Cálculo Diferencial (MAT170)
Clase 6

Prof. Marco Godoy
marco.godoy@edu.udla.cl

Abril 2019

1 Trigonometría en el triangulo rectángulo

1.1 Las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente

Considere el siguiente triángulo rectángulo a continuación. Es posible estudiar las razones trigonométricas en ángulos α, β tales que:

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$
$$0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Los lados opuestos a los ángulos α y β se llaman catetos, mientras que la **hipotenusa** es el lado opuesto al ángulo $\frac{\pi}{2}$ (representado por un cuadrado pequeño donde va dicho ángulo). Un cateto es **adyacente** u **opuesto** a un ángulo, si como segmento forma parte de la abertura que define dicho ángulo. Por ejemplo, en la Figura 1, el lado a es un cateto opuesto al álgulo α, mientras que b es un cateto adyacente. Se definen las funciones trigométricas a continuación:

$$seno = \frac{cateto\, opuesto}{hipotenusa}$$
$$coseno = \frac{cateto\, adyacente}{hipotenusa}$$
$$tangente = \frac{cateto\, opuesto}{cateto\, adyacente}$$

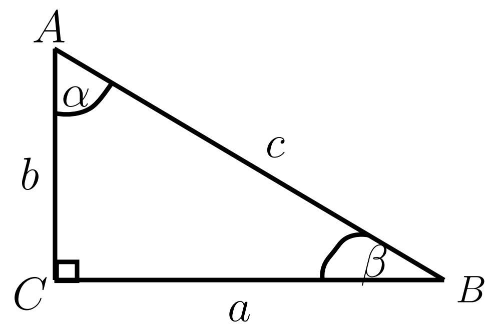


Figure 1: Triángulo rectángulo

1.2 Otras funciones trigonométricas

Aparte de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, se definen las funciones trigonométricas **secante**, **cosecante** y **cotangente** como:

$$\begin{aligned} \sec(\alpha) &= \frac{1}{\cos(\alpha)} \\ \csc(\alpha) &= \frac{1}{\sin(\alpha)} \\ \cot(\alpha) &= \frac{1}{\tan(\alpha)} \end{aligned}$$

2 Trigonometría en el círculo unitario

2.1 Definición y ejemplos

Es posible estudiar las razones trigonométricas en el **plano cartesiano**, mediante el círculo unitario (círculo de radio 1), como se muestra en la Figura 2 Es posible estudiar las razones trigonométricas en ángulos α, β tales que:

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\ 0 \leq \beta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 1. *En la Figura 3 algunos ejemplos.*

2.2 Extensión de funciones trigonométricas para ángulos negativos

Es posible extender el dominio de las funciones trigonométricas seno y coseno a ángulos negativos ocupando el círculo unitario, de la siguiente manera como se muestra en la Figura 4. La diferencia está es que ahora el ángulo se mide en sentido **horario**, es decir, siguiendo el movimiento

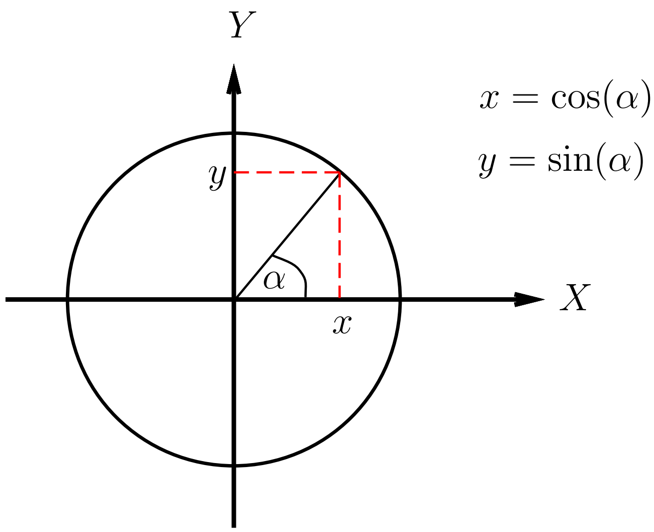


Figure 2: Funciones trigonométricas en el círculo unitario

de las manecillas del reloj. Para saber el valor de las funciones seno y coseno con ángulos negativos, ocuparemos el siguiente resultado:

Proposición 1. *Se cumplen las siguientes igualdades:*

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

Ejemplo 2. *Calcule* $\sin(-\pi/4)$ *y* $\cos(-\pi/4)$.

Desarrollo.

$$\sin(-\pi/4) = -\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2,$$
$$\cos(-\pi/4) = -\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2,$$

Observación 1. *El resto de las funciones trigométricas: tangente, cotangente, secante y cosecante se calculan de la misma manera que en la Subsección 1.2.*

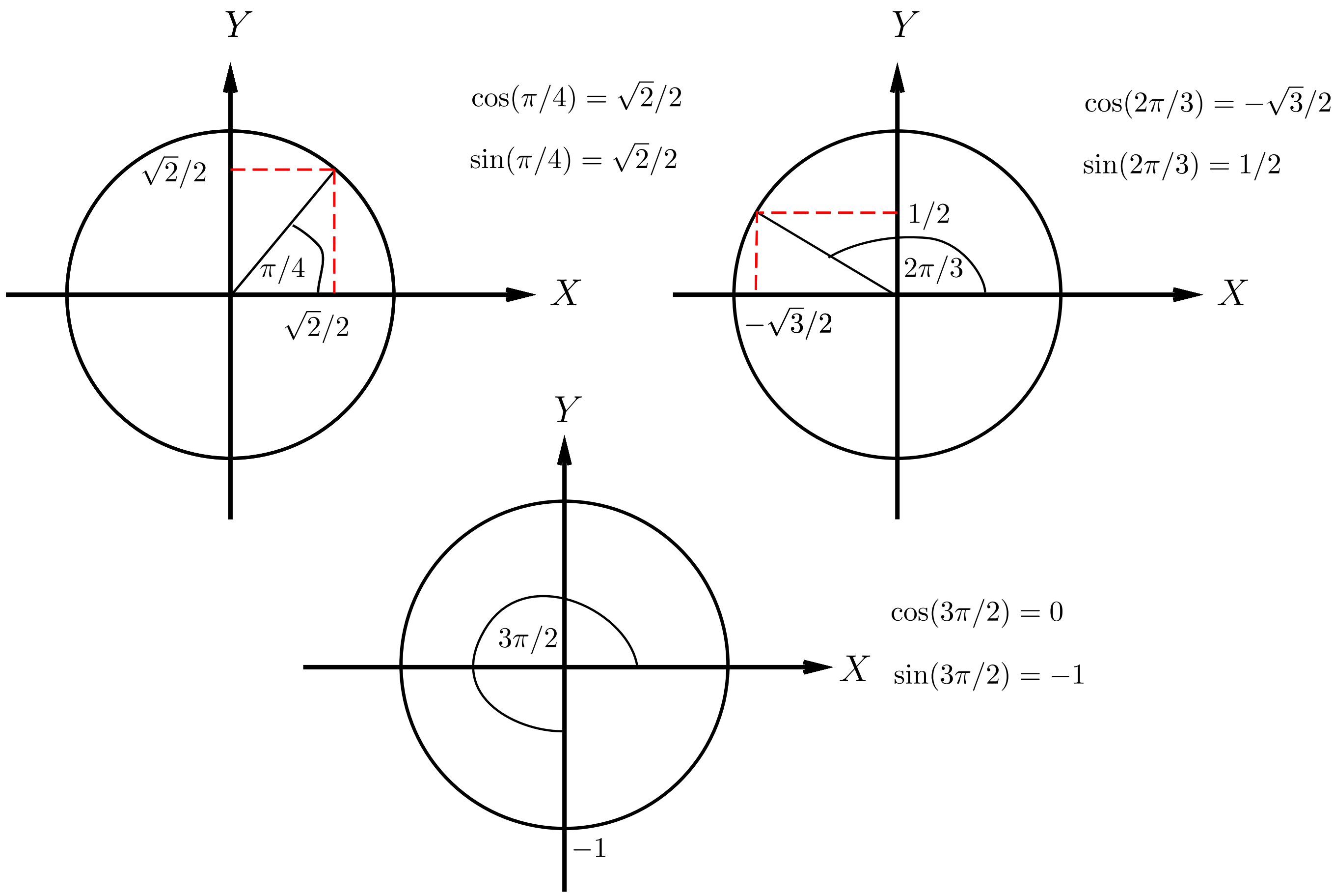


Figure 3: razones trigonométricas de distintos ángulos en el círculo unitario

3 Problemas propuestos

1. Ocupando el triángulo rectángulo, resuelva los siguientes problemas:
   1. Si $\alpha = 60^o$, $c = 13$. Calcule a y b.
   2. Si $\alpha = 45^o$, $c = 15$. Calcule a y b.
   3. Si $\beta = \dfrac{\pi}{6}$, $a = 5$. Calcule b y c.
   4. Si $\beta = 50^o$, $b = 8$. Calcule a y c.
   5. Si $a = 3$, $b = 4$. Calcule α, β. Exprese su resultado en grados sexagesimales y en radianes.
2. Desde la parte superior de un edificio, que mide 100 pies de altura, un hombre observa un automóvil que se desplaza frente al edificio (Figura 2). Si el ángulo de depresión del automóvil

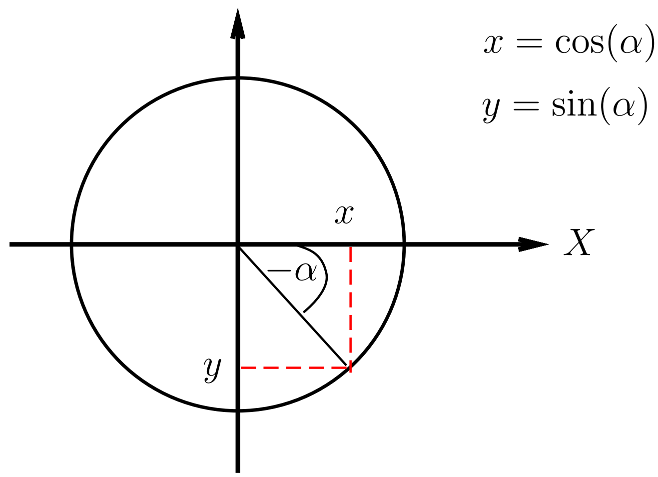
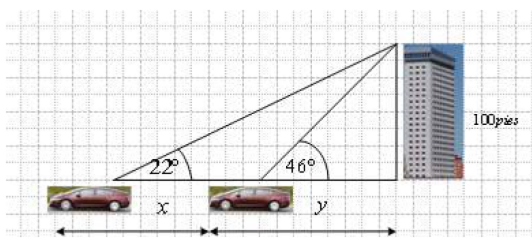


Figure 4: Círculo unitario y ángulos negativos

cambia de 46^o a 22^o durante el periodo de observación, cuánto se ha trasladado el automóvil?



3. Ocupando el círculo unitario y las definiciones de las funciones trigonométricas, resuelva lo siguiente:

   1. Demuestre que $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.
   2. Demuestre que $\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2(\alpha)$.
   3. Demuestre la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{\cos(\alpha)}{1+\sin(\alpha)} + \frac{1+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 2\sec(\alpha).$$