3.7 Valores propios repetidos.

Estudiamos la ecuación característica $\det(A-\lambda I)=0$ (en este caso, de 2º grado), donde las raíces λ son reales y repetidas.

Ejemplo.1. Para el sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$, con $A = \begin{pmatrix} 3 & \\ & 3 \end{pmatrix}$. El único valor propio de A es $\lambda = 3$.

vectores propios: $(A-3I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow A-3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en particular, $(A-3I)\vec{v}=\vec{0}$ tiene infinitas soluciones.

Podemos considerar los vectores propios $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\vec{x}_1 = e^{3t}\vec{v}_1$, $\vec{x}_2 = e^{3t}\vec{v}_2$:

$\vec{x}_1' = 3e^{3t}\vec{v}_1 = 3\vec{x}_1$, $\vec{x}_2' = 3e^{3t}\vec{v}_2 = 3\vec{x}_2$

$$A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 & \\ & 3 \end{pmatrix}(e^{3t}\vec{v}_1) = 3e^{3t}\vec{v}_1 = 3\vec{x}_1$$
$$A\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 & \\ & 3 \end{pmatrix}(e^{3t}\vec{v}_2) = 3e^{3t}\vec{v}_2 = 3\vec{x}_2$$

Es decir, $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ son soluciones linealmente independientes.

Ejemplo.2. Consideremos el sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2$. Luego $\det(A-\lambda I)=0$ ssi $\lambda = 3$.

$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$ implica $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

Se tiene $v_2=0$.

$$\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}=v_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vector propio elegido es $\vec{v_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ asociado al valor propio 3.

Luego: $\vec{x_1}=e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es una solución de $\vec{x}\,'=A\vec{x}$

Buscamos otra solución de $\vec{x}\,'=A\vec{x}$.

Consideramos una solución del tipo:

$$\vec{x_2}=(\vec{v_2}+\vec{v_1}t)\,e^{3t}$$

$$\vec{x_2}\,'=3e^{3t}\vec{v_2}+e^{3t}\vec{v_1}+3te^{3t}\vec{v_1}$$

$$A\vec{x_2}=A\left[(\vec{v_2}+\vec{v_1}t)\,e^{3t}\right]=A(e^{3t}\vec{v_2})+A(te^{3t}\vec{v_1})$$
$$=e^{3t}A\vec{v_2}+te^{3t}A\vec{v_1}=e^{3t}A\vec{v_2}+3te^{3t}\vec{v_1}$$

Igualando: $3e^{3t}\vec{v_2}+e^{3t}\vec{v_1}+\cancel{3te^{3t}\vec{v_1}}=e^{3t}A\vec{v_2}+\cancel{3te^{3t}\vec{v_1}}$

$$\Rightarrow\quad 3\vec{v_2}+\vec{v_1}=A\vec{v_2}$$
$$\Rightarrow\quad (A-3I)\vec{v_2}=\vec{v_1}$$

O de manera equivalente $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2}=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} w_2=1 \\ w_1\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Podemos considerar $\vec{v_2}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Observar lo siguiente: $(A-3I)\vec{v_2}=\vec{v_1}\quad /\cdot(A-3I)$

$$(A-3I)^2\vec{v_2}=(A-3I)\vec{v_1}=\vec{0}$$

Es decir: $(A-3I)^2 \vec{v}_2 = \vec{0}$,

Notar que $(A-3I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

los vectores $\begin{cases} \vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t} \\ \vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + t\vec{v}_1) e^{3t} \end{cases}$ son linealmente independientes.

observación. Sea $\vec{w} \neq \vec{0}$ tal que $(A-3I)\vec{w} \neq \vec{0}$

De $(A-3I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, se deduce que $(A-3I)^2 \vec{w} = \vec{0}$

$\therefore$ $(A-3I)\vec{w}$ es un vector propio asociado al valor propio 3.

En otras palabras, $(A-3I)\vec{w} = \alpha \vec{v}_1$, algún $\alpha \in \mathbb{R}$

<u>En resumen</u>: Para estudiar $\vec{x}' = A\vec{x}$ con único valor repetido λ hacemos lo siguiente:

(i) Encontramos $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ que cumpla $(A-\lambda I)\vec{v}_1 = \vec{0}$, En ese caso $x_1(t) = e^{3t}\vec{v}_1$.

(ii) Estudiar la ecuación $(A-\lambda I)\vec{w} = \vec{v}_1$. Si $\vec{v}_2$ es solución, entonces $x_2(t) = (\vec{v}_2 + t\vec{v}_1)e^{3t}$.

la solución general de $\vec{x}' = A\vec{x}$ es

$$\vec{x}(t) = C_1 \vec{x}_1 + C_2 \vec{x}_2 .$$

Algunas observaciones:

(i) Si $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ es el polinomio característico de A, entonces $p(\lambda) = \det(A) - tr(A)\lambda + \lambda^2$

(ii) Si X matriz, $p(X) = \det(A) I - tr(A) X + X^2$.
En particular, $p(A) = 0$.

Supongamos que queremos resolver

$$\begin{cases} \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Desarrollo. Sabemos que la solución general es

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \right) e^{3t}$$

$\vec{x}(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ equivale a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = 1,\ C_2 = -1$$

Solución particular: $\vec{x}(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \right) e^{3t}$

Si $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, entonces:

$$\begin{cases} x_1 = e^{3t} - te^{3t} = e^{3t}(1-t) \\ x_2 = -e^{3t} \end{cases}$$

Ejemplo (Ejercicio 37.2 pág 145).

Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Encuentre la solución general de $\vec{x}' = A\vec{x}$

Desarrollo. (i) Primero calculamos valores propios de A :

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(5-\lambda)(1+\lambda)+9$$

$$= -(5+5\lambda-\lambda-\lambda^2)+9 = \lambda^2-4\lambda+4 = (\lambda-2)^2$$

El único valor propio de A es $\lambda=2$.

(ii) Encontramos vector propio asociado a $\lambda=2$

Ecuación $(A-2I)\vec{v} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Podemos tomar $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Estudiamos ecuación $(A-2I)\vec{v} = \vec{v_1}$

$$(A-2I)\vec{v} = \vec{v_1} \iff \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De la primera ecuación : $3v_1 - 3v_2 = 1$

$$v_1 = \frac{1+3v_2}{3} = \frac{1}{3} + v_2.$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 + v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $v_2 = 1$, entonces $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Así : $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución general : $\vec{x} = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\left(\begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)e^{2t}$

Extra : Resolver el PVI:

$$\begin{cases} \vec{x}\,' = A\vec{x} \\ \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\vec{x}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ implica:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\det(B) = 1 - 4/3 = -1/3$. La solución viene a continuación:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 & -4/3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3+8 \\ 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} c_1 = 5 \\ c_2 = -3 \end{matrix}}$$

Solución particular: $\vec{x} = 5e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\left(\begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)e^{2t}$.

Sistemas de ecuaciones, valores propios complejos.

Problema. Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \\ \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Desarrollo. Sistema visto como ecuación matricial:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \qquad , \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, tenemos $\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4$
$= 1 + \lambda^2 - 2\lambda + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 5$

$\Delta = 4 - 20 = -16$; las raíces de $p(\lambda) = 0$ son $\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$

Valores propios son: $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$

Buscamos vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 1 + 2i$:

$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$ para $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ equivale a $\begin{pmatrix} 1-1-2i & -2 \\ 2 & 1-1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Equivalente a la ecuación:

$$\begin{pmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ocupamos método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2i & -2 & 0 \\ 2 & -2i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 - i f_1 \to f_2} \left(\begin{array}{cc|c} -2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} -2i v_1 - 2v_2 = 0 \\ v_2 = -i v_1 \end{array}$$

Luego: $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -i v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $v_1 \in \mathbb{C}$

$$\vec{z} = e^{\lambda_1 t}\vec{v} \quad , \text{ donde } \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\vec{z} = e^{(1+2i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^{t}\left(\cos(2t) + i\,\text{sen}(2t)\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t}\cos(2t) + ie^{t}\text{sen}(2t) \\ -ie^{t}\cos(2t) + e^{t}\text{sen}(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t}\cos(2t) \\ e^{t}\text{sen}(2t) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} e^{t}\sin(2t) \\ -e^{t}\cos(2t) \end{pmatrix}$$

luego, $\text{Re}(\vec{z}) = \begin{pmatrix} e^{t}\cos(2t) \\ e^{t}\text{sen}(2t) \end{pmatrix}$, $\text{Im}(\vec{z}) = \begin{pmatrix} e^{t}\text{sen}(2t) \\ -e^{t}\cos(2t) \end{pmatrix}$

La solución general es: $\vec{x} = C_1\begin{pmatrix} e^{t}\cos(2t) \\ e^{t}\text{sen}(2t) \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{t}\text{sen}(2t) \\ -e^{t}\cos(2t) \end{pmatrix}$

Observación: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t}\cos(2t) \\ e^{t}\text{sen}(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t}\cos(2t) - 2e^{t}\text{sen}(2t) \\ 2e^{t}\cos(2t) + e^{t}\text{sen}(2t) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} e^{t}\cos(2t) \\ e^{t}\text{sen}(2t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} e^{t}\cos(2t) - 2e^{t}\text{sen}(2t) \\ e^{t}\text{sen}(2t) + 2e^{t}\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Se cumple la igualdad $\text{Re}(\vec{z})' = A\,\text{Re}(\vec{z})$.

Por otro lado:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t}\text{sen}(2t) \\ -e^{t}\cos(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t}\text{sen}(2t) + 2e^{t}\cos(2t) \\ 2e^{t}\text{sen}(2t) - e^{t}\cos(2t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{t}\text{sen}(2t) \\ -e^{t}\cos(2t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} e^{t}\text{sen}(2t) + 2e^{t}\cos(2t) \\ -e^{t}\cos(2t) + 2e^{t}\text{sen}(2t) \end{pmatrix}$$

Se cumple la igualdad para $\text{Im}(\vec{z})' = A\,\text{Im}(\vec{z})$

Ahora aplicamos la condición inicial $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es equivalente a:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ocupando eliminación Gaussiana:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 + f_2 \to f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_2 \to f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Luego $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Solución particular es $\vec{x}(t) = 3e^{t} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} - 2e^{t} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}$