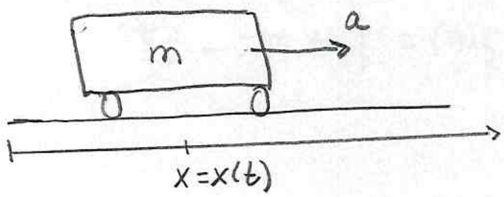
Universidad de las Américas
Cátedra: Aplicaciones de ecuaciones diferenciales
Noviembre 09, 2018

Aplicación 1: Movimiento uniformemente acelerado.



Carro de masa m.
Segunda ley de Newton dice que: $F = ma = m\,x''(t)$
Cancelando queda: $a = x''(t)$

Suponemos que a es constante. Integrando 2 veces queda

$$x(t) = C_2 + C_1 t + \frac{at^2}{2} \quad ; \quad C_1, C_2 \text{ constantes.}$$

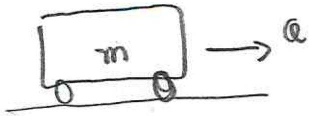
Para el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} a = x'' \\ x(0) = x_0 \rightarrow \text{posición inicial} \\ x'(0) = v_0 \rightarrow \text{velocidad inicial} \end{cases}$$

la expresión $x = x(t)$ queda $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

Ejemplo. Resolver el problema de valor inicial:

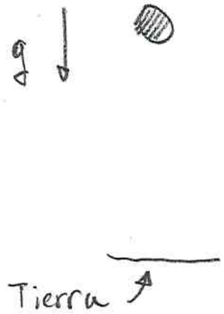
$$\begin{cases} x'' = 1 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$



$$x(t) = 1 + 0 \cdot t + \frac{t^2}{2} = 1 + \frac{t^2}{2}$$

Ejemplo. Caída libre.

Galileo: "Todos los cuerpos caen con la misma aceleración que es debido a la fuerza de gravedad".



En este caso: $a = -g$, donde $g = 9.8\ (m/s^2)$

$y = y(t)$: altura del cuerpo en función del tiempo t.

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{g t^2}{2}$$

Aplicación 2. ley de enfriamiento de Newton.

$T = T(t)$: temperatura de un cuerpo en función del tiempo

A: temperatura ambiente (constante)

$$\frac{dT}{dt} = k\,(A - T)$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

Ejemplo. Resolver el problema de la taza de café.

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k\,(A - T) \\ T(0) = 89\,^\circ C \\ A = 22\,^\circ C \\ T(1) = 85\,^\circ C \end{cases}$$

Aplicación 3. Crecimiento y decrecimiento poblacional.

$P = P(t)$: población en función del tiempo t

k : constante de proporcionalidad:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Si $\begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP \\ P(t_0) = P_0 \end{cases}$, entonces $P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}$

Ejemplo. La población de una pequeña ciudad crece, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional a la cantidad de habitantes en dicho instante. Su población inicial de 500 aumenta 15% en 10 años ¿Cuál será la población dentro de 30 años?

Desarrollo. $\begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP \\ P(0) = 500 \end{cases}$

Se tiene $P(t) = 500 e^{kt}$

El 15% de 500 es 75. Luego $P(10) = 575$

$$P(10) = 500 e^{k \cdot 10} = 575 \Rightarrow e^{10k} = \frac{575}{500} \Rightarrow k \approx 0.014$$

Reemplazando: $P(t) = 500 e^{0.014t}$

Para $t = 30$: $P(30) \approx 761$ (Habitantes).