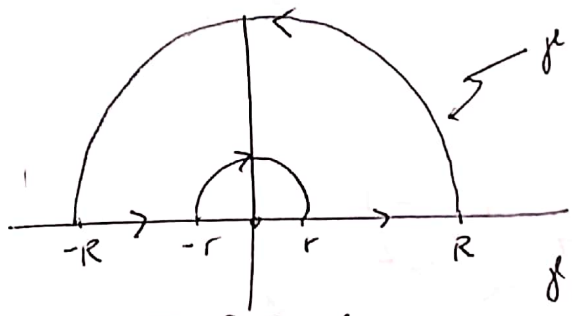
$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi i}{4\sqrt{3}i}\right)\Big((1+\sqrt{3}i) - (-1+\sqrt{3}i)\Big)$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{3}}(2) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

(verificar!)

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x^2}\,dx$.

$f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2}$ tiene un polo en $z=0$ de orden 2.



$\gamma_r = re^{-it}$, $t\in[\pi, 2\pi]$

$\gamma = [-R,-r] + \gamma_r + [r,R] + \gamma_R$ $\qquad \gamma_R = Re^{it}$, $t\in[0,\pi]$

$$0 = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x^2}dx + \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z^2}dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x^2}dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2}dz$$

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2}dz = \int_0^\pi \frac{\exp(iRe^{it})\, iRe^{it}dt}{R^2e^{2it}} = i\int_0^\pi \frac{\exp(iRe^{it})}{Re^{it}}dt$$

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2}dz\right| \leq \int_0^\pi \left|\frac{\exp(iRe^{it})}{Re^{it}}\right|dt = \int_0^\pi \frac{\exp(-R\,\mathrm{sen}(t))}{R}dt$$

$$= \frac{1}{R}\int_0^\pi \exp(-R\,\mathrm{sen}\,t)\,dt \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z^2}dz = \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}-1}{z^2}dz + \int_{\gamma_r} \frac{1}{z^2}dz$$

$$\left|\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}-1}{z^2}dz\right| \leq \int_{\gamma_r} \frac{1}{|z|}\left|\frac{e^{iz}-1}{z}\right||dz|$$

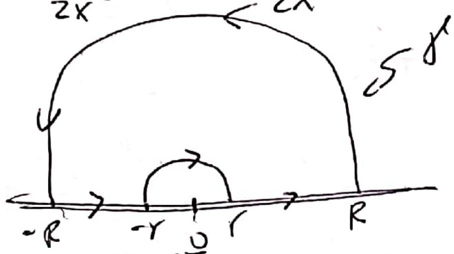
$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} - 1}{x^2} = \frac{e^{ix}+e^{-ix}-2}{2x^2} = \frac{e^{ix}}{2x^2} + \frac{e^{-ix}}{2x^2} - \frac{2}{2x^2}$$

$$= \frac{1}{2x^2}\left(\cos x + i\,\mathrm{sen}\,x + \cos(-x) - i\,\mathrm{sen}\,x - 2\right)$$

$$= \frac{1}{2x^2}\, 2\cos x - 2 .$$

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{e^{ix}-1}{2x^2} + \frac{e^{-ix}-1}{2x^2}$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}-1}{z^2}$$



$$0 = \int_\gamma f(z)\,dz = \underbrace{\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}-1}{x^2}\,dx}_{(I)} + \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} \frac{(\exp(ire^{-it})-1)(-ir)e^{-it}}{r^2 e^{-2it}}\,dt}_{(II)} + \underbrace{\int_r^R \frac{e^{ix}-1}{x^2}\,dx}_{(III)}$$

$$+ \underbrace{\int_0^\pi \frac{(\exp(iRe^{it})-1)(iR)e^{it}}{R^2 e^{2it}}\,dt}_{(IV)}$$

$$(I) = -\int_{-r}^{-R} \frac{e^{ix}-1}{x^2}\,dx = \int_r^R \frac{e^{-ix}-1}{x^2}\,dx \quad \therefore \int_r^R \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}-1}{x^2}\,dx + \int_r^R \frac{e^{ix}-1}{x^2}\,dx\right)$$

$$(IV) = i\int_0^\pi \frac{(\exp(iRe^{it})-1)}{Re^{it}}\,dt \Rightarrow |(IV)| \leq \int_0^\pi \frac{|\exp(iRe^{it})-1|}{R}\,dt$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{|\exp(iRe^{it})|}{R}\,dt + \int_0^\pi \frac{1}{R}\,dt \xrightarrow{R\to+\infty} 0 .$$

$$(II) = \int_\pi^{2\pi} \frac{(\exp(ire^{-it})-1)(-ir)e^{-it}\,dt}{r^2 e^{-2it}} = \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}-1}{z^2}\,dz$$

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{(\exp(ire^{-it})-1)(-ire^{-it})\,dt}{r^2 e^{-2it}} \underset{ds=dt}{\overset{s=t-\pi}{=}} \int_\pi^{2\pi} \frac{(\exp(ire^{-i(s+\pi)})-1)(-ire^{-i(s+\pi)})\,ds}{r^2 e^{-2i(s+\pi)}}$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} \frac{(\exp(ire^{-is}) - 1)(ire^{-is})\, ds}{r^2 e^{-2is}}$$ ⟵ intentar calcular el residuo.

Scanned with CamScanner

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE – Facultad de Matemáticas

Exámen – Variable Compleja (Magíster) – 2016

Nombre: ____________________________________

Ítem	1	2	3	4	Suma
Valor	1½	1½	1½	1½	6
Puntaje					

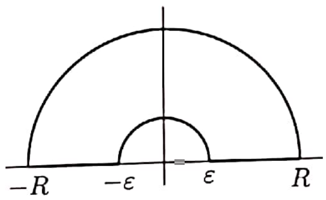
Notación: $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{D};\ |z| < 1\}$.

1. (1 ½ puntos) ¿Verdadero o falso? Existe una función entera no-constante f tal que $|f(z)| \leqslant \sqrt{1+|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

2. (1½ puntos) Dado $a > 0$, calcule:

$$I := \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2}\, dx.$$

Sugerencia: Integre sobre curvas así:



No olvide de justificar todos los pasos.

$f(z) = (z-a)\,g(z),\ g(a) \neq 0$

$f(1/2\, z) = (\frac{z}{2} - a)\, g(\frac{z}{2})$

3. (1 ½ puntos) ¿Verdadero o falso? Existe una función holomorfa f definida en vecindad de $\overline{\mathbb{D}}$ tal que $|f(e^{i\theta}) - e^{i\theta}| < \frac{1}{10}$ y $|f(\frac{1}{2}e^{i\theta}) - e^{2i\theta}| < \frac{1}{10}$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

4. (1 ½ puntos) ¿Verdadero o falso? Existe una función holomorfa $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tal que $f(0) = i$, $f'(0) = 3$, y $\operatorname{Im} f(z) > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Scanned with CamScanner

- Sist. P^1 de Sette
- P^1 es algebrizable.

Def. Una $\mathcal{L}$-ecuación es una expresión de la forma $\varphi \approx \psi$, donde $\varphi, \psi \in Term(X)$.
Al conjunto de las $\mathcal{L}$-ecuaciones se le denota por $Eq(X)$, CL, $Eq_{\mathcal{L}}$.

Lógica de las ecuaciones:

K clase de $\mathcal{L}$-álgebras.

$$\Gamma \models_K \sigma \approx \tau \text{ ssi } \forall A \in K \ \forall$$

$$\xi^A(\bar{a}) = \eta^A(\bar{a}) \text{ para } \xi \approx \eta \in \Gamma \Rightarrow \sigma^A(\bar{a}) = \tau^A(\bar{a})$$

$\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ es una interpretación de la variable en $\Gamma \cup \{\sigma \approx \tau\}$.

Lema 10.2.12 K clase de álgebras. $\Gamma, \Delta \subseteq Eq(X)$ conjuntos de ecuaciones y toda ecuación $\sigma \approx \tau$ se tiene:

(1) $\Delta \models_K \delta \approx \varepsilon$ para todo $\delta \approx \varepsilon \in \Delta$

(2) Si $\Delta \models_K \sigma \approx \tau$ y $\Delta \subseteq \Gamma$, entonces $\Gamma \models_K \sigma \approx \tau$

(3) Si $\Delta \models_K \sigma \approx \tau$ y $\Gamma \models_K \delta \approx \varepsilon$, para todo $\delta \approx \varepsilon \in \Delta$, entonces $\Gamma \models_K \sigma \approx \tau$.

(4) Si $\Delta \models_K \sigma \approx \tau$, entonces $s(\Delta) \models_K s(\sigma) \approx s(\tau)$, para toda substitución s. Es decir, $\models_K$ es siempre estructural.

• Las álgebras de Sette son estructuras $\mathbb{A} = \langle A, \to, ', 1 \rangle$ que verifican los siguientes axiomas:

A1) $x \to (y \to x) = 1$

A2) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$

A3) $(x' \to y') \to ((x' \to y'') \to x) = 1$

A4) $(x \to x'')' \to x = 1$

A5) $(x \to y) \to (x \to y)'' = 1$

y las cuasi-identidades:

Q1) $(x \to y = 1 \,,\; (x \to x) \to x = 1) \Rightarrow (y \to y) \to y = 1$

Q2) $(x \to y = 1 \,,\; y \to x = 1 \,,\; x' \to y' = 1 \,,\; y' \to x' = 1) \Rightarrow x = y$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Primer Semestre 2016

MAT 3431 - Lógica Algebraica
Tarea 3

1. El sistema P^1 de Sette

Axiomas

[$P^1$1] $A \to (B \to A)$.

[$P^1$2] $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.

[$P^1$3] $(\sim A \to \sim B) \to ((\sim A \to \sim\sim B) \to A)$.

[$P^1$4] $\sim (A \to \sim\sim A) \to A$,

[$P^1$5] $(A \to B) \to \sim\sim (A \to B)$.

$(A \to A) \to A = \delta(A)$
$A \to A = \varepsilon(A)$

Regla de Inferencia Modus Ponens

P^1 es algebrizable. Sus ecuaciones de definición son $(A \to A) \to A\delta(A) \approx \varepsilon(A) = A \to A$ y fórmulas de equivalencia son $\Delta_1(A, B) = A \to B$, $\Delta_2(A, B) = B \to A$, $\Delta_3(A, B) = \sim A \to \sim B$ y $\Delta_4(A, B) = \sim B \to \sim A$.

1. Encuentre un sistemas de axiomas que caracterice a la semántica equivalente $\mathcal{K}$. (Llamadas P^1–álgebras o álgebras de Sette). Elimine aquellos axiomas redundantes.

2. La semántica algebraica equivalente es la cuasivariedad generada por el álgebra $\mathbf{A} = \langle\{0, a, 1\}; \to, ', 1\rangle$, donde $\langle\{0, 1\}; \to, '\rangle$ es el álgebra de Boole de dos elementos y las operaciones $\to$ y $'$ están definidas por:

$\to$	0	a	1
0	1	1	1
a	0	1	1
1	0	1	1

	$'$
0	1
a	1
1	0

Demuestre que $\mathcal{K}$ no es una variedad.

2. Dos lógicas con la misma semántica algebraica equivalente

Considere el álgebra

$$\mathbf{A} = \langle \{0, \frac{1}{2}, 1\}; \to, \sim \rangle$$

$\to$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	1	1
1	0	1	1

	$\sim$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

$$\mathbf{L}_3 = \langle \mathbf{A}, \{1\} \rangle \qquad \text{and} \qquad \mathbf{J}_3 = \langle \mathbf{A}, \{\frac{1}{2}, 1\} \rangle$$

Estas matrices dan origen a dos lógicas diferentes con la misma semántica algebraica equivalente.

1. Demuestre que ambas lógicas son algebrizables usando el método matricial.
2. Demuestre que no son equivalentes. (Es decir no tienen los mismos teoremas o no tienen la misma relación de consecuencia).
3. Tienen la misma semántica algebraica.

$f: N \to N'$ homo de G-módulos

$\tilde{f} = id \otimes f : M \otimes N \to M \otimes N'$ homo de G-módulos.

$m \otimes n \mapsto m \otimes f(n)$

$\Rightarrow \exists f^\bullet : C^\bullet(G,N) \to C^\bullet(G,N')$ morfismo de co-cadenas

$$\begin{tikzcd} C^i(G,N) \arrow[r, "f^i"] \arrow[d, "d_N^i"'] \arrow[dr, phantom, "\Omega"] & C^i(G,N') \arrow[d, "d_{N'}^i"] \\ C^{i+1}(G,N) \arrow[r, "f^{i+1}"'] & C^{i+1}(G,N') \end{tikzcd}$$

$f_*: H^s(G,N) \longrightarrow H^s(G,N')$

$[\alpha] \longmapsto [f^s(\alpha)]$

α representante de $[\alpha] \in H^s(G,N)$, $\alpha \in Z^s(G,N)$

$\Rightarrow d_N^s(\alpha) = 0 \Rightarrow f^{s+1}(d_N^s(\alpha)) = 0 = d_{N'}^s(f^s(\alpha))$ $\therefore f^s(\alpha) \in Z^s(G,N')$

$\therefore [f^s(\alpha)] \in H^s(G,N')$

$\beta \in Z^s(G,N)$ representante de $\eta \in H^s(G,N)$

$H^0(G,M) \otimes H^s(G,N) \longrightarrow H^s(G,M \otimes N)$

η

$\alpha \in Z^0(G,M) \subseteq C^0(G,M) = \{\varphi : G^0 \to M\}$ $G^0 = \{*\}$

$M \ni$

$\alpha \cup \beta(g_1,\dots,g_s) = \alpha(*) \otimes \beta(g_1,\dots,g_s)$

$\alpha(*) \otimes \beta(g_1,\dots,g_s) \in Z^s(G,M \otimes N)$ ya que

$d^s_{M\otimes N}(\alpha \cup \beta) = \cancel{d_M^0(\alpha)} \cup \beta + (-1)^0 \alpha \cup \cancel{d_N^s(\beta)} = 0$.

$\tilde{f}^s(\alpha\cup\beta) = \tilde{f} \circ (\alpha \cup \beta) =$

$(id\otimes f) \circ (\alpha \cup \beta)(g_1,\dots,g_s) = (id\otimes f)(\alpha(*) \otimes \beta(g_1,\dots,g_s))$

$= \alpha(*) \otimes f \circ \beta(g_1,\dots,g_s)$

$\therefore (id \otimes f)^s(\alpha\cup\beta) = \alpha \cup (f\circ\beta)$

A nivel de Categorías :

MV álgebras $\longleftrightarrow$ G ordenado abeliano
c/ unidad fuerte
$x < nu$, algún

(Chang '58) : $\neg x \oplus y = x \to y$, $\neg x = 1 - x$

Luego usamos $\oplus$ en vez de $\to$.

Lo anterior da origen a las MV-álgebras:

$\mathbb{A} = \langle A, \oplus, \neg, 0 \rangle$

- $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

$x \oplus y = y \oplus x$

$x \oplus 0 = x$

$\neg\neg x = x$

$x \oplus \neg 0 = \neg 0$

$\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) + x$

$x \ominus y = (x \odot \neg y) = \neg(\neg x \oplus y) = \neg \min\{1, 1 - x + y\}$

Ejemplo. $\langle [0,1], \oplus, \neg, 0 \rangle$ es una MV-álgebra.

Ejemplo. $\langle B, \vee, ', 0 \rangle$ (B de $\mathbb{B}$) es una MV-álgebra.

Ejemplo. G grupo abeliano reticulado ($\langle G, +, \vee, \wedge \rangle$)

$x \leq y \to x + t \leq y + t$ (+ respeta el orden)

Sea $u > 0$, $\neg x = u - x$. $\langle [0,u], \oplus, \neg, 0 \rangle$ es una MV-álgebra.

En el caso de $G = \mathbb{Z}$, $u = 16$. $[0,16]$ tiene 1 elementos

$x \oplus y = \min\{16, x + y\}$

$0 = 0$

$\neg x = 16 - x$

$x \to y = \min\{1, 16 - x + y\}$

MV- álgebras

$x \to y = \min\{1, 1-x+y\}$ sobre $[0,1]$.

Origen: Lógica de Łukasiewicz

- $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
- $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
- $((\alpha \to \beta) \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to \alpha)$ → tautología clásica
- $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$

- $\neg x = 1-x$

$\bar\alpha \le \bar\beta$

$\overline{\alpha \to \beta} = 1$

$\overline{(\alpha \to \beta) \to \beta} = \overline{1 \to \beta} = \bar\beta$

$\bar\alpha > \bar\beta$

$\overline{\alpha \to \beta} = 1 - \bar\alpha + \bar\beta$

$\overline{(\alpha \to \beta) \to \beta} = \overline{(1-\bar\alpha+\bar\beta) \to \beta} = \bar\alpha$

$1-(1-\alpha+\beta)+\beta = \alpha$

$\therefore\ (\alpha \to \beta) \to \beta = \alpha \vee \beta$

Luego 3 nos dice que el supremo es conmutativo.

$x \to y$ es una implicación en la que vale modus-ponens:

$x \to y,\ \bar x = 1 \Rightarrow \bar y = 1$

$\langle A, \to, \neg, 0 \rangle$ es un álgebra de Wajsberg.

$\neg x \to y = \min\{1, x+y\} = x \oplus y$.

$x \odot y = \neg(\neg x \oplus \neg y) = \neg(\min\{1, 1-x+1-y\}) = \max\{0, x+y-1\}$

$\therefore$ t norma adjunta de $\to$.