Pr. 5 $\vec{F}(x,y,z) = xyz\,\hat{\imath} + xy\,\hat{\jmath} + x^2yz\,\hat{k}$, S es el cubo de vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ sin la tapa inferior, orientado hacia afuera.

Demostración. Vértices tapa inferior: $(\pm 1, \pm 1, -1)$

S es suave a trozos.

Teorema de Stokes: $\displaystyle\iint_S rot(\vec{F})\cdot d\vec{S} = \iint_{S'} rot(\vec{F})\cdot d\vec{S}$

$S' = \{(x,y,z) \mid -1 \le x \le -1,\ -1 \le y \le 1,\ z = 1\}$

Parametrización de S': $\vec{r}(x,y) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + \hat{k}$, $(x,y) \in [-1,1]\times[-1,1]$

$\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \hat{\imath}$, $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \hat{\jmath}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}$

$$rot(\vec{F}) = \det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xyz & xy & x^2yz \end{pmatrix} = x^2y\,\hat{\imath} + (xy - 2xyz)\,\hat{\jmath} + (y - xz)\,\hat{k}$$

$$\iint_{S'} rot(\vec{F})\cdot d\vec{S} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (y - x)\,dx\,dy =$$

Pr. 6. Calcular $\displaystyle\iint_S rot(\vec{F})\cdot d\vec{S}$, para $\vec{F} = e^{xy}\cos z\,\hat{\imath} + x^2z\,\hat{\jmath} + xy\,\hat{k}$

S el hemisferio $x = (1 - y^2 - z^2)^{1/2}$ orientado en dirección positiva c/r eje x

Desarrollo. Por teorema de Stokes: $\displaystyle\iint_S rot(\vec{F})\cdot dS = \iint_{S'} rot(\vec{F})\cdot dS$

donde $S' = \{(x,y,z) \mid x = 0,\ y^2 + z^2 \le 1\}$

Parametrización. $\vec{r}(r,\theta) = r\cos\theta\,\hat{\jmath} + r\,\text{sen}\,\theta\,\hat{k}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0,1]$

RHEIN®

Scanned with CamScanner

FECHA : / /

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos\theta\,\hat{j} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{k}, \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta\,\hat{j} + r\cos\theta\,\hat{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r\cos^2\theta\,\hat{\imath} + r\operatorname{sen}^2\theta\,\hat{\imath} = r\hat{\imath}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ e^{xy}\cos z & x^2 z & xy \end{pmatrix} = \hat{\imath}\left(x - x^2\right) - \hat{j}\left(y + e^{xy}\operatorname{sen} z\right) + \hat{k}\left(2xz - xe^{xy}\cos z\right)$$

$$= (x-x^2)\,\hat{\imath} + \left(-y - e^{xy}\operatorname{sen} z\right)\hat{j} + \left(2xz - xe^{xy}\cos z\right)\hat{k}$$

$$\iint_{S'} \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-r\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}(r\operatorname{sen}\theta)\right)\hat{j}\cdot r\hat{\imath}\,dr\,d\theta = 0$$

Pr. 11.(a). Calcular $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F} = x^2 z\,\hat{\imath} + xy^2\,\hat{j} + z^2\,\hat{k}$. C curva intersección del plano $x+y+z=1$, $x^2+y^2=9$ orientado antihorario

Desarrollo. Coordenadas cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z\in\mathbb{R}$

$$z = 1 - x - y = 1 - r\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta$$

Parametrización: $\vec{r}(r,\theta) = r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\operatorname{sen}\theta\,\hat{j} + (1 - r\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta)\,\hat{k}$

Teorema Stokes: $\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j} + (-\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\,\hat{k}, \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} + r\cos\theta\,\hat{j} + (r\operatorname{sen}\theta - r\cos\theta)\,\hat{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r\cos^2\theta\,\hat{k} - \cos\theta(r\operatorname{sen}\theta - r\cos\theta)\,\hat{j} + r\operatorname{sen}^2\theta\,\hat{k} + \operatorname{sen}\theta(r\operatorname{sen}\theta - r\cos\theta)\,\hat{\imath}$$
$$+ r\operatorname{sen}\theta(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\,\hat{j} + r\cos\theta(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\,\hat{\imath}$$
$$= r\hat{k} + r\hat{j} + r\hat{\imath} = r(\hat{\imath} + \hat{j} + \hat{k})$$

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2 z & xy^2 & z^2 \end{pmatrix} = x^2\hat{j} + y^2\hat{k}$$

Scanned with CamScanner

FECHA: / /

$$\iint_S \text{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (0, -r^2\cos^2\theta, r^2\text{sen}^2\theta)\cdot(r,r,r)\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (r^3\text{sen}^2\theta - r^3\cos^2\theta)\,dr\,d\theta$$

Pr. 12. (a) Evaluar $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F} = x^2y\,\hat{\imath} + \frac{1}{3}x^3\hat{\jmath} + xy\hat{k}$, C intersección del paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ y el cilindro $x^2+y^2=1$, orientado antihorario.

Desarrollo.

RHEIN®

Scanned with CamScanner

FECHA: / /

16.9 Teorema de la divergencia

Recordatorio. 2º forma del Teorema de Green, $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_D \operatorname{div}\vec{F}(x,y)\,dA$

Teorema de la divergencia. E sólido simple con superficie borde S, con orientación positiva (hacia afuera). $\vec{F} = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath} + R\hat{k}$ con $P, Q, R \in C^1$ en una región abierta que contiene a E. Entonces:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div}(\vec{F})\,dV$$

Ejemplo. Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = z\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + x\hat{k}$ sobre la esfera unitaria $x^2+y^2+z^2=1$.

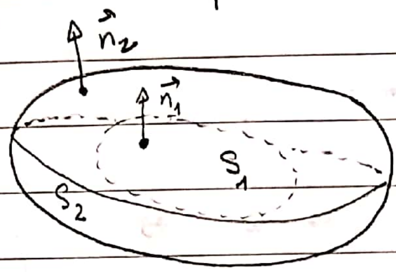
Desarrollo. $\operatorname{div}(\vec{F}) = 1$, $B = \{x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} \underset{\text{T. Divergencia}}{=} \iiint_B \operatorname{div}(\vec{F})\,dV = \iiint_B dV = V(B) = \frac{4}{3}\pi(1)^2 = \frac{4}{3}\pi$$

RHEIN®

Scanned with CamScanner

Observación. Podemos extender el teorema de la divergencia a un sólido limitado por las superficies S_1, S_2.



E : sólido

$\partial E = S_1 \cup S_2$

$$(*) \quad \iiint_E \operatorname{div}(\vec{F})\,dV = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$

$$= \iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}_2\,dS - \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}_1\,dS$$

Ejemplo. Aplicación a la física. Campo eléctrico.

Campo eléctrico $\vec{E}(\vec{x}) = \dfrac{\varepsilon Q}{|\vec{x}|^3}\vec{x}$, $S_1 = B(\vec{0}, a)$.

Sabemos que $\operatorname{div}(\vec{E}(\vec{x})) = 0$. Por igualdad $(*)$

$$\iint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iiint_E \operatorname{div}(\vec{E})\,dV = \iint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS$$

Para S_1, $\vec{n} = \dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$, $\vec{E}\cdot\vec{n} = \left(\dfrac{\varepsilon Q}{|\vec{x}|^3}\vec{x}\right)\cdot\left(\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right) = \dfrac{\varepsilon Q}{|\vec{x}|^2} = \dfrac{\varepsilon Q}{a^2}$

Luego, $\displaystyle\iint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\varepsilon Q}{a^2}(4\pi a^2) = 4\pi\varepsilon Q$

Por lo tanto, $\displaystyle\iint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi\varepsilon Q$

RHEIN®

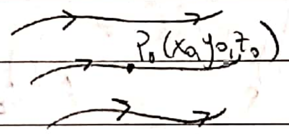
Scanned with CamScanner

Ejemplo. Aplicación a la física. Interpretación de la divergencia.

$\vec{v} = \vec{v}(x,y,z)$ campo de velocidades de un fluido.

ρ densidad del fluido (constante)

$\vec{F} = \rho\vec{v}$ Tasa de fluido por unidad de área.



$B_a = B(P_0, a)$, $a \ll 1$

$\operatorname{div}(\vec{F})$ continua $\Rightarrow$ $\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) \approx \operatorname{div}\vec{F}(x_0,y_0,z_0)$ $\forall (x,y,z) \in B_a$

Luego: $$\iint_{\partial B_a} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_{B_a} \operatorname{div}(\vec{F})\, dV \approx \iiint_{B_a} \operatorname{div}\vec{F}(P_0)\, dV = \operatorname{div}(\vec{F}(P_0))V(B_a)$$

Tomando $a \to 0$: $$\operatorname{div}\vec{F}(P_0) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{V(B_a)} \iint_{\partial B_a} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

Para $\operatorname{div}\vec{F}(P) > 0 \Rightarrow P$ fuente

Para $\operatorname{div}\vec{F}(P) < 0 \Rightarrow P$ sumidero

Scanned with CamScanner

16.9 Ejercicios.

Pr. 14. Calcular $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$, para $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$

S es el hemisferio norte $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ y el disco $x^2+y^2 \leq 1$, $z=0$

Desarrollo. Teorema de la divergencia $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div}(\vec{F})dV$

$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3$, luego, $\iiint_E \operatorname{div}(\vec{F})dV = 3\iiint_E dV = 3\,\frac{4}{3}\pi\,\frac{1}{2} = 2\pi$

Pr. 24. Use el teorema de la divergencia para calcular $\iint_S (2x+2y+z^2)dS$ donde S es la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

Desarrollo. $2x+2y+z^2 = (2,2,z)\bullet(x,y,z) = \left(2\sqrt{x^2+y^2+z^2}, 2\sqrt{x^2+y^2+z^2}, z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$
$\bullet \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\Rightarrow \iint_S (2x+2y+z^2)\,dS = \iint_S \left(2\sqrt{x^2+y^2+z^2}, 2\sqrt{x^2+y^2+z^2}, z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\bullet d\vec{S}$

Cálculo de $\operatorname{div}(\vec{F})$:

$\partial_x\left(2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = 2x(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$, $\partial_x\left(2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = 2y(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

$\partial_z\left(z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} + z\,\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}(2z) = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} + z^2(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

$\operatorname{div}(\vec{F}) = (2x+2y+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} + (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$
$= (x^2+y^2+2z^2+2x+2y)(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

Scanned with CamScanner

Coordenadas esféricas:

$$x = r \operatorname{sen}\phi \cos\theta$$
$$y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$$
$$z = r \cos\phi$$

$$\iiint_E \operatorname{div}(\vec{F})\, dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1} \left(r^2 + r^2\cos^2\phi + 2r \operatorname{sen}\phi \cos\theta + 2r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\right) r \left(r^2 \operatorname{sen}\phi\right) dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1} \left(r^3 + r^3\cos^2\phi + 2r^2 \operatorname{sen}\phi \cos\theta + 2r^2 \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\right) \operatorname{sen}\phi\, dr\, d\theta\, d\phi$$

Cap 10. Funciones ortogonales y series de Fourier

Referencias: D. Zill, M. Cullen. Ecuaciones Diferenciales (Matemáticas avanzadas para ingeniería).

Funciones Ortogonales.

Observación. Producto interno $\langle\, , \,\rangle : V \times V \longrightarrow K$

(i) Bilineal

(ii) Simétrico

(iii) Definido positivo.

Definición. $(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x)\,dx$ define un producto interno en $C^0[a,b]$

Definición. f, g ortogonales si $(f,g) = 0$ en $[a,b]$

Ejemplo. $\{1, \cos(x), \cos(2x), \cos(3x), \cdots\}$ es un conjunto ortogonal en $[-\pi,\pi]$.

$\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$ ortogonal en $[a,b]$ ssi $\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)\,dx = 0 \quad \forall n \neq m$.

Observación. Recordar la identidad $\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right)$

Para $\phi_i(x) = \cos(ix)$, $\|\phi_i(x)\| = \begin{cases} \sqrt{2\pi}, & i = 1 \\ \sqrt{\pi}, & i > 1 \end{cases}$. Luego tenemos

$\left\{1, \frac{\cos(x)}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right\}$ conjunto ortonormalizado.

RHEIN®

Scanned with CamScanner

FECHA : / /

Expansión en series ortogonales.

Supongamos que $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n$, entonces $(f, \phi_m) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\phi_m, \phi_n)$ $= c_m \|\phi_m\|^2$. Luego, $c_m = \dfrac{(f, \phi_m)}{\|\phi_m\|^2}$. Por lo tanto se tiene que

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2} \phi_n$$

$f = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2} \phi_n$ es el desarrollo en series de Fourier de f en $[a,b]$

Producto interno con peso (caso general). Podemos definir $(f,g) = \int_a^b w(x) f(x) g(x)\, dx$, con $w > 0$ en $[a,b]$. También $(\,,\,)$ define un producto interno.

Existe el desarrollo de Fourier $f = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2} \phi_n$, donde $(f, \phi_n) = \int_a^b w f \phi_n$
(Desarrollo de Fourier generalizado o con peso w)

Observación. Puede darse el caso de que $f \perp \phi_n$ $\forall n$. Requisito para evitarlo es que $\{\phi_n\}$ sea completo, i.e, $g \perp \phi_n$ $\forall n \Rightarrow g = 0$.

Ejemplo. $\{\cos(nx)\}$ conjunto ortogonal con peso $w = 1$.

RHEIN®

Scanned with CamScanner

10.1. Ejercicios.

P.3. $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = xe^{-x} - e^{-x}$,

$$(f_1, f_2) = \int_0^2 f_1(x) f_2(x)\,dx = \int_0^2 (x-1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_0^2 = 2-2 = 0 \quad \therefore f_1, f_2$$

ortogonales en $[0,2]$.

P.5 Demostrar que $\{\operatorname{sen}(x), \operatorname{sen}(3x), \operatorname{sen}(5x), \dots\}$ es ortogonal en $[0, \pi/2]$

Demostración. $\phi_n(x) = \operatorname{sen}((2n-1)x)$. Para $n \neq m$

$$(\phi_n, \phi_m) = \int_0^{\pi/2} \phi_n(x)\phi_m(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}((2n-1)x)\operatorname{sen}((2m-1)x)\,dx$$

Identidad trigonométrica: $\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v) = \frac{1}{2}\left[\cos(u-v) - \cos(u+v)\right]$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}((2n-1)x)\operatorname{sen}((2m-1)x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[\cos(2(n-m)x) - \cos(2(n+m-1)x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(2(n-m)x)}{2(n-m)} - \frac{\operatorname{sen}(2(n+m-1)x)}{2(n+m)}\right]_0^{\pi/2} = 0$$

$\therefore \{\phi_n\}$ es ortogonal.

P.12. Demostrar que $\left\{1, \cos\left(\frac{n\pi}{p}\right)x, \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{p}\right)x\right\}_{m,n=1}^{\infty}$ es ortogonal en $[-p, p]$.

Demostración. $\phi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{p}\right)x$, $\psi_m(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{p}\right)x$

$$(1, \phi_n) = \int_{-p}^{p} \phi_n(x)\,dx = \int_{-p}^{p} \cos\left(\frac{n\pi}{p}\right)x\,dx = \frac{p}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p}\right)x\Big|_{-p}^{p} = 0$$

$$(1, \psi_m) = \int_{-p}^{p} \psi_m(x)\,dx = \int_{-p}^{p} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{p}\right)x\,dx = -\frac{p}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi}{p}\right)x\Big|_{-p}^{p} = 0$$

RHEIN

Scanned with CamScanner

FECHA: / /

$$n \neq m: \quad (\phi_n, \phi_m) = \int_{-p}^{p} \cos\left(\frac{n\pi}{p}\right)x \cos\left(\frac{m\pi}{p}\right)x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-p}^{p}\left[\cos\left((n+m)\frac{\pi}{p}x\right) + \cos\left((n-m)\frac{\pi}{p}x\right)\right]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{p}{(n+m)\pi}\operatorname{sen}\left((n+m)\frac{\pi}{p}x\right) + \frac{p}{(n-m)\pi}\operatorname{sen}\left((n-m)\frac{\pi}{p}x\right)\right]_{-p}^{p}$$

$= 0$. Es decir $\{\phi_n\}$ es ortogonal.

$$(\psi_n, \psi_m) = \int_{-p}^{p} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p}\right)x \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{p}\right)x\, dx = \frac{1}{2}\int_{-p}^{p}\left[\cos\left(\frac{(n-m)\pi}{p}x\right) - \cos\left(\frac{(n+m)}{p}\pi x\right)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{p}{(n-m)\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{(n-m)\pi}{p}x\right) - \frac{p}{(n+m)\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{(n+m)}{p}\pi x\right)\right]_{-p}^{p} = 0$$

Es decir, $\{\psi_n\}$ es ortogonal.

$$(\phi_n, \psi_m) = \int_{-p}^{p} \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{p}x\right)dx \,,$$

Identidad trigonométrica: $\operatorname{sen}(u)\cos(v) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)\right]$

$$\int_{-p}^{p} \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{p}x\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-p}^{p}\left[\operatorname{sen}\left((n+m)\frac{\pi}{p}x\right) + \operatorname{sen}\left((m-n)\frac{\pi}{p}x\right)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{p}{(n+m)\pi}\cos\left((n+m)\frac{\pi}{p}x\right) - \frac{p}{(m-n)\pi}\cos\left((m-n)\frac{\pi}{p}x\right)\right]_{-p}^{p}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cancel{-\frac{p}{(n+m)\pi}\cos((n+m)\pi)} \cancel{- \frac{p}{(m-n)\pi}\cos((m-n)\pi)} \cancel{+ \frac{p}{(n+m)\pi}\cos((n+m)\pi)} \cancel{+ \frac{p}{(m-n)\pi}\cos((m-n)\pi)}\right] = 0$$

$\therefore \{1, \phi_n, \psi_m\}$ ortogonal.

Scanned with CamScanner

Pr. 15. $\{\phi_n\}$ ortogonal en $[a,b]$ tal que $\phi_0(x)=1$. Demostrar que $\int_a^b \phi_n(x)dx = 0$ para $n=1,2,\dots$

Demostración. Evidente.

Pr. 16. $\{\phi_n(x)\}$ ortogonal tq $\phi_0(x)=1$, $\phi_1(x)=x$.
Consideramos $\psi_{\alpha,\beta}(x) = \alpha x+\beta$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$$n\geq 2: \int_a^b \psi_{\alpha,\beta}(x)\phi_n(x)\,dx = \int_a^b (\alpha x+\beta)\phi_n(x)\,dx = \alpha\int_a^b x\,\phi_n(x)dx + \beta\int_a^b \phi_n(x)dx$$

$$= \alpha(\phi_1,\phi_n)+\beta(\phi_0,\phi_n) = \alpha\cdot 0+\beta\cdot 0 = 0$$

Por lo tanto, $(\psi_{\alpha,\beta},\phi_n)=0 \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \forall n\geq 2$.

P. 19. $\{\operatorname{sen}(nx)\}$, $n=1,2,3,\dots$ es ortogonal en $[-\pi,\pi]$ e incompleto

Demostración. Para $n\neq m$, $\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos((n-m)x)-\cos((n+m)x)\right]dx$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}((n-m)x)}{(n-m)}-\frac{\operatorname{sen}((n+m)x)}{(n+m)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\phi(x)=\cos(x) \ : A_n = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\operatorname{sen}((n+1)x)+\operatorname{sen}((n-1)x)\right]dx$$

Para $n=1$: $A_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+1}\cos((n+1)x)\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$

Para $n>1$: $A_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+1}\cos((n+1)x)-\frac{1}{(n-1)}\cos((n-1)x)\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$

$\therefore$ $\{\operatorname{sen}(nx)\}$ ortogonal incompleto.

RHEIN®

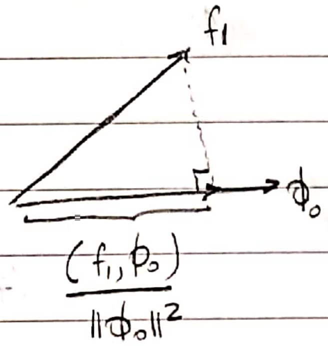
Scanned with CamScanner

Pr. 22. El proceso de Gramm - Schmidt.

$\{f_0, f_1, \dots\}$ funciones continuas en $[a,b]$

$\phi_0 = f_0$,

Definimos a $\phi_1 = f_1 - \frac{(f_1, \phi_0)}{\|\phi_0\|^2} \phi_0$



$$\phi_2 = f_2 - \frac{(f_2, \phi_0)}{\|\phi_0\|^2} \phi_0 - \frac{(f_2, \phi_1)}{\|\phi_1\|^2} \phi_1$$

En general, $\phi_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{i=0}^{n} \frac{(f_{n+1}, \phi_i)}{\|\phi_i\|^2} \phi_i$

— o —

- Recordatorio: Identidades trigonométricas importantes

$$\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v) = \frac{1}{2}\left[\cos(u-v) - \cos(u+v)\right]$$

$$\operatorname{sen}(u)\cos(v) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)\right]$$

$$\cos(u)\cos(v) = \frac{1}{2}\left[\cos(u+v) + \cos(u-v)\right]$$

Scanned with CamScanner

FECHA : / /

10.2 Series de Fourier

Tenemos el conjunto ortogonal $\left\{ 1, \cos\frac{n\pi}{p}x, \operatorname{sen}\frac{m\pi}{p}x \right\}_{n,m=1}^{\infty}$.

Objetivo: Para f definida en $(-p,p)$, buscamos la representación

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p}x\right)\right)$$

Aseguramos convergencia absoluta y uniforme en $(-p,p)$, luego podemos integrar:

$$\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = a_0 p + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \underbrace{\int_{-p}^{p}\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-p}^{p}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx}_{=0}\right)$$

Luego $a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx$.

Falta calcular a_n, b_n. Considerando ortogonalidad; para $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(f(x), \cos\frac{n\pi}{p}x\right) = \frac{a_0}{2}\cancelto{0}{\left(1, \cos\frac{n\pi}{p}\right)} + \sum_{m=0}^{\infty}\left(a_n\left(\cos\frac{n\pi}{p}x, \cos\frac{m\pi}{p}x\right) + b_n\cancelto{0}{\left(\cos\frac{n\pi}{p}x, \operatorname{sen}\frac{m\pi}{p}x\right)}\right)$$

$$= a_n\left(\cos\frac{n\pi}{p}x, \cos\frac{n\pi}{p}x\right) = a_n p$$

$$\therefore\ a_n = \frac{1}{p}\left(f(x), \cos\frac{n\pi}{p}x\right) = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx$$

Analogamente: $b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx$.

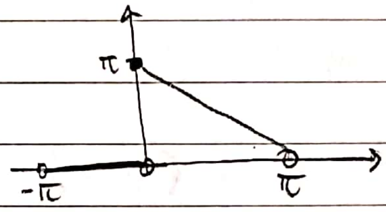
RHEIN

Scanned with CamScanner

Ejemplo. Desarrollo en serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Desarrollo. Grafica de f



Ocupando los resultados anteriores; $a_0 = \frac{\pi}{2}$, $a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}$, $b_n = \frac{1}{n}$.

Por lo tanto, $f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos(nx) + \frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)\right)$

Teorema 10.1. f función continua en $(-p,p)$ salvo un número finito de puntos y con discontinuidades finitas. $\tilde{f}_n$ serie de fourier de f.

(i) f continua en $x_0 \Rightarrow \tilde{f}_n(x_0) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$.

(ii) f discontinua en $x_0 \Rightarrow \tilde{f}_n(x_0) \longrightarrow \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$

donde $f(x_0+) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $f(x_0-) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

Ejemplo. $\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos(nx) + \frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{2}$ en $x=0$

Scanned with CamScanner

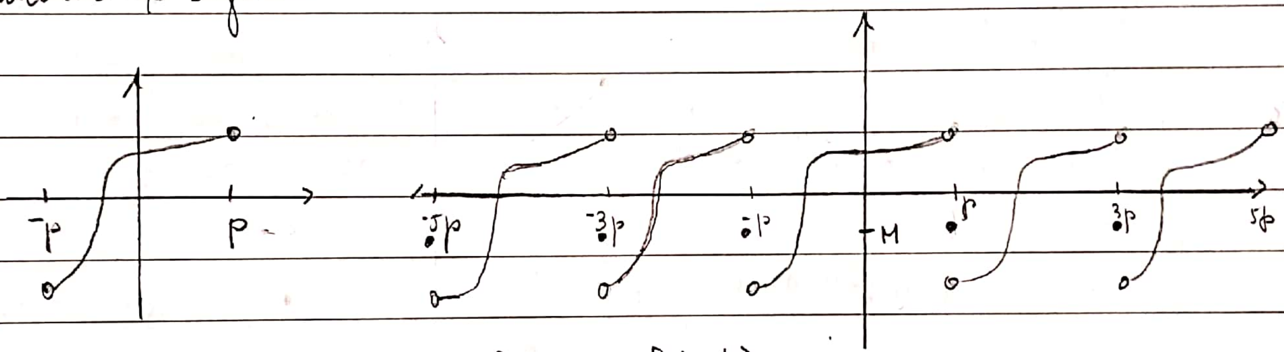
Extensión periódica.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p}x\right)\right) \quad , \quad x \in [-p, p]$$

$\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)$, $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p}x\right)$ periódicas de periodo $\frac{2p}{n}$. En particular, la suma es de periodo $2p$.

Por lo tanto, podemos asumir que f es periódica, de periodo $2p$.

Tenemos lo siguiente:



Teorema 10.1 : $M = \dfrac{f(p-) + f(-p+)}{2}$

Importante ocupar el teorema en los puntos donde hay discontinuidad

RHEIN®

Scanned with CamScanner

FECHA: / /

10.3. Series de Fourier de senos y cosenos.

Objetivo. Estudiar serie de fourier de f cuando f es par o impar.

Recordatorio (Teorema 10.2).

(i) par · par = par

(ii) impar · impar = par.

(iii) impar · par = impar

(iv) par ± par = par

(v) impar ± impar = impar

(vi) f par : $\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f$

(vii) f impar : $\int_{-a}^{a} f \, d = 0$.

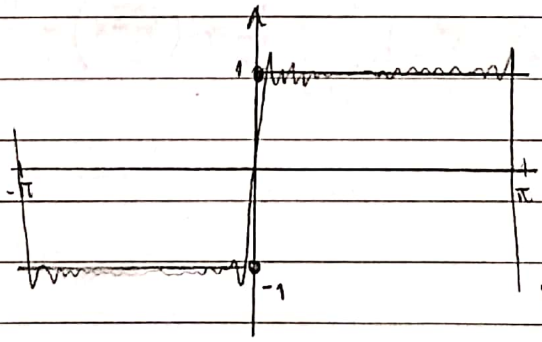
Luego tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{p} x\right), & f \text{ par} \\ \cancel{\frac{a_0}{2} +} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p} x\right), & f \text{ impar.} \end{cases}$$

en el intervalo $(-p, p)$.

Ejemplo. Para $x \in (-2, 2)$, $f(x) = x$ se puede representar por
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} x\right).$$

Ejemplo. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ función impar, luego $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \operatorname{sen}(nx)$



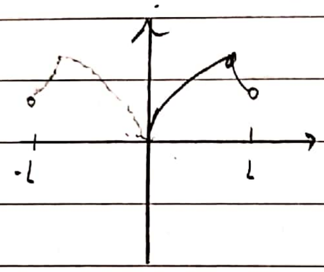
Presenta el fenómeno de Gibbs (Averiguar).

$S_{15}(x)$: 15° suma parcial

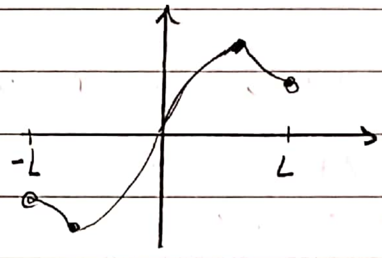
Scanned with CamScanner

Desarrollo en semiintervalos.

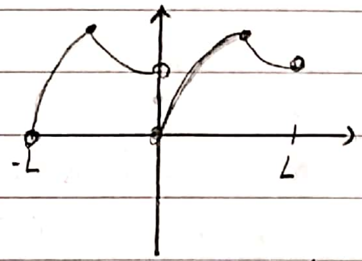
Nos permite el desarrollo de Fourier en intervalos del tipo $(0, L)$.
La idea es desarrollar mediante reflexiones



Reflexión par
periodo $2L$



Reflexión impar
periodo $2L$



Reflexión identidad
periodo L

Ref. par $\longrightarrow$ desarrollo en cosenos
Ref. impar $\longrightarrow$ desarrollo en senos
Ref. identidad $\longrightarrow$ desarrollo de Fourier

Ejemplo. $f(x) = x^2, \quad 0 < x < L$.

(a) Desarrollo en cosenos: $$f(x) = \frac{L^3}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

(b) Desarrollo en senos: $$f(x) = \frac{2L^2}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right)$$

(c) Desarrollo de Fourier: $$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{L^2}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi} \cos\left(\frac{2n\pi}{L} x\right) - \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{L} x\right) \right).$$

Scanned with CamScanner

Fuerza impulsora periódica.

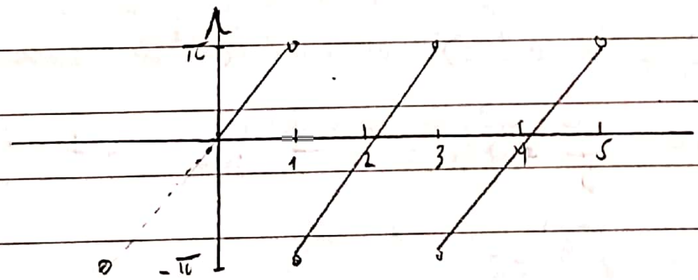
Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=f(t)$$

La ecuación describe el fenómeno físico de oscilación forzada. La función f se representa en un desarrollo en senos en un semi-intervalo y suponiendo solución particular de la forma:

$$x_p(t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{p}t\right)$$

Ejemplo. Sistema masa-resorte no amortiguado,
$m=1/16$, $k=4$, $f(t)$ fuerza externa de periodo 2



f se puede extender a una función impar.
Desarrollo en semi-intervalo para $f(t)=\pi t$, $0<t<1$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,\text{sen}(n\pi t)$$

donde $b_n=\dfrac{2(-1)^{n+1}}{n}$

FECHA : / /

la ecuación diferencial queda de la forma

$$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2}+4x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(n\pi t)$$

reemplazando la solución particular $x_p(t)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(n\pi t)=\frac{1}{16}\left(-\sum_{n=1}^{\infty}n^2\pi^2B_n\operatorname{sen}(n\pi t)\right)+4\sum_{n=1}^{\infty}B_n\operatorname{sen}(n\pi t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(4-\frac{1}{16}n^2\pi^2\right)B_n\operatorname{sen}(n\pi t)$$

Luego, $B_n\left(4-\frac{1}{16}n^2\pi^2\right)=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$, i.e, $B_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\left(4-\frac{1}{16}n^2\pi^2\right)}$

$$x_p(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{32(-1)^{n+1}}{n(64-n^2\pi^2)}\operatorname{sen}(n\pi t)$$

Recordemos que $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ frecuencia libre del sistema

Ec. diferencial $m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=f(t)$ es un estado de resonancia pura si existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{N\pi}{p}=\omega$.

En el problema, $\omega=\sqrt{4^3}=2^3$

Observación. Si f se extiende de manera par, hacemos el desarrollo en serie de cosenos.

RHEIN®

Scanned with CamScanner

FECHA : / /

10.3. Ejercicios.

Pr. 16. $f(x) = x|x|$, $-1 < x < 1$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ -x^2, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

f función impar: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x)$

donde $b_n = \int_{-1}^{1} f(x) \operatorname{sen}(n\pi x)dx = 2\int_{0}^{1} f(x) \operatorname{sen}(n\pi x)dx$

Calculo primitiva: $\int x^2 \operatorname{sen}(n\pi x)dx = -\frac{1}{n\pi} x^2 \cos(n\pi x) + \int \frac{2}{n\pi} x \cos(n\pi x)dx$

$= -\frac{1}{n\pi} x^2 \cos(n\pi x) + \frac{2}{n^2\pi^2} x \operatorname{sen}(n\pi x) - \int \frac{2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(n\pi x)dx$

$= -\frac{1}{n\pi} x^2 \cos(n\pi x) + \frac{2}{n^2\pi^2} x \operatorname{sen}(n\pi x) + \frac{2}{n^3\pi^3} \cos(n\pi x) + C$

$\Rightarrow \int_0^1 x^2 \operatorname{sen}(n\pi x)dx = -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) + \cancel{\frac{2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(n\pi)} + \frac{2}{n^3\pi^3} \cos(n\pi)$

$- \frac{2}{n^3\pi^3} \cos(n\pi \cdot 0) = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2(-1)^n}{n^3\pi^3} - \frac{2}{n^3\pi^3}$

$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$

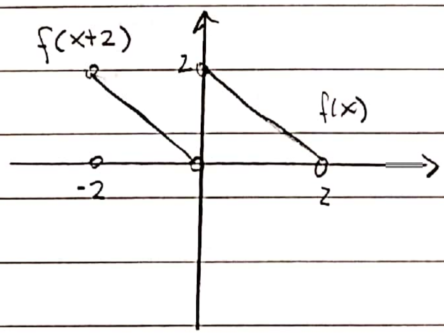
Luego, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2(-1)^n}{n^3\pi^3} - \frac{2}{n^3\pi^3}\right) \operatorname{sen}(n\pi x)$

RHEIN®

Scanned with CamScanner

P.38 Encontrar el desarrollo de Fourier de la función $f(x) = 2-x$, $0<x<2$

Desarrollo.



$$f(x+2) = 2-(x+2) = -x$$

$$g(x) = \begin{cases} -x, & -2<x<0 \\ 2-x, & 0<x<2 \end{cases}$$

Serie de Fourier buscada es $g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} g(x)\,dx + \int_{0}^{2} g(x)\,dx\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[0+2+(4-2)-(0-0)\Big] = \frac{1}{2}\Big[4\Big] = 2$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}(-x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \int_{0}^{2}(2-x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\int_{-2}^{0} x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + 2\int_{0}^{2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx - \int_{0}^{2} x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right]$$

$$\int x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{2}{n\pi}x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \int\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{2x}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + C$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{0} x\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = \frac{4}{n^2\pi^2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\cos(n\pi) = \frac{4}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$\int_{0}^{2} x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{4}{n^2\pi^2}\cos(n\pi) - \frac{4}{n^2\pi^2} = \frac{4}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$\int_{0}^{2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_{0}^{2} = 0$$

$$\therefore\ a_n = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) + \frac{4}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)\right] = 0$$

RHEIN®

Scanned with CamScanner

FECHA : / /

Por otro lado,

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}(-x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \int_{0}^{2}(2-x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\int_{-2}^{0} x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + 2\int_{0}^{2}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx - \int_{0}^{2} x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right]$$

$$\int x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = -\frac{2}{n\pi}x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \int \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

Luego : $\displaystyle\int_{-2}^{0} x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = -\frac{4}{n\pi}\cos(n\pi) = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}$

$$\int_{0}^{2} x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{-4}{n\pi}\cos(n\pi) = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier buscada es : $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$

RHEIN

Scanned with CamScanner

Series complejas de Fourier.

Mediante la fórmula de De-Moivre, se tiene

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left[e^{ix} + e^{-ix}\right] \quad , \quad \operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2i}\left[e^{ix} - e^{-ix}\right]$$

Reemplazando en la serie de Fourier, nos queda:

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\pi x/p} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\pi x/p} ,$$

donde $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$. los números c_n, c_{-n} son complejos conjugados, luego se tiene:

$$c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x) e^{-in\pi x/p} dx \quad , \quad c_{-n} = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x) e^{in\pi x/p} dx$$

Por lo tanto, $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\pi x/p} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\pi x/p} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\pi x/p}$,

donde, $c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x) e^{-in\pi x/p} dx$.

Observación. La integral $\int^{b} e^{in\pi x/p} dx$ se puede calcular de la manera usual, en particular se puede usar el teorema fundamental del cálculo.

Ejemplo. La serie de Fourier compleja de $f(x) = e^{-x}$, $-\pi < x < \pi$ es

$$\frac{\operatorname{senh} \pi}{\pi} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \left(\frac{1 - in}{n^2 + 1} \right) e^{inx}$$

- Frecuencia fundamental: las series de Fourier extienden la extensión periódica de la función f, de periodo $T = 2p$. Si $p = T/2$, entonces las series quedan de la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega x) \right), \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-in\omega x}$$

donde $\omega = \frac{2\pi}{T}$. T es el periodo fundamental, ω es la frecuencia angular fundamental.

- Espectro de frecuencia: Para $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-in\omega x}$, el conjunto $\{(n\omega, |c_n|)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es el espectro de frecuencia de f. El espectro de frecuencia tiene aplicación en ingeniería eléctrica (averiguar).

RHEIN®

Scanned with CamScanner

11. Problemas de valores en la frontera en coordenadas rectangulares.

Ecuación diferencial parcial lineal, de segundo orden:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G \qquad (1)$$

$A=A(x,y),\dots,G=G(x,y)$.

Observación. Cuando $G=0$, (1) se llama homogenea.

Observación. En aplicaciones físicas, no es muy útil encontrar soluciones generales de la ecuación (1). Luego, por el momento, sólo basta encontrar algunas soluciones particulares.

En (1), asumimos soluciones de la forma $u(x,y)=X(x)Y(y)$, en el caso de que se pueda (contraejemplo: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=x$)

Teorema 11.1 (Principio de superposición). Cuando (1) es homogenea, soporte combinaciones lineales:

$$\{u_i\}_{i=1}^{k} \text{ soluciones } \Rightarrow u=\sum_{i=1}^{k} c_i u_i \text{ solución}$$

Observación. Teorema 11.1 puede extenderse a conjuntos infinitos $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

Observación. Para (1) con coeficientes constantes, dado $\Delta=B^2-4AC$, se puede clasificar en:

hiperbólica : $\Delta>0$

parabólica : $\Delta=0$

elíptica : $\Delta<0$

RHEIN®

Scanned with CamScanner

FECHA : / /

Observación. Soluciones de ecuaciones lineales:

$$y' + \alpha y = 0 \rightsquigarrow y = c_1 e^{-\alpha x}$$

$(\alpha>0)$ $$y'' + \alpha^2 y = 0 \rightsquigarrow y = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \operatorname{sen}(\alpha x)$$

$(\alpha>0)$ $$y'' - \alpha^2 y = 0 \rightsquigarrow \begin{cases} y = c_1 e^{-\alpha x} + c_2 e^{\alpha x} \quad \text{ó} \\ y = c_1 \cosh(\alpha x) + c_2 \operatorname{senh}(\alpha x) \end{cases}$$ (intervalo)

11.1 Ejercicios.

P.28. $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$ tiene solución $u = (c_1\cos(\alpha\theta) + c_2 \operatorname{sen}(\alpha\theta))(c_3 r^{\alpha} + c_4 r^{-\alpha})$

Desarrollo. Supongamos $u(r,\theta) = \varphi(r)\psi(\theta)$

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \psi(\theta)\varphi''(r) + \frac{\psi(\theta)}{r}\varphi'(r) + \frac{\varphi(r)}{r^2}\psi''(\theta)$$

$$\Leftrightarrow -\psi(\theta)\left(\varphi''(r) + \frac{1}{r}\varphi'(r)\right) = \frac{\varphi(r)}{r^2}\psi''(\theta) \Leftrightarrow \frac{r}{\varphi(r)}\left(r\varphi''(r) + \varphi'(r)\right) = -\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)} = -\lambda$$

$\Rightarrow$ Sistema de ecuaciones $$\begin{cases} r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) + \lambda\varphi(r) = 0 \\ \psi''(\theta) - \lambda\psi(\theta) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) + \lambda\varphi(r) = 0$ es una ecuación de Cauchy-Euler, cuando $\lambda = -\alpha^2$ $(\alpha \geq 0)$, con soluciones generales $(r>0)$ (ver cap 10.5)

$$\begin{cases} \varphi(r) = c_1 r^{-\alpha} + c_2 x^{\alpha}, & \alpha \neq 0 \\ \varphi(r) = c_1 + c_2 \ln(r), & \alpha = 0 \end{cases}$$

$\psi''(\theta) - \lambda\psi(\theta) = 0$ es una ecuación lineal de segundo orden.

$\lambda = -\alpha^2$: $\psi''(\theta) - \lambda\psi(\theta) = \psi''(\theta) + \alpha^2\psi(\theta) = 0$ (oscilador armónico simple)

$$\psi(\theta) = c_1\cos(\alpha\theta) + c_2 \operatorname{sen}(\alpha\theta)$$, para $\alpha>0$

RHEIN®

Scanned with CamScanner

Para estudiar (*):

$\lambda = 0$: $\left\{ \begin{array}{l} \cancel{r^2 \varphi''(r) + r\varphi'(r) = 0} \\ \cancel{\psi''(\theta) = 0} \end{array} \right.$

$\psi(\theta) = c_1 + c_2\theta$, $\varphi(r) = c_3 + c_4 \ln(r)$ $(r>0)$

$\therefore$ $u(r,\theta) = (c_1 + c_2\theta)(c_3 + c_4 \ln(r)) = c_1c_3 + c_1c_4 \ln r + c_2c_3\theta + c_2c_4\theta \ln r$

$= d_1 + d_2 \ln r + d_3\theta + d_4(\ln r)\theta$.

Comprobación: $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -\frac{d_2}{r^2} - \frac{d_4\theta}{r^2}$, $\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r^2} + \frac{d_4\theta}{r^2}$, $\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$

Ahora para $\lambda = -\alpha^2$: $\varphi(r) = c_1 r^{-\alpha} + c_2 r^{\alpha}$

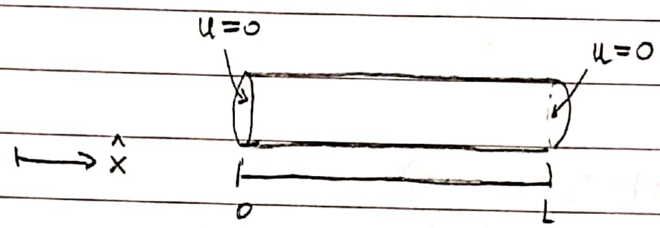
$\psi(\theta) = c_3 \cos(\alpha\theta) + c_4 \operatorname{sen}(\alpha\theta)$

$\therefore$ $u(r,\theta) = (c_1 r^{-\alpha} + c_2 r^{\alpha})(c_3 \cos(\alpha\theta) + c_4 \operatorname{sen}(\alpha\theta))$

Scanned with CamScanner

FECHA: / /

11.3. La ecuación del calor.



Varilla de largo L.

La función $u(x,t)$ establece la temperatura de la varilla en el punto x (a lo largo) y en el instante t.

$u(0,t) = u(L,t) = 0$ dice que en los extremos de la varilla, su temperatura es constante igual a 0.

$u(x,0) = f(x)$ temperatura inicial de la varilla en el punto x

Problema de valores en la frontera (PVF):

$$\begin{cases} k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, & 0<x<L,\ t>0 \\ u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0, & t>0 \\ u(x,0)=f(x), & 0<x<L \end{cases}$$

$k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ es la ecuación del calor que modela la temperatura $u(x,t)$ de la varilla.

Método de desarrollo. $u(x,t) = X(x)T(t)$, se tiene

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + k\lambda T = 0 \end{cases}$$

RHEIN

Scanned with CamScanner

$u(0,t) = u(L,t) = 0 \Rightarrow X(0) = X(L) = 0$

Soluciones de $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$:

$\lambda = 0$, $\quad X(x) = c_1 + c_2 x$

$\lambda = -\alpha^2$, $\quad X(x) = c_1 \cosh(\alpha x) + c_2 \operatorname{senh}(\alpha x)$

$\lambda = \alpha^2$, $\quad X(x) = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \operatorname{sen}(\alpha x)$

Obtenemos la solución :

(1) Trivial $u = 0$

(2) $X(0) = 0 \Rightarrow X(x) = c_2 \operatorname{sen}(\alpha x)$

$X(L) = 0 \Rightarrow X(L) = c_2 \operatorname{sen}(\alpha L) = 0$

$c_2 = 0 \Rightarrow u = 0$

$c_2 \neq 0 \Rightarrow \alpha L = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \alpha_n = \frac{n\pi}{L}$

SPG : podemos asumir $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\therefore \lambda_n = \alpha_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

$$\therefore X_n(x) = c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Solución general de $T' + k\lambda_n T = 0$ es $T_n(t) = c_3 e^{-\left(k \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t}$

Solución general : $u_n(x,t) = X_n T_n = A_n e^{-k\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\right)x$

Como $u_n(x,0) = f(x) \Rightarrow f(x) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

Pero primero debemos aplicar principio de superposición; así:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

donde $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

RHEIN®

Scanned with CamScanner

Como f tiene expresión de medio intervalo $(0,L)$ en extensión impar:

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

11.3. Ejercicios.

P.1. Resolver la ecuación del calor para una varilla de largo L sujeta a las condiciones siguientes:

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<L/2 \\ 0, & L/2<x<L \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t>0$$

Desarrollo. Por análisis anterior, $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$,

donde $A_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$.

$$\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \int_0^{L/2} \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = -\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\Big|_0^{L/2}$$

$$= -\frac{L}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1\right) = \frac{L}{n\pi}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n\equiv 1 \pmod 2 \\ -1, & n=2,6,10,14,\ldots \quad n=2(2m+1) \quad n\equiv 2 \pmod 4 \\ 1 & n=4,8,12,16 \quad n=2\cdot 2m, \quad n\equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\therefore\ A_n = \frac{2}{n\pi}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

$$\therefore\ u(x,t) = \sum_{n\equiv 2(4)} \frac{2}{n\pi} e^{-k\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sum_{n\equiv 1(2)} \frac{2}{n\pi} e^{-k\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Scanned with CamScanner

11.4 La ecuación de onda.

La ecuación de onda para una cuerda de largo L empotrada en sus extremos

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} , \quad 0 < x < L , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 , \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) , \quad 0 < x < L$$

Solución del PVF: Buscando soluciones del tipo $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$a^2 T(t) X''(x) = X(x) T''(t) =-\lambda$$

$$\Rightarrow a^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(x)}{T(t)} = -\lambda , \quad \text{donde } \lambda \in \mathbb{R} \text{ es una constante}$$

preguntale

Hacer el caso

$$\begin{cases} X''(x) + \frac{\lambda}{a^2} X(x) = \\ T''(t) + \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T''(x) + a^2 \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

$u(0,t) = X(0) T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$. Análogamente, $X(L) = 0$

Primero resolvemos el PVI: $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = X(L) = 0$

$\lambda = 0$: $X(x) = a_1 + a_2 x$, $X(0) = a_1 = 0$, $X(L) = a_2 L = 0 \Rightarrow a_1, a_2 = 0$

$\lambda = -\alpha^2$: $X(x) = a_1 e^{-\alpha x} + a_2 e^{\alpha x}$

$X(0) = a_1 + a_2 = 0$, $X(L) = a_1 e^{-\alpha L} + a_2 e^{\alpha L} = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 e^{2\alpha L} = 0$

$\therefore e^{2\alpha L} = 1 \quad (\Rightarrow\Leftarrow)$

$\lambda = \alpha^2$: $X(x) = a_1 \cos(\alpha x) + a_2 \operatorname{sen}(\alpha x)$

RHEIN®

Scanned with CamScanner

$X(0) = a_1 \cos(\alpha 0) = a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = a_2 \operatorname{sen}(\alpha x)$

$X(L) = a_2 \operatorname{sen}(\alpha L) = 0$

$a_2 = 0$. nos lleva nuevamente a $u(x,t) = 0$

$a_2 \neq 0, \quad \alpha L = n\pi \quad \therefore \alpha_n = \frac{n\pi}{L} \quad (n \in \mathbb{N})$ (SPG)

Luego tenemos $X_n(x) = d_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$

Ahora solucionamos $T'' + a^2 \lambda T = 0$

Como $\lambda_n = \alpha_n^2$: $T_n = e_n \cos\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) + f_n \operatorname{sen}\left(a \frac{n\pi}{L} t\right)$

Luego, $u_n(x,t) = d_n e_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) + d_n f_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \operatorname{sen}\left(a \frac{n\pi}{L} t\right)$ (*)

Por p. superposición : $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \operatorname{sen}\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) \right)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{an\pi}{L} t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L} t\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

donde $f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$

Por otro lado, $g(x) = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}$

$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n a \frac{n\pi}{L} \operatorname{sen}\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) + B_n a \frac{n\pi}{L} \cos\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$

$g(x) = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n a \frac{n\pi}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \frac{a\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$

RHEIN®

Scanned with CamScanner

Ahora ocupemos info de serie de Fourier sobre f, g:

f tiene desarrollo de medio intervalo impar:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

$\frac{L}{a\pi} g$ tiene desarrollo de medio intervalo impar:

$$B_n = \frac{2}{a\pi n} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

Observación. Cuando la cuerda empieza a oscilar desde el reposo, $g(x) = 0$ $\forall x \in (0, L)$. Luego $B_n = 0$ $\forall n$. Es decir:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Para $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$, $u_n(x,t)$ definida en (*) se llaman ondas estacionarias o modos normales.

$$u_n(x,t) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \operatorname{sen}\left(a \frac{n\pi}{L} t\right)$$

Tenemos $A_n^2 \cos^2\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) + B_n^2 \operatorname{sen}^2\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) = A_n^2 + B_n^2 = C_n^2$.

Para $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, se tiene

$$A_n \cos\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) = C_n \left(\frac{A_n}{C_n} \cos\left(a \cdot \frac{n\pi}{L} t\right) + \frac{B_n}{C_n} \operatorname{sen}\left(a \frac{n\pi}{L} t\right)\right),$$

podemos definir $\operatorname{sen} \phi_n = \frac{A_n}{C_n}$, $\cos \phi_n = \frac{B_n}{C_n}$

RHEIN®

Scanned with CamScanner

Por lo tanto, $u_n(x,t) = C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L} t + \phi_n\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$

· Interpretación del modo normal $u_n(x,t)$:

Para $u_n(x,t)$, cada $x \in (0,L)$ puede ser visto como una partícula tal que vibra con respecto a

$$C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L} t + \phi_n\right)$$

con amplitud $\left|C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\right|$ y frecuencia $f_n = \dfrac{\frac{n\pi a}{L}}{2\pi} = \dfrac{na}{2L}$.

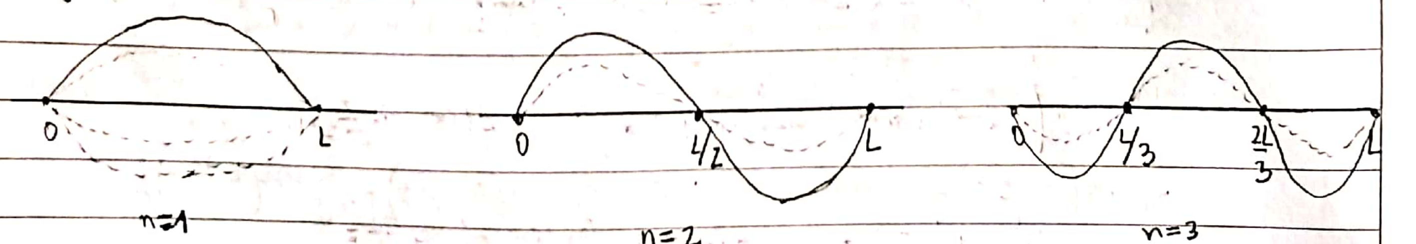
Conclusión. En la onda estacionaria $u_n(x,t)$, cada partícula oscila con distinta amplitud, pero misma frecuencia.

- $u_1(x,t) = C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi a}{L} + \phi_1\right)$ es el primer modo normal
- $f_1 = \dfrac{a}{2L} = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ es el primer armónico (o frecuencia fundamental)

$f_1 \longleftrightarrow$ tono generado al pulsar una cuerda

- f_n, $n \geq 2$ se llaman n-esimo armónico o $(n-1)$-sobretono
- x_n tal que $u_n(x_n,t) = 0$ se llaman nodos

Ejemplo.



Scanned with CamScanner

11.4 Ejercicios.

P1. Resuelva la ecuación de onda sujeta a las condiciones de frontera

$u(0,t)=0=u(L,t)$, $u(x,0)=\frac{1}{4}x(L-x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$

Desarrollo. $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$, $u_n(x,t)=C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n a}{L}t+\phi_n\right)$

$f(x)=u(x,0)=\frac{1}{4}x(L-x)$, $g(x)=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$, $C_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}$

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=\frac{2}{L}\int_0^L \frac{1}{4}x(L-x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=\frac{1}{2L}\int_0^L x(L-x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$\int x(L-x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=L\int x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx-\int x^2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$\int x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=-x\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+\frac{L}{n\pi}\int\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=-\frac{xL}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+\frac{L^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+D$$

$$\int_0^L x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=-\frac{L^2}{n\pi}\cos(n\pi)$$

$$\int x^2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=-x^2\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+\frac{2L}{n\pi}\int x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$=-\frac{x^2L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+\frac{2L}{n\pi}\left[\frac{xL}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)-\frac{L}{n\pi}\int\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right]$$

$$=-\frac{x^2L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+\frac{2L}{n\pi}\left[\frac{xL}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]+D$$

Luego: $$\int_0^L x^2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=-\frac{L^3}{n\pi}\cos(n\pi)+\frac{2L^3}{n^3\pi^3}\cos(n\pi)-\frac{2L^3}{n^3\pi^3}$$

$$\therefore A_n=\frac{1}{2L}\left(-\frac{L^3}{n\pi}\cos(n\pi)+\frac{L^2}{n\pi}\cos(n\pi)-\frac{2L^3}{n^3\pi^3}\cos(n\pi)+\frac{2L^3}{n^3\pi^3}\right)$$

$$=-\frac{L^3}{2n\pi}\cos(n\pi)+\frac{L}{2n\pi}\cos(n\pi)-\frac{L^2}{n^3\pi^3}\cos(n\pi)+\frac{L^2}{n^3\pi^3}$$

$$=\left(\frac{-L^3n^2\pi^2+Ln^2\pi^2-2L^2}{2n^3\pi^3}\right)\cos(n\pi)+\frac{L^2}{n^3\pi^3}$$

RHEIN®

Scanned with CamScanner

FECHA: / /

Por otro lado, $B_n = 0$.

$$\operatorname{sen}\phi_n = \frac{A_n}{C_n} \Rightarrow \phi_n = \arcsin\left(\frac{A_n}{C_n}\right), \pi - \arcsin\left(\frac{A_n}{C_n}\right)$$

Como $\frac{A_n}{C_n} = \frac{A_n}{|A_n|} = \pm 1 \Rightarrow \phi_n = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi + \frac{\pi}{2}, \pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

Pero $\operatorname{sen}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha)$, $\operatorname{sen}(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\alpha)$

Finalmente: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}at + \frac{\pi}{2}\right)$. $\square$

Pr. 7 Resuelva la ecuación de onda sujeta a las condiciones

$u(0,t) = u(L,t) = 0$,
$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{2hx}{L}, & 0 < x < \frac{L}{2} \\ 2h\left(1 - \frac{x}{L}\right), & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Desarrollo. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$, $u_n(x,t) = C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}at + \phi_n\right)$

$C_n = \sqrt{A_n + B_n}$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{2}{L}\left[\int_0^{L/2} \frac{2hx}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx + \int_{L/2}^{L} 2h\left(1 - \frac{x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right]$$

$$\int_0^{L/2} \frac{2hx}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{2h}{L}\left[-x\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{L}{n\pi}\int \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right]$$

$$= \frac{2h}{L}\left[-x\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]\Bigg|_0^{L/2}$$

RHEIN®

$$= -\frac{2hL}{n\pi}\cos(n\pi)$$

Scanned with CamScanner

FECHA : / /

$$\int_{L/2}^{L} 2h\left(1-\frac{x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = -\frac{2hL}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\Big|_{L/2}^{L} - \frac{2h}{L}\int_{L/2}^{L} x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$= -\frac{2hL}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{2hL}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2h}{L}\int_{L/2}^{L} x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$= \frac{2hL}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\cos(n\pi)\right) - \frac{2h}{L}\left(-x\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\Big|_{L/2}^{L} + \frac{L}{n\pi}\int_{L/2}^{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right)$$

$$= \frac{2hL}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\cos(n\pi)\right) - \frac{2h}{L}\left(-\frac{L^2}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{L^2}{2n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\Big|_{L/2}^{L}\right)$$

$$= \frac{2hL}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\cos(n\pi)\right) - \frac{2h}{L}\left(-\frac{L^2}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{L^2}{2n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{L^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{hL}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2hL}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\therefore\ A_n = -\frac{4h}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{2h}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4h}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Sea $D_n = \sqrt{\frac{4h^2}{n^2\pi^2} + \frac{16h^2}{n^4\pi^4}} = \frac{4|h|}{n\pi}\sqrt{1+\frac{4}{n^2\pi^2}}$, podemos asumir

$$\cos\psi_n = \frac{4h}{n^2\pi^2}\cdot\frac{1}{D_n}, \quad \operatorname{sen}\psi_n = \frac{2h}{n\pi}\cdot\frac{1}{D_n}$$

$$\Rightarrow \quad A_n = -\frac{4h}{n\pi}\cos(n\pi) + D_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}+\psi_n\right)$$

Como $B_n = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\phi_n = \frac{A_n}{|A_n|} = \pm 1$. Podemos asumir $\phi_n = \frac{\pi}{2}$.

$$\therefore\ u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left|D_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}+\psi_n\right) - \frac{4h}{n\pi}\cos(n\pi)\right|\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}at+\frac{\pi}{2}\right)$$

donde $D_n = \frac{4|h|}{n\pi}\sqrt{1+\frac{4}{n^2\pi^2}}$. □

(Revisar).

RHEIN®

Scanned with CamScanner

9.11. En el PVF para $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) = 0 \quad \forall x \in (0,L)$ tiene solución del tipo $u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+at) + f(x-at)\right]$

Demostración. Tenemos que $u_n(x,t) = C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}at + \phi_n\right)$

Si $g(x) = 0 \Rightarrow B_n = 0 \Rightarrow C_n = |A_n|$.

En particular, $\phi_n = \frac{\pi}{2} \quad \forall n$.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}t + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x + \frac{n\pi a}{L}t\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x - \frac{n\pi a}{L}t\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}(x+at)\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}(x-at)\right)\right]$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}|A_n| \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}(x+at)\right) + \frac{1}{2}|A_n| \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}(x-at)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}(x+at)\right) + \sum_{n=1}^{\infty}|A_n| \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}(x-at)\right)\right)$$

Tomando $f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}u\right)$ (Desarrollo de Fourier impar)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+at) + f(x-at)\right)$$

En efecto: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(a f'(x+at) - a f'(x-at)\right)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\left(a^2 f''(x+at) - a^2 f''(x-at)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(f'(x+at) + f'(x-at)\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(f''(x+at) + f''(x-at)\right)$$

Se cumple $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\quad |A_n| = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$

RHEIN®

Scanned with CamScanner