$$p_3 - s_1 p_2 + s_2 p_1 - 3s_3$$

$$= (\alpha_1^3 + \cdots + \alpha_n^3) - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)(\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2)$$

$$+ (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_2\alpha_n + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n)(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$$

$$-3(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_1\alpha_2\alpha_n + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \cdots + \alpha_2\alpha_3\alpha_n + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)$$

$$= \alpha_1^3 + \cdots + \alpha_n^3 - (\alpha_1^3 + \cdots + \alpha_n^3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \cdots + \alpha_1\alpha_n^2 + \cdots + \alpha_n\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n\alpha_{n-1}^2)$$

$$+ (\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^2\alpha_3 + \cdots + \alpha_1^2\alpha_n + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_1\alpha_2\alpha_n + \cdots + \alpha_1\alpha_{n-1}\alpha_n$$

$$+ \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_1\alpha_2\alpha_n + \alpha_2^2\alpha_3 + \cdots + \alpha_2^2\alpha_n + \cdots + \alpha_2\alpha_{n-1}\alpha_n$$

$$+ \alpha_1\alpha_2\alpha_n + \alpha_1\alpha_3\alpha_n + \cdots + \alpha_1\alpha_n^2 + \alpha_2\alpha_3\alpha_n + \cdots + \alpha_2\alpha_n^2 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n^2)$$

$$-3(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_1\alpha_2\alpha_n + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \cdots + \alpha_2\alpha_3\alpha_n + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)$$

$$= 0 \ldots$$

Ejercicio 1. Sea α trascendental sobre K (cuerpo)

(1) Todo elemento en $K(\alpha)\setminus K$ es trascendental sobre K.

dem. Sea $f(\alpha) \in K(\alpha)\setminus K$ ($f(\alpha) = \dfrac{g(\alpha)}{h(\alpha)}$,

$g(\alpha), h(\alpha) \in K[\alpha]$, $h(\alpha) \neq 0$)

Si $f(\alpha)$ algebraico sobre $K \Rightarrow \exists\, p(x) \in K[x]$

tal que $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $p(f(\alpha)) = 0$

pero $p(f(\alpha)) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(\alpha)^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \dfrac{g(\alpha)^i}{h(\alpha)^i}$

y $\sum_{i=0}^{n} a_i \dfrac{g(\alpha)^i}{h(\alpha)^i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i g(\alpha)^i h(\alpha)^{n-i} = 0$

$\therefore$ α algebraico sobre K $\Leftarrow\!\!\Rightarrow\Leftarrow$).

($\tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i g(x)^i h(x)^{n-i} \in K[x]$)

(2) Demostrar que $K(\alpha^2) \cong K(\alpha)$ a pesar de que $K(\alpha^2) \subsetneq K(\alpha)$.

dem. Si α trascendental sobre $K \longleftrightarrow K(\alpha) \cong K(t)$

($K(t)$ cuerpo de funciones racionales sobre K con variable t)

Por (1), α trascendental $|_K \to \alpha^2$ trascendental $|_K$

($\alpha^2 \notin K$, en caso contrario sería algebraico!)

$\therefore$ $K(\alpha^2) \cong K(t) \cong K(\alpha)$.

(3) Pd: $K \subsetneq Z \subseteq K(\alpha) \Rightarrow \alpha$ algebraico sobre Z.

dem. Trivial cuando $\alpha \in Z$

Supongamos que $\alpha \notin Z$

Si α trascendente sobre $Z \Rightarrow$ para $p(x) \in Z[X]$

tal que $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_i \in Z$ $\forall i$

y $p(\alpha) = 0 \implies a_i = 0$ $\forall i$

$\therefore \alpha \cdot 0 \in Z \Rightarrow\Leftarrow$

(4) Pd: $\forall n > 1$, α^n es trascendente sobre K y $K(\alpha^n) \subsetneq K(\alpha)$

dem. Si α trascendente sobre $K \Rightarrow \alpha^n \notin K$ $\forall n > 1$

(o $\alpha^n = a \in K \Leftrightarrow \alpha$ raíz de $x^n - a \in K[x]$).

Por (1) α^n trascendente sobre K.

Pd: $K(\alpha^n) \subsetneq K(\alpha)$

dem. Evidente que $K(\alpha^n) \subset K(\alpha)$

Si $\alpha \in K(\alpha^n) \Rightarrow \alpha = \dfrac{g(\alpha^n)}{h(\alpha^n)} = f(\alpha^n)$, $f(t) \in K(t)$
$(h \neq 0)$

($K(t)$ cuerpo de funciones racionales con ~~tde~~ indeterminada t)

$\therefore \alpha h(\alpha^n) - g(\alpha^n) = 0$

$\therefore \alpha$ algebraico $|_K$. $\Rightarrow\Leftarrow$

(5) Pd: ~~∀~~ Si $n>1$

$$K(\alpha) \supset K(\alpha^n) \supset K(\alpha^{n^2}) \supset K(\alpha^{n^3}) \supset \dots$$

es una cadena estrictamente decreciente de cuerpos que no llega a K. En particular, $K(\alpha)|_K$ tiene infinitos cuerpos intermedios.

<u>dem</u>. Por (4), $\alpha^{n^j} \notin K$ $\forall j \in \mathbb{N}$. En particular, ~~α^{n^j}~~ α^{n^j} es trascendente sobre K.

Si $K(\alpha^{n^j}) = K(\alpha^{n^{(j+1)}}) \Rightarrow \alpha$ algebraico $|_K$.

(mismo argumento ~~sobre~~ que en (4))

<u>Obs</u>. De lo anterior, si $K(\alpha)/_K$ tiene finitos cuerpos intermedios, entonces α algebraico sobre K.

---

(6) Pd: $\beta^n = \alpha \Rightarrow \beta$ trascendente sobre K.

(Hint: Considerar cadena ~~$K(\alpha)$~~ $K \subseteq K(\alpha) \subseteq K(\beta)$)

<u>dem</u>. Como $K \subseteq K(\alpha) \subseteq K(\beta)$ $\quad$ ($K(\beta) = K(\alpha, \beta)$)

$$\Rightarrow [K(\beta):K] = [K(\beta):K(\alpha)][K(\alpha):K]$$

Como $[K(\alpha):K] < \infty$ (en caso contrario α alg $|_K$)

$$\therefore [K(\beta):K] = \infty$$

$\therefore$ β trascendente sobre K.

Ejercicio 2: $K(x)$ cuerpo de funciones racionales sobre K, entonces $Z = K\left(x^3+x+1,\ \frac{1}{x^2}+x^2\right)$ es un subcuerpo de $K(x)$. Encuentre función racional θ tal que $Z = K(\theta)$

dem. Evidente que Z subcuerpo de K.

$\sigma : x \longmapsto \frac{1}{x}$

$$\sigma(x^3+x+1) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + 1 = \frac{x+x^2+x^3}{x^3}$$

$$\sigma(x^3+x+1) = \sigma(x)^3 + \sigma(x) + 1 = x^3+x+1$$

$$\Rightarrow \sigma(x)^3 - x^3 = x - \sigma(x)$$

$$\Rightarrow (\sigma(x)-x)(\sigma(x)^2 + \sigma(x)x + x^2) = x - \sigma(x)$$

Sup: $\sigma(x)^2 + \sigma(x)x + x = 1$

$$\sigma(x)^3 + \sigma(x) = x^3 + x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma(x^3+x) = x^3+x$$

Sea $\sigma \in Aut(K(x)) \Rightarrow \sigma : x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$

con $ad-bc \neq 0$.

Si $\sigma\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow \sigma(x)^2 + \frac{1}{\sigma(x)^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma(x)^4+1}{\sigma(x)^2} = \frac{x^4+1}{x^2} \Leftrightarrow \sigma(x)^4x^2 + x^2 = \sigma(x)^2x^4 + \sigma(x)^2.$$

$$\Leftrightarrow \sigma(x)^2x^2(\sigma(x)^2 - x^2) + (x^2 - \sigma(x)^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sigma(x)^2 - x^2)(\sigma(x)^2x^2 - 1) = 0$$

Luego las posibilidades son

(i) $\sigma(x) = x$

(ii) $\sigma(x) = -x$

(iii) $\sigma(x) = \frac{1}{x}$

(iv) $\sigma(x) = -\frac{1}{x}$

Pero ninguno de ellos, salvo $\sigma(x) = x$ fija
$x^3 + x + 1$ ...

Ejercicio 4. Muestre que si L/K finita

$$[L(x):K(x)] = [L:K]$$

demostración.

Si L/K finita $\Rightarrow L = K(a_1, \dots, a_n)$, donde $a_1, \dots, a_n$ a_i algebraico $/K$ de grado n_i resp. $i = 1, \dots, n$

Si a_i algebraico sobre $K \Rightarrow a_i$ algebraico sobre $K(x)$

Además, $L(x) = K(a_1, \dots, a_n)(x) = K(x)(a_1, \dots, a_n)$

Para $n=1$, tenemos $L(x) = K(x)(a_1) = K(x)(\alpha)$, $\alpha = a_1$

Como α es algebraico sobre $K(x)$, entonces existe $p(z) \in K(x)[z]$ tal que $p(z) = \sum_{i=0}^{m} b_i(x)\alpha^i$,

Con $p(\alpha) = \sum_{i=0}^{m} b_i(x)\alpha^i = 0$

Si $\exists i : b_i(x) \in K(x) \setminus K \Rightarrow x$ algebraico sobre $K(\alpha) = L$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

$\therefore b_i(x) \in K \quad \forall i$

$\therefore \alpha$ algebraico sobre $K(x)$ de grado n_1

Así, $[L(x):K(x)] = [K(x)(\alpha):K(x)] = n,$

Ahora

$$\begin{array}{c} L(x) = K(x)(a_1,\dots,a_n) \\ | \\ K(x)(a_1,\dots,a_{n-1}) \\ | \\ \vdots \\ K(x)(a_1) \\ | \\ K(x) \end{array}$$

$$[L(x):K(x)] = [K(x)(a_1,\dots,a_n) : K(x)(a_1,\dots,a_{n-1})]$$

$$[K(x)(a_1,\dots,a_{n-1}) : K(x)(a_1,\dots,a_{n-2})]$$

$$\dots [K(x)(a_1) : K(x)]$$

$$= [K(a_1,\dots,a_n) : K(a_1,\dots,a_{n-1})]$$

$$[K(a_1,\dots,a_{n-1}) : K(a_1,\dots,a_{n-2})]$$

$$\dots [K(a_1):K] = [L:K]$$

$$\therefore [L(x):K(x)] = [L:K].$$

Ejercicio 5.

Sean $p_1, \ldots, p_n \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $p_1, \ldots, p_n$ son algebraicamente independientes

(2) $p_1, \ldots, p_n$ forman una base de trascendencia de $K(x_1, \ldots, x_n)$ sobre K

(3) El determinante de la matriz Jacobiana $(\partial p_i / \partial x_j)_{i,j}$ es un polinomio no cero.

---

dem.

$(1) \Rightarrow (2)$. Sabemos que $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset L = K(x_1, \ldots, x_n)$ forman una base de trascendencia para L sobre K (ya que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ alg. independiente y $\forall g \in L$, g algebraico sobre $K(x_1, \ldots, x_n)$).

Por otro lado, todas las bases de trascendencia de L tienen n elementos.

Como para todo $q \in L$, $\{p_1, \ldots, p_n, q\}$ es algebraicamente dependiente sobre K (si $\{p_1, \ldots, p_n, q\}$ algebraicamente independiente, entonces contradice el hecho sobre la cardinalidad de la base de trascendencia)

$\therefore \{p_1, \ldots, p_n\}$ base de trascendencia para L sobre K.

(2) $\Rightarrow$ (3).

$$\left(\partial p_i / \partial x_j \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \partial p_1/\partial x_1 & \cdots & \partial p_1/\partial x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial p_n/\partial x_1 & \cdots & \partial p_n/\partial x_n \end{pmatrix}$$

Si $\left(\partial p_i / \partial x_j \right)_{i,j}$ tiene determinante cero (suponiendo todas las filas no nulas)

$$\Rightarrow \exists i : \left(\partial p_i/\partial x_1, \dots, \partial p_i/\partial x_n \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_j \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial p_j}{\partial x_n} \right)$$

$$\Rightarrow \cancel{\forall} \qquad = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_j \frac{\partial p_j}{\partial x_1}, \dots, \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_j \frac{\partial p_j}{\partial x_n} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \partial p_i/\partial x_1 = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_j \frac{\partial p_j}{\partial x_1} \qquad \left(\text{Suponiendo } \frac{\partial p_i}{\partial x_1} \neq 0 \right)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_j \frac{\partial p_j}{\partial x_1} - \frac{\partial p_i}{\partial x_1}$$

$\therefore \{x_1, \dots, x_n\}$ algebraicamente dependientes ($\Rightarrow \Leftarrow$).

(3) $\Rightarrow$ (1) (pendiente).

~~Supongamos $p_1, \dots, p_n$ algebraicamente dependientes, luego existen $a_1, \dots, a_n \in k$ no todos nulos tales que~~

~~$\sum_{i=1}^{n} a_i p_i \neq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial p_i}{\partial x_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$~~

~~Como deben existir un p_i tal que $\partial p_i / \partial x_j \neq 0$ (en caso contrario $p_i \in k$)~~

Ejercicio 9 Muestre que el polinomio x^3+x^2-2x-1 es resoluble por radicales sobre $\mathbb{Q}$ probando que sus raíces son $2\cos(2\pi j/7) = \zeta_7^{j}+\zeta_7^{-j}$, $j=1,2,3$ y que $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}(\zeta_7)$ es extensión radical.

---

dem. Sabemos que $\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q}$ es Galoisiana, con
$Gal(\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* \cong C_6$. En particular, $\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q}$ es extensión abeliana (cíclica).

Por otro lado, como x^3+x^2-2x-1 es irreducible sobre $\mathbb{Q}$,

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{Q}(\zeta_7) \\ & & \Big|\, 2 \\ 6 & & \mathbb{Q}(\zeta_7^{j}+\zeta_7^{-j}) \\ & & \Big|\, 3 \\ & & \mathbb{Q} \end{array}$$

y $\mathbb{Q}(\zeta_7^{j}+\zeta_7^{-j})/\mathbb{Q}$ es Galoisiana, ya que $H \trianglelefteq G = Gal(\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q})$
donde $\mathbb{Q}(\zeta_7^{j}+\zeta_7^{-j}) = \mathbb{Q}(\zeta_7)^H$.

$\therefore$ $\mathbb{Q}(\zeta_7^{j}+\zeta_7^{-j})$ cuerpo de descomposición del polinomio $x^3+x^2-2x-1 \in \mathbb{Q}[x]$.

Como $\left|Gal(\mathbb{Q}(\zeta_7^{j}+\zeta_7^{-j})/\mathbb{Q})\right| = |G|/|H| = 6/2 = 3$

$\therefore$ $Gal(\mathbb{Q}(\zeta_7^{j}+\zeta_7^{-j})/\mathbb{Q}) \cong C_3 \cong A_3$

y A_3 es grupo soluble, ya que $A_3 \trianglelefteq S_3$ y S_3 es soluble (todo subgrupo de un grupo soluble es soluble).

Así, x^3+x^2-2x-1 es soluble por radicales. $\square$

Ejercicio 12. Considere el polinomio $f(x)=x^3-3x+1 \in \mathbb{Q}[x]$. Sea E el cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$. Pruebe que E no es una extensión radical de $\mathbb{Q}$.

dem. Como $f(1)=1-3+1=-1$, $f(-1)=-1+3+1=3$, entonces $f(x)$ irred $/\mathbb{Q}$.

El discriminante de $f(x)$ es

$$D=a^2b^2-4b^3-4a^3c-27c^2+18abc,$$

donde $a=0$, $b=-3$, $c=1$

$$D=4\cdot 27-27=3\cdot 27=81$$

$$\therefore \sqrt{D}=9$$

$$\therefore Gal(f)\cong A_3\cong C_3$$

Como $|A_3|=3$,

$$\begin{array}{c} E \\ \big|\,3 \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

Así, $E=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{\alpha})$, donde $\alpha\in\mathbb{Q}$, ... (pendiente).

6) L alg de Lie sobre F (cuerpo), $[[a,b],b]=0 \ \forall a,b \in L$

Pd: $\operatorname{char}(F) \neq 3 \Rightarrow L^3 = 0$

Pd: $\operatorname{char}(F) = 3 \Rightarrow L^4 = 0$

---

dem. $[[a,b],b] = -[b,[a,b]] = [b,-[a,b]] = [b,[b,a]]$
$$= ad_b(ad_b(a)) = ad_b^2(a).$$

$L^3 = \langle [[[a,b],c],d] / a,b,c,d \rangle$

$[[[a,b],c],d] = [d,[c,[a,b]]]$
$= -[c,[[a,b],d]] - [[a,b],[d,c]]$
$= \cancel{[[[a,b],d],c] + [[d,c],[a,b]]}$
$= [c,[d,[a,b]]] + [[d,c],[a,b]]$
$= [d,-[[a,b],c]] -$

$\boxed{[[x,y],z] = -[[x,z],y]}$

$[[x,y],z] = [z,[y,x]] = -[y,[x,z]] - [x,[z,y]]$
$= -[y,[x,z]] - (-[z,[y,x]] - [y,[x,z]])$
$= -[y,[x,z]] + [z,[y,x]] - [y,[x,z]]$

$0 = [[x,y+z],y+z] = [[x,y\cancel{+z}],y] + [[x,y+z],z]$
$= [[x,y]+[x,z],y] + [[x,y]+[x,z],z]$
$= \cancel{[[x,y],y]} + [[x,z],y] + [[x,y],z] + \cancel{[[x,z],z]}$

Tenemos $[[x,y],z] = -[[y,x],z] = [z,[y,x]]$

$[[x,y],z] = -[[x,z],y] = [y,[x,z]]$

$$[z,[y,x]] + [y,[x,z]] + [x,[z,y]] = 0$$

$$2[[x,y],z] + [x,[z,y]] = 0$$

$$\therefore [x,[z,y]] = -2[[x,y],z]$$

$$= 2[z,[x,y]]$$

$$[[[x,y],z],w] = ??$$

$\cancel{[x,[[y,z],w]]}$

$$[x[[yz]w]] + [[yz][wx]] + [w[x[yz]]] = 0$$

$$[[yz][wx]] = 2[w[[yz]x]]$$

$$[w[x[yz]]] = 2[x[w[yz]]] = -2[x[[yz]w]]$$

$$\Rightarrow [w[[yz]x]] = [[[yz]x]w]$$

$$= -[[[yz]w]x]$$

$$= [x[[yz]w]]$$

$$\Rightarrow [x[[yz]w]] + [[yz][wx]] + [w[x[yz]]]$$

$$= [x[[yz]w]] + 2[x[[yz]w]] - 2[x[[yz]w]] = 0$$

$$\therefore [x[[yz]w]] = 0$$

$$\therefore [[[yz]w]x] = 0 \quad \forall x,y,z,w \in L.$$

Scanned with CamScanner

5| L alg de Lie sobre $\mathbb{C}$, $x \in L$.

El subespacio de L generado por vectores propios de ad_x es subálgebra de L.

$w \in L$ v.p de $ad_x \Rightarrow ad_x(w) = [x, w] = \lambda w$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Sean w_1, w_2 vectores propios de ad_x

Pd: $[w_1, w_2] \in \langle$ vect. propios de $ad_x \rangle$

$$ad_x([w_1, w_2]) = [x, [w_1, w_2]]$$
$$= -[w_2, [x, w_1]] - [w_1, [w_2, x]]$$
$$= -[w_2, \lambda_1 w_1] + [w_1, [x, w_2]]$$
$$= -[w_2, \lambda_1 w_1] + [w_1, \lambda_2 w_2]$$
$$= -\lambda_1 [w_2, w_1] + \lambda_2 [w_1, w_2] = (\lambda_1 + \lambda_2)[w_1, w_2]$$

$\therefore [w_1, w_2]$ vector propio de ad_x.

$\therefore [w_1, w_2] \in \langle$ vect. propios de $ad_x \rangle$.

$$ad_x([w_1, w_2]) = [x, [w_1, w_2]]$$
$$= -[w_1, [w_2, x]] - [w_2, [x, w_1]]$$
$$= [w_1, [x, w_2]] + [[x, w_1], w_2]$$
$$= [w_1, \lambda_2 w_2] + [\lambda_1 w_1, w_2] = (\lambda_1 + \lambda_2)[w_1, w_2]$$

$\therefore [w_1, w_2]$ vector propio de ad_x

$\therefore [w_1, w_2] \in \langle$ vectores propios de $ad_x \rangle$.

$$[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}] = \begin{cases} 0 \ , & j\neq k \wedge i \neq l \\ -\varepsilon_{kj} \ , & j \neq k \ , \ l = i \\ \varepsilon_{il} \ , & j = k \ , \ l \neq i \\ (\varepsilon_{il} - \varepsilon_{kj}) & j = k \ , \ l = i \end{cases}$$

$\longrightarrow$ cero!

Condición, $i<j \ , \ k<l$

$\Rightarrow k<j \ , \ i<l \ \mid \ \max\{i,k\}<j \ , \ \max\{i,k\}<l$

$i \leq \max\{i,k\} < \min\{j,l\} \leq j$

ε_{kj} cumple $i<j \wedge l=i \wedge k<l$

$\therefore \ k<l=i<j$

$\therefore \ 0<l-k<j-k$

$\therefore \ 1\leq l-k<j-k$

$\therefore \ 1<j-k$

Análogamente ε_{il} cumple $i<j=k<l \Rightarrow 1<l-i$ ✓

(Aplicando inducción a m, donde L^m)

$m=1$ ✓

Supongamos que se cumple para $m\in\mathbb{N}$. Pd que se cumple para $m+1\in\mathbb{N}$.

$L^{m+1} = [L^m, L]$. L^m tiene base ε_{ij} , $j-i>m$

$$[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}] = \begin{cases} 0 & (j\neq k \wedge i\neq l) \vee (j=k \wedge l=i) \\ \varepsilon_{il} \ , & j=k \wedge l\neq i \\ -\varepsilon_{kj} \ , & j\neq k \wedge l=i \end{cases}$$

ε_{il} cumple : $i<m+j=m+k<m+l \Rightarrow j-i=k-i<l-i$

$\Rightarrow m<j-i<l-i \quad \therefore \quad m+1<l-i$

Análogo para ε_{kl} ... ✓

Evidentemente L es nilpotente, ya que para m suf. grande $\nexists \, i,j$ tal que ε_{ij} cumpla $j-i>m$

Si $k=l,\ m=j \Rightarrow [\varepsilon_{jk}, \varepsilon_{lm}] = \varepsilon_{jm} - \varepsilon_{lk}$

$\varepsilon_{jm} \leftarrow$ tiene uno en la diagonal

$\varepsilon_{lk} \leftarrow$ tiene uno en la diagonal.

Además $[A,B]=-[B,A]$, $[A,A]=0$

$[\varepsilon_{jk}, i\varepsilon_{lm}] = i[\varepsilon_{jk}, \varepsilon_{lm}]$

$\therefore\ \forall A,B \in gl(n,\mathbb{C}) : tr[A,B]=0$

$\therefore\ gl(n,\mathbb{C})' = sl(n,\mathbb{C})$. $\blacksquare$

Error: No hay que considerar $i\varepsilon_{jk}$. $\dim_{\mathbb{C}} gl_n(\mathbb{C}) = n$

---

4) L álgebra de lie de matrices $n\times n$ triangulares superiores (estricta) sobre un cuerpo F. L^k posee base que consiste en matrices elementales e_{ij} con $j-i>k$. ~~...~~ L es nilpotente.

<u>$n=2$</u> $L = \{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / a\in F\}$

$\left[\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = ab\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = ab\cdot 0 = 0$

$\therefore\ L' = \{0\}$

<u>Caso general</u> $A = (a_{ij})_{ij}$, $a_{ij}=0$ si $i\geq j$

Para L' basta estudiar $[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}]$; $i,j,k,l \in \{1,\dots,n\}$.

$[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}] = \varepsilon_{ij}\cdot\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}\cdot\varepsilon_{ij}$

Por ejercicio anterior:

$$\left[\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&i\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-i&0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}\right]=i\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right]=-i\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&-i\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix}\right]=-i\left[\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]=-i\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&i\end{pmatrix}\right]=-i\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}\right]=-\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right]=-\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix}\right]=-\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right]$$ ← traza cero

¡ así sucesivamente !

$$\therefore \quad gl(2,\mathbb{C})'=sl(2,\mathbb{C})$$

Ahora el caso general:

$gl(n,\mathbb{C})$ tiene base $\{\varepsilon_{jk},\ i\,\varepsilon_{jk}\}_{j,k=1}^{n}$

Sabemos que $\varepsilon_{jk}\varepsilon_{lm}=0$, $k\neq l$; $\varepsilon_{jk}\varepsilon_{km}=\varepsilon_{jm}$

$\therefore [\varepsilon_{jk},\varepsilon_{lm}]=\varepsilon_{jk}\varepsilon_{lm}-\varepsilon_{lm}\varepsilon_{jk}$

Si $k\neq l$, $m\neq j \Rightarrow [\varepsilon_{jk},\varepsilon_{lm}]=0$

Si $k\neq l$, $m=j \Rightarrow [\varepsilon_{jk},\varepsilon_{lm}]=-\varepsilon_{lk}$ ← tiene traza cero

Si $k=l$, $m\neq j \Rightarrow [\varepsilon_{jk},\varepsilon_{lm}]=\varepsilon_{jm}$ ← tiene traza cero.

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-i&0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&i\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-i\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&i\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\alpha+b\gamma & a\beta+b\delta \\ c\alpha-a\gamma & c\beta-a\delta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a\alpha+c\beta & b\alpha-a\beta \\ a\delta+c\gamma & b\delta-a\gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b\gamma-c\beta & 2a\beta-b\delta-b\alpha \\ c\alpha-a\gamma-a\delta-c\gamma & c\beta-a\delta-b\delta+a\gamma \end{pmatrix}$$

$b=1, \gamma=0, \beta=0, \alpha=0$ (...)

#

---

3) El álgebra derivada de $gl(n,\mathbb{C})$ es $sl(n,\mathbb{C})$

$$gl(n,\mathbb{C})' = [gl(n,\mathbb{C}), gl(n,\mathbb{C})]$$

$n=2$: $\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right]$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ae+fc & eb+fd \\ ag+ch & bg+dh \end{pmatrix}$$

diagonal $= (bg-fc, \; cf-bg)$

$$A = \begin{pmatrix} \overline{a+bi} & \overline{c+di} \\ e+fi & g+hi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ e & g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bi & di \\ fi & hi \end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ b\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$\mathrm{ad}_y(y) = 0 = 0x + 0h + 0y$

$$\therefore\ [\mathrm{ad}_y] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>10)</u> L álgebra de Lie nilpotente. Probar que L posee ideal de codimensión 1.

<u>Dem</u>. ?? (qué es codimensión?)

<u>L. Ejercicio 15</u>

<u>2)</u> $sl_{\mathbb{C}}(2, \mathbb{C})$ no tiene ideales no triviales?

<u>dem</u> El álgebra de matrices es simple!

Sea $I \trianglelefteq sl(2,\mathbb{C})$, $I \neq \{0\}$

$\exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in I$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$. Spg $a = 0$

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, x\right] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, x\right] = \begin{pmatrix} -c & 2a \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, y\right] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

8| Toda subalgebra de L (lie) soluble es soluble. (Análogo para nilpotente) (Pendiente)

1| $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

base ordenada de $sl(2,F)$

Calcular matrices de ad_x, ad_y relativas a esta base.

$ad_x(a) = [x,a]$.

$ad_x(x) = [x,x] = 0 = 0x + 0h + 0y$

$ad_x(h) = [x,h] = xh - hx = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= -2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -2x = -2x + 0h + 0y$

$ad_x(y) = [x,y] = xy - yx = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = h$

$= 0x + 1h + 0y$

$\therefore$ ~~$ad_x(y)$~~ $[ad_x] = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$ad_y(x) = [y,x] = yx - xy = -(xy - yx) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -h$

$= 0x - 1h + 0y$

$ad_y(h) = [y,h] = yh - hy = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$= 0x + 0y + 2y$

Pd: $L \neq \{0\}$, L nilpotente $\Rightarrow Z(L) \neq 0$.

$\rightarrow$ ~~$L^{(1)}$~~ $L^1 = [L,L]$

$L^{r+1} = [L^r, L]$

L nilpotente $\Rightarrow \exists r : L^r = 0$

Si $r=1$: $L^1 = [L,L] = \langle [a,b] / a,b \in L \rangle = 0$

$\Rightarrow [a,b] = 0 \quad \forall a,b$

$\therefore \quad Z(L) = L$.

$L^2 = \langle$ ~~$[a,[b,c]]$~~ $[[a,b],c] / a,b,c \in L \rangle = \{0\}$

$[[a,b],c] = 0 \quad \forall a,b,c \in L$.

$\forall a,b \in L : [a,b] \in Z(L)$

$\therefore Z(L) \supseteq L^1$

L^1 es abeliano.

Como $L^2 = 0 \Rightarrow L^1 \neq 0$:

$\therefore Z(L) \neq 0$.

$L^{r+1} = [L^r, L] = \langle [a_1, [a_2, [\ldots, [a_r, a_{r+1}]]]\ldots] / a_1, \ldots, a_r, a_{r+1} \in L \rangle$

$\therefore [a_2, [\ldots, [a_r, a_{r+1}]]\ldots] \in Z(L)$

$\therefore \quad Z(L) \supseteq L^r \ldots$ (ordenar la idea mejor!).

Scanned with CamScanner

7] L lie (/ K)

$Z(L) = \{a \in L \,/\, [a,x] = 0, \ \forall x \in L\}$

Pd: $Z(L) \trianglelefteq L$ abeliano.

— o —

→ Pd: $Z(L) \leq L$

$x, y \in Z(L)$, $k \in K$

$[a, x+y] = [a,x] + [a,y] = 0 \quad \therefore \left\{\begin{array}{l} x+y \\ kx \end{array}\right. \in Z(L)$

$[a, kx] = k[a,x] = 0$

$[a,[x,y]] = -[y,[a,x]] - [x,[y,a]]$

$= 0 + 0 = 0 \quad ([a,x], [y,a] = 0)$

$\therefore [x,y] \in Z(L)$

$\therefore Z(L) \leq L$

Pd: $Z(L)$ abeliana

Pd: $[x,y] = [y,x] \ \forall x,y \in Z(L)$

~~char K ≠ 2 listo~~

~~char K ≠ 2.~~

trivial:

$x \in Z(L) \Rightarrow x \in L$

$\therefore [x,y] = 0$.

$\therefore [y,x] = 0$.

$\therefore [x,y] = [y,x]$.

Pd: $Z(L)$ ideal de L.

Pd: $[l,z] \in Z(L) \ \forall z \in Z(L) \ \forall l \in L$.

Como $[l,z] = 0$, $\Rightarrow \forall w \in L$: $[[l,z], w] = [0,w] = 0$

$\therefore Z(L) \trianglelefteq L$.

• Ejemplo de alg de Lie L tq $Z(L) = \{0\}$.

Como $Z(L) \trianglelefteq L$, basta tomar L simple. y no conmutativa.

(con char $K \neq 2$??)

no abelianas.

6] $\dim(L, L') = 2$ pd: $L \cong L'$ $\qquad L = <\hat{e}_1, \hat{e}_2>$

$\qquad L' = <\hat{e}_1', \hat{e}_2'>$

$\forall v \in L: \quad v = a_1 e_1 + a_2 e_2$

$[\hat{e}_1, \hat{e}_1] = c_{111} e_1 + c_{112} e_2$

$[\hat{e}_2, \hat{e}_2] = c_{221} e_1 + c_{222} e_2$

$[\hat{e}_1, \hat{e}_2] = c_{121} e_1 + c_{122} e_2$

L no conmutativa

$\Leftrightarrow [\hat{e}_1, \hat{e}_2] \neq [\hat{e}_2, \hat{e}_1]$

Continuar después!

$[\vec{v}, \vec{w}] = \cancel{[a_1 e_1 +}$

$= [v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2, w_1 \hat{e}_1 + w_2 \hat{e}_2]$

$= [v_1 \hat{e}_1, w_1 \hat{e}_1 + w_2 \hat{e}_2] + [v_2 \hat{e}_2, w_1 \hat{e}_1 + w_2 \hat{e}_2]$

$= v_1 w_1 \cancel{[\hat{e}_1, \hat{e}_1]} + v_1 w_2 [\hat{e}_1, \hat{e}_2] + v_2 w_1 [\hat{e}_2, \hat{e}_1]$

$+ v_2 w_2 \cancel{[\hat{e}_2, \hat{e}_2]}$

$\mathrm{ch}(F) \neq 2,$

$v_1 w_2 = v_2 w_1$

$v_1 w_2 = v_2 w_1$

$\cancel{[\vec{w}, \vec{v}] = [}$

$= v_1 w_2 [\hat{e}_1, \hat{e}_2] + v_2 w_1 [\hat{e}_2, \hat{e}_1]$

$[\vec{w}, \vec{v}] = w_1 v_2 [\hat{e}_1, \hat{e}_2] + w_2 v_1 [\hat{e}_2, \hat{e}_1]$

$[\vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{v}]$

$\Leftrightarrow v_1 w_2 [\hat{e}_1, \hat{e}_2] + v_2 w_1 [\hat{e}_2, \hat{e}_1] = w_1 v_2 [\hat{e}_1, \hat{e}_2] + w_2 v_1 [\hat{e}_2, \hat{e}_1]$

$\Leftrightarrow (v_1 w_2 - w_1 v_2)[\hat{e}_1, \hat{e}_2] + (v_2 w_1 - w_2 v_1)[\hat{e}_2, \hat{e}_1] = 0$

$\Leftrightarrow (v_1 w_2 - w_1 v_2)[\hat{e}_1, \hat{e}_2] + (w_2 v_1 - v_2 w_1)[\hat{e}_1, \hat{e}_2] = 0$

$\Leftrightarrow 2(v_1 w_2 - v_2 w_1)[\hat{e}_1, \hat{e}_2] = 0$

$\Leftrightarrow 2(v_1 w_2 - v_2 w_1) c_{121} \hat{e}_1 + 2(v_1 w_2 - v_2 w_1) c_{122} \hat{e}_2 = 0$

8| (i) L subálgebra de Lie soluble de $gl(V)$ (V e.v $|$ $\mathbb{C}$)

Pd: todo elemento de $L' = [L, L]$ es un endomorfismo nilpotente de V.

$$L^{(r)} = [L^{(r-1)}, L^{(r-1)}]$$

$L^{(r)} = 0 \Rightarrow L^{(r-1)}$ abeliana $\left([x,y] = 0 \ \forall x, y \in L^{(r-1)} \right)$

$$L' = \langle [g,h] \,/\, g,h \in L \rangle$$

$$[g,h] = g \circ h - h \circ g$$

$$[g,h]^2 = (g \circ h - h \circ g)^2 = (g \circ h - h \circ g) \circ (g \circ h - h \circ g)$$

$$= (g \circ h) \circ (g \circ h) - (g \circ h) \circ (h \circ g) - (h \circ g) \circ (g \circ h) - (h \circ g) \circ (h \circ g)$$

$$= (g \circ h)^2 - (g \circ h^2 \circ g) - (h \circ g^2 \circ h) - (h \circ g)^2$$

——. Probar que un álgebra de cuaterniones $D = K \oplus iK \oplus jK \oplus ijK$, con $i^2 = a \in K$, $j^2 = b \in K$, es isomorfa a un álgebra de matrices $M_2(K)$ sii existen elementos $x, y \in K$ tales que $x^2 - ay^2 = b$.

dem. ($\Rightarrow$) Supongamos que $D \cong M_2(K)$. $M_2(K)$ es un álgebra central simple, pero no división (basta tomar $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$), luego, por la propiedad de la norma en el álgebra de cuaterniones, existe $d \in D$ tal que $d \neq 0$ y $N(d) = 0$. Esto quiere decir que

$$d = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij \quad ; \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in K \text{ (no todos nulos)}$$

$$\begin{aligned}
0 = N(d) = d\bar{d} &= (x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij)(x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 ij) \\
&= x_1^2 - \cancel{x_1x_2 i} - \cancel{x_1x_3 j} - \cancel{x_1x_4 ij} + \cancel{x_1x_2 i} - a x_2^2 - \cancel{x_2x_3 ij} - \cancel{a x_2x_4 j} \\
&\quad + \cancel{x_1x_3 j} + \cancel{x_2x_3 ij} - b x_3^2 + \cancel{b x_3x_4 i} + \cancel{x_1x_4 ij} + \cancel{a x_2x_4 j} - \cancel{b x_3x_4 i} + ab x_4^2 \\
&= x_1^2 - a x_2^2 - b x_3^2 + ab x_4^2
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad x_1^2 - a x_2^2 - b x_3^2 + ab x_4^2 = 0$$

1	8
2	10
3	3
4	10
5	10
6	—

$$x_1^2 - a x_2^2 = b x_3 - ab x_4 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 - a x_2^2 = b(x_3^2 - a x_4^2)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad b(x_3^2 - a x_4^2)^2 &= (x_3^2 - a x_4^2)(x_1^2 - a x_2^2) \\
&= x_1^2 x_3^2 - a x_2^2 x_3^2 - a x_1^2 x_4^2 + a^2 x_2^2 x_4^2 \\
&= -a(x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_4^2) + (x_1^2 x_3^2 + a^2 x_2^2 x_4^2) \\
&= -a(x_2x_3 - x_1x_4)^2 + \cancel{2a x_1x_2x_3x_4} + (x_1x_3 + a x_2x_4)^2 - \cancel{2a x_1x_2x_3x_4} \\
&= -a(x_2x_3 - x_1x_4)^2 + (x_1x_3 + a x_2x_4)^2
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad b(x_3^2 - a x_4^2)^2 = -a(x_2x_3 - x_1x_4)^2 + (x_1x_3 + a x_2x_4)^2$$

Si $x_3^2 - a x_4^2 \neq 0 \Rightarrow \quad b = -a\left(\dfrac{x_2x_3 - x_1x_4}{x_3^2 - a x_4^2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_1x_3 + a x_2x_4}{x_3^2 - a x_4^2}\right)^2$ ✓

$$\therefore \quad \left(\frac{x_1x_3 + a x_2x_4}{x_3^2 - a x_4^2}\right)^2 - a\left(\frac{x_2x_3 - x_1x_4}{x_3^2 - a x_4^2}\right)^2 = b$$

(Se cumple la condición $x^2 - ya^2 = b$)

Scanned with CamScanner

Si $x_3^2 - a x_4^2 = 0 \Rightarrow x_1^2 - a x_2^2 - b x_3^2 + ab x_4^2 = x_1^2 - a x_2^2 - b(x_3^2 - a x_4^2)$

$$= x_1^2 - a x_2^2$$

$$\therefore \; x_1^2 - a x_2^2 = 0$$

Por hipótesis, $d \neq 0 \Rightarrow x_1 \neq 0$; $x_2 \neq 0$ $\quad (x_1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0)$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 = a, \text{ pero } \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 = a = i^2 \Rightarrow \left(\frac{x_1}{x_2} - i\right)\left(\frac{x_1}{x_2} + i\right) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2 i)(x_1 + x_2 i) = 0$$

Como $N(x_1 + x_2 i) = (x_1 + x_2 i)(x_1 - x_2 i) = 0 \; \cancel{\Rightarrow} \; x_1 + x_2 i = 0$

$$\therefore \; x_1, x_2 = 0 \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$$

Luego el caso $x_3^2 - a x_4^2 = 0$ no puede darse.

$(\Leftarrow)$ Como D es K-álgebra central simple de dimensión 4, D es de división o es isomorfa a $M_2(K)$. Vamos a mostrar esto último, o sea, D no puede ser de división.

Recordando que $N(d) = x_1^2 - a x_2^2 - b x_3^2 + ab x_4^2$ y por la condición $x^2 - y^2 a = b$ para ciertos $x, y \in K$. Basta considerar:

$$d' = x + yi + j$$

Así, $N(d') = x^2 - ay^2 - b(1)^2 = 0$ y $d \neq 0$

$$\therefore \; D \text{ no puede ser de división}$$

$$\therefore \; D \cong M_2(K).$$

Si puede, tomar $i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, de modo que $i^2 = a = 1$

entonces $N(j + ij) = N(1+i)N(j) = 0$

Puede haber cuaterniones no nulos que norma 0, ese es todo el punto.

Pero si $N(x_1 + x_2 i) = 0$ a es un cuadrado y en ese caso $(x + y\sqrt{a})(x - y\sqrt{a}) = b$ es fácil de resolver.

Problema 2. Sean D_1, D_2 álgebras de división de cuaterniones sobre un cuerpo K.
Probar que si existe una extensión cuadrática L de K que se incrusta en D_1 y D_2 simultaneamente, entonces $D_1 \otimes_K D_2 \cong M_2(D_3)$ para algún álgebra de cuaterniones (de división o no) sobre K.

dem. Como D_1, D_2 son K-álgebras de división, son simples, y por lo visto en clases, $D_1 \otimes_K D_2$ es K-álgebra central simple (álgebras de cuaterniones son centrales)

y $$\dim_K(D_1 \otimes D_2) = (\dim_K D_1)(\dim_K D_2) = 4 \cdot 4 = 16$$

$D_1 \otimes D_2$ puede ser un álgebra de división o no. Primero descartaremos el primer caso, o sea, $D_1 \otimes_K D_2$ es K-álgebra central simple, pero no de división.

En efecto, $L \overset{i_1}{\hookrightarrow} D_1$, $L \overset{i_2}{\hookrightarrow} D_2$ $\Rightarrow$ $\exists\, \varphi : L \times L \longrightarrow D_1 \otimes D_2$,
$$(a,b) \longmapsto i_1(a) \otimes i_2(b)$$

por la propiedad universal del producto tensorial, $\exists!\, \tilde{\varphi} : L \otimes L \to D_1 \otimes D_2$ tal que $\tilde{\varphi}(a \otimes b) = \varphi(a,b)$. Como $i_1(L), i_2(L)$ son copias isomorfas de L en D_1 y D_2 respectivamente, D_1 y D_2 se convierten en L-espacios vectoriales

$$\begin{aligned} a \cdot d_1 &= i_1(a) d_1, \quad d_1 \in D_1 \\ a \cdot d_2 &= i_2(a) \cdot d_2, \quad d_2 \in D_2 \end{aligned} \quad , a \in L$$

Si $\{1, \alpha\}$ es una base de L/K (cuadrática), $\{1, i_1(\alpha)\}$, $\{1, i_2(\alpha)\}$ son bases de $i_1(L), i_2(L)$ como K-ev's. Se sigue que $\{1 \otimes 1, 1 \otimes i_2(\alpha), i_1(\alpha) \otimes 1, i_1(\alpha) \otimes i_2(\alpha)\}$ es base de $i_1(L) \otimes i_2(L)$. Como $\tilde{\varphi}$ manda la base de $L \otimes L$ en la base de $i_1(L) \otimes i_2(L)$, se tiene que $\tilde{\varphi}$ es una incrustación de $L \otimes L$ en $D_1 \otimes D_2$. En particular, podemos suponer que $L \otimes L \subseteq D_1 \otimes D_2$.

Para ver que $L \otimes L$ tiene divisores de cero,

$$L \otimes_K L \cong L \otimes K[x]/(p(x)) \quad , \ p(x) \text{ polinomio en } K[x] \text{ de grado } 2$$
$$\cong L[x]/(p(x)) = L[x]/((x-a)(x-b)) \quad , \ a, b \in L,\ p(a), p(b) = 0$$

$x-a$, $x-b$ son no nulos en $L[x]/((x-a)(x-b))$, pero $(x-a)(x-b) = 0$ módulo el ideal $((x-a)(x-b))$, luego son divisores de cero. ✓

$\therefore$ $D_1 \otimes D_2$ tiene divisores de cero

$\therefore$ $D_1 \otimes D_2$ no es un anillo de división.

Como $D_1 \otimes D_2$ es central simple, $D_1 \otimes D_2 \cong \mathbb{M}_n(D_3)$, donde D_3 es un álgebra división sobre K. Como $D_1 \otimes D_2$ tiene dimensión 16, las únicas posibilidades son

$$D_1 \otimes D_2 = \begin{cases} \mathbb{M}_2(D_3), & \text{donde } \dim_K D_3 = 4 \\ \mathbb{M}_4(K) \end{cases}$$

obs. Notar que $\mathbb{M}_2(D_3) \cong \mathbb{M}_2(K^4) \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{M}_2(K)) = \mathbb{M}_4(K)$.

Si $D_1 \otimes D_2 \cong \mathbb{M}_2(D_3) \Rightarrow K = Z(D_1 \otimes D_2) = Z(\mathbb{M}_2(D_3)) = Z(D_3)\, 1_{\mathbb{M}_2(D_3)}$

pero $K \cong K\, 1_{\mathbb{M}_2(D_3)}$ $\quad \therefore \quad K = Z(D_3)$

Como D_3 ya es un álgebra central simple de dimensión 4, debe ser un álgebra de cuaterniones.

Si $D_1 \otimes D_1 \cong \mathbb{M}_4(K) \Rightarrow D_1 \otimes D_2 \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{M}_2(K))$, donde $\mathbb{M}_2(K)$ es ya central simple de dimensión 4, luego debe ser también un álgebra de cuaterniones. En cualquiera de los casos se cumple lo pedido. Esto concluye la demostración.

✓

Problema 7. Sea $K=\mathbb{Q}(x,y)$ el cuerpo de funciones racionales en dos variables. Probar que un álgebra de cuaterniones $D=K\oplus iK\oplus jK\oplus ijK$, con $i^2=x\in K$, $j^2=y\in K$ es un álgebra de división.

Dem. Para $d=p_1+p_2i+p_3j+p_4ij$; $p_1,p_2,p_3,p_4\in K$ ($p_i=p_i(x,y)$, $i=1,2,3,4$), calculamos su norma:

$$N(d)=d\bar{d}=(p_1+p_2i+p_3j+p_4ij)(p_1-p_2i-p_3j-p_4ij)=p_1^2-xp_2^2-yp_3^2+xyp_4^2$$

Recordemos que D álgebra de división ssi se cumple

$$N(d)=0 \iff d=0$$
$$(d\in D^* \text{ ssi } N(d)\neq 0)$$

Supongamos que $N(d)=0$. $N(d)=0 \iff p_1^2-xp_2^2-yp_3^2+xyp_4^2=0$.
Como podemos racionalizar (en el peor de los casos), podemos asumir sin pérdida de generalidad, que $p_i\in\mathbb{Q}[x,y]$ $(i=1,2,3,4)$.

$$p_1^2-xp_2^2-yp_3^2+xyp_4^2=0 \implies xp_1^2-x^2p_2^2-xyp_3^2+x^2yp_4^2=0$$

Si $\exists\, p_i\neq 0 \implies x$ raíz de un polinomio $\sigma(T)\in\mathbb{Q}[y][T]$ ó $\mathbb{Q}[T]$
(podría darse el caso de que $p_1\neq 0$, $p_2=p_3=p_4=0$, $p_1\in\mathbb{Q}$)

$\therefore$ x algebraico sobre $\mathbb{Q}[y]$ ó $\mathbb{Q}$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

$\therefore$ $p_i=0$ $\forall i=1,2,3,4$

Se tiene así que $N(d)=0 \implies d=0$. Con ello, $N(d)=0\iff d=0$. Se tiene entonces que todo elemento $d\in K\setminus\{0\}$ cumple con $N(d)\neq 0$, y $d^{-1}=\bar{d}/N(d)$

$\therefore$ d es invertible en D

Se concluye que D es un álgebra de división.

Aquí hay un razonamiento circular, ¿cómo sabemos que $\sigma\neq 0$?
Si $i^2=x^2$, $j^2=y^2$ no se obtiene un álgebra de división, pero este razonamiento no parece cambiar...

Scanned with CamScanner

Problema 4 Encuentre todas las representaciones irreducibles del álgebra

$$A = \mathbb{C}[\, i, j \mid i^2 = j^3 = 1 \,,\; iji = j^2 \,]$$

dem. Para $n \in \mathbb{N}$, el grupo Diedral D_n es

$$D_n = \langle r, s \mid r^n = s^2 = 1 \,,\; srs = r^{n-1} \rangle$$

En este caso, $A = \mathbb{C}[D_3]$. Por lo visto en clase, $\dim_{\mathbb{C}} A = |D_3| = 6$.

También, para ver las representaciones de A, $\varphi : A \to M_n(\mathbb{C})$, basta estudiar las representaciones de grupos $\Psi : D_3 \to M_n(\mathbb{C})^*$ y luego se extiende por $\mathbb{C}$-linealidad. Recordemos el resultado visto en clases:

representaciones irreducibles de D_3 = # clases de conjugación de D_3

Como $D_3 = S_3 = \langle (12), (123) \rangle$ y S_3 tiene 3 clases de conjugación, a saber, $[id]$, $[(12)]$, $[(123)]$, entonces hay 3 representaciones irreducibles de D_3, o de manera equivalente, hay 3 representaciones irreducibles de A.

Si $n_i :=$ dimensión de la representación irreducible φ_i $(i = 1, 2, 3)$, se tiene

$$|D_3| = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \qquad (\text{porque } \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \text{ y } A \text{ semi-simple})$$

Primero buscamos (si es que existen) representaciones irreducibles de D_3 de dimensión 1.

Hecho Por resultado de teoría de grupos, un homomorfismo de grupos $\varphi : G \to H$, donde H es abeliano, se factoriza de manera única mediante el abelianizado G_{ab}, es decir:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H \\ G_{ab} \arrow[ur, dotted, "\hat{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

p es la proyección canónica $g \mapsto g[G,G]$. $\hat{\varphi}$ es el único homomorfismo que cumple $\hat{\varphi} \circ p = \varphi$. Así

$$\{ \varphi : G \to H \text{ homomorfismo} \} \xleftrightarrow{\text{biyección}} \{ \hat{\varphi} : G_{ab} \to H \text{ homomorfismo} \}$$

Para el caso de representaciones de dimensión 1,

$$\varphi : G \to M_1(\mathbb{C})^* = \mathbb{C}^* \,,\quad \hat{\varphi} : G_{ab} \to M_1(\mathbb{C})^* = \mathbb{C}^* \qquad (\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

Scanned with CamScanner

El resultado anterior es importante, porque cuando G es abeliano, las representaciones irreducibles de $\mathbb{C}[G]$ son de dimensión 1, porque

$$\mathbb{C}[G] \cong \prod_{i=1}^{n} \mathbb{C} \qquad , \; n = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G] = |G|$$

Luego

$\#$ representaciones irreducibles de dimensión 1 de D_3

$= \#$ representaciones irreducibles de $(D_3)_{ab} = |(D_3)_{ab}|$

Af. $|(D_3)_{ab}| = 2$

dem. $D_3 = \langle r, s \,/\, r^3 = s^2 = e \,,\; srs = r^2 \rangle$, $(D_3)_{ab} = D_3 / [D_3, D_3]$

$[D_3, D_3] = \langle [g,h] \,/\, g, h \in D_3 \rangle$

$$\left| \begin{array}{ll} [r,e] = e & [r^2,e] = e \\ [r,s] = r^2 & [r^2,s] = e \\ [s,e] = e & [r,r] = e \\ [s,r] = r & [r^2,r^2] = e \\ [s,r^2] = r & [s,s] = e \end{array} \right| \quad , \; [g,h]^{-1} = [h,g] \;\; \forall g, h \in D_3$$

$\therefore [D_3, D_3] = \langle r \rangle$

Como $|D_3| = 6$, $|\langle r \rangle| = 3$, por teorema de Lagrange, $|(D_3)_{ab}| = 2$

Como $|(D_3)_{ab}| = 2$, hay dos representaciones irreducibles de dimensión 1 para D_3. Es facil ver que

$$\begin{array}{lll} \varphi_1 : D_3 \longrightarrow \mathbb{C}^* & , & \varphi_2 : D_3 \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \quad r \longmapsto 1 & & \quad r \longmapsto 1 \\ \quad s \longmapsto 1 & & \quad s \longmapsto -1 \end{array}$$

se extienden a homomorfismos de grupos, y en particular, se extienden a homomorfismos de $\mathbb{C}$-álgebras $\mathbb{C}[D_3] \longrightarrow M_1(\mathbb{C})$.

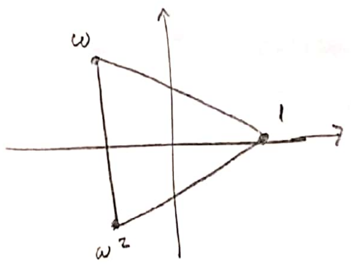
De la igualdad $|D_3| = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ donde $n_1 = n_2 = 1$, $|D_3| = 6$

$n_3^2 = 4$

$\therefore n_3 = 2$

Falta encontrar la representación irreducible de dimensión 2.

Como D_3 actúa transitivamente sobre los vértices de un triángulo equilátero, podemos considerar



donde $\omega = e^{2\pi i/3}$ raíz 3-primitiva de la unidad. $(\omega^3 = 1,\ 1+\omega+\omega^2=0)$

Sea $\varphi_3 : D_3 \longrightarrow M_2(\mathbb{C})^*$ por

$$\varphi_3(e) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3(r^i) = \begin{pmatrix} \omega^i & \\ & \omega^{2i} \end{pmatrix} \quad , i=0,1,2$$

$$\varphi_3(s) = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3(r^i s) = \begin{pmatrix} \omega^i & \\ & \omega^{2i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \omega^i \\ \omega^{2i} & \end{pmatrix}$$

φ_3 es un homomorfismo de grupos, en particular se extiende, por $\mathbb{C}$-linealidad, a un homomorfismo de álgebras $\mathbb{C}[D_3] \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$

Como $\varphi_3(e) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi(r) = \begin{pmatrix} \omega & \\ & \omega^2 \end{pmatrix}$, $\varphi_3(s) = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$,

$\varphi_3(rs) = \begin{pmatrix} & \omega \\ \omega^2 & \end{pmatrix}$ y estas matrices son $\mathbb{C}$-linealmente independientes (en particular, forman base de $M_2(\mathbb{C})$)

$\Rightarrow$ por $\mathbb{C}$-linealidad, $\varphi_3(\mathbb{C}[D_3]) = M_2(\mathbb{C})$. Como el módulo asociado a φ_3 es $\mathbb{C}^2$ y $\mathbb{C}^2$ es $M_2(\mathbb{C})$-módulo irreducible, $\mathbb{C}^2$ es $\mathbb{C}[D_3]$-módulo irreducible

$\therefore$ φ_3 es representación irreducible.

Se concluye así que $\mathbb{C}[D_3]$ tiene 3 representaciones complejas irreducibles, 2 de dimensión 1 y 1 de dimensión 2

$\square$

Problema 5. Probar que para cada elemento g de un grupo finito G, y cada caracter complejo χ, $\chi(g)$ es un entero algebraico.

dem. Sea $\chi_\varphi : G \to \mathbb{C}$ el caracter complejo asociado a la representación compleja $\varphi : G \to GL_n(\mathbb{C})$. Como $\forall g \in G$, $\varphi(g) \in GL_n(\mathbb{C})$ y $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, $\varphi(g)$ es similar a una matriz de Jordan (mediande cambio de base)

$$\exists B \in GL_n(\mathbb{C}) : \quad B\varphi(g)B^{-1} = J.$$

donde

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 \ddots \lambda_1 & * & & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots \lambda_2 & * & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \lambda_\ell \ddots \lambda_\ell & * \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} \lambda_i & * \\ 0 & \ddots \; \lambda_i \end{pmatrix} \text{ bloque de Jordan} \right)$$

Por propiedad de la traza, $tr(\varphi(g)) = tr(B^{-1}JB) = tr(J)$, luego

$$\chi_\varphi(g) = n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \dots + n_\ell\lambda_\ell, \qquad n_i \in \mathbb{N} \quad \forall i = 1, \dots, \ell$$

Por otro lado, si $ord(g) = m \Rightarrow g^m = e$

$$\Rightarrow \chi_\varphi(g^m) = \chi_\varphi(e) = tr(id) = n$$

y

$$\chi_\varphi(g^m) = tr(\varphi(g^m)) = tr(\varphi(g)^m)$$
$$= tr(B^{-1}J^mB) = tr(J^m) =$$

$$\underbrace{B\varphi(g)^mB^{-1}}_{\varphi(g)^m = Id} = (B\varphi(g)B^{-1})^m = J^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m \ddots \lambda_1^m & * & & \\ & \ddots & * & \\ & & \lambda_\ell^m \ddots \lambda_\ell^m & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \forall i, \quad \lambda_i^m = 1$, ($\lambda_i$ es una raiz m-ésima de la unidad)

Como $\chi_\varphi(g) = n_1\lambda_1 + \dots + n_\ell\lambda_\ell$ y {enteros algebraicos de $\mathbb{C}$} forman un anillo, se concluye que $\chi_\varphi(g)$ es un entero algebraico $\forall g \in G$. $\square$

Scanned with CamScanner

Problema 6. Encuentra la tabla de caracteres del grupo no abeliano de orden 21.

desarrollo Sin hacer...