Universidad de las Américas
Cálculo II, MAT 171
Mayo 22, 2019

Introducción a las ecuaciones diferenciales de variables separables.

Observación. Por el momento, nos interesa resolver ecuaciones diferenciales de primer orden (la derivada más alta que aparece es la primera)

Definición: Una ecuación de variables separables es una ecuación del tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Definición: Un problema de valores iniciales es un problema del tipo:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Ejemplo. Supongamos que queremos resolver el PVI:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 3x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La solución es una función del tipo $y = y(x)$.
Teorema fundamental del cálculo: $y(x) = \int_0^x 3t^2 dt + 1 = x^3 + 1$.
Segunda forma de desarrollo:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dy = 3x^2 dx \Rightarrow \int dy = \int 3x^2 dx$$
$$\Rightarrow y = x^3 + C \quad \text{(Solución general)}$$

$y(0) = 1 \Rightarrow y(0) = 0^3 + C = 1 \Rightarrow C = 1$
Solución particular es $y(x) = x^3 + 1$.

Algunas observaciones:

1. El argumento de g es y (una función)
2. El argumento de f es x (variable independiente)

Para resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ procedemos de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \quad / \quad g(y) \neq 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

Si $g(y)=0$, entonces $\frac{dy}{dx} = 0$. La solución es $y(x) = C$ (constante)

Ejemplo. $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-2)$

Desarrollo. En este caso $f(x) = x+1$, $g(y) = y-2$.

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-2) \Rightarrow \frac{dy}{y-2} = (x+1)dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y-2} = \int (x+1)dx$$

Lo último queda: $\ln|y-2| = \frac{x^2}{2} + x + C \quad / \cdot \exp(\ )$

$$|y-2| = \exp\left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)$$

$$= \exp(C)\exp\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$$

$$y - 2 = \underbrace{\pm \exp(C)}_{\text{sigue siendo constante}} \exp\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$$

$$y = D\exp\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + 2 \quad , \text{ donde } D \neq 0.$$

Supongamos ahora que $g(y)=0$ $(y=2)$:

La solución automáticamente es $y=2$.

Observación. De la solución general $y(x) = D\exp\left(\frac{x^2}{2}+x\right)+2$

$D=0$ implica $y(x)=2$.

Ejemplo. Supongamos que queremos resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = (x+1)(y-2) \\ y(0)=1 \end{cases}$$

Desarrollo. La condición inicial $y(0)=1$ implica $y\neq 2$.

Luego:

$$y(x) = D\exp\left(\frac{x^2}{2}+x\right)+2$$

$y(0)=1 \iff 1 = D\exp\left(\frac{0^2}{2}+0\right)+2 = D\cdot 1+2$

Por lo tanto: $D=-1$

Solución particular: $y(x) = -\exp\left(\frac{x^2}{2}+x\right)+2$

Aplicación : Crecimiento y decrecimiento poblacional.

$P = P(t)$: población en función del tiempo t

k : Constante de proporcionalidad

PVI :
$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = kP \\ P(t_0) = P_0 \end{cases}$$

Tiene por solución general $P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}$

Ejemplo. La población de una pequeña ciudad crece, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional a la cantidad de habitantes en dicho instante. Su población inicial es de 500 habitantes y aumenta 15% en 10 años ¿Cuál será la población dentro de 30 años?

Desarrollo.
$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = kP \\ P(0) = 500 \end{cases}$$

La solución general es $P(t) = 500\, e^{kt}$

El 15% de 500 es 75. Luego $P(10) = 575$.

$$P(10) = 500 \cdot e^{k \cdot 10} = 575 \Rightarrow e^{10k} = \frac{575}{500}$$

$$\Rightarrow k \approx 0.014$$

Reemplazando : $P(t) = 500\, e^{0.014t}$

Para $t = 30$: $P(30) \approx 761$ (Habitantes).