Thème 2

Chapitre II : Equations des conservation en mécanique des fluides

04/11/2024

Source : P. TRAORE, S. AMIROUDINE. Simulation numérique en mécanique des fluides. Tomaison. Cépaduès. Toulouse, 2021, 414p.

Sommaire

Sommaire

Les équations de conservations qui suivent seront retrouvées par application du **théorème du transport de Reynolds** que voici :

Soit Φ une grandeur extensive définie pour un volume V quelconque, ψ la densité volumique de Φ : $\Phi = \iiint_{V(t)} \psi dV$

Les équations de conservations qui suivent seront retrouvées par application du **théorème du transport de Reynolds** que voici :

Soit Φ une grandeur extensive définie pour un volume V quelconque, ψ la densité volumique de Φ : $\Phi = \iiint_{V(t)} \psi dV$

Théorème du transport de Reynolds

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint\limits_{V(t)} \psi dV = \iiint\limits_{V(t)} \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \oiint\limits_{S(t)} \psi \vec{u} \cdot \vec{n} dS \qquad (1)$$

Principe de conservation de la masse : $\dfrac{dm}{dt} = 0$

Principe de conservation de la masse : $\dfrac{dm}{dt} = 0$

$$m = \iiint\limits_{V(t)} \rho dV$$

Principe de conservation de la masse : $\dfrac{dm}{dt} = 0$

$$m = \iiint\limits_{V(t)} \rho dV$$

D'après le théorème du transport de Reynolds :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint\limits_{V(t)} \rho dV = \iiint\limits_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oiint\limits_{S(t)} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \tag{2}$$

$$\iiint\limits_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint\limits_{V(t)} div\left(\rho \vec{u}\right) dV = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \vec{u}\right) = 0 \tag{4}$$

Equation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \vec{u}\right) = 0 \quad (5)$$

D'après la deuxième loi de Newton du mouvement : $\dfrac{d(m\vec{u})}{dt} = \sum \vec{f}$

$$m\vec{u} = \iiint_{V(t)} \rho\vec{u}dV$$

D'après le théorème du transport de Reynolds :

$$\frac{d(m\vec{u})}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_{V(t)} \rho\vec{u}dV = \sum \vec{f} \tag{6}$$

$$\iiint_{V(t)} \frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t}dV + \oint\!\!\!\oint_{S(t)} (\rho\vec{u})\vec{u}\cdot\vec{n}dS = \sum \vec{f} \tag{7}$$

Les forces qui s'appliquent sur notre volume de contrôle sont de deux types :

- Les forces de surface
- Les forces de volume

Les forces qui s'appliquent sur notre volume de contrôle sont de deux types :

- Les forces de surface
- Les forces de volume

$$\iiint_{V(t)} \frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} dV + \oiint_{S(t)} (\rho\vec{u})\vec{u}\cdot\vec{n}dS = \sum \vec{f} \tag{8}$$

$$\iiint_{V(t)} \frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} dV + \oiint_{S(t)} (\rho\vec{u})\vec{u}\cdot\vec{n}dS = \oiint_{S(t)} \bar{\bar{\sigma}}\cdot\vec{n}dS + \iiint_{V(t)} \vec{f_b}dV \tag{9}$$

$$\iiint_{V(t)} \frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} dV + \iiint_{V(t)} div(\rho\vec{u}\vec{u})dV = \iiint_{V(t)} div\left(\bar{\bar{\sigma}}\right)dV + \iiint_{V(t)} \vec{f_b}dV \tag{10}$$

Considérant le volume de contrôle infinitésimale :

$$\iiint\limits_{V(t)} \frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} dV + \iiint\limits_{V(t)} div(\rho\vec{u}\vec{u}) dV = \iiint\limits_{V(t)} div\left(\bar{\bar{\sigma}}\right) dV + \iiint\limits_{V(t)} \vec{f_b} dV \quad (11)$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + div(\rho\vec{u}\vec{u}) dV = div\left(\bar{\bar{\sigma}}\right) + \vec{f_b} \quad (12)$$

Principe de conservation de l'énergie : la variation temporelle de l'énergie totale (E) vaut la puissance associée aux forces extérieures plus la puissance calorifique : $\frac{dE}{dt} = (\bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{u} + \vec{f_b} \cdot \vec{u} - div(\vec{q})$
Par ailleurs : $E = \iiint_{V(t)} \rho\big(e + \frac{u^2}{2}\big) dV$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint\limits_{V(t)} \rho\big(e + \frac{u^2}{2}\big) dV = (\bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{u} + \vec{f_b} \cdot \vec{u} - div(\vec{q}) \tag{13}$$

$$= \iiint\limits_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t}\big(\rho e + \frac{\rho u^2}{2}\big) dV + \oiint\limits_{S(t)} \big(\rho e + \frac{\rho u^2}{2}\big) \vec{u} \cdot \vec{n} dS \tag{14}$$

$$= \oiint\limits_{S(t)} (\bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{u} dS + \iiint\limits_{V(t)} \vec{f_b} \cdot \vec{u} dV - \iiint\limits_{V(t)} div(\vec{q}) dV \tag{15}$$

Equation de conservation de l'énergie totale

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e + \frac{\rho u^2}{2}\right) + div\left(\left(\rho e + \frac{\rho u^2}{2}\right)\vec{u}\right) = div\left(\left(\bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n}\right) \cdot \vec{u}\right) + \vec{f_b} \cdot \vec{u} - div(\vec{q}) \tag{16}$$

Equation de conservation de l'énergie cinétique (12· $\vec{u}$)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho u^2}{2}\right) + div\left(\frac{\rho u^2}{2}\vec{u}\right) = div\left(\bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{u}\right) + \vec{f_b} \cdot \vec{u} \tag{17}$$

Equation de conservation de l'énergie interne (16 - 17)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + div(\rho e\vec{u}) = div(\bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \cdot div\left(\bar{\bar{\sigma}}\right) - div\left(\vec{q}\right) \tag{18}$$

Sommaire

Écoulement incompressible et non visqueux

On néglige la compressibilité : $\rho = cste$

On néglige la compressibilité : $\rho = cste$

- $\nabla \cdot \vec{u} = 0$
- $\rho[\ \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}\ ] = -\nabla p + \nabla \cdot [\ \mu\ (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t)\ ] + \vec{f_b}$

On néglige la compressibilité : $\rho = cste$

- $\nabla \cdot \vec{u} = 0$
- $\rho[\ \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}\ ] = -\nabla p + \nabla \cdot [\ \mu\ (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t)\ ] + \vec{f_b}$

On néglige les effets de viscosité : $\bar{\bar{\tau}} = 0$

On néglige la compressibilité : $\rho = cste$

- $\nabla \cdot \vec{u} = 0$
- $\rho[\ \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}\ ] = -\nabla p + \nabla \cdot [\ \mu\ (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t)\ ] + \vec{f_b}$

On néglige les effets de viscosité : $\bar{\bar{\tau}} = 0$

- $\nabla \cdot \vec{u} = 0$
- $\rho[\ \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}\ ] = -\nabla p + \vec{f_b}$

(Équation d'Euler)

Équations de Navier-Stokes

- $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$
- $\dfrac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}\vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot [\ \mu\ (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t)\ ] - \dfrac{2}{3} \nabla (\mu \nabla \cdot \vec{u}) + \vec{f_b}$

On pose : $\nabla \wedge \vec{u} = \vec{0}$; $\vec{u} = \nabla \phi$

Équations de Navier-Stokes

- $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$
- $\dfrac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot [\ \mu\ (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t)\ ] - \dfrac{2}{3} \nabla (\mu \nabla \cdot \vec{u}) + \vec{f_b}$

On pose : $\nabla \wedge \vec{u} = \vec{0}$; $\vec{u} = \nabla \phi$

$$\nabla \wedge (\nabla \phi) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{19}$$

Équations de Navier-Stokes

- $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$
- $\dfrac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}\vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot [\ \mu\ (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t)\ ] - \dfrac{2}{3} \nabla (\mu \nabla \cdot \vec{u}) + \vec{f_b}$

On pose : $\nabla \wedge \vec{u} = \vec{0}$; $\vec{u} = \nabla \phi$

$$\nabla \wedge (\nabla \phi) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (19)$$

- $\nabla \cdot (\nabla \phi) = \Delta \phi = 0$ (Équation de Laplace)

Écoulement potentiel

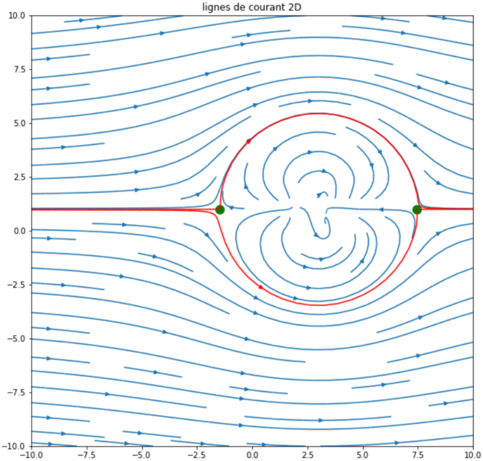

Figure – Lignes de courant d'un écoulement 2D ; Solide fermé de Rankine

Équations de Navier-Stokes

- $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$
- $\dfrac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}\vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot [\ \mu\ (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t)\ ] - \dfrac{2}{3}\nabla(\mu \nabla \cdot \vec{u}) + \vec{f_b}$

On néglige les effets inertiels : $\nabla \cdot (\vec{u}\vec{u})$

- $\dfrac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} = -\nabla p + \nabla \cdot [\ \mu\ (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t)\ ] - \dfrac{2}{3}\nabla(\mu \nabla \cdot \vec{u}) + \vec{f_b}$

Équations de Navier-Stokes

- $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$
- $\dfrac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}\vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot [\ \mu\ (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t)\ ] - \dfrac{2}{3}\nabla(\mu \nabla \cdot \vec{u}) + \vec{f_b}$

On néglige les effets inertiels : $\nabla \cdot (\vec{u}\vec{u})$

- $\dfrac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} = -\nabla p + \nabla \cdot [\ \mu\ (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t)\ ] - \dfrac{2}{3}\nabla(\mu \nabla \cdot \vec{u}) + \vec{f_b}$

Propriétés du fluide constante : linéarisation de l'équation

- $\dfrac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{u}) + \vec{f_b}$

Équations de Navier-Stokes

- $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$
- $\dfrac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}\vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot [\ \mu\ (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t)\ ] - \dfrac{2}{3}\nabla(\mu \nabla \cdot \vec{u}) + \vec{f_b}$

On néglige les effets inertiels : $\nabla \cdot (\vec{u}\vec{u})$

- $\dfrac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} = -\nabla p + \nabla \cdot [\ \mu\ (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t)\ ] - \dfrac{2}{3}\nabla(\mu \nabla \cdot \vec{u}) + \vec{f_b}$

Propriétés du fluide constante : linéarisation de l'équation

- $\dfrac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{u}) + \vec{f_b}$

Vitesse très faible : on néglige le terme instationnaire

- $\nabla \cdot (\mu \nabla \vec{u}) - \nabla p + \vec{f_b} = \vec{0}$ (Equation de Stokes)

Équations de Navier-Stokes

- $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$
- $\dfrac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}\vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot [\ \mu\ (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t)\ ] - \dfrac{2}{3}\nabla(\mu \nabla \cdot \vec{u}) + \vec{f_b}$

Approximation de Boussinesq : ρ variable seulement dans le terme de gravité

- $\vec{f_b} = (\rho - \rho_0)\vec{g}$

Équations de Navier-Stokes

- $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$
- $\dfrac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot [\ \mu\ (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t)\ ] - \dfrac{2}{3} \nabla (\mu \nabla \cdot \vec{u}) + \vec{f_b}$

Approximation de Boussinesq : ρ variable seulement dans le terme de gravité

- $\vec{f_b} = (\rho - \rho_0) \vec{g}$

Approximation de la couche limite :

- $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$
- $u \dfrac{\partial u}{\partial x} + v \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
- $\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0$

Sommaire

$$a\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + b\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x} + c\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + d\frac{\partial\phi}{\partial t} + e\frac{\partial\phi}{\partial x} + f\phi = g \qquad (20)$$

avec $a, \ b, \ c, \ d, \ e, \ f$ et g des fonctions de t, x et parfois de ϕ.

$$a\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + b\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x} + c\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + d\frac{\partial\phi}{\partial t} + e\frac{\partial\phi}{\partial x} + f\phi = g \qquad (20)$$

avec a, b, c, d, e, f et g des fonctions de t, x et parfois de ϕ.

- si a, b, c sont différents de 0 : EDP du **second ordre**
- si $a = b = c = 0$ et que d et e sont différents de O : EDP du **premier ordre**
- si a, b, c, d, e, f dépendent de ϕ : EDP **non-linéaire**
- si $g = 0$: EDP **homogène**

$$a\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+b\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x}+c\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+d\frac{\partial\phi}{\partial t}+e\frac{\partial\phi}{\partial x}+f\phi=g \tag{20}$$

avec a, b, c, d, e, f et g des fonctions de t, x et parfois de ϕ.

- si a, b, c sont différents de 0 : EDP du **second ordre**
- si $a=b=c=0$ et que d et e sont différents de O : EDP du **premier ordre**
- si a, b, c, d, e, f dépendent de ϕ : EDP **non-linéaire**
- si $g=0$: EDP **homogène**

Soit Δ, le discriminant d'une EDP : $\Delta=b^2-4ac$

Cas :

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

Equation hyperbolique

Phénomène ondulatoire

Caractéristiques réelles et distinctes

Exemple : équation des ondes, $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t} - \tilde{c}^2 \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$

Cas :

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

Equation hyperbolique

Phénomène ondulatoire

Caractéristiques réelles et distinctes

Exemple : équation des ondes, $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t} - \tilde{c}^2 \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$

En mécanique des fluides, typique d'un écoulement compressible, instationnaire et non visqueux.

Cas :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

Equation paraboliques

Phénomène de diffusion

Les caractéristiques dégénèrent et donnent lieu à une seule série

Exemple : équation de la chaleur, $\dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \lambda \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = f$

Cas :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

Equation paraboliques

Phénomène de diffusion

Les caractéristiques dégénèrent et donnent lieu à une seule série

Exemple : équation de la chaleur, $\dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \lambda \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = f$

En mécanique des fluides, typique d'un écoulement compressible, instationnaire et non visqueux.

Cas :

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

Equation elliptiques

Phénomène à l'équilibre

Caractéristiques complexes

Exemple : équation de Laplace, $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$

Cas :

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

Equation elliptiques

Phénomène à l'équilibre

Caractéristiques complexes

Exemple : équation de Laplace, $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$

En mécanique des fluides, cas par exemple d'un écoulement stationnaire, compressible et subsonique.

Sommaire

Respecter la similitude géométrique, cinématique et dynamique.

Respecter la similitude géométrique, cinématique et dynamique.

Théorème de Vaschy-Buckingham

Le nombre de variables sans dimensions (K) est égale au nombre de variable physique de départ (N) moins le nombre de dimensions fondamentales (J) utilisées par ces variables.

$$K = N - J \tag{21}$$

Respecter la similitude géométrique, cinématique et dynamique.

Théorème de Vaschy-Buckingham

Le nombre de variables sans dimensions (K) est égale au nombre de variable physique de départ (N) moins le nombre de dimensions fondamentales (J) utilisées par ces variables.

$$K = N - J \tag{21}$$

- $\dfrac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} = 0$
- $St \dfrac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \dfrac{\partial (u_j^* u_i^*)}{\partial x_j^*} = -\dfrac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \dfrac{1}{Re} \dfrac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^{*2}} + \dfrac{1}{Fr^2} g_i$
- $St \dfrac{\partial T^*}{\partial t^*} + \dfrac{\partial (u_j^* T^*)}{\partial x_j^*} = \dfrac{1}{RePr} \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial x_j^{*2}}$

On pose les variables sans dimensions : $u_i^* = \dfrac{u_i}{u_0}, t^* = \dfrac{t}{t_0}, x_i^* = \dfrac{x_i}{L_0}, p^* = \dfrac{p}{\rho u_0^2}$

On pose les variables sans dimensions : $u_i^* = \frac{u_i}{u_0}, t^* = \frac{t}{t_0}, x_i^* = \frac{x_i}{L_0}, p^* = \frac{p}{\rho u_0^2}$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \rho g_i$$

$$\frac{\rho u_0}{t_0}\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\rho u_0^2}{L_0}\frac{\partial (u_j^* u_i^*)}{\partial x_j^*} = -\frac{\rho u_0^2}{L_0}\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\mu u_0}{L_0^2}\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^{*2}} + \rho g_i$$

$$\frac{L_0}{u_0 t_0}\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (u_j^* u_i^*)}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\mu}{\rho L_0 u_0}\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^{*2}} + \frac{L_0}{u_0} g_i$$

$$St\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (u_j^* u_i^*)}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^{*2}} + \frac{1}{Fr^2} g_i$$

$$St = \frac{L_0}{u_0 t_0}; Re = \frac{\rho u_0 L_0}{\mu}; Fr = \frac{u_0}{\sqrt{L_0 g}}$$