$(\Leftarrow)$ Pd: $x \notin Z(A)$, $x^2 \in Z(A) \Rightarrow x \in A_+$

$$x = c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 ij$$

$$x^2 = (c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 ij)(c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 ij)$$
$$= c_0^2 + c_0 c_1 i + c_0 c_2 j + c_0 c_3 ij + c_0 c_1 i + c_1 i^2 + c_1 c_2 ij + c_1 c_3 i^2 j$$
$$+ c_0 c_2 j + c_1 c_2 ji + c_2 j^2 + c_2 c_3 jij + c_0 c_3 ij + c_1 c_3 iji + c_2 c_3 ij^2$$
$$+ c_3^2 ijij$$
$$= (c_0^2 + ac_1 + bc_2 - abc_3^2) + i(c_0 c_1 + c_0 c_1 - bc_2 c_3 + bc_2 c_3)$$
$$+ j(c_0 c_2 + ac_1 c_3 + c_0 c_2 - ac_1 c_3)$$
$$+ ij(c_0 c_3 + c_1 c_2 - c_1 c_2 + c_0 c_3)$$

$$= (c_0^2 + ac_1 + bc_2 - abc_3^2) + (2c_0 c_1 + \cancel{\ldots})i$$
$$+ (2c_0 c_2)j + (2c_0 c_3)ij$$

$$x^2 \in Z(A) \Leftrightarrow \cancel{c_0} \begin{cases} c_0 c_1 = 0 \\ c_0 c_2 = 0 \\ c_0 c_3 = 0 \end{cases}$$

Como $x \in Z(A) \Rightarrow c_1 \neq 0 \vee c_2 \neq 0 \vee c_3 \neq 0$

$\therefore$ $c_0 = 0$

$\therefore$ $x \in A_+$.

Ejercicio 1.2.4

Considere la función $B: A \times A \longrightarrow F$, $B(x,y)=\frac{1}{2}\left[N(x+y)-N(x)-N(y)\right]$, donde $A=\left(\frac{a,b}{F}\right)$ y N es la norma.

Probar:

(1) B bilineal, simétrica y no degenerada.

(2) $B(x,y)=\frac{1}{2}(x\bar{y}+y\bar{x})$

(3) $B(x,x)=N(x)$

Demostración

(1) $B(x+\lambda z, y)=\frac{1}{2}\left[N(x+\lambda z+y)-N(x+\lambda z)-N(y)\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[(\overline{x+\lambda z+y})(x+\lambda z+y)-(\overline{x+\lambda z})(x+\lambda z)-\bar{y}y\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(\bar{x}+\lambda\bar{z}+\bar{y})(x+\lambda z+y)-(\bar{x}+\lambda\bar{z})(x+\lambda z)-\bar{y}y\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cancel{\bar{x}x}+\cancel{\lambda\bar{x}z}+\bar{x}y+\cancel{\lambda\bar{z}x}+\cancel{\lambda^2\bar{z}z}+\lambda\bar{z}y+\bar{y}x+\lambda\bar{y}z+\cancel{\bar{y}y}\right.$$
$$\left.-\cancel{\bar{x}x}-\cancel{\lambda\bar{x}z}-\cancel{\lambda\bar{z}x}-\cancel{\lambda^2\bar{z}z}-\cancel{\bar{y}y}\right]$$

$$B(x,y)=\frac{1}{2}\left[N(x+y)-N(x)-N(y)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[(\overline{x+y})(x+y)-\bar{x}x-\bar{y}y\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[(\bar{x}+\bar{y})(x+y)-\bar{x}x-\bar{y}y\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\bar{x}x+\bar{x}y+\bar{y}x+\bar{y}y-\bar{x}x-\bar{y}y\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\bar{x}y+\bar{y}x\right]$$

$\lambda B(z,y) = \frac{1}{2}\lambda\left[\bar{z}y + \bar{y}z\right]$

$B(x,y) + \lambda B(z,y) = \frac{1}{2}\left[\bar{x}y + \bar{y}x + \lambda\bar{z}y + \lambda\bar{y}z\right]$

$\therefore$ Es claro que $B(x+\lambda z, y) = B(x,y) + \lambda B(z,y)$

Analogamente se tiene que $B(x, y+\lambda z) = B(x,y) + \lambda B(x,z)$, para ello basta ver que B es simétrica. En efecto:

$B(x,y) = \frac{1}{2}\left[N(x+y) - N(x) - N(y)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[N(y+x) - N(y) - N(x)\right] = B(y,x)$

$\square$

~~[illegible]~~

Falta ver que B es no degenerada, es decir,

$B(x,y)=0 \ \forall y \in A \Rightarrow x=0$.

En efecto, Sea $y \in A$

$B(x,y)=0 \iff N(x+y) - N(x) - N(y) = 0$

$\iff N(x+y) = N(x) + N(y)$

$\iff (\bar{x}+\bar{y})(x+y) = x\bar{x} + y\bar{y}$

$\iff \bar{x}x + \bar{x}y + \bar{y}x + \bar{y}y = x\bar{x} + y\bar{y}$

$\iff \bar{x}y + \bar{y}x = 0$

$\iff \bar{x}y = -\bar{y}x$

$\underset{y\neq 0}{y \in A \setminus A_+}$: $y \in F$ y además $0 = \bar{x}y + y^2 x$

$0 = y(\bar{x} + yx) \Rightarrow \bar{x} + yx = 0$

~~[illegible]~~

Si $y=1 \Rightarrow \bar{x} = -x \Rightarrow x=0$

$\square$

(2) Se demostró en (1) $\square$

(3) $$B(X,X) = \frac{1}{2}\left[N(X+X) - N(X) - N(X)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[X\overline{X} + X\overline{X}\right] \quad (\text{por } (2))$$
$$= X\overline{X}$$
$$= N(X)$$

$\boxed{3}$

Ejercicio 1.2.5

Considere la función B y sean $z, w \in A_+$. Pruebe que

(1) $B(z,w) = -\frac{1}{2}\left[zw + wz \right]$

(2) $N(z) = -z^2$

(3) Si $z = c_1 i + c_2 j + c_3 k$ y $w = d_1 i + d_2 j + d_3 k$,
entonces $B(z,w) = -ac_1d_1 - bc_2d_2 + abc_3d_3$

Demostración.

(2) Sea $z = c_1 i + c_2 j + c_3 k$,

$$
\begin{aligned}
N(z) = z\bar{z} &= (c_1 i + c_2 j + c_3 k)\overline{(c_1 i + c_2 j + c_3 k)} \\
&= -\left[(c_1 i + c_2 j + c_3 k)(c_1 i + c_2 j + c_3 k) \right] \\
&= -\left[z \cdot z \right] = -z^2
\end{aligned}
$$

$\therefore \forall z \in A_+ : N(z) = -z^2$

(1) Sean $z, w \in A_+$:

$$
\begin{aligned}
B(z,w) &= \frac{1}{2}\left[N(z+w) - N(z) - N(w) \right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(z+w)^2 - z^2 - w^2 \right] \\
&= \frac{1}{2}\left[z^2 + zw + wz + w^2 - z^2 - w^2 \right] = \frac{1}{2}\left[zw + wz \right].
\end{aligned}
$$

(3) Si $z = c_1 i + c_2 j + c_3 k$, $w = d_1 i + d_2 j + d_3 k$, sólo basta calcular zw y wz:

$$
\begin{aligned}
zw &= (c_1 i + c_2 j + c_3 k)(d_1 i + d_2 j + d_3 k) \\
&= c_1d_1 i^2 + c_1d_2 ij + c_1d_3 ik + c_2d_1 ji + c_2d_2 j^2 + c_2d_3 jk \\
&\quad + c_3d_1 ki + c_3d_2 kj + c_3d_3 k^2
\end{aligned}
$$

$$= ac_1d_1 + c_1d_2\, ij + ac_1d_3\, j - c_2d_1\, ij + bc_2d_2 - bc_2d_3\, i$$
$$- ac_3d_1\, j + bc_3d_2\, i - abc_3d_3$$

$$wz = (d_1 i + d_2 j + d_3 k)(c_1 i + c_2 j + c_3 k)$$
$$= d_1c_1 i^2 + d_1c_2\, ij + d_1c_3\, ik + d_2c_1\, ji + d_2c_2\, j^2 + d_2c_3\, jk$$
$$+ d_3c_1\, ki + d_3c_2\, kj + d_3c_3\, k^2$$
$$= ac_1d_1 + c_2d_1\, ij + ac_3d_1\, j - c_1d_2\, ij + bc_2d_2 - bc_3d_2\, i$$
$$- ac_1d_3\, j + bc_2d_3\, i - abc_3d_3$$

$$\therefore zw + wz = ac_1d_1 + \cancel{c_1d_2\, ij} + \cancel{ac_1d_3\, j} - \cancel{c_2d_1\, ij} + bc_2d_2 - \cancel{bc_2d_3\, i}$$
$$- \cancel{ac_3d_1\, j} + \cancel{bc_3d_2\, i} - abc_3d_3 + ac_1d_1 + \cancel{c_2d_1\, ij}$$
$$+ \cancel{ac_3d_1\, j} - \cancel{c_1d_2\, ij} + bc_2d_2 - \cancel{bc_3d_2\, i} - \cancel{ac_1d_3\, j} + \cancel{bc_2d_3\, i}$$
$$- abc_3d_3$$
$$= 2ac_1d_1 + 2bc_2d_2 - 2abc_3d_3$$

$$\therefore B(z,w) = -\frac{1}{2}\left[zw + wz\right] = -ac_1d_1 - bc_2d_2 + abc_3d_3$$

Lema 1.2.3

Sean $A=\left(\frac{a,b}{F}\right)$, $A'=\left(\frac{a',b'}{F}\right)$ dos álgebras de cuaterniones de normas N, N' respectivamente. Entonces

$A \cong A'$ (como álgebras) $\Leftrightarrow \exists\, \phi: A_+ \to A_+$ lineal biyectiva tal que $N'(\phi(z)) = N(z)$ $\forall z \in A_+$.

Demostración

$(\Rightarrow)$ Sea $\varphi: A \to A'$ isomorfismo de álgebras.

- $\varphi(Z(A)) = Z(A') = F$

dem. $\varphi(w) \in \varphi(Z(A)) \Leftrightarrow w \in Z(A)$

$\Rightarrow wx = xw \quad \forall x \in A$

$\Rightarrow \varphi(w)\varphi(x) = \varphi(x)\varphi(w)$

Ahora, sea $y \in A'$: $\varphi(w)y = \varphi(w)\varphi(x)$ $\left(\begin{matrix}\varphi(x)=y\\ x\in A\end{matrix}\right)$

$= \varphi(wx) = \varphi(xw)$ (ya que $w \in Z(A)$)

$= \varphi(x)\varphi(w) = y\varphi(w)$ $\therefore \varphi(w) \in Z(A')$

$\therefore \varphi(Z(A)) \subseteq Z(A')$

Sea $y \in Z(A') \subset A'$, existe $x \in A$ tal que $\varphi(x) = y$. Pd $x \in Z(A)$.

$w \in A$: $y \in Z(A') \Leftrightarrow y\varphi(w) = \varphi(w)y$

$\Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(w) = \varphi(w)\varphi(x)$

$\Leftrightarrow \varphi(xw) = \varphi(wx) \quad / \varphi^{-1}$

$\Rightarrow xw = wx$

$\therefore x \in Z(A)$

$\therefore Z(A') \subset \varphi(Z(A))$

Se tiene que $\varphi(Z(A)) = Z(A')$.

• Por ejercicio 1.2.3, $\varphi(x^2)=\varphi(x)^2 \Rightarrow \varphi(A_+)=A_+'$.

dem. $z\in A_+ \Leftrightarrow z\notin Z(A)$, $z^2\in Z(A)$

Sea $x\in A_+$: $\begin{cases} x\notin Z(A) \Rightarrow \varphi(x)\notin \varphi(Z(A))=Z(A') \\ x^2\in Z(A) \Rightarrow \varphi(x)^2=\varphi(x^2)\in\varphi(Z(A))=Z(A') \end{cases}$

$\therefore\ \varphi(x)\in A_+'$

Sea $y\in A_+'$, existe $x\in A$ tq $\varphi(x)=y$. Pd: $x\in A_+$

$y\in A_+' \Leftrightarrow y\notin Z(A')$, $y^2\in Z(A')$

$\varphi(x)=y\notin Z(A') \Rightarrow x\notin Z(A)$ (ya que $\varphi(Z(A))=Z(A')$)

$\varphi(x^2)=\varphi(x)^2=y^2\in Z(A') \Rightarrow x^2\in Z(A)$

$\therefore\ x\in A_+$

$\therefore\ \varphi(A_+)=A_+'$.

Obs. Con lo anterior, $\phi=\varphi|_{A_+}$ es lineal biyectiva. ✓ ok.

Sea $z\in A_+$:

$$N'(\phi(z))=-\phi(z)^2=-\varphi(z)^2=\varphi(-z^2)=\varphi(N(z))=N(z)\varphi(1_A)$$
$$=N(z)1_{A'}=N(z).$$

($\Leftarrow$) Supongamos que existe $\phi: A_+\longrightarrow A_+$ lineal biyectiva tal que $N'(\phi(z))=N(z)\quad \forall z\in A_+$.

• $B'(\phi(z),\phi(w))=B(z,w)\quad \forall z,w\in A_+$.

dem. $$B'(\phi(z),\phi(w))=\frac{1}{2}\left[N'(\phi(z)+\phi(w))-N'(\phi(z))-N'(\phi(w))\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[N'(\phi(z+w))-N'(\phi(z))-N'(\phi(w))\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[N(z+w)-N(z)-N(w)\right]=B(z,w)$$

Construiremos una base de A'_+ para la cual las constantes de estructura son las mismas que para A (con base standar).

Sea $\Psi: A \longrightarrow A'$ definida por

$$\Psi(1_A) = 1_{A'}, \quad \Psi(i) = \phi(i), \quad \Psi(j) = \phi(j), \quad \Psi(k) = \phi(i)\phi(j)$$

$$\Psi(i)^2 = \phi(i)^2 = -N'(\phi(i)) = -N(i) = -i(-i) = i^2 = a$$

$$\Psi(j)^2 = \phi(j)^2 = -N'(\phi(j)) = -N(j) = j^2 = b$$

$$\Psi(i)\Psi(j) + \Psi(j)\Psi(i) = \phi(i)\phi(j) + \phi(j)\phi(i) \underset{\text{ejercicio 1.2.5}}{=} -2B'(\phi(i), \phi(j))$$

$$= -2B(i,j) = ij + ji = ij - ij = 0$$

$\therefore \Psi(i)^2 = a, \quad \Psi(j)^2 = b, \quad \Psi(i)\Psi(j) = -\Psi(j)\Psi(i)$

Como $\Psi(i)\Psi(j) = -\Psi(j)\Psi(i) \Rightarrow \Psi(i)\Psi(j) \notin Z(A')$

$$(\Psi(i)\Psi(j))^2 = \Psi(i)\Psi(j)\Psi(i)\Psi(j) = -\Psi(i)^2\Psi(j)^2$$

$$= -ab \in F = Z(A) = Z(A')$$

$\therefore$ Por ejercicio 1.2.3 $\quad \Psi(i)\Psi(j) \in A'_+$

Más aún, $\{\Psi(i), \Psi(j), \Psi(i)\Psi(j)\}$ es una base para A'_+.

Por lo tanto, $\{1_{A'}, \Psi(i), \Psi(j), \Psi(i)\Psi(j)\}$ es una base de A'.

$\blacksquare$

GUIA 1 TOPICOS EN TEORIA DE ALGEBRAS

SEGUNDO SEMESTRE 2014

1. Sea A álgebra sobre un cuerpo F. *Una derivación de A* es un operador lineal $d : A \to A$ que satisface: $d(xy) = d(x)y + xd(y) \ \ \forall \ \ x, y \in A$. Sea $\mathrm{Der}_F(A) = \{d : A \to A \ / \ d \text{ derivación de} A\}$. Pruebe que:

   i) $\mathrm{Der}_F(A)$ es una subálgebra de $\mathrm{End}_F(A)$.

   ii) Si A es conmutativa, entonces $[\mathrm{Der}_F(A) = \mathrm{End}_F(A) \iff A^2 = \{0\}.]$

2. Sea $A \neq \{0\}$ álgebra de dimensión finita. Pruebe que son equivalentes:

   i) $\forall \ a \in A$, L_a y R_a son invertibles.

   ii) Las ecuaciones $ax = b$ y $ya = b \ \ \forall \ a \neq 0, b \neq 0$ tienen única solución x, y.

   iii) A no tiene divisores de cero, es decir, $x \neq 0, \ y \neq 0 \Longrightarrow xy \neq 0$.

3. Demostrar que si $\mathrm{car}(F) \neq 2$, entonces $[x^2 = 0, \ \forall \ x \in A \iff xy = -yx, \ \forall \ x, \in A]$

4. Sea (A, w) álgebra ponderada, es decir, A álgebra sobre un cuerpo F provista de un homomorfismo de álgebras no nulo $w : A \to F$.

   i) Pruebe que w es epiyectivo.

   ii) Pruebe que (A, w) álgebra ponderada sí y sólo sí A posee un ideal I de dimensión $n - 1$, tal que $A^2 \not\subseteq I$.

5. Sea A álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo K. Pruebe que A es ponderada si y sólo si A posee una base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ tal que $e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} e_k$ y las constantes de multiplicación satisfacen la condición $\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} = 1$.

6. Sea A álgebra conmutativa sobre un cuerpo F. Se dice que A es un álgebra de Jordan, si satisface la identidad $(xy)x^2 = x(yx^2)$ para todo $x, y \in A$. Sea

V espacio vectorial sobre F y $f : V \times V \to F$ forma bilineal simétrica sobre V. Considere el espacio vectorial $J = F \cdot 1 \oplus V$. Defina el producto en J por $(\alpha \cdot 1 + x)(\beta \cdot 1 + y) = (\alpha\beta + f(x,y)) \cdot 1 + (\beta x + \alpha y)\ \forall\ \alpha, \beta \in F,\ x, y \in V$. Pruebe que J con este producto es un álgebra de Jordan, y se denota por $J(V, f)$.

7. Considere el álgebra de Jordan $J(V, f)$, definida en el ejercicio anterior. Sea $\mathrm{Rad}(f) =$ radical de $f = \{z \in V\ /\ f(x,z) = 0\ \forall\ x \in V\}$.

   i) Pruebe que $\mathrm{Rad}(f)$ es un ideal de $J(V, f)$ y que $J\ /\ \mathrm{Rad}(f)$ es isomorfa al álgebra de Jordan de la forma inducida $\overline{f}$ por f en $\overline{V} = J\ /\ \mathrm{Rad}(f)$.

   ii) Pruebe que si $\dim_K(V) > 1$ entonces $J(V, f)$ es simple, es decir, $J(V, f) \neq \{0\}$, y los únicos ideales son los triviales y que f es no degenerada, es decir, existen $v_1 \neq 0,\ v_2 \neq 0,\ v_i \in V$ tal que $f(v_1, v_2) \neq 0$.

8. Sea A álgebra asociativa sobre F, $\mathrm{car}(F) \neq 2$. Sea $\lambda \in F$. Se define un nuevo producto en A por $a * b = \lambda xy + (1 - \lambda)yx$. Denotemos (A, λ) el álgebra A con esta nueva estructura. Pruebe que i) (A, λ) es de Jordan

   ii) Si A es simple entonces una condición necesaria para que (A, λ) sea de división es que A lo sea.

Tópicos en Teoría de Álgebras
Desarrollo Guía 1

Problema 1. A F-álgebra, $\mathrm{End}_F(A) = \{f : A \to A \,/\, f \text{ lineal}\}$, $\mathrm{Der}_F(A) = \{d : A \to A \,/\, d \text{ derivación}\}$

(i) $\mathrm{Der}_F(A)$ es una subálgebra de $\mathrm{End}_F(A)$.

Dem. Consideramos $[f,g] = fg - gf$, $fg = f \circ g$.

~~Con~~ $\mathrm{End}_F(A)$ álgebra con producto $[\ ,\ ]$.

Sean $f, g \in \mathrm{Der}_F(A)$, $a \in F$; $x, y \in A$:

$$
\begin{aligned}
(f+g)(xy) &= f(xy) + g(xy) = f(x)y + xf(y) + g(x)y + xg(y) \\
&= (f(x) + g(x))y + x(f(y) + g(y)) \\
&= (f+g)(x)y + x((f+g)(y))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(af)(xy) &= af(xy) = a[f(x)y + xf(y)] = af(x)y + axf(y) \\
&= (af)(x)y + x(af)(y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[f,g](xy) &= (fg - gf)(xy) = (fg)(xy) - gf)(xy) \\
&= f(g(xy)) - g(f(xy)) \\
&= f(g(x)y + xg(y)) - g(f(x)y + xf(y)) \\
&= f(g(x)y) + f(xg(y)) - g(f(x)y) - g(xf(y)) \\
&= f(g(x))y + \cancel{g(x)f(y)} + \cancel{f(x)g(y)} + xf(g(y)) \\
&\quad - g(f(x))y - \cancel{f(x)g(y)} - \cancel{g(x)f(y)} - xg(f(y)) \\
&= (f(g(x)) - g(f(x)))y + x(f(g(y)) + g(f(y))) \\
&= ((fg - gf)(x))y + x((fg - gf)(y)) \\
&= [f,g](x)y + x[f,g](y)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $Der_F(A)$ subálgebra de $End_F(A)$.

(ii) Pd: A conmutativa, entonces $[Der_F(A) = End_F(A) \Leftrightarrow A^2 = \{0\}]$

Dem. ($\Leftarrow$) Supongamos que $A^2 = \{0\} \Rightarrow xy = 0 \ \forall x, y \in A$.

$\forall f \in End_F(A)$: $f(xy) = 0$. Además $f(x)y$, $xf(y) = 0$

$$\therefore f(xy) = f(x)y + xf(y)$$

$$\therefore f \in Der_F(A)$$

$$\therefore Der_F(A) = End_F(A)$$

($\Rightarrow$) Supongamos que $Der_F(A) = End_F(A)$. Como $1 : x \longmapsto x \ \forall x \in A$ se tiene $1 \in Der_F(A)$. $\forall x, y \in A$

$$xy = 1(xy) = 1(x)y + x1(y) = xy + xy$$

$$\therefore xy = 0$$

$$\therefore A^2 = 0$$

$\square$

Problema 2. $A \neq \{0\}$ álgebra de dimensión finita. Son equivalentes

(i) $\forall a \in A$: L_a, R_a invertibles

(ii) Ecuaciones $ax = b$, $ya = b$ $\forall a, b \neq 0$ tienen solución única.

(iii) A no tiene divisores de 0.

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sea $a \in A$. $L_a(x) = ax$, $R_a(x) = xa$. Como L_a, R_a epimorfismos, $\forall b \in A$, $\exists x \in A$ tal que $L_a(x) = b$, $R_a(x) = b$. Al ser L_a, R_a 1-1, tal x es único.

(ii) $\Rightarrow$ (i) La existencia de solución de $ax = b$ $\forall b \Rightarrow L_a$ epi, la unicidad garantiza L_a inyectiva. Análogo para R_a.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Sea $xy=0$, $x\neq 0$. Como $y=0$ es solución de $xy=0$, la unicidad garantizada por (ii) concluye que $y=0$

$(\Leftarrow)$ Sean $\alpha, a, b, x \in A$, $\alpha\neq 0$, $a,b\neq 0$ tales que $\alpha(ax-b)=0$. Como A no tiene divisores de $0 \Rightarrow ax-b=0 \iff ax=b$. Ahora sea $\bar{x}\in A$ tal que $a\bar{x}=b$.

$$\begin{cases} ax=b \\ a\bar{x}=b \end{cases} \Rightarrow a(x-\bar{x})=0 \rightarrow x-\bar{x}=0 \Rightarrow x=\bar{x}$$

Análogo para la ecuación $ya=b$. $\square$

Problema 3. $\mathrm{char}(F)\neq 2$

$$[x^2=0 \ \forall x\in A \iff xy=-yx \ \forall x,y\in A]$$

$(\Leftarrow)$ $x^2=-x^2 \ \forall x\in A$. $x^2=-x^2 \rightarrow 2x^2=0 \Rightarrow x^2=0$.

$(\Rightarrow)$ $\forall x,y\in A$: $0=(x+y)(x+y)=x^2+xy+yx+y^2=xy+yx$

$$\therefore xy=-yx \quad \blacksquare$$

Problema 4. A F-álgebra, (A,ω) álgebra ponderada

(i) ω epimorfismo.

Dem. Como $\omega: A\to F$ homo no nulo, $\exists a\in A: \omega(a)\neq 0 \in F$.

$\forall r\in F$: $\omega(ra)=r\omega(a) \rightarrow \therefore r=\dfrac{\omega(ra)}{\omega(a)}=\omega\left(r\dfrac{a}{\omega(a)}\right)$.

Si $s=r\dfrac{a}{\omega(a)} \Rightarrow s\in A$ y se cumple $\omega(s)=r$

$\therefore \omega$ epiyectiva $\square$

(ii) (A,ω) ponderada $\iff \exists\, I \trianglelefteq A$, $\dim_F(I)=n-1$, $A^2 \not\subseteq I$

Dem ($\Rightarrow$) (A,ω) ponderada $\Rightarrow$ $\omega : A \longrightarrow F$ epimorfismo, $\neq 0$.

$A = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_F$, $\dim_F A = n$

$\exists\, a \in A$: $\omega(a) \neq 0$. Como $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, $a_i \in F$

$\Rightarrow$ $\omega(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i \omega(e_i)$, con ello $\omega(e_i) \neq 0$, algún i.

Por otro lado: $\omega : A \longrightarrow F$ epi $\Rightarrow$ $A/\ker(\omega) \cong F$

$\therefore$ $\dim_F(\ker(\omega)) = n-1$.

Considerando $I = \ker(\omega)$, se tiene que $\left\{ \begin{array}{c} I \trianglelefteq A \\ \dim_F(I) = n-1 \end{array} \right\}$,

$a e_i \in A^2$ pero $\omega(a e_i) = \omega(a)\omega(e_i) \neq 0$ $\therefore$ $a e_i \notin I$

$\therefore$ $A^2 \not\subseteq I$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\exists\, I \trianglelefteq A$, $\dim_F(I) = n-1$

$\therefore$ A/I F-álgebra, $\dim_F(A/I) = 1$

$\therefore$ $A/I \cong_{\varphi} F$

Considerando el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "p"] \arrow[dr, dashed, "\exists! \omega"'] & A/I \arrow[d, leftrightarrow, "\varphi"] \\
& F
\end{tikzcd}$$

p : proyección canónica

$\omega = \varphi \circ p$

Evidentemente ω es un epimorfismo $\therefore$ (A,ω) ponderada!

Problema 6

V es un F-espacio vectorial, $f: V\times V \to F$ forma bilineal simétrica.

$J = F\cdot 1 \oplus V$ con producto

$$(\alpha\cdot 1 + x)(\beta\cdot 1 + y) = (\alpha\beta + f(x,y))\cdot 1 + (\beta x + \alpha y)$$

$$\forall \alpha,\beta\in F;\ \forall x,y\in V.$$

Por demostrar que J es un álgebra de Jordan.

Dem. Primero debemos verificar que J es un álgebra conmutativa:

$$\begin{aligned}(\alpha\cdot 1+x)(\beta\cdot 1+y) &= (\alpha\beta + f(x,y))\cdot 1 + (\beta x+\alpha y)\\ &= (\beta\alpha + f(y,x))\cdot 1 + (\alpha y + \beta x)\\ &= (\beta\cdot 1+y)(\alpha\cdot 1+x)\end{aligned}$$

Ahora debemos demostrar que $(\vec{x}\vec{y})\vec{x}^2 = x(y\vec{x}^2)$ $\forall \vec{x},\vec{y}\in J$.

Sean $\vec{x} = (\alpha\cdot 1 + x)$, $\vec{y} = (\beta\cdot 1 + y)$;

$$\vec{x}\,\vec{y} = (\alpha\beta + f(x,y))\cdot 1 + (\beta x + \alpha y)$$

$$\vec{x}^2 = (\alpha^2 + f(x,x))\cdot 1 + (2\alpha x)$$

$$\begin{aligned}(\vec{x}\,\vec{y})\vec{x}^2 &= \left[(\alpha\beta + f(x,y))\cdot 1 + (\beta x+\alpha y)\right]\left[(\alpha^2 + f(x,x))\cdot 1 + (2\alpha x)\right]\\ &= \left[(\alpha\beta + f(x,y))(\alpha^2 + f(x,x)) + f(\beta x+\alpha y, 2\alpha x)\right]\cdot 1\\ &\quad + \left[(\alpha^2 + f(x,x))(\beta x+\alpha y) + (\alpha\beta + f(x,y))(2\alpha x)\right]\\ &= \left[\alpha^3\beta + \alpha\beta f(x,x) + \alpha^2 f(x,y) + f(x,y)f(x,x) + 2\alpha\beta f(x,x) + 2\alpha^2 f(x,y)\right]\cdot 1\end{aligned}$$

$$+ \left[\alpha^2\beta x + \alpha^3 y + \beta f(x,x)x + \alpha f(x,x)y + 2\alpha^2\beta x + 2\alpha f(x,y)x\right]$$

$\cancel{(\alpha\cdot 1+x)}[$

$$\vec{x}(y\vec{x}^2) = (\alpha\cdot 1+x)\left[(\beta\cdot 1+y)\left[(\alpha^2+f(x,x))\cdot 1+(2\alpha x)\right]\right]$$

$$= (\alpha\cdot 1+x)\left[\left(\beta(\alpha^2+f(x,x))+f(y,2\alpha x)\right)\cdot 1+\left((\alpha^2+f(x,x))y + \beta(2\alpha x)\right)\right]$$

$$=\left[\alpha\left(\beta\alpha^2+\beta f(x,x)+2\alpha f(x,y)\right)+f\left(x,(\alpha^2+f(x,x))y+2\alpha\beta x\right)\right]\cdot 1$$
$$+\left[\left(\beta(\alpha^2+f(x,x))+2\alpha f(x,y)\right)x+\alpha\left((\alpha^2+f(x,x))y+2\alpha\beta x\right)\right]$$

$$=\left[\alpha^3\beta+\alpha\beta f(x,x)+2\alpha^2 f(x,y)+\alpha^2 f(x,y)+f(x,x)f(x,y)+2\alpha\beta f(x,x)\right]\cdot 1$$
$$+\left[\alpha^2\beta x+\beta f(x,x)x+2\alpha f(x,y)x+\alpha^3 y+\alpha f(x,x)y+2\alpha^2\beta x\right]$$

Así puede verificarse que $(\vec{x}\vec{y})\vec{x}^2 = x(\vec{y}\vec{x}^2)$.
Por lo tanto, J es un álgebra de Jordan.

Problema 7

Considere el álgebra de Jordan $J(V,f)$ definida en problema 6. Sea $Rad(f) = \{z \in V \,/\, f(x,z)=0 \ \forall x \in V\}$

(i) Pruebe que $Rad(f)$ es un ideal de $J(V,f)$ y que $J/Rad(f)$ es isomorfa al álgebra de Jordan de la forma inducida $\overline{f}$ por f en $\overline{V} = J/Rad(f)$.

Dem. Primero veamos que $V \hookrightarrow J = F\cdot 1 \oplus V$ mediante $v \mapsto 0\cdot 1 + v$ $(0 \in F)$. También, $Rad(f) \subseteq V$.

- $Rad(f)$ subespacio de J.

 Sean $v, w \in Rad(f)$ (v, w se identifican con $0\cdot 1 + v$, $0\cdot 1 + w$), $\lambda \in F$.

$$f(v+w, x) = \underbrace{f(v,x)}_{=0} + \underbrace{f(w,x)}_{=0} = 0$$, ya que

$v, w \in Rad(f) \rightarrow f(v,x), f(w,x) = 0 \quad \forall x \in V$.

$$f(\lambda v, x) = \lambda f(v,x) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

$\therefore$ $Rad(f)$ es subespacio de J.

- $Rad(f)$ es subanillo de J. Sean $v, w \in Rad(f)$

 Para ello, $vw = (0\cdot 1 + v)(0\cdot 1 + w) = (0 + f(v,w))\cdot 1 + (0v + 0w)$

$= 0\cdot 1 + (0+0) = 0\cdot 1 + 0_V$ (Recordar que $f(v,w)=0$)

$\therefore$ $f(vw, x) = f(0,x) = 0 \quad \forall x \in V$

$\therefore$ $vw \in Rad(f)$

- Rad(f) es ideal de J.

Sean $v = 0\cdot 1 + v \in Rad(f)$ y $w = \alpha\cdot 1 + w \in J$

$$vw = (0\cdot 1 + v)(\alpha\cdot 1 + w) = (0 + \underbrace{f(v,w)}_{=0\,,\ v\in Rad(f)})\cdot 1 + (\alpha v + 0w)$$

$$= 0\cdot 1 + \alpha v$$

$\therefore\ \forall x \in V:\ f(vw, x) = f(\alpha v, x) = \alpha f(v,x) = \alpha\cdot 0$

~~Hay~~ Notar primero que $\{0\} \subseteq Rad(f)$ $(Rad(f) \neq \emptyset)$

Se concluye que Rad(f) es un ideal de J.

(ii)

Problema 8

A álgebra asociativa sobre F, char $F \neq 2$. $\underbrace{}^{\lambda \in F}$ $*$ producto en A

$$x * y = \lambda xy + (1-\lambda) yx$$

Notación: (A,λ) es álgebra A, $\lambda \in F$ y producto $*$.

(i) (A,λ) es álgebra de Jordan.

Dem. Primero hay que verificar que (A,λ) es conmutativa.

Sean $x, y \in (A,\lambda)$

$$x * y = \lambda xy + (1-\lambda) yx = \lambda xy + yx - \lambda yx$$
$$y * x = \lambda yx + (1-\lambda) xy = \lambda yx + xy - \lambda xy$$

(A,λ) no es conmutativa

GUIA 4 TOPICOS EN TEORIA DE ALGEBRAS

PRIMER SEMESTRE 2014

1. Sea A álgebra de Jordan. Considere el operador de multiplicación izquierdo de A, $R_a : A \to A$, definido por $R_a(x) = xa$, $\forall\, x \in A$. Pruebe que

   i) $R_{x^i}R_{x^j} = R_{x^j}R_{x^i}$, $\forall\, x \in A$, $\forall\, i, j \in \mathbb{N}$.

   ii) $[R_z, [R_x, R_y]] = R_{(x,y,z)} = R_{z[R_x, R_y]}$ $\forall\, x, y, z \in A$.

2. Sea A álgebra sobre F.

   i) Pruebe que $\forall\ x, y, z$ y $n \in N(A)$, se tiene que:

   $n(x, y, z) = (nx, y, z)$, $(xn, y, z) = (x, ny, z)$, $(x, y, z)n = (x, y, zn)$

   ii) Si uno de los elementos x, y, z pertenece a $N(A)$, pruebe que en A vale la relación: $[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y$.

3. Pruebe que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{0\}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

   Más generalmente, pruebe que si $m, n \in \mathbb{N}$ y $d = M.C.D(m, n)$, entonces $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

4. ¿ Cuánto vale $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$? (a qué es isomorfo?)

5. Sea $\mathbb{H} = \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$, el álgebra de cuaterniones de Hamilton. Pruebe que $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq M_2(\mathbb{C})$, consideradas como $\mathbb{R}$-álgebras. Sugerencia: Considere la $\mathbb{R}$-subálgebra de $M_2(\mathbb{C})$, consistente de las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix},$$

   donde $a, b \in \mathbb{C}$ y $\overline{a}$ es el complejo conjugado de a.

6. Sean M, N, M', N' cuatro R-módulos, $f : M \to M'$, $g : N \to N'$ funciones lineales.

(a) Pruebe que existe una única función lineal $h : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ denotada por $h = f \otimes g$ tal que $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y) \ \forall x \in M, y \in N$.

(b) Si f, g son epimorfismos entonces $f \otimes g$ es un epimorfismo.

7. Sean M, N dos R-módulos $M_i, i = 1, \cdots, n$ submódulos de M, $N_i, i = 1, \cdots, t$ submódulos de N tales que $M = \oplus_{i=1}^{n} M_i$, $N \ominus_{i=1}^{t} N_i$. Pruebe que $M \otimes_R N = \oplus_{i,j}\Big(M_i \otimes_R N_j\Big)$.

8. Sean F cuerpo, A, B F-álgebras. Sea $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ una base de B. Pruebe que para todo $z \in A \otimes_F B$, $z = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes b_j = 0$, únicos $x_j \in A$, $\forall\ j$. Sugerencia: Como $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ es una base de B se tiene que $B = \oplus_{j=1}^{n} F b_j$, y $A \otimes_F B = \sum_{j=1}^{n} A \otimes_F F b_j$.

9. Sean A, B, C tres R-álgebras asociativas con unidad, $\phi : B \to A$, $\psi : C \to A$ homomorfismos de R-álgebras tal que $\psi(C) \subseteq C_A(\pi(B))$. Pruebe que existe $\sigma : B \otimes_R C \to A$ homomorfismo de álgebras tal que $\sigma(b \otimes c) = \phi(b)\psi(c) \ \forall\ b \in B, c \in C$.

10. Sean A, B dos F-álgebras asociativas con unidad, F cuerpo. Sean A_1 y B_1 subálgebras de A y B respectivamente. Pruebe que

$$(C_A(A_1) \otimes_F B) \cap (A \otimes_F C_B(B_1)) = C_A(A_1) \otimes_F C_B(B_1).$$

11. Sean A, B dos F-álgebras asociativas con unidad, F cuerpo. Sean A_1 y B_1 subálgebras de A y B respectivamente tales que $1_A \in A_1$, $1_B \in B_1$. Pruebe que

$$C_{A \otimes_F B}(A_1 \otimes_F B_1) = C_A(A_1) \otimes_F C_B(B_1).$$

Problema 2. Sea A álgebra sobre F.

(i) Pruebe que $\forall x, y, z \in A$, $n \in N(A)$:

$n(x,y,z) = (nx, y, z)$, $(xn, y, z) = (x, ny, z)$

$(x,y,z)n = (x, y, zn)$

(ii) Si uno de los elementos x, y, z pertenece a $N(A)$, pruebe que A vale la relación: $[xy, z] = x[y,z] + [x,z]y$

Dem. (i) Sabemos que $N(A) = \left\{ x \in A \,/\, \begin{array}{l} (xy)z = x(yz) \\ (yx)z = y(xz) \\ (yz)x = y(zx) \end{array} \ \forall y, z \in A \right\}$

$(x,y,z) = (xy)z - x(yz)$

Sea $n \in N(A)$: $n(x,y,z) = n((xy)z - x(yz))$

$$= n((xy)z) - n(x(yz))$$

$$= (n(xy))z - (nx)(yz) = ((nx)y)z - (nx)(yz)$$

$$= (nx, y, z)$$

$$(xn, y, z) = ((xn)y)z - (xn)(yz)$$

$$= (x(ny))z - x(n(yz)) = (x(ny))z - x((ny)z)$$

$$= (x, ny, z)$$

$$(x,y,z)n = ((xy)z - x(yz))n = ((xy)z)n - (x(yz))n$$

$$= (xy)(zn) - x((yz)n)$$

$$= (xy)(zn) - x(y(zn)) = (x, y, zn).$$

(ii) Supongamos que $x \in N(A)$

$$[xy, z] = (xy)z - z(xy)$$

$$x[y,z] = x(yz - zy) = x(yz) - x(zy)$$

$$[x,z]y = (xz - zx)y = (xz)y - (zx)y$$

$$\begin{aligned} x[y,z] + [x,z]y &= x(yz) - x(zy) + (xz)y - (zx)y \\ &= x(yz) - \cancel{(xz)y} + \cancel{(xz)y} - (zx)y \\ &= x(yz) - (zx)y \\ &= (xy)z - z(xy) \end{aligned}$$

■

Problema 3

Pruebe que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{0\}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Más generalmente, pruebe que si $m, n \in \mathbb{N}$ y $d = \text{mcd}(m,n)$, entonces $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Dem. Los elementos de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ son generados por los siguientes:

$$\bar{0}\otimes\bar{0},\ \bar{0}\otimes\bar{1},\ \bar{0}\otimes\bar{2},\ \bar{0}\otimes\bar{3},\ \bar{0}\otimes\bar{4}$$
$$\bar{1}\otimes\bar{0},\ \bar{1}\otimes\bar{1},\ \bar{1}\otimes\bar{2},\ \bar{1}\otimes\bar{3},\ \bar{1}\otimes\bar{4}$$

Evidente que $\bar{0}\otimes\bar{a} = 0 \quad \forall \bar{a} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\bar{1}\otimes\bar{0} = 0$. Ahora

$$(\bar{1}\otimes\bar{1}) + (\bar{1}\otimes\bar{1}) = (\bar{1}+\bar{1})\otimes\bar{1} = \bar{0}\otimes\bar{1} = 0 = \bar{1}\otimes\bar{2}$$
$$(\bar{1}\otimes\bar{2}) + (\bar{1}\otimes\bar{2}) = 0 = \bar{1}\otimes\bar{4}$$
$$(\bar{1}\otimes\bar{3}) + (\bar{1}\otimes\bar{3}) = \bar{0}\otimes\bar{3} = 0 = \bar{1}\otimes\bar{1}$$
$$(\bar{1}\otimes\bar{4}) + (\bar{1}\otimes\bar{4}) = \bar{0}\otimes\bar{4} = 0 = \bar{1}\otimes\bar{3}.$$

$$\therefore \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{0\}.$$

Los elementos de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vienen generados por los siguientes:

$$\bar{0}\otimes\bar{0},\ \bar{0}\otimes\bar{1},\ \bar{1}\otimes\bar{0},\ \bar{1}\otimes\bar{1}$$
$$\bar{0}\otimes\bar{0} = \bar{0}\otimes\bar{1} = \bar{1}\otimes\bar{0} = 0$$
$$\bar{1}\otimes\bar{1} + \bar{1}\otimes\bar{1} = 0\otimes\bar{1} = \bar{1}\otimes\bar{0} = 0$$

$$\therefore \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \langle \bar{1}\otimes\bar{1} \rangle_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

• Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $d = mcd(m,n)$

Primero: $\forall\, \bar{a}\otimes\bar{b} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $\bar{a}\otimes\bar{b} = (ab)(\bar{1}\otimes\bar{1})$

$$\therefore \quad \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \langle \bar{1}\otimes\bar{1} \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Por otro lado: $\begin{cases} m(\bar{1}\otimes\bar{1}) = \bar{m}\otimes\bar{1} = 0 \\ n(\bar{1}\otimes\bar{1}) = \bar{1}\otimes\bar{n} = 0 \end{cases}$

luego, si $h = ord(\bar{1}\otimes\bar{1})$: $h \mid m, n$. En particular, $d = mcd(m,n) \Rightarrow d = m\alpha + n\beta$, algunos $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, y

$$d(\bar{1}\otimes\bar{1}) = (m\alpha + n\beta)(\bar{1}\otimes\bar{1}) = m\alpha(\bar{1}\otimes\bar{1}) + n\beta(\bar{1}\otimes\bar{1})$$
$$= 0 + 0 = 0$$

$$\therefore \quad h \mid d$$

Problema 4

¿A qué es isomorfo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$?

Resp: Tenemos que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{ r+\mathbb{Z} \,/\, r \in (0,1) \cap \mathbb{Q} \}$

Dado $\bar{a} \otimes \bar{b} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\begin{cases} \bar{a} = a+\mathbb{Z} \\ \bar{b} = b+\mathbb{Z} \end{cases}$; $a,b \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$

Fijando b, tenemos que $\exists\, \tilde{a} \in (0,1)$ tal que [redacted]

$\tilde{a} = \frac{a}{10} \iff a = 10\tilde{a}$ $\left(\tilde{a} < a \right)$, y

$$\bar{a} \otimes \bar{b} = (10\tilde{a}) \otimes \bar{b} = 10 (\tilde{a} \otimes \bar{b})$$

En particular, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, a_n \in (0,1)$ tal que $a = 10^n a_n$ $(a_n < a)$, $\bar{a} \otimes \bar{b} = 10^n (\bar{a}_n \otimes \bar{b})$, $\forall b \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Más generalmente $\forall\, \bar{a} \otimes \bar{b} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\exists\, \alpha \in \mathbb{Q}$, $\exists\, \bar{a}_\alpha, \bar{b}_\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tales que $\bar{a} \otimes \bar{b} = \alpha (\bar{a}_\alpha \otimes \bar{b}_\alpha)$ (donde $a, b, a_\alpha, b_\alpha \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$). Podemos ser más precisos todavía:

Afirmación: $\forall\, a, a', b, b' \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, $\exists\, \alpha \in \mathbb{Q}$ tal que $\bar{a} \otimes \bar{b} = \alpha (\bar{a}' \otimes \bar{b}')$.

$\therefore \forall\, a, b \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$: $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \langle \bar{a} \otimes \bar{b} \rangle_{\mathbb{Q}}$

(Averiguar si es cierto)

Problema 6. Sean M, N, M', N' R-módulos, $f: M \to M'$, $g: N \to N'$ funciones R-lineales. Pruebe que existe una única función lineal $h: M \otimes_R N \longrightarrow M' \otimes_R N'$ denotada por $h = f \otimes g$ tal que $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$ $\forall x \in M, y \in N$.

Dem. Dadas $f: M \to M'$, $g: N \to N'$ R-lineales, definimos
$B: M \times N \longrightarrow M' \otimes_R N'$, $B(x,y) = f(x) \otimes g(y)$.

Es evidente que B es R-bilineal. En efecto:

$$\begin{aligned}
B(x+z, y) &= f(x+z) \otimes g(y) = (f(x) + f(z)) \otimes g(y) \\
&= f(x) \otimes g(y) + f(z) \otimes g(y) \\
&= B(x,y) + B(z,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(x, y+z) &= f(x) \otimes g(y+z) = f(x) \otimes (g(y) + g(z)) \\
&= f(x) \otimes g(y) + f(x) \otimes g(z) \\
&= B(x,y) + B(x,z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(\lambda x, y) &= f(\lambda x) \otimes g(y) = (\lambda f(x)) \otimes g(y) = \lambda (f(x) \otimes g(y)) \\
&= f(x) \otimes (\lambda (g(y))) = f(x) \otimes g(\lambda y) = B(x, \lambda y) \\
&= \lambda B(x,y)
\end{aligned}$$

$\therefore B$ es R-bilineal

Por propiedad universal del producto tensorial, $\exists!$
$h: M \otimes_R N \longrightarrow M' \otimes_R N'$ tal que $h(x \otimes y) = B(x,y) = f(x) \otimes g(y)$

Denotamos tal h por $f \otimes g$.

(b) Si f, g son epimorfismos, entonces $f\otimes g$ es un epimorfismo.

dem. En efecto, dado $m'\otimes n' \in M'\otimes_R N'$, como f, g son epimorfismos, $\exists$ $m\in M$, $n\in N$ tales que $f(m)=m'$, $g(n)=n'$. Luego basta tomar $m\otimes n$ y así $(f\otimes g)(m\otimes n) = m'\otimes n'$.

Problema 7

Sean M, N dos R-módulos, M_i, $i=1,\dots,n$ submódulos de M, N_i, $i=1,\dots,t$ submódulos de N; tales que $M=\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, $N=\bigoplus_{j=1}^{t} N_j$. Pruebe que $M\otimes_R N = \bigoplus_{i,j}(M_i\otimes_R N_j)$

Dem. $B: M\times N \longrightarrow \bigoplus_{i,j}(M_i\otimes_R N_j)$ definida por

$$(x_1+\dots+x_n, y_1+\dots+y_t) \mapsto x_1\otimes y_1+\dots+x_1\otimes y_t + x_2\otimes y_1+\dots+x_2\otimes y_t + \dots + x_n\otimes y_1+\dots+x_n\otimes y_t$$

es bilineal, luego por propiedad universal del producto tensorial, $\exists!$ $h: M\otimes_R N \longrightarrow \bigoplus_{i,j}(M_i\otimes_R N_j)$ lineal tal que:

$$h((x_1+\dots+x_n)\otimes(y_1+\dots+y_t)) = x_1\otimes y_1+\dots+x_n\otimes y_t$$

Afirmación. h es un isomorfismo.

dem. Debemos construir la inversa de h. $\forall i,j$, sea

$$B_{ij} : M_i \times N_j \longrightarrow M \otimes_R N \quad \text{, con}$$

$$B_{ij}(x_i \otimes x_j) = 0 + \dots + 0 + x_i \otimes y_j + 0 + \dots + 0 = x_i \otimes y_j ,$$

en otras palabras, $\forall i,j$: $M_i \otimes_R N_j \hookrightarrow M \otimes N$ de manera natural. Por propiedad universal del producto tensorial, $\exists!$ $h_{ij} : M_i \otimes N_j \longrightarrow M \otimes_R N$, con $h_{ij}(x_i \otimes y_j) = x_i \otimes y_j$.

Ahora definimos $\tilde{h} : \bigoplus_{i,j} (M_i \otimes_R N_j) \longrightarrow M \otimes_R N$ como

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(x_1 \otimes y_1 + \dots + x_n \otimes y_t) &= h_{11}(x_1 \otimes y_1) + \dots + h_{nt}(x_n \otimes y_t) \\
&= x_1 \otimes y_1 + \dots + x_n \otimes y_t \\
&= (x_1 + \dots + x_n) \otimes (y_1 + \dots + y_t)
\end{aligned}$$

Evidente que $\tilde{h}$ es R-lineal (cada h_{ij} es R-lineal) y que es la inversa de h.

Scanned with CamScanner

Problema 9

Sean A, B, C tres R-álgebras asociativas con unidad, $\phi: A \to C$, $\Psi: C \to A$ homomorfismos de R-álgebras tal que $\Psi(C) \subseteq C_A(\phi(B))$. Pruebe que existe $\sigma: B \otimes_R C \longrightarrow A$ homomorfismo de álgebras tal que $\sigma(b \otimes c) = \phi(b)\Psi(c)$, para todos $b \in B$, $c \in C$.

Dem. Primero veamos lo siguiente:

$$X \subset A: \quad C_A(X) = \{a \in A \,/\, [x, a] = 0 \quad \forall x \in X\}$$

$$C_A(\phi(B)) = \{a \in A \,/\, [\phi(b), a] = 0 \quad \forall b \in B\}$$

$$\Psi(C) \subset C_A(\phi(B)) \Rightarrow [\Psi(c), \phi(b)] = 0 \quad \forall b, c$$, o de manera equivalente, $\Psi(c)\phi(b) = \phi(b)\Psi(c) \quad \forall b, c$.

Ahora, sea $\sigma: B \times C \longrightarrow A : (b, c) \mapsto \phi(b)\Psi(c)$.

Evidente que σ es R-bilineal; así, por propiedad universal del producto tensorial, existe única $h: B \otimes_R C \longrightarrow A$ R-lineal tal que $\sigma(b \otimes c) = \phi(b)\Psi(c)$. Veamos que σ es homomorfismo de R-álgebras:

$$\begin{aligned}
\sigma((b \otimes c)(b' \otimes c')) &= \sigma((bb') \otimes (cc')) = \phi(bb')\Psi(cc') \\
&= (\phi(b)\phi(b'))(\Psi(c)\Psi(c')) \\
&= \phi(b)(\phi(b')\Psi(c))\Psi(c') \\
&= \phi(b)(\Psi(c)\phi(b'))\Psi(c') \\
&= (\phi(b)\Psi(c))(\phi(b')\Psi(c')) \\
&= \sigma(b \otimes c)\,\sigma(b' \otimes c')
\end{aligned}$$

Problema 8

F cuerpo, A, B F-álgebras. Sea $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ una base de B. Pruebe que para todo $z \in A \otimes_F B$, $z = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes b_j$, únicos $x_j \in A$, $\forall j$.

dem. Como $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ es una base de B, se tiene que $A \otimes_F B = A \otimes_F \left(\bigoplus_{j=1}^{n} b_j F \right) = \bigoplus_{j=1}^{n} \left(A \otimes_F b_j F \right)$. Luego, $\forall z \in A \otimes_F B$, existen únicos $y_j \otimes b_j f_j \in A \otimes_F b_j F$ $\forall j = 1, \dots, n$ tales que:
$$z = \sum_{j=1}^{n} y_j \otimes (b_j f_j) = \sum_{j=1}^{n} (b_j y_j) \otimes b_j .$$
Tomando $x_j = b_j y_j$, $z = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes b_j$.

Unicidad: Supongamos que $z = \sum_{j=1}^{n} (x_j \otimes b_j) = \sum_{j=1}^{n} (x_j' \otimes b_j)$, $x_j, x_j' \in A$ $\forall j = 1, \dots, n$. De lo anterior,
$$0 = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes b_j - \sum_{j=1}^{n} x_j' \otimes b_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes b_j - (x_j' \otimes b_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes b_j + (-x_j') \otimes b_j = \sum_{j=1}^{n} (x_j + (-x_j')) \otimes b_j$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j') \otimes b_j$$
Como $\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j') \otimes b_j = 0$ y $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ es conjunto linealmente independiente, por proposición 1.5.2 (ver apuntes), se tiene que
$$x_j - x_j' = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$
$$\therefore \; x_j = x_j' \quad \forall j$$
$\blacksquare$

Problema 10.

Sean A, B F-álgebras asociativas con unidad, F cuerpo. Sean A_1, B_1 subálgebras de A y B respectivamente. Pruebe que:

$$\left(C_A(A_1) \otimes_F B \right) \cap \left(A \otimes_F C_B(B_1) \right) = C_A(A_1) \otimes_F C_B(B_1)$$

Dem.

$$x \otimes y \in \left(C_A(A_1) \otimes_F B \right) \cap \left(A \otimes_F C_B(B_1) \right)$$

$$\Leftrightarrow x \otimes y \in C_A(A_1) \otimes_F B \,, \quad x \otimes y \in A \otimes_F C_B(B_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in C_A(A_1) \wedge y \in B \\ x \in A \,, \quad y \in C_B(B_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in C_A(A_1) \,, \quad y \in C_B(B_1)$$

$$\Leftrightarrow x \otimes y \in C_A(A_1) \otimes_F C_B(B_1)$$

$\square$

Problema 11

Sean A, B F-álgebras asociativas con unidad, F cuerpo. Sean A_1 y B_1 subálgebras de A y B respectivamente tales que $1_A \in A$, $1_B \in B$. Pruebe que

$$C_{A\otimes_F B}(A_1 \otimes_F B_1) = C_A(A_1) \otimes_F C_B(B_1)$$

dem. Sea $x \otimes y \in C_A(A_1) \otimes_F C_B(B_1)$

$\Leftrightarrow \quad x \in C_A(A_1), \quad y \in C_B(B_1)$

$x \in C_A(A_1) \Leftrightarrow xa = ax \quad \forall a \in A_1$

$y \in C_B(B_1) \Leftrightarrow yb = by \quad \forall b \in B_1$

$$\therefore \forall a \otimes b \in A_1 \otimes_F B_1 : (x \otimes y)(a \otimes b) = (xa) \otimes (yb)$$
$$= (ax) \otimes (by)$$
$$= (a \otimes b)(x \otimes y)$$

$$\therefore \quad x \otimes y \in C_{A\otimes_F B}(A_1 \otimes_F B_1)$$
$$\therefore \quad C_A(A_1) \otimes_F C_B(B_1) \subseteq C_{A\otimes_F B}(A_1 \otimes_F B_1)$$

Sea $x \otimes y \in C_{A\otimes_F B}(A_1 \otimes_F B_1)$: $(x \otimes y)(a \otimes b) = (a \otimes b)(x \otimes y)$, todo $a \otimes b \in A_1 \otimes B_1$. Pero $(x \otimes y)(a \otimes b) = (xa) \otimes (yb)$, $(a \otimes b)(x \otimes y) = (ax) \otimes (by)$. Si $y = 1_B$, tenemos

$$(ax) \otimes b = (xa) \otimes b$$
$$\Leftrightarrow (ax - xa) \otimes b = 0$$
$$\Leftrightarrow ax - xa = 0 \quad (\text{Proposición } 1.5.2)$$
$$\therefore ax = xa \quad \therefore x \in C_A(A_1)$$

Podemos suponer $b \neq 0$.

Análogamente (considerando $x = 1_A$) se tiene que
$y \in C_B(B_1)$

$$\therefore \quad x \otimes y \in C_A(A_1) \otimes C_B(B_1)$$

$$\therefore \quad C_{A \otimes_F B}(A_1 \otimes_F B_1) \subseteq C_A(A_1) \otimes_F C_B(B_1)$$

Se concluye que $C_{A \otimes_F B}(A_1 \otimes_F B_1) = C_A(A_1) \otimes_F C_B(B_1)$.

GUIA 3 TOPICOS EN TEORIA DE ALGEBRAS

SEGUNDO SEMESTRE 2014

1. En general, en álgebras noasociativas no siempre $u^2u^2 = u(uu^2)$. Considere por ejemplo un álgebra A sobre un cuerpo F con base $\{x_1, x_2, y, z\}$ y productos no nulos de los elementos básicos dados por

$$yx_1 = ax_1y = x_2, zx_2 = ax_2z = x_1,$$

$0 \neq a \in F$. Considere el elemento $u = x_1 + x_2 + y + z$.

2. Sean $A_1, \cdots, A_n$ álgebras simples sobre un cuerpo F con bases

$$\{v_i^1 \mid i \in I_1\}, \cdots, \{v_i^n \mid i \in I_n\}.$$

Considere el álgebra $A = Fe \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ (suma directa como espacio vectorial) y multiplicación dada por las siguientes condiciones:

(i) A_i son subálgebras de A,

(ii) $A_iA_j = \{0\}$ para $i \neq j$,

(iii) $ev_i^j = v_i^je = e$, para todo i, j,

(iv) $e^2 = e$.

Entonces $I = Fe$ es el único ideal minimal en A, y $I^2 = I$.

3. Pruebe que el álgebra de Cayley C es alternativa, donde un álgebra U es alternativa sí y sólo sí $x(xy) = x^2y$, $(xy)y = xy^2$ $\quad \forall x, y \in U$.

4. Pruebe que las algebras de Cuaterniones generalizados $A = \left(\frac{a,b}{F}\right)$, y el álgebra de Cayley C satisfacen la identidad $a^2 - (a+\overline{a})a + a\overline{a} = 0$. En el caso del álgebra de Cayley , para $a = x + ye$, $e = (0,1), x, y \in \mathbb{H}$, se define $\overline{a} = \overline{x} - ye$.

5. **Algebra de Jordan tipo Albert** Sea O álgebra de los octoniones o álgebra de Cayley-Dickson con involución $*$. Entonces el conjunto de todas las matrices Hermitianas de 3×3 con coeficientes en O es un álgebra de Jordan con el producto de matrices simétrico. Su dimensión es 27 y se denota $H(O_3)$.

   Sea $m \in H(O_3)$ entonces $m = \begin{pmatrix} \alpha_1 & z & y^* \\ z^* & \alpha_2 & x \\ y & x^* & \alpha_3 \end{pmatrix}$ con $\alpha_i \in F, x, y, z \in O$.

6. Para cualquier álgebra A se define la serie de subálgebras

$$A^{<1>} = A,\ A^{<k+1>} = A^{<k>}A;$$

   Se dice que A es *nilpotente a la derecha* si hay $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^{<n>} = 0$. En el Capítulo 4, Proposición 1, del libro I. P. Shestakov, A. I. Shirshov. Rings that are nearly associative. Pure and Applied Mathematics 104 (1982), se demuestra que que si A es conmutativa o anticonmutativas decir, $yx = -xy\ \forall\ x, y \in A$, entonces A es nilpotente a la derecha sí y sólo sí A is nilpotent.

   Suttles. Sea A álgebra conmutativa con base $\{e_1, \cdots, e_5\}$ y productos no nulos dados por

$$e_1e_2 = e_2e_4 = -e_1e_5 = e_3, e_1e_3 = e_4, e_2e_3 = e_5.$$

   Pruebe que A satisface $((xx)x)x = 0\ \forall\ x \in A$, es soluble pero no nilpotente.

7. Sea L álgebra con base $\{x, y\}$ y productos no nulos dados por $xy = -yx = y$. Pruebe que L es un álgebra de Lie, donde un álgebra L es de Lie sí y sólo sí para cada $x, y, z \in L,\ x^2 = 0,\ $ y $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$. Además L es soluble pro no nilpotente.

8. Considere el álgebra del ejercicio 1. Pruebe que $I_1 = Fx_1 + Fx_2 + Fy$ y $I_2 = Fx_1 + Fx_2 + Fz$ son ideales maximales de A, nilpotentes diferentes. Al tomar $a = 1$ o $a = -1$ obtenemos un álgebra conmutativa o anticonmutativa.

Problema 2

Sean $A_1, \ldots, A_n$ álgebras simples sobre un cuerpo F con bases

$$\{v_i^1 / i \in I_1\}, \ldots, \{v_i^n / i \in I_n\}$$

Considere el álgebra $A = Fe \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$, y multiplicación dada por las siguientes condiciones:

(i) A_i son subálgebras de A.

(ii) $A_i A_j = \{0\}$ para $i \neq j$

(iii) $e v_i^j = v_i^j e = e$, para todo i, j.

(iv) $e^2 = e$

Entonces $I = Fe$ es el único ideal minimal en A, $I^2 = I$.

Dem. Primero veamos que $I = Fe$ es un ideal minimal de A.

En efecto, por (iii) y (iv), $I \trianglelefteq A$.

I es minimal, ya que si J es ideal de A con $J \subsetneq I$, entonces $e \notin J$ (en caso contrario $Fe = I \subset J \therefore J = I$).

y si $f \in F \setminus \{0\}$, $f \in J \Rightarrow Fe \subset J$

$$\therefore J = \{0\}$$

Por otro lado, $\forall z \in A$ (por (i) y (ii)):

$$z = fe + \sum_{i \in I_1}{}' \lambda_i v_i^1 + \cdots + \sum_{i \in I_n} \lambda_i v_i^n \quad , \quad f, \lambda_i^j \in F$$

$$\Rightarrow \quad ez = fe^2 + \sum_{i \in I_1}{}' \lambda_i e v_i^1 + \cdots + \sum_{i \in I_n} \lambda_i e v_i^n +$$

$$ez = fe + \sum_{i\in I_1}' \lambda_i e + \dots + \sum_{i\in I_n}' \lambda_i e \qquad (\text{por (iii) y (iv)})$$

$$= \left(f + \sum_{i\in \bigcup I_j}' \lambda_i\right) e$$

$\therefore$ $\forall J$ ideal de A, $e \in J$

$\therefore$ $\forall J$ ideal de A, $Fe \subset J$

Así, Fe es el único ideal minimal de A. ($Fe \neq \{0\}$)

Pd: $I^2 = I$

<u>Dem</u>: Evidente!

Problema 3

Pruebe que el álgebra de Cayley C es alternativa, donde un álgebra U es alternativa ssi $x(xy) = x^2 y$, $(xy)y = xy^2$ $\forall x, y \in U$.

GUIA 2 TOPICOS EN TEORIA DE ALGEBRAS

SEGUNDO SEMESTRE 2014

1. Sea A álgebra conmutativa con identidad y sea $a \in A$. Si $a^2 = 0$, pruebe que $a + 1_A$ y $a - 1_A$ son elementos invertibles de A.

2. Sea n un natural tal que no es un cuadrado perfecto. Pruebe que

$$\mathbb{Q}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n} \ / \ a, b \in \mathbb{Q}\}$$

es una $\mathbb{Q}$-subálgebra de $\mathbb{R}$, con las operaciones:

$(a + b\sqrt{n}) + (c + d\sqrt{n}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{n}$ y

$(a + b\sqrt{n})(c + d\sqrt{n}) = (ac + bdn) + (ad + bc)\sqrt{n}$.

3. Sea A álgebra conmutativa sin identidad. Sea $T = A \times \mathbb{Z}$. Defina en T las operaciones: $(a, n) + (b, m) = (a + b, n + m)$, $(a, n)(b, m) = (ab + ma + nb, nm)$ $\forall \ a, b \in A, \ n, m \in \mathbb{Z}$. Pruebe que T es un álgebra con identidad.

¿Qué ocurre con esta construcción si A ya tiene una identidad?

4. Sea A una R-álgebra no asociativa. Denote $B = A \times R$ y defina una función $\mu : B \times B \to B$, por $((x, a), (y, b)) \to (xy + ay + xb, ab)$. Pruebe que:

(a) μ es bilineal.

(b) Si la multiplicación en A es asociativa, entonces μ es una multiplicación asociativa en B con $(0, 1)$ como identidad de B, luego B es una R-álgebra.

(c) $x \to (x, 0)$ es un isomorfismo de A en un ideal de B.

5. Sea A un álgebra simple. Pruebe que $M_n(A)$ es simple. Sugerencia: Muestre que si J es un ideal no nulo de $M_n(A)$ entonces $\{x \in A, \mid \varepsilon_{11}x \in J\}$ es un ideal no nulo de A.

6. Sea F cuerpo de $car(F) \neq 2$. Clasifique todas las álgebras sobre F, de dimensión dos. Considere el operador de multiplicación izquierdo de A, $L_a : A \to A$, definido por $L_a(x) = ax$, $\forall\, x \in A$.

(a) Pruebe que cada F-álgebra que tiene una estructura de F-espacio vectorial $A = x_1F \oplus x_2F$ es isomorfa a una F-álgebra tal que $L_{x_1} = id_A$, y L_{x_2} tiene una representación matricial dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ a \in F,$$

(b) dos tales álgebras con L_{x_2} dados por las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ a \in F, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ b \in F,$$

respectivamente son isomorfas sí y sólo sí $a = b = 0$, o $ab \in F^2 - \{0\}$.

(c) deduzca que cada F-álgebra de dimensión 2 es una extensión cuadática de F, o $F \times F$, o una F-álgebra con base $1, x$ tal que $x^2 = 0$.

7. Considere el álgebra de Cayley-Dickson $C = Q + v_3Q$. Pruebe que C es de división si y sólo si $N(x) \neq 0$ para cada $x \neq 0, x \in C$.

Tópicos en Teoría de Álgebras
Desarrollo Guía 2

Problema 1

Sea A álgebra conmutativa con identidad y sea $a \in A$. Si $a^2 = 0$, pruebe que $a+1$, $a-1$ son invertibles en A ($1 = 1_A$)

Dem. Utilidad recordar expansiones (en $\mathbb{R}$)

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots \quad , \quad \frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - \cdots$$

Luego es fácil ver que $(a+1)^{-1} = 1-a$, $(a-1)^{-1} = -(1-a)$
$= -(1+a) = -1-a$

Problema 2. Sea $n \in \mathbb{N}$ no cuadrado perfecto. Probar que

$$\mathbb{Q}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n} \;/\; a, b \in \mathbb{Q}\}$$

es una $\mathbb{Q}$-subálgebra de $\mathbb{R}$, con las operaciones:

$$(a+b\sqrt{n}) + (c+d\sqrt{n}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{n}$$

$$(a+b\sqrt{n})(c+d\sqrt{n}) = (ac+bdn) + (ad+bc)\sqrt{n}$$

Dem. Evidente que $0, 1 \in \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$, donde $0 = 0 + 0\sqrt{n}$, $1 = 1 + 0\sqrt{n}$ $(\mathbb{Q}[\sqrt{n}] \neq \emptyset)$.

~~• $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ es un $\mathbb{Q}$-subespacio de $\mathbb{R}$~~

- $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ es un $\mathbb{Q}$-subespacio de $\mathbb{R}$

  Evidente que $(a+b\sqrt{n}) + (c+d\sqrt{n}) \in \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ $\forall (a+b\sqrt{n}), (c+d\sqrt{n}) \in \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$. Ahora si $e \in \mathbb{Q}$

  $e(a+b\sqrt{n}) = ea + eb\sqrt{n} \in \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$, ya que $ea, eb \in \mathbb{Q}$.

- $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ es cerrado bajo producto,

  $$(a+b\sqrt{n})(c+d\sqrt{n}) = (ac+bdn) + (ad+bc)\sqrt{n}.$$

  Cuando $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, $ac+bdn, ad+bc \in \mathbb{Q}$.

  $$\therefore (a+b\sqrt{n})(c+d\sqrt{n}) \in \mathbb{Q}[\sqrt{n}].$$

Así, $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ es una $\mathbb{Q}$-subálgebra de $\mathbb{R}$.

Obs. $\mathbb{R} = \{a + b\sqrt{n} \;/\; a, b \in \mathbb{R}\}$ es una $\mathbb{Q}$-álgebra con las mismas operaciones antes definidas.

Problema 3

Sea A álgebra conmutativa sin identidad. Sea $T = A \times \mathbb{Z}$.
Defina en T las operaciones: $(a,n)+(b,m) = (a+b, n+m)$,
$(a,n)(b,m) = (ab+ma+nb, nm)$ $\forall a,b \in A$, $n,m \in \mathbb{Z}$. Pruebe que
T es un álgebra con identidad.
¿Qué ocurre con esta construcción si A ya tiene una identidad?

Dem. Evidente que $(T,+)$ es grupo abeliano con neutro $(0,0)$ e inverso $-(a,n) = (-a,-n)$
Sea $\lambda \in \mathbb{Z}_+$: $\lambda(a,n) = (\lambda a, \lambda n) \in T$
$-(a,n) = (-a,n)$, ya que $(a,n)+(-a,-n) = (a-a, n-n)$
$= (0,0) \in T$

$\therefore \forall \lambda \in \mathbb{Z}: \lambda(a,n) = (\lambda a, \lambda n)$

Se cumple: $\lambda((a,n)+(b,m)) = \lambda(a+b, n+m) = (\lambda(a+b), \lambda(n+m))$
$= (\lambda a + \lambda b, \lambda n + \lambda m) = (\lambda a, \lambda n) + (\lambda b, \lambda m)$
$= \lambda(a,n) + \lambda(b,m)$

Análogamente $((a,n)+(b,m))\lambda = (a,n)\lambda + (b,m)\lambda$ y
$(a,n)(\lambda+\sigma) = (a,n)\lambda + (a,n)\sigma$ $(\lambda, \sigma \in \mathbb{Z})$. También es claro que $\lambda(a,n) = (a,n)\lambda$ (Asumiendo que A es $\mathbb{Z}$-álgebra)

Producto distribuye sobre suma:

$$(a,n)[(b,m)+(c,\sigma)] = (a,n)(b+c, m+\sigma)$$
$$= (a(b+c) + (m+\sigma)a + n(b+c), n(m+\sigma))$$
$$= (ab+ac+ma+\sigma a+nb+nc, nm+n\sigma)$$

~~At~~

$(a,n)(b,m)+(a,n)(c,\sigma)$

$=(ab+ma+nb,\ nm)+(ac+\sigma a+nc,\ n\sigma)$

$=(ab+ma+nb+ac+\sigma a+nc,\ nm+n\sigma)$

$\therefore\ (a,n)\left[(b,m)+(c,\sigma)\right]=(a,n)(b,m)+(a,n)(c,\sigma)$

Análogamente se cumple $\left[(b,m)+(c,\sigma)\right](a,n)=(b,m)(a,n)$
$+(c,\sigma)(a,n)$

$\lambda\left[(a,n)(b,m)\right]=\lambda(ab+ma+nb,\ nm)=(\lambda ab+\lambda ma+\lambda nb,\ \lambda nm)$

$\left[\lambda(a,n)\right](b,m)=(\lambda a,\lambda n)(b,m)=(\lambda ab+m\lambda a+\lambda nb,\ \lambda nm)$

$(a,n)\left[\lambda(b,m)\right]=(a,n)(\lambda b,\lambda m)=(a\lambda b+\lambda ma+n\lambda b,\ n\lambda m)$

$\therefore\ \lambda\left[(a,n)(b,m)\right]=\left[\lambda(a,n)\right](b,m)=(a,n)\left[\lambda(b,m)\right]$

~~¿Cuál~~ Así T es una $\mathbb{Z}$-álgebra

¿Cuál es la identidad de T??

Queremos que $(a,n)(b,m)=(b,m)(a,n)=(b,m)\quad\forall (b,m)\in T$.

$(a,n)(b,m)=(b,m)\iff(ab+ma+nb,\ nm)=(b,m)$

$$\iff\begin{cases} ab+ma+nb=b\\ nm=m\end{cases}$$

Primero: $n=1$

Se cumple trivial si $a=0$.

$\Rightarrow b=ab+ma+b\iff 0=ab+ma$
$=ab+am$

$$(b,m)(a,n)=(b,m) \iff (ba+nb+ma\,,\, nm)=(b,m)$$

$$\iff \begin{cases} ba+nb+ma=b \\ nm=m \longrightarrow n=1 \end{cases}$$

$$\therefore\ ba+b+ma=b$$

$$ba+ma=0 \leftarrow \text{trivial si } a=0.$$

Así, el neutro (identidad) para T es $(0,1)$ $\square$

¿Qué ocurre con T cuando A tiene identidad?

Volvemos a ec's: $\begin{cases} ba+ma=0 \\ ab+ma=0 \end{cases}$

$ba+ma=0 \iff 0=a(b+m\cdot 1_A) \leftarrow$ divisor de cero?

$(a,n)=(a,1)$ donde a es divisor de 0 puede servir como elemento identidad de A.

Scanned with CamScanner

Problema 4

A R-álgebra no asociativa. $B = A \times R$,

$\mu : B \times B \to B$, $((x,a),(y,b)) \longmapsto (xy + ay + xb, ab)$

Pd: (a) μ es bilineal

(b) A asociativa $\Rightarrow$ μ asociativa en B con $(0,1)$ identidad en B, luego B es una R-álgebra.

(c) $x \mapsto (x,0)$ isomorfismo de A en un ideal de B.

Dem.

(a) Pd μ bilineal, (B es un R-módulo con $\begin{cases} (a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) \\ \lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b) \end{cases}$)

$$\mu((x,a) + \lambda(y,b), (z,c)) = \mu((x,a) + (\lambda y, \lambda b), (z,c))$$

$$= \mu((x+\lambda y, a+\lambda b), (z,c)) \qquad (x,y,z \in A;\ a,b,c,\lambda \in R)$$

$$= ((x+\lambda y)z + \overbrace{\cancel{az}}^{(a+\lambda b)z} + (x+\lambda y)c, (a+\lambda b)c)$$

$$= (xz + (\lambda y)z + az \underbrace{+}_{+\lambda bz} xc + (\lambda y)c, ac + (\lambda b)c)$$

$$= (xz + \lambda(yz) + az \underbrace{+}_{+\lambda bz} cx + \lambda cy, ac + \lambda bc)$$

Y

$$\mu((x,a),(z,c)) + \lambda\mu((y,b),(z,c))$$

$$= (xz + az + cx, ac) + \lambda(yz + bz + cy, bc)$$

$$= (xz + az + cx, ac) + (\lambda yz + \lambda bz + \lambda cy, \lambda bc)$$

$$= (xz + az + cx + \lambda yz + \lambda bz + \lambda cy, ac + \lambda bc)$$

$$= (xz + \lambda yz + az + \lambda bz + cx + \lambda cy, ac + \lambda bc)$$

$$\therefore \mu((x,a) + \lambda(y,b), (z,c)) = \mu((x,a),(z,c)) + \lambda\mu((y,b),(z,c))$$

Nuevamente la demostración

Obs. B es un R-modulo con $(x,a)+(y,b)=(x+y,a+b)$
$\lambda(x,a)=(\lambda x,\lambda a)$

Pd: μ bilineal. Sean $x,y,z\in A$; $a,b,c,\lambda\in R$

$\mu((x,a)+\lambda(y,b),(z,c))=\mu((x,a)+(\lambda y,\lambda b),(z,c))$
$=\mu((x+\lambda y,a+\lambda b),(z,c))$
$=((x+\lambda y)z+(a+\lambda b)z+(x+\lambda y)c,(a+\lambda b)c)$
$=(xz+(\lambda y)z+az+(\lambda b)z+xc+(\lambda y)c,ac+(\lambda b)c)$

$\mu((x,a),(z,c))+\lambda\mu((y,b),(z,c))$
$=(xz+az+xc,ac)+\lambda(yz+bz+yc,bc)$
$=(xz+az+xc,ac)+(\lambda(yz)+\lambda(bz)+\lambda(yc),\lambda(bc))$
$=(xz+az+xc+\lambda(yz)+\lambda(bz)+\lambda(yc),ac+\lambda(bc))$
$\therefore\ \mu((x,a)+\lambda(y,b),(z,c))=\mu((x,a),(z,c))+\lambda\mu((y,b),(z,c))$

$\mu((x,a),(y,b)+\lambda(z,c))=\mu((x,a),(y+\lambda z,b+\lambda c))$
$=(x(y+\lambda z)+a(y+\lambda z)+x(b+\lambda c),a(b+\lambda c))$
$=(xy+x(\lambda z)+ay+a(\lambda z)+xb+x(\lambda c),ab+a(\lambda c))$

$\mu((x,a),(y,b))+\lambda\mu((x,a),(z,c))$
$=(xy+ay+xb,ab)+\lambda(xz+az+xc,ac)$
$=(xy+ay+xb,ab)+(\lambda(xz)+\lambda(az)+\lambda(xc),\lambda(ac))$
$=(xy+ay+xb+\lambda(xz)+\lambda(az)+\lambda(xc),ab+\lambda(ac))$

Se tiene que $\mu((x,a),(y,b)+\lambda(z,c)) = \mu((x,a),(y,b)) + \lambda\mu((x,a),(z,c))$

siempre y cuando $a(\lambda c) = \lambda(ac)$, $x(\lambda z) = \lambda(xz)$, $a(\lambda z) = \lambda(az)$, $x(\lambda c) = \lambda(xc)$.

(b) Sea A asociativa

Pd: μ asociativa $\Leftrightarrow \mu(\mu((x,a),(y,b)),(z,c)) = \mu((x,a),\mu((y,b),(z,c)))$ $\forall x,y,z \in A$, $\forall a,b,c \in R$

$\therefore$

$$\mu(\mu((x,a),(y,b)),(z,c)) = \mu((xy+ay+xb, ab),(z,c))$$
$$= ((xy+ay+xb)z + (ab)z + (xy+ay+xb)c, (ab)c)$$
$$= ((xy)z + (ay)z + (xb)z + (ab)z + (xy)c + (ay)c + (xb)c, (ab)c)$$

$$\mu((x,a),\mu((y,b),(z,c))) = \mu((x,a),(yz+bz+yc, bc))$$
$$= (x(yz+bz+yc) + a(yz+bz+yc) + x(bc), a(bc))$$
$$= (x(yz) + x(bz) + x(yc) + a(yz) + a(bz) + a(yc) + x(bc), a(bc))$$

A asociativa $\Rightarrow (xy)z = x(yz)$

Debiera cumplirse: $(ay)z = a(yz)$, $(xb)z = x(bz)$, $x(yc) = (xy)c$, $a(yz) = (ay)z$, $a(bz) = (ab)z$, $a(yc) = (ay)c$, $x(bc) = (xb)c$. Obviamente $(ab)c = a(bc)$

$\therefore$ μ es asociativa.

Pd: $(0,1)$ es la identidad en B

$$\Leftrightarrow \mu((0,1),(x,a)) = \mu((x,a),(0,1)) = (x,a) \quad \forall (x,a)\in B$$

$$\mu((0,1),(x,a)) = (0x + 1\cdot x + 0\cdot a, 1a) = (0+x+0, a) = (x,a)$$

$$\mu((x,a),(0,1)) = (x\cdot 0 + a\cdot 0 + x\cdot 1, a\cdot 1) = (0+0+x, a) = (x,a)$$

$\therefore$ $(0,1)$ identidad en B.

Así B es una R-álgebra (Asociativa cuando A es asociativa)

(c) Pd: $x \longmapsto (x,0)$ es isomorfismo de A en ideal en B.

Dem. Es claro que si $\sigma(x) = (x,0)$ $(\sigma: A \longrightarrow B = A\times R)$, entonces $\sigma(x+y) = (x+y, 0) = (x,0) + (y,0) = \sigma(x) + \sigma(y)$

$\sigma(\lambda x) = (\lambda x, 0) = \lambda(x,0) = \lambda\sigma(x)$

$\therefore$ σ es R-lineal

~~Además obviamente, σ es una inmustación (σ inyectiva), A identificado con $\sigma(A) \subset B$, $A \hookrightarrow B$)~~

~~Por demostrar que $\sigma(A) \trianglelefteq A$~~

$\sigma(xy) = (xy, 0)$. $\mu((x,0),(y,0)) = (xy + 0y + x0, 0) = (xy, 0)$

$\therefore$ $\sigma(xy) = \mu((x,0),(y,0))$

$\therefore$ σ homo de R-álgebras

Como σ es inyectiva, define una inmustación $A \hookrightarrow B$ $(A \cong \sigma(A))$. Falta demostrar que $\sigma(A) \trianglelefteq B$.

$\sigma(A)$ subálgebra de B.

Sean $(y,b)\in B$, $\sigma(x)\in\sigma(A)$ $\quad ((y,b)\in B \leftrightarrow y\in A \wedge b\in R)$

$$\mu((y,b),\sigma(x)) = \mu((y,b),(x,0)) =$$
$$= (yx+bx+y\cdot 0,\ b\cdot 0) = (yx+bx,\ 0)\in\sigma(A)$$

ya que $yx+bx\in A$

$$\mu(\sigma(x),(y,b)) = \mu((x,0),(y,b)) = (xy+0\cdot y+x\cdot b,\ 0\cdot b)$$
$$= (xy+xb,\ 0)\in\sigma(A)$$

, ya que $xy+xb\in A$.

$$\therefore\ \sigma(A)\trianglelefteq B.$$

Problema 5. Sea A un álgebra simple. Pruebe que $M_n(A)$ es simple. Sugerencia: Muestre que si J es un ideal no nulo de $M_n(A)$, entonces $\{x \in A \,/\, \varepsilon_{11} x \in J\}$ es un ideal no nulo de A.

Dem. Debemos demostrar que $M_n(A)$ no tiene ideales propios.

Sea $J \trianglelefteq M_n(A)$, $J \neq \{0\}$.

Pd: $\{x \in A \,/\, \varepsilon_{11} x \in J\}$ es un ideal de A.

Sean $x, y \in \{x \in A \,/\, \varepsilon_{11} x \in J\}$, $\lambda \in R$.

Tenemos que $\varepsilon_{11} x \in J$, $\varepsilon_{11} y \in J$ $\therefore$ $\varepsilon_{11} x + \varepsilon_{11} y \in J$ (J submódulo de $M_n(A)$). Pero $\varepsilon_{11}(x+y) = \varepsilon_{11} x + \varepsilon_{11}(y)$

$$\therefore \varepsilon_{11}(x+y) \in J$$

$$\therefore x + y \in \{x \,|\, \varepsilon_{11} x \in J\}$$

Además también $\lambda(\varepsilon_{11} x) = \varepsilon_{11}(\lambda x) \in J$ $\therefore$ $\lambda x \in \{x / \varepsilon_{11} x \in J\}$

$$\therefore \{x \in A \,/\, \varepsilon_{11} x \in J\} \trianglelefteq A \text{ ideal}$$

~~Como $J \neq \{0\}$, $\exists\, \alpha \neq 0$ tal que $\alpha \in J$. Si asumimos que A tiene unidad 1_A (En caso contrario ε_{11} no tiene sentido), entonces podemos decir que $\alpha \in J \Rightarrow \varepsilon_{11} \alpha \in J$ $\therefore$ $\alpha \in A$ (Mediante $A \hookrightarrow M_n(A)$, $\alpha \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$)~~

~~$\therefore \{x \in A \,/\, \varepsilon_{11} x \in J\} = A$ (A simple)~~

Problema 6: Clasificación de una F-álgebra de dimensión 2, donde $\operatorname{char} F \neq 2$.

(a). operador multiplicación izquierdo: $L_a : A \longrightarrow A$, $x \longmapsto ax$

$A = x_1 F_1 \oplus x_2 F_2$ F-álgebra (F-espacio vectorial)

Pd: A isomorfa a una F-álgebra tal que $L_{x_1} = id_A$ y

$(L_{x_2}) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in F$.

$L_{x_2}(\alpha x_1 + \beta x_2) = x_2(\alpha \cancel{x_1} + \beta x_2) = \alpha x_2 x_1 + \beta x_2^2$