Transformación canónica: $TC: \Omega \longrightarrow \Omega$ biyectiva C^{∞}

$$(q,p) \longmapsto (Q,P)$$

$$\eta \longmapsto \bar{\eta}$$

tal que
$$\left.\begin{array}{l} \{Q_i, P_j\}_\eta = \delta_{ij} \\ \{Q_i, Q_j\}_\eta = 0 \\ \{Q_i, P_j\}_\eta = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \eta}\right) J \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \eta}\right)^T = J \Leftrightarrow \exists F: \Omega \to \Omega$$
C^{∞} tal que
$$dF(q,p) + \sum_i P_i dQ_i = \sum_i p_i dq_i$$

Ejemplo. $n=1$, $\underbrace{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2}_{\text{oscilador armónico}}$, $m, \omega = cte$

p = momento lineal

q = posición

Tomamos $T^{-1}: \bar{\eta} \longmapsto \eta$

$$(\theta, I) \longmapsto q = q(\theta, I)$$
$$p = p(\theta, I)$$

tal que $q = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \operatorname{sen}\theta$, $p = \sqrt{2Im\omega} \cos\theta$

T.C ?

Si es una transformación canónica cuando $\{q,p\}_{\theta,I}=1$

$$\{q,p\}_{\theta,I} = \frac{\partial q}{\partial \theta}\frac{\partial p}{\partial I} - \frac{\partial q}{\partial I}\frac{\partial p}{\partial \theta} = 1$$

$\Rightarrow$ Ecuaciones del movimiento en términos de las variables θ, I son

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I}, \quad \dot{I} = \frac{\partial H}{\partial \theta} \quad \text{donde} \quad H = \frac{p(\theta,I)^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q(\theta,I)^2 = \omega I$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega \\ \dot{I} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{dI}{dt} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \theta = \omega t + \phi & , \ \omega, \phi \text{ cte} \\ I = c & , \ c \text{ cte} \end{array}$$

Trayectoria en términos de θ e I : $\theta(t) = \omega t + \phi$

$I(t) = c$

Trayectoria en términos de q y p : $q(t) = \sqrt{\frac{2c}{m\omega}}\,\text{sen}(\omega t + \phi)$

$p(t) = \sqrt{2cm\omega}\cos(\omega t + \phi)$

[5] Integrabilidad

Teorema (Liouville): Sea (Ω, H) un sistema hamiltoniano con n grados de libertad ($\dim 2n$). Sean $I_1, \dots, I_n \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$, tales que

1) $\dot{I}_i = 0 \Leftrightarrow I_i = c_i = \text{cte} \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}$
2) $dI_1, \dots, dI_n$ son linealmente independientes
3) $\{I_i, I_j\} = 0 \quad \forall i,j$

Entonces, las soluciones se pueden obtener por cuadratura
(# finito de operaciones algebraicas e integrales)

$\Leftrightarrow$ se puede encontrar la solución $q_i(t), p_i(t)$ $\forall i = 1, \dots, n$

Dem.

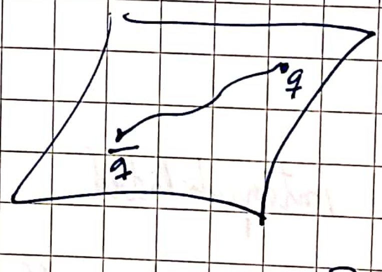
Idea (1) y (2) $\Rightarrow$ $M = \{ \eta \in \Omega \, / \, I_i(\eta) = c_i \quad \forall i = 1, \dots, n \}$

es una variedad suave de dimensión n. Sobre M, $p_i = p_i(q_1, \dots, q_n, c_1, \dots, c_n)$ suave.

El punto (3) nos permite definir una función

$$S = \int_{\bar{q}}^{q} \sum_i p_i \, dq_i$$

$$= \int_{\bar{q}}^{q} \sum_i p_i(\tilde{q}, p) \, d\tilde{q}$$



$M \subset \Omega$.

Que es independiente del camino desde $\bar{q}$ hasta q y tal que

$$\sum_i p_i \, dq_i = \sum_i P_i \, dQ_i + \underbrace{dS + d\Big(\sum_i P_i Q_i\Big)}_{dF} \quad \text{sobre } M.$$

donde $P_i = I_i$, $Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}$

$\Rightarrow$ $T : q, p \longmapsto Q_i = \theta_i$, $P_i = I_i$ es canónica

$\Rightarrow$ $\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial I_i}$, $\dot{I}_i = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i} = 0$, $H = H(I_1, \dots, I_n)$

$= \omega_i = cte$

$$\theta_i = \omega_i t + \phi_i \quad , \quad I_i = c_i$$

$\boxtimes$

Teorema (Liouville - Arnold) : Liouville + Ω compacta $\Rightarrow \Omega \cong T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-veces}}$

[6] Mecánica Cuántica.

Mundo clásico

Ω = espacio de estado

= variedad de dim n

$\{ , \}$ = producto sobre $C^\infty(\Omega)$

Mundo cuántico

espacio de estado = $L^2(\mathbb{R}^n)$

o $L^2([0,1]^n)$

estado = vector en L^2

$\mathcal{O}$ = {operadores autoadjuntos sobre L^2}

$[,]$ conmutador

A lineal es autoadjunto ssi

$$\langle A\psi, \phi \rangle = \langle \psi, A\phi \rangle$$

A autoadjunto $\Rightarrow$ A tiene v.p reales

<u>Ejemplo</u>. H hamiltoniano en mecánica cuántica

$$H : L^2 \longrightarrow L^2$$

$$H : \psi \longmapsto H\psi \quad , \quad \psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \in L^2$$

H diferencial y autoadjunto

Si $A, B \in \mathcal{O}$, $[A,B] = AB - BA$

$$[A,B]\psi = A(B\psi) - B(A\psi)$$

$[\ ,\ ]$ es antisimétrico
lineal
Jacobi

$(i\hbar [A,B])$ = op autoadjunto

$Sp_{n,\mathbb{R}}\mathcal{O}$ es álgebra de Lie con producto $i\hbar[\ ,\ ]$, $i=\sqrt{-1}$.

Un sistema cuántico hamiltoniano (L^2, H), donde H es auto adjunto sobre L^2. Una simetría es $A \in \mathcal{O}$ tal que $[A, H] = 0$

Un sistema $(L^2(\mathbb{R}^n), H)$ es integrable si

$\exists A_1, \dots, A_N \in \mathcal{O}$ L.i tales que

$$[A_i, A_j] = 0$$
$$[A_i, H] = 0$$

$\Rightarrow$ $\exists$ una base de v.p $\Psi_1, \Psi_2, \dots$

tq $A_i \Psi_j = \lambda_{i,j} \Psi_j$, cte $\in \mathbb{R}$.

Scanned with CamScanner

Bueno,

Ejercicio. $H \leq G$ subgrupo, A G-módulo
(En particular es un H-módulo)

Supongamos que $H \triangleleft G/H$

Sea $A^H = \{a \in A / h.a = a \ \forall h \in H\}$ (Notar que $A^G \leq A^H$)

1) A^H es un G/H-modulo vía

$$G/H \ni \bar{g}, \quad \bar{g}.a := g.a \quad \forall a \in A^H$$

$$(g.h).a = g.(h.a) = g.a$$

$$0 \to H^1(G/H, A^H) \xrightarrow{Inf} H^1(G, A) \xrightarrow{Res} H^1(H, A)$$

es exacta.

$$Inf : \underset{\substack{\Psi \\ [f]}}{H^1(G/H, A^H)} \longrightarrow H^1(G, A)$$

$$\begin{tikzcd} G/H \arrow[r, "f"] & A^H \subset A \\ G \arrow[u, "\phi"] \arrow[ur, "f \circ \phi"'] & \end{tikzcd}$$

$f :$

Af. $f \circ \phi : G \to A$ 1.- cociclo $\Rightarrow \overline{f \circ \phi} \in H^1(G, A)$

Res : $H^1(G, A) \longrightarrow H^1(H, A)$

$$f : G \to A \quad \text{1-cociclo}$$
$$\cup$$
$$f|_H : H \longrightarrow A$$

} 1-cociclo de H con valores en A

restricción a H.

2) $H \leq G$ subgrupo

A un H-módulo

$M_H^G(A)$ es G-módulo inducido

$$M_H^G(A) = Hom_H(\mathbb{Z}[G], A)$$
$$(\sigma, \phi)(g) = \phi(g \cdot \sigma)$$

Demostrar que existe un G-isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_G(M, M_H^G(A)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_H(M, A)$$

$\forall$ G-módulo M

$$\sum_{g \in G} n_g g$$

Nudos.

Por muy complicado que sea el nudo, siempre se puede cambiar la información arriba/abajo de ciertos cruces obteniendo unión disjunta de nudos triviales

Numero link

Sea L un link de dos componentes representados por el diagrama D.

Sea $\ell(D) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{C \text{ cruce de} \\ D \text{ que involucra} \\ \text{ambas componentes}}} \varepsilon(C)$

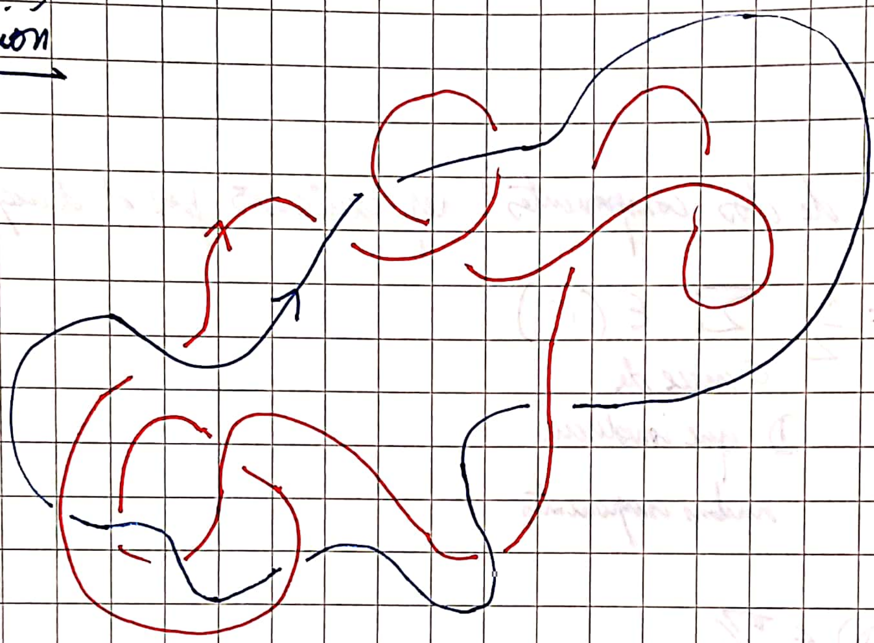
Teo. (a) $\ell(D) \in \mathbb{Z}$

(b) $\ell(D)$ depende sólo de L (No depende del diagrama D que representa a L

(c) Si $\ell(D) = 0$ entonces L es la unión disjunta de dos nudos (después de cambiar cruces de una componente)

Demostración

(a)



Si $L = N_1 \dot{\cup} N_2$ unión disjunta, entonces $\ell(L) = 0$

(Suponiendo la parte b)

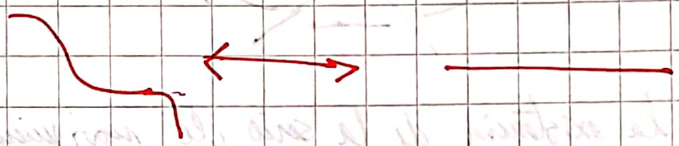
Cada cambio de cruce implica un cambio de ± 2 en la suma total de los signos

Entonces $\sum_i \varepsilon(C)$ es un número par

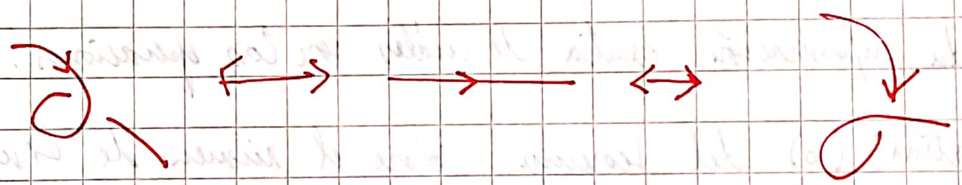
Teorema (de Reidemeister, 1927)

Sea L link orientado representado por dos diagramas D_1 y D_2, entonces existe una serie de movimientos de tipos R0, R1, R2, R3 que cambia D_1 en D_2

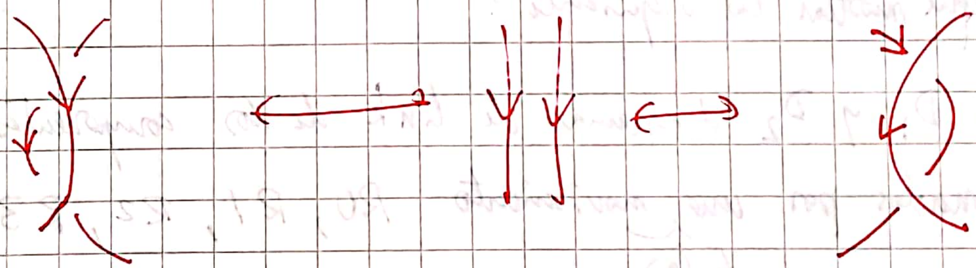
R0: isotopía planar



R1:

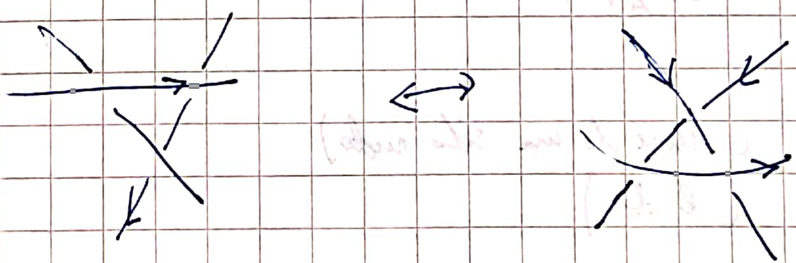


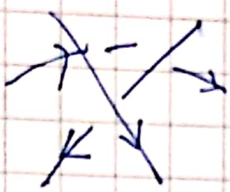
R2:

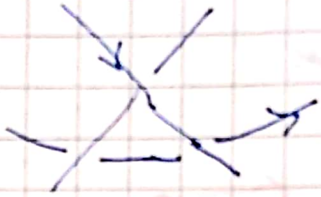


(+ permutaciones de orientación)

R3:







El teorema sólo da la existencia de la serie de movimientos

<u>NO</u> da información exacta de cuáles son las operaciones.

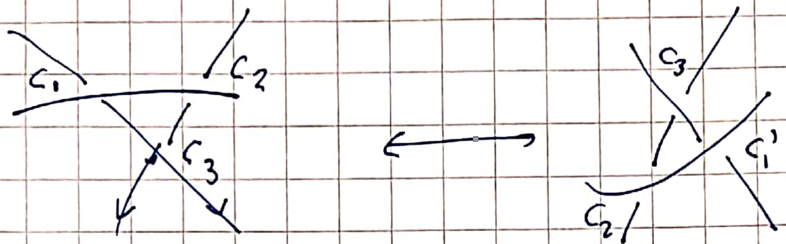
Para mostrar (b) del teorema sobre el número de linking hay que mostrar lo siguiente:

Sean D_1 y D_2 diagramas de link de dos componentes, relacionados por uno de los movimientos R0, R1, R2, R3

Entonces $\ell(D_1) = \ell(D_2)$.

<u>Dem</u>. R0 ✓
R1 ✓ (cruce de un sólo nudo)
R2 ✓ ($\ell = 0$)

R3



Siempre se tiene que $\varepsilon(c_i) = \varepsilon(c_i')$

Tres coloraciones

Análisis

(1) $$u(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1,0] \\ 0, & x \in [0,1) \end{cases}$$

Esta función tiene derivada débil g

$$g(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Demostración: Para $v \in C_c^1(-1,1)$

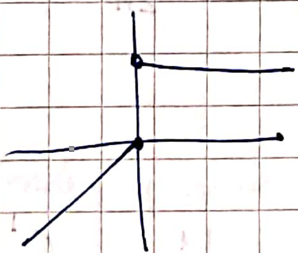
$$\int_{-1}^{1} u(x)\, v'(x)\, dx = \int_{-1}^{0} x v'(x)\, dx + \cancel{\int_0^1 0\, dx}^{\,0}$$

$$= \cancel{x\, v(x)\Big|_{-1}^{0}} - \int_{-1}^{0} v(x)\, dx$$

$$= -\int_{-1}^{0} 1 \cdot v(x)\, dx - \int_0^1 0\, v(x)\, dx$$

$$= -\int_{-1}^{1} g(x)\, v(x)\, dx$$

(2)

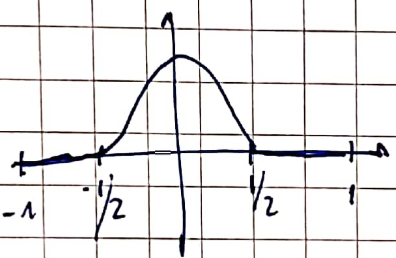


$$u(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Esta función no tiene derivada débil

Dem. Si tuviera derivada débil, $\exists\, g$ integrable tal que

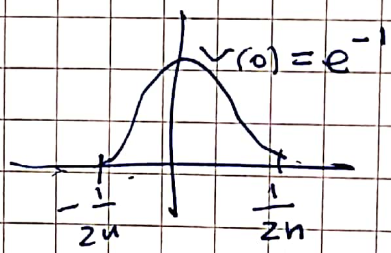
$$\int_{-1}^{1} u(x)v'(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} g(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in C_c^1(-1,1)$$



$$v(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-4|x|^2}}, & |x| \le 1/2 \\ 0, & |x| \ge 1 \end{cases}$$

$$v \in C_c^\infty(-1,1)$$

Tomamos la sucesión $v_n(x) = v(nx)$



$$-\int_{-1}^{1} g(x)v_n(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} u(x)v_n'(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} x\,v_n'(x)\,dx + \int_0^1 v_n'(x)\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{1} v_n(x)\,dx + \cancel{x\,v_n(x)\Big|_{-1}^{0}} + v_n(x)\Big|_0^1 = -\int_{-1}^{1} v_n(x)\,dx$$

$$= e^{-1}$$

La identidad queda

$$e^{-1} = \int_{-1}^{1} g(x)\, v_n(x)\, dx - \int_{-1}^{1} v_n(x)\, dx$$

$$v_n(x) \longrightarrow 0 \quad \forall x \neq 0$$

Por teorema de convergencia dominada, $\int_{-1}^{1} g(x) v_n(x) \longrightarrow 0$

$$\int_{-1}^{1} v_n(x)\, dx = \int_{-1/2n}^{1/2n} v(nx)\, dx = \frac{1}{n} \int_{-1/2}^{1/2} v(x)\, dx \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$y = nx$$

Espacios de Sobolev (de Hilbert)

Def. $(H^1(a,b))$ $\quad (-\infty < a \leq b < \infty)$

$$H^1(a,b) = \left\{ u \in L^2(a,b) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{existe una derivada débil} \\ g \text{ tal que,} \\ g \in L^2(a,b) \end{array} \right\}$$

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_a^b uv + u'v'$$

donde u' es la derivada débil de u, es un espacio de Hilbert.

Observación.

(i) $H^1(a,b) \subseteq L^2(a,b)$

(ii) $H^1(a,b) \subseteq C(a,b)$

(iii) $H^1(a,b) \subseteq C^1(a,b)$

(iv) $C^1(a,b) \subseteq H^1(a,b)$

(v) $C^1(\mathbb{R}) \nsubseteq H^1(\mathbb{R})$

Teorema (Teorema fundamental del cálculo)

Para $u \in H^1(a,b)$ y $s,t \in (a,b)$

$$\int_s^t u'(x)\,dx = u(t) - u(s) \qquad (\text{ctp})$$

Lema. f integrable

$$\int_a^b f(x)\,v(x)\,dx = 0 \qquad \forall v \in C_c(a,b)$$

$$\Rightarrow f \equiv 0 \qquad (\text{ctp})$$

Demostración. "$v = \text{signo}(f)$"

$$v_n \longrightarrow v$$

Corolario. $\int_a^b f(x)\, v'(x)\,dx = 0 \quad \forall v \in C_c^1(a,b)$

$$\Rightarrow f \text{ constante} \quad (\text{ctp})$$

Proposición. Si g es integrable y $x_0 \in (a,b)$

$$v(x) = \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds$$

$\Rightarrow$ v es continua y

$$\int_a^b v\varphi' = -\int_a^b g\varphi \quad , \quad \forall \varphi \in C_c^1(a,b)$$

Corolario. $H^1(a,b) \subseteq C(a,b)$

Demostración. Para $s,t \in (a,b)$

$$|u(t) - u(s)| \leq \left| \int_s^t u'(x)\,dx \right|$$

$$\leq \int_s^t |u'(x)|\,dx$$

(Cauchy Schwarz)
$$\leq \left(\int_s^t |u'(x)|^2 \right)^{1/2} \left(\int_s^t 1\,dt \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\int_0^1 |u'|^2 \right)^{1/2} (t-s)^{1/2} \leq \|u\|_{H^1} |t-s|^{1/2}$$

Propiedades

1) Integración por partes en H^1

$$\int_a^b u'v = uv\Big|_a^b - \int_a^b uv'$$

2) Regla de la cadena en H^1

Si $G \in C^1(\mathbb{R})$, entonces

$$v(x) = G(u(x)), \quad u \in H^1$$

$$\Rightarrow v \in H^1(a,b) \quad \text{y} \quad v'(x) = G'(u(x))\,u'(x) \ (\text{ctp})$$

Definición. $(H_0^1(a,b))$

$$H_0^1(a,b) = \{u \in H^1(a,b) \ / \ u(a) = u(b) = 0\} \quad \text{es Hilbert}$$

Ej

Teo (Desigualdad de Poincaré). Sea $u \in H_0^1(a,b)$

$$\int_a^b u^2 \leq c \int_a^b u'^2$$

Corolario. $\|u\|_{H_0^1} \leq \left(\int_a^b u'\right)^{1/2}$

Demostración.

$$u(x) - \cancel{u(a)}^{0} = \int_a^x u'(s)\,ds$$

$$|u(x)| \leq \int_a^b |u'(s)|\,ds$$

Cauchy Schwarz + Integrar

$$\int_a^b |u(x)|^2 dx \leq \left(\int_a^b |u'(x)|^2 dx\right)(b-a)^2$$

¡Volvamos a la ecuación...

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Solución débil 1

es $u \in C^1$ tal que

$$\int_0^1 u'v' + uv = \int_0^1 fv \qquad \forall v \in C_c^1(0,1)$$

Scanned with CamScanner

Def (Solución débil)

Es una función $u \in H_0^1(0,1)$ tal que

$$\int_0^1 u'v' + uv = \int_0^1 fv \quad , \forall v \in H_0^1(0,1)$$

Teorema. Existe una solución débil $u \in H_0^1(0,1)$

Demostración.

(i) $\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_0^1 u'v' + uv$

(ii) $\varphi(v) = \left| \int_0^1 fv \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$

es un funcional lineal continuo en $L^2(0,1)$ $\quad \forall f \in L^2(0,1)$

(iii) Es un funcional lineal continuo en $H^1(0,1)$

$$|\varphi(v)| \leq C \|v\|_{H^1}$$

Encontrar $u \in H_0^1(0,1)$

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \varphi(v) \quad , \forall v \in H_0^1(0,1)$$

Teo Riesz-Frechet

$\Rightarrow \exists!\ u \in H_0^1(0,1)$ tal que es solución débil obs. Solución débil $\overset{?}{\Longrightarrow}$ Solución clásica

$\exists u \in H_0^1$, $\displaystyle\int_0^1 u'v' = \int_0^1 (f-u)v$, $\forall v \in H_0^1$

$$\int_0^1 g v' = -\int_0^1 (u-f) v \qquad \forall v \in C_c^1(0,1)$$

u' tiene derivada débil $u-f$

$$\Rightarrow \quad u'' = u - f \quad (\text{ctp})$$
$$-u'' + u = f \quad (\text{ctp})$$

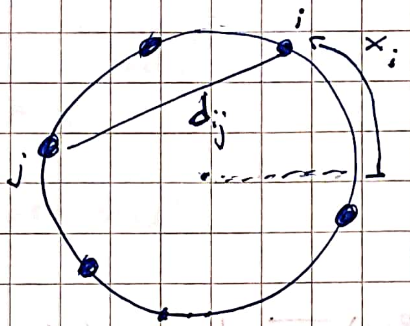
Si por ejemplo, $f \in C(0,1)$

$\Rightarrow$ u'' es continua

$\Rightarrow$ $u \in C^2(0,1)$

Física.

Modelo de Calogero – Sutherland



N partículas (cuánticas) idénticas

perímetro $= L$

$$0 \leq x_i \leq L$$

Ejercicio. $d_{ij} = \left| \frac{L}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}(x_i - x_j) \right) \right|$

Hamiltoniano

$$H_{CS} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \beta(\beta-1)\frac{\pi^2}{L^2} \sum_{j<k} \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{L}(x_j - x_k)\right)}$$

$N=2$:

$$H_{CS} = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\beta(\beta-1)\pi^2}{L^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}(x_1 - x_2)\right)}$$

Gral.

$$H_{CS} \Psi = E \Psi$$

E → (valor propio) energía

Ψ → función propia, $x = x_1, \ldots, x_N$

Producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L \cdots \int_0^L f(x)\overline{g(x)}\, dx_1 \cdots dx_N$$

Por definición, A^+ es tq

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, A^+ g \rangle \quad \forall f, g$$

$H = H^+ \Rightarrow$ valores propios de H son reales

Estado de energía mínima Ψ_0

$$H_{CS}\Psi_0 = E_0 \Psi_0$$

$$E_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \beta^2 N(N^2-1)$$

Valor mínimo de la energía

Se puede demostrar que $H_{CS} = \sum_{j=1}^{N-1} A_j^+ A_j + E_0$

Ejercicio. Demostrar que si $H_{CS}\Psi = E\Psi \Rightarrow E \geq E_0$

$$A_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\pi}{2}\beta + \sum_{k\neq l}{}' \cot\left[\frac{\pi}{2}(x_j - x_k)\right]$$

Se puede verificar que

$$\Psi_0 = \prod_{j<k}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}(x_j - x_k)\right)\right|^{\beta}$$ consecuencia de $A_j\Psi_0 = 0 \quad \forall j.$

Ψ_0 es una función simétrica.

$$\Psi_0(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = \Psi_0(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots)$$

Dos tipos de partículas → fermiones $(-)$ (antisimétricas)
→ bosones $(+)$ (simétricas)

El ~~sistema~~ modelo de Calogero - Sutherland es un sistema de bosones

Vamos a suponer que todas las funciones propias Ψ, son de la forma

$$\Psi = \Psi_0\,\phi \qquad (\phi \text{ función simétrica})$$

$$\Rightarrow H = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \Psi_0^{-1} H_{CS}\Psi_0$$

$$\Rightarrow H\phi = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \Psi_0^{-1} H_{CS}(\underbrace{\Psi_0\phi}_{\Psi})$$

$$= \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \cancel{\Psi_0^{-1}}\, E\,\cancel{\Psi_0}\phi = E\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2\phi$$

Se hace luego el cambio de variables $z_j = e^{2\pi i x_j/L}$

$$\Rightarrow \quad H = \sum_{i=1}^{N} \left(z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right)^2 + \beta \sum_{j<k} \left(\frac{z_j + z_k}{z_j - z_k} \right) \left(z_j \frac{\partial}{\partial z_j} - z_k \frac{\partial}{\partial z_k} \right)$$

Ejercicio. Verificar para $N=2$

H preserva $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^{S_n}$

polinomios simétricos con coef. en $\mathbb{C}$

Ejemplo.

(hacer el proceso 2 veces)

$$N=2: \quad H = \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \right)^2 + \left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right)^2 + \beta \left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right) \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right)$$

$$H(z_1^2 + z_2^2) = 4(z_1^2 + z_2^2) + 2\beta (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)$$

Integrabilidad.

Necesitamos $H_1, \ldots, H_N$ tales que

$$[H_i, H_j] = 0 \qquad (H_i H_j = H_j H_i)$$

y tales que se pueden escribir en términos de H_i.

Operadores de Dunkl

$$D_i = z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \beta \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{z_i - z_j} (1 - k_{ij}) z_j$$

$$+ \beta \sum_{j=i+1}^{N} z_j \frac{1}{z_i - z_j} (1 - k_{ij})$$

donde $k_{ij} = k_{ji}$ es tq $f(\ldots, z_i, \ldots, z_j, \ldots) = f(\ldots, z_j, \ldots, z_i \ldots)$

Se puede demostrar que $[D_i, D_j] = 0 \quad \forall i, j$.

Ejercicio. $N = 2$

$$D_1 = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \beta \frac{z_2}{z_1 - z_2} (1 - k_{12})$$

$$D_2 = z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - \beta \frac{1}{z_1 - z_2} (1 - k_{12}) z_2$$

Ejercicio $(N = 2)$. Verificar que $[D_1, D_2] = 0$.

Ejercicio. Demostrar que si $f(z_1, z_2) = f(z_2, z_1)$, entonces

$$(D_1^2 + D_2^2 + \beta(D_1 + D_2))\, f = Hf$$

En general, definiendo $H_k = \sum_{i=1}^{N} D_i^k$, tenemos que

$$[H_i, H_j] = 0$$

y $Hf = (H_2 + \beta H_1) f$ si $f \in \mathbb{R}[z_1, \dots, z_N]^{S_N}$

Vamos a buscar las funciones propias comunes de los H_k

$$\begin{cases} H_1 \Psi = E_1 \Psi \\ H_2 \Psi = E_2 \Psi \\ \vdots \\ H_N \Psi = E_N \Psi \end{cases}$$

(Polinomios de Jack)

(Combinatoria)

Nudos

Otro invariante de Nudos...

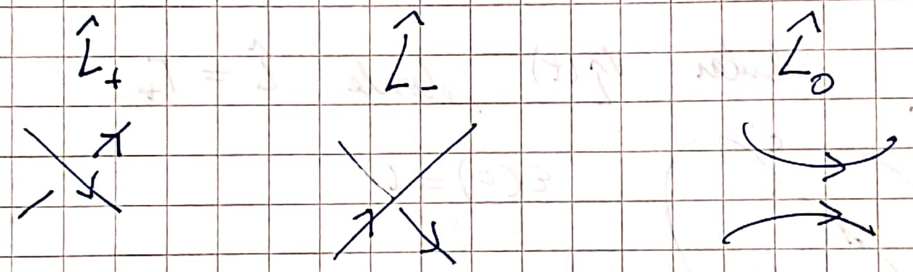
Polinomio de Jones.

Dado un link orientado $\hat{L}$, su polinomio de Jones es $V_{\hat{L}}(t) \in \mathbb{R}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$

Propiedades:

(1) $V_{\bigcirc}(t) = 1$

(2) Dados 3 links orientados, $\hat{L}_+, \hat{L}_-, \hat{L}$ que son ~~orientados~~ idénticos salvo en cruce C, donde se ven de manera siguiente



Entonces tenemos que

$$t^{-1}V_{\hat{L}_+}(t) - t\,V_{\hat{L}_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})\,V_{\hat{L}}(t) \quad \text{(fórmula de Skein)}$$

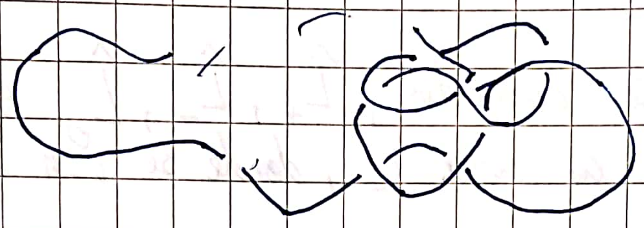
Teorema. $V_{\hat{L}}(t)$ es invariante de links orientados, es decir, $V_{\hat{L}}(t)$ es invariante bajo R0, R1, R2, R3.

Teorema. Si $\hat{L}$ es un nudo orientado, entonces $V_{\hat{L}}(t)$ no depende de la orientación.

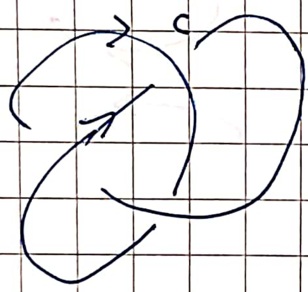
Teorema. Sea $\bar{\hat{L}}$ el reflejo de $\hat{L}$. Entonces se tiene que

$$V_{\bar{\hat{L}}}(t) = V_{\hat{L}}(t^{-1}).$$

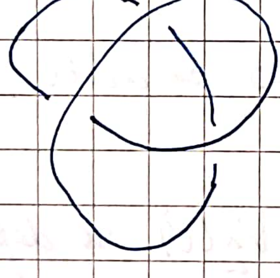
La fórmula de skein permite calcular $V_{\hat{L}}(t)$ para cada $\hat{L}$.

$L =$ 

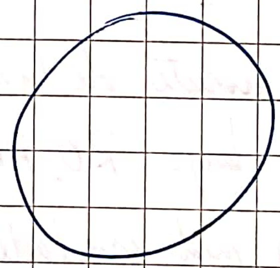
Ejemplo. Calcular $V_{\hat{L}}(t)$, donde $\hat{L} = T_+$



$\varepsilon(c) = 1$

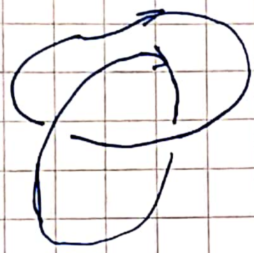


$=$

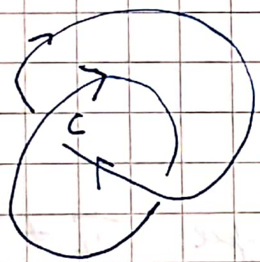


Se usa $\hat{L}_+ = \hat{L} = T_+$,

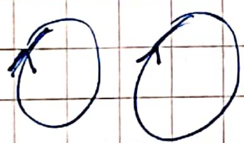
$\hat{L}_- = \bigcirc$

$L_0 =$ 

$$V_{\hat{L}}(t) = V_{\hat{L}_+}(t) = t^2 V_{\hat{L}_-}(t) + t\left(t^{1/2} - t^{-1/2}\right) V_{L_0}(t)$$
$$= t^2 \cdot 1 + \left(t^{3/2} - t^{1/2}\right) V_{L_0}(t)$$

$\hat{H} = \hat{L}_0 =$ 

$\hat{H}_+ = \hat{H}$

$\hat{H}_- =$  , $\hat{H}_0 =$  $=$ 

$$V_{\hat{H}}(t) = t^2\left(-t^{1/2} - t^{-1/2}\right) + t\left(t^{1/2} - t^{-1/2}\right) \cdot 1$$
$$= -t^{5/2} - t^{1/2}$$

Reemplazando nos queda que:

$$V_{T_+}(t) = V_{\hat{L}}(t) = -t^4 + t^3 + t$$

$$V_{T_+}(t) = -t^4 + t^3 + t$$

$$V_{T_-}(t) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$$

Ya que $V_{T_+}(t) \neq V_{T_-}(t)$, se concluye que $T_+ \neq T_-$.

Corchete de Kauffman

Otra manera de realizar $V_L(t)$.

Sea L link (diagrama) sin orientación. Tenemos

$$\langle L \rangle \in R[A, A^{-1}]$$

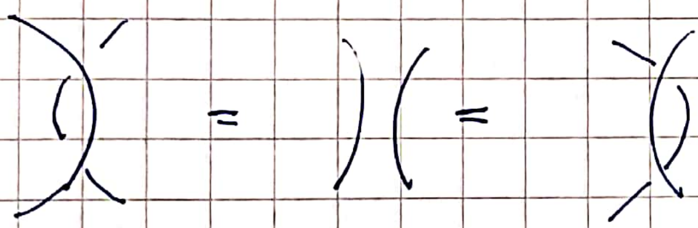
Reglas: $\langle O \rangle = 1$

$$\langle O \sqcup L \rangle = -(A^2 + A^{-2}) \langle L \rangle$$ (antes de era consecuencia)

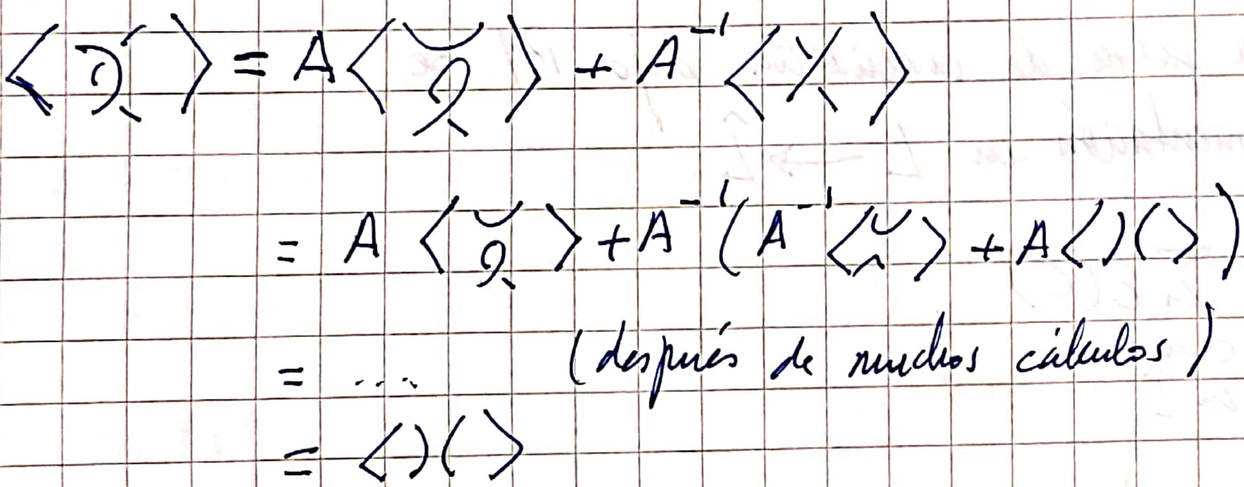
$$\langle \times \rangle = A \langle \asymp \rangle + A^{-1} \langle)(\rangle$$

$$\langle \times \rangle = A^{-1} \langle \asymp \rangle + A \langle)(\rangle$$

Invariancia bajo R2

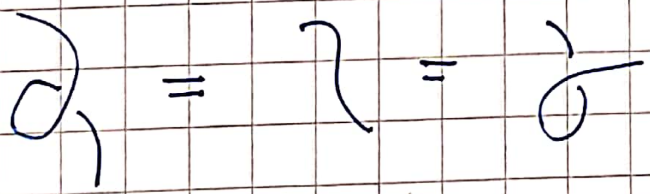


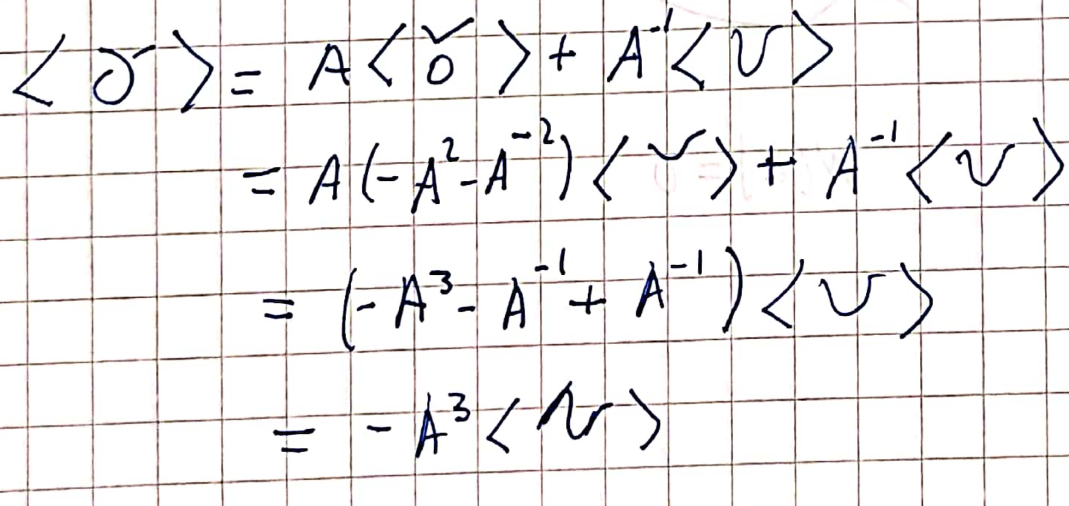
Ej.



También hay invariancia bajo R3

No hay invariancia bajo R1





Teorema. $f_{\hat{L}}(A)$ es invariante bajo R1, R2, R3

Para resolver la falta de invariancia bajo R1 se introduce una orientación en $L \longrightarrow \hat{L}$.

Sea $W(\hat{L}) = \sum_{\substack{c \text{ cruce} \\ \text{en } \hat{L}}} \varepsilon(c)$

$W(L)$ es invariante bajo R2, R3, no en R1. Se define $f_{\hat{L}}(A) = (-A)^{-3W(\hat{L})} \langle L$

R2

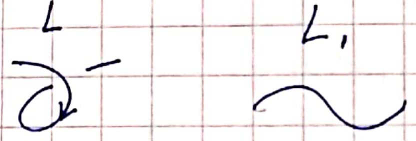
R1 falla

$W(\hat{L}) = 1$ $\qquad$ $W(L) = 0$

Teorema. $f_{\hat{L}}(A)$ es invariante bajo R1, R2, R3.

$$V_{\hat{L}}(t) = f_{\hat{L}}(A)_{t^{1/2}=A^2}$$

Demostración de R1



$$w(L) = w(L_1) + 1$$

$$\langle L \rangle = -A^3 \langle L_1 \rangle$$

$$f_{\hat{L}_1}(A) = (-A)^{-3w(L)} \langle L_1 \rangle = (-A)^{-3(w(L)-1)} (-A)^{-3} \langle L \rangle = f_{\hat{L}}(A)$$

Ecuaciones diferenciales

· Ecuación "general"

$$-(p(x)\,u'(x))' + q(x)\,u'(x) + r(x)\,u(x) = f(x) \quad \text{en } (0,1)$$

donde $p(x) \in C^1(0,1)$; $p(x) \geq p_0 > 0$

$q(x), r(x) \in C^1(0,1)$, $r(x) \geq r_0 > 0$

Con la condición de frontera $u(0) = u(1) = 0$

Para resolver esta ecuación usaremos $H_0^1(0,1)$ y análisis funcional

Seguiremos el itinerario siguiente.

Solución débil

Sea $v \in C_c^1(0,1)$ y multipliquemos $(**)$ por v e integremos

$$-\int_0^1 (pu')'v + \int_0^1 qu'v + \int_0^1 ruv = \int_0^1 fv$$

Integramos por partes

$$\int_0^1 pu'v' - \underbrace{pu'v\Big|_0^1}_{0} + \int_0^1 qu'v + \int_0^1 ruv = \int_0^1 fv \qquad v \in C_c^1(0,1)$$

Definición: Solución débil

Una función $u \in H_0^1(0,1)$ que satisface

$$\int_0^1 pu'v' + \int_0^1 qu'v + \int_0^1 ruv = \int_0^1 fv \qquad \forall v \in H_0^1(0,1)$$

(II) Encontrar solución débil

Usaremos Lax - Milgram : $a(u,v) = \varphi(v)$

- $H = H_0^1(0,1)$
- $a(u,v) = \int_0^1 pu'v' + \int_0^1 qu'v + \int_0^1 ruv$
- $\varphi(v) = \int_0^1 fv$

L-M : (i) a bilineal, continuo y coercivo
(ii) φ lineal continua $\Rightarrow$ solución

(ii) $|\varphi(v)| = \left| \int_0^1 fv \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\| \|v\|_{H_0^1}$

(i) a bilineal ✓
a continua: $|a(u,v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H$

$$|a(u,v)| = \left| \int_0^1 \cdots + \int_0^1 \cdots + \int_0^1 \cdots \right|$$

$$\leq \left| \int_0^1 \right| + \left| \int_0^1 \right| + \left| \int_0^1 \right|$$

$$\leq \int_0^1 |pu'v'| + \int_0^1 |qu'v| + \int_0^1 |ruv|$$

Como $p, q, r \in C[0,1]$

$$|a(u,v)| \leq \|p\|_\infty \int_0^1 |u'v'| + \|q\|_\infty \int_0^1 |u'v'| + \|r\|_\infty \int_0^1 |uv|$$

$$\leq \|p\|_\infty \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + \|q\|_\infty \|u'\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|r\|_\infty \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

$$|a(u,v)| \leq C \left(\|p\|_\infty + \|q\|_\infty + \|r\|_\infty \right) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

- a coercivo : $a(u,u) \geq c \|u\|_{H^1}^2$, $a(u,v)$ continua

$$a(u,u) = \int_0^1 pu'^2 + \int_0^1 qu'u + \int_0^1 ru^2$$

Usando que $p(x) \geq p_0 > 0$, $r(x) \geq r_0 > 0$

$$a(u,u) \geq p_0 \int_0^1 u'^2 + \int_0^1 qu'u + r_0 \int_0^1 u^2$$

Recordar que $\|u\|_{H^1} \leq C \|u'\|_{L^2}$

$$\therefore \|u\|_{H_0^1} \simeq \|u'\|_{L^2}$$

Escribimos

$$p_0\int_0^1 u'^2 \leq a(u,u) - \int_0^1 q u' u - r_0\int_0^1 u^2$$
$$\leq a(u,u) + \left|\int_0^1 q u' u\right| - r_0\int_0^1 u^2$$
$$\leq a(u,u) + \int_0^1 |q u' u| - r_0\int_0^1 u^2$$
$$\leq a(u,u) + \|q\|_\infty \int_0^1 |u'u| + r_0\int_0^1 u^2$$

Desigualdad de Cauchy - ε

$$|ab| \leq \varepsilon\frac{|a|^2}{2} + \frac{|b|^2}{2\varepsilon} \qquad \forall\varepsilon>0 \quad \forall a,b$$

Con esto se tiene

$$\int_0^1 |u'u| \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 |u'|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1 |u|^2$$

$$\therefore \quad p_0\int_0^1 u'^2 \leq a(u,u) + \frac{\varepsilon\|q\|_\infty}{2}\int_0^1 |u'|^2 + \left(\frac{\|q\|_\infty}{2\varepsilon} - r_0\right)\int_0^1 |u|^2$$

$$\Rightarrow \left(p_0 - \frac{\varepsilon \|q\|_\infty}{2}\right)^2 \int_0^1 |u'|^2 \leq a(u,u) + \left(\frac{\|q\|_\infty}{2\varepsilon} - r_0\right) \int_0^1 |u|^2$$

Eligiendo $\varepsilon_0 > 0$ tal que $p_0 - \frac{\varepsilon \|q\|_\infty}{2} = \frac{p_0}{2}$

tenemos que

$$\frac{p_0}{2} \int_0^1 |u'|^2 \leq a(u,u) - \left(\frac{\|q\|_\infty}{2\varepsilon_0} - r_0\right) \int_0^1 |u|^2$$

Si además $\frac{\|q\|_\infty}{2\varepsilon_0} - r_0 \geq 0$

Entonces $\frac{p_0}{2} \int_0^1 |u'|^2 \leq a(u,u)$ (coercividad)

Lax-Milgram:

$\exists!\, u \in H_0^1$ tal que $a(u,v) = \varphi(v)$ $\forall v \in H_0^1$

III u es solución clásica

$\int p u' v' = \dots \Rightarrow u'$ tiene derivada débil en L^2

Observación. La hipótesis sobre $r(x) \geq r_0 > 0$, se puede eliminar con otras herramientas

"Alternativa de Fredholm"

(iii) La condición $p(x) \geq p_0 > 0$ es "insalvable" en H_0^1

Motivación

Cuando $p(x) \geq 0$ y $p(x_0) = 0$

$$-(p(x)u')' + u = f(x)$$

es "singular" en x_0, y el método en H^1 no funciona

Una idea para atacar este problema es cambiar el espacio

Fijemos ideas:

$$-(x^2 u')' + u = f \qquad (0,1)$$

Solución EDO homogénea

$$-(x^2 u')' + u = 0$$

$$u(x) = x^\gamma$$

$$u(x) = A x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + B x^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

puede no ser continua en $x = 0$

en este caso una condición en $x=0$ de la forma

$$u(x)=k\neq 0$$

no tiene solución. Pero lo que sí se podría hacer

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} u(x)=k$$

Idea.

Solución débil

$$\int_0^1 x^2 u'v' + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv \qquad \forall v\in C_c^1(0,1)$$

Defi.

$$X=\left\{ u\in L^2(0,1) \,/\, \begin{array}{l} u \text{ tiene derivada débil } u' \\ \int_0^1 x^2 u'^2 < \infty \end{array} \right\}$$

X es Hilbert, para

$$(u,v)_X = \int_0^1 x^2u'v' + \int_0^1 uv$$

Baeza.

$G = \langle \sigma \rangle$ grupo cíclico finito de orden n

$$\mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G]$$

; $a \in \mathbb{Z}[G]$

$$\mathbb{Z}[G] \xrightarrow{(\sigma-1)} \mathbb{Z}[G]$$

$$N(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i a \quad ; \quad (\sigma-1)(a) = (\sigma-1).a$$

Homomorfismos de G-módulos

Ejercicio. $\boxed{\begin{array}{l} \ker(N) = \mathrm{Im}(\sigma-1) \\ \ker(\sigma-1) = \mathrm{Im}\, N \end{array}}$

$$\Rightarrow \cdots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\sigma-1} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\sigma-1} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$\varepsilon\left(\sum_{i=0}^{n-1} n_i \sigma^i\right) = \sum_{0}^{n-1} n_i \quad , \quad \varepsilon(\sigma-1) = 1 - 1 = 0$$

$$\boxed{\ker(\varepsilon) = \mathrm{Im}(\sigma-1)}$$

es una G-resolución libre de $\mathbb{Z}$

A G-módulo

Tomamos $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G], A)$

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], A) \xrightarrow{(\sigma-1)^*} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], A) \xrightarrow{N^*} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], A)$$

$$\xrightarrow{(\sigma-1)^*} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], A) \xrightarrow{N^*} \cdots$$

Ejercicio. $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G], A) = A$

$$\phi : \mathbb{Z}[G] \to A \longmapsto \phi(1) \in A$$

G-hom

$$\phi(g.1) = g.\phi(1)$$

$$\Rightarrow 0 \to A \xrightarrow{\sigma-1} A \xrightarrow{N} A \xrightarrow{\sigma-1} A \xrightarrow{N} \cdots$$

$G = \langle \sigma \rangle$, $\sigma - 1 : A \to A$, $(\sigma-1)(a) = (\sigma-1).a$

$N : A \to A$, $N(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i.a$

$$\Rightarrow H^0(G, A) = A^{\sigma}$$

Ejercicio. $\begin{cases} H^{2i+1} = \dfrac{\ker N}{(\sigma-1)A} & \forall i \geq 0 \\ H^{2i+2} = \dfrac{A^{\sigma}}{NA} \end{cases}$

Descripción explícita de los grupos $H^i(G,A)$ $\forall i \geq 0$

G grupo, A G-módulo

construcción explícita de una G-resolución de $\mathbb{Z}$ proyecta

$\forall i \geq 0$

$P_i =$ $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por los sistemas $(g_0, \ldots, g_i)$
$g_i \in G$

$= \bigoplus_{g_{\ldots} \in G} \mathbb{Z}.(g_0, \ldots, g_i)$

$G \times P_i \to P_i$

$g.(g_0, \ldots, g_i) = (gg_0, \ldots, gg_i)$

P_i es G-módulo.

$d_{i-1} : P_i \longrightarrow P_{i-1}$

$$d_{i-1}(g_0, \dots, g_i) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j (g_0, \dots, \hat{g}_j, \dots, g_i)$$

Ejercicio $\quad d_{i-1} \circ d_i = 0$

$d_{-1} : P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \quad , \quad d_{-1}((g)) = 1$

Se obtiene una G- resolución de $\mathbb{Z}$ (resol. estandar)

$$\to P_i \to P_{i-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

A G- módulo

$$\mathrm{Hom}_G(P_0, A) \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{Hom}_G(P_1, A) \xrightarrow{\delta^1} \mathrm{Hom}_G(P_2, A) \xrightarrow{\delta^2} \cdots$$

<u>obs</u>. Los elementos de $\mathrm{Hom}(P_i, A)$ se identifican con aplicaciones

$$\underbrace{G \times \cdots \times G}_{i} \xrightarrow{f} A$$

Scanned with CamScanner

Los elementos siguientes

$$[g_1, \dots, g_i] := \underbrace{(1, g_1, g_1 g_2, \dots, g_1 \cdots g_i)}_{i+1}$$

forman una $\mathbb{Z}[G]$ base de P_i

luego $f : \mathrm{Hom}_G(P_i, A)$ está definida por los valores

$$f([g_1, \dots, g_i])$$

$$f : \underbrace{G \times \cdots \times G}_{i} \longrightarrow A \qquad \left\{ \; \mathrm{Hom}_G(P_i, A) = \mathrm{Apl}(G^i, A) \right.$$

Como opera δ^i sobre un tal f:

$$\delta^i(f)(g_1, \dots, g_{i+1}) = g_1 f(g_2, \dots, g_{i+1}) + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{i+1})$$

$$+ (-1)^{i+1} f(g_1, \dots, g_i)$$

Ejemplo $i = 1$, 1-cadena

$f : G \longrightarrow A$ es una aplicación

1-cociclo : $\delta^1(f) = 0$

$$\delta^1(f)(g_1 g_2) = g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1)$$

$$\delta^1(f) = 0 \iff g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_2) = 0$$

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) + g_1 f(g_2)$$

Obtener la definición general de 1-cobordes

1-coborde : $\delta^0(a)(g) = g.a - a$ (cobordes usuales)

$$H^1(G,A) = \frac{\{f: G \to A \;/\; f(g_1 g_2) = f(g_1) + g_1 f(g_2)\}}{\{G \to A,\ g \mapsto ga - a \mid a \in A\}}$$

$$\mathrm{Hom}_G(P_2, A) = \mathrm{Apl}(G \times G, A)$$

$$\Psi$$

$$f: G \times G \to A$$

$$\delta^2(f)(g_1, g_2, g_3) = \underbrace{g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3) - f(g_1, g_2)}\, = 0$$

2-cociclos : $Z^2(G,A) = \{f: G \times G \to A \mid \quad\}$

2-cobordes : explicitar!

$f: G \to A$

$\delta^1(f): G \times G \to A$ 2-cobordes

$$\delta^1(f)(g_1,g_2) = g_1 f(g_2) - f(g_1g_2) + f(g_1)$$

$$H^2(G,A) = \frac{\text{2-cociclos}}{\text{2-cobordes}}$$

Aplicación: G finito de orden n $(|G|=n)$

$h = [f] \in H^i(G,A)$

$$\begin{cases} f : G \times \cdots \times G \longrightarrow A \\ \delta^i(f)(g_1,\dots,g_{i+1}) = 0 \quad \forall g_1,\dots,g_{i+1} \in G \end{cases}$$

$$g_1 f(g_2,\dots,g_{i+1}) + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j f(g_1,\dots,g_j g_{j+1},\dots,g_{i+1})$$
$$+ (-1)^{i+1} f(g_1,\dots,g_i) = 0$$

Fijemos $g_1,\dots,g_i$ y hagamos variar $g_{i+1} \in G$. Sumo estas relaciones haciendo variar g_{i+1}

$$\sum_{g\in G} g_1 f(g_2,\dots,g) + \sum_{g\in G} \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j+1} f(g_1,\dots,g_j g_{j+1},\dots,g_i,g)$$
$$+ (-1)^{i+1} n f(g_1,\dots,g_i) = 0 \qquad (*)$$