Exercice 13 : Couche limite ; plaque plane

$$\frac{U(x,y)}{U_\infty(x)} = a\cos(\alpha\eta) + b\sin(\beta\eta), \qquad \eta(x) = \frac{y}{\delta(x)} \tag{1}$$

1 Déduire les paramètres à partir des CL

On cherche a, α, b, β dépendant à priori de x.

On écrit de manière indifférenciée U_E, U_∞, la vitesse au loin.

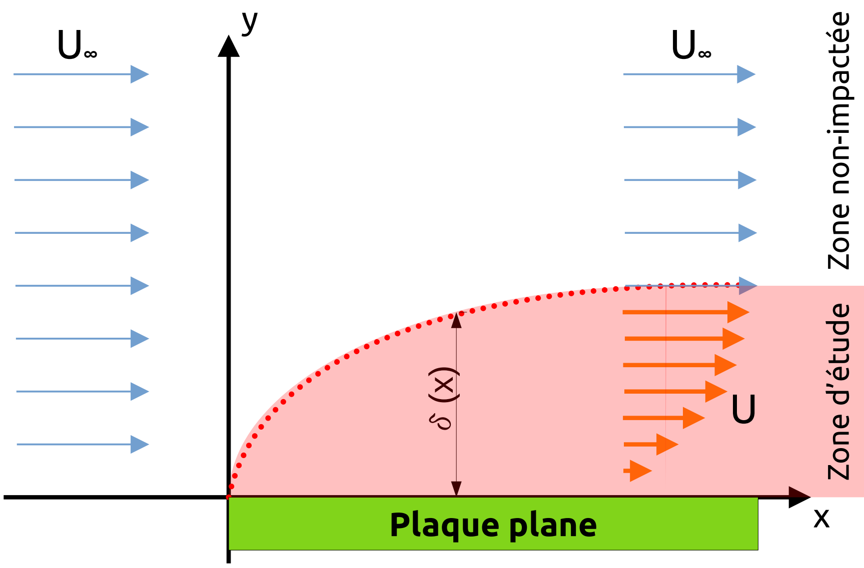

FIGURE 1 – schéma représentatif

Si $0 < \eta < 1$, la vitesse est variable, on est dans la zone d'étude.
Si $\eta > 1$, la vitesse est constante, on est hors de la zone d'étude

On remarque trois conditions aux limites :

$$\begin{cases} U(x,y)|_{\eta=0} = 0 \\ U(x,y)|_{\eta=1} = U_\infty \\ \left.\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial \eta}\right|_{\eta=1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a = 0} \\ \boxed{b\sin(\beta) = 1} \\ \boxed{b\cos(\beta) = 0} \end{cases}$$

Détail des résultats ci-dessus :

Le premier résultat, trivial, nous conduit à l'expression de U suivante :

$$U(x,y) = U_\infty b\sin(\beta\eta) \tag{2}$$

Ensuite il faut se servir de cette nouvelle expression de U pour utiliser la deuxième puis la troisième CL (Attention, pour cette dernière il faut d'abord dériver et ENSUITE évaluer en $\eta = 1$, sinon on ne déduit rien) :

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial \eta} = U_\infty b \cdot \frac{\partial}{\partial \eta}\Big(\sin(\beta\eta)\Big) = U_\infty b\beta\cos(\beta\eta)$$

D'après la CL :

$$\left.\frac{\partial U(x,y)}{\partial \eta}\right|_{\eta=1} = 0 \Leftrightarrow U_\infty b\beta\cos(\beta) = 0$$

Cette relation est vraie si et seulement si au moins un des trois termes est nul. Or, U_∞ ne peut pas être nul (sinon il n'y a pas d'écoulement) ; β ne peut pas être nul non plus (sinon le profil de vitesse (2) serait nul).
On en déduit donc : $\boxed{b\cos(\beta) = 0}$

On utilise ce que l'on a déduit de la 2e et la 3e CL :

Somme terme à terme et élévation au carré :

$$\begin{cases} b\sin\beta = 1 \\ b\cos(\beta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad b^2 \cdot \cancel{\Big(\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta)\Big)} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ \text{ou} \\ b = -1 \end{cases}$$

Or, si $b = -1$, l'écoulement serait dans l'autre sens, ce n'est pas envisagé dans le cadre de ce problème, donc ce n'est pas la solution que l'on retient :

$$\boxed{b = 1}$$

Ce qui nous permet également de déduire $\boxed{\beta = \frac{\pi}{2}}$.

Rigoureusement $\beta = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ mais on ne retient que la première solution.

On peut réécrire le champ de vitesse :

$$U(x,y) = U_\infty \sin\Big(\frac{\pi\eta}{2}\Big) \tag{3}$$

2 On cherche les grandeurs caractéristiques suivantes :

$$\delta^*, \theta, \tau_p$$

Il est nécessaire de connaître leur expression et de savoir à quoi elles correspondent :

épaisseur de déplacement	$\delta^*(x) = \int_0^{+\infty} \Big(1 - \frac{U}{U_0}\Big) dy$
épaisseur de quantité de mouvement	$\theta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{U}{U_0}\Big(1 - \frac{U}{U_0}\Big) dy$
contrainte de cisaillement à la paroi	$\tau_p = \mu \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right\|_{y=0}$

TABLE 1 – rappel de cours (à connaître par cœur)

Solutions :

2.1 Epaisseur de déplacement

$$\boxed{\frac{\delta^*(x)}{\delta(x)} = \frac{\pi - 2}{\pi} = 0,363} \tag{4}$$

2.2 Epaisseur de quantité de mouvement

$$\boxed{\frac{\theta(x)}{\delta(x)} = \frac{4 - \pi}{2\pi} = 0,136} \tag{5}$$

2.3 Contrainte de cisaillement à la paroi

$$\boxed{\tau_p = \frac{\mu \cdot U_\infty \cdot \pi}{2\delta(x)}} \tag{6}$$

Pour trouver les relations (4) et(5), un changement de variable a été réalisé.

Développements en annexes.

3 Equation de Von-Karman

ATTENTION : L'ÉQUATION DE VON-KARMAN DONNÉE DANS LE SUJET EST FAUSSE

Les calculs précédent on été réalisés dans le but d'injécter les solutions dans l'équation de Von-Karman (qui sera donnée à l'examen) :

$$\frac{d}{dx}\Big(U_\infty^2 \theta(x)\Big) + U_\infty \frac{d}{dx}\Big(U_\infty\Big)\delta^*(x) = \frac{\tau_p}{\rho}$$

On cherche $\delta(x)$, la loi d'épaisseur de la couche limite.

Notre résultat doit être proche de la *solution de Blasius* fournie page 162 du cours (diapo n°324)

Solution de Blasius pour l'épaisseur de couche limite
$$\frac{\delta(x)}{x} \approx 4,9 \cdot \frac{1}{\sqrt{R_e}}$$

TABLE 2 – rappel de cours

Le terme est absent de l'équation donnée, mais il apparaîtra en injectant les résultats précédents :

rappel : $\boxed{\frac{\mu}{\rho} = \nu}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\Big(U_\infty^2\theta(x)\Big) + U_\infty\cancel{\frac{d}{dx}\Big(U_\infty\Big)}\delta^*(x) &= \frac{\tau_p}{\rho} \\
U_\infty^{\cancel{2}} \cdot \frac{d}{dx}\Big(0,136 \cdot \delta(x)\Big) &= \frac{\mu \cdot \cancel{U_\infty} \cdot \pi}{2 \cdot \rho \cdot \delta(x)} \\
\delta(x) \cdot d\delta(x) &= \frac{\nu \cdot \cdot \pi}{0,272 \cdot U_\infty} dx \\
\int \delta(x) \cdot d\delta(x) &= \int \frac{\nu \cdot \cdot \pi}{0,272 \cdot U_\infty} dx \\
\frac{\delta(x)^2}{2} &= \Big(\frac{\nu \cdot \cdot \pi}{0,272 \cdot U_\infty}\Big) x + \cancel{K}
\end{aligned}$$

Constante nulle : l'épaisseur de couche limite est nulle en $x = 0$

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{2x \cdot \nu \cdot \cdot \pi}{0,272 \cdot U_\infty}}$$

On cherche à isoler la partie numérique et à faire apparaître dans l'expression $R_e = \frac{\rho U x}{\mu} = \frac{U x}{\nu}$:

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{2x^2 \cdot \nu \cdot \cdot \pi}{0,272 \cdot U_\infty \cdot x}}$$

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{0,272}} \cdot \sqrt{\frac{x^2 \cdot \nu}{U_\infty \cdot x}}$$

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{0,272}} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{R_e}}$$

$$\boxed{\delta(x) = 4,81 \cdot \frac{x}{\sqrt{R_e}}}$$

On respecte la loi de Blasius (voir table 2).

4 Annexes

4.1 Relation (4)

$$\begin{aligned}
\delta^*(x) &= \int_0^{+\infty} \Big(1 - \frac{U}{U_0}\Big) dy,\ \text{cours} \\
&= \int_0^{+\infty} \Big(1 - \frac{U(x,y)}{U_\infty}\Big) dy,\ \text{avec nos paramètres} \\
&= \int_0^{\delta(x)} \Big(1 - \frac{U(x,y)}{U_\infty}\Big) dy + \cancel{\int_{\delta(x)}^{+\infty} \Big(1 - \frac{U(x,y)}{U_\infty}\Big) dy}
\end{aligned}$$

car au-delà de la distance $\delta(x)$, $\dfrac{U(x,y)}{U_\infty} = 1$ (voir schéma)

$$\begin{aligned}
\delta^*(x) &= \int_0^{\delta(x)} \Big(1 - \frac{U_\infty \sin\big(\frac{\pi\eta}{2}\big)}{U_\infty}\Big) dy \\
&= \int_0^{\delta(x)} \Big(1 - \sin\Big(\frac{\pi\eta}{2}\Big)\Big) dy
\end{aligned}$$

On divise tout par $\delta(x)$ dans le but de faire le changement de variable qui nous permettra d'intégrer par η :

$$\frac{\delta^*(x)}{\delta(x)} = \int_0^{\frac{\delta(x)}{\delta(x)}} \Big(1 - \sin\Big(\frac{\pi\eta}{2}\Big)\Big) \frac{dy}{\delta(x)}$$

d'après la définition de η, (voir relation (1)), $\dfrac{dy}{\delta(x)} = d\eta$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^*(x)}{\delta(x)} &= \int_0^1 \Big(1 - \sin\Big(\frac{\pi\eta}{2}\Big)\Big) d\eta \\
&= \int_0^1 d\eta - \int_0^1 \sin\Big(\frac{\pi\eta}{2}\Big) d\eta \\
&= 1 + \frac{2}{\pi}\Big[\cos\Big(\frac{\pi\eta}{2}\Big)\Big]_0^1 \\
&= 1 + \frac{2}{\pi}\Big(\cancel{\cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big)} - \cos(0)\Big) \\
&= 1 - \frac{2}{\pi} \\
\frac{\delta^*(x)}{\delta(x)} &= \frac{\pi - 2}{\pi}
\end{aligned}$$

4.2 Relation (5)

$$\begin{aligned}
\theta(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{U}{U_0}\Big(1-\frac{U}{U_0}\Big)dy,\ \text{cours}\\
&= \int_0^{+\infty} \frac{U(x,y)}{U_\infty}\Big(1-\frac{U(x,y)}{U_\infty}\Big)dy,\ \text{avec nos paramètres}\\
&= \int_0^{\delta(x)} \frac{U(x,y)}{U_\infty}\Big(1-\frac{U(x,y)}{U_\infty}\Big)dy + \cancel{\int_{\delta(x)}^{+\infty} \frac{U(x,y)}{U_\infty}\Big(1-\frac{U(x,y)}{U_\infty}\Big)dy}
\end{aligned}$$

car au-delà de la distance $\delta(x)$, $\dfrac{U(x,y)}{U_\infty} = 1$ (voir schéma)

$$\begin{aligned}
\theta(x) &= \int_0^{\delta(x)} \frac{U(x,y)}{U_\infty}\Big(1-\frac{U(x,y)}{U_\infty}\Big)dy\\
&= \int_0^{\delta(x)} \frac{U_\infty \sin\Big(\frac{\pi\eta}{2}\Big)}{U_\infty}\Big(1-\frac{U_\infty \sin\Big(\frac{\pi\eta}{2}\Big)}{U_\infty}\Big)dy\\
&= \int_0^{\delta(x)} \sin\Big(\frac{\pi\eta}{2}\Big)dy - \int_0^{\delta(x)} \sin^2(\frac{\pi\eta}{2})dy
\end{aligned}$$

On divise tout par $\delta(x)$ dans le but de faire le changement de variable qui nous permettra d'intégrer par η :

$$\frac{\theta(x)}{\delta(x)} = \int_0^{\frac{\delta(x)}{\delta(x)}} \sin\Big(\frac{\pi\eta}{2}\Big)\frac{dy}{\delta(x)} - \int_0^{\frac{\delta(x)}{\delta(x)}} \sin^2(\frac{\pi\eta}{2})\frac{dy}{\delta(x)}$$

d'après la définition de η, (voir relation (1)), $\dfrac{dy}{\delta(x)} = d\eta$

$$\frac{\theta(x)}{\delta(x)} = \int_0^1 \sin\Big(\frac{\pi\eta}{2}\Big)d\eta - \int_0^1 \sin^2(\frac{\pi\eta}{2})d\eta$$

Pour trouver la primitive du sinus carré, on utilise l'astuce la plus commune qui consiste à remplacer selon la relation trigonométrique suivante (à connaître) :

$$\boxed{\sin^2(\phi) = \frac{1}{2}\cdot(1-\cos(2\cdot\phi),\ \forall\phi\in\mathbb{R}}$$

En injectant et développant :

$$\begin{aligned}
\frac{\theta(x)}{\delta(x)} &= \int_0^1 \sin\Big(\frac{\pi\eta}{2}\Big)d\eta - \int_0^1 \frac{1}{2}d\eta + \int_0^1 \cos\Big(2\cdot\frac{\pi\eta}{2}\Big)d\eta\\
&= -\frac{2}{\pi}\Big[\cos\Big(\frac{\pi\eta}{2}\Big)\Big]_0^1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\Big[\sin(\pi\eta)\Big]_0^1\\
&= -\frac{2}{\pi}(0-1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}(0-0)\\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\\
\frac{\theta(x)}{\delta(x)} &= \frac{4-\pi}{2\pi}
\end{aligned}$$

4.3 Relation (6)

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0}$$

On dérive l'expression de la vitesse (3) en replaçant η par son expression (1) :

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(U(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(U_\infty \sin\Big(\frac{\pi\eta}{2}\Big)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(U_\infty \sin\Big(\frac{\pi y}{2 \cdot \delta(x)}\Big)\Big) = \frac{\pi U_\infty}{2 \cdot \delta(x)} \cos\Big(\frac{\pi y}{2 \cdot \delta(x)}\Big)$$

On évalue en $y = 0$:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\pi U_\infty}{2 \cdot \delta(x)}$$

Ainsi :

$$\tau_p = \frac{\mu \pi U_\infty}{2 \cdot \delta(x)}$$