Así, $\deg(f)$ es independiente de la elección del $p' \in S^1$.

B3) Identifique $\deg(f)$ cuando $S = S' = \mathbb{C}$, y cuando $S = S' = \overline{\mathbb{C}}$.

Desarrollo. En el primer caso, $S = S' = \mathbb{C}$, si f es propia, entonces necesariamente es un polinomio. Luego:

$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(0)} \deg_f(p)$$

donde $\# f^{-1}(0) = r =$ grado(f) (por teo. fundamental del álgebra). Si $f^{-1}(0) = \{p_1, \dots, p_k\}$ las raíces de f, con $n_1, \dots, n_k$ sus grados locales respectivos, se tiene que

$$n_j = \operatorname{ord}(f - f(p_j), p_j)$$

ya que

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \quad p_j \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id"'] & 0 \arrow[d, "id"] \\
p_j \arrow[r, "f"] & 0
\end{tikzcd}$$

$n_j = \operatorname{ord}(f - f(p_j), p_j) = \operatorname{ord}(f, p_j)$ (el orden del cero p_j de f). Así, si $f(z) = (z - p_1)^{n_1} (z - p_2)^{n_2} \cdots (z - p_k)^{n_k}$,

$$\deg(f) = n_1 + n_2 + \dots + n_k = r$$

Para el segundo caso, $S = \overline{S}' = \overline{\mathbb{C}}$, $f : S \to S'$ propia implica que f es una función racional

$$f(z) = \frac{\alpha(z)}{\beta(z)}$$

donde $\alpha(z)$, $\beta(z)$ son polinomios sin ceros en común ($\text{mcd}(\alpha(z), \beta(z)) = 1$). $n_\alpha = \deg(\alpha)$, $n_\beta = \deg(\beta)$.

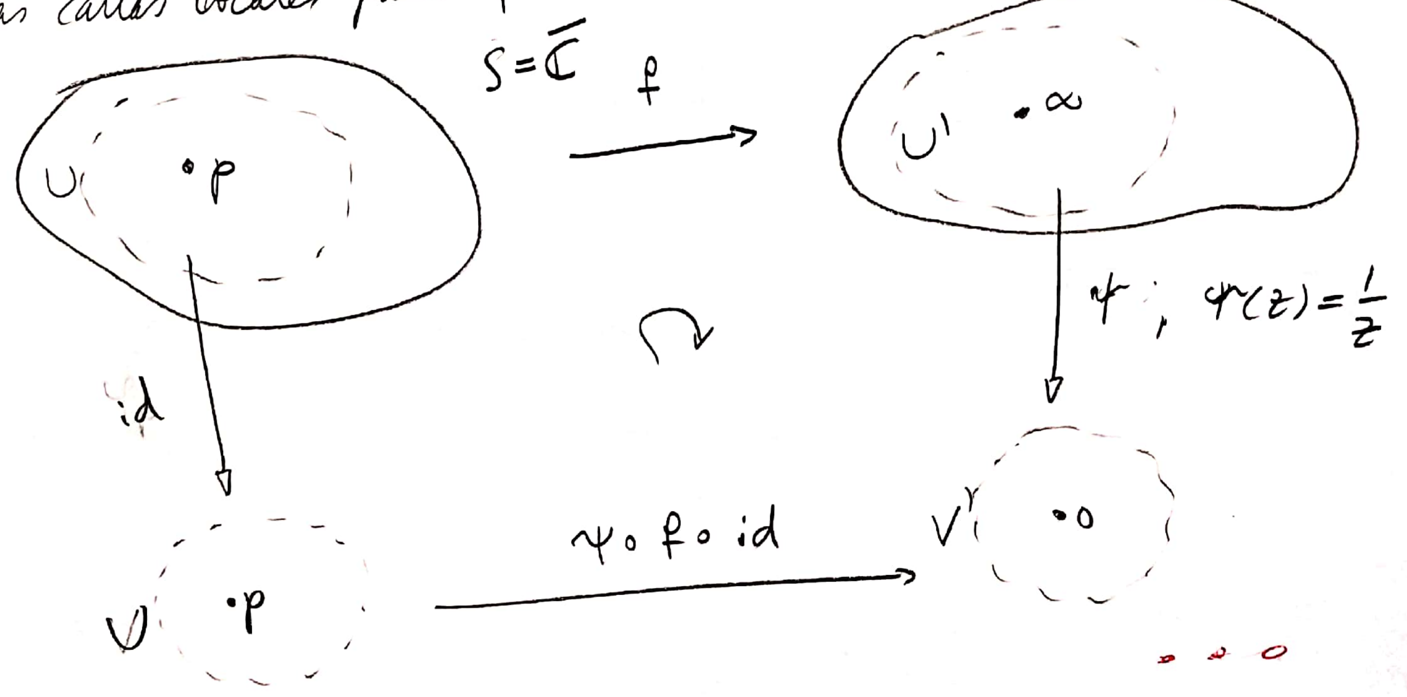
Tenemos

$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(\infty)}' \deg_f(p)$$

Primero, si $\infty \in f^{-1}(\infty) \Rightarrow f(\infty) = \infty$ y en ese caso $f(z) = Az + B$, $A, B \in \mathbb{C}$ $\therefore$ $\deg(f) = 1$.

Supongamos que $\infty \notin f^{-1}(\infty)$.

$p \in f^{-1}(\infty) \iff \alpha(p) \neq 0$, $\beta(p) = 0$. Construyendo las cartas locales para p:



• **Problema C:** Sean S y S' superficies de Riemann y $f: S \to S'$ una función holomorfa que no es constante. Un punto crítico de f es un punto c en S tal que $\deg_f(c) \geq 2$. La multiplicidad de un punto crítico c de f es

$$\operatorname{mult}_f(c) := \deg_f(c) - 1.$$

1.- Demuestre que si dist es una distancia en S', entonces para todo punto crítico c de f y toda vecindad suficientemente pequeña V de c en S, existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda función holomorfa $g: S \to S'$ que satisface $\operatorname{dist}(f, g) < \varepsilon$ en V, tenemos

$$\sum_{c' \in V, \text{pt crítico de } g} \operatorname{mult}_g(c') = \operatorname{mult}_f(c);$$

2.- Demuestre que si $S = S' = \overline{\mathbb{C}}$, entonces

$$\sum_{c \in \overline{\mathbb{C}}, \text{pt crítico de } f} \operatorname{mult}_f(c) = 2\deg(f) - 2.$$

Solución:

2.- Por la fórmula de Riemann-Hurwitz se tiene que:

$$\chi(S) = \deg(f) \cdot \chi(S') - B_f$$

donde $B_f = \sum_{c \in S, \text{pt crítico de } f} \operatorname{mult}_f(c)$ y χ es la característica de Euler

Así

$$\chi(\overline{\mathbb{C}}) = \deg(f)\, \chi(\overline{\mathbb{C}}) - B_f.$$

luego $\chi(S) = 2(1-g)$, con g el género de S.

Así $\chi(\overline{\mathbb{C}}) = 2$ pues el género de $\overline{\mathbb{C}}$ es cero.

Así

$$2 = 2\deg(f) - B_f$$

$$B_f = 2\deg(f) - 2$$

$$\sum_{c \in \overline{\mathbb{C}},\, \text{pt crítico de } f} \text{mult}_f(c) = 2\deg(f) - 2.$$

<u>Anexo:</u> Teorema de Riemann - Hurwitz.

Sea $f: M \to N$ una aplicación holomorfa y no constante entre dos superficies de Riemann compactas. Entonces

$$\chi(M) = \deg(f)\chi(N) - B_f.$$

donde χ denota la característica de Euler

<u>Demostración:</u> Sea $n = \deg(f)$ y $S := \{f(p) : p \in M,\ b_f(p) > 0\}$.

S está formado por puntos aislados en un compacto, luego S es finito. Así podemos triangular N tal que cada punto de S sea un vértice de la triangulación. → medio cañonazo

Supongamos que dicha triangulación tiene C caras, L lados y V vértices.

Luego, llevando la triangulación a M por f, se obtiene una triangulación de M con nC caras, nL lados y $nV - B_f$ vértices

Por lo tanto:

$$\chi(N) = C - L + V \quad \text{y} \quad \chi(M) = nC - nL + nV - B_f$$

Así

$$\chi(M) = n\chi(N) - B_f.$$

Problema D: Dado $r>0$, calcule el área hiperbólica de.

$$\mathbb{D}_r := \{ z \in \mathbb{D} : |z| < r \}$$

y la longitud hiperbólica de $\partial \mathbb{D}_r$.

Solución: Para calcular el área hiperbólica tenemos:

$$A(\mathbb{D}_r) = \iint_{\mathbb{D}_r} \frac{1}{(1-|z|^2)^2} \, dx\,dy,$$

donde $z = x+iy$.

$$A(\mathbb{D}_r) = \iint_{\mathbb{D}_r} \frac{1}{(1-x^2-y^2)^2} \, dx\,dy.$$

Si consideramos $x = s\cos(\theta)$
$y = s\,\text{sen}(\theta)$

$$A(\mathbb{D}_r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} \frac{1}{(1-s^2)^2} s \cdot ds\, d\theta,$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-s^2} \Big|_0^r \, d\theta,$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{1-r^2} - 1 \right) d\theta,$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{r^2}{1-r^2} \, d\theta,$$

$$A(\mathbb{D}_r) = \frac{\pi r^2}{1-r^2}$$

Para la longitud tenemos que: Sea $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\operatorname{Long}(\partial \mathbb{D}_r) = \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1-|z|^2},$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{|re^{it}|}{1-|r^2e^{2it}|}\,dt,$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r}{1-r^2}\,dt,$$

$$\operatorname{Long}(\partial \mathbb{D}_r) = \frac{2\pi r}{1-r^2}.$$

Funciones armónicas

(3) $u : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ armónica $\Leftrightarrow \Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$

Af. f holomorfa $\Rightarrow$ Ref, Imf armónicas.

dem. $f = u + iv$, $u = \text{Re} f$, $v = \text{Im} f$.

f holomorfa $\Rightarrow \bar{\partial} f = 0 = \frac{1}{2}(\partial_x f + i \partial_y f)$. $\partial_x f = \partial_x u + i \partial_x v$

$\partial_y f = \partial_y u + i \partial_y v$

$\Rightarrow \bar{\partial} f = \frac{1}{2}(\partial_x u + i \partial_x v + i(\partial_y u + i \partial_y v)) = \frac{1}{2}((\partial_x u - \partial_y v) + i(\partial_x v + \partial_y u))$

$\Rightarrow \bar{\partial} f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_x u - \partial_y v = 0 \\ \partial_x v + \partial_y u = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_x v = -\partial_y u \end{cases}$ (Cauchy-Riemann).

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \partial_x \partial_y v + \partial_y \partial_y u = \partial_x \partial_y v + \partial_y(-\partial_x v)$$
$$\underset{C^2}{=} \partial_x \partial_y v - \partial_x \partial_y v = 0.$$

$$\partial_x^2 v + \partial_y^2 v = \partial_x(-\partial_y u) + \partial_y(\partial_x u) = -\partial_x \partial_y u + \partial_y \partial_x u$$
$$= -\partial_x \partial_y u + \partial_x \partial_y u = 0.$$

(2) Afirmación $u : U \to \mathbb{R}$ armónica $\Rightarrow \partial u$ holomorfa.

dem. ∂u holomorfa $\Leftrightarrow \bar{\partial}(\partial u) = 0$.

u armónica $\Rightarrow \Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$. $\partial u = \frac{1}{2}(\partial_x u - i \partial_y u)$

$\bar{\partial} \partial u = \frac{1}{2}(\partial_x(\partial u) + i \partial_y(\partial u))$

$\partial_x(\partial u) = \frac{1}{2}(\partial_x^2 u - i \partial_x \partial_y u)$, $\partial_y(\partial u) = \frac{1}{2}(\partial_y \partial_x u - i \partial_y^2 u)$

$$\partial_x(\partial u) + i \partial_y(\partial u) = \frac{1}{2}(\partial_x^2 u - i \partial_x \partial_y u + i(\partial_y \partial_x u - i \partial_y^2 u))$$
$$= \frac{1}{2}(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u - i \partial_x \partial_y u + i \partial_y \partial_x u) = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0$$

$\therefore \bar{\partial} \partial u = 0$

$\therefore \partial u$ holomorfa.

(3) $U \subseteq \mathbb{C}$ simplemente conexo $\to$ $f: U \to \mathbb{C}$ holomorfa tiene primitiva.

Af. $U \subseteq \mathbb{C}$ simplemente conexo, $u: U \to \mathbb{R}$ armónica
$\Rightarrow \exists\, \tilde{f}: U \to \mathbb{C}$ holomorfa : $Re(\tilde{f}) = u$

dem. $u: U \to \mathbb{R}$ armónica $\Rightarrow$ $\partial u : U \to \mathbb{R}$ holomorfa

U simplemente conexo : $\exists f: U \to \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) primitiva de ∂u.
(averiguar ya que no queda claro).

$$f' = \partial u \ , \quad f = a + ib \ , \quad f' = \partial u = \frac{1}{2}(\partial_x u - i \partial_y u)$$

f holomorfa $\Rightarrow$ $f' = \partial_x f$ ya que

f holo $\Rightarrow \bar{\partial} f = 0 = \frac{1}{2}(\partial_x f + i \partial_y f) \to \partial_x f = -i \partial_y f$

$\Rightarrow f' = \partial f = \frac{1}{2}(\partial_x f - i \partial_y f) = \frac{1}{2}(\partial_x f + \partial_x f) = \partial_x f$.

$$f' = \partial_x f = \partial_x a + i \partial_x b = \frac{1}{2}(\partial_x u - i \partial_y u)$$

$$\overline{f'} = \partial_x a - i \partial_x b = \frac{1}{2}(\partial_x u + i \partial_y u) = \bar{\partial} u$$

$\Rightarrow Re(f') = \frac{1}{2}(f' + \overline{f'}) = \frac{1}{2}\partial_x u \qquad \therefore \quad \partial_x a = \frac{1}{2}\partial_x u$

$$\partial_x a = \frac{1}{2}\partial_x u \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \partial_t a \, dt = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \partial_t u \, dt$$

$\overset{TFC}{\Rightarrow} a(x,y) - a(x_0,y) = \frac{1}{2}(u(x,y) - u(x_0,y))$

$$f' = \partial f = \partial f - \bar{\partial} f = \frac{1}{2}(\partial_x f - i \partial_y f) - \frac{1}{2}(\partial_x f + i \partial_y f) = -i \partial_y f$$

$= -i(\partial_y a + i \partial_y b) = \partial_y b - i \partial_y a$

$\Rightarrow f' = \frac{1}{2}(\partial_x u - i \partial_y u) = \partial_y b - i \partial_y a \Rightarrow \partial_y a = \frac{1}{2}\partial_y u$

$\Rightarrow \int_{y_0}^{y} \partial_t a(x,t) dt = \frac{1}{2}\int_{y_0}^{y} \partial_t u(x,t) dt \Rightarrow a(x,y) - a(x,y_0) = \frac{1}{2}(u(x,y) - u(x,y_0))$

$$\begin{cases} a(x,y) - a(x_0,y) = \frac{1}{2}\left(u(x,y) - u(x_0,y)\right) \\ a(x,y) - a(x,y_0) = \frac{1}{2}\left(u(x,y) - u(x,y_0)\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a(x,y_0) - a(x_0,y) = \frac{1}{2}\left(u(x,y_0) - u(x_0,y)\right)$$

$$\Rightarrow 2a(x,y) = u(x,y) + \frac{1}{2}\left(-u(x_0,y) - u(x,y_0)\right) + a(x_0,y) + a(x,y_0)$$

$$\Rightarrow a(x,y) - \frac{1}{2}u(x,y) = \underbrace{-\frac{1}{4}\left(u(x_0,y) + u(x,y_0)\right) + \frac{1}{2}\left(a(x_0,y) + a(x,y_0)\right)}_{=A(x,y)}$$

$$\partial_x A(x,y) = -\frac{1}{4}\partial_x u(x,y_0) + \frac{1}{2}\partial_x a(x,y_0) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{-\frac{1}{2}\partial_x u(x,y_0) + \partial_x a(x,y_0)}_{=0}\Big).$$

$$\therefore \partial_x A(x,y) = 0$$

$$\partial_y A(x,y) = -\frac{1}{4}\partial_y u(x_0,y) + \frac{1}{2}\partial_y a(x_0,y) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{-\frac{1}{2}\partial_y u(x_0,y) + a(x_0,y)}_{=0}\Big)$$

$$\therefore \partial_y A(x,y) = 0.$$

$\Rightarrow A(x,y) = a(x,y) - \frac{1}{2}u(x,y)$ constante.

$c := \frac{1}{2}u - a$

$\tilde{f} = 2(f+c)$ holomorfa en U.

$\tilde{f} = 2(f+c) = 2\left(f + \frac{1}{2}u - a\right) = u + 2ib$, $u : U \to \mathbb{R}$, $b : U \to \mathbb{R}$ ....

$\therefore \mathrm{Re}(\tilde{f}) = u$. ∎

(4) $u: U \to \mathbb{R}$ armónica (U simplemente conexo).

$z_0 \in U$, $r > 0$: $\overline{B(z_0, r)} \subset U$

$$u(z_0) = \int u(z)\, d\lambda_r(z_0, r)$$

dem $u: U \to \mathbb{R}$ armónica $\Rightarrow \exists f: U \to \mathbb{C}$ holo : $Re(f) = u$

(Formula integral de Cauchy) $z_0 \in U, r > 0$: $\overline{B(z_0, r)} \subset U$: $f(z_0) = \int f(z)\, d\lambda_r(z_0, r)$

Tomando parte real :

$$u(z_0) = Re(f(z_0)) = Re\left(\int f(z)\, d\lambda_r(z_0, r)\right)$$
$$= \int Re(f(z))\, d\lambda_r(z_0, r)$$
$$= \int u(z)\, d\lambda_r(z_0, r)$$

(5) límite de funciones armónicas es armónica.

dem $\{u_n: U \to \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ funciones armónicas

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists f_n: U \to \mathbb{C}$ holomorfa : $Re(f_n) = u_n$

F.I.C : $f_n(z_0) = \int f_n(z)\, d\lambda_r(z_0, r)$ (queda pendiente la demostración).

(b) Pequeño Lema: $g: X \to Y$ medible.

ν medida en $X \Rightarrow g_* \nu$ es medida en Y donde $g_* \nu(A) = \nu(g^{-1}(A))$

dem: $\nu(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow g_* \nu(B) \geq 0 \ \forall B \in \mathcal{B}$.

$g_* \nu(\emptyset) = \nu(g^{-1}(\emptyset)) = \nu(\emptyset) = 0$.

$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ disjunta $\Rightarrow g_* \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \nu\left(g^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)\right)$

$= \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} g^{-1}(B_n)\right)$

$\{B_n\}_n$ disjunta $\Rightarrow \{g^{-1}(B_n)\}_n$ disjunta

$\Rightarrow g_* \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} g^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(g^{-1}(B_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_* \nu(B_n)$.

Variable compleja I

Prueba 2, 19 de mayo de 2015

Duración 3 horas

Problema A *Sea* $u\colon\overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ *una función continua que no toma valores negativos, y que es ármonica en* $\mathbb{D}$*. Demuestre que si para cada* ζ *en* $\partial\mathbb{D}$ *tal que* $\Re(\zeta) > 0$ *tenemos* $u(\zeta) \geq 1$*, entonces* $u\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{2}{\pi}\arctan(3)$.

Problema B *Para cada entero* $n \geq 0$ *definimos inductivamente el polinomio complejo* $P_n(c)$ *por* $P_0(c) = 0$*, y para* $n \geq 1$*, por* $P_n(c) = P_{n-1}(c)^2 + c$*. Demuestre que para cada* c *que satisface* $|c| < \frac{1}{4}$*, el límite*

$$\chi(c) := \frac{1}{n} \cancel{\lim_{n\to\infty} |P_n(c)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|P_n(c)|$$

existe, y que la función $c \mapsto \chi(c)$ *así definida es ármonica.*

Problema C *Sea* $u : \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ *una función continua que es ármonica en* $\mathbb{C} \setminus \left[-\infty, -\frac{1}{4}\right)$*. Demuestre que*

$$u(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{4t-3}}{t}\, \mathrm{d}t.$$

$$u(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1/4} \frac{-t}{\sqrt{-(4t+1)}}\, u(t)\, dt$$

Variable compleja I

Examen, 26 de junio de 2015

Duración 3 horas

Problema A *Sean* τ *y* $\widetilde{\tau}$ *en* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *tales que* $\widetilde{\tau}/\tau$ *no es real, y considere el subgrupo aditivo* Λ *de* $\mathbb{C}$ *definido por*

$$\Lambda := \{n\tau + \widetilde{n}\widetilde{\tau} : n, \widetilde{n} \in \mathbb{Z}\}.$$

Demuestre que para cada z *en* $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ *la sumatoria*

$$f(z) := \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z - \lambda)^3}$$

converge, y que la función $f : \mathbb{C} \setminus \Lambda \to \mathbb{C}$ *así definida es holomorfa. Además, determine si existe una función holomorfa* $F : \mathbb{C} \setminus \Lambda \to \mathbb{C}$ *tal que* $F' = f$.

Problema B *Sea* P *el polinomio complejo definido por*

$$P(z) = z^4 - z^3 + z^2 - z + 1,$$

y sea $\ell : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *la función definida por*

$$\ell(\theta) := \log|P(\exp(2\pi i\theta))|.$$

Calcule la integral $\int_0^1 \ell(\theta)\, d\theta$.

Problema C *Sea* $u : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *una función ármonica tal que para cada* z *en* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *tenemos* $u\left(\frac{1}{z}\right) = u(z)$. *Demuestre que existe una función ármonica* $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *tal que para cada* z *en* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *tenemos* $u(z) = v\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Variable compleja I

Prueba 2, 19 de mayo de 2015

Duración 3 horas

Problema A *Sea P un polinomio complejo no constante, denote por Z el conjunto de los ceros de P en $\mathbb{C}$, y considere la función $f : \mathbb{C} \setminus Z \to \mathbb{C}$ definida por*

$$f(z) := \exp\left(\frac{1}{P(z)}\right).$$

Demuestre que cada cero de P es una singularidad esencial de f.

Problema B *Sea $\kappa : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{C}}$ una función que admite una extensión holomorfa a una vecindad de $\overline{\mathbb{D}}$ en $\mathbb{C}$, y tal que la función $\varphi_0 : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{C}}$ definida por*

$$\varphi_0(z) := \frac{1}{z} + \kappa(z),$$

es univalente. Demuestre que existe $\sigma > 0$ tal que para toda función $\delta : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ que admite una extensión holomorfa a una vecindad de $\overline{\mathbb{D}}$ y que satisface

$$\sup_{w \in \mathbb{D}} |\delta'(w)| < \sigma,$$

la función $\varphi_0 + \delta$ es univalente en $\mathbb{D}$.

Problema C *Considere los siguientes subconjuntos de $\mathbb{D}$:*

$$\ell := \mathbb{D} \cap \mathbb{R}, \ell_- := \{z \in \mathbb{D} : |z + 1 - i| = 1\}, \text{ y } \ell_+ := \{z \in \mathbb{D} : |z - 1 - i| = 1\}.$$

Calcule la distancia hiperbólica entre ℓ y $\ell_- \cup \ell_+$, entre ℓ_- y $\ell \cup \ell_+$, y entre ℓ_+ y $\ell \cup \ell_-$.

Problema D *Considere el conjunto*

$$E := \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{I}(z)^2 + 2\mathfrak{R}(z)^2 < 1\}.$$

Encuentre $=$

$$\sup\{|f'(0)| : f : \mathbb{D} \to E \text{ holomorfa}\}.$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} a_{k-l} (z-p_1)^{k-l-m_1 l}$$

$l = k$

$(m_1+1)k = -m_1 k$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} a_{k-l} (z-p_1)^{k-(1+m_1) l}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k-1} a_{k-l} (z-p_1)^{k-(1+m_1) l} \right) + \sum_{1} a_0$$

Variable compleja I

Tarea he

- A ser entregada el 23 de junio, antes de la tercera prueba;
- Se puede entregar en grupos de 2 ó 3.

Rudin

Problema A *Demuestre el "pequeño" teorema de* PICARD: *Si una función holomorfa definida en todo $\mathbb{C}$ omite al menos 2 valores, entonces es constante.*

Problema B *Dados $M > 0$ y $\widetilde{M} > M$, calcule la distancia hiperbólica en $\mathbb{H}$ entre las rectas*

$$\{\tau \in \mathbb{H} : \Im\tau = M\} \text{ y } \{\tau \in \mathbb{H} : \Im\tau = \widetilde{M}\}.$$

Problema C *Dada una función ármonica compleja $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, demuestre que existen funciones holomorfas $u : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ y $v : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tales que $f = u + \overline{v}$.*

Problema D *Dado un polinomio cuadrático complejo P, demuestre que existen a lo más 4 puntos z en $\mathbb{C}$ tales que $\overline{P(z)} = z$.*

Problema E *Demuestre la desigualdad de* HARNACK: *Dado $R > 0$ y una función ármonica $u : B(0, R) \to \mathbb{R}$, para cada r en $(0, R)$ y z_0 en $B(0, r)$ tenemos*

$$\frac{R-r}{R+r} f(z_0) \le f(x) \le \frac{R+r}{R-r} f(z_0).$$

Rudin

Problema F *Demuestre el principio de* HARNACK: *Dado un subconjunto abierto y conexo U de $\mathbb{C}$ y un punto z_0 en U, toda sucesión monótona $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ de funciones ármonicas definidas en U tal que el límite $\lim_{n\to+\infty} u_n(z_0)$ existe, converge localmente uniformemente a una función ármonica.* Alfohrs

Problema G *Demuestre que si una función ármonica definida en todo $\mathbb{C}$ es acotada, entonces es constante.*

Problema H *Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, y considere la función $\log|f| : U \to \mathbb{R}$. Demuestre que para todo z_0 en U y todo $r > 0$ tal que $\overline{B(z_0, r)} \subset U$, tenemos*

$$\log|f(z_0)| \le \int \log|f(z)| \, d\lambda_{z_0,r}(z).$$

Además, demuestre que la función $\log|f|$ es ármonica si y solo si f no tiene ceros.

Problema I *Sea U un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$ y sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función ármonica. Demuestre que si f^2 también es ármonica, entonces f o $\overline{f}$ es holomorfa.*

Rudin

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE – Facultad de Matemáticas

Examen de Calificación - Variable Compleja – Enero de 2016

3 horas

Ítem	1	2	3	4	Suma
Valor	2	1	1½	1½	6
Puntaje					

1. Notación: $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ es el disco unitario.

   ¿Verdadero o falso? Justifique sus respuestas.

   (a) (½ punto) Si $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es función holomorfa no-constante entonces la función definida por $g(z) = \overline{f(z)}$ es holomorfa.

   (b) (½ punto) Si $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es función holomorfa no-constante entonces la función definida por $h(z) = \overline{f(\overline{z})}$ es holomorfa.

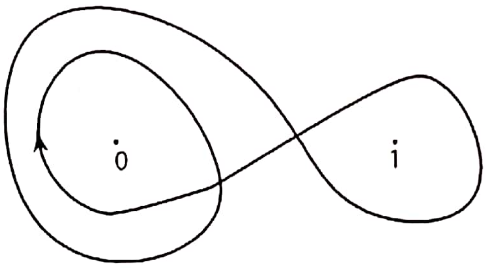
   (c) (½ punto) Existe función holomorfa f en $\mathbb{D}$ que se extiende continuamente a $\overline{\mathbb{D}}$ de manera que $f(z) = \overline{z}$ para los puntos $z \in \partial\mathbb{D}$.

   (d) (½ punto) Existe función holomorfa f en $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ que se extiende continuamente a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ de manera que $f(z) = \overline{z}$ para los puntos $z \in \partial\mathbb{D}$.

2. (1 punto) Calcule

$$\int_\gamma \frac{e^z\, dz}{z^2(z-1)},$$

donde γ es la curva cerrada orientada abajo:



3. (1½ puntos) Sean a, b, c constantes reales positivas. Suponga que f es una función holomorfa en la banda $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ |\operatorname{Im}(z)| < a\}$ tal que

$$|f(z)| \leqslant b(1 + |z|)^c \quad \text{para todo } z \in \Omega.$$

Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $b_n > 0$ tal que:

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant b_n(1 + |x|)^c \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

4. (1½ puntos) Enuncie y demuestre el Teorema Fundamental del Álgebra, utilizando herramientas de Variable Compleja.