Cálculo Diferencial (MAT170)
Clase 7

Prof. Marco Godoy
marco.godoy@edu.udla.cl

Abril 2019

1 Identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas más usadas, a la hora de resolver problemas son las siguientes:

1. Las usuales, asociadas al teorema de Pitágoras en el círculo unitario:

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) + \cos(\alpha) &= 1, \\ 1 + \tan^2(\alpha) &= \sec^2(\alpha), \\ 1 + \cot^2(\alpha) &= \csc^2(\alpha). \end{aligned}$$

2. Suma de ángulos:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha), \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta). \end{aligned}$$

Ejemplo 1. *Ocupando las identidades trigonométricas de arriba, demuestre lo siguiente:*

$$\frac{\cos(\alpha)}{1 + \sin(\alpha)} + \frac{1 + \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 2\sec(\alpha).$$

Desarrollo. Este es un trabajo netamente algebraico:

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos(\alpha)}{1+\sin(\alpha)} + \frac{1+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} &= \frac{\cos^2(\alpha) + (1+\sin(\alpha))^2}{\cos(\alpha)(1+\sin(\alpha))} \\
&= \frac{\cos^2(\alpha) + 1 + \sin^2(\alpha) + 2\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)(1+\sin(\alpha))} \\
&= \frac{1 + (\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)) + 2\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)(1+\sin(\alpha))} \\
&= \frac{2 + 2\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)(1+\sin(\alpha))} \\
&= \frac{2(1+\sin(\alpha))}{\cos(\alpha)(1+\sin(\alpha))} \\
&= \frac{2}{\cos(\alpha)} \\
&= 2\sec(\alpha)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se cumple que $\dfrac{\cos(\alpha)}{1+\sin(\alpha)} + \dfrac{1+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 2\sec(\alpha)$.

2 Gráfica de funciones trigonométricas y ecuaciones trigonométricas

Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación en el que está involucrada alguna función trigonométrica. Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\sin(x^2) + x^2 &= 1 + x, \\
\cos(x+5) &= \sin(x) + 6.
\end{aligned}
$$

En el contexto de este curso, sólo nos interesa resolver ecuaciones trigométricas del tipo:

$$\sin(\alpha) = a, \tag{2.1}$$
$$\cos(\beta) = b, \tag{2.2}$$

donde $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ y $a, b \in [-1, 1]$. Por lo que **toda ecuación trigométrica que aparezca en un problema debe ser transformada, mediante operaciones algebraicas e identidades trigonométricas, a una ecuación trigonométrica del tipo 2.1 o 2.2.** Para saber cómo resolver cómo resolver las ecuaciones trigonométricas 2.1, 2.2, se necesita saber los gráficos de las funciones seno y coseno en el intervalo $[0, 2\pi]$

Proposición 1. *Se cumple:*

1. $\sin(\pi - \alpha) = sin(x)$,
2. $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$.

Con ayuda de la Proposición 1, más la ayuda de las Figuras 1,2:

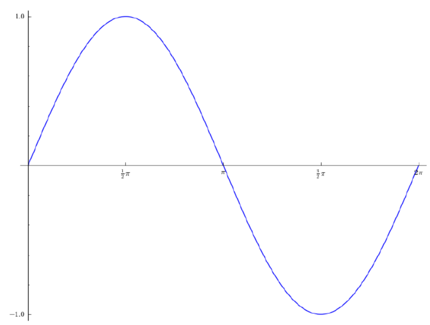

Figure 1: Gráfica de la función seno en $[0, 2\pi]$

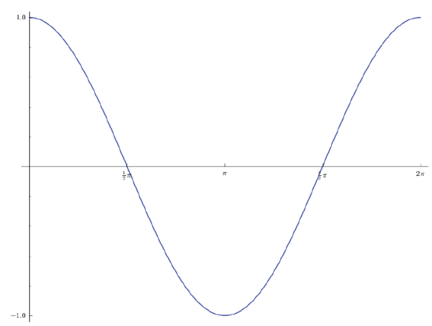

Figure 2: Gráfica de la función coseno en $[0, 2\pi]$

Proposición 2. *Se cumple:*

1. *Si* $\alpha = \alpha_0$ *es una solución de la ecuación* $\sin(\alpha) = a$ *para* $\alpha \in [0, 2\pi]$, *es decir*

$$\sin(\alpha_0) = a,$$

entonces $\alpha = \pi - \alpha_0$ *también es una solución de la ecuación. El número* α_0 *se escribe como*

$$\alpha_0 = \arcsin(a).$$

Se lee ***el arcoseno de*** a.

2. *Si* $\alpha = \alpha_0$ *es una solución de la ecuación* $\cos(\alpha) = b$ *para* $\alpha \in [0, 2\pi]$, *es decir*

$$\cos(\alpha_0) = b,$$

entonces $\alpha = 2\pi - \alpha_0$ *también es una solución de la ecuación. El número* α_0 *se escribe como*

$$\alpha_0 = \arccos(b).$$

Se lee ***el arcocoseno de*** b.

Ejemplo 2. *Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica:*

$$\sin(2\alpha) - \sin(\alpha) = 0,$$

en el intervalo $[0, 2\pi]$.

3 Problemas propuestos

P1. Demuestre que $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$.

P2. Para el intervalo $[0, 2\pi]$, resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $\cos(x) = \dfrac{2\tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$
2. $\cos(2x) = \sin(x)$
3. $\cos(2x) + \cos(-x) = 0$.