Universidad de las Américas (UDLA)
Desarrollo Cátedra recuperativa
15 Noviembre, 2018.

Problema 1. La función utilidad $U = U(x,y)$ viene dada por

$$U(x,y) = I(x,y) - C(x,y)$$
$$= 400x - 4x^2 + 1690y - 8y^2 - (100 + 2x^2 + 4y^2 + 2xy)$$
$$= -6x^2 - 12y^2 - 2xy + 400x + 1690y - 100$$

Calculamos el gradiente ∇U:

$$\partial_x U = -12x - 2y + 400, \quad \partial_y U = -24y - 2x + 1690$$

$$\nabla U = (\partial_x U, \partial_y U) = (-12x - 2y + 400, -24y - 2x + 1690)$$

Calculamos los puntos críticos mediante la ecuación $\nabla U = (0,0)$

$\nabla U(x,y) = (0,0)$ es equivalente a $\begin{cases} -12x - 2y + 400 = 0 \\ -2x - 24y + 1690 = 0 \end{cases}$

Sistema de ecuaciones $\begin{cases} 6x + y = 200 \\ x + 12y = 845 \end{cases}$

Desarrollando queda: $x = \dfrac{1555}{71}$, $y = \dfrac{4870}{71}$

$x = \dfrac{1555}{71} \approx 22$, $y = \dfrac{4870}{71} \approx 69$

Verificamos que para x e y dados, la función $U = U(x,y)$ se maximiza:

$$\partial_{xx} U = -12, \quad \partial_{yy} U = -24, \quad \partial_{xy} U = -2, \quad \partial_{yx} U = -2$$

$$\Delta(x,y) = (\partial_{xx} U)(\partial_{yy} U) - (\partial_{xy} U)^2 = (-12)(-24) - 4 = 284 > 0.$$

Efectivamente, $U = U(x,y)$ se maximiza en $x \approx 22$, $y \approx 69$.

Problema 2. Sea A : área de superficie

Buscamos intersecciones de las curvas $y = 10x - x^3$, $y = x$

$$x = y = 10x - x^3 \quad \text{implica} \quad x = 10x - x^3$$

$$0 = 9x - x^3$$

$$0 = x(9 - x^2)$$

$$0 = x(3 - x)(3 + x)$$

las curvas $y = x$, $y = 10x - x^3$ se cortan en $(0,0)$, $(-3;3)$, $(3,3)$.

En ese caso:

$$A = \int_{-3}^{3} |(10x - x^3 - x)|\, dx = \int_{-3}^{3} |9x - x^3|\, dx = \int_{-3}^{3} |x(3+x)(3-x)|\, dx$$

Para $x \in (-3,0)$, $x(3+x)(3-x) < 0$

Para $x \in (0,3)$, $x(3+x)(3-x) > 0$

$$A = \int_{-3}^{0} |9x - x^3|\, dx + \int_{0}^{3} |9x - x^3|\, dx = -\int_{-3}^{0} (9x - x^3)\, dx + \int_{0}^{3} (9x - x^3)\, dx$$

$$= \int_{-3}^{0} (x^3 - 9x)\, dx + \int_{0}^{3} (9x - x^3)\, dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{0} + \left(\frac{9x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{3}$$

$$= -\left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right) + \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{81}{2}$$

$$A = \frac{81}{4} \quad (m)$$

C el costo total en semillas,

$$C = A \cdot 12 = \frac{81}{4} \cdot 12 = 81 \cdot 3 = 243$$

Finalmente, se gasta \$243 en semillas.

Problema 3. $y = y(t)$ cantidad de sal en el estanque:

$$\frac{dy}{dt} = (\text{ritmo de sal que entra}) - (\text{ritmo de sal que sale})$$

$$= (0.03 \cdot 25) - \left(\frac{y}{5000} \cdot 25\right)$$

$$= 0.75 - \frac{y}{200}$$

La ecuación diferencial que modela el problema es $\frac{dy}{dt} = \frac{3}{4} - \frac{y}{200}$

La resolvemos ocupando el método de variables separables:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{150 - y}{200} \Rightarrow \frac{dy}{150-y} = \frac{1}{200} dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{150-y} = \frac{1}{200} \int dt \Rightarrow -\ln|y-150| = \frac{1}{200}t - C$$

$$\ln|y-150| = -\frac{1}{200}t + C$$

Despejamos $y = y(t)$:

$$|y-150| = e^C e^{-\frac{1}{200}t} \Rightarrow y - 150 = \pm e^C e^{-\frac{1}{200}t}$$

$$y = D e^{-\frac{1}{200}t} + 150$$

Ocupando la condición inicial $y(0) = 20$

$$y(0) = 20 = D + 150 \Rightarrow D = -130$$

Finalmente: $y(t) = 150 - 130 e^{-\frac{t}{200}}$

Para calcular cuánta sal hay pasada media hora, calculamos $y(30)$

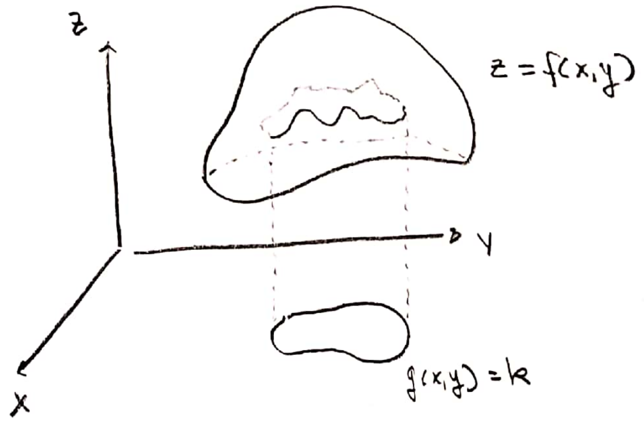
$$y(30) = 150 - 130 e^{-\frac{30}{200}} \approx 38.1 \quad (\text{kg}).$$

Universidad de las Américas

Cálculo II, MAT171

Marzo 3, 2019.

Multiplicadores de Lagrange.



Observación. Una buena representación es imaginar que una persona camina por el sendero marcado en la superficie $z = f(x,y)$, en la cual se pregunta ¿En qué punto alcanzo la altura más alta y más baja?

Teorema. (Método de los multiplicadores de Lagrange).
Las funciones f, g cumplen:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = k \end{cases}$$

para el caso de querer maximizar (minimizar) la función $z = f(x,y)$ en la restricción $g(x,y) = k$.

Ejemplo. Desarrollo problema P1, Guía 4.

Función de Cobb - Douglas $Q = K^{2/3} L^{1/3}$

Restricción: $180 = 6K + 2L$, $K, L \geq 0$.

Si $R = R(K,L) = 6K + 2L$, entonces método de multiplicadores de Lagrange dice que:

$$\begin{cases} \nabla Q = \lambda \nabla R \\ R = 180 \end{cases}$$

$$\partial_K Q = \frac{2}{3} K^{-1/3} L^{1/3} \quad , \quad \partial_L Q = \frac{1}{3} K^{2/3} L^{-2/3}$$

$$\partial_K R = 6 \quad , \quad \partial_L R = 2 .$$

sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{2}{3} K^{-1/3} L^{1/3} = \lambda 6 \\ \frac{1}{3} K^{2/3} L^{-2/3} = \lambda 2 \\ 6K + 2L = 180 \end{cases} \quad , \quad \lambda \neq 0 .$$

Dividiendo las 2 primeras igualdades:

$$2 K^{-1} L = 3$$
$$L = \frac{3}{2} K$$

Reemplazando en la tercera ecuación:

$$180 = 6K + 2L = 6K + 3K = 9K$$

$$K = 20$$

Podemos despejar L: $2L + 120 = 180 \Rightarrow L = 30$

Luego, Q se maximiza para $(K,L) = (20,30)$,

$$Q(20,30) = 20^{2/3} 30^{1/3} = (7.3680)(3.107) = 22.89\ldots \approx 23$$

Ejemplo. Hallar los máximos y mínimos de la función

$$f(x,y) = 20x - 4x^2 + 9xy - 6y^2 + 18y$$

sujeta a la restricción $x + 3y = 64$.

Desarrollo. $f_x = 20 - 8x + 9y$, $g_x = 1$

$f_y = 18 + 9x - 12y$ $\qquad g_y = 3$

$\nabla f = \lambda \nabla g$ es equivalente a $\begin{cases} 20 - 8x + 9y = \lambda \\ 18 - 9x - 12y = 3\lambda \end{cases}$

Luego tenemos:

$$\begin{cases} 20 - 8x + 9y = \lambda \\ 18 - 9x - 12y = 3\lambda \\ x + 3y = 64 \end{cases}$$

De las primeras 2 ecuaciones:

$$18 - 9x - 12y = 3(20 - 8x + 9y) = 60 - 24x + 27y$$

$$\Rightarrow \quad 15x - 39y - 42 = 0$$

Tenemos sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + 3y = 64 \\ 15x - 39y = 42 \end{cases}$

$x = 64 - 3y$, quedando:

$$42 = 15x - 39y = 15(64 - 3y) - 39y$$

$$42 = 960 - 84y$$

$$y = 10.92\ldots \approx 11$$

luego, $x = 64 - 33 = 31$

El extremo de la funcion f se alcanza en $x = 31$, $y = 11$

Pregunta: ¿Dicho extremo es un máximo o mínimo?

Veamos que $x = 64 - 3y$

$$f(x,y) = g(y) = 20(64-3y) - 4(64-3y)^2 + 9(64-3y)y - 6y^2 + 18y$$

$$= 1280 - 60y - 16384 + 1536y - 36y^2 + 576y - 27y^2 - 6y^2 - 18y$$

$$= -69y^2 + 2034y - 15104$$

$g(y)$ es una parábola que se abre hacia abajo

$\therefore$ $f(x,y)$ no se minimiza en $x + 3y = 64$.

Universidad de las Américas.
Cálculo II, MAT171, IMFE
Marzo 26, 2019.

Desarrollo Cátedra 1.

Problema 1. $f(1,4) \approx 60$
$f(2,2) \approx 80$
$f(4,4) \approx 70$
$f(3,2) \approx 50$

Luego: $\dfrac{f(1,4)+2f(2,2)-5f(4,4)}{f(3,2)} \approx \dfrac{60+2\cdot 80-5\cdot 70}{50} \approx -\dfrac{130}{5} = -2.6$.

Problema 2. Encontramos la función $V=V(P,T)$

$$V = 8\cdot\frac{T}{P}$$

Ocupando regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{8T}{P^2}\cdot\frac{dP}{dt} + \frac{8}{P}\cdot\frac{dT}{dt}$$

Como $T=300$, $\dfrac{dT}{dt}=0.1$, $P=20$, $\dfrac{dP}{dt}=-0.2$:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{8\cdot 300}{20^2}\cdot(-0.2) + \frac{8}{20}\cdot 0.1 = 1.24$$

Por lo tanto: $\dfrac{dV}{dt} = 1.24 \ (L/s)$

Problema 3.

$$I(x,y) = 200 + 504x + 482y - 10x^2 - 20y^2$$
$$C(x,y) = 4x + 3y.$$

G : función de Ganancia,

$$G(x,y) = I(x,y) - C(x,y) = 200 + 504x + 482y - 10x^2 - 20y^2 - (4x + 2y)$$
$$= 200 + 500x + 480y - 10x^2 - 20y^2$$

Calculamos puntos críticos de G mediante la ecuación $\nabla G = (0,0)$:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 500 - 20x \ , \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 480 - 40y$$
$$\nabla G = (500 - 20x, \ 480 - 40y)$$

$\nabla G = (0,0)$ siempre y cuando

$$\begin{cases} 500 - 20x = 0 \\ 480 - 40y = 0 \end{cases}$$

Luego $x = \frac{500}{20} = 25$, $y = \frac{480}{40} = 12$

Ahora vemos que G se maximiza en $(x,y) = (25,12)$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -20 \ , \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -40 \ , \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = 0$$

Luego: $\Delta(25,12) = (-20)(-40) - 0^2 = 800 > 0$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(25,12) = -20 < 0$$

Así, G se maximiza en $x = 25$ e $y = 12$

Problema 4.

$$\begin{cases} Q(x,y) = 60x^{1/2}y^{1/2} \\ x+y = 120.000 \\ x>0,\ y>0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 30x^{-1/2}y^{1/2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 30x^{1/2}y^{-1/2}$$

Si $R(x,y) = x+y$, entonces

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 1$$

Se debe estudiar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 30x^{-1/2}y^{1/2} = \lambda \cdot 1 \\ 30x^{1/2}y^{-1/2} = \lambda \cdot 1 \\ x+y = 120000 \end{cases}, \quad \text{donde } \lambda \neq 0.$$

Dividiendo las 2 primeras ecuaciones

$$1 = \frac{\lambda}{\lambda} = \frac{30x^{-1/2}y^{1/2}}{30x^{1/2}y^{-1/2}} = x^{-1}y \quad \Rightarrow \boxed{x=y}$$

Reemplazando en $x+y=120.000$

$$120000 = x+y = 2x \quad \Rightarrow \quad x = 60.000$$

Como $y = 120.000 - x \Rightarrow y = 60.000$

Luego, se debe invertir US\$60000 en mano de obra y US\$60000 en equipo.

Verificar

Universidad de las Américas
Cálculo II, MAT171
Abril 04, 2019.

Problema 2. $D(x,y) = \dfrac{10 - x^2 y}{y^2} = \dfrac{10}{y^2} - \dfrac{x^2}{y}$

$D_x = -\dfrac{2x}{y}$

$D_y = -\dfrac{20}{y^3} + \dfrac{x^2}{y^2}$

Demanda marginal con respecto al producto A:

$$\partial_x D = \frac{10 - 2xy}{y^2}$$

Demanda marginal con respecto al producto B:

$$\partial_y D = \frac{(10 - x^2)y^2 - (10 - x^2 y)(2y)}{y^4} = \frac{10y^2 - x^2y^2 - 20y + 2x^2y^2}{y^4}$$

$$= \frac{x^2y^2 + 10y^2 - 20y}{y^4}$$

$D_x(1,10) = -\dfrac{2}{10} = -0.\cancel{8}$

$D_y(1,10) = -\dfrac{20}{1000} + \dfrac{1}{100}$

$= -\dfrac{2}{100} + \dfrac{1}{100}$

$= -0{,}01$

Luego:

$$\partial_x D(1,10) = \frac{10 - 2\cdot 1 \cdot 10}{10^2} = -0.1$$

$$\partial_y D(1,10) = \frac{1^2 \cdot 10^2 + 10\cdot 10^2 - 20\cdot 10}{10^4} = 0.09$$

Por lo tanto: $\partial_x D(1,10) = -0.1$, $\partial_y D(1,10) = 0.09$.

Scanned with CamScanner

Universidad de las Américas
Calculo II
Abril 06, 2019

Ejemplos Resueltos.

Problema 1. Calcular f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} para $f(x,y) = x^2y + xy^3 - xy$

Desarrollo.

$$f_x = 2xy + y^3 - y \quad , \quad f_{xx} = 2y$$

$$f_y = x^2 + 3xy^2 - x \quad , \quad f_{yy} = 6xy$$

$$f_{xy} = 2x + 3y^2 - 1$$

Problema 2. Encontrar puntos críticos de la función

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 15$$

Desarrollo. Hay que estudiar la ecuación $\nabla f = (0,0)$:

$$f_x = 2x - 4 \quad , \quad f_y = 2y - 6$$

Luego: $\nabla f = (2x-4, 2y-6)$

La ecuación queda:

$$\begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

Solución: $x = 2$, $y = 3$.

Respuesta: El único punto crítico de f es $(2,3)$.

Problema 3. Encuentre maximos locales, mínimos locales, puntos silla de la función $f(x,y) = x^4+y^4-4xy+1$

Desarrollo.

$$f_x = 4x^3-4y, \qquad f_y = 4y^3-4x$$

La ecuación $\nabla f = (0,0)$ se transforma en:

$$\begin{cases} 4x^3-4y=0 \\ 4y^3-4x=0 \end{cases}$$

De la primera ecuación: $y=x^3$.

Reemplazamos en la 2° ecuación:

$$0 = 4y^3-4x = 4(x^3)^3-4x = 4x^9-4x$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 4x^9-4x$$

$$\Rightarrow \quad 0 = x^9-x = x(x^8-1)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = x(x^4-1)(x^4+1)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = x(x^2+1)(x^2-1)(x^4+1)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = x(x^2+1)(x-1)(x+1)(x^4+1)$$

Luego, $4x^9-4x=0$ siempre y cuando $x=0, 1, -1$

Para $x=0$, $y=0$

Para $x=1$, $y=1$

Para $x=-1$, $y=-1$

Los puntos críticos de f son $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$.

Para saber quién es máximo local, mínimo local o punto silla, ocupamos el critério de la segunda derivada:

$$f_{xx} = 8x^2 \quad , \quad f_{yy} = 8y^2 \quad , \quad f_{xy} = -4$$

$$\Delta(0,0) = f_{xx}(0,0)\, f_{yy}(0,0) - (f_{xy}(0,0))^2$$
$$= 0 \cdot 0 - (-4)^2 = -16$$

Análogamente: $\Delta(1,1) = 8 \cdot 8 - 16 = 48$
$\Delta(-1,-1) = 8 \cdot 8 - 16 = 48$

- $\Delta(1,1) > 0$, $f_{xx}(1,1) > 0 \Rightarrow f(1,1)$ es un mínimo local
- $\Delta(-1,-1) > 0$, $f_{xx}(-1,-1) > 0 \Rightarrow f(-1,-1)$ es un mínimo local
- $\Delta(0,0) < 0 \Rightarrow (0, 0, f(0,0))$ es un punto silla.

UDLA

Calculo II . MAT171.

Proyecto Taller Ejercicios 2.

Octubre 2, 2018.

Problema 1. Calcule la siguiente integral $\int_1^2 \frac{1}{1-2x}\,dx$

Desarrollo. Ocupamos el siguiente cambio de variable : $1-2x=u$

$1-2x=u \Rightarrow du=-2dx$, para $x=1$, $u=-1$

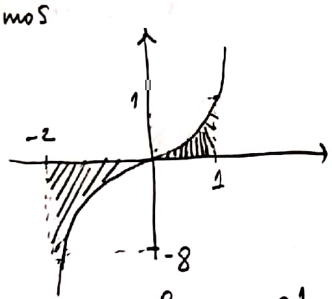
$dx=-\frac{du}{2}$ $\qquad x=2$, $u=-3$

Teorema de cambio de variable dice : $\int_1^2 \frac{1}{1-2x}dx = \int_1^{-3} -\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{2}du = -\frac{1}{2}\int_1^{-3}\frac{1}{u}du = -\frac{1}{2}\ln|u|\Big|_1^{-3} = -\frac{1}{2}(\ln(3)-\ln(1))$

Por lo tanto : $\int_1^2 \frac{1}{1-2x}dx = -\frac{1}{2}\ln(3)$.

Problema 2. Calcular el area de la región R delimitada por $f(x)=x^3$, $y=0$, $x=-2$, $x=1$.

Desarrollo. Graficamos

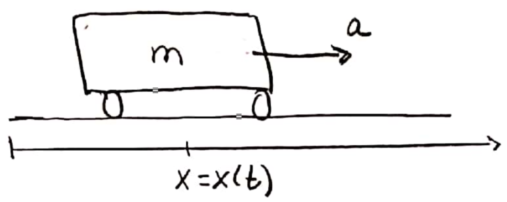


A : Area región achurada.

$$A=\int_{-2}^{0}-x^3dx+\int_0^1 x^3dx = -\int_{-2}^{0}x^3dx+\int_0^1 x^3dx = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0}+\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{16}{4}+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}.$$

Universidad de las Américas
Cátedra: Aplicaciones de ecuaciones diferenciales
Noviembre 09, 2018

Aplicación 1: Movimiento uniformemente acelerado.



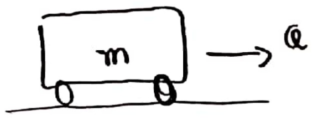
Carro de masa m.
Segunda ley de Newton dice que : $F = ma = m x''(t)$
Cancelando queda:
$$a = x''(t)$$

Suponemos que a es constante. Integrando 2 veces queda
$$x(t) = C_2 + C_1 t + \frac{at^2}{2}$$; C_1, C_2 constantes.

Para el problema de valor inicial:
$$\begin{cases} a = x'' \\ x(0) = x_0 \rightarrow \text{posición inicial} \\ x'(0) = v_0 \rightarrow \text{Velocidad inicial} \end{cases}$$

La expresión $x = x(t)$ queda $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

Ejemplo. Resolver el problema de valor inicial:
$$\begin{cases} x'' = 1 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$



$$x(t) = 1 + 0 \cdot t + \frac{t^2}{2} = 1 + \frac{t^2}{2}$$

Ejemplo. Caída libre.

Galileo: "Todos los cuerpos caen con la misma aceleración que es debido a la fuerza de gravedad".

En este caso: $a = -g$, donde $g = 9.8\ (m/s^2)$

$y = y(t)$: altura del cuerpo en función del tiempo t.

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{g t^2}{2}$$

Aplicación 2. Ley de enfriamiento de Newton.

$T = T(t)$: temperatura de un cuerpo en función del tiempo

A: temperatura ambiente (constante)

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T)$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

Ejemplo. Resolver el problema de la taza de café.

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(A - T) \\ T(0) = 89\,^\circ C \\ A = 22\,^\circ C \\ T(1) = 85\,^\circ C \end{cases}$$

Aplicación 8. Crecimiento y decrecimiento poblacional.

$P = P(t)$: población en función del tiempo t

k : constante de proporcionalidad:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Si $\begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP \\ P(t_0) = P_0 \end{cases}$, entonces $P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}$

Ejemplo. La población de una pequeña ciudad crece, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional a la cantidad de habitantes en dicho instante. Su población inicial de 500 aumenta 15% en 10 años ¿Cuál será la población dentro de 30 años?

Desarrollo.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP \\ P(0) = 500 \end{cases}$$

Se tiene $P(t) = 500\, e^{kt}$

El 15% de 500 es 75. Luego $P(10) = 575$

$$P(10) = 500\, e^{k \cdot 10} = 575 \Rightarrow e^{10k} = \frac{575}{500} \Rightarrow k \approx 0.014$$

Reemplazando: $P(t) = 500\, e^{0.014t}$

Para $t = 30$: $P(30) \approx 761$ (Habitantes).

Universidad de las Américas
Calculo II, MAT171
Mayo 08, 2019.

Aplicaciones de la integral.

Problema 1 (Excedente consumidor v/s excedente productor)

Empresa vende televisores LED, donde la demanda y oferta de la compañía por x televisores es:

$$D(x) = 20 - 0.05x$$
$$O(x) = 2 + 0.0002x^2$$

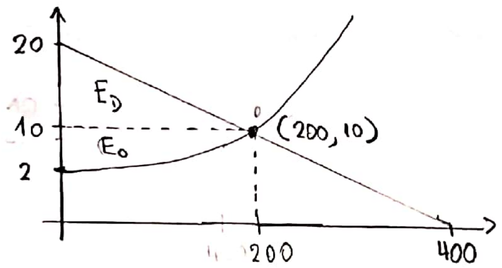
1. Calcule el excedente del consumidor y el excedente del productor.

Desarrollo. Primero buscamos el punto de equilibrio

$$D(x) = O(x) \iff 20 - 0.05x = 2 + 0.0002x^2$$
$$\iff 0.0002x^2 + 0.05x - 18 = 0$$
$$\iff x_1 = 200 \ ; \ x_2 = -450$$

Pto de equilibrio es $(200, 10)$

Graficamos para entender el contexto:



E_D: Excedente de demanda (consumidor)
E_O: Excedente de oferta (productor)

$$E_D = \int_0^{200} (D(x) - 10)\,dx = 1000$$

$$E_O = \int_0^{200} (10 - O(x))\,dx = \frac{3200}{3} \approx 1067.$$

Problema 2. (Cambio de variable).

Calcule la integral definida $\int_1^2 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

Desarrollo. Mediante el cambio de variable $e^x = u$

$$du = e^x dx = u\,dx$$

También se deben cambiar los límites de integración:

x	u
1	$e^1 = e$
2	e^2

Luego la integral queda de la siguiente manera:

$$\int_1^2 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int_e^{e^2} \frac{du}{u+1} = \ln|u+1|\Big|_e^{e^2} = \ln|e^2+1| - \ln|e+1|$$

$$= \ln\left|\frac{e^2+1}{e+1}\right| = \ln\left(\frac{e^2+1}{e+1}\right)$$

ya que $\frac{e^2+1}{e+1} > 0$

Problema 3 (Integración por partes). Calcular la integral $\int_0^1 x\cos(x)\,dx$

Desarrollo. Mediante integración por partes, queda lo siguiente:

$$\int_0^1 x\cos(x)\,dx = x\,\mathrm{sen}(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{sen}(x)\,dx$$

$$= x\,\mathrm{sen}(x)\Big|_0^1 - (-\cos(x))\Big|_0^1$$

$$= x\,\mathrm{sen}(x)\Big|_0^1 + \cos(x)\Big|_0^1$$

$$= (1\,\mathrm{sen}(1) - 0\,\mathrm{sen}(0)) + (\cos(1) - \cos(0))$$

$$= \mathrm{sen}(1) + \cos(1) - 1. \quad //$$

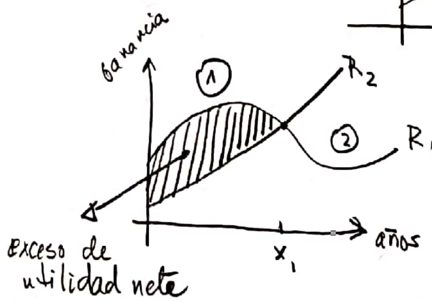
Universidad de las américas
Cálculo 2.
Proyecto clase Integrales_4
Octubre 3, 2018.

Aplicaciones a la economía.

Aplicación 1. Estudio de la utilidad neta.

Plan de inversión 1 : ritmo de ganancia $R_1(x)$ dólares en x años
Plan de inversión 2 : ritmo de ganancia $R_2(x)$ dólares en x años.

Gráficamente :

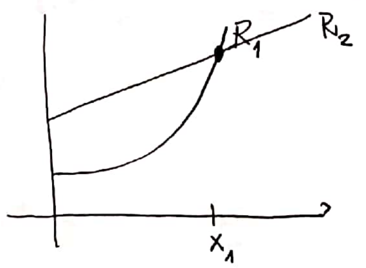


Para $x \in [0, x_1]$ más rentable plan 1 porque $R_1(x) \geq R_2(x)$
Para $x \in [x_1, \infty)$ más rentable plan 2 porque $R_2(x) \geq R_1(x)$

E : exceso de utilidad neta

$$E = \int_0^{x_1} (R_1(x) - R_2(x))\,dx$$

Ejemplo: $R_1(x) = 50 + x^2$, $R_2(x) = 200 + 5x$



En $[0, x_1]$ el plan 2 es más rentable que el plan 1.

$$R_1(x_1) = R_2(x_1) \iff 50 + x_1^2 = 200 + 5x_1$$
$$\iff x_1^2 - 5x_1 - 150 = 0$$
$$\iff (x_1 - 15)(x_1 + 10) = 0$$

Como $x_1 \geq 0$ (años), entonces $x_1 = 15$ (años)

En los primeros 15 años plan 2 es más rentable que plan 1.

$$E = \int_0^{15} (R_2(x) - R_1(x))\,dx = \int_0^{15} (200 + 5x - 50 - x^2)\,dx = \int_0^{15} (150 + 5x - x^2)\,dx = 150x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{15}$$

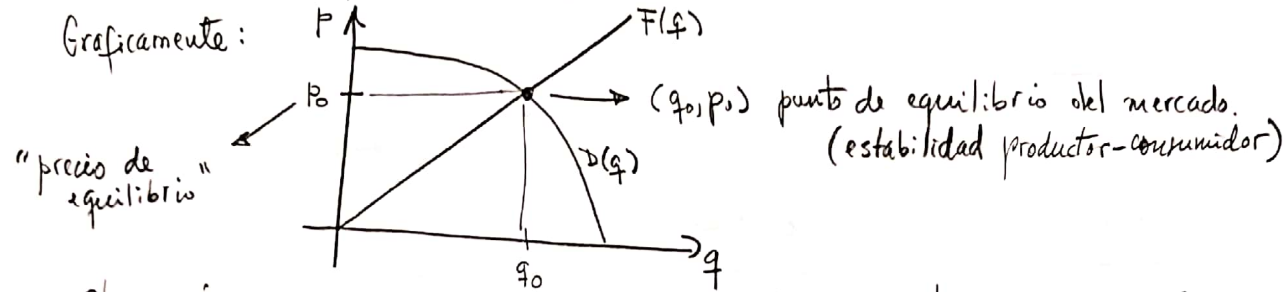
$$= 2250 + \frac{5 \cdot 225}{2} - \frac{15^3}{3}$$

Aplicación 2. Excedente de los consumidores (excedente de demanda) vs excedente de producción (excedente de oferta).

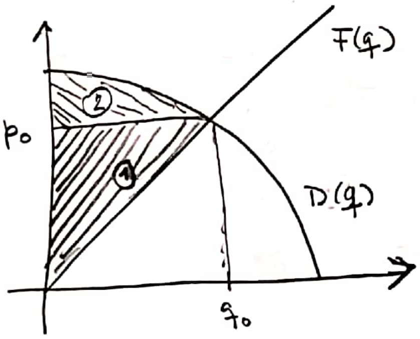
$F(q)$: curva de oferta de q unidades
$D(q)$: curva de demanda de q unidades.

El producto cuesta p dólares / unidad para q unidades

Gráficamente:



Observación 1. • Inicialmente los consumidores están dispuestos a pagar $\geq p_0$ por unidad de producto
• Los productores están dispuestos a ofrecer el producto a precio $\leq p_0$.



① Excedente de oferta (E_1)
② Excedente de demanda. (E_2)

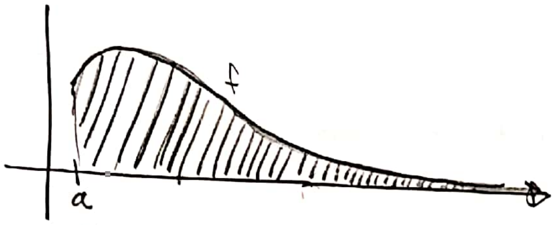
Calculamos las áreas ① y ② :
$$E_1 = \int_0^{q_0} (p_0 - F(q))\,dq \quad , \quad E_2 = \int_0^{q_0} (D(q) - p_0)\,dq$$

Integrales impropias.

f continua en $[a,\infty)$, se define

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Graficamente:



Ejemplo. Calcular $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$.

Desarrollo $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx$. Calculamos $\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = -\frac{1}{b}+1$

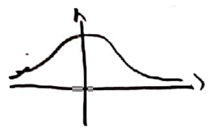
luego:- $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = \lim_{b\to\infty} 1 - \lim_{b\to\infty}\frac{1}{b} = 1-0 = 1.$

Observación: Analogamente se define $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

Propiedad fundamental: Para cualquier $c\in\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$

Aplicación 3. Probalilidades.

f es una función de probabilidad si $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = 1$, $f(x)\geq 0\ \forall x$



Para X variable aleatoria con f como función de probabilidad:

$$\underbrace{P(a\leq X\leq b)}_{\text{probalidad de que la variable aleatoria esté entre } a \text{ y } b.} = \int_a^b f(x)dx, \quad P(a\leq X) = \int_a^\infty f(x)dx, \quad P(X\leq b) = \int_{-\infty}^b f(x)dx$$

Ejemplo 1:

$$f(x) = \begin{cases} 0.006\,x(10-x) & , \; x \in [0,10] \\ 0 & , \; \text{en otro caso}. \end{cases}$$

1. f es una función de probabilidad
2. $P(4 \leq X \leq 8) = 0.544$

Ejemplo:

COMPAÑÍA

Tiempo de respuesta = 5 min promedio.

$f(x)$: función de probabilidad que modela el tiempo de respuesta

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0.2e^{-t/5} & t \geq 0 \end{cases}$$

(a) $P(0 \leq T \leq 1)$ probabilidad que respondan antes del primer minuto.

$$P(0 \leq T \leq 1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 0.2e^{-t/5}\,dt \approx 0.1813 \quad (\approx 18\%)$$

(b) $P(5 \leq T)$ probabilidad de que respondan después de 5 min (que tarden 5 min en responder)

$$P(5 \leq T) = \int_5^\infty f(t)\,dt = \int_5^\infty 0.2e^{-t/5}\,dt \approx 0.368 \quad (\approx 36\%)$$

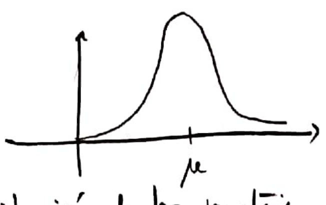
Distribución normal:

La distribución normal es $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$

σ: desviación estándar

μ: media

Gráficamente:



Aplicación. Distribución de los puntajes PSU.

Universidad de las Américas
Calculo II, MAT 171
Mayo 22, 2019

Introducción a las ecuaciones diferenciales de variables separables.

Observación. Por el momento, nos interesa resolver ecuaciones diferenciales de primer orden (la derivada más alta que aparece es la primera)

Definición: Una ecuación de variables separables es una ecuación del tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Definición: Un problema de valores iniciales es un problema del tipo:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Ejemplo. Supongamos que queremos resolver el PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La solución es una función del tipo $y = y(x)$.
Teorema fundamental del cálculo: $y(x) = \int_0^x 3t^2 dt + 1 = x^3 + 1$.
Segunda forma de desarollo:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dy = 3x^2 dx \Rightarrow \int dy = \int 3x^2 dx$$
$$\Rightarrow y = x^3 + C \quad (\text{Solución general})$$

$y(0) = 1 \Rightarrow y(0) = 0^3 + C = 1 \Rightarrow C = 1$
Solución particular es $y(x) = x^3 + 1$.

Algunas observaciones:

1. El argumento de g es y (una función)
2. El argumento de f es x (variable independiente)

Para resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ procedemos de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad / \; g(y) \neq 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

Si $g(y)=0$, entonces $\frac{dy}{dx} = 0$. La solución es $y(x) = C$ (constante)

Ejemplo. $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-2)$

Desarrollo. En este caso $f(x) = x+1$, $g(y) = y-2$.

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-2) \Rightarrow \frac{dy}{y-2} = (x+1)dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y-2} = \int (x+1)dx$$

Lo último queda: $\ln|y-2| = \frac{x^2}{2} + x + C \quad / \cdot \exp(\;\;)$

$$|y-2| = \exp\left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)$$

$$= \exp(C)\exp\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$$

$$y-2 = \underbrace{\pm\exp(C)}_{\text{sigue siendo constante}} \exp\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$$

$$y = D\exp\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + 2, \quad \text{donde } D \neq 0.$$

Supongamos ahora que $g(y)=0$ $(y=2)$:

La solución automáticamente es $y=2$.

Scanned with CamScanner

<u>Observación</u>. De la solución general $y(x) = D\exp\left(\frac{x^2}{2}+x\right)+2$

$D=0$ implica $y(x)=2$.

<u>Ejemplo</u>. Supongamos que queremos resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = (x+1)(y-2) \\ y(0)=1 \end{cases}$$

Desarrollo. La condición inicial $y(0)=1$ implica $y\neq 2$.

luego:

$$y(x) = D\exp\left(\frac{x^2}{2}+x\right)+2$$

$y(0)=1 \iff 1 = D\exp\left(\frac{0^2}{2}+0\right)+2 = D\cdot 1+2$

Por lo tanto: $D=-1$

Solución particular: $y(x) = -\exp\left(\frac{x^2}{2}+x\right)+2$

Aplicación : Crecimiento y decrecimiento poblacional.

$P = P(t)$: población en función del tiempo t

k : Constante de proporcionalidad

PVI :
$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = kP \\ P(t_0) = P_0 \end{cases}$$

Tiene por solución general $P(t) = P_0\, e^{k(t-t_0)}$

Ejemplo. La población de una pequeña ciudad crece, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional a la cantidad de habitantes en dicho instante. Su población inicial es de 500 habitantes y aumenta 15% en 10 años ¿Cuál será la población dentro de 30 años?

Desarrollo.
$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = kP \\ P(0) = 500 \end{cases}$$

La solución general es $P(t) = 500\, e^{kt}$

El 15% de 500 es 75. Luego $P(10) = 575$.

$$P(10) = 500 \cdot e^{k \cdot 10} = 575 \Rightarrow e^{10k} = \frac{575}{500}$$

$$\Rightarrow k \approx 0.014$$

Reemplazando : $P(t) = 500\, e^{0.014t}$

Para $t = 30$: $P(30) \approx 761$ (Habitantes).

Universidad de las Américas
Cálculo II
junio 12, 2016.

Ejemplos resueltos ecuaciones diferenciales.

Problema 1. Ley de enfriamiento de Newton dice que

$$\frac{d}{dt} = k(T - A)$$

donde $T = T(t)$ es la temperatura del objeto y A es la temperatura ambiente.
Encuentre T para $A = A_0 \cos(\omega t)$, donde ω es una constante.
Desarrollo.

$$\frac{dT}{dt} = k(T-A) \iff \frac{dT}{dt} - kT = -A_0 k \cos(\omega t)$$

Factor integrante es $\mu(t) = \exp\left(\int -k\,dt\right) = \exp(-kt)$

Luego: $$T(t) = \mu(t)^{-1}\left(\int \mu(t)(-A_0 k \cos(\omega t))\,dt + B\right)$$
$$= \exp(kt)\left(-A_0 k \int \exp(-kt)\cos(\omega t)\,dt + B\right)$$

$$\int \exp(-kt)\cos(\omega t)\,dt = -\frac{1}{k}\exp(-kt)\cos(\omega t) + \frac{\omega}{k}\int \exp(-kt)(-\operatorname{sen}(\omega t))\,dt$$
$$= -\frac{1}{k}\exp(-kt)\cos(\omega t) - \frac{\omega}{k}\int \exp(-kt)\operatorname{sen}(\omega t)\,dt$$

$$\int \exp(-kt)\operatorname{sen}(\omega t)\,dt = -\frac{1}{k}\exp(-kt)\operatorname{sen}(\omega t) + \frac{\omega}{k}\int \exp(-kt)\cos(\omega t)\,dt$$

$$\int \exp(-kt)\cos(\omega t)dt = -\frac{1}{k}\exp(-kt)\cos(\omega t) - \frac{\omega}{k}\left(-\frac{1}{k}\exp(-kt)\operatorname{sen}(\omega t) + \frac{\omega}{k}\int \exp(-kt)\cos(\omega t)dt\right)$$

$$= -\frac{1}{k}\exp(-kt)\cos(\omega t) + \frac{\omega}{k^2}\exp(-kt)\operatorname{sen}(\omega t) - \frac{\omega^2}{k^2}\int \exp(-kt)\cos(\omega t)dt$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{\omega^2}{k^2}\right)\int \exp(-kt)\cos(\omega t)dt = \frac{1}{k}\exp(-kt)\left(\frac{\omega}{k}\operatorname{sen}(\omega t) - \cos(\omega t)\right)$$

$$\int \exp(-kt)\cos(\omega t)dt = \frac{k}{k^2+\omega^2}\exp(-kt)\left(\frac{\omega}{k}\operatorname{sen}(\omega t) - \cos(\omega t)\right)$$

Finalmente:

$$T(t) = \exp(kt)\left(-A_0 k^2 \frac{1}{k^2+\omega^2}\exp(-kt)\left(\frac{\omega}{k}\operatorname{sen}(\omega t) - \cos(\omega t)\right) + B\right)$$

$$T(t) = -A_0\frac{k^2}{k^2+\omega^2}\left(\frac{\omega}{k}\operatorname{sen}(\omega t) - \cos(\omega t)\right) + B\exp(kt)$$

Supongamos $T(0)=T_0$:

$$T(0) = -A_0\frac{k^2}{k^2+\omega^2}(-1) + B = \frac{A_0 k^2}{k^2+\omega^2} + B$$

$$T(0) = T_0 \iff B = T_0 - \frac{A_0^2 k^2}{k^2+\omega^2}$$

La solución particular es:

$$T(t) = -A_0\frac{k^2}{k^2+\omega^2}\left(\frac{\omega}{k}\operatorname{sen}(\omega t) - \cos(\omega t)\right) + \left(T_0 - \frac{A_0^2 k^2}{k^2+\omega^2}\right)\exp(kt)$$

Aplicación a la economía: Interés compuesto capitalizado continuamente.

Modelo de capitalización: Sea $Q(t)$ cantidad de dinero en el instante t:

$$\frac{dQ}{dt} = rQ$$

Ecuación de variables separables, con solución:

$$Q(t) = Ce^{rt}$$

Si $Q(0) = Q_0$, entonces $Q(t) = Q_0 e^{rt}$

Ejemplo. En una cuenta de ahorro se depositan \$ 5000 en un banco que paga 5% de interés anual con una capitalización continua. Calcule la cantidad de dinero pasado 5 años.

Desarrollo. $Q(t) = Q_0 e^{rt}$, $Q(0) = 5000$, t en años.

$$Q(t) = 5000\, e^{rt}$$

Condición: 5% anual,

$$Q(1) = 5000 + 250 = 5250$$

$$Q(1) = 5000\, e^{r} = 5250 \iff e^{r} = \frac{5250}{5000} \Rightarrow r \approx 0.048$$

$$Q(t) = 5000\, e^{0.05t}$$

$$Q(5) = 6420.127$$

Aplicación de las ecuaciones diferenciales lineales: Problema de mezclas.

$y = y(t)$: cantidad de sustancia presente en un estanque en el instante t

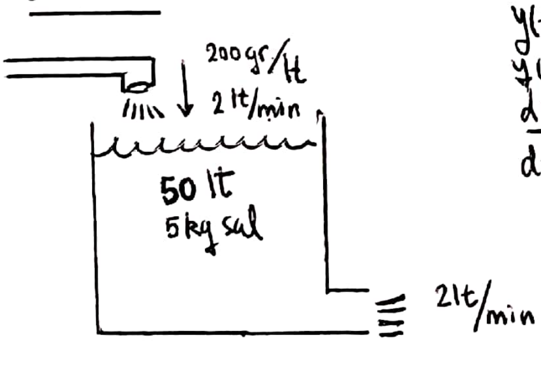
$\frac{dy}{dt}$: razón de cambio (taza de cambio) de la sustancia en el estanque

$$\frac{dy}{dt} = (\text{razón de entrada sustancia}) - (\text{razón de salida sustancia})$$

razón de entrada sustancia = (razón de flujo de entrada) × (concentración)
razón de salida sustancia = (razón de flujo de salida) × (concentración)

Ejemplo. Un estanque en estado inicial contiene 50 litros de agua en los que se ha disuelto 5 kg de sal (es decir, la concentración inicial es de 100 gr/litro). Otra mezcla que contiene 200 gramos de sal por litro de agua es bombeada con una rapidez de 2 litros por minuto. Supongamos que el estanque mezcla de manera perfecta. La solución mezclada es bombeada es bombeada hacia el exterior con una rapidez de 2 litros por minuto. Calcule la cantidad de sal en el estanque transcurrido 30 min.

Desarrollo.



$y(t)$: cantidad de sal (gramos) en el estanque en t (min)

$y(0) = 5000$

$\frac{dy}{dt} = (\text{razón entrada sust}) - (\text{razón de salida sust})$

razón entrada sust $= 2\,lt/_{min} \cdot 200\,gr/_{lt} = 400\,gr/_{min}$

razón de salida sust $= 2\,lt/_{min} \cdot \frac{y(t)}{V(t)}$

$V(t)$: volumen de agua en el estanque en tiempo t

$V(t) = 50$ (lt)

Queda la ecuación: $\frac{dy}{dt} = 400 - \frac{y(t)}{25} \iff \frac{dy}{dt} + \frac{y}{25} = 400$

Se debe resolver el siguiente PVI :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{y}{25} = 400 \\ y(0) = 5000 \end{cases}$$

Universidad de las Américas
Cálculo II
Junio 05, 2019.

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Definición. Una ecuación diferencial lineal de primer orden es de la forma

$$a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = g(x)$$

donde $a_1 = a_1(x)$, $a_2 = a_2(x)$, $a_1 \neq 0$.

Observar lo siguiente:

$$a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{a_2}{a_1} y = \frac{g(x)}{a_1}$$

La ecuación queda de la forma: $\frac{dy}{dx} + p(x) y = q(x)$

Método de resolución:

$$\frac{dy}{dx} + p(x) y = q(x) \xrightarrow{\mu(x) = \exp\left(\int p(x)dx\right)} \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x)$$

Ejercicio. $\mu'(x) = p(x)\mu(x)$

La ecuación queda de la forma: $\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu'(x)y = \mu(x)q(x)$

Luego:

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)q(x) \quad / \int dx$$

$$\mu(x)y = \int \mu(x)q(x)dx + C$$

$$y = \mu(x)^{-1}\left(\int \mu(x)q(x)\,dx + C\right)$$

Definición. $\mu(x)$ se llama el factor integrante.

Ejemplo. $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x$

Desarrollo. $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x \implies \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{4}{x}y = x^5 e^x$

Es una ecuación lineal de primer orden: $p(x) = -\dfrac{4}{x}$, $q(x) = x^5 e^x$

Factor integrante: $\mu(x) = \exp\left(\int p(x)\,dx\right)$

$$\mu(x) = \exp\left(\int p(x)\,dx\right) = \exp\left(\int -\frac{4}{x}\,dx\right) = \exp\left(-4\ln|x|\right) = \frac{1}{x^4}$$

La solución es:

$$y = \mu(x)^{-1}\left(\int \mu(x)q(x)\,dx + C\right) = x^4\left(\int \frac{x^5e^x}{x^4}\,dx + C\right)$$

Falta calcular $\int \dfrac{x^5 e^x}{x^4}\,dx = \int x e^x\,dx$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$$

Finalmente, la solución $y = y(x)$ queda de la siguiente manera:

$$y(x) = x^4\left(xe^x - e^x + C\right)$$

Scanned with CamScanner

Universidad de las Américas
Cálculo II, MA171
Junio 17, 2019

Desarrollo Cátedra 3, MAT171

Problema 1.

$Q = Q(t)$: cantidad de dinero (en pesos) que hay en la cuenta de ahorro para $t \geq 0$.

Modelo de capitalización : $\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = rQ \\ Q(0) = 1000000 \end{cases}$

interés anual del 5 % $\Rightarrow Q(1) = 1000000 + 50000 = 1050000$

Tenemos : $Q(t) = Q_0 e^{rt}$, $Q_0 = Q(0) = 1000000$

$$1050000 = Q(1) = 1000000 e^{r \cdot 1} \Rightarrow e^r = \frac{1050000}{1000000}$$

$$r = \ln\left(\frac{1050000}{1000000}\right) \approx 0.05$$

Luego : $Q(t) = 1000000 e^{0.05t}$

La cuenta duplica su cantidad cuando : $Q(t) = 2000000$

$$2000000 = 1000000 e^{0.05t}$$

$$e^{0.05t} = 2 \quad / \ln(\ )$$

$$0.05t = \ln(2)$$

$$t = \frac{\ln(2)}{0.05} \approx 13.9$$

Conclusión : Para que la cantidad inicial depositada se duplique, deben pasar 13,9 años.

Problema 2. $x = x(t)$: Cantidad de sal (en gramos) en el estanque en $t \geq 0$.

Inicialmente: $x(0) = 5000$

$$\frac{dx}{dt} = (\text{razón entrada sal}) - (\text{razón de salida de sal})$$

$$\text{razón de entrada} = \left(200 \ \frac{gr}{lt}\right)\left(2 \ \frac{lt}{min}\right) = 400 \ \frac{gr}{min}$$

$$\text{razón de salida} = \left(2 \ \frac{lt}{min}\right)\left(\frac{x}{50} \ \frac{gr}{lt}\right) = \frac{x}{25} \ \frac{gr}{min}$$

$$\frac{dx}{dt} = 400 - \frac{x}{25} \iff \frac{dx}{dt} + \frac{x}{25} = 400$$

Solución general de la ecuación lineal $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{25} = 400$:

$$x(t) = \mu(t)^{-1}\left(\int \mu(t)\, 400\, dt + C\right) , \quad \mu(t) \text{ factor integrante.}$$

$$\mu(t) = \exp\left(\int \frac{1}{25} dt\right) = \exp\left(\frac{1}{25} t\right)$$

$$x(t) = \exp\left(-\frac{1}{25} t\right)\left(\int 400 \exp\left(\frac{1}{25} t\right) dt + C\right)$$

$$\int 400 \exp\left(\frac{t}{25}\right) dt = 400 \int \exp\left(\frac{t}{25}\right) dt = 400 \cdot 25 \exp\left(\frac{t}{25}\right) = 10000 \exp\left(\frac{t}{25}\right)$$

Luego: $x(t) = \exp\left(-\frac{1}{25} t\right)\left(10000 \exp\left(\frac{t}{25}\right) + C\right) = 10000 + C \exp\left(-\frac{t}{25}\right)$

Cuando $x(0) = 5000$:

$$5000 = 10000 + C \exp(0) = 10000 + C \Rightarrow C = -5000$$

$$x(t) = 10000 - 5000 \exp\left(-\frac{t}{25}\right)$$

Después de 1 hora: $t=60$

$$X(60) = 10000 - 5000\exp\left(-\frac{60}{25}\right) \approx 9546.4$$

Conclusión: Después de 1 hora, la cantidad de sal que hay en el estanque es aproximadamente de 9,5 kg.

Problema 3. $T = T(t)$: temperatura de la taza de café para $t \geq 0$

t : tiempo (minutos)

Ley de enfriamiento de Newton:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T-25) \\ T(0) = 90 \end{cases}$$

a. La solución general de $\dfrac{dT}{dt} = k(T-25)$ es:

$$T(t) = 25 + Ce^{kt}$$

Inicialmente: $T(0) = 90$:

$$90 = T(0) = 25 + Ce^{0} = 25 + C \Rightarrow C = 90 - 25 = 65$$

$$T(t) = 25 + 65e^{kt}$$

Pasado 2 minutos: $T(2) = 85$:

$$85 = T(2) = 25 + 65e^{2k} \rightarrow e^{2k} = \frac{85-25}{65} = \frac{60}{65}$$

$$\Rightarrow \quad 2k = \ln\left(\frac{60}{65}\right)$$

$$k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{60}{65}\right) \approx -0.04$$

Luego: $T(t) = 25 + 65e^{-0.04t}$

b. Hay que resolver la ecuación : $T(t) = 70$

$$25 + 65e^{-0.04t} = 70$$

$$e^{-0.04t} = \frac{70-25}{65} = \frac{45}{65} \quad / \ln(\ )$$

$$-0.04t = \ln\left(\frac{45}{65}\right)$$

$$t = -\frac{1}{0.04}\ln\left(\frac{45}{65}\right) \approx 9.2$$

Conclusión: Pedro debe dejar pasar aproximadamente 9.2 minutos para que pueda comenzar a beber su café.

Universidad de las Américas
Calculo II MAT171
Junio 25, 2019

Desarrollo Cátedra recuperativa

Problema 1.

a. Buscamos los puntos críticos mediante el sistema

$$\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = 0 \end{cases}$$

$P_x = 1.08x - 0.06x^2$, $P_y = 3.78y - 0.27y^2$

Sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 1.08x - 0.06x^2 = 0 \\ 3.78y - 0.27y^2 = 0 \end{cases}$

Las soluciones de $1.08x - 0.06x^2 = 0$ son $x = 0$, $x = 18$
Las soluciones de $3.78y - 0.27y^2 = 0$ son $y = 0$; $y = 14$
Los puntos críticos de $P = P(x,y)$ son:

$$(0,0) \; , \; (0,14) \; , \; (18,0) \; , \; (18,14)$$

Aplicamos criterio del Hessiano

$$P_{xx} = 1.08 - 0.12x$$
$$P_{yy} = 3.78 - 0.54y$$
$$P_{xy} = 0$$

Scanned with CamScanner

$$\Delta(x,y) = P_{xx}(x,y)P_{yy}(x,y) - P_{xy}(x,y)^2$$

$$\Delta(x,y) = (1.08 - 0.12x)(3.78 - 0.54y)$$

$$\Delta(0,0) = 4.0824 > 0 \quad , \quad P_{xx}(0,0) = 1.08 > 0$$

$$\Delta(0,14) = -3.78$$

$$\Delta(18,0) = -1.08$$

$$\Delta(18,14) = 4.08 > 0 \quad , \quad P_{xx}(18,14) = -1.08 < 0$$

Efectivamente $P = P(x,y)$ se maximiza en $(x,y) = (18,14)$

Conclusión: Se deben extraer 18 toneladas de cobre y 14 toneladas de Zinc para que la producción sea máxima.

b. La producción máxima generada por la empresa es:

$$P(18,14) = 181{,}8 \text{ (millones de dólares)}$$

Problema 2.

$$\begin{cases} y_1 = x^2 - 2x \\ y_2 = -x^2 + 4x \end{cases}$$

A: Area total del terreno (metros cuadrados)

Buscamos puntos de intersección entre y_1 e y_2:

$$y_1 = y_2 \iff x^2 - 2x = -x^2 + 4x$$
$$\iff 2x^2 - 6x = 0$$
$$\iff x^2 - 3x = 0$$
$$\iff x_1 = 0, \quad x_2 = 3$$

Luego: $A = \int_0^3 |y_1 - y_2| dx$

$$= \int_0^3 |2x^2 - 6x| dx = 2\int_0^3 |x^2 - 3x| dx$$
$$= 2\int_0^3 |(x-3)x| dx$$

Mediante una tabla, se puede ver que $x(x-3) > 0$ para $x \in]-\infty, 0[\cup]3, \infty[$.

$$A = 2\int_0^3 |(x-3)x| dx = -2\int_0^3 (x-3)x dx$$
$$= -2\int_0^3 x^2 dx + 2\int_0^3 3x dx = -2\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 + 3x^2\Big|_0^3$$
$$= -18 + 27 = 9 \text{ (decámetros cuadrados)}$$

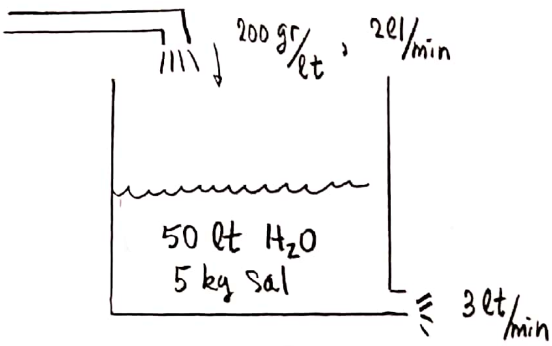
El área del terreno es $A = 900$ metros cuadrados

T: Precio a pagar por el terreno,

$$T = 15000 \cdot A = 15000 \cdot 900 = 13500000$$

El total a pagar por el terreno es \$ 13500000 pesos.

Problema 3.



Sea $x = x(t)$ la cantidad de sal (en gramos) para $t \geq 0$ (en minutos),
Sea $V = V(t)$ el volumen (en litros) de mezcla que hay en el estanque en $t \geq 0$.

Inicialmente:

$$x(0) = 5000 \quad \text{(gramos)}$$
$$V(0) = 50 \quad \text{(litros)}$$

$$\frac{dx}{dx} = (\text{razón de entrada sal}) - (\text{razón de salida sal})$$
$$= 200 \cdot 2 - \frac{x(t)}{V(t)} \cdot 3$$
$$\frac{dx}{dt} = 400 - \frac{3x}{V}$$

Además: $V(t) = -t + 50$

$$\frac{dx}{dt} = 400 - \frac{3}{50-t}x$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} + \frac{3}{50-t}x = 400} \qquad (*)$$

Sea $\mu = \mu(t)$ el factor integrante de la ecuación lineal $(*)$:

$$\mu = \exp\left(\int \frac{3}{50-t}dt\right) = \exp(-3\ln|50-t|)$$
$$= \frac{1}{|50-t|^3}$$

Como el estanque pierde 1 lt de mezcla en cada minuto, y el estanque inicialmente tiene 50 lt de mezcla, la condición es que

$$0 \leq t < 50$$

Luego: $\mu(t) = \dfrac{1}{(50-t)^3}$

La solución general es:

$$x(t) = \mu^{-1}\left(\int \mu \cdot 400\,dt\right) = (50-t)^3 \int \frac{400}{(50-t)^3}\,dt$$

$$= 400(50-t)^3 \int \frac{1}{(50-t)^3}\,dt$$

Como $\displaystyle\int \frac{1}{(50-t)^3}\,dt = \frac{1}{2}\frac{1}{(50-t)^2} + \frac{C}{400}$, C constante.

$$X(t) = 200(50-t) + (50-t)^3 C$$

Aplicando la condición inicial: $X(0) = 5000$

$$x(0) = 200 \cdot 50 + 50^3 C = 5000$$

$$C = -\frac{5000}{50^3} = -\frac{1}{25}$$

Luego: $X(t) = 200(50-t) - \frac{1}{25}(50-t)^3$

Después de media hora:

$$X(30) = 200 \cdot 20 - \frac{1}{25} \cdot 20^3 = 3680 \quad \text{(gramos)}$$

Conclusión: Después de media hora, en el estanque hay 3,680 kg de sal

Universidad de las Américas.
Cálculo Diferencial. MAT-170

Desigualdades e inecuaciones.

Ejemplo motivacional.
Contexto: Fabricante trabajando en una fábrica.

x: unidades de producción de cierto artículo
$C = C(x)$: Costo total para producir x artículos (en dólares)
$I = I(x)$: Ingreso generado por la producción de x artículos (en dólares).

Objetivo: Saber cuántas unidades debe producir el fabricante para ganar al menos \$2000 en la venta.

Desarrollo. Primero calculamos la utilidad

$$\text{Utilidad} = \text{Ingresos} - \text{costos}.$$

$$U = I - C$$

Observar que $U = U(x)$. Como $I(x) = 37x$, $C(x) = 3100 + 25x$

Calculamos: $U = I - C = 37x - (3100 + 25x) = 12x - 3100$

El fabricante quiere ganar al menos \$2000,

Condición: $U(x) \geq 2000$

Tenemos la inecuación: $12x - 3100 \geq 2000$

$12x - 3100 \geq 2000$ es una inecuación del tipo:

$$ax + b \geq c$$

inecuación lineal

Primer paso: $12x - 3100 \geq 2000$

$12x \geq 2000 + 3100$

$12x \geq 5100$

$ax + b \geq c$

$ax \geq c - b$

Desarrollo de manera abstracta (Caso general).

Segundo paso: $12x \geq 5100$

$x \geq \dfrac{5100}{12}$

$\boxed{x \geq 425}$

Cuando $a > 0$:

$ax \geq c - b \Rightarrow x \geq \dfrac{c-b}{a}$.

El fabricante debe producir y vender al menos 425 artículos.

Observación. Es necesario tener claro las siguientes reglas para la desigualdad $ax \geq b$:

(i) Si $a > 0$, entonces $ax \geq b$ implica $x \geq \dfrac{b}{a}$

(ii) Si $a < 0$, entonces $ax \geq b$ implica $x \leq \dfrac{b}{a}$.

El sentido de la desigualdad cambia de dirección dependiendo del signo de $a \neq 0$.

Observación. El mismo fenómeno ocurre para los casos $\leq, >, <$.

Ejemplo. Resolver la inecuación $3x + 7 > 5x - 1$.

Desarrollo. Debemos dejar la inecuación de la forma $ax + b > c$

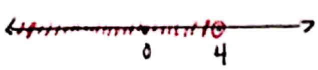
$$3x + 7 > 5x - 1 \Rightarrow 3x - 5x > -1 - 7$$

$$\Rightarrow -2x > -8 \quad / \cdot (-1/2)$$

$$\Rightarrow x < -8 \cdot (-1/2)$$

$$\Rightarrow x < 4.$$

La solución $x < 4$ implica que geométricamente se tiene:



En resumen, para las desigualdades las reglas son las siguientes:

Para $a > b$, $c \in \mathbb{R}$ cualquiera:

Regla 1: $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

Regla 2: $a > b \Rightarrow ac > bc$, para $c > 0$
$ac < bc$, para $c < 0$.

Las mismas reglas tenemos para las desigualdades con $<, \geq, \leq$.

— o —

Ahora vamos al caso de las desigualdades cuadráticas.

Ejemplo. Resolver la inecuación $x^2 + 3x - 4 < 0$.

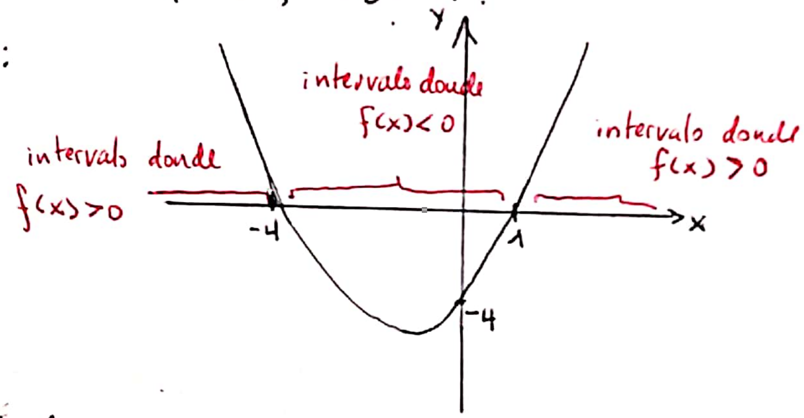
Desarrollo. Si consideramos la función cuadrática $f(x) = x^2 + 3x - 4$, es posible graficarla.

Primero encontramos los puntos donde intersecta al eje x:

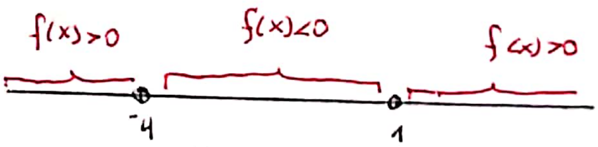
$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

Por lo tanto: $x_1 = 1$, $x_2 = -4$.

Gráfica de f:



Mas simplificado:



$-4 < x < 1$ quiere decir $-4 < x$, y $x < 1$.

La solución x de la inecuación $x^2 + 3x - 4 < 0$ cumple $-4 < x < 1$.

Universidad de las Américas
Cálculo Diferencial
Marzo 19, 2019.

Valor absoluto.

Definición. El valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$ se define como

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Idea motivacional: Fomentar el uso de la calculadora.

La calculadora dice que: $\sqrt{4^2} = 4$, $\sqrt{(-4)^2} = 4$

Observación. Una forma equivalente de definir el valor absoluto es $|x| = \sqrt{x^2}$

Ejemplo. Resolver la ecuación $|4x+3| = 7$.

Desarrollo. Por definición del valor absoluto, tenemos 2 posibilidades:

$$4x+3 = 7 \quad \vee \quad 4x+3 = -7$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}.$$

Queda como ejercicio comprobar las soluciones.

Segunda forma de desarrollo.

Ocupando la definición $|4x+3| = \sqrt{(4x+3)^2}$

$|4x+3| = 7 \leftrightarrow \sqrt{(4x+3)^2} = 7 \Rightarrow (4x+3)^2 = 49$

Ecuación cuadrática: $16x^2 + 24x + 9 = 49$

$$16x^2 + 24x - 40 = 0 \quad /:8$$

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática $2x^2+3x-5=0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = -\frac{5}{2} .$$

Importante : Siempre se cumple que $|x| \geq 0 \quad \forall x$.

Inecuaciones con valor absoluto .

Resolvemos inecuaciones del tipo $|a| \geq b$ o $|a| \leq b$

Ejemplo. Resolver la inecuación $|2x+3| \geq 4$

Desarrollo. La condición que debe cumplirse es que

$$2x+3 \geq 4 \quad \vee \quad 2x+3 \leq -4$$

De $2x+3 \geq 4 \Rightarrow x \geq 1/2$

De $2x+3 \leq -4 \Rightarrow x \leq -7/2$

El conjunto de soluciones de la inecuación viene dado por los intervalos :

$$]-\infty, -7/2] \cup [1/2, \infty[$$

Universidad de las Américas
Cálculo Diferencial, MAT170
Abril 02, 2019

Funciones compuestas.
Función inversa.

Para las funciones $f: A \to B$, $g: C \to D$, queremos construir la composición mediante la fórmula:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Requisito: • $f(x) \in dom(g) = C$
• $x \in dom(f) = A$

Luego: $dom(g \circ f) = \{ x \in dom(f) \mid f(x) \in dom(g) \}$

Es decir: $g \circ f$ existe siempre y cuando $rango(f) \subseteq dom(g)$

Definición. g es la inversa de f si se cumple

$$(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in dom(f), \quad (f \circ g)(x) = x \quad \forall x \in dom(g)$$

Ejemplo. Desarrollo problema P1. Guía 4.

$R:]0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$, $R(p) = 3p + \sqrt{p}$

$p: [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$, $p(t) = 80 + 2t + 0.3t^2$

1. $R(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 4$ (4 millones de pesos de 1 mil personas)
$p(0) = 80$ (80 mil personas en el año 2002)

2. $(R \circ p)(1) = R(p(1)) = R(82.3) = 3 \cdot 82{,}3 + \sqrt{82{,}3} = 255{,}97\ldots \approx 256$

(256 millones de pesos que se recaudan el año 2003)

3. Para saber qué es $R^{-1}(100)$ y $p^{-1}(100)$, primero debemos conocer las propiedades de la función inversa:

Propiedad: Si $\exists f^{-1}$, $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$

Luego, $R^{-1}(100) = p \iff 100 = R(p) = 3p + \sqrt{p}$

Además, no olvidar:

$$\begin{tikzcd} \text{personas (miles)} \arrow[r, bend left, "R"] & \text{dinero (millones de pesos)} \arrow[l, bend left, "R^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$R^{-1}(100) = p \iff R(p) = 100$

(La cantidad de personas necesarias para recaudar 100 millones de pesos)

Pregunta. ¿ $3p + \sqrt{p} = 100$ se puede resolver?

Análogamente, $p^{-1}(100) = t \iff p(t) = 100$

$$80 + 2t + 0{,}3t^2 = 100$$

(El año, pasado el 2002, el cual hay 100 mil habitantes)

4. $(p^{-1} \circ R^{-1})(100) = p^{-1}(R^{-1}(100)) = t$

$$\begin{aligned} p^{-1}(R^{-1}(100)) = t &\iff R^{-1}(100) = p(t) \\ &\iff 100 = R(p(t)) \\ &\iff 100 = (R \circ p)(t) \end{aligned}$$

(El año, pasado el 2002, para el cual la recaudación es de 100 millones de pesos).

Funciones definidas por tramos

En muchos casos, una función $f: A \to B$ puede presentarse de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x<2 \\ 3, & x=2 \\ x^2-4, & x>2 \end{cases}$$

observar que $dom(f) = \mathbb{R}$

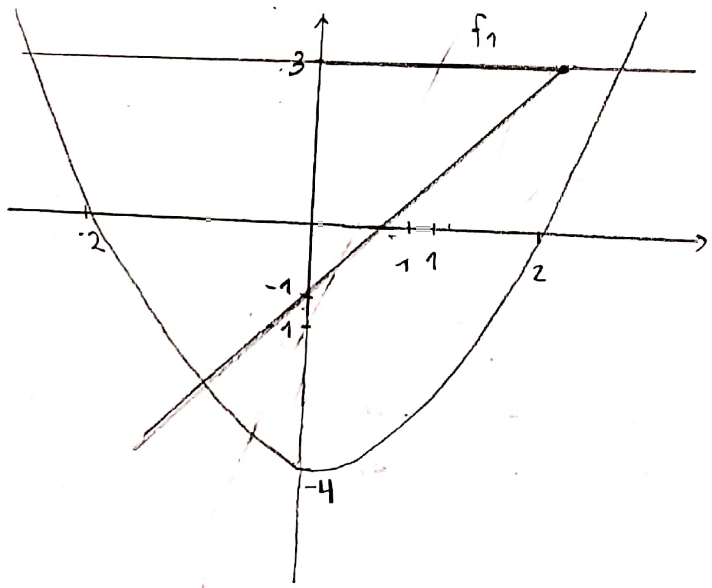
Ejemplo. Desarrollo Problema P2.

1. $f(2) = 3$, $f(3) = 3^2-4 = 5$, $f(1) = 2\cdot 1 - 1 = 1$

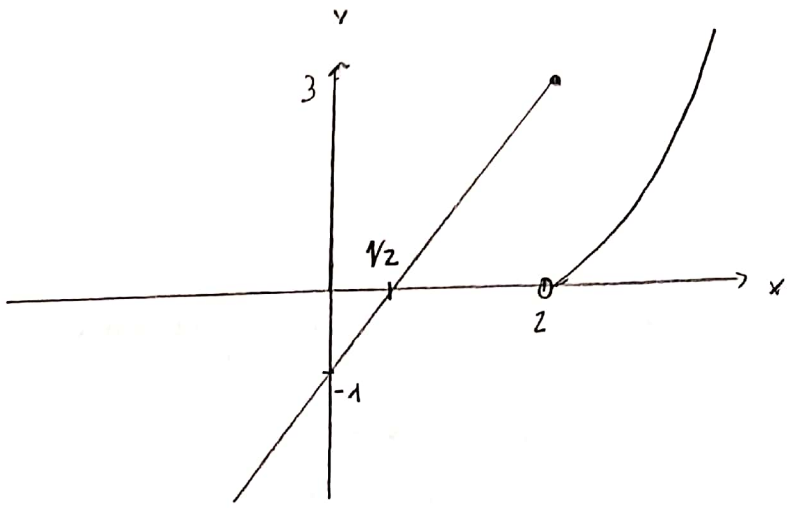
Luego:
$$\frac{f(2) - 3f(3)}{5f(1)} = \frac{3 - 3\cdot 5}{5\cdot 1} = \frac{-12}{5}$$

2. Gráfica de f.

$f_1(x) = 2x-1$, $f_2(x) = 3$, $f_3(x) = x^2-4$



Gráfica de f.



3. Dominio : $dom(f) = \mathbb{R}$

Rango : $rango(f) = \mathbb{R}$

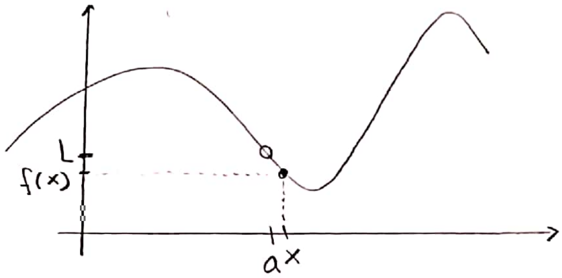
4. La función es creciente en todo $\mathbb{R}$.

Universidad de las Américas
Cálculo Diferencial MAT 170
Mayo 06, 2019.

Límites y continuidad.

Definición de límite (idea intuitiva).

Supongamos que $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función de variable real.

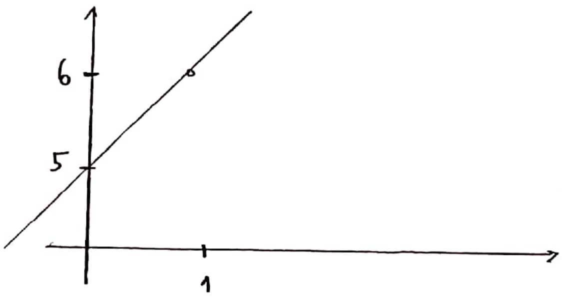


L es el valor al cual se aproxima $f(x)$, cuando x se aproxima a "a".

Observaciones. (i). No necesariamente debe cumplirse que $a \in X$ ($X = \text{dom}(f)$)

(ii) La aproximación puede ser por la izquierda o la derecha.

Ejemplo. $f(x) = x + 5$



Cuando x se aproxima a 1 ($x \to 1$), $f(x)$ se aproxima a 6

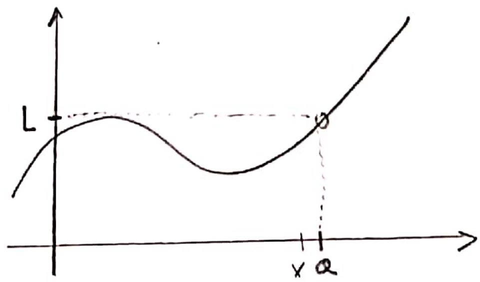
$$\left(\lim_{x \to 1} f(x) = 6 \right)$$

Notación del límite de una función:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

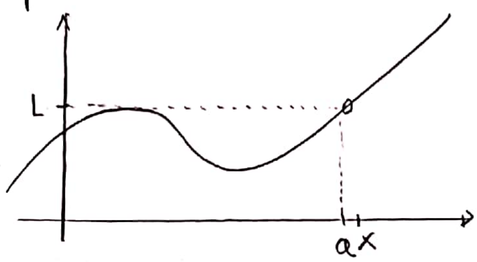
Interpretación de los límites laterales.

i. Límite lateral por la izquierda



$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$: L es el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a "a" por la izquierda.

ii. Límite lateral por la derecha.



$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$: L es el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a "a" por la derecha.

Ejemplo. $f(x) = x + 5$

Mediante una tabla:

x	$f(x)$
5.5	10.5
5.45	10.45
5.4	10.4
5.35	10.35
5.3	10.3
5.25	10.25
5.2	10.2
5.15	10.15
5.1	10.1
5.05	10.05

x	$f(x)$
4.6	9.6
4.7	9.7
4.8	9.8
4.85	9.85
4.9	9.9
4.99	9.99
4.999	9.999

Ejemplo. Intentar calcular $\lim_{x \to 7} x^2 + x + 1$

Teorema. Si $\lim_{x\to a^-} f(x)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existen y $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, además se cumple $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

Ejemplo. $f(x) = \frac{|x|}{x}$

Para $x>0$, $f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$

Para $x<0$, $f(x) = \frac{|x|}{x} = -\frac{x}{x} = -1$. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

Algebra de límites

Supongamos $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$, $C\in\mathbb{R}$ constante.

i. $\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L\pm M$

ii. $\lim_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = LM$

iii. $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{L}{M}$ (siempre y cuando $\lim_{x\to a} g(x) = M \neq 0$)

Definición. f es continua en $x=a$ si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Ejemplo. Todo polinomio es una función continua. Las funciones seno y coseno son continuas. La función raíz cuadrada, logaritmo y exponencial (en su dominio)

Ejemplo. (i) Calcular $\lim_{x\to 7} x^2+x+1$.

Desarrollo. $\lim_{x\to 7} x^2+x+1 = \lim_{x\to 7} x^2 + \lim_{x\to 7} x + \lim_{x\to 7} 1 = 7^2+7+1 = 49+8 = 57$

(ii) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x\cos(x)$.

Desarrollo. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x\cos(x) = \left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x\right)\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos(x)\right) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

Ejemplo. Calcular $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-x}$

Desarrollo. Observar que $\lim\limits_{x\to 1} x^2-1 = 0$, $\lim\limits_{x\to 1} x^3-x=0$. Pero $\frac{0}{0}$, no tiene sentido algebraico. En cambio, se puede hacer lo siguiente:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}{x\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 1} 1}{\lim\limits_{x\to 1} x} = \frac{1}{1} = 1$$

Ejemplo. Calcular $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Como es una expresión $\frac{0}{0}$, hay que hacer algún trabajo algebraico previo.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1}\sqrt{x}+1$$

$$= \lim_{x\to 1}\sqrt{x} + \lim_{x\to 1} 1 = \sqrt{1}+1 = 1+1 = 2.$$

Universidad de las Américas
Cálculo Diferencial MAT170
Desarrollo Cátedra I
Marzo 25, 2019.

Cátedra I
Desarrollo

Problema 1.

$$|2x+1|\leq 100 \iff -100 \leq 2x+1 \leq 100$$
$$\iff -101 \leq 2x \leq 99$$
$$\iff -\frac{101}{2} \leq x \leq \frac{99}{2}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación $|2x+1|\leq 100$ es
$$\left[-\frac{101}{2}, \frac{99}{2}\right].$$

Problema 2.

(a) Como $h(t) = 13t - 4.9t^2$,

Altura en $t=2$: $h(2) = 13 \cdot 2 - 4.9 \cdot 2^2 = 6.4$

Respuesta: A los 2 segundos, la piedra está a 6,4 m de altura.

(b) $t = t_0$ Tiempo en que la piedra está en el suelo.

$$h(t_0) = 0$$

$$h(t_0) = 0 \iff 13t_0 - 4.9t_0^2 = 0$$
$$\iff 4.9t_0\left(\frac{13}{4.9} - t_0\right) = 0$$

luego: $h(t_0) = 0 \iff t_0 = 0$ o $t_0 = \frac{13}{4.9} \approx 2.65$

La bola esta en el aire por 2.65 segundos.