$$\therefore \quad I_n = \frac{\operatorname{sen} x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad , n \geq 2$$

$$\therefore \int \cos^7 x\,dx = \frac{\operatorname{sen} x \cos^6 x}{7} + \frac{6}{7} I_5$$

Donde

$$I_5 = \frac{\operatorname{sen} x \cos^4 x}{5} + \frac{4}{5} I_3$$

$$I_3 = \frac{\operatorname{sen} x \cos^2 x}{3} + \frac{2}{3} I_1$$

$$I_1 = \operatorname{sen} x$$

$$\therefore I_7 = \int \cos^7 x\,dx = \frac{\operatorname{sen} x \cos^6 x}{7} + \frac{6}{7}\left[\frac{\operatorname{sen} x \cos^4 x}{5} + \frac{4}{5}\left[\frac{\operatorname{sen} x \cos^2 x}{3} + \frac{2}{3}\operatorname{sen} x\right]\right] + C$$

Demostración de la fórmula de reducción $I_n = \int \cos^n x\,dx$

Por inducción sobre n

Para $n=1$

$$I_1 = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$$

suponiendo cierta la expresión para n entonces

$$I_{n+1} = \int \cos^{n+1} x\,dx = \int \cos x \cos^n x\,dx$$

$$I_{n+1} = \operatorname{sen} x \cos^n x + n\int \operatorname{sen}^2 x \cos^{n-1} x\,dx$$

$$I_{n+1} = \operatorname{sen} x \cos^n x + n\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-1} x\,dx$$

$$I_{n+1} = \operatorname{sen} x \cos^n x + n I_{n-1} - n I_{n+1}$$

$$(n+1) I_{n+1} = \operatorname{sen} x \cos^n x + n I_{n-1}$$

$$I_{n+1} = \frac{\operatorname{sen} x \cos^n x}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_{n-1}$$

$\therefore$ La expresión es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

---

r) $\displaystyle\int (\tan^4 x - \sec^4 x)\, dx$

$$\int (\tan^4 x - \sec^4 x)\, dx = \int (\tan^2 + \sec^2 x)(\tan^2 x - \sec^2 x)\, dx$$

Usamos la identidad $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

$$\int (\tan^4 x - \sec^4 x)\, dx = -\int (2\sec^2 x - 1)\, dx = \int (1 - 2\sec^2 x)\, dx$$

$$\int (\tan^4 x - \sec^4 x)\, dx = x - 2\tan x + C$$

---

s) $\displaystyle\int \cos^3 x \sqrt{\operatorname{sen}^5 x}\, dx$

Usamos sustitución

$$\operatorname{sen} x = y \Rightarrow dy = \cos x\, dx \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos x} dy$$

$$\int \cos^3 x \sqrt{\operatorname{sen}^5 x}\, dx = \int \cos^3 x \sqrt{y^5} \frac{1}{\cos x} dy = \int (1 - y^2) \sqrt{y^5}\, dy$$

$$\int \cos^3 x \sqrt{\operatorname{sen}^5 x}\, dx = \int \sqrt{y^5}\, dy - \int \sqrt{y^9}\, dy = \frac{2}{7} y^{7/2} - \frac{2}{11} y^{11/2} + C$$

$$\int \cos^3 x \sqrt{\operatorname{sen}^5 x}\, dx = \frac{2}{7} (\operatorname{sen} x)^{7/2} - \frac{2}{11} (\operatorname{sen} x)^{11/2} + C$$

t) $\int \operatorname{cosec}^4 x \, dx$

Sustitución trigonométrica

$$w = \operatorname{cotan} x \Rightarrow dw = -\operatorname{cosec}^2 x \, dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x} dw$$

$$\int \operatorname{cosec}^4 x \, dx = -\int \operatorname{cosec}^2 x \, dw = -\int (1+w^2) dw = -w - \frac{1}{3}w^3 + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^4 x \, dx = -\operatorname{cotan} x - \frac{1}{3} \operatorname{cotan}^3 x + C$$

48) Calcular las siguientes integrales

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$$

Primer método: Calculamos primitiva y después reemplazamos

$\sqrt[4]{x} = y \Rightarrow x = y^4 \Rightarrow dx = 4y^3\,dy$

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx = \int \frac{1}{y}4y^3dy = 4\int y^2dy = \frac{4}{3}y^3 = \frac{4}{3}x^{3/4}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx = \frac{4}{3}x^{3/4}\Big|_1^2 = \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{8}-1\right)$$

Segundo método: Calculando primitiva y cambiando límites de integración

Usamos sustitución anterior

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx = \int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{y}4y^3dy = 4\int_1^{\sqrt[4]{2}} y^2dy = \frac{4}{3}y^3\Big|_1^{\sqrt[4]{2}} = \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{8}-1\right)$$

51.r) $$\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx$$

$$x^2-5x+6 = x^2-5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+\frac{24}{4} = \left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}\left[4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-1\right]} = \frac{4}{4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-1}$$

$$x-\frac{5}{2} = \frac{1}{2}\sec u \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\sec u\tan u\,du$$

$$\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sec u \tan u}{\tan^2 u} du = \frac{1}{2}\int \frac{\sec u}{\tan u} du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{\cos u}}{\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}} du = \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u}{\operatorname{sen} u} du = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u\, du + \frac{1}{2}\int \frac{\cos^2 u}{\operatorname{sen} u} du$$

$$\cos u = y \Rightarrow dy = -\operatorname{sen} u\, du \Rightarrow du = -\frac{1}{\operatorname{sen} u} dy$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\cos^2 u}{\operatorname{sen} u} du = -\frac{1}{2}\int \frac{y^2}{1-y^2} dy = -\frac{1}{2}\left[-\int \frac{y^2-1}{1-y^2} dy + \int \frac{1}{1-y^2} dy\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[-y + \int \frac{1-y}{1-y^2} dy + \int \frac{y}{1-y^2} dy\right] = -\frac{1}{2}\left[-y + \ln(1+y) - \frac{1}{2}\ln(1-y^2)\right]$$

---

sabemos que $I_n = \int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

entonces $I_{n-2} = \frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n-1} + \frac{n}{n-1} I_n$

para $n = 2-k$ entonces

$$I_{-k} = \frac{\operatorname{sen}^{1-k} \cos x}{1-k} + \frac{2-k}{1-k} I_{2-k}$$

pero $I_{-k} = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^k x} dx = \int \operatorname{cosec}^k x = J_k$

$$J_k = -\frac{\cos x}{(k-1)\operatorname{sen}^{k-1} x} + \frac{k-2}{k-1} J_{k-2}$$

$$J_k = -\frac{1}{k-1} \operatorname{cosec}^{k-2} x \cot x + \frac{k-2}{k-1} I_{k-2} \quad , k \geq 2$$

Sea $I_n = \int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

Entonces $I_{n-2} = -\frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n-1} + \frac{n}{n-1} I_n$

Sea $n = 2-k$ entonces

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Cálculo I

Primer Semestre, 2010
Prof. Verónica Poblete

Control 2

Parte Práctica

1. Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación **(3 puntos)**

$$\frac{|x-2|-4}{x^2-5x+4} \leq 0$$

2. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+sen(n^2)}{n+cos(n)} \quad \textbf{(3 puntos)}$$

Parte Teórica

3. Sea $A = \{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Demuestre que $inf(A) = 0$. **(2 puntos)**

4. Si existen $\alpha > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $\alpha \leq x_n \leq n^k$ para todo n suficientemente grande, pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$. **(2 puntos)**

5. Considere la sucesión cuyo término general es

$$a_n = \frac{1}{2+3} + \frac{1}{2+3^2} + \cdots + \frac{1}{2+3^n}.$$

Pruebe que (a_n) es convergente. **(2 puntos)**

Universidad de Chile
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias

$n \quad \frac{1}{2} \quad (\frac{1}{2^n}$

Prueba 3
Segundo Semestre 2010
Cálculo II
Prof. Verónica Poblete

$\frac{n}{2^{n+1}}$

1. Considere la sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

   (a) Demuestre que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge. **(0.5 puntos)** D'Alambert

   (b) Demuestre que la sucesión de funciones (f_n) converge puntualmente pero no uniformemente. Justifique con detalle. **(1 punto)**

   (c) Muestre que

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \qquad \textbf{(1punto)}$$

2. Considere la función $y = (arcsen(x))^2$, sabiendo que vale la fórmula de recursión

$$y^{(n+2)}(0) = n^2 y^{(n)}(0), \quad n \geq 1\,.$$

   Pruebe que la serie de Taylor de y en $x = 0$ es

$$(arcsen(x))^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$$

   y que la serie converge para $|x| < 1$. **(2 puntos)**

3. Calcular el intervalo maximal de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x+1)^n}{2^n}$. **(1.5 puntos)**

$(2k)!$

$k=10 \quad 20 \cdot 18 \cdot 16$

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Cálculo I, Licenciatura en Ciencias, primer semestre 2010

Contenidos

- **Lógica, conjuntos, relaciones y funciones** Lógica matemática: lenguaje y verdad, demostraciones. Conjuntos: Operatoria de conjuntos, producto cartesiano de conjuntos, conjunto potencia. Relaciones: Dominio, Codominio y Recorrido, propiedades de las relaciones. Relaciones básicas. Funciones: inyectivas, sobreyectivas, biyectivas, inversas, imagen y preimagen de conjuntos por funciones, restricción de dominio de funciones, composición de funciones.

- **Sistema de los números reales como cuerpo ordenado y con existencia de Supremos.** Cuerpo ordenado: propiedades, desigualdades, inecuaciones y valor absoluto. Conjuntos acotados y cotas. Supremos e ínfimos de conjuntos de números. Sistema de números reales como completación del cuerpo ordenado de los números racionales. Aplicación a funciones reales de variable real: crecimiento y decrecimiento, operaciones entre funciones. Gráficas de funciones básicas. Paridad. Periodicidad.

- **Conjuntos finitos e infinitos**. Números Naturales, conjuntos finitos e infinitos, conjuntos numerables.

- **Sucesiones y convergencia.** Definiciones. Monotonía y cotas. Límite de sucesiones: convergencia, condiciones suficientes y necesarias para la convergencia, límites al infinito. Cálculo de límites. Teorema de Bolzano-Weierstrass. Sucesiones de Cauchy.

- **Límite y continuidad de funciones reales de variable real.** Definición de límite. Propiedades y cálculo de límites. Continuidad. Propiedades básicas de continuidad. Teoremas sobre funciones continuas sobre intervalos cerrados. Discontinuidades. Continuidad uniforme.

- **Derivadas de funciones reales de variable real.** Definición de derivada y de función derivable. Interpretaciones geométrica y física de la derivada. Propiedades de la derivación. Cálculo de derivadas. Derivada de inversas de funciones. Funciones determinadas implícitamente y sus derivadas. Derivadas de orden superior.

- **Teorema del valor medio para funciones derivables: consecuencias y aplicaciones.** Derivada nula en un intervalo y funciones constantes. Signo de la derivada en un intervalo y funciones monótonas. Extremos de funciones. Teorema del Valor Medio Generalizado y regla de L'Hospital. Razón de cambio. Estudio de la gráfica de una función derivable casi en todo su dominio.

- **Aproximaciones de funciones por polinomios.** Aproximación lineal de funciones derivables. Aproximación de funciones por polinomios de Taylor. Resto de Lagrange de la aproximación por Taylor.

Bibliografía:

M. Spivak, Cálculo infinitesimal.

T. A. Apostol, Calculus (Vol. I).

Juan de Burgos, Cálculo infinitesimal en una variable

El curso consta de una página web para publicación de avisos y publicación de material, en

http://sites.google.com/site/cursoca1mf

Cálculo II

Ayudantía Martes 4, Diciembre 2012

por *M.G*

1. Estudie la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuyo término general viene dado por

$$f_n : [-1,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto \sqrt[n]{t^2 - t^4}$$

2. Considere la sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = nx(1-x)^n$

- Demuestre que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge.
- Demuestre que la sucesión de funciones (f_n) converge puntualmente pero no uniformemente.
- Muestre que

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

3. Demuestre la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^5+4}$ para $|x|<1$ y

$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$ en $[a,b]$ (cuál?). Note que esta convergencia es absoluta y uniforme.

4. Responder dudas...

5 Sucesiones de números Reales

1. Si el límite $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ de la sucesión x_n dada más abajo existe, encuéntrelo y demuéstrelo. Si el límite no existe, demuestre que no existe.

(a) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+7}$.

(b) $x_n = 1 - (0.2)^n$.

(c) $x_n = \dfrac{n + \cos(n)}{3n - 1}$

(d) $x_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

(e) $x_n = \dfrac{5n^2 + 1}{3n^2 - 7}$.

(f) $x_n = \dfrac{51n^5 - n^2 + 1}{n^6 - 3n^2 - 7}$.

(g) $x_n = \dfrac{4n^{16} - n^7 + 1}{14n^{16} - 3n^2 - 7}$.

(h) $x_n = \dfrac{n^{26} - n^7 + 1}{14n^{16} - 3n^2 - 7}$.

2. Demuestre por definición que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5sen(n^2 + 3n)}{3^n + 2} = 0$$

Le puede servir probar primero por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n < 3^n$.

3. Determine, si existe,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{89}{33n + 5} + \frac{7n^3 + 8n^2 - 4}{28 - 3n^3}\right)$$

4. Para cada uno de los límites siguientes, calcúlelo si la sucesión converge, o demuestre que no converge:

(a) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{2n+3}$ (*R:* $1/\sqrt{2}$)

n sumos
stas (*)

(b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}$ (*R:* $1/2$)

(c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$ (*R:* $1/3$)

(d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3$ (*R:* $1/4$)

(e) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}$ (*R:* 0)

(f) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2+1}{n}$ (*R:* -1)

(g) $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ (*R: No converge.*)

(h) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{4^n}$ (*R:* 0)

(i) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^{\frac{2}{3}} \operatorname{sen} n}{n+1}$ (*R:* 0)

(j) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$ (*R:* $1/3$)

(k) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n} - \sqrt{2n}}{\sqrt{n+1}}$ (*R:* $1 - \sqrt{2}$)

(l) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-3)^{n+1} + 2\cdot 5^n + 2^n}{3\cdot 5^n + 1}$ (*R:* $2/3$)

(m) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+n}$ (*R:* 1)

(n) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^3}{n^2+1}$ (*R: No converge*) no está acotada

(o) $\lim_{n\to\infty} 2^{\cos n\pi}$ (*R: No converge*)

(p) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5 + n^7}$ (*R:* 1)

(q) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n}$ (*R:* 5)

(r) $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \sqrt[3]{1 - \dfrac{5}{n}}\right)$ (*R:* $5/3$)

(s) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{1 + \dfrac{7}{n}} - 1\right)$ (*R:* $7/3$)

(t) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$ (*R:* e^2)

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

(u) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n$ (*R:* $\sqrt{e}$)

(v) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n+1}\right)^{4n}$ (*R:* e^8)

(w) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+5}{3n+1}\right)^n$ (*R:* $e^{4/3}$)

(x) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}$ (*R:* 1)

(y) $\lim_{n\to\infty} a_n$ donde $a_1 = 5$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{5 \cdot a_n}$ (*R:* 5)

5. Para cada sucesión x_n encuentre su límite L y determine un valor de N tal que $n \geq N$ implica $|x_n - L| < 0,001$. Demuestre que su valor de N funciona.

$N=1001$

a) $x_n = \frac{1}{n+17}$, b) $x_n = \frac{1}{n-\frac{8}{3}}$, c) $x_n = 3 + \frac{\cos(n)}{2^n}$.

6. Suponga que existe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. Definamos una nueva sucesión $y_n = x_{n+1}$. Demuestre que existe $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ y vale L.

7. Sea $b_1 = 1$, $b_{n+1} = \dfrac{1}{1+b_n}$ para $n > 1$.

¿ b_{n+1} es subsucesión de b_n ?

(a) Calcule b_1, b_2, b_3, b_4 y b_5.

(b) Demuestre que si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ existe, entonces este límite L satisface $L = \dfrac{1}{1+L}$.

(c) Demuestre que $b_{n+1} - b_n$ es positivo si n es par y negativo si n es impar.

(d) Demuestre que la sucesión b_{2n} es monótona creciente y que la sucesión b_{2n-1} es monótona decreciente. (*Sugerencia*: calcule $b_{n+2} - b_n$ y use inducción).

(e) Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

8. Demuestre la siguiente aseveración, o encuentre un contraejemplo.
"Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existe, entonces el conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ es acotado."

9. Si $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

10. Si $a > 1$ y $k \in \mathbb{N}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

(*) 11. Pruebe que si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

12. Dadas las sucesiones x_n e y_n defina la sucesión z_n como $z_{2n-1} = x_n$ y $z_{2n} = y_n$. Pruebe que si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

13. Un número a se llama *valor de adherencia* de la sucesión x_n cuando es el límite de alguna subsucesión de x_n. Pruebe que una sucesión acotada es convergente si y sólo si posee un único valor de adherencia.

14. ¿Cuáles son los valores de adherencia de la sucesión x_n definida por $x_{2n-1} = n$, $x_{2n} = 1/n$? ¿Es esta sucesión convergente?

15. Se dice que x_n es una *sucesión de Cauchy* cuando, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$.

(a) Pruebe que toda sucesión de Cauchy es acotada.

(b) Pruebe que una sucesión de Cauchy no puede tener dos valores de adherencia distintos.

$\Rightarrow$ (c) Pruebe que una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy.

16. Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

17. Defina la sucesión (a_n) recursivamente como $a_1 = a_2 = 1$ y $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escriba $x_n = a_n/a_{n+1}$ y pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, donde a es el único número positivo tal que $1/(a+1) = a$. El término a_n se llama $n-$ésimo *número de Fibonacci* y $a = (-1+\sqrt{5})/2$ es el número de oro de la Geometría Clásica.

convergente $\Longleftrightarrow$ único valor de adherencia

$\Rightarrow \checkmark$ $\Leftarrow$

Teorema (importante): Toda sucesión monótona y acotada es convergente

demostración: Sea (x_n) monótona, supongamos que creciente, y acotada. Escribimos $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ y $a = \sup X$.

Afirmamos que $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, el número $a - \varepsilon$ no es cota superior de X. Luego existe n_0 tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Así, para todo $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$, de donde $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$, lo que implica que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Análogamente, si (x_n) es decreciente y acotada inferiormente entonces $\lim_{n\to\infty} x_n$ es el ínfimo del conjunto de valores x_n.

4 Números Reales

1. En un cuerpo algebraico $(A, \oplus, \otimes)$ pruebe que si *definimos* $\frac{a}{b}$ como $a \otimes (b^{-1})$ para todos a y b en A, con $b \neq 0$, entonces $\dfrac{(a \otimes d) \oplus (b \otimes c)}{b \otimes d} = \dfrac{a}{b} \oplus \dfrac{c}{d}$

2. Sea $(A, \oplus, \otimes, <)$ **cuerpo ordenado** con neutro aditivo 0 y neutro multiplicativo 1. Asuma las siguientes definiciones en el cuerpo dado:

$$x - y = x \oplus (-y); \quad \frac{x}{y} = x \otimes y^{-1}, y \neq 0; \quad 2x = x \oplus x; \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},\ (n+1)x = nx \oplus x$$

$$\frac{1}{2} = (1 \oplus 1)^{-1}; \quad x^2 = x \otimes x; \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Demuestre las siguientes propiedades de cuerpo ordenado, para todos x, y, z, w en A (si se demostraron en clase, demuéstrelas en su propio estilo):

(a) $x > 0 \Leftrightarrow (-x) < 0$
(b) $(x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow x \oplus y > 0$
(c) $(x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow x \otimes y > 0$
(d) $(x < y \wedge z < w) \Rightarrow x \oplus z < y \oplus w$
(e) $(0 < x < y \wedge 0 < z < w) \Rightarrow x \otimes z < y \otimes w$
(f) $x > y \Leftrightarrow x - y > 0$
(g) $1 > 0$
(h) $x^2 \geq 0$
(i) $x > 0 \Rightarrow (x^{-1}) > 0$
(j) $x > y > 0 \Rightarrow 0 < (x^{-1}) < (y^{-1})$
(k) $x > 1 \Rightarrow 0 < (x^{-1}) < 1$
(l) $0 < x < 1 \Rightarrow 1 < (x^{-1})$
(m) $x < y \Rightarrow x < \dfrac{x \oplus y}{2} < y$
(n) $x - 1 < x < x \oplus 1$
(o) $|x| \geq 0$
(p) $|-x| = |x|$
(q) $|x^2| = x^2$
(r) $|x| \geq x$
(s) $-|x| \leq x \leq |x|$
(t) $|x \otimes y| = |x| \otimes |y|$
(u) $y \neq 0 \Rightarrow \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
(v) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(w) $y > 0 \Rightarrow (|x| = y \Leftrightarrow (x = y \vee x = (-y))$
(x) $y > 0 \Rightarrow (|x| < y \Leftrightarrow -y < x < y)$
(y) $y > 0 \Rightarrow (y < |x| \Leftrightarrow x < -y \vee y < x)$
(z) $|x \otimes y| \leq |x| \otimes |y|$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones e inecuaciones en $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$.

(a) $3x - 2 > 0$
(b) $\frac{x+2}{3-x} > 1$
(c) $(x-2)(x+1) < (x+2)(x-1)$
(d) $\frac{x-2}{x-1} < \dfrac{x+2}{x+1}$
(e) $\frac{3x-2}{x^2+1} > 0$
(f) $\frac{x^2+3x-1}{x^2+1} > 1$
(g) $x^2 - 4 < 0$
(h) $(x+2)(x - \frac{1}{3}) \leq 0$
(i) $4x^2 + 3x \leq x^2 - 2x + 2$
(j) $\frac{(x^2+4)(x-3)(x+3)}{(x-1)(x^2+1)} < 0$
(k) $\frac{x^4 - 5x^2 - 36}{x^3 - x^2 + x - 1} < 0$
(l) $\frac{x^2-6x-7}{x^2+2x+1} < 3$
(m) $(x+1)(x^3 - x^2 + x - 1) > 0$
(n) $|2x - 1| \leq 3$
(o) $x + |x| \leq 4$
(p) $|x - 4| > x - 2$
(q) $|x - 7| < 5 < |5x - 25|$
(r) $|x^2 - x| + x > 1$
(s) $\left|\frac{x+2}{3-x}\right| < 1$
(t) $|x + 2| + |x - 1| \leq 5$
(u) $|x + 2| \leq 1 + |x + 3|$

4. Demuestre que si $a < b$ y $c < d$ entonces $ad + bc < ac + bd$.

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$, tales que $a > b$. ¿Es verdadera o falsa la desigualdad $\dfrac{a^3b - ab^3}{b - a} < 0$? Justifique.

6. Sean x, y números reales positivos. Pruebe que $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$.

7. Pruebe que $||x| - |y|| \leq |x - y|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

8. Pruebe que $|a - b| < \varepsilon$ implica que $|a| < |b| + \varepsilon$.

9. Demuestre que si $a < b$ en $\mathbb{R}$, entonces existe c en $\mathbb{R}$ tal que $a < c < b$, y deduzca de este hecho que entre a y b existen infinitos números reales.

10. Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $x^2 < x$ se tiene que $0 < x < 1$.

11. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $-\dfrac{1}{2^n} < x < \dfrac{1}{2^n}$. Demuestre que $x = 0$.

12. Se dice que una función $f : X \to \mathbb{R}$ está *acotada superiormente* cuando su imagen $f(X)$ es un conjunto acotado superiormente. Se escribe $sup(f) = sup\{f(x) : x \in X\}$.

    Pruebe que si f y g están acotadas superiormente ocurre lo mismo con la suma; además se tiene que $sup(f + g) \leq sup(f) + sup(g)$. Dé un ejemplo en el que $sup(f + g) < sup(f) + sup(g)$. Enuncie y pruebe un resultado análogo para infimos.

13. Dadas las funciones $f, g : X \to \mathbb{R}^+$ acotadas superiormente, pruebe que el producto $f \cdot g$ es una función acotada tal que $sup(f \cdot g) \leq sup(f) \cdot sup(g)$ e $inf(f \cdot g) \geq inf(f) \cdot inf(g)$. Indique ejemplos donde se tenga la desigualdad estricta.

14. Con las hipótesis del ejercicio anterior, demuestre que $sup(f^2) = sup(f)^2$ e $inf(f^2) = inf(f)^2$.

15. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$ con $a^2 < 2 < b^2$, sean $x, y \in \mathbb{R}^+$ tales que $x < 1$, $x < \dfrac{2 - a^2}{2a + 1}$ e $y < \dfrac{b^2 - 2}{2b}$. Pruebe que

    (a) $(a + x)^2 < 2 < (b - y)^2$.

    (b) $(b - y) > 0$.

    (c) Considere el conjunto acotado $X = \{a \in \mathbb{R}^+ : a^2 < 2\}$ y concluya que el número real $c = supX$ cumple que $c^2 = 2$.

16. Pruebe que el conjunto $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si y sólo si $a < x < b$, $a, b \in I \Rightarrow x \in I$.

17. Determine en $\mathbb{R}$ si los siguientes conjuntos son o no acotados superior o inferiormente, y en caso de ser alguno de esos casos, o ambos, determine si existe máximo o mínimo, supremo o ínfimo:

    (a) $A = \{11r - 2r^2 - 12 \mid r \in \mathbb{R}\}$

    (b) $B = \{r \in \mathbb{R} \mid r^2 - 3r - 4 < 0\}$

    (c) $C = \{r \in \mathbb{R} \mid \exists z \in \mathbb{R}, \quad r = z^2 - 5z + 5\}$

    (d) $D = \{r \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}, \quad r = \frac{1}{1+x^2}\}$

    (e) $E = \{r \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}, \quad r = \frac{1}{n}\}$

18. Suponga que los conjuntos de racionales A y B tienen supremo en $\mathbb{Q}$, $\sup(A)$ y $\sup(B)$ respectivamente. Demuestre que:

    (a) El conjunto de cotas superiores de A tiene mínimo en $\mathbb{Q}$.

    (b) Si el conjunto de cotas superiores de B intersecta a B, entonces B tiene máximo.

    (c) El conjunto $\{p + q \mid p \in A, \ q \in B\}$ tiene supremo en $\mathbb{Q}$. Determínelo.

    (d) El conjunto $\{-r \mid r \in A\}$ tiene ínfimo en $\mathbb{Q}$. Determínelo.

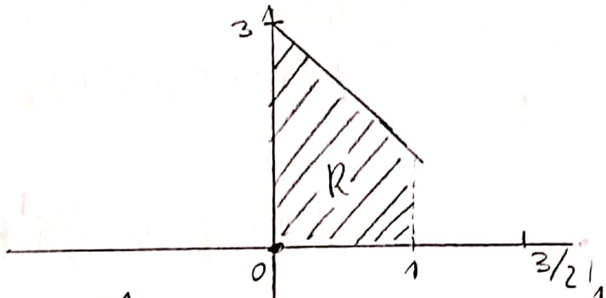
    (e) Hay casos en que el conjunto $\{p \cdot q \mid p \in A, \ q \in B\}$ tiene supremo en $\mathbb{Q}$ y otros en que no lo tiene. Determine las condiciones para que ello ocurra.

Guía Aplicaciones de Integrales

70) Calcular el área de la región situada entre las gráficas de cada función y el eje X en el intervalo dado. Bosquejar cada región:

a) $y = -2x+3$, $[0,1]$

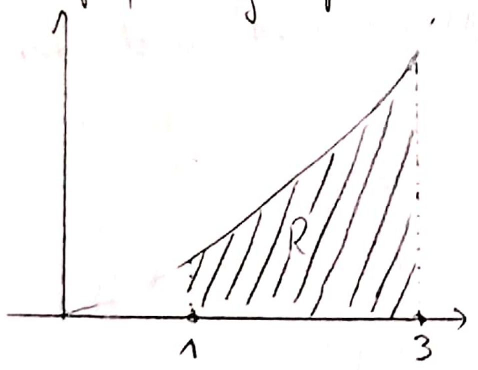
La gráfica y región calcular son:



$$R = \int_0^1 y(x)dx = \int_0^1 (-2x+3)dx = (-x^2+3x)\Big|_0^1 = (-1+3) - 0 = 2$$

e) $y = 2x^2$, $[1,3]$

La gráfica y región a calcular son:

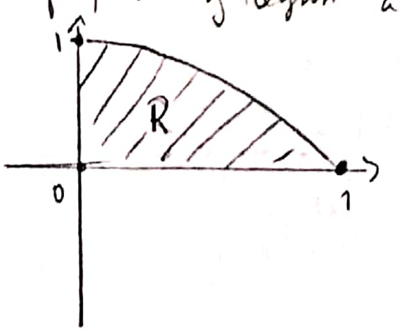


$$R = \int_1^3 y(x)dx = \int_1^3 2x^2 = 2\frac{x^3}{3}\Big|_1^3$$

$$R = 18 - \frac{2}{3} = \frac{48-2}{3} = \frac{46}{3}$$

g) $y = 1-x^3$, $[0,1]$

La gráfica y región a calcular son:

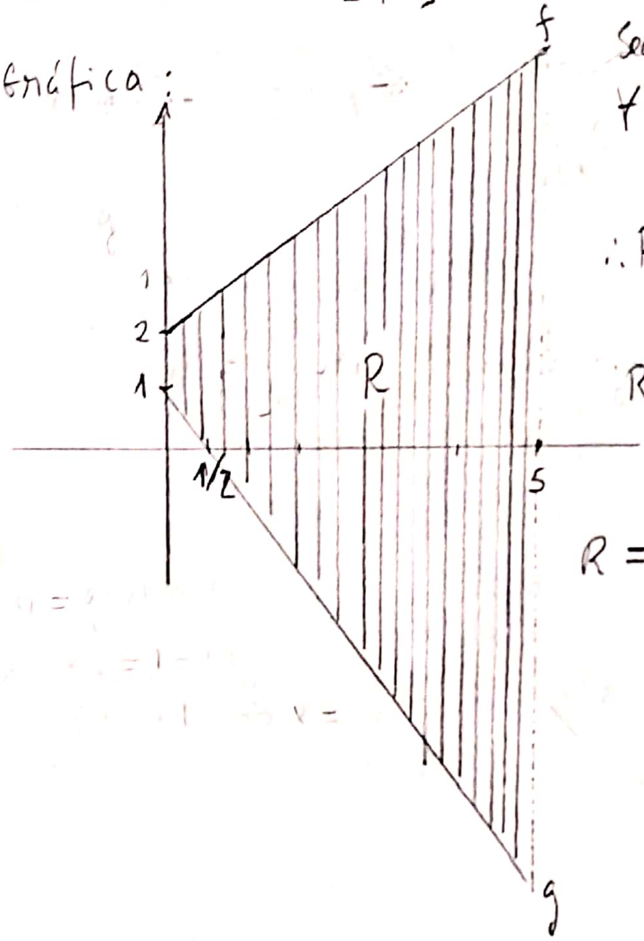


$$R = \int_0^1 y(x)\,dx = \int_0^1 (1-x^3)dx = \left(x - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1$$

$$R = \left(1 - \frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{3}{4}$$

71) Calcule el área entre $f(x) = x+2$ y $g(x) = 1-2x$ en el intervalo $[0,5]$

Gráfica :



Sea R el area de la región achurada

$\forall x \in [0,5]$, $g(x) \leq f(x)$

$$\therefore R = \int_0^5 (f(x) - g(x))\,dx$$

$$R = \int_0^5 (x+2+2x-1)\,dx = \int_0^5 (3x+1)\,dx$$

$$R = \left(3\frac{x^4}{4} + x\right)\Big|_0^5 = \frac{3}{4}5^4 + 5 = 5\left(\frac{125 \cdot 3}{4} + 1\right)$$

72) Calcule el área entre $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x-4$ en el intervalo $[-1,3]$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x = -x - 4 \Leftrightarrow x^2 - x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 4}}{2}$ $\therefore$ no existe intersecciones entre f y g

Sea $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - x + 4 \geqslant 0$, $\forall x \in [-1,3]$

$\therefore f(x) \geqslant g(x) \quad \forall x \in [-1,3]$

Sea R el área de la región limitada por f y g

$$\therefore R = \int_{-1}^{3} (f(x) - g(x))\,dx = \int_{-1}^{3} (x^2 - x + 4)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x\right)\Big|_{-1}^{3}$$

$$\therefore R = \left(9 - \frac{9}{2} + 12\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 4\right)$$

73) Calcule el area entre $f(x) = x^2+2$ y $g(x) = -5$ en el intervalo $[-1,4]$

$f(x) = g(x) \iff f(x)-g(x) = 0 \iff x^2+2-5 = 0 \iff x^2-3 = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$

Sea $h(x) = f(x)-g(x) = (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ entonces:

$$h(x) \geq 0 \iff (x+\sqrt{3} \geq 0 \wedge x-\sqrt{3} \geq 0) \vee (x+\sqrt{3} \leq 0 \wedge x-\sqrt{3} \leq 0)$$
$$\iff (x \geq -\sqrt{3} \wedge x \geq \sqrt{3}) \vee (x \leq -\sqrt{3} \wedge x \leq \sqrt{3})$$
$$\iff x \in]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, \infty[$$

$\therefore$ $h(x) \geq 0$, $x \in [\sqrt{3}, 4]$
$h(x) \leq 0$, $x \in [-1, \sqrt{3}]$

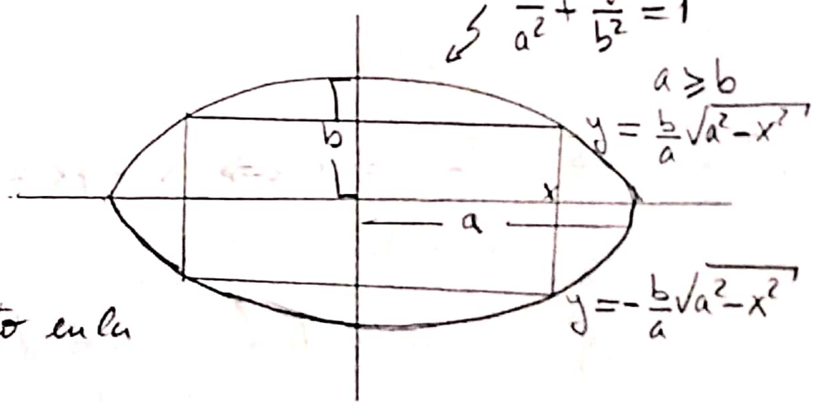
Sea R el area entre f y g:

$$\therefore R = \int_{-1}^{\sqrt{3}} (-5-x^2-2)\,dx + \int_{\sqrt{3}}^{4} (x^2+2-5)\,dx$$

$$R = \left(-7x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{\sqrt{3}} + \left(\frac{x^3}{3} - 3x\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{4}$$

---

(74) Determinar el rectángulo con los lados paralelos a los ejes coordenados, inscrito en la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, que tenga área máxima.



Desarrollo

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$$
$$\Rightarrow y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

sea R el area del rectángulo inscrito en la elipse; entonces:

$$R = 2\int_{-d}^{d} \frac{b}{a}\sqrt{a^2-d^2}\,dx \quad , \quad x \in [-d,d], \quad 0 \leq d \leq a$$

$$R = 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2-d^2}\int_{-d}^{d} dx = 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2-d^2}\,(d+d) = 4\frac{bd}{a}\sqrt{a^2-d^2}$$

$$\therefore R(d) = \frac{4bd}{a}\sqrt{a^2-d^2}$$

$$R'(d) = \frac{4b}{a}\left(\sqrt{a^2-d^2} + d\,\frac{1}{2\sqrt{a^2-d^2}}(-2d)\right) = \frac{4b}{2a}\left(\frac{2(a^2-d^2)-2d^2}{\sqrt{a^2-d^2}}\right)$$

$$R'(d) = 0 \iff \frac{4b}{2a}\left(\frac{2(a^2-d^2)-2d^2}{\sqrt{a^2-d^2}}\right) = 0 \Rightarrow 2a^2-2d^2-2d^2 = 0$$

$$2a^2-4d^2 = 0$$

$$d = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ para $d = \frac{a}{\sqrt{2}}$ se logra el rectángulo de mayor área.

76) Calcule el area de la región limitada por las curvas:

a) $y_1 = 4-x^2$; $y_2 = 4-4x$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow 4-x^2 = 4-4x \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow x\in\{0,4\}$$

si $x\in[0,4]$ entonces $y_1 \geq y_2$

$$\therefore R = \int_0^4 (y_1-y_2)\,dx = \int_0^4 (4-x^2-4+4x)\,dx = \int_0^4 (4x-x^2)\,dx =$$

$$\therefore R = \left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = 32-\frac{64}{3}$$

b) $y_1 = x^3-3x$, $y_2 = x$

$$y_1 = y_2 \iff x^3-3x = x \iff x^3-4x = 0 \iff x(x^2-4) = 0$$

$$\iff x(x+2)(x-2) = 0$$

$\therefore$ y_1 y y_2 se intersectan en $x\in\{0,-2,2\}$

si $x<-2 \Rightarrow x+2<0$, $x-2<0$, $x<0 \Rightarrow x(x+2)(x-2)<0$

si $-2<x<0 \Rightarrow 0<x+2$, $x-2<0$, $x<0 \Rightarrow x(x+2)(x-2)>0$

si $0<x<2 \Rightarrow 0<x+2$, $x-2<0$, $x>0 \Rightarrow x(x+2)(x-2)<0$

Si $x > 2 \Rightarrow x(x+2)(x-2) > 0$

$\therefore$ $y_1 > y_2$ cuando $x \in \,]-2,0[\, \cup \,]2,+\infty[$

$\therefore$ $y_1 < y_2$ cuando $x \in \,]-\infty,-2[\, \cup \,]0,2[$

$$\therefore R_1 = \int_{-2}^{0} (y_1 - y_2)\,dx = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\Big|_{-2}^{0} = -\left(\frac{16}{4} - 8\right) = 8 - 4 = 4$$

$$R_2 = \int_{0}^{2} (y_2 - y_1)\,dx = \int_{0}^{2} (4x - x^3)\,dx = \left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{2} = 8 - 4 = 4$$

$$\therefore R = R_1 + R_2 = 8$$

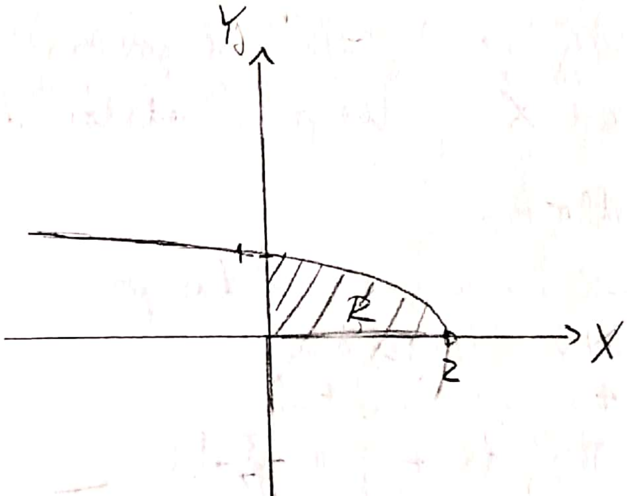
---

77) Calcule el área de la región limitada por el eje X, el eje Y, y cada una de las siguientes curvas:

a) $x + y + y^2 = 2$

b) $y^2 = (4-x)^3$

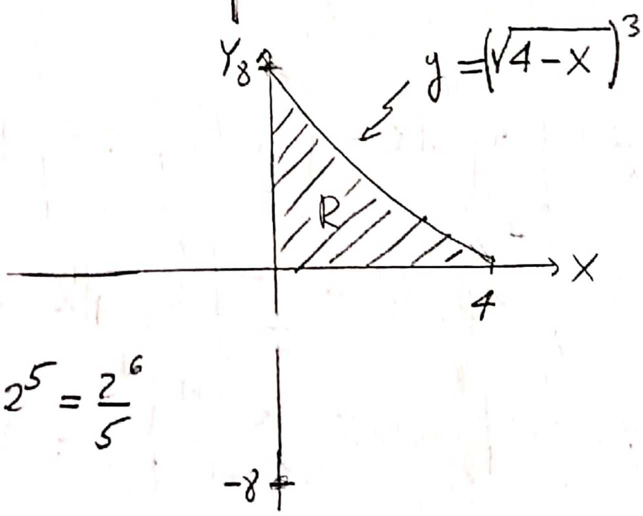
Desarrollo:



a) $$R = \int_0^1 x\,dy = \int_0^1 (2 - y - y^2)\,dy$$

$$R = \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

$$R = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{12 - 3 - 2}{6} = \frac{7}{6}$$



b) $$\int_0^4 y\,dx = \int_0^4 (\sqrt{4-x})^3\,dx$$

$$= \int_0^4 (4-x)^{3/2} = -\frac{2}{5}(4-x)^{5/2}\Big|_0^4 = \frac{2}{5} \cdot 2^5 = \frac{2^6}{5}$$

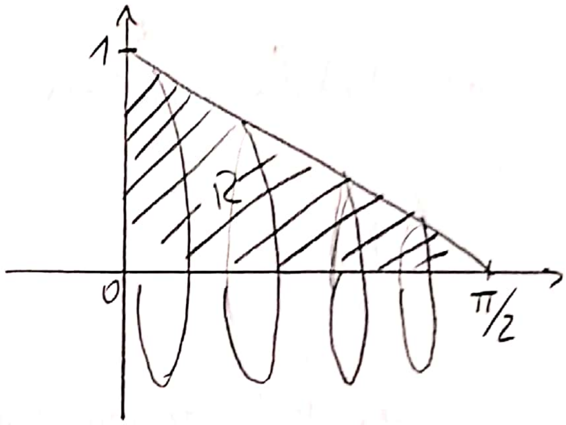
79) Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer rotar la región limitada por la función $y=\sqrt{\cos x}$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, y las rectas $y=0$, $x=0$ en torno al eje X.

Desarrollo:

Si $0 \leq x \leq \pi/2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y \leq 1$

$$V = \int_0^{\pi/2} \pi y^2 dx = \int_0^{\pi/2} \pi \cos x \, dx$$

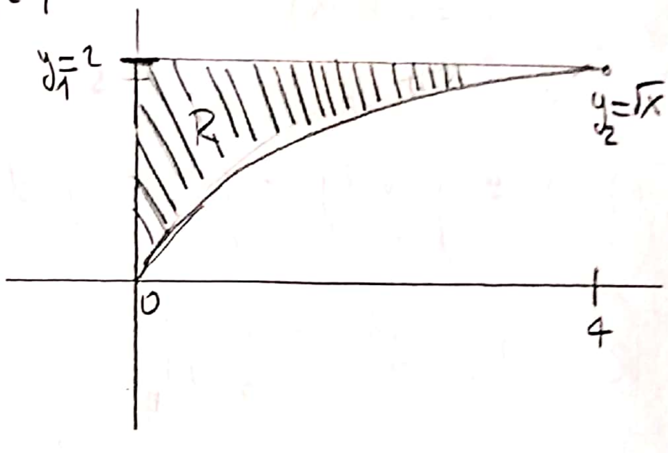
$$V = \pi \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi/2} = \pi$$



80) Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por $y=\sqrt{x}$ y por las rectas $y=2$, $x=0$, alrededor del eje X y luego alrededor del eje Y

Desarrollo:

sea R la región acotadas por las curvas anteriores



$$V_{R_X} = \int_0^4 \pi y_1^2 \, dx - \int_0^4 \pi y_2^2 \, dx$$

$$V_{R_X} = \pi \left[4\int_0^4 dx - \int_0^4 x \, dx \right] = \pi \left[4 \cdot 4 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 \right] = \pi (16-8) = 8\pi$$

$$V_{R_Y} = 2\pi \int_0^4 x y_1 \, dx - 2\pi \int_0^4 x y_2 \, dx = 2\pi \int_0^4 2x \, dx - 2\pi \int_0^4 x^{3/2} dx$$

$$V_{R_Y} = 2\pi x^2 \Big|_0^4 - 2\pi \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} \Big|_0^4 = 32\pi - 2\pi \frac{2^5}{5/2} = 32\pi - \frac{2^7\pi}{5}$$

81) Demuestre que el volumen de un cono circular recto de altura h y base de Radio R es $\frac{\pi h R^2}{3}$

Sea $f : [0,R] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(r) = h - \frac{h}{R} r$

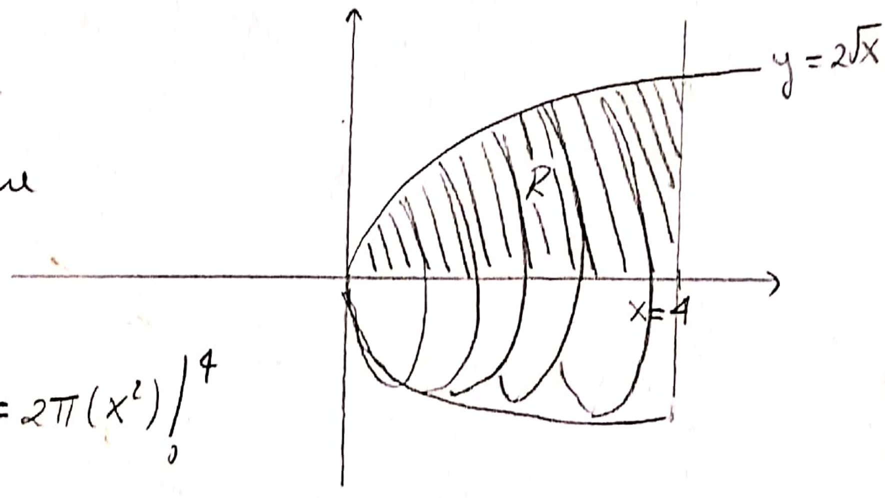
Entonces el volumen del sólido que resulta al rotar la región limitada por $y=0$, $x=0$ y f es:

$$V = 2\pi \int_0^R r f(r)\,dr = 2\pi \int_0^R (rh - \frac{h}{R} r^2)\,dr = 2\pi\left(h\frac{r^2}{2} - \frac{h}{3R} r^3 \right)\Big|_0^R$$

$$V = 2\pi\left(\frac{hR^2}{2} - \frac{hR^2}{3} \right) = 2\pi \frac{3hR^2 - 2hR^2}{6} = \frac{\pi h R^2}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$$\therefore V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

82) Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar en torno al eje X, el área encerrada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x=4$.



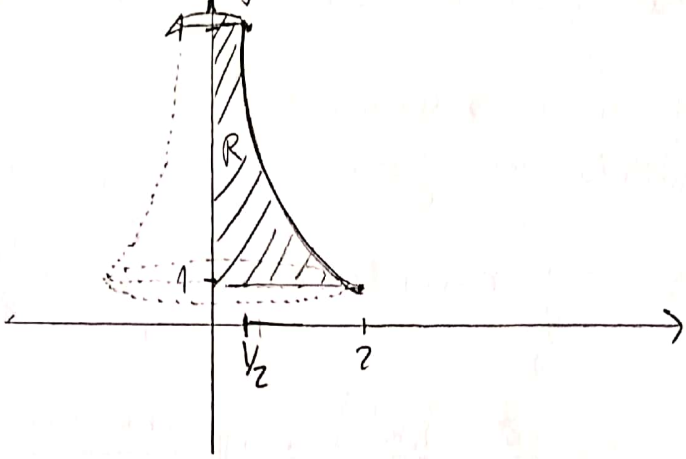
Desarrollo.

Sea V el volumen del sólido que resulta al hacer girar la región R en torno al eje X.

$$V = \int_0^4 4\pi x\,dx = 4\pi\left(\frac{x^2}{2} \right)\Big|_0^4 = 2\pi (x^2)\Big|_0^4$$

$$V = 32\pi$$

(83) Sea la curva de ecuación $x = \frac{2}{y}$, $1 \leq y \leq 4$. Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región comprendida entre el eje Y, y la curva, en torno al eje Y



$$V_R = \int_1^4 \pi x^2 dy = \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2} dy$$

$$V_R = 4\pi \int_1^4 \frac{1}{y^2} dy = -4\pi \left. \frac{1}{y} \right|_1^4$$

$$V_R = -\pi + 4\pi = 3\pi$$

$$V_R = \int_0^2 2\pi x \frac{2}{x} dx$$

$$V_R = 4\pi \int_0^2 dx = 4\pi \cdot 2 = 8\pi$$

Scanned with CamScanner

Integrales impropias.

53) Consideremos la siguiente integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la integral converge? Calcule el valor de dicha integral.

Desarrollo:

Sabemos que para todo $c \in [1,\infty[$, $\int_1^c \frac{dx}{x^{\alpha}}$ existe.

i) Si $\alpha = 0$ entonces

$$\int_1^c \frac{dx}{x^{\alpha}} = \int_1^c 1\,dx = c-1 \quad , \text{pero } \lim_{c\to\infty} (c-1) = \infty$$

por ende $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ diverge para $\alpha = 0$

ii) Si $\alpha = 1$ entonces

$$\int_1^c \frac{dx}{x^{\alpha}} = \int_1^c \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^c = \ln(c) \quad , \text{pero } \lim_{c\to\infty} \ln(c) = \infty \text{ por ende}$$

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ diverge cuando $\alpha = 1$

iii) Si $0 < \alpha < 1$ entonces

$$\int_1^c \frac{dx}{x^{\alpha}} = \int_1^c x^{-\alpha} dx = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^c = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^c = \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

pero $\lim_{c\to\infty} \left(\frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = \infty$ (ya que $1-\alpha > 0$ y $c^{1-\alpha}$ es creciente)

por ende $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ diverge cuando $0 < \alpha < 1$

iv) Cuando $1 < \alpha$ entonces

$$\int_1^c \frac{dx}{x^{\alpha}} = \int_1^c x^{-\alpha} dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^c = \frac{1}{x^{\alpha-1}(1-\alpha)}\Big|_1^c = \frac{1}{c^{\alpha-1}(1-\alpha)} - \frac{1}{(1-\alpha)}$$

y $\lim_{c\to\infty}\left(\frac{1}{c^{\alpha-1}(1-\alpha)}-\frac{1}{1-\alpha}\right)=-\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$

$\therefore \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ converge para $\alpha>1$ y $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$

Si $\alpha<0$ tenemos

$$\int_1^c\frac{dx}{x^\alpha}=\int_1^c x^{-\alpha}dx=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^c=\frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}$$

pero $\lim_{c\to\infty}\left(\frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right)=\infty$, por ende $\int_1^c\frac{dx}{x^\alpha}$ diverge cuando $\alpha<0$

54) Sean $I_1=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$ e $I_2=\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$. Pruebe que las integrales convergen y calcule su valor.

Para I_1 tenemos que dado $c\in[-\infty,0]$ la integral $\int_c^0\frac{dx}{1+x^2}$ existe, y además $\int_c^0\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_c^0=\arctan 0-\arctan c=-\arctan c$

y también tenemos $\lim_{c\to-\infty}-\arctan c=-\lim_{c\to-\infty}\arctan c=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \int_{-\infty}^0\frac{dx}{1+x^2}$ converge y $\int_{-\infty}^0\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$

Para I_2 tenemos que dado $d\in[0,\infty[$, la integral $\int_0^c\frac{dx}{1+x^2}$ existe, y además $\int_0^c\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^c=\arctan c-\arctan 0=\arctan c$

y $\lim_{c\to\infty}\arctan c=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ converge y $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$

55) Determine para qué valores de α la integral impropia

$$\int_a^b \frac{dX}{(b-X)^\alpha} \quad \text{converge}$$

Desarrollo : Vemos que $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$ no está definida en $X=b$, por ende tenemos que estudiar la integral impropia $\int_a^{b^-} \frac{1}{(b-x)^\alpha} dX$.

Para $c \in [a,b[$ vemos que $\int_a^c \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$ existe (ya que la la función que se quiere integrar es continua en $[a,c]$, entonces:

$$\int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} c-a & , \alpha = 0 \\ -\ln(b-c) + \ln(b-a) & , \alpha = 1 \\ \frac{(b-c)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & , \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Calculando el límite tenemos que

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} b-a & , \alpha = 0 \\ \infty & , \alpha = 1 \\ -\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & , \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$\therefore$ La integral $\int_a^b \frac{dx}{b-x}$ converge cuando $\alpha \in \mathbb{R} - \{1\}$

56) Estudiar la convergencia de las integrales impropias y calcular su valor cuando corresponda.

a) $\int_1^\infty (1-x)e^{-x} dx$

Estudiemos la integral $\int_1^c (1-X)e^{-X} dx$, integrando por partes tenemos que:

$$\int_1^c (1-x)e^{-x}dx = (x-1)e^{-x}\Big|_1^c - \int_1^c -e^{-x}(-1)\,dx$$

$$\int_1^c (1-x)e^{-x}dx = (x-1)e^{-x}\Big|_1^c - \int_1^c e^{-x}dx$$

$$\int_1^c (1-x)e^{-x}dx = (x-1)e^{-x}\Big|_1^c + e^{-x}\Big|_1^c = \frac{c-1}{e^c} + \frac{1}{e^c} - \frac{1}{e}$$

$\therefore \lim_{c\to\infty} \int_1^c (1-x)e^{-x}dx = -\frac{1}{e}$ $\quad\therefore \int_1^c (1-x)e^{-x}dx$ converge y $\int_1^c (1-x)e^{-x}dx = -\frac{1}{e}$

b) $\int_0^\infty e^x \cos x\,dx$, por criterio de comparación al límite tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x\cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x \cos x} = 0$$

pero $\int_0^\infty dx$ diverge, entonces $\int_0^\infty e^x \cos x\,dx$ diverge

c) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(2x-1)^3}$, estudiamos la integral $\int_M^0 \frac{dx}{(2x-1)^3}$

$$\int_M^0 \frac{dx}{(2x-1)^3} = -\frac{1}{2(2x-1)^2}\Big|_M^0 = -\frac{1}{2(-1)^2} + \frac{1}{2(2M-1)^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2M-1)^2} \longrightarrow -\frac{1}{2}$$

cuando $M \to -\infty$ $\quad\therefore \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(2x-1)^3}$ converge.

d) $\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(4-x)^2}$; calculando $\int_M^2 \frac{dx}{(4-x)^2} = \frac{1}{4-x}\Big|_M^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4-M} \longrightarrow \frac{1}{2}$

cuando $M \to -\infty$ $\quad\therefore \int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(4-x)^2}$ converge

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

Tenemos que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

Para el caso de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x}+e^x} \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x} \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}$

pero $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$ converge entonces $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ también converge

Para $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$; estudiamos la integral $\displaystyle\int_{-r}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

$$\int_{-r}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = -\int_0^{r} \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}\,dx = -\int_0^{r} \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}}\,dx = -\int_0^{r} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

haciendo el cambio de variable $u = e^x$; $dx = \frac{du}{u}$

$$-\int_1^{e^r} \frac{u}{u^2+1}\,\frac{du}{u} = -\int_1^{e^r} \frac{du}{u^2+1} = -\arctan u \Big|_1^{e^r} = -\arctan(e^r) + \arctan(1)$$

$$\longrightarrow -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad r \to \infty$$

$\therefore \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ es convergente.

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$;

Para $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$ vemos que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+4}\,dx \leq \int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

pero $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+4}$ diverge $\therefore \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$ diverge.

g) $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$,

Tenemos que: $\int_1^M \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx = -\frac{\sqrt{x}}{1+x}\Big|_1^M - \int_1^M -\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$$= -\frac{1}{\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\Big|_1^M + \frac{1}{2}\int_1^M \frac{1}{\sqrt{x}+x^{3/2}}dx$$

Ambos miembros del lado derecho de la igualdad convergen cuando $M\to\infty$

$\therefore \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$ converge.

h) $\int_1^\infty \frac{e^x}{1+e^x}dx$

Vemos que $\frac{e^x}{1+e^x}\to 1$ cuando $x\to\infty$ y además, tomando $\varepsilon = 1/2$ existe $M\in\mathbb{R}$ tal que si $x>M \Rightarrow \left|\frac{e}{e^x+1}-1\right| < 1/2$ (def. de límite)

$$\therefore\quad 1-\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| < 1/2$$

$$\therefore\quad 1/2 < \left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$\therefore \int_1^\infty \frac{1}{2}dx \leq \int_1^\infty \frac{e^x}{1+e^x}$ pero $\int_1^\infty \frac{1}{2}dx$ es divergente

$$\therefore \int_1^\infty \frac{e^x}{1+e^x}dx \text{ es divergente}$$

i) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x}$

Tenemos que $\ln x = u$, $x = e^u$, $dx = e^u du$

$$\int_2^{M} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^{\ln M} \frac{e^u du}{e^u \, u} = \int_{\ln 2}^{\ln M} du = \ln M - \ln 2 \underset{M \to \infty}{\longrightarrow} \infty$$

$\therefore \displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ diverge

j) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2x \ln(x^2+1)}{x^2+1} dx$, Vemos que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{2x \ln(x^2+1)}{x^2+1} dx$

pero, por criterio de comparación $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1)\Big|_1^{\infty}$ diverge,

por lo tanto $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2x \ln(x^2+1)}{x^2+1} dx$ también diverge.

---

57) Una aplicación interesante de integrales impropias es el cálculo del Potencial Electrostático de una esfera cargada uniformemente. Si queremos calcular el potencial en un punto r que está fuera de la esfera, éste viene dado por

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} E_r dr ,$$

donde E_r es el campo eléctrico producido por la esfera, tal campo a partir de la Ley de Gauss es $E_r = k_e \frac{Q}{r^2}$, con Q la carga total de la esfera y k_e la constante de Coulomb.

Con la definición anterior, obtenga el potencial eléctrico V_r en un punto fuera de la esfera con carga total Q y radio R.

Desarrollo:

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} E_r\,dr = \int_{r}^{\infty} E_r\,dr = k_e Q \int_{r}^{\infty} \frac{1}{r^2}\,dr = -\frac{k_e Q}{r}\Bigg|_{r}^{\infty} = -\frac{k_e Q}{r}$$

58) Considere la función $f:(-1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^3}$.

Para los volúmenes y áreas siguientes, se pide determinar si son finitos y en tal caso calcularlos.

(a) Área de la región: $R = \{(x,y) : 0 \leq x \,,\, 0 \leq y \leq f(x)\}$

(b) Área de la región: $Q = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 0 \,,\, f(x) \leq y \leq 0\}$

(c) Volumen del sólido obtenido al rotar la región R de la parte (a), en torno al semi-eje OX.

(d) Volumen del sólido obtenido al rotar la región R de la parte (a), en torno al semi-eje OY.

Desarrollo: El gráfico de la función f viene dado por:

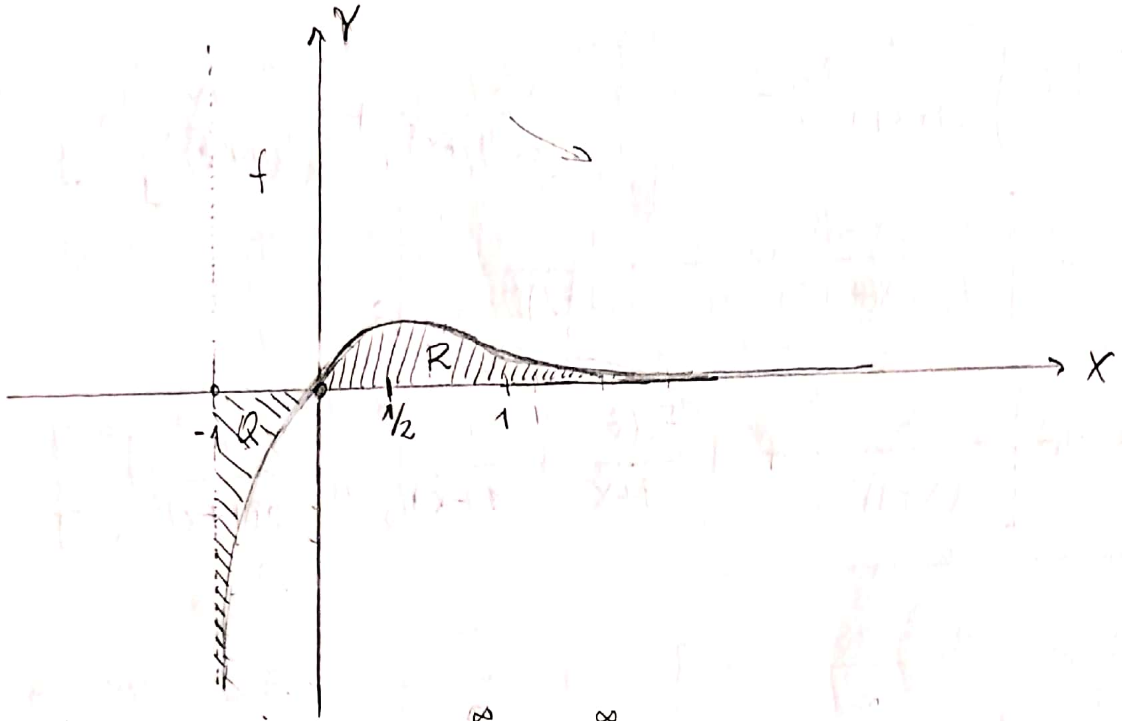
$$f'(x) = \frac{(1+x)^3 - 3x(1+x)^2}{(1+x)^6} = \frac{(1+x)^2(1+x-3x)}{(1+x)^6} = \frac{1+x-3x}{(1+x)^4} = \frac{1-2x}{(1+x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2(1+x)^4 - 4(1-2x)(1+x)^3}{(1+x)^8} = \frac{(1+x)^3(-2-2x-4+8x)}{(1+x)^8} = \frac{6x-6}{(1+x)^5}$$

$$f''(x) = 6\,\frac{x-1}{(1+x)^5}$$

$- \quad 1 \quad + \quad 2 \quad -$

Scanned with CamScanner



a) $R = \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\,dx = -\frac{x}{2(1+x)^2}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$

$= -\frac{1}{2}\frac{x}{(1+x)^2}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$

$\therefore R = 1$

b) $Q = \int_{-1}^{0} \frac{x}{(1+x)^3}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{x}{(1+x)^3}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\frac{1}{2}\frac{x}{(1+x)^2}\Big|_{-1+\varepsilon}^{0} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}\Big|_{-1+\varepsilon}^{0} \right]$

$Q = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2\varepsilon} - 1 \right]$ no existe

c) $V_x = \pi \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x+1)^6}\,dx = \pi \int_0^{\infty} \frac{x^2 - 1 + 1}{(x+1)^6} = \pi \left[\int_0^{\infty} \frac{x-1}{(x+1)^5}\,dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)^6}\,dx \right]$

$V_x = \pi \left[\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{(x+1)^5} - \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^5} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^6} \right]$

$V_x = \pi \left[-\frac{x}{4(x+1)^4}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^4} + \frac{1}{4(x+1)^4}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{5(x+1)^5}\Big|_0^{\infty} \right]$

$V_x = \pi \left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^3}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right] = \pi \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right] = \pi \frac{5 - 15 + 12}{60} = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$

d) $V_y = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x)^3} dx = 2\pi \left[\int_0^{\infty} \frac{x^2-1}{(x+1)^3} dx + \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^3} \right]$

$= 2\pi \left[\int_0^{\infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} dx - \frac{1}{2(1+x)^2} \Big|_0^{\infty} \right]$

$= 2\pi \left[-\frac{x}{(x+1)} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{(1+x)} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{2(1+x)^2} \Big|_0^{\infty} \right]$ no existe

60) Determinar los valores de $n \in \mathbb{N}$ para los cuales la integral $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^3(1-x)}} dx$ es convergente y establezca una fórmula recursiva para la sucesión I_n.

Podemos tener $I_n = \int_0^a \frac{x^n \, dx}{\sqrt{x^3(1-x)}} + \int_a^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^3(1-x)}} dx$

donde $a \in]0,1[$

Sabemos que $\forall x \in]0,1[$: $\int_{0+}^a \frac{x^n}{\sqrt{x^3(1-x)}} \geq \int_{0+}^a \frac{x^n}{x^{3/2}}$

y $\int_{0+}^a x^{-(3/2-n)} dx$ diverge cuando $3/2 - n \geq 1 \Rightarrow n \leq 3/2$

∴

62) (a) Mostrar que $I = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}dx$ y $J = \int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{1+x}dx$ existen

(b) Expresar J en función de I

Desarrollo

a) $$I = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}dx \leq \int_0^\infty e^{-x}dx \leq \int_0^\infty \frac{1}{x^2}dx$$

Sabemos que $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}dx$ converge, entonces por el criterio de comparación

I converge.

$$J = \int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{1+x}dx \leq \int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{x}dx = \int_0^\infty e^{-x}dx \leq \int_0^\infty \frac{1}{x^2}dx$$

por (a) podemos deducir que J convergen.

(b) $$J = \int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{1+x}dx = \frac{-xe^{-x}}{1+x}\Big|_0^\infty + \int \frac{((1+x)-x)e^{-x}}{1+x}dx$$

$$J = -\frac{xe^{-x}}{1+x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}dx = -\frac{xe^{-x}}{1+x}\Big|_0^\infty + I$$

63) Sea $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$

a) Demuestre que I converge

b) Si se sabe que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, cuando f es una función definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$, donde σ y μ son constantes.

c) Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 dx$

Desarrollo:

a) $$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty \frac{1}{e^{x^2}} dx \leq \int_0^\infty \frac{1}{e^x} dx \leq \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} dx$$

como $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ es convergente, entonces por el criterio de comparación podemos decir que $\int_0 e^{-x^2} dx$ es convergente.

b) Estudiamos las integrales $\int_0^M f(x) dx$ y $\int_N^0 f(x) dx$

$$\int_0^M f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_0^M e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx$$

$\int_0^\infty x\,dx \qquad x = 2y$

Sea $x - \mu = w \Rightarrow dx = dw$

$$\int_0^M e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx = \int_{-\mu}^{M-\mu} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} w^2} dw$$

$\int_0^\infty$

Sea $y = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma} w \Rightarrow dy = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma} dw$, por lo tanto:

$$\int_{-\mu}^{M-\mu} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} w^2} dw = \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{M-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-y^2} \sqrt{2}\,\sigma\, dy = \sqrt{2}\,\sigma \left[\int_0^{\frac{M-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-y^2} dy + \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-y^2} dy \right]$$

$$\int_N^0 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,dx = \int_{N-\mu}^{-\mu} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}w^2}\,dw$$

$$\int_{N-\mu}^{-\mu} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}w^2}\,dw = \int_{\frac{N-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-y^2}\sqrt{2}\sigma\,dy = \sqrt{2}\sigma\left[\int_{\frac{N-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-y^2}dy + \int_0^{\frac{-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-y^2}dy\right]$$

$$\therefore \int_N^M f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\sqrt{2}\sigma\left[\int_0^{\frac{M-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-y^2}dy + \cancel{\int_{\frac{-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-y^2}dy}\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sqrt{2}\sigma\left[\int_{\frac{N-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-y^2}dy + \cancel{\int_0^{\frac{-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-y^2}dy}\right]$$

$$\int_N^M f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{M-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-y^2}dy - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{N-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-y^2}dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{M-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\ \infty} e^{-y^2}dy + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\mu-N}{\sqrt{2}\sigma}\ \infty} e^{-y^2}dy$$

cuando $M\to\infty$, $N\to-\infty$ entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(cx)$$

64) Determine los posibles valores de la constante C, de modo que la siguiente integral sea convergente

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{C}{3x+1}\right)dx$$

Vemos que $\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{C}{3x+1}\right)dx = \int_0^{\infty}\frac{x}{x^2+1}dx - \int_0^{\infty}\frac{C}{3x+1}dx$

$$=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{C}{3}\ln(3x+1)\right]\Bigg|_0^{\infty}$$

$$=\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[6]{(3x+1)^C}}\right)\Bigg|_0^{\infty} = \ln\left(\sqrt[6]{\frac{(x^2+1)^3}{(3x+1)^C}}\right)\Bigg|_0^{\infty}$$

El grado de $(x^2+1)^3$ es 6 y para que $\ln\left(\sqrt[6]{\dfrac{(x^2+1)^3}{(3x+1)^C}}\right)$ converga se tiene que cumplir que $C \geq 6$.

---

66) Pruebe que la función Gamma $\Gamma:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $\Gamma(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{t-1}dx$ es convergente.

PROOF: Dividimos el intervalo de integración en dos:

$$(0,+\infty)=(0,1]\cup[1,+\infty)$$

$$\therefore\ \Gamma(t)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{t-1}dx=\int_0^1 e^{-x}x^{t-1}dx+\int_1^{+\infty}e^{-x}x^{t-1}dx$$

por un lado $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}x^{t-1}dx$ converge ya que $e^{-x}x^{t-1}\leq\dfrac{1}{x^{1-t}}$

y $\displaystyle\int_0^1\frac{1^0}{x^{1-t}}dx$ converge.

para $t \in [1, \infty[$ tenemos que

$$e^{-x} x^{t-1} \leq x^{-2} \quad \text{para } x \text{ suficientemente grande}$$

Sabemos que $e^{-x} x^{t+1} \leq 1$, se deduce de que

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^{t+1}}{e^x} = 0$ entonces dado $\varepsilon = 1$ existe $a > 0$ tal que

para todo $x > a$ se tiene $\left| \dfrac{x^{t+1}}{e^x} \right| \leq 1 \Rightarrow \dfrac{x^{t+1}}{e^x} \leq 1$

Como $e^{-x} x^{t-1} \leq x^{-2}$ y $\int_1^\infty x^{-2}\,dx$ converge, entonces $\int_1^\infty e^{-x} x^{t-1}\,dx$

también converge.

$\therefore \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\,dx$ es convergente

3 Conjuntos finitos e infinitos, Números Naturales.

1. Demuestre que no puede existir una biyección entre un conjunto finito y un subconjunto propio de este.

2. Considere la función $f : X \to Y$. Pruebe que

   (a) Si Y es finito y f inyectiva entonces X es finito.

   (b) Si X es finito y f sobreyectiva entonces Y es finito.

3. Sea $f : X \to Y$ una función inyectiva. Pruebe que si Y es numerable entonces X también lo es.

4. Sea $f : X \to Y$ una función sobreyectiva. Pruebe que si X es numerable entonces Y también lo es.

5. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ con $n > m$, pruebe que n es múltiplo de m o que existen $q, r \in \mathbb{N}$ tales que $n = mq + r$ con $r < m$.

6. Dado $n \in \mathbb{N}$ pruebe que no existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $n < x < n + 1$.

7. Sea $P(X)$ el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de X. Pruebe que si X es finito entonces $cardP(X) = 2^{card X}$.

8. Pruebe que todo conjunto finito X de números naturales posee un elemento máximo.

9. Indique un ejemplo de una sucesión decreciente $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ de conjuntos infinitos cuya intersección $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ sea vacia.

10. Pruebe que si $A \subseteq B$ y B numerable, entonces A es numerable.

11. ¿Es numerable el conjunto de los números primos? ¿Es infinito? Justifique su respuesta.

12. Demuestre que $\mathbb{Q}$ es numerable. ¿Son los números irracionales un conjunto numerable? Justifique.

13. Pruebe que si $A \subseteq B$ y A es infinito, entonces B es infinito.

14. Mediante inducción matemática, pruebe cada una de las siguientes proposiciones:

   (a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

   (b) $\dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \dfrac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)}$

   (c) $5n^3 + 7n$ es divisible por 3

   (d) $3^n \geq 2n + 1$

   (e) $n^2 > 2n + 1\,,\quad$ para $n \geq 3$

Calculo de areas en coordenadas paramétricas

Ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b]$$

Donde tenemos a $y = y(x)$

Sea A el área de la curva, entonces:

$$A = \int_a^b y(x)dx \qquad , x \in [\alpha, \beta]$$

considerando que $x = x(t) \Rightarrow dx = x'(t)dt$

$$A = \int_a^b y(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} y(x(t))x'(t)\,dt$$

$$a = x(t_1) \quad , \quad b = x(t_2) \qquad ; t_1, t_2 \in [a,b]$$

$$\therefore A = \int_{t_1}^{t_2} y(x(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

Demuestre que la región encerrada en un arco de cicloide y el eje X es $3\pi a^2$. Las ecuaciones paramétricas de la curva son:

$$\begin{cases} x = a(\theta - sen\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

según $y = y(\theta)$ debemos estudiar la curva en $\theta \in [0, 2\pi]$

$$A = \int_0^{2\pi} y(x)dx$$

tomando $dx = \frac{dx}{dt} dt \quad , x = x(\theta)$

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} y(x(\theta)) \frac{dx(\theta)}{dt} dt \quad , \text{donde} \quad 0 = x(\theta_1) \ , \ 2\pi = x(\theta_2)$$

$x(\theta_1) = a(\theta_1 - sen\,\theta_1) = 0 \Rightarrow a\theta_1 - a\,sen\theta_1 = 0$

$\theta_1 - sen\,\theta_1 \Rightarrow sin\theta_1 = \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = 0$

$x(\theta_2) = a(\theta_2 - sen\theta_2) = 2\pi \Rightarrow$