dem.

Paso 1. $\pi_1(X,x)$ es generado por imágenes de $\pi_1(U_i,x)$ bajo $\psi_i = \subset_* = \varphi_{i*}'$

- Tomar un loop $\alpha : I \to X$, $\alpha(0)=\alpha(1)=x$
- Por Lebesgue, $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha\left[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}\right] \subset U_{i_j}$ $\forall i_j \in I$

$\forall j \in \{0, \dots, k-1\}$

- Pero $U_{i_j} \cap U_{i_{j+1}}$ es arcoconexo

Sea β_j un camino en $U_{i_j} \cap U_{i_{j+1}}$ de $\alpha\left(\frac{j}{k}\right)$ a x

- Sea $\alpha_j : I \to U_{i_j}$ camino dado por $\alpha\big|_{\left[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}\right]}$

$\Rightarrow$ tenemos loop $\beta_j \alpha_j \beta_{j-1}^{-1}$ en x dentro de U_{i_j}

$\Rightarrow$ En $\pi_1(X,x)$

$$[\alpha] = [\alpha_{k-1}\beta_{k-2}^{-1}][\beta_{k-2}\alpha_{k-2}\beta_{k-3}^{-1}] \cdots [\beta_1\alpha_0]$$

Paso 2. Ahora asumimos tener homomorfismos ρ_i y grupo H tal que

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U_i,x) \arrow[r, "\rho_i"] \arrow[dr, "\psi_{ij}"'] & H \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & \pi_1(U_j,x) \arrow[u, "\rho_j"'] \end{tikzcd} \qquad i \leq j$$

y queremos mostrar $\exists!\ \rho : \pi_1(X,x) \to H$ tal que

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U_i,x) \arrow[r, "\rho_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & H \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] \\ & \pi_1(X,x) \arrow[u, "\rho"'] \end{tikzcd}$$

Notar que ρ se puede definir ya que si $g \in \pi_1(X,x)$

$$\Rightarrow g = \psi_{i_{k-1}}(g_{k-1}) \cdots \psi_{i_0}(g_0), \quad g_j \in \pi_1(U_j,x)$$

y así como ρ es homomorfismo

$$\rho(g) = \rho(\psi_{i_{k-1}}(g_{k-1})) \cdots \rho(\psi_{i_0}(g_0)) = \rho_{i_{k-1}}(g_{k-1}) \cdots \rho_{i_0}(g_0)$$

Pero: debemos verificar que esté bien definido

$g \sim g' \Rightarrow$ a lo mismo,

o, $\quad g \sim 1_x \Rightarrow \rho(g) = 1$ en H

Lema. Sean $\beta_i \in \pi_1(U_{\lambda_i})$, $i = 1, \ldots, q$ tales que

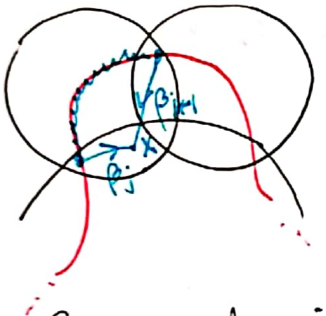
$$\psi_{\lambda_1}(\beta_1) \cdots \psi_{\lambda_q}(\beta_q) = 1 \quad (\text{en } \pi(X,x))$$

$$\Rightarrow \rho_{\lambda_1}(\beta_1) \cdots \rho_{\lambda_q}(\beta_q) = 1 \text{ en } H.$$

Teo. $\pi_1(X,x) = \operatorname*{colim}_{i\in I} \pi_1(U_i,x)$

dem. Dado loop $\alpha: I \to X$, $\alpha(0)=\alpha(1)=x$, entonces

$$[\alpha] = \underset{\pi_1(U_{k-1},x)}{\underset{\in}{[\alpha_{k-1}\beta_{k-2}^{-1}]}}\underset{\pi_1(U_{k-2},x)}{\underset{\in}{[\beta_{k-2}\alpha_{k-2}\beta_{k-3}^{-1}]}}\dots\underset{\pi_1(U_0,x)}{\underset{\in}{[\beta_1\alpha_0]}}$$



$$\mathop{\ast}_{i\in I}\pi_1(U_i,x) \twoheadrightarrow \pi_1(X,x)$$

Paso 2: Asumir $\exists$ homomorfismos ρ_i tal que
y H grupo

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U_i,x) \arrow[r, "\rho_i"] \arrow[dr, "\psi_{ij}"'] & H \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] \\ & \pi_1(U_j,x) \arrow[u, "\rho_j"'] \end{tikzcd}$$

$i\leq j$

y queremos probar: $\exists!\ \rho: \pi_1(X,x) \to H$ tal que

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U_i,x) \arrow[r, "\rho_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & H \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] \\ & \pi_1(X,x) \arrow[u, "\rho"'] \end{tikzcd} \quad \forall i$$

$$g = \psi_{i_{k-1}}(g_{k-1})\dots\psi_{i_0}(g_0)$$

$$\rho(g) = \rho(\psi_{i_{k-1}}(g_{k-1}))\dots\rho(\psi_{i_0}(g_0))$$

$$= \rho_{i_{k-1}}(g_{k-1})\dots\rho_{i_0}(g_0)$$

Lema ⋆. Sean $\beta_i \in \pi_1(U_{\lambda_i})$, $i = 1, \dots, q$ tales que

$$\psi_{\lambda_1}(\beta_1) \cdots \psi_{\lambda_q}(\beta_q) = 1 \quad \text{en} \quad \pi_1(X,x)$$

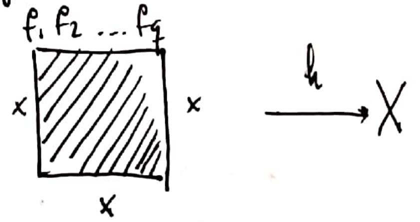
$$\Rightarrow \rho_{\lambda_1}(\beta_1) \cdots \rho_{\lambda_q}(\beta_q) = 1 \quad \text{en} \quad H.$$

dem. Tenemos un loop $f : I \to X$ en x, dividido en q loops

$$\psi_{\lambda_i}(\beta_i) = f_i = f\big|_{\left[\frac{i-1}{q}, \frac{i}{q}\right]} \quad (\text{reparametrizando})$$

y homotopía de loops $h : I \times I \to X$ tal que $h(s,0) = f(s)$ $\forall s$

y $h(s,1) = h(0,t) = h(1,t) = x$ $\forall s,t$

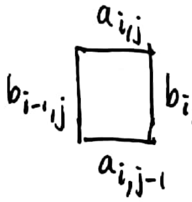


Como siempre, sea $\delta > 0$ el # de Lebesgue para el cubrimiento $\{h^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$

$\Rightarrow$ subdividir las s y las t

$$s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_m = 1$$
$$t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

tal que en los s_j tengamos a los $\frac{i}{q}$ y diam $< \delta$ para los



$= R_{i,j} = J_i \times K_j$, $J_i = [s_{i-1}, s_i]$, $K_j = [t_{j-1}, t_j]$

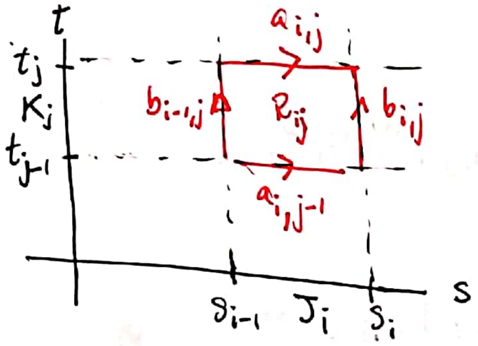
$1 \leq j \leq n$

y sean $a_{ij} = J_i \times \{t_j\}$ horizontal y $b_{ij} = \{s_i\} \times K_j$ vertical

y vertices $v_{ij} = (s_i, t_j)$ $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$

y $\left.\begin{array}{ll} A_{ij} : J_i \to X, & A_{ij}(s) = h(s, t_j) \quad s \in J_i \\ B_{ij} : K_j \to X & B_{ij}(t) = h(s_i, t) \quad t \in K_j \end{array}\right\}$ caminos en X

Para cada R_{ij}, $h(R_{ij}) \subset U_{\lambda(i,j)}$ elegido



obs: v_{ij} es vertice de 1, 2, 4 rectángulos R_{kl}

$\Rightarrow$ Como la intersección de los correspondientes $U_{\lambda(k,l)}$ está en el cubrimiento

$\Rightarrow$ lo designamos por $U_{\mu(i,j)} \ni x$ y elegimos

$g_{ij} : I \to U_{\mu(i,j)}$ camino $x \leftarrow h(v_{i,j})$

y si $h(v_{i,j}) = x \Rightarrow g_{i,j} = 1_x$

<u>Sublema</u>. Sean U_λ y $U_\mu \in$ cubrimiento, y $\gamma : I \to U_\lambda \cap U_\mu$ loop en x.
Sea $\alpha \in \pi_1(U_\lambda, x)$ y $\beta \in \pi_1(U_\mu, x)$ la clase de γ $\Rightarrow \rho_\lambda(\alpha) = \rho_\lambda(\beta)$

<u>dem</u>.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_\lambda \cap U_\mu) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\psi'"'] \arrow[dr] & \pi_1(U_\lambda) \arrow[d, "\rho_\lambda"] \\
\pi_1(U_\mu) \arrow[r, "\rho_\mu"'] & H
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \rho_\lambda(\alpha) = \rho_\lambda(\beta)$.

<u>Notación</u>. En este caso decimos $\tilde{\rho}(\gamma)$

Con ese convenio:

$$\alpha_{ij} = \tilde{\rho}\left[g_{i,j} A_{ij} g_{i-1,j}^{-1}\right]$$

$$\beta_{ij} = \tilde{\rho}\left[g_{i,j} B_{ij} g_{i,j-1}^{-1}\right]$$

Sublema. $\forall\, R_{ij}$, $\beta_{ij}\alpha_{i,j-1} \underset{H}{=} \alpha_{ij}\beta_{i-1,j}$

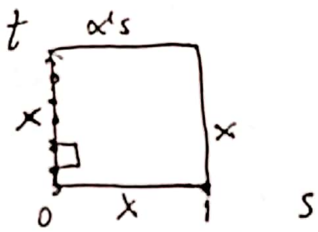
dem. Entre caminos de $U_{\lambda(i,j)}$ tenemos $B_{i,j}A_{i,j-1} \sim A_{ij}B_{i-1,j}$

$\Rightarrow$ entre loops: $[g_{ij}B_{ij}g_{i,j-1}^{-1}][g_{i,j-1}A_{i,j-1}\,g_{i-1,j}^{-1}] = \cdots$

- $\alpha_{m,n}\alpha_{m-1,n}\cdots\alpha_{1,n} \underset{H}{=} \rho_{\lambda_q}(\beta_q)\cdots\rho_{\lambda_1}(\beta_1)$

$\alpha_{i,0} \underset{H}{=} 1 \quad 1\leq i\leq m$

$\beta_{0,j} \underset{H}{=} \beta_{m,j} \underset{H}{=} 1 \quad 1\leq j\leq n$



Queremos $\alpha_{m,n}\alpha_{m-1,n}\cdots\alpha_{1,n} \underset{H}{=} 1$

$h(v_{i,j}) = x$

Sublema. $\forall\, 0\leq j\leq n-1$

$$\alpha_{m,j+1}\cdots\alpha_{2,j+1}\alpha_{1,j+1} = \alpha_{m,j}\alpha_{m-1,j}\cdots\alpha_{2,j}\alpha_{1,j}$$

dem. $\alpha_{m,j}\cdots\alpha_{1,j} = \beta_{m,j}\alpha_{m,j}\cdots\alpha_{1,j}$

$= \alpha_{m,j+1}\beta_{m-1,j+1}\alpha_{m-1,j}\cdots\alpha_{1,j}$

$\vdots$ final

$= \alpha_{m,j+1}\cdots\alpha_{1,j+1}$ ∎

14/10/2015

Teo. $\pi_1(X,x) = \underset{i\in I}{\operatorname{colim}}\ \pi_1(U_i, x)$

Corolario. Suponer $X = U \cap V$, U y V abiertos, $U, V, U\cap V$ arco-conexos y $x \in U\cap V$

$$\Rightarrow \pi_1(X,x) \cong \pi_1(U,x) * \pi_1(V,x) \Big/ \overline{\langle \psi_U(\gamma)\psi_V(\gamma)^{-1} \rangle}_{\gamma\in\pi_1(U\cap V)}$$

$$\begin{tikzcd} U\cap V \arrow[r, hook, "\psi_U"] \arrow[d, hook, "\psi_V"'] & U \\ V \end{tikzcd}$$

Ej 1. $S^2 = \{x\in\mathbb{R}^3 / \|x\| = 1\} =$ 

$\Rightarrow U = \{(x,y,z)\in S^2 / z > -\varepsilon\} =$  x ~ disco ~ pto 

$V = \{(x,y,z)\in S^2 / z < \varepsilon\} =$  x ~ disco ~ pto 

$U\cap V =$  $(0,0,1) = x$

$\Rightarrow \pi_1(S^2, x) = 0$

Tarea. Hacer lo mismo con $S^n = \{x\in\mathbb{R}^{n+1} / \|x\| = 1\}$, $n \geq 2$

Ej 2. $S^3 \not\cong_{homeo} S^2\times S^1$. $S^3 \to S^2$ fibración de Hopf con fibras S^1

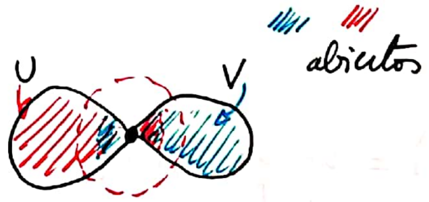
Ya que sino: $\pi_1(S^3,x) \cong \pi_1(S^2,x)\times\pi_1(S^1,x)$

$\{0\} \cong \{0\}\times\mathbb{Z}$

$\{0\} \cong \mathbb{Z}$ $(\rightarrow\leftarrow)$.

Ejemplo 3. $\overset{x}{\underset{\cap}{}}X, \overset{y}{\underset{\cap}{}}Y$ espacios topológicos

$\Rightarrow X \vee Y = X \amalg Y /_{x\sim y}$

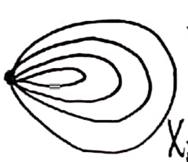


Suponer que existe vecindad de p simplemente conexa $U \cap V = (\times)$

$$\pi_1(X \vee Y, p) \cong \pi_1(X, x) * \pi_1(Y, y)$$

$$\pi_1(\infty) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F(x, y)$$

$$\pi_1(0000\cdots 0) = \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots \mathbb{Z}}_{\text{libre}} = F(x_1, \dots, x_n)$$

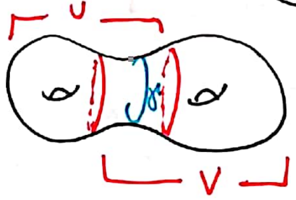


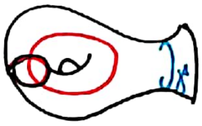
$= X$

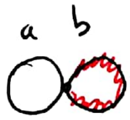
$X_i \cong S^1$, $i \in I$

$$\pi_1(X, p) = \ast_{i\in I} \mathbb{Z}$$

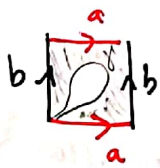
Ejemplo 4. $M \# N$, tomando $T^2 =$  como generador

$\Rightarrow T^2 \# T^2 =$ 

$U =$ 

$\sim$ 

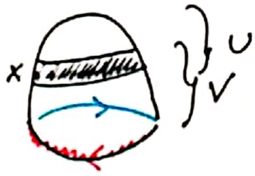
$V \sim$ 

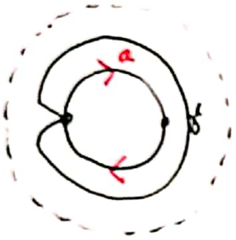


$\sim$

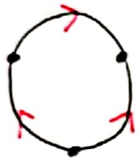
$$\pi_1(T^2 \# T^2) = F(a, b, c, d) / \overline{\langle a^{-1}b^{-1}ab\,c^{-1}d^{-1}cd \rangle}$$

$\gamma \sim a^{-1}b^{-1}ab$

Ejemplo 5. $\mathbb{R}P^2 =$ 



$$\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \overset{0}{\pi_1(U)} * \overset{a^{\mathbb{Z}}}{\pi_1(V)} \Big/ \langle a^2 \rangle \cong \langle a \mid a^2 \rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Tarea.  ¿Cuál es su grupo fundamental?

Espacios de cubrimiento

De ahora en adelante, los espacios topológicos son conexos y localmente arcoconexos (i.e, tiene una base de arcoconexos)

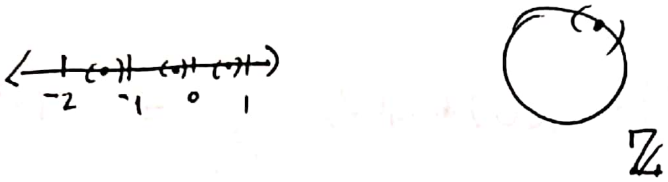
Más débil. $\forall x \in X$ y vecindad V de x, $\exists U \subset V$ vecindad de x tal que $\forall y \in U$, $\exists f: I \to V$ entre $f(0) = x$ y $f(1) = y$.

Tarea.
- Lema: X localmente arcoconexo $\Leftrightarrow$ l. arcoconexo débil
- Corolario. Un espacio conexo y localmente arcoconexo débil es arcoconexo.

def. $p: E \to B$ función continua sobre, E y B conexos y localmente arcoconexos, p es un cubrimiento si $\forall x \in B$, $\exists V_x$ abierto vecindad de x tal que $p^{-1}(V_x)$ es una unión disjunta de espacios topológicos homeomorfos a V_x a través de p, i.e:

$$p^{-1}(V_x) = \coprod_{i \in I} V_i \quad , \quad p\big|_{V_i} : V_i \xrightarrow{\cong} V_x$$

Ejemplo 1. $p : \mathbb{R} \to S^1$ es un cubrimiento



19/10/2015.

Repaso. (Espacios de Recubrimiento)

Espacios topológicos son conexos y localmente arcoconexos

(más débil (pero equivalente): $\forall x \in X$ y vecindad V de x, $\exists\, U \subset V$ abierto tal que $\forall y \in U$ $\exists f : I \to V$ curva con $f(0) = x$, $f(1) = y$)

Ya definimos cubrimiento : $p : E \twoheadrightarrow B$ continua y sobre tal que $\forall b \in B$, $\exists U$ vecindad de b con

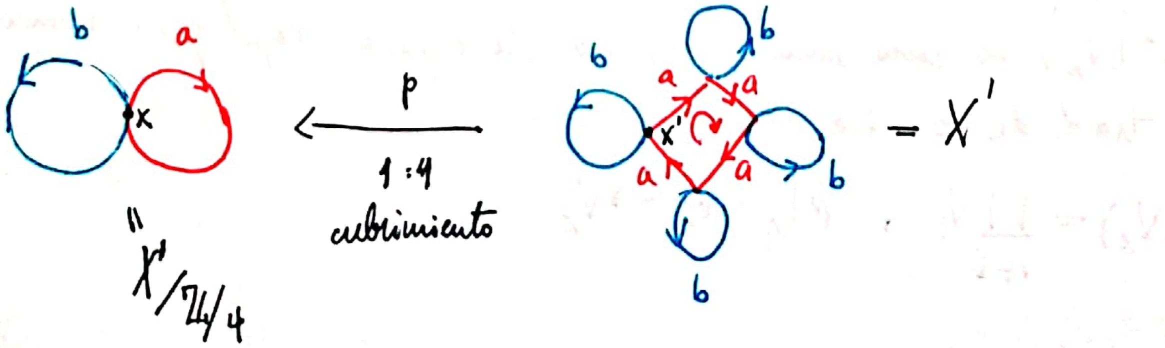
$$p^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} V_i \quad , \; V_i \text{ abiertos}$$

$$V_i \xrightarrow[\substack{\cong \\ \text{homeo}}]{p|_{V_i}} U$$

Ejemplo. $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$

Tarea : Es cubrimiento

Ejemplo. Hoja del Hatcher con varios cubrimientos de $S^1 \vee S^1 = \infty\!\!\infty$



$$\pi_1(\infty, x) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \text{ libre}$$
$$\cup\!|$$
$$p_*(\pi_1(X', x')) = \langle b, a^{-1}ba, a^{-2}ba^2, a^{-3}ba^3, a^4 \rangle$$

$$\pi_1(\infty, x) / p_*(\pi_1(X', x')) = \mathbb{Z}/4 = \mathrm{Aut}(X'|_X)$$

no ejemplo. homeomorfismo local y sobre puede no ser cubrimiento
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[dr, "p"'] & X' \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Tarea:
$$\begin{tikzcd}]0,\infty[\arrow[dr, "p|_{]0,\infty[}"] & \\ \mathbb{R} \arrow[r, "p"] & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$
($]0,\infty[\subseteq \mathbb{R}$)

~~Prop. Sea $p: E \to B$ cubrimiento. Sea $b \in B$, $e \in p^{-1}(b)$~~
~~(1) Un camino $f: I \to B$ con $f(0) = b$ se levanta y~~

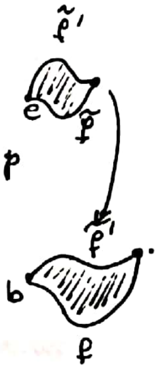
Ejemplo. $n \geq 2$. $S^n = \{x / |x| = 1\}$ $\qquad$ p: cociente

$$\xrightarrow{2:1} \mathbb{R}P^n = S^n /_{x \sim -x}$$

$\therefore$ p es cubrimiento $2:1$

$$[\pi_1(\mathbb{R}P^n) : p_*(\pi_1(\underset{0}{\cancel{S^n}}))] = 2 \Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}/2$$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$



Prop. Sea $p: E \to B$ cubrimiento. Sea $b \in B$, $e \in p^{-1}(b)$
(1) Un camino $f: I \to B$ con $f(0) = b$ se levanta
y de manera única a un camino $\tilde{f}: I \to E$ con
$\tilde{f}(0) = e$.

(2) Caminos equivalentes $f, f' : I \to B$ con $f(0) = b = f'(0)$ se (homotópicamente) levantan a caminos $\tilde{f}, \tilde{f}' : I \to E$ con $\tilde{f}(0) = \tilde{f}'(0) = e$ que son homotópicos (como caminos) (en particular, $\tilde{f}(1) = \tilde{f}'(1)$)

(3) $p_* : \pi_1(E,e) \to \pi_1(B,b)$ es 1-1

(4) Si $e' \in p^{-1}(b) \Rightarrow p_*(\pi_1(E,e))$ y $p_*(\pi_1(E,e'))$ son conjugados

(5) Al variar e' en $p^{-1}(b)$, $p_*(\pi_1(E,e'))$ recorre completamente la clase de conjugación de $p_*(\pi_1(E,e))$

dem: (1) y (2) se demuestran tal cual se hizo con $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (# Lebesgue)

(3) Sean $\tilde{f}, \tilde{g}$ loops en $e \in E$, y sean $f = p\tilde{f}$, $g = p\tilde{g}$. Asumir $h : f \sim g$, $h : I \times I \to B \Rightarrow$ por (2) se levanta a un $\tilde{h} : \tilde{f} \sim \tilde{g} \Rightarrow p_*$ es 1-1

(4) Como E es arcoconexo, $\exists\, g : e \to e'$ camino en E

$$\Rightarrow \gamma[g] : \pi_1(E,e) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(E,e') \text{ es isomorfismo}$$
$$[a] \mapsto [g a g^{-1}]$$

$\therefore$ $\gamma[g]$ induce un morfismo

$$\pi_1(B,b) \longrightarrow \pi_1(B,b)$$
$$[\alpha] \mapsto [(pg)\,\alpha\,(pg)^{-1}]$$

enviando $p_*\pi_1(E,e)$ a $\underbrace{[pg]\, p_*\pi_1(E,e)\,[pg]^{-1}}_{p_*\pi_1(E,e')}$ ($\overset{\shortparallel}{a}$, $\tilde{a} = g$)

(5) Considerar $[a](p_* \pi_1(E,e))[a]^{-1} \subset \pi_1(B,b)$. Primero levantar

a : $\tilde{a}: I \to E$, $\tilde{a}(0)=e$

$\tilde{a}(1)=e' \in p^{-1}(b)$ por (1)

Luego por (4), usar $g:=\tilde{a}$ (así, $a=p\tilde{a}=pg$)

→ Sean $b, b' \in B$ y $f: I \to B$ camino $b \to b'$. Sea $p: E \to B$ cubrimiento.

Definir $\tau[f]: p^{-1}(b) \to p^{-1}(b)$ como : sea $e \in p^{-1}(b)$, levantar f a $\tilde{f}: I \to E$

$\tilde{f}(0)=e \Rightarrow \tau[f](e)=\tilde{f}(1)$ (por (2) bien definido). Así sabemos que

si $g: b' \to b''$, $\tau[gf]=\tau[g]\tau[f]$

$\therefore \tau[f^{-1}]=(\tau[f])^{-1} \Rightarrow \tau[f]$ es biyección.

Prop. $p^{-1}(b)$, $p^{-1}(b')$ tienen la misma cardinalidad.

Si f es un loop en $b \Rightarrow \pi_1(B,b)$ actúa en $p^{-1}(b)$ (como biyecciones).

Esta acción es transitiva :

$\forall x, y \in p^{-1}(b)$, $\exists [f] \in \pi_1(B,b)$ tal que $\tau[f](x)=y$

En general, G grupo actuando en S transitivamente

$$G \geq G_x = \{g \in G \mid gx = x\} = \text{estabilizador de } x$$

y tenemos biyección G/G_x = clases laterales $\longrightarrow S$ (tarea)

$$\therefore \ \pi_1(B,b)/p_*\pi_1(E,e) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{biyección}}}{\equiv} p^{-1}(b)$$

Def. Un cubrimiento $p: E \to B$ se llama regular si $p_*(\pi_1(E,e)) \triangleleft \pi_1(B,b)$,
y se llama universal si $\pi_1(E,e) = 0$.

Lema. X = esp. top y localmente arcoconexo
Suponer $\exists f: X \to B$ continua, $f(x) = b$. Luego $\exists!$ levantamiento $\tilde{f}: X \to E$, $\tilde{f}(x) = e$

$$\Leftrightarrow f_*(\pi_1(X,x)) \subset p_*(\pi_1(E,e))$$

Usaremos lema con $X = E$, $f = p$.

Def. (Deck transformation) Un automorfismo de $p: E \to B$ cubrimiento es $f: E \xrightarrow{\cong} E$ tal que $pf = p$.

21/10/2015

Teníamos: $p: E \to B$ cubrimiento

$\pi_1(B,b)$ actúa en $p^{-1}(b) \ni e$, tal que $p_*(\pi_1(E,e))$ es el estabilizador de e,

y $[\pi_1(B,b) : p_*(\pi_1(E,e))] = |p^{-1}(b)|$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "p"'] & \circlearrowleft & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

transformación deck

$\parallel$

$Aut(E|_B)$

Lema. X = espacio topológico conexo y localmente arcoconexo. Suponer

$\exists f: X \to B$ continua, y sea $p: E \to B$ cubrimiento. Entonces,

$x \in X$, $b \in B$, $e \in E$, $b \in B$

$\exists!$ levantamiento $\tilde{f}: X \to E$ con $\tilde{f}(x) = e \iff f_*(\pi_1(X,x)) \subset p_*(\pi_1(E,e))$

dem. $\Rightarrow$ Por definición de levantamiento y aplicar functor.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \overset{\text{functor}}{\Longrightarrow} \begin{tikzcd} & \pi_1(E,e) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(X,x) \arrow[ur, "\tilde{f}_*"] \arrow[r, "f_*"'] & \pi_1(B,b) \end{tikzcd}$$

$f_*(\pi_1(X,x)) = p_*(\underbrace{\tilde{f}_*(\pi_1(X,x))}_{\subset\, \pi_1(E,e)})$

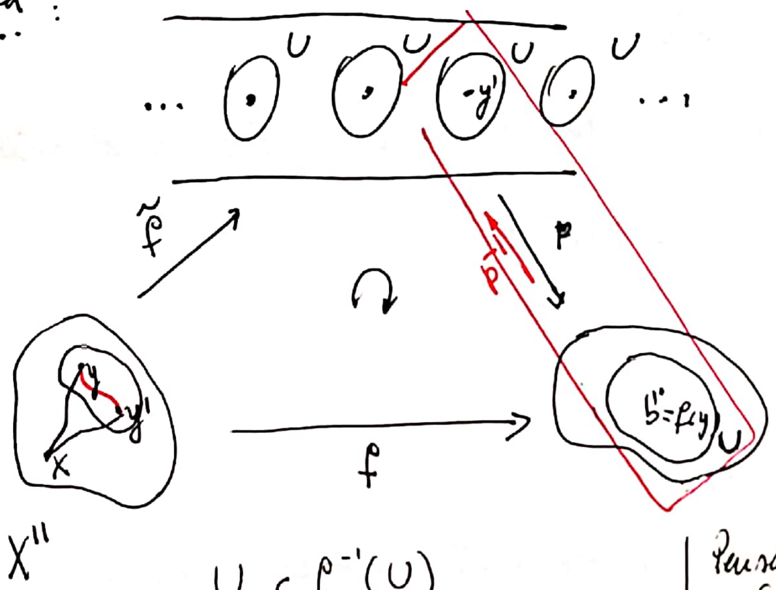
$\Leftarrow$ Sea $y \in X$, definir $\tilde{f}(y)$ = punto final del lifting de $\alpha: x \to y$ en B

(camino $I \xrightarrow[(x \to y)]{\alpha} X \xrightarrow{f} B$: $\tilde{f}(y) := \widetilde{f \circ \alpha}(1)$

camino

Ver foto!

Continuidad :



$$U_y \subset f^{-1}(U)$$
$\Vert$ arcoconexo

Pensar: Contrastar lo del nº de Lebesgue con localmente arcoconexo.

Usaremos $X = E$, $f = p$ en el lema. Suponer $g : E \xrightarrow{\sim} E$ con $g(e) = e' \in p^{-1}(b)$.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\sim} & E \\ & {\scriptstyle p}\searrow \;\; \circlearrowleft \;\; \swarrow{\scriptstyle p} & \\ & B & \end{array}$$

Por el lema, g está únicamente determinado.
¿Para qué $\tilde e$ funciona en general?

El teorema dice que el levantamiento funciona así $p_*(\pi_1(E,e)) \subset p_*(\pi_1(E,e'))$

Si $\tilde a$ camino de e a e' en E $\Rightarrow$ con $a := p\tilde a$

Tendríamos $p_*(\pi_1(E,e')) = \underbrace{[a]\, p_*(\pi_1(E,e))\,[a]^{-1}}$

$\Rightarrow$ necesitamos $p_*(\pi_1(E,e)) \subseteq$ $\Vert$

$\Rightarrow$ necesitamos $[a] \in N_{\underset{G}{\pi_1(B,b)}}(\underset{H}{p_*(\pi_1(E,e))})$

Prop. $\mathrm{Aut}(E|_B) \cong N_{\pi_1(B,b)}(p_*(\pi_1(E,e))) / p_*(\pi_1(E,e))$

Scanned with CamScanner

dem. Si tenemos
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\tilde{g}"] \arrow[dr] & & E \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}, \quad g(e) = e',$$

$\tilde{a} : e \to e'$ camino en E, $a = p\tilde{a}$ $\Rightarrow [a] \in N_G(H)$

$$\therefore \mathrm{Aut}(p : E \to B) \longrightarrow N_G(H)/H$$
$$g \mapsto [a]$$

- Es sobre por el teorema.
- Si $g \mapsto [a] \in H = p_*(\pi_1(E,e)) \Rightarrow \tilde{a}$ es un loop en $e \Rightarrow g(e) = e$

  Por unicidad: $g = 1_E$

Scanned with CamScanner

26/10/2015

Si tenemos la situación
$$\begin{tikzcd} e\in E \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E\ni e' \arrow[dl, "p"] \\ & \underset{b\in}{B} & \end{tikzcd}$$
, $e,e'\in p^{-1}(b)$

p es cubrimiento.

Sabemos $\exists! f$ con $f(e)=e' \Leftrightarrow p_*(\pi_1(E,e))\subseteq \underbrace{p_*(\pi_1(E,e'))}_{(*)}$.

Si $(*)$ pasa $\Rightarrow f\in Aut(E|_B)$

$\left(\begin{array}{l} \text{Teníamos que } [a]p_*\pi(E,e)[a^{-1}] = p_*\pi_1(E,e') \\ \qquad a = p\tilde{a}\ ,\ \tilde{a}: e \leftrightarrow e' \ (\text{Verificar}) \end{array}\right)$

Prop. $Aut(E|_B) \cong N_{\pi_1(B,b)}(p_*\pi_1(E,e))/_{p_*\pi_1(E,e)}$

$\Rightarrow$ Notar que $Aut(E|_B)$ actúa en $p^{-1}(b)$ ¿Cuándo es transitivo?

Teo. $Aut(E|_B)$ transitivo $\Leftrightarrow p_*(\pi_1(E,e)) \lhd \pi_1(B,b)$

~~dem ⇒ Si $Aut(E|_B)$, dados $e,e'\in p^{-1}(b)$, existe~~

dem. Sea $[a]\in\pi_1(B,b)$. Luego a tiene levantamiento $\tilde{a}: e\to e'$. Como $Aut(E|_B)$ es transitivo, existe $f\in Aut(E|_B)$ con $f(e)=e'$

$$\begin{tikzcd} e\in E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & E\ni e' \arrow[dl, "p"] \\ b\in B & \end{tikzcd}$$

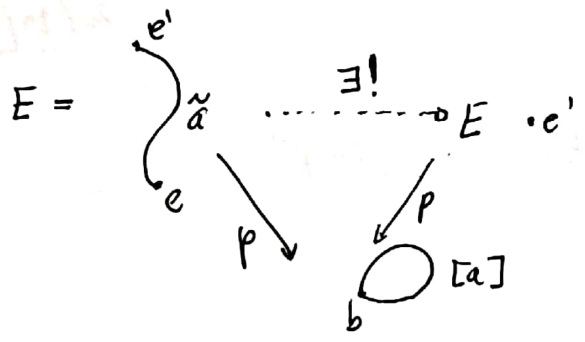
$\Rightarrow p_*\pi_1(E,e) \subset p_*\pi_1(E,e')$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad\qquad [a]p_*\pi_1(E,e)[a]^{-1}$

$\Rightarrow p_*\pi_1(E,e) = [a]p_*\pi_1(E,e)[a]^{-1}$ $\qquad (\star)$

$\Rightarrow p_*\pi_1(E,e) \lhd \pi_1(B,b)$

(⇐) 

tenemos (*)

... $\blacksquare$

<u>Def.</u> $p: E \to B$ es un cubrimiento regular si $p_* \pi_1(E,e) \triangleleft \pi_1(B,b)$
(equiv: $Aut(E|_B)$ transitivo).

<u>Corolario.</u> $p: E \to B$ cubrimiento regular $\Rightarrow Aut(E|_B) \simeq \pi_1(B,b) / p_* \pi_1(E,e)$

<u>def.</u> Un espacio B arcoconexo es :

(1) Simplemente conexo (SC) si $\pi_1(B,b) = 0$.
(2) Localmente simplemente conexo (LSC) si tiene base con abiertos SC.
(3) Semi-localmente simplemente conexo (SLSC) si $\forall b \in B$, existe vecindad $U \ni b$ tal que $\underset{b}{\underset{\Psi}{U}} \subseteq \underset{b}{\underset{\Psi}{B}}$, $\pi_1(U,b) \xrightarrow{\subseteq_*} \pi_1(B,b)$ es cero.

$\boxed{\begin{array}{c} Aut(\mathbb{R}|_{S^1}) \cong \mathbb{Z} \\ S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \end{array}}$

<u>Corolario.</u> Sea $p: E \to B$ cubrimiento con E simplemente conexo
$\Rightarrow p$ es regular y $Aut(E|_B) \cong \pi_1(B,b)$.

<u>Pregunta</u>: Dado $G \leq \pi_1(B,b)$ ¿ Cuándo existe $p: E \to B$ con $p_* \pi_1(E,e) = G$?

<u>obs.</u> Necesitamos que B sea SLSC, ya que si $G = 0 \Rightarrow$ tendríamos

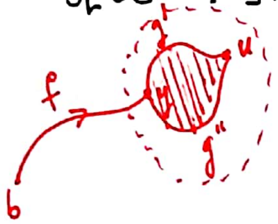
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ \cup & & \cup \\ \coprod U_i & \longrightarrow & \underset{b}{\underset{\Psi}{U}} \end{array}$$

con $\pi_1(E,e) = 0$ y $p|_{U_i} : U_i \xrightarrow{\cong} U$

$E \equiv$ conjunto de caminos bajo relación de equivalencia

$$f \equiv_G g \iff f(1) = g(1) \;,\; [g^{-1} f] \in G$$

- Como B es localmente arcoconexo $\Rightarrow \exists$ base de arcoconexos, y como tenemos propiedad SLSC $\Rightarrow \exists$ base de arcoconexos $\{U\}$ tales que si $u \in U$, $\pi_1(U,u) \longrightarrow \pi_1(B,u)$
$[g''^{-1} g] \mapsto 0$



↳ uso $(g'f \sim g''f)$

- Sea $\overline{\overline{f}} \in E$ representada por $f : b \to y$. Tomar $U \ni y$ en la base SLSC

definir

$$E \supset \tilde{U} = \left\{ \text{conjunto de } \overline{\overline{g}} \text{ representadas por } g'f, \text{ donde } g' \text{ es un camino en } U \text{ que parte en } y \right\}$$

Notar que $\tilde{U}$ esté bien definido ya que si g'' une y con u $(g' : y \to u)$

$(g''g)^{-1} g'f \in G \quad g'f \sim \alpha(g''g)$

$\{\tilde{U}\}$ definen una base para E, $p : E \to B$ $\left(p(\overline{\overline{f}}) = f(1) \right)$

$$g'f \sim \beta \in G \Rightarrow \underset{g' \sim g''}{(g''g)(g'f)} \sim g^{-1} g''^{-1} g'f \sim g^{-1} f \in G.$$

Scanned with CamScanner

Sea $U_i \ni e \Rightarrow$

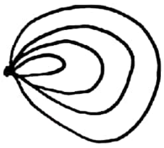
$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "j"'] & E \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}$$

$e \in U_i$, $B \ni e$

$j_* = p_* \, i_*$

$j_* = 0$ ya que $\pi_1(E, e) = 0$.

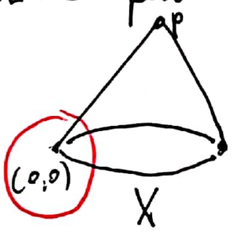
Ejemplo. X = conexo, localmente arcoconexo, pero no SLSC

$\bigvee_{\mathbb{N}} \neq X =$  $\subseteq \mathbb{R}^2$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \left(x - \frac{1}{2k}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4k^2} \}$$

Tarea. Usar Van-Kampen para mostrar que $(0,0) \in X$ no tiene la propiedad SLSC.

Ejemplo. SLSC pero no LSC

$Y =$  $= X \times [0,1] /_{(x,1) \sim (x',1)} \quad \forall x, x' \in X$

Tarea: Y es contractible a p $(Y \sim \{p\})$

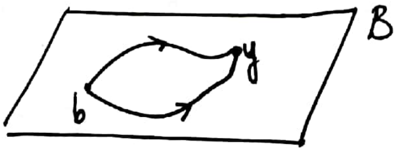
$\therefore \pi_1(U, u) \xrightarrow{0} \pi_1(Y, u)$

$\therefore$ SLSC

Dada vecindad U
de $(0,0) \times 0 = q$, no será posible siempre encontrar $q \in V \subseteq U$
con V simplemente conexo.

Teorema. B conexo, localmente arcoconexo y SLSC. Dado $G \leq \pi_1(B, b)$, existe $p: E \to B$ cubrimiento y $e \in p^{-1}(b)$ tal que $p_* \pi_1(E, e) = G$.

dem.



$f: I \to B$, $f(0) = b$
$f(1) = y$

Homología

$$\pi_n(X,x) = \{ f : S^n \to X \ , \ f(*) = x \} \Big/ \sim_{\text{fijando } *} \qquad . \ * \in S^n \text{ elegido.}$$

Hecho. $\pi_n(X,\cdot)$ es conmutativo si $n>1$

(Eckmann Hilton) (Mirar $\underbrace{\pi_n(S^k,*)}_{\text{muy interesante}}$ $\forall n,k$)

Complicación: No hay Van-Kampen.

No miraremos eso, sino grupos $H_n(X)$ los cuales

(1) Son conmutativos por definición.

(2) Sin punto base

(3) Satisfacen una versión análoga a Seifert-Van Kampen (Mayer-Victoris)

(4) $H_1(X) =$ abelianización de $\pi_1(X,x)$ (X arcoconexo). $H_1(X) \cong \dfrac{\pi_1(X,x)}{[\pi_1(X,x),\pi(X,x)]}$ abelianización.

(5) Complejos simpliciales $\to$ $H_n^{\Delta}(X) \cong H_n(X)$

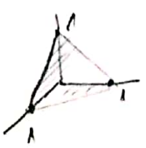
homología simplicial — $\boxed{\text{homología singular}}$

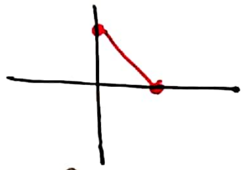
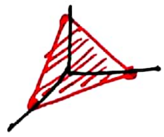
· Construcción de homología singular.

Def. Un simplex estandar de dimensión n es

$$\Delta_n = \{ (x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 1 \ , \ x_i \geq 0 \}$$

q.



$\Delta_0 =$ $\Delta_1 =$  $\Delta_2 =$ 

módulo o grupo abeliano libre?

$$\cdots \to \mathbb{Z}\{\Delta_{n+1}\to X\} \xrightarrow{d} \mathbb{Z}\{\Delta_n \to X\} \xrightarrow{d} \mathbb{Z}\{\Delta_{n-1}\to X\} \to \cdots$$

estudiar el ejemplo $d_i:\Delta_1\to\Delta_2$, $i\in\{0,1,2\}$

<u>def.</u> $d_i:\Delta_{n-1}\hookrightarrow \Delta_n$, $d_i(x_0,\dots,x_{n-1}) = (x_0,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{n-1})$

inyectiva

para cada $i\in\{0,\dots,n\}$. $d_i:\Delta_{n-1}\to\Delta_n$ $d_0(x_0)=(0,x_0)$

$d_i:\Delta_0\to\Delta_1$ ($\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$) $i\in\{0,1\}$ $d_1(x_0)=(x_0,0)$

<u>def.</u> Sea $n\geq 0$ entero,

$$S_nX = \{\sigma:\Delta_n\to X,\ \sigma \text{ continua}\} = \{\text{simplices singulares}\}$$

Luego $d_i^*: S_nX\to S_{n-1}X$ tal que si $\sigma\in S_nX \Rightarrow$

definir de manera natural. $\Rightarrow \Delta_{n-1}\xrightarrow{d_i}\Delta_n\xrightarrow{\sigma}X$, $d_i^*(\sigma):=\sigma\circ d_i$

$$\begin{tikzcd} \Delta_{n-1} \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, dashed, "\sigma\circ d_i"'] & \Delta_n \arrow[dl, "\sigma"] \\ X & \end{tikzcd}$$

$d_i^*: S_{n-1}X\to S_nX$
$d_i^*(\sigma)=\sigma\circ d_i$

<u>def.</u> $C_nX :=$ grupo abeliano libre en $S_nX = \mathbb{Z}S_nX$

$\mathbb{Z}$-módulo generado por S_nX

$$= \left\{\sum_{j=1}^m k_j\sigma_j,\ k_j\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{Z}^+,\ \sigma_j\in S_nX\right\}$$

$C_nX=0$ si $n<0$

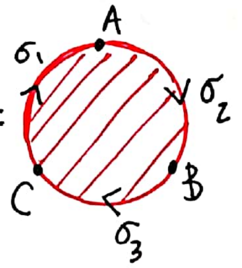
<u>def.</u> se define la función borde $\partial: C_nX\to C_{n-1}X$

$$\partial(\sigma)=\sum_{i=0}^n(-1)^i d_i^*(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i\sigma\circ d_i$$

que se extiende por linealidad.

ej: $\partial: C_3X\to C_2X$, $\partial(\sigma)=\sum_{i=0}^3(-1)^i\sigma\circ d_i = \sigma\circ d_0-\sigma\circ d_1+\sigma\circ d_2-\sigma\circ d_3$

Tarea: $\partial\partial = 0$

Ejemplo. $X =$ 

$\operatorname{Im}\partial \subset \ker \partial$

$$\cdots \to C_2X \to C_1X \xrightarrow{\partial} C_0X \to 0 \to \cdots$$

$$\partial(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$
$$\|$$
$$\partial(\sigma_1) + \partial(\sigma_2) + \partial(\sigma_3)$$
$$\|$$
$$A - C + B - A + C - B = 0$$

ok

def. Un $k_1\sigma_1 + \cdots + k_m\sigma_m \in C_nX$ es un ciclo si

$$\partial(k_1\sigma_1 + \cdots + k_m\sigma_m) = 0 \qquad C_{n+1}X \xrightarrow{\partial} C_nX \xrightarrow{\partial} C_{n-1}X$$

def. n-ciclos $= Z_nX = \{$ todos los ciclos en $C_nX\} = \ker(\partial : C_nX \to C_{n-1}X)$

n-fronteras $= B_nX = \operatorname{Im}(\partial : C_{n+1}X \to C_nX)$

Como $\underset{\text{por } \partial\partial=0}{B_nX \subset Z_nX}$, se define $H_n(X) := Z_nX / B_nX$

Ejemplo. $X = \{*\}$ (un punto)

$S_nX = \{$ constante $\Delta_n \to \{*\}\}$

$C_nX = \mathbb{Z}$

y $\partial : C_nX \to C_{n-1}X$

$$\partial(\text{const}_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \text{const}_{n-1} = \begin{cases} 0, & n \text{ impar} \\ 1, & n \text{ par} \end{cases}$$

$$\cdots \xrightarrow{\cong} C_3X \xrightarrow{0} C_2X \xrightarrow{\cong} C_1X \xrightarrow{0} C_0X \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow \cdots$$

$$C_3X = \mathbb{Z},\quad C_2X = \mathbb{Z},\quad C_1X = \mathbb{Z},\quad C_0X = \mathbb{Z}$$

claro, por

$\partial_n : C_nX \to C_{n-1}X$

$\partial_n(\text{constante}) = \begin{cases} 0, & n \text{ impar} \\ 1, & n \text{ par} \end{cases}$

$H_0(X) = \mathbb{Z} = Z_0X / B_0X$

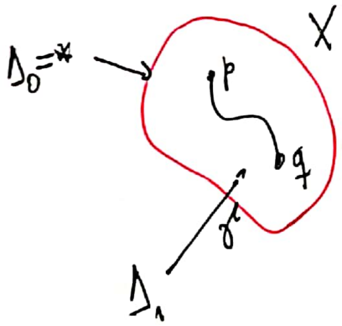
$H_1(X) = 0$

$H_2(X) = 0$

$H_n(X) = 0 \quad \forall n \geq 1$

<u>Tarea</u>. $X = Y \amalg Z$, $\quad H_n(X) \cong H_n(Y) \oplus H_n(Z) \quad \forall n$

<u>Tarea</u>. X = arcoconexo, $\Rightarrow H_0(X) = \mathbb{Z}$



$C_0X = \mathbb{Z}$ pto en $X \longrightarrow 0$

$Z_0X = C_0X \ni p, q$

$\partial\gamma = p - q$

$H_0(X) = Z_0X / B_0X \cong \mathbb{Z}$

$p - q \in B_0X$

$p = q$

—∘—

Un poco de algebra homológica:

<u>def</u>. Un chain complex $\mathcal{C}$ es una cadena de grupos abelianos $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ junto con morfismo $d: C_{n+1} \to C_n$ tq $dd = d^2 = 0$

<u>Ejemplo</u>. $\mathcal{C} = CX$, $C_n = C_nX$, $d = \partial$

Def. Homología de $\mathcal{C}$ es $H_n(\mathcal{C}) = \ker\{d : C_n \to C_{n-1}\} / \operatorname{Im}\{d : C_{n+1} \to C_n\}$

def. Una sucesión exacta es un chain complex con homología cero.

Ejemplo. $\cdots \to 0 \to 0 \to A \to B \to 0 \to 0 \to \cdots$
es exacta $\Rightarrow A \xrightarrow{\cong} B$

Ejemplo. $0 \to A \to B \to C \to 0$ es exacta $\Rightarrow B/A \cong C \quad (A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C)$

Def. Un morfismo de chain complexes $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \to & C_{n+1} & \to & C_n & \to & C_{n-1} & \to & \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \to & C'_{n+1} & \to & C'_n & \to & C'_{n-1} & \to & \cdots \end{array}$$

Def. Una sucesión exacta corta de chain complexes es $0 \to \mathcal{C} \to \mathcal{C}' \to \mathcal{C}'' \to 0$
tal que $0 \to C_n \to C'_n \to C''_n \to 0$ es exacta.

Tarea. Una homología H_n en este contexto es un functor de la categoría de chain complexes y sus morfismos a la categoría de grupos abelianos

$$C \xrightarrow{f} D \rightsquigarrow H_n(C) \xrightarrow{(f_*)_n} H_n(D)$$

$$(f_*)_n : H_n(C) \to H_n(D)$$
$$a + d_{n+1}(C_{n+1}) \mapsto f_n(a) + d'_{n+1}(C'_{n+1})$$

Cumple $(1_*)_n = 1_{H_n(C)}$
$((f \circ g)_*)_n = (f_*)_n \circ (g_*)_n$

Scanned with CamScanner

Teo. Sea $0 \to C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C'' \to 0$ sucesión exacta corta, entonces existe sucesión exacta larga

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_n(C') \xrightarrow{i_*} H_n(C) \xrightarrow{j_*} H_n(C'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(C') \longrightarrow \cdots$$

donde $\partial : H_n(C'') \to H_{n-1}(C')$ es llamado morfismo conector.

04/11/2015

Algebra.

$$C : \cdots \to C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \to \cdots \quad \text{cadena con } d^2 = 0$$

$$H_n(C) := \ker d_n / \operatorname{Im} d_{n+1} \quad \text{Grupo abeliano}$$

$$\mathcal{C} : (\text{cadenas, morfismos}) \xrightarrow{H_n} \text{Grupos abelianos}$$

$$C \xrightarrow{f} C' \quad \mapsto \quad H_n(C) \xrightarrow{f_*} H_n(C')$$

$$X \rightsquigarrow CX \rightsquigarrow H_n(C) \qquad . \qquad 0 \to C' \to C \to C'' \to 0$$

sucesión exacta corta.

Teo. Dada sucesión exacta corta $0 \to C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C'' \to 0$, existe una sucesión exacta larga:

$$\cdots \to H_n(C') \xrightarrow{i_*} H_n(C) \xrightarrow{j_*} H_n(C'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(C') \to \cdots$$

dem. Construcción de ∂ :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
\cdots \arrow[r] & C''_{n+1} \arrow[u] \arrow[r, "b"] & C''_n \arrow[u] \arrow[r, "a"] & C''_{n-1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[u] \arrow[r] & C_n \arrow[u] \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[u] \arrow[r] & C'_n \arrow[u] \arrow[r, "d"] & C'_{n-1} \arrow[u] \arrow[r, "c"] & \cdots \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r] & 0 \\
x' \arrow[u] \arrow[r] & y' \arrow[u] \\
 & y \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$$H_n(C'') = \ker a / \operatorname{Im} b$$

$$\begin{tikzcd}
{[x]} \arrow[rd, mapsto] \arrow[r] & H_{n-1}(C') = \ker / \operatorname{Im} d \\
 & {[y]}
\end{tikzcd}$$

Vuelta a la geometría ...

X = espacio topológico , $A \subset X$ subespacio topológico.

$(\partial_{rel})_n : C_n(X,A) \to C_{n-1}(X,A)$

<u>Def</u>. Se definen $C_n(X,A) := C_n(X) / C_n(A)$ y $\partial_{rel} : C_n(X,A) \to C_{n-1}(X,A)$ como el inducado por $\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$

Basta estudiar $\overline{\partial_{rel}} : C_p(X) \to C_{p-1}(X,A)$ y dem que $C_p(A) \subset \ker(\overline{\partial_{rel}})$

<u>Tarea</u>. Verificar que está bien definido.

Se definen $Z_n(X,A) = \ker \partial_{rel}$ $\quad B_n(X,A) = \operatorname{Im} \partial_{rel}$

$$H_n(X,A) := Z_n(X,A) / B_n(X,A)$$

$\Rightarrow$ Si $A \hookrightarrow X$, $0 \to C_n(A) \xrightarrow{i_n} C_n(X) \xrightarrow{j_n} C_n(X)/C_n(A) \to 0$

<u>Corolario</u>. Dada una sucesión exacta corta $0 \to C(A) \xrightarrow{i} C(X) \xrightarrow{j} C(X,A) \to 0$, existe una sucesión exacta larga:

$$\cdots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \to \cdots$$

Consecuencia inmediata de la <u>propiedad anterior</u>

<u>Def</u>. $f : X \to Y$ continua $\Rightarrow$ existe morfismo de cadenas

complejo de cadenas

$C_n(X) \xrightarrow[(f_\#)_n]{f_\#} C_n(Y)$: para $\sigma : \Delta_n \to X$,

familia de morfismos $(f_\#)_n \Rightarrow f_\# : C(X) \to C(Y)$

$f_\#(\sigma) = f \circ \sigma : \Delta_n \to Y$ y así tenemos un morfismo $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$

$f_\#(\sigma + \varphi) = f_\#(\sigma) + f_\#(\varphi)$ $\qquad$ morfismo $(f_*)_n$ $\qquad$ <u>ok</u>

Suponer que $A \subset X$, $B \subset Y$ con $f : \underset{\underset{A}{\cup}}{X} \to \underset{\underset{B}{\cup}}{Y}$ $\quad f(A) \subset B$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C(A) & \to & C(X) & \to & C(X,A) & \to & 0 \\ & & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# & & \\ 0 & \to & C(B) & \to & C(Y) & \to & C(Y,B) & \to & 0 \end{array}$$

<u>ok</u>

Prop. Tenemos $f_* : H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$

dem y **tarea**

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(X,A) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(B) \arrow[r] & H_n(Y) \arrow[r] & H_n(Y,B) \arrow[r] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Def. Sea $p, q : C \to D$ morfismos de cadenas. Una homotopía de cadenas $h : p \sim q$ es una sucesión de morfismos $h : C_n \to D_{n+1}$ tal que $hd + dh = p - q$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d"] & C_{n+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "p"'] \arrow[d, shift left, "q"] \arrow[dl] & C_n \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "p"'] \arrow[d, shift left, "q"] \arrow[dl, "h"'] & C_{n-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "p"'] \arrow[d, shift left, "q"] \arrow[dl, "h"'] & \cdots \arrow[dl] \\
\cdots \arrow[r, "d"] & D_{n+1} \arrow[r] & D_n \arrow[r] & D_{n-1} \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Lema. $p \sim q \Rightarrow p_* = q_* : H_n(C) \to H_n(D) \quad \forall n$.

dem. Si $z \in C_n X$ con $dz = 0$

$\Rightarrow p_* z, \; q_* z$ son representados por $p(z), q(z)$ respectivamente

$\Rightarrow p(z) - q(z) = h(d(z)) - d(h(z))$

$p(z) - q(z) = d(h(z))$

$\Rightarrow p(z) = q(z)$

Geometría. Tenemos $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ continuas $\Rightarrow (gf)_* = g_* f_*$ y $1_* = 1$.

Teo. Si $f,g : X \to Y$ son homotópicos $\Rightarrow f_* = g_* : H_n(X) \to H_n(Y)$

Corolario. $f: X \to Y$ es equivalencia homotópica $\Rightarrow f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$
son isomorfismos $\forall n$

dem. $X \underset{f}{\simeq} Y$ es $\exists g: Y \to X$ tal que $fg \sim 1_Y$ y $gf \sim 1_X$. Por teorema, $(fg)_* = 1_*$. pero functorialidad dice $(fg)_* = f_* g_*$ y $1_* = 1$ ∎

Corolario. X contractible $\Rightarrow H_n(X) = 0 \;\; \forall n \geq 1$, $H_0(X) = \mathbb{Z}$

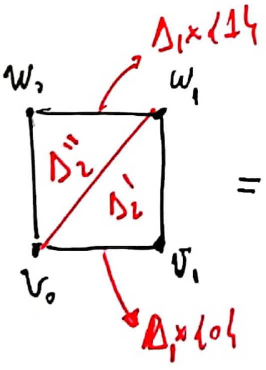
dem. Dada homotopía $F: X \times I \to Y$ con $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = g(x)$, se pueden definir $p : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ por

$$p(\sigma) = \sum_i (-1)^i F(\sigma \times 1)\Big|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}$$

donde $\sigma : \Delta_n \to X$, $F(\sigma \times 1_I) : \Delta_n \times I \xrightarrow[\sigma \times 1_I]{} X \times I \to Y$

y $\{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]\}$ es la subdivisión de $\Delta_n \times I$ en $(n+1)$-símplices.

$n=1$

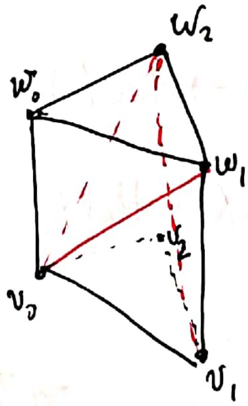


$= \Delta_1 \times I$

$\Delta_2' = [v_0, v_1, w_1]$

$\Delta_2'' = [v_0, w_0, w_1]$

$n=2$



$$+[v_0, w_0, w_1, w_2]$$
$$-[v_0, v_1, w_1, w_2]$$
$$+[v_0, v_1, v_2, w_2]$$

luego tarea: mostrar que

$$p\partial + \partial p = g_\# - f_\#$$

11/11/2015

$$H_n(S^k) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , n=0,k \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases}$$

$S^k \xrightarrow[\text{continua}]{f} S^k$, $\mathbb{Z} = H_k(S^k) \xrightarrow{f_*} H_k(S^k) = \mathbb{Z}$

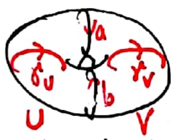
$\qquad 1 \longmapsto f_* 1 =: \deg f$

<u>Teo (Mayer-Vietoris) (1929-1930)</u>. Si $X = U \cup V$, con U, V abiertos

$$\begin{tikzcd} & U \cap V \arrow[dl, "i_1"'] \arrow[dr, "i_2"] & \\ U \arrow[dr, "j_1"'] & & V \arrow[dl, "j_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ existe sucesión exacta larga

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_n(U\cap V) \xrightarrow{(i_{1*}, -i_{2*})} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{j_{1*}+j_{2*}} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(U \cap V) \to \cdots$$

<u>Ejemplo</u>. $X =$ 

U, V abiertos

$U, V \sim$  $\sim S^1$ $\quad H_1(S^1) = \langle \gamma \rangle$

$H_n(X) = 0 \quad \forall n \geq 3$

$U \cap V \sim S^1 \amalg S^1$

$$\cdots \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H_2(U\cap V)} \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H_2(U)} \oplus \underset{\substack{\| \\ 0}}{H_2(V)} \to \underset{\substack{\cong \\ \mathbb{Z}}}{H_2(X)} \to \underset{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{H_1(U\cap V)} \to \underset{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{H_1(U) \oplus H_2(V)}$$

$(1,0) \longmapsto (1,-1)$

$(0,1) \longmapsto (1,-1)$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ H_1(X) \\ \downarrow \partial \\ \vdots \end{array}$$

$0 \to ? \to \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \to 0$

$\Downarrow$

$? = \mathbb{Z}$

Scanned with CamScanner

$$0 \to \mathbb{Z} \to H_1(X) \to \underset{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{H_0(U\cap V)} \to \underset{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{H_0(U)\oplus H_0(V)} \to \underset{\mathbb{Z}}{\overset{}{H_0(X)}} \to 0$$

$$(1,0) \mapsto (1,-1)$$
$$(0,1) \mapsto (1,-1)$$

$$\Rightarrow 0 \to \mathbb{Z} \to H_1(X) \to \mathbb{Z} \to 0 \Rightarrow H_1(X) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

Tareas. (1) $0 \to A \to B \to \mathbb{Z}^n \to 0$ exacta de grupos abelianos
$\{e_1,\dots,e_n\}$ base canónica.

$\Rightarrow b_i \mapsto e_i$

$\therefore A\oplus\mathbb{Z}^n \to B$
$(a, a_1, \dots, a_n) \mapsto a + \sum a_i b_i$

(2) Calcular $H_n(T\#T\#\dots\#T)$ (Superficies de Riemann)

dem. (~~Mayer-Vietoris~~).

Para $X = \bigcup_{i\in I} A_i$, $\{A_i\}_{i\in I} = \mathcal{A}$, A_i abiertos

$$C_{\mathcal{A}}(X)_n = \mathbb{Z}\{\sigma : \Delta_n \to X \text{ con } Im(\sigma) \subseteq A_i \ \forall i \in I\}$$

Lema. La inclusión $C_{\mathcal{A}}(X) \hookrightarrow C(X)$ induce isomorfismos en homología.

dem. Consideremos la sucesión exacta corta,

$$0 \to C_{\mathcal{A}}(X) \to C(X) \to C(X)/C_{\mathcal{A}}(X) \to 0$$

$$\Rightarrow \dots \to H_{n+1}(C(X)/C_{\mathcal{A}}(X)) \to H_n(C_{\mathcal{A}}(X)) \to H_n(C(X)) \to H_n(C(X)/C_{\mathcal{A}}(X)) \to \dots$$

Siguiente mostrar que $H_n(C(X)/C_{\mathcal{A}}(X)) = 0 \ \forall n$. Sea $c \in C(X)/C_{\mathcal{A}}(X)$ con $dc = 0 \Rightarrow c$ está representado por algún $\tilde{c} \in C(X)$, con $d\tilde{c} \in C_{\mathcal{A}}(X)$.

$\therefore$ (desde las ideas de excisión) existe subdivisión baricéntrica sd tal que $sd\, sd \ldots sd(\tilde{c}) = sd^m(\tilde{c}) \in C_{\mathcal{A}}(X)$

y $\exists$ una homotopía de cadenas H entre sd^m y 1 tal que:

$$dH(\tilde{c}) + \underbrace{H(\underbrace{d\tilde{c}}_{C_{\mathcal{A}}(X)})}_{C_{\mathcal{A}}(X)} = \underbrace{sd^m(\tilde{c}) - \tilde{c}}_{C_{\mathcal{A}}(X)}$$

$\Rightarrow c = d(\text{clase de } H(\tilde{c})) \Rightarrow$ en homología es cero.

Ahora notar que en nuestro caso

$$C(U) \oplus C(V) / \operatorname{Im}(i_{1\#} - i_{2\#}) = C_{\mathcal{A}}(X) \qquad \mathcal{A} = \{U, V\}$$

$\Rightarrow$ tomar

$$0 \to C(U \cap V) \xrightarrow{i_{1\#} - i_{2\#}} C(U) \oplus C(V) \xrightarrow{j_{1\#} + j_{2\#}} C_{\mathcal{A}}(X) \to 0$$

como $H_n(C_{\mathcal{A}}(X)) \xrightarrow{\simeq} H_n(X)$, aplicar sucesión exacta larga.

Mayer-Vietoris axiomático:

(1) $X = U \cup V$; U, V abiertos

$\Rightarrow$ con $(U, U \cap V) \hookrightarrow (X, V)$ tenemos a través de excisión

$$H_n(U, U \cap V) \xrightarrow{\simeq} H_n(X, V)$$

(2) Por las sucesiones exactas largas para $U \cap V \subset U$, $V \subset X$ tenemos a través de $(U, U\cap V) \hookrightarrow (X,V)$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(U, U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(U) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(U, U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(X,V) \arrow[r] & H_n(V) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & H_n(X,V) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(3) Tarea :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[dr] \arrow[dd] & & B_n \arrow[r, "i"] \arrow[dd, "j"] & C_n \arrow[dr] \arrow[dd] & & B_{n-1} \arrow[r] & \cdots \\
& & A_n \arrow[ur] \arrow[dr] & & & A_{n+1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
\cdots \arrow[r] & E_{n+1} \arrow[ur] & & D_n \arrow[r] & E_n \arrow[ur] & & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

filas son exactas, diagrama conmutativo de grupos abelianos

$\Rightarrow \exists$ sucesión exacta larga:

$$\cdots \to E_{n+1} \to B_n \to C_n \oplus D_n \to E_n \to B_{n-1} \to \cdots$$

$$b \mapsto (i(b), -j(b))$$

Todo se resume en los axiomas de Eilenberg - Steenrod

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Categoría } (X,A) \\ \text{pares esp. topológicos} \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{functores}]{H_n} \left\{ \begin{array}{c} \text{Categoría de} \\ \text{grupos abelianos} \end{array} \right\}$$

(1) Homotopía : Si $h : (X,A) \to (Y,B)$, $g : (X,A) \to (Y,B)$ son homotópicos

$\Rightarrow h_* = g_* : H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$

(2) Exactitud : Para (X,A) existe sucesión exacta larga

$$\cdots \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X,A) \to H_{n-1}(A) \to \cdots$$

(3) Escisión: Para (X,A) y $Z \subset X$, $\bar{Z} \subset \mathring{A} \Rightarrow (X\setminus Z, A\setminus Z) \to (X,A)$ induce isomorfismo $H_n(X\setminus Z, A\setminus Z) \xrightarrow{\simeq} H_n(X,A)$

(4) Aditividad: $X = \coprod_{\alpha\in I} X_\alpha \Rightarrow H_n(X) \cong \bigoplus_{\alpha\in I} H_n(X_\alpha)$

(5) (coeficientes) $H_n(pto) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases}$

Homología Simplicial

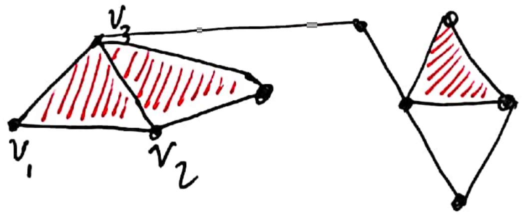
Def. Un complejo simplicial X es una colección de imágenes homeomorfas de símplices standar cuyos vértices se identifican al símplice y tal que

(1) Cada cara de un símplice de K está en K.

(2) Intersección de dos símplices de K es una cara de cada uno.

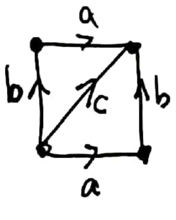
$[v_1, v_2, v_3]$

H_n^Δ



$= |K|$ espacio topológico

def. Un Δ-símplice es un espacio cociente de una colección de símplices standar obtenido a través de identificar alguna de sus caras vía homomorfismos canónicos lineales que preservan el orden de sus vértices

$T =$ 

$0 \to \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z} \to 0$