Introducción a las ecuaciones diferenciales.

Definición. Una ecuación diferencial es una ecuación en la cual la la solución a encontrar es una función.

Ejemplo. $\frac{dx}{dt} + x = 2\cos t$.

$x = x(t)$: función en la variable independiente t

$\frac{dx}{dt}$: derivada de x con respecto a la variable t.

Soluciones de ecuaciones diferenciales.

Solución de una E.D es una función diferenciable que satisface las condiciones de la ecuación.

Ejemplo. $x(t) = \cos t + \operatorname{sen} t + e^{-t}$ es solución de $\frac{dx}{dt} + x = 2\cos t$.

$$\frac{dx}{dt} = -\operatorname{sen} t + \cos t - e^{-t},$$

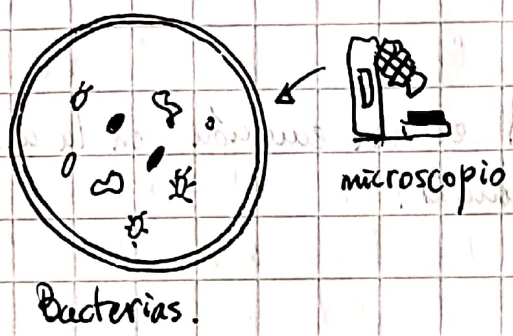
$$\frac{dx}{dt} + x = -\operatorname{sen} t + \cos t - e^{-t} + \left(\cos t + \operatorname{sen} t + e^{-t}\right) = 2\cos t$$

$\therefore$ Para $x(t) = \cos t + \operatorname{sen} t + e^{-t}$, $x = x(t)$ es solución de $\frac{dx}{dt} + x = 2\cos t$.

Scanned with CamScanner

Ejemplo. $\frac{dP}{dt} = kP$, $k>0$ constante

(Ecuación que modela el crecimiento exponencial)



$P = P(t)$: cantidad de bacterias en el tiempo $t>0$

$\frac{dP}{dt}$: tasa de cambio en la cantidad de bacterias (crecimiento)

$\frac{dP}{dt} = kP$ quiere decir: "crecimiento poblacional bacteriano" $\propto$ "población bacteriana".

$P(t) = Ce^{kt}$ es solución de $\frac{dP}{dt} = kP$, C constante

Supongamos que inicialmente hay 100 bacterias, i.e, $P(0) = 100$.

$$P(0) = 100 \Rightarrow 100 = Ce^{k \cdot 0} = C \quad \therefore \quad C = 100$$

$P(t) = 100e^{kt}$ es solución al problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP, & t>0 \\ P(0) = 100 \end{cases}$$

Observación. $P = Ce^{kt}$ es solución general de $\frac{dP}{dt} = kP$.

Ejemplo. (1) $\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2 y$, $k>0$ constante tiene por solución general a la función $y(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \operatorname{sen}(kx)$.

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} = k^2 y$ $(k>0)$ tiene por solución general a la familia de funciones $y(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$, o
$y(x) = D_1 \cosh(kx) + D_2 \operatorname{senh}(kx)$, donde $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,
$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Scanned with CamScanner

Introducción a las ED

Ejercicios

P.4. $x(t) = e^{4t}$ solución de $x''' - 12x'' + 48x' - 64x = 0$

Desarrollo. $x' = 4e^{4t}$, $x'' = 16e^{4t}$, $x''' = 64e^{4t}$

$x''' - 12x'' + 48x' - 64x = 64e^{4t} - 12\cdot 16e^{4t} + 4\cdot 48e^{4t} - 64e^{4t}$

$= (64 - 12\cdot 16 + 4\cdot 48 - 64)e^{4t} = (2^6 - 2^6\cdot 3 + 2^6\cdot 3 - 2^6)\cdot e^{4t} = 0$

P.6. ¿Es $y = \operatorname{sen} t$ una solución de $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1 - y^2$?

Desarrollo. $\frac{dy}{dt} = \cos t$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \cos^2 t = 1 - \operatorname{sen}^2 t = 1 - y^2$.

P.7. $y'' + 2y' - 8y = 0$. Probar con una solución del tipo $y = e^{rx}$.

Desarrollo. $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2e^{rx}$.

$y'' + 2y' - 8y = r^2e^{rx} + 2re^{rx} - 8e^{rx} = 0 \Rightarrow r^2 + 2r - 8 = 0$

$\Delta = 4 + 32 = 36 > 0$. Soluciones: $r = \frac{-2 \pm 6}{2} = 2, -4$.

Las soluciones de la ecuación son $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-4x}$.

P.9. Verificar que $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$ es solución de $x'' - x' - 2x = 0$.
Encontrar C_1, C_2 para condiciones iniciales $x(0) = 10$, $x'(0) = 0$.

Desarrollo. $x' = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}$, $x'' = C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{2t}$.

$$x'' - x' + 2x = C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{2t} + C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{2t} - 2(C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t})$$
$$= C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{2t} + C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{2t} - 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{2t} = 0$$

$x(0) = 10 \Leftrightarrow 10 = C_1 + C_2$, $x'(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = -C_1 + 2C_2$

$10 = 3C_2 \Rightarrow C_2 = 10/3$. $C_1 = \frac{20}{3}$.

P.10. Encontrar solución de $(x')^2 + x^2 = 4$.

Scanned with CamScanner

Clasificación de ecuaciones diferenciales.

Ec's diferenciales ordinarias. (ODE): La ecuación depende de sólo una variable independiente.

Ec's diferenciales parciales (PDE): La ecuación depende de más de una variable independiente.

Ejemplo. Ejemplos de ODE's:

(a) $\frac{dy}{dt} = ky$ (Ley de enfriamiento de Newton)

(b) $m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$ (Vibraciones mecánicas).

Ejemplos de PDE's:

(a) $\frac{\partial y}{\partial t} + c\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ (Ecuación de transporte)

(b) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (Heat equation)

(c) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (Ecuación de onda bidimensional).

La ecuación (ODE o PDE) está clasificada según su orden, i.e, el orden más alto de alguna de sus derivadas.

Ejemplo. (1) $\frac{dy}{dt} = ky$ (primer orden)

(2) $a^4 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ (cuarto orden).

Definición. Una ODE es lineal si es de la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = b(x).$$

Ejemplo. Ecuación de Burger $\frac{\partial y}{\partial t} + y \frac{\partial y}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ es nolineal.

Definición. Una ODE es homogenea si $b(x) = 0$.

Definición. Cuando en una ED los coeficientes que multiplican la variable dependiente o alguna de sus derivadas, son constantes, se dice que la ED es de coef. constantes.

Ejemplo. $m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$.

Definición. Una ED es autónoma si no depende de la variable independiente.

Observación. Las definiciones se mantienen para sistemas de ED.

Clasificación de ED
Ejercicios.

P.1. Clasificar las siguientes ED:

(a) $\operatorname{sen}(t)\dfrac{d^2x}{dt^2}+\cos(t)x=t^2$.

EDO, ecuación, 2º orden, lineal, no homogenea, coef. no constantes, no autónoma.

(b) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+3\dfrac{\partial u}{\partial y}=xy$.

EDP, ecuación, 1º orden, lineal, no homogenea, coef. no constantes

(c) $y''+3y+5x=0$, $x''+x-y=0$.

EDO, sistema de ec's, 2º orden, lineal, homogenea, coef. constantes, autónoma.

(d) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+u\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}=0$.

EDP, ecuación, 2º orden, no lineal, homogenea, coef. constantes (?).

(e) $x''+t^2x=t$.

EDO, ecuación, 2º orden, lineal, no homogenea, coef. no constantes, no autónoma.

EDO's de primer orden.

Integrales como solución.

Definición. Una EDO de primer orden es una ecuación del tipo $y' = f(x,y)$.

Ejemplo. $y' = f(x) \Rightarrow \int y'(x)\,dx = \int f(x)\,dx + C$

$$\Rightarrow y(x) = \int f(x)\,dx + C.$$

Observación. Por el TFC, la notación $\int f(x)dx + C$ hace referencia a $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C$.

Ejemplo. La solución general de $y' = 3x^2$ es $y = x^3 + C$.

El problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Tiene por solución a $y(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds + y_0$

Ejemplo. $y' = e^{-x^2}$, $y(0) = 1$ tiene por solución $y(x) = \int^{x} e^{-s^2} ds + 1$, a pesar de que la integral no se puede calcular directamente.

Bajo ciertas condiciones de diferenciabilidad, para resolver la ecuación $y' = f(y)$, tenemos la siguiente equivalencia:

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \iff \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)},$$

donde $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$ tiene solución $x(y) = \int \frac{1}{f(y)} dy + C$

Ejemplo. Resolver la ecuación $y' = ky$ $(k > 0)$.
La solución trivial es $y = 0$.
Para $y \neq 0$, $\frac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \Rightarrow x(y) = \int \frac{1}{f(y)} dy + C$

$$\Rightarrow x(y) = \frac{1}{k} \int \frac{1}{y} dy + C = \frac{1}{k} \ln|y| + C$$

$\Rightarrow \ln|y| = kx - kC \iff |y| = e^{-kC} e^{kx}$.
$e^{-kx} e^{kx}$ $\forall x \Rightarrow |y| = y$, $y = e^{-kC} e^{kx}$. Definiendo la constante $D = e^{-kC}$, la solución general es $y = D e^{kx}$.

1

Integrales como solución
Ejercicios

P. 2. $\frac{dy}{dx} = x^2 + x$, $y(1) = 3$.

$f(x) = x^2 + x$, $y(x) = \int_1^x f(s)ds + 3$

Integramos, $\int_1^x f(s)ds = \int_1^x (s^2+s)ds = \left.\frac{s^3}{3} + \frac{s^2}{2}\right|_1^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)$

Por lo Tanto, $y(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6} + 3 \iff y(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{13}{6}$, $x \in \mathbb{R}$

P. 4. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 - 1}$, $y(0) = 0$.

Solución particular, $y(x) = \int_0^x \frac{1}{s^2-1} ds$.

$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right] \Rightarrow \int_0^x \frac{1}{s^2-1} ds = \left.\frac{1}{2}\left(\ln|s-1| - \ln|s+1|\right)\right|_0^x$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. Por lo Tanto, $y(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$, $x \neq -1, 1$.

P. 6. $y' = (y-1)(y+1)$, $y(0) = 3$.

Soluciones triviales $y = 1$, $y = -1$ de la ecuación $y' = (y-1)(y+1)$

Para $y \neq \pm 1$,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{(y-1)(y+1)}$$

Conyreso Chillán 67
Serena 71

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{(y-1)(y+1)} \Rightarrow x = \int \frac{1}{(y-1)(y+1)}\,dy + D$$

$$x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + D \Leftrightarrow \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = 2x - 2D$$

$\Rightarrow \left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{-2D}e^{2x}$. Como $e^{-2D}e^{2x} > 0$, existe solución:

$\Rightarrow y - 1 = Ce^{2x}(y+1)$, $C = \pm e^{-2D}$ $(C \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow y(1 - Ce^{2x}) = 1 + Ce^{2x}$

Solución general, $y = \dfrac{1+Ce^{2x}}{1-Ce^{2x}}$

$y(0) = 3 \Leftrightarrow 3 = \dfrac{1+C}{1-C} \Leftrightarrow C(1+3) = 3-1 \Leftrightarrow C = \dfrac{1}{2}$

Solución particular de la ecuación, $y(x) = \dfrac{2+e^{2x}}{2-e^{2x}}$.

P.9. Una nave espacial viaja a velocidad $2t^2+1$ (km/s). Apunta directamente afuera de la Tierra y en $t=0$ está a 1000 km de distancia. ¿Qué tan lejos de la Tierra está a 1 minuto del tiempo $t=0$?

Desarrollo. $v = \dfrac{dx}{dt} = 2t^2+1 \Rightarrow x(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t (2s^2+1)\,ds$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (2s^2+1)\,ds = x_0 + \left(\frac{2}{3}s^3 + s\right)\Big|_0^t = 1000 + \frac{2}{3}t^3 + t$$

$$x(60) = 1000 + \frac{2}{3}60 \cdot 3600 + 60 = 1000 + 40 \cdot 3600 + 60$$
$$= 1000 + 144000 + 60 = 145060$$

$\therefore\ x(60) = 145060$ (km)

P. 10. Resolver $\frac{dx}{dt} = \operatorname{sen}(t^2) + t$, $x(0) = 20$.

Desarrollo. $x(t) = x(0) + \int_0^t (\operatorname{sen}(s^2) + s)\, ds = x(0) + \int_0^t \operatorname{sen}(s^2) ds + \int_0^t s ds$

$= 20 + \frac{t^2}{2} + \int_0^t \operatorname{sen}(s^2) ds$.

Por lo Tanto, $x(t) = 20 + \frac{t^2}{2} + \int_0^t \operatorname{sen}(s^2) ds$.

P. 12. Encontrar solución general $y' = e^x$. Aplique lo anterior para resolver $y' = e^y$.

Desarrollo. $y' = e^x \Rightarrow y = \int e^x dx + C = e^x + C$. Luego $y = e^x + C$.

$y' = e^y$ cumple $y' > 0$. Luego $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{e^y}$

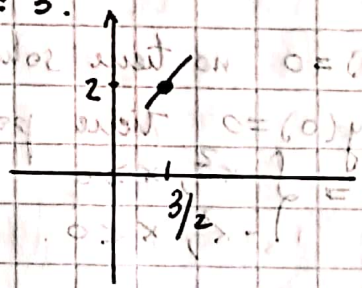
Se tiene $x = \int \frac{1}{e^y} dy + D = \int e^{-y} dy + D = -e^{-y} + D$

Lo anterior implica $e^{-y} = D - x \Rightarrow -y = \ln(D-x) \Rightarrow y = \ln((D-x)^{-1})$

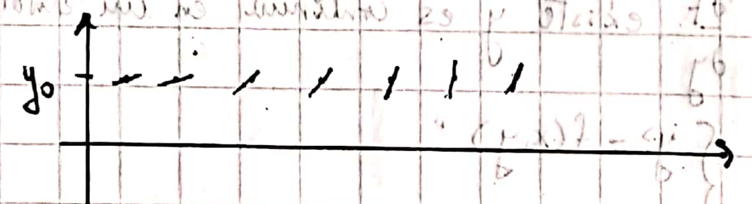
Campos de pendientes.

Estudiamos EDO's del tipo $y' = f(x,y)$, donde $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Para cada (x,y), $f(x,y)$ representa la pendiente de la recta tangente de la gráfica de la función $y=y(x)$ en el punto (x,y).

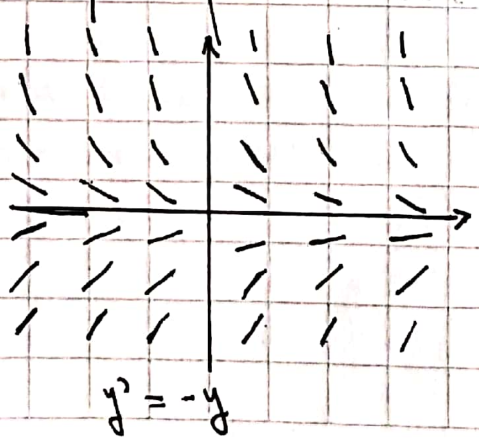
Ejemplo. Para $y' = xy$, tenemos $f(x,y) = xy$.
$f(3/2, 2) = 3$.

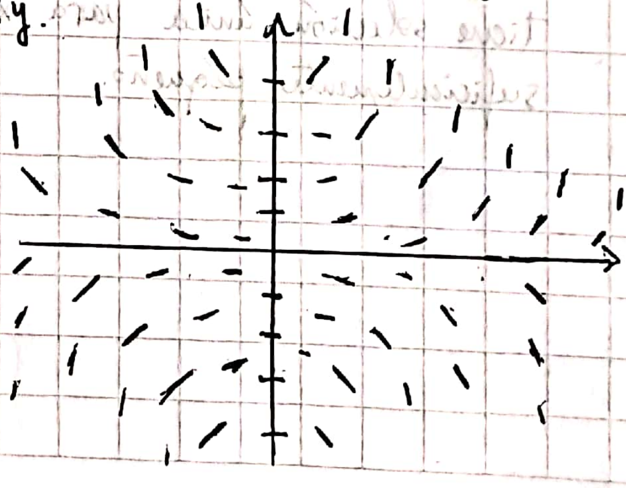


Para $y = y_0$ fijo, $f(x,y) = y_0 x$,



Ejercicio. Dibujar el campo de pendientes de $y' = -y$. Dibujar el campo de pendientes de $y' = xy$.





Existencia y unicidad.

Consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Pregunta: (i) ¿Existe solución?
(ii) ¿Solución única?

Ejemplo. (1) $y' = \frac{1}{x}$, $y(0)=0$ no tiene solución en $x=0$
(2) $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0)=0$ tiene por soluciones a $y=0$ y a $y(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0. \end{cases}$

Teorema (Teo. de Picard para existencia y unicidad). Si $f(x,y)$ es continua y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe y es continua en un entorno de (x_0, y_0), entonces

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene solución única para $x \in I$, donde I es un intervalo lo suficientemente pequeño.

Campos de pendientes

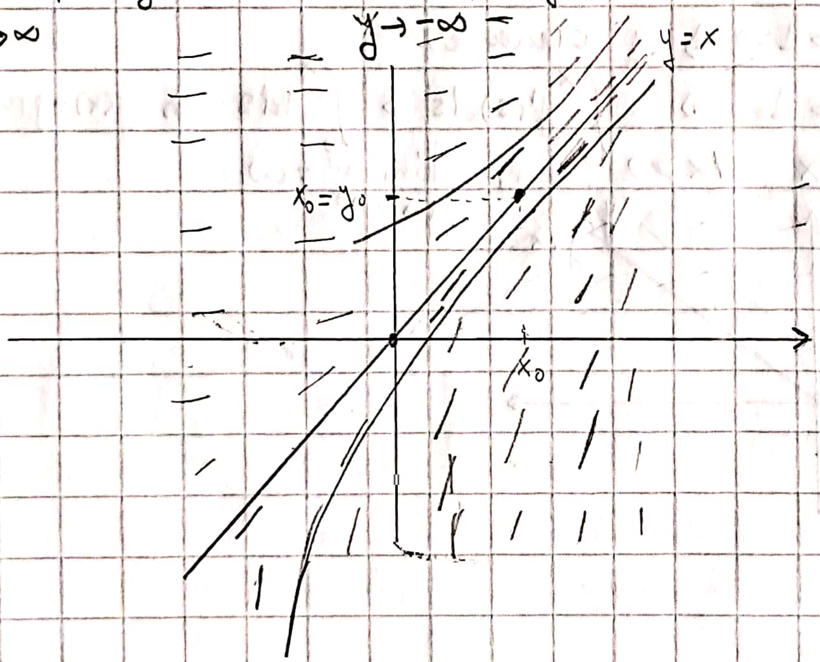
Ejercicios.

P.1. Dibuje el campo de pendientes de $y' = e^{x-y}$. ¿Cómo son las soluciones de la ecuación cuando x crece? Ver si se puede encontrar una solución particular.

Desarrollo. $f(x,y) = e^{x-y}$. Para $x=y$, $f(x,y)=1$. $f \neq 0 \ \forall x,y$.

Para $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo, $f(x_0,y) = e^{x_0-y} = \dfrac{e^{x_0}}{e^y}$.

$\lim_{y\to\infty} f(x_0,y) = 0$, $\lim_{y\to-\infty} f(x_0,y) = +\infty$



A medida que $x \to \infty$, las soluciones $y=y(x)$ cumplen que se acercan asintóticamente a la recta $y=x$.

P.4. ¿Se puede resolver la ecuación $y' = \frac{xy}{\cos x}$, $y(0) = 1$?

Desarrollo. $y' = f(x,y)$, $f(x,y) = \frac{xy}{\cos x}$. f existe y es continua en un entorno de $(0,1)$.

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{\cos x}$ existe y es continua en un entorno de $(0,1)$.

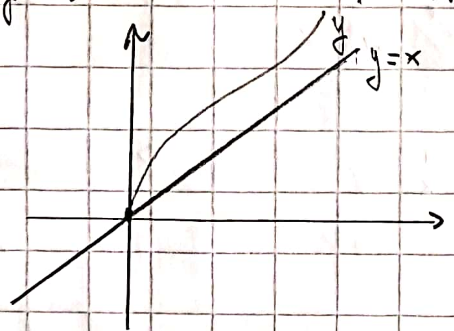
Teo de Picard : $\exists!$ Solución de $\begin{cases} y' = \frac{xy}{\cos x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

P.7 $y' = f(x,y)$, $y(0) = 0$, $f(x,y) > 1$ $\forall (x,y)$. Suponga que existe solución para todo x. Interprete $\lim_{x \to \infty^+} y$.

Desarrollo. $y' = f(x,y) > 1 > 0 \Rightarrow y$ creciente.

$f(x,y) > 1 \Rightarrow y' > 1 \Rightarrow \int_0^x y'(s)ds > \int_0^x 1 ds \Rightarrow y(x) - y(0) > x$.

Se tiene que $y(x) > x$ $\forall x > 0$ $\therefore \lim_{x \to +\infty} y = \infty$



Ecuaciones separables.

La ecuación $y' = f(x,y)$ es separable (o de variables separables) si $f(x,y) = g(x)h(y)$.

$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ implica $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$ para el caso $h(y) \neq 0$.

Integramos a ambos lados, $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C$. En caso de que se pueda, podemos despejar la solución $y = y(x)$, o encontrar una ecuación implícita para x e y.

Ejemplo. $y' = xy$.
Por Teo. de Picard, existe solución para $y' = xy$:
Como $g(x) = x$, $h(y) = y$; $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int x dx + C$

$\Leftrightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow |y| = e^C e^{x^2/2}$ $\therefore$ $y(x) = \pm D e^{x^2/2}$, $D > 0$

Observación. $y = 0$ también es solución.

Nota. La igualdad $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$ queda justificada por el teorema de cambio de variable:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \Rightarrow \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x) \Rightarrow \underbrace{\int \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx}dx}_{\int \frac{1}{h(y)}dy} = \int g(x)dx + C$$

Soluciones implícitas.

Dada la ecuación $y' = g(x)h(y)$ con solución $y = y(x)$, no siempre es posible encontrar una expresión concreta para y.

Ejemplo. Para $y' = \frac{xy}{y^2+1}$, ocupando método de separación de variables:

$$y^2 + 2\ln|y| = x^2 + D, \quad D \in \mathbb{R} \text{ constante.}$$

Observación. $y = 0$ también es solución (solución singular)

Ejemplo 1.3.3 (Ley de enfriamiento de Newton).

A Bob le gusta tomar café a 60°C. Prepara café en una taza donde $T(0) = 89°C$, $T(1\text{ min}) = 85°C$. La temperatura ambiente es 22°C. ¿Cuándo debe comenzar a beber Bob?

Ley de enfriamiento de Newton: $\frac{dT}{dt} = k(A - T)$, k cte, $A = 22$

$$\frac{dT}{dt} = k(A-T) \Rightarrow \frac{dT}{A-T} = k\,dt \Rightarrow \ln|A-T| = kt + C$$

$$\Rightarrow \ln|T-A| = -kt + C_1 \quad (T - A > 0)$$

$$\Rightarrow \ln(T-A) = -kt + C_1 \Rightarrow T - A = \exp(C_1)\exp(-kt)$$

$$\Rightarrow T(t) = A + D\exp(-kt)$$

Para $T(0) = 89 \Rightarrow D = 67 \Rightarrow T = 22 + 67e^{-kt}$.

Para $T(1) = 85 \Rightarrow k = -\ln\frac{85-22}{67} \approx 0.0616$.

Luego, $T = 22 + 67\exp(-0.0616\,t) = 60 \iff t = -\dfrac{\ln\frac{60-22}{67}}{0.0616} \approx 9.21$ min.

Ecuaciones separables
Ejercicios

P. 1.3.4 Resolver $\frac{dx}{dt} = x\,\text{sen}(t)$, $x(0)=1$.

Desarrollo. $\frac{dx}{dt} = x\,\text{sen}(t) \Rightarrow \frac{dx}{x} = \text{sen}(t)\,dt$, $x \neq 0$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \text{sen}(t)\,dt + C \Rightarrow \ln|x| = -\cos(t) + C \Rightarrow |x| = e^C e^{-\cos(t)}$$

$$\Rightarrow x(t) = \pm e^C e^{-\cos(t)} = D e^{-\cos(t)}, \quad D \neq 0$$

Condición inicial: $x(0)=1 \iff 1 = De^{-1} \iff D = e$

Por lo tanto, $x(t) = e^{1-\cos(t)}$.

P. 1.3.6 Resolver $xy' = y + 2x^2y$, $y(1)=1$

Desarrollo. $xy' = y + 2x^2y \Rightarrow y' = y\left(\frac{1+2x^2}{x}\right)$, $x \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1+2x^2}{x}dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{1+2x^2}{x}dx \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + x^2 + C, \ C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |y| = \exp\left(\ln|x| + x^2 + C\right) = |x| D e^{x^2}, \quad D \neq 0$$

$$\Rightarrow y(x) = \pm D x e^{x^2} = F x e^{x^2}, \quad F \neq 0.$$

Cambio de variable: $y(1) = 1 \iff Fe = 1 \Rightarrow F = e^{-1}$

Por lo tanto, $y(x) = xe^{x^2-1}$.

P. 1.3.103. Encuentre una solución implícita de $x' = \dfrac{1}{3x^2+1}$, $x(0)=1$

Desarrollo. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{3x^2+1} \Rightarrow (3x^2+1)\,dx = dt$

$$\Rightarrow \int (3x^2+1)dx = \int dt + C \Rightarrow x^3 + x = t + C$$

Condiciones inicial: $x(0)=1 \Leftrightarrow 1+1 = 0 + C \Rightarrow C = 2$

Por lo Tanto, $x^3 + x = t + 2$.

P. 1.3.107 La población de conejos se modela mediante $x' = x - (1/1000)x^2$, donde t está medido en meses. Para $t=0$, $x = 40$ conejos.

(a) Encuentre la solución del PVI.

(b) Calcule la población en 1 mes, 5 meses, 10 meses, 15 meses.

Desarrollo.

(a) $x' = x - (1/1000)x^2 \Leftrightarrow \dfrac{dx}{dt} = x\left(1 - \dfrac{x}{1000}\right)$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x(1000-x)} = \frac{dt}{1000} \Rightarrow \int \frac{dx}{x(1000-x)} = \int \frac{dt}{1000} + C$$

$$\frac{1}{x(1000-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1000-x} = \frac{1000A + x(B-A)}{x(1000-x)}$$. Se tiene $\begin{cases} A = \frac{1}{1000} \\ B = \frac{1}{1000} \end{cases}$

Se tiene a continuación: $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1000-x)} = \frac{1}{1000}\left(\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{1000-x}dx\right) = \frac{1}{1000}\ln\left|\frac{x}{1000-x}\right|$

Observación: Para $x \to 1000$, $\dfrac{dx}{dt} \to 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{1000}\ln\left|\frac{1000-x}{x}\right| = -t/1000 - C \Rightarrow \ln\left|\frac{1000-x}{x}\right| = -t + D$$

$$\Rightarrow \frac{1000-x}{x} = Fe^{-t},\ F>0 \Rightarrow x(t) = \frac{1000}{1+Fe^{-t}}$$

$$x(0)=40 \Leftrightarrow 40 = \frac{1000}{1+F} \Rightarrow F = \frac{960}{40} = 24 \quad \therefore x(t) = \frac{1000}{1+24e^{-t}}$$

P. 1.3.12. Suponga que una taza de café está a 100°C en $t=0$, está a 70°C a los 10 minutos, y está a 50°C a los 20 minutos. Calcule la temperatura ambiente.
(Respuesta: 10°C)

Ecuaciones lineales y factor integrante

Una ecuación lineal de primer orden tiene la forma $y' + p(x)y = f(x)$.
Sea $r(x)$ una función que satisface:

$$r(x)\,y' + r(x)\,p(x)\,y = \frac{d}{dx}\big(r(x)y\big),$$

se tiene que $\frac{d}{dx}\big(r(x)y\big) = r(x)f(x)$.

$$\frac{d}{dx}\big(r(x)y\big) = r(x)f(x) \Rightarrow \int \frac{d}{dx}\big(r(x)y\big)dx = \int r(x)f(x)\,dx + C$$

$$\Rightarrow r(x)y = \int r(x)f(x)\,dx + C \Rightarrow y = r(x)^{-1}\left(\int r(x)f(x)\,dx + C\right)$$

$r(x)$ se llama factor integrante.

Observación: $r(x)$ cumple $\frac{dr}{dx} = r(x)p(x)$. Si resolvemos mediante variables separables, queda:

$$r(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Reemplazando nos queda $y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx} f(x)\,dx + C\right)$

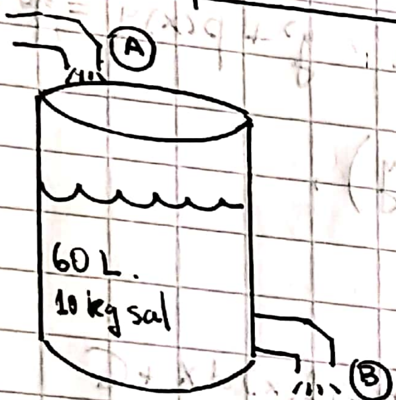
Ejercicio. El problema de valores iniciales $y' + p(x)y = f(x)$, $y(x_0) = y_0$
Tiene por solución

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}\left(\int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} p(s)ds} f(t)\,dt + y_0\right).$$

Aplique el resultado al problema de valor inicial $y' + y = e^{x^2 - x}$, $y(0) = 10$.

Aplicación de las ecuaciones lineales: Mezclas.

Desarrollo problema 1.4.2 (Ejemplo).



- Datos: tanque con capacidad de 100 L.
- Solución inicial: Salmuera (agua + sal) 60L agua, 10 kg de sal.

Ⓐ Solución salmuera, concentración 0.1 kg/L fluye a 5L/min

Ⓑ Solución fluye a 3L/min.

Objetivo: Calcular cantidad de sal cuando el tanque se llena.

Desarrollo: $X = X(t)$: cantidad de sal en el tanque (en kg).

Para $\Delta t \approx 0$:

$$\Delta x \approx (\text{concent. entrada} \times \text{caudal entrada})\Delta t - (\text{conc. salida} \times \text{caud. salida})$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = (\text{concentración entrada} \times \text{caud. entrada}) - (\text{concentración salida} \times \text{caudal salida})$$

$c.e = 0.1$ kg/L , caud. ent $= 5$L/min , caud. salida $= 3$L/min

$$\text{c. salida} = \frac{x}{\text{volumen}} = \frac{x}{60+(5-3)t} = \frac{x}{60+2t} \quad (\text{kg}/\text{L})$$

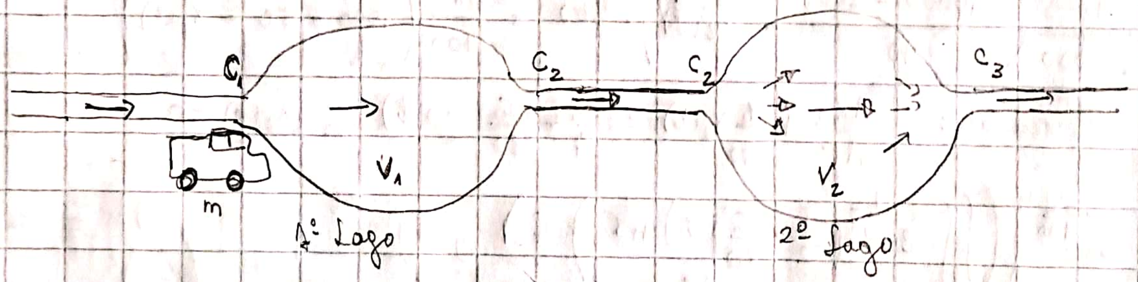
La ecuación al final queda: $\dfrac{dx}{dt} = (5 \cdot 0{,}1) - \dfrac{3x}{60+2t}$, $x(0) = 10$

Así tenemos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{3}{60+2t}\, x = 0.5 \\ x(0) = 10 \end{cases}$$

Resolviendo nos queda $x(t) = \dfrac{60+2t}{10} + C(60+2t)^{-3/2}$.
Vía $x(0) = 20$, $C = 4(60)^{3/2} \approx 1859.03$.
El tanque se llena cuando $60 + 2t = 100 \iff t = 20$. Por lo que $x(20) \approx 11.86$.

<u>Desarrollo Ejercicio 1.4.9</u>



Tenemos que $c_1 = c_2 = c_3 = 500\ L/h$, $V_1 = 100000\ L$, $V_2 = 200000\ L$
$m = 500$ kg sustancia tóxica.
(a) Encontrar la concentración de sustancia en función del tiempo en ambos lagos.
(b) ¿Cuándo la concentración del primer lago superará los 0.001 kg/L?
(c) ¿Cuándo la concentración del segundo lago será maximal?

Desarrollo. (a) Concentración $= \dfrac{\text{cantidad de toxico}}{\text{volumen líquido}}$

K_1: concentración tóxico lago 1, K_2: concentración tóxico lago 2

$\Delta x \approx -(\text{concentración salida} \times \text{caudal salida})\,\Delta t$

$\approx -\frac{500}{100000} \cdot 500\,\Delta t = \frac{250000}{100.000} \cdot \Delta t = -2.5\,\Delta t$

Tenemos $\frac{dx}{dt} = -\frac{5}{2}$, $x(0) = 500$ $\therefore$ $x(t) = -\frac{5}{2}t + 500$

K_1: concentración lago 1, $K_1(t) = \frac{x(t)}{100.000} = \frac{-\frac{5}{2}t + 500}{100.000} = -\frac{t}{40.000} + \frac{1}{200}$

Ahora para el lago 2: $x_2(t)$: cantidad tóxico lago 2

$\Delta x_2 \approx (\text{c. entr} \times \text{caudal entrada})\,\Delta t - (\text{c. salida} \times \text{caudal salida})\,\Delta t$

$\approx (\text{c. entrada} - \text{c. salida}) \times (\text{caudal entrada})\,\Delta t$

$\Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = (\text{c. entrada} - \text{c. salida}) \times (\text{caudal entrada})$

c. entrada $= \frac{40000 - 200t}{8000000}$, c. salida $= \frac{x_2(t)}{200.000}$

$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{200000}\left(\frac{40000 - 200t}{40} - x_2(t)\right) \cdot 500 = \frac{1}{400}\left(1000 - 5t - x_2(t)\right)$

Ecuación diferencial: $\frac{dx_2}{dt} + \frac{1}{400}x_2(t) = \frac{5}{2} - \frac{t}{80}$, $x_2(0) = 0$

$x_2(t) = e^{-\frac{1}{400}t}\left(\int e^{\frac{1}{400}t}\left(\frac{5}{2} - \frac{t}{80}\right)dt + C\right)$

$\int e^{\frac{1}{400}t}\left(\frac{5}{2} - \frac{t}{80}\right)dt = \frac{5}{2} \cdot 400\, e^{\frac{1}{400}t} - \frac{1}{80}\int t e^{\frac{1}{400}t}dt$; $\int t e^{\frac{1}{400}t}dt = 400 t e^{\frac{1}{400}t} - \int 400 e^{\frac{1}{400}t}dt$

$= 400\,t\,e^{\frac{1}{400}t} - 160000\, e^{\frac{1}{400}t}$

$x_2(t) = 1000 - 5t + 2000 + C e^{-\frac{1}{400}t} = C e^{-\frac{1}{400}t} - 5t + 3000$, $C = -3000$

$K_2(t) = -\frac{3}{200} e^{-\frac{1}{400}t} - \frac{1}{40000}t + \frac{3}{200}$

(c) $K_2'(t) = +\frac{3}{80000} e^{-\frac{1}{400}t} - \frac{1}{40000}$ $K_2'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{400}t} = \frac{2}{3}$ $/\ln$

$-\frac{1}{400}t = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$, $t = -400\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

Ecuaciones lineales y factor integrante

Ejercicios

P. 1.4.4. Resuelva $y' + xy = x$

Desarrollo. $p(x) = x$, $f(x) = x$. $r(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int x dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$.

Se tiene que: $y(x) = e^{-x^2/2}\left(\int e^{x^2/2} \cdot x\, dx + C\right) = e^{-x^2/2}\left(e^{x^2/2} + C\right.$

$\therefore \quad y(x) = Ce^{-x^2/2} + 1$

P. 1.4.6 Resuelva $y' + 3x^2 y = \text{sen}(x)\, e^{-x^3}$, $y(0) = 1$

Desarrollo. Calculamos el factor integrante

$p(x) = 3x^2$, $f(x) = \text{sen}(x)\, e^{-x^3}$.

$r(x) = e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}$

$y(x) = e^{-x^3}\left(\int e^{x^3} \text{sen}(x) e^{-x^3} dx + C\right) = e^{-x^3}\left(-\cos(x) + C\right)$

$y(0) = 1 \iff 1 = -1 + C \Rightarrow C = 2$.

Por lo tanto, $y(x) = e^{-x^3}\left(-\cos(x) + 2\right)$.

P. 1.4.10. Ley de enfriamiento de Newton, $\frac{dx}{dt} = -k(x - A)$, $x = x(t)$ es la temperatura en el tiempo t. $k > 0$ constante. Supongamos $A = A_0 \cos(\omega t)$, para A_0, ω constantes. (La temperatura ambiente oscil

(a) Encuentre la solución general.

(b) Vea cómo afecta la condición inicial.

Desarrollo.

(a) $\frac{dx}{dt} + kx = kA$, $r(t) = e^{\int k dt} = e^{kt}$. $x(t) = e^{-kt}\left(\int e^{kt} A dt\right.$

$x(t) = e^{-kt}\left(\int e^{kt} A_0 \cos(\omega t)\, dt + C\right)$

Scanned with CamScanner

Desarrollo problema 1.4.9.

Lago 1 : $K_1(t) = \frac{x_1(t)}{100000}$, $\Delta x_1 \approx -K_1(t) \cdot 500 \cdot \Delta t \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = -K_1 = -\frac{x_1}{200}$

Lago 2 : $K_2(t) = \frac{x_2(t)}{200000}$, $\Delta x_2 \approx K_1(t) \cdot 500 \Delta t - K_2(t) \cdot 500 \cdot \Delta t = (K_1 - K_2) \cdot 500 \Delta t$

Tenemos la ecuación diferencial : $\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{200}\left(x_1 - \frac{x_2}{2}\right)$

Sist. de ecuaciones : $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\frac{x_1}{100000} \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{200}\left(x_1 - \frac{x_2}{2}\right) \end{cases}$

Resolución 1º PVI : $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{x_1}{200} \\ x_1(0) = 500 \end{cases}$ $x_1(t) = 500\, e^{-\frac{1}{200} t}$

Resolución 2º PVI : $\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{200}\left(500\, e^{-\frac{1}{200}t} - \frac{x_2}{2}\right) \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$

$$\frac{dx_2}{dt} + \frac{x_2}{400} = \frac{5}{2} e^{-\frac{1}{200}t}$$

Factor integrante es : $r(t) = e^{\frac{1}{400}t}$

$$x_2(t) = e^{-\frac{1}{400}t}\left(\frac{5}{2}\int e^{-\frac{1}{400}t}dt + A\right) = -1000\, e^{-\frac{1}{200}t} + A e^{-\frac{1}{400}t}$$

Condición inicial $x_2(0) = 0$ implica $A = 1000$

Finalmente : $x_2(t) = 1000\, e^{-\frac{1}{400}t} - 1000\, e^{-\frac{1}{200}t}$

Sustituciones.

El objetivo es resolver ec's diferenciales ordinarias distintas a las ecuaciones lineales y de variables separables.

Motivación: La sustitución en matemáticas es muy importante. Supongamos que queremos resolver la integral $\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx$.

Ocupando sustitución $u = \operatorname{sen}(x)$, $du = \cos(x)\,dx$,

$$\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx = \underbrace{\int_0^{\sqrt{3}/2} u\,du}_{\text{integral más simple de resolver}} = \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{3}{4}.$$

Primer ejemplo básico, es resolver la ecuación diferencial $y' = (x-y+1)^2$.

Si $v(x) = x - y + 1$, $y = y(x)$.

$$\frac{dv}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} \iff v' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - v'$$

Luego, $y' = (x-y+1)^2 \Rightarrow 1 - v' = v^2 \Rightarrow v' = 1 - v^2$ EDO variables separables.

Tenemos el siguiente esquema:

EDO arbitraria $\xrightarrow{\text{Sustitución}}$ EDO variables separables

EDO arbitraria $\longrightarrow$ EDO lineal.

Para buscar la solución $y=y(x)$ de $y'=(x-y+1)^2$:

$v'=1-v^2 \Rightarrow \dfrac{dv}{dx}=(1-v)(1+v)$

Soluciones singulares: $v=1$, $v=-1$, Tenemos el sistema

$\begin{cases} x-y+1=1 \\ x-y+1=-1 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} y=x \\ y=x+2 \end{array}$

Para el caso $v\neq \pm 1$: $v'=(1-v)(1+v) \Rightarrow \dfrac{dv}{(1-v)(1+v)}=dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{v+1}{v-1}\right|=x+C \Rightarrow \dfrac{v+1}{v-1}=De^{2x} \Rightarrow v=\dfrac{1+De^{2x}}{-1+De^{2x}}$ $(D\neq 0)$

$\Rightarrow v=x-y+1=\dfrac{1+De^{2x}}{-1+De^{2x}} \Rightarrow y=x+1-\dfrac{1+De^{2x}}{De^{2x}-1}$

$$y=\frac{xDe^{2x}-x-1+De^{2x}-1-De^{2x}}{De^{2x}-1}=\frac{Dxe^{2x}-x-2}{De^{2x}-1}$$

Observemos que para $D=0$, $y=x+2$.

Soluciones:

$$\begin{cases} y=x \\ y=\dfrac{Dxe^{2x}-x-2}{De^{2x}-1}, \quad D\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Observación: Mostrar la siguiente tabla:

When you see	Try substituting
yy'	$v=y^2$
y^2y'	$v=y^3$
$(\cos y)y'$	$v=\operatorname{sen} y$
$(\operatorname{sen} y)y'$	$v=\cos y$
$y'e^y$	$v=e^y$

Ejemplo. Tenemos la ecuación de Bernoulli $y'+p(x)y=q(x)y^n$.
Ocupamos sustitución $v=y^{1-n}$.
Resolvamos el siguiente ejemplo de Ecuación de Bernoulli:

$$\begin{cases} xy'+y(x+1)+xy^5=0 \\ y(1)=1 \end{cases}$$

$xy'+y(x+1)+xy^5=0 \Rightarrow y'+\frac{x+1}{x}y=-y^5$ si $x\in]1/2, 3/2[$

$v=y^{1-5}=y^{-4} \Rightarrow v'=-4y^{-5}y' \Leftrightarrow -4y'=y^5v'$

$y'+\frac{x+1}{x}y=-y^5 \Rightarrow y^{-5}y'+\frac{x+1}{x}y^{-4}=-1 \Rightarrow -\frac{v'}{4}+\frac{x+1}{x}v=-1$

$\Rightarrow v'-4\frac{x+1}{x}v=4$ (Ecuación lineal)

Calculamos el factor integrante: $r(x)=\exp\left(\int -4\frac{x+1}{x}\right)=\exp\left(-4\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx\right)$

$=\exp(-4(x+\ln(x)))=e^{-4x}e^{-4\ln(x)}=\frac{e^{-4x}}{x^4}$

Solución: $v=r(x)^{-1}\left(\int r(x)\cdot 4\,dx+C\right)=x^4e^{4x}\left(\int 4\frac{1}{x^4e^{4x}}dx+C\right)$

$v=4x^4e^{4x}\int x^{-4}e^{-4x}dx+Cx^4e^{4x}$. Así, $y(x)=\frac{1}{\left(4\int x^{-4}e^{-4x}dx+C\right)^{1/4}xe^{x}}$

Por el TFC, $\int x^{-4}e^{-4x}dx+C$ representa la integral definida $=\int_1^x s^{-4}e^{-4s}ds=F(x)$, luego para $x=1$, $F(1)=0$.

Así, $y(1)=1=\frac{1}{C^{1/4}e} \Rightarrow C^{1/4}=\frac{1}{e} \Rightarrow C=\frac{1}{e^4}$

$$y(x)=\frac{1}{\left(4\int x^{-4}e^{-4x}dx+e^{-4}\right)xe^{x}}$$

Ejemplo. Una ecuación homogénea es el tipo $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$. En ella ocupamos la sustitución $v = y/x$.

Veamos el caso,

$$\begin{cases} x^2 y' = y^2 + xy \\ y(1) = 1 \end{cases}.$$

Para $y = vx$, $y' = v'x + v$;

$$x^2y' = y^2 + xy \Rightarrow x^2(v'x + v) = v^2x^2 + x(vx)$$
$$\Rightarrow x^3v' + x^2v = x^2v^2 + x^2v$$

Factorizando, $x^3v' = x^2v^2 \iff xv' = v^2$. Obs: $x \neq 0$. (CI).

La EDO $xv' = v^2$ es de variables separables.

$$xv' = v^2 \Rightarrow \frac{v'}{v^2} = \frac{1}{x}$$ (podemos asumir directamente $v \neq 0$.) porque $y(1) = 1$, $y = vx$

$$\Rightarrow -v^{-1} = \ln|x| + c \Rightarrow v^{-1} = \ln|1/x| + c_1, \quad c_1 = -c$$

Así, $v = \dfrac{1}{\ln|1/x| + c_1} \Rightarrow y = \dfrac{x}{\ln\left|\frac{1}{x}\right| + c_1}$.

Mediante condición inicial $y(1) = 1$, $y(1) = 1 = \dfrac{1}{\ln(1) + c_1} \rightarrow c_1 = 1$.

Ergo, $y(x) = \dfrac{x}{\ln|x^{-1}| + 1}$.

P.1.5.1. Resuelva $y' + y(x^2-1) + xy^6 = 0$, $y(1)=1$

Desarrollo.

$y' + y(x^2-1) + xy^6 = 0 \Rightarrow y' + (x^2-1)y = -xy^6$ Ec. Bernoulli

$v = y^{1-6} = y^{-5}$, $v' = -5y^{-6}y' \Rightarrow y' = -\frac{1}{5}y^6 v'$

$y' + (x^2-1)y = -xy^6 \Rightarrow y^{-6}y' + (x^2-1)y^{-5} = -x \Rightarrow -\frac{v'}{5} + (x^2-1)v = -x$

$\Rightarrow v' + 5(1-x^2)v = 5x$ (Ec lineal, podemos asumir que $x>0$)

Factor integrante : $r(x) = \exp\left(\int 5(1-x^2)\,dx\right) = \exp\left(5x - \frac{5x^3}{3}\right)$

$v = \exp\left(\frac{5x^3}{2} - 5x\right)\left(\int \exp\left(5x - \frac{5x^3}{3}\right)5x\,dx + C\right)$

Integramos $\int \exp\left(5x - \frac{5x^3}{3}\right)5x\,dx$, no se puede de manera directa

$v = \frac{1}{y^5}$, $x=1 \Rightarrow v(1)=1$, Reemplazando :

$v(1) = 1 = \exp\left(\frac{5}{2} - 5\right)C = \exp\left(\frac{-5}{2}\right)\cdot C \Rightarrow C = \exp\left(\frac{5}{2}\right)$

La solución es $y(x) = \left[\exp\left(\frac{5x^3}{3} - 5x\right)\left(\int \exp\left(5x - \frac{5x^3}{3}\right)5x\,dx + \exp\left(\frac{5}{2}\right)\right)\right]^{-1/5}$

P.1.5.2 Resuelva $2yy' + 1 = y^2 + x$, $y(0) = 1$

Desarrollo. $v = y^2$, $\frac{dv}{dx} = 2y\frac{dy}{dx} \Rightarrow v' = 2yy'$

$2yy' + 1 = y^2 + x \Rightarrow v' + 1 = v + x \Rightarrow v' - v = x - 1$ EDO lineal.

Factor integrante: $r(x) = \exp\left(\int -1\,dx\right) = \exp(-x)$

$$v(x) = \exp(x)\left(\int \exp(-x)(x-1)dx + C\right)$$

$$\int (x-1)\exp(-x)dx = \int x\exp(-x)dx - \int \exp(-x)dx = \int x\exp(-x)dx + \exp(-x)$$
$$= \exp(-x) - x\exp(-x) + \int \exp(-x)dx = \exp(-x) - x\exp(-x) - \exp(-x)$$
$$= -x\exp(-x)$$

$$v(x) = \exp(x)\left(-x\exp(-x) + C\right) = C\exp(x) - x$$

$v(0) = (y(0))^2 = 1$, $v(0) = 1 = C \Rightarrow C = 1$

Por lo tanto: $v(x) = \exp(x) - x$

Observación: $v(x) > 0$ para $x \in I$ intervalo lo suficientemente pequeño.

Solución final: $y(x) = \sqrt{\exp(x) - x}$

P.1.5.3 Desarrollar $y' + xy = y^4$, $y(0) = 1$

Desarrollo. Sustitución $v = y^{-3}$, $v' = -3y^{-4}y'$

$y' + xy = y^4 \underset{y>0}{\Rightarrow} y^{-4}y' + xy^{-3} = 1 \Rightarrow -\frac{v'}{3} + xv = 1 \Rightarrow v' - 3xv = -3$

Factor integrante: $r(x) = \exp\left(\int -3x\,dx\right) = \exp\left(-\frac{3x^2}{2}\right)$

$$v(x) = \exp\left(\frac{3x^2}{2}\right)\left(\int \exp\left(-\frac{3x^2}{2}\right)(-3)dx + C\right), \quad v(0) = 1$$

$v(0) = 1(C + 0) = 1$, $C = 1$.

$$v(x) = \exp\left(\frac{3x^2}{2}\right)\left(-3\int \exp\left(-\frac{3x^2}{2}\right)dx + 1\right)$$

Solución: $$y(x) = \left[\exp\left(\frac{3x^2}{2}\right)\left(-3\int \exp\left(-\frac{3x^2}{2}\right)dx + 1\right)\right]^{-1/3}$$

Scanned with CamScanner

Ecuaciones Autónomas

Estudiamos ecuaciones autónomas de la forma $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Una ecuación autónoma es una ecuación independiente de la variable independiente.

Ejemplo. $\frac{dx}{dt} = -k(x-A)$ ley de enfriamiento de Newton.
$x = A$ se llama una solución de equilibrio.

Para $\frac{dx}{dt} = f(x)$, si x cumple $f(x) = 0$, entonces se llama pto. crítico.

Observación. Para $\frac{dx}{dt} = k(A-x)$, $x(t) = A + D\exp(-kt)$ conjunto general de soluciones. Se cumple que $\lim_{x\to\infty} x(t) = A$

Definición. Si x_0 es un punto crítico de $\frac{dx}{dt} = f(x)$ cumple $\lim_{\to\infty} x(t) = x_0$, se llama pto de equilibrio estable.

Ejemplo. $x_0 = A$ es un punto crítico estable de la ecuación $\frac{dx}{dt} = k(A-x)$.

La ecuación logística.

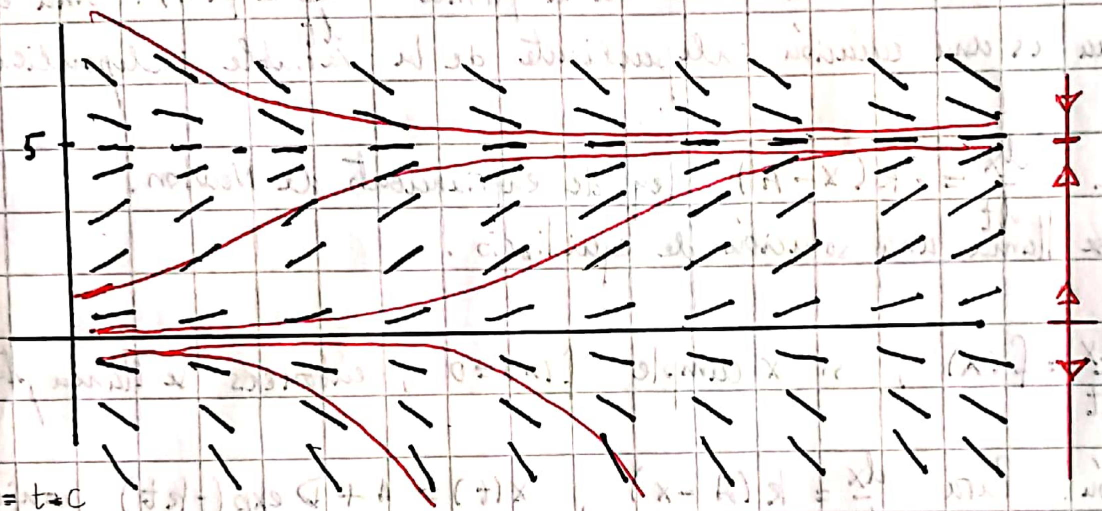
Tenemos el modelo de crecimiento exponencial $x' = kx$. Por otro lado, tenemos la ecuación logística $\frac{dx}{dt} = kx(M-x)$

Los valores $x=0$, $x=M$ son los puntos críticos.

Pregunta: Para $x=x(t)$, ¿Qué es lo que ocurre exactamente cuando $\lim_{t\to\infty} x(t)$?

Una idea es dibujar el campo de pendientes.

Ejemplo. $k=0.1$, $M=5$.



$\frac{dx}{dt} = x^2$

$\frac{dx}{x^2} = dt \Rightarrow -x^{-1} = t + C$

$x^{-1} = -t + C$

$x = \frac{1}{C-t}$

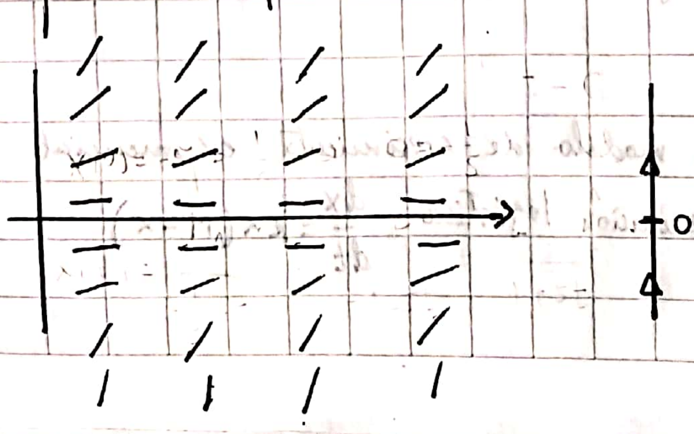
Se observa que $\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{cases} 5, & x(0)>0 \\ 0, & x(0)=0 \\ \infty, & x(0)<0 \end{cases}$

$x(0)=1$, $1 = \frac{1}{C} \Rightarrow C=1 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1-t}$

$x(0)=-1$, $-1 = \frac{1}{C} \Rightarrow C=-1$, $x(t) = \frac{1}{-1-t}$

El comportamiento del campo de direcciones, junto con el diagrama de fase , quiere decir que $x=5$ es un pto. de equilibrio estable y $x=0$ es un punto de equilibrio inestable.

Ejemplo. $y' = y^2$



0 equilibrio inestable.

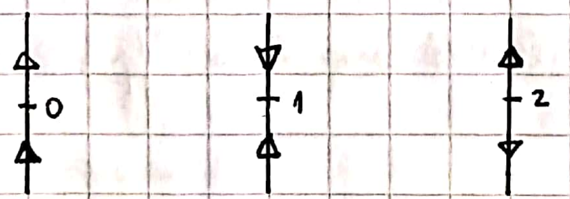
Claramente, si $x(0)=-1$, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Ejemplo. Supongamos $x' = (x-1)(x-2)x^2$. Dibujar su diagrama de fase y encontrar los puntos críticos. Clasifique los puntos críticos. Para $x(0)=5$, encuentre $\lim_{x\to\infty} x(t)$.

Desarrollo. Sea $f(x) = (x-1)(x-2)x^2$. $x = 1, 2, 0$ ptos críticos.

	$x<0$	$0<x<1$	$1<x<2$	$2<x$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$

Se tiene $f(x)>0$ para $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$; $f(x)<0$ para $x \in (1,2)$
El diagrama de fase queda de la siguiente manera:



$x=0,2$ ptos de equilibrio inestable
$x=1$ estable.

Ahora supongamos $x(0)=5$. Como $x(0)>2$, puede darse el caso de que $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$ o no existir.

Campos de pendientes y ecuaciones autónomas.
Un análisis cualitativo.

<u>Resumen del curso</u>: (i) Ecuaciones variables separables $\frac{d}{d} = f(t)g(x)$
(ii) Ecuaciones lineales $\frac{dx}{dt} + p(t)x = f(t)$

Tema nuevo a tratar: Ecuaciones autónomas ; $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

<u>Observación</u>. $\frac{dx}{dt} = f(x)$ es una EVS. Se puede estudiar usando criterio de EVS.

<u>Hecho</u>. No toda ecuación EVS, EL, EA se pueden encontrar explícitamente sus soluciones. ¿Resulta que debemos dejar de estudiarlas?

Tenemos lo siguiente:

Método analítico-algebraico
- Separación de variables
- factor integrante
- Teo. fund. Cálculo
⋮

Método cualitativo
- Campos de pendientes.

Empezar con un verbo

Saber dibujar el campo de pendientes de la ecuación $\frac{dx}{dt} = F(t,x)$

<u>Objetivo</u>. Para una ecuación $\frac{dx}{dt} = F(t,x)$, construimos su campo de pendientes.

Pregunta. ¿Los campos de pendientes sirven para estudiar EVS, EL, EA?

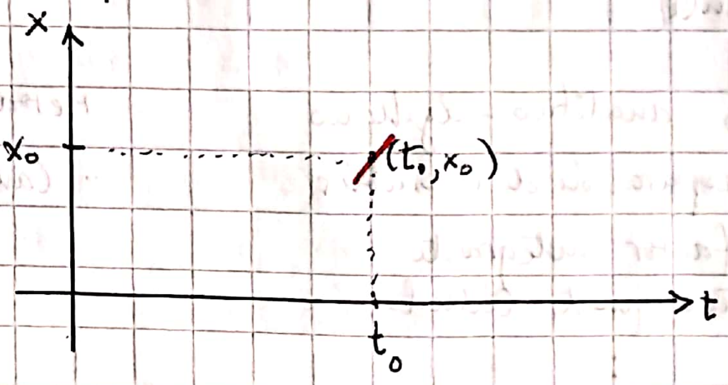
Respuesta: Sí, observar lo siguiente:

$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x)$, para $F(t,x) = f(t)g(x)$, queda $\frac{dx}{dt} = F(t,x)$

$\frac{dx}{dt} + p(t)x = f(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = f(t) - p(t)x$. Para $F(t,x) = f(t) - p(t)x$ nos queda: $\frac{dx}{dt} = F(t,x)$.

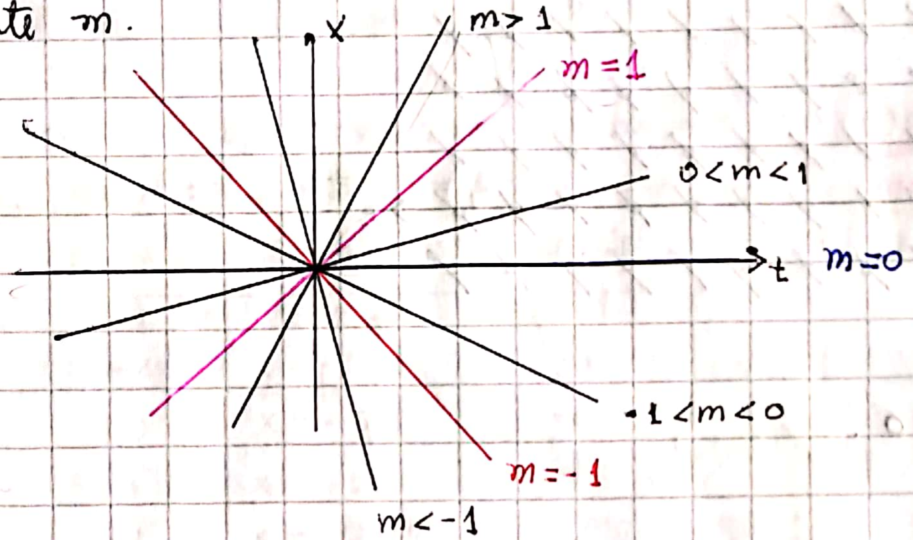
$\frac{dx}{dt} = f(x)$, $F(t,x) = f(x)$

<u>Definición</u>: Un campo de pendientes de la ecuación $\frac{dx}{dt} = F(t,x)$ es el siguiente esquema

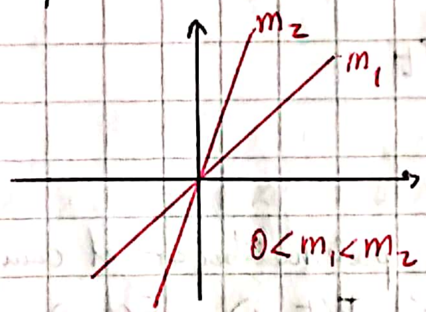


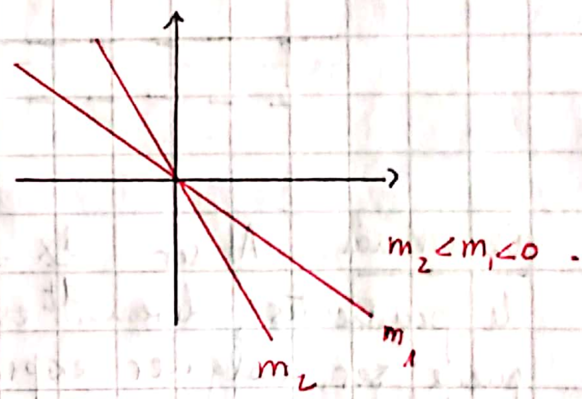
La inclinación de / depende del valor de $F(t_0, x_0)$, o sea, $F(t_0, x_0)$ es la pendiente del segmento de recta /

Observación. Sabemos que $\boxed{x = mt + n}$ representa una recta de pendiente m.



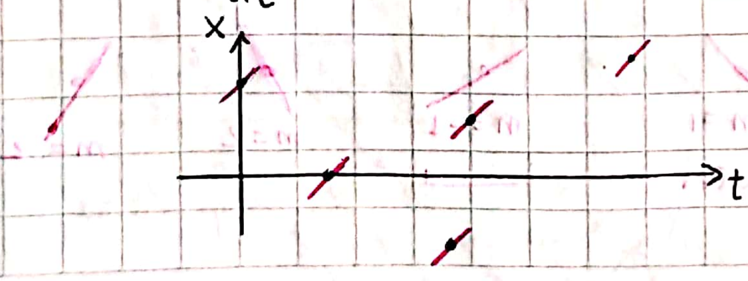
La recta tiene pendiente positiva si se ubica en el 1° y 3° cuadrante, es negativa si se ubica en el segundo y 4° cuadrante.





Ejemplo. Dibujar el campo de pendientes de $\boxed{\frac{dx}{dt} = 1.}$

Desarrollo. $\frac{dx}{dt} = F(t,x)$, donde $F(t,x) = 1$



La inclinación es de 1 independiente del punto (t,x).