VICERRECTORÍA ACADEMICA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, FÍSICA Y ESTADÍSTICA
ÁREA DE MATEMÁTICA-CICLO INICIAL

# CÁTEDRA 2

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (MAT-333)

**Tiempo: 90 minutos**

| NOTA |
|---|
| |

| | |
|---|---|
| **NOMBRE:** Marco Godoy V | **NRC:** |
| **RUN:** | **FECHA:** |
| **CARRERA:** | **SECCIÓN:** |

| Problema | Puntaje |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| Total | |

## Indicaciones

- Complete los datos solicitados en la prueba.
- Puntaje ideal de la prueba 60 puntos.
- Nota final=Puntaje_obtenido+1,0
- No se aceptan consultas una vez iniciada la prueba. Salvo que sean de enunciado.
- Sólo podrá salir de la sala después de 30 min de iniciada la prueba.
- Puede utilizar para sus cálculos calculadora pero no su celular ni otros artículos tecnológicos.
- Deberá devolver todas las hojas de la prueba. La ausencia de alguna de ellas desvalidará la evaluación.
- Si requiere hojas adicionales solicitarlas al profesor.

**"Declaro haber revisado y recibir conforme la prueba y la nota indicada arriba"**

Firma: ..................................................................

Profesor: Instituto de Matemática, Física y Estadística

## Resultados de Aprendizaje

(a) Resolver problemas contextualizados que involucran el cálculo de derivadas de funciones.

(b) Relacionar la derivada de una función con conceptos tales como: costo marginal e ingreso marginal.

(c) Modelar problemas contextualizados que conduzcan a la clasificación de extremos de una función en dos variables sujeta a una restricción.

## Problemas

Nombre del alumno: ..................................................

**NOTA**

**Prob. 1 (10 ptos.)** Para la función $f(x,y) = 5x^4y + 3x^3y^2 - 6x^2y^2 - 9xy^3 + x^2 + y^2$, demuestre que se cumple la igualdad $f_{xy} = f_{yx}$.

Desarrollo:

$$f_x = 20x^3y + 9x^2y^2 - 12xy^2 - 9y^3 + 2x$$

$$\boxed{f_{xy} = 20x^3 + 18x^2y - 24xy - 27y^2}$$

$$f_y = 5x^4 + 6x^3y - 12x^2y - 27xy^2 + 2y$$

$$\boxed{f_{yx} = 20x^3 + 18x^2y - 24xy - 27y^2}$$

Efectivamente se cumple la igualdad $f_{xy} = f_{yx}$.

**Prob. 2** **(15 ptos.)** La función de demanda de un consumidor respecto a dos productos $A$ y $B$, está dada por $D(x, y) = 10 - x^2y$, donde $x, y$ son las cantidades de producto que se adquiere. Si en cierto instante el consumidor consume $(x, y) = (1, 10)$, entonces determine la demanda marginal respecto a los productos $A$ y $B$ para el nivel de consumo indicado.

Desarrollo:

Calculamos la demanda marginal c/r a los productos A y B.

$$D_x(x,y) = -2xy \quad , \quad D_y(x,y) = -x^2$$

$$D_x(1,10) = -2\cdot 1\cdot 10 = -20$$

$$D_y(1,10) = -1^2 = -1$$

Respuesta.

- Cuando se consumen 1 artículo de tipo A y 10 artículos de tipo B, la demanda marginal con respecto al producto A es $-20$.
- Cuando se consumen 1 artículo de tipo A y 10 artículos de tipo B, la demanda marginal con respecto al producto B es $-1$.

**Prob. 3 (20 ptos.)** Cierto yacimiento del norte de Chile, extrae principalmente dos tipos de minerales, Cobre y Cinc. La producción mensual, de $x$ unidades de Cobre e $y$ unidades de Cinc, medidas en cientos de toneladas, está dado por:

$$P(x,y) = 0{,}54x^2 - 0{,}02x^3 + 1{,}89y^2 - 0{,}09y^3$$

Determine:

a. La cantidad de cada mineral para que la producción sea máxima

b. Determine e interprete la producción máxima generada por la empresa.

Desarrollo:

a) Buscamos puntos críticos mediante el sistema $\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = 0 \end{cases}$

$P_x = 1.08x - 0.06x^2$ , $P_y = 3.78y - 0.27y^2$

Sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 1.08x - 0.06x^2 = 0 \\ 3.78y - 0.27y^2 = 0 \end{cases}$

Las soluciones de $1.08x - 0.06x^2 = 0$ son $x = 0$, $x = 18$

Las soluciones de $3.78y - 0.27y^2 = 0$ son $y = 0$, $y = 14$

Los puntos críticos de $P(x,y)$ son:

$(0,0)$ , $(0,14)$ , $(18,0)$ , $(18,14)$

Evaluamos:

$P(0,0) = 0$

$P(0,14) = 123{,}48$

$P(18,0) = 58{,}32$

$P(18,14) = 181{,}8$

La producción maxima de la empresa se genera cuando se extraen 18 unidades de Cobre y 14 unidades de Cinc.

La producción máxima es $P(18,14) = 181{,}8$ .

**Prob. 4** **(15 ptos.)** Un comerciante tiene **600** dólares para invertir en dos tipos de artículos. El artículo $\boldsymbol{A}$ cuesta **10** dólares la unidad y el artículo $\boldsymbol{B}$ cuesta **30** dólares la unidad. Suponga que la utilidad obtenida por la venta de $\boldsymbol{x}$ unidades del artículo $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{y}$ unidades de $\boldsymbol{B}$, está dado por

$$U(x,y) = 10x^{3/5}y^{2/5}$$

Determine cuántas unidades de cada artículo deben venderse para maximizar la utilidad.

Desarrollo:

La restricción es: $10x + 30y = 600$

$$L(x,y,\lambda) = U(x,y) + \lambda(10x + 30y - 600)$$
$$= 10x^{3/5}y^{2/5} + 10\lambda x + 30\lambda y - 600\lambda$$

Estudiamos las soluciones del sistema: $\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases}$

$$L_x = 6x^{-2/5}y^{2/5} + 10\lambda$$
$$L_y = 4x^{3/5}y^{-3/5} + 30\lambda$$
$$L_\lambda = 10x + 30y - 600$$

Luego: $\begin{cases} 6x^{-\frac{2}{5}}y^{\frac{2}{5}} + 10\lambda = 0 \\ 4x^{3/5}y^{-3/5} + 30\lambda = 0 \\ 10x + 30y - 600 = 0 \end{cases}$

De la primera ecuación:

$$\lambda = -\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}y^{\frac{2}{5}}$$

De la segunda ecuación:

$$\lambda = -\frac{2}{15}x^{\frac{3}{5}}y^{-\frac{3}{5}}$$

Igualando queda:

$$-\frac{3}{5}x^{-2/5}y^{2/5} = -\frac{2}{15}x^{3/5}y^{-3/5}$$

Reordenando: $\boxed{9y = 2x}$

Despejamos $y$ de la igualdad $9y = 2x$ y reemplazamos en la tercera ecuación:

$$\boxed{y = \frac{2}{9}x}$$

$$0 = 10x + 30y - 600 = 10x + 30\left(\frac{2x}{9}\right) - 600$$
$$= 10x + \frac{20}{3}x - 600$$
$$= \frac{50x}{3} - 600$$

Despejando $x$:

$$x = \frac{1800}{50} = \frac{180}{5} = 36$$

Evaluando $x = 36$ en la ecuación $y = \frac{2}{9}x$

$$y = \frac{2}{9} \cdot 36 = 8$$

En resumen, deben venderse 36 artículos de tipo A y 8 artículos de Tipo B para maximizar la utilidad.