Thème 2

Chapitre IX : Discrétisation du terme source ou du terme puits

PROUST Ronan, STOLL Marc-Henri

12/11/2024

Source : P. TRAORE, S. AMIROUDINE. Simulation numérique en mécanique des fluides. Tomaison. Cépaduès. Toulouse, 2021, 414p.

Sommaire

Sommaire

Equations	Terme source/puits S_ϕ
Continuité	0
Navier-Stokes	$-\nabla p + \nabla \cdot [\ \mu\ (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t)\ ] - \frac{2}{3}\nabla(\mu \nabla \cdot \vec{u})$
Energie interne	$-p\nabla \cdot \vec{u} + \phi - \nabla \cdot \vec{q}$

Table – Les termes source/puits pour chaque équation

S_ϕ va créer de la variable ϕ si c'est une source et détruire ϕ si c'est un puits.

Equations	Terme source/puits S_ϕ
Continuité	0
Navier-Stokes	$-\nabla p + \nabla \cdot [\ \mu\ (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t)\ ] - \frac{2}{3}\nabla(\mu \nabla \cdot \vec{u})$
Energie interne	$-p\nabla \cdot \vec{u} + \phi - \nabla \cdot \vec{q}$

Table – Les termes source/puits pour chaque équation

S_ϕ va créer de la variable ϕ si c'est une source et détruire ϕ si c'est un puits.

$$\int_{V_p} S_\phi dv = S_{\phi_p} V_p \tag{1}$$

Cas 2D :

$$A_P \phi_P + A_W \phi_W + A_E \phi_E + A_N \phi_N + A_S \phi_S = SMB = S_{\phi_p} V_p \tag{2}$$

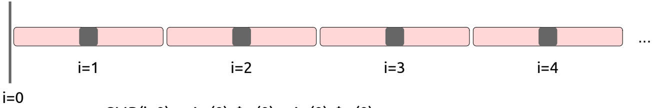
Sommaire

$$A_P\phi_P + A_W\phi_W + A_E\phi_E + A_N\phi_N + A_S\phi_S = S_{\phi_p} \cdot V_p \quad (3)$$

$$A_P\phi_P + A_W\phi_W + A_E\phi_E + A_N\phi_N + A_S\phi_S = (S_C + S_p\phi_p) \cdot V_p \quad (4)$$

La pente de l'expression linéaire du terme source doit être négative (sinon, le système risque de diverger).

Cette condition est liée au critère de **Scarborough**.



SMB(i=0) = Ap(0) Φp(0) + Ae(0) Φe(0)

SMB(i=1) = Ap(1) Φp(1) + Aw(1) Φw(1) + Ae(1) Φe(1)

SMB(i=2) = Ap(2) Φp(2) + Aw(2) Φw(2) + Ae(2) Φe(2)

SMB(i=3) = Ap(3) Φp(3) + Aw(3) Φw(3) + Ae(3) Φe(3)

:

Figure – Représentation d'un domaine de calcul 2D

Critère de Scarborough

Pour que la résolution d'un système linéaire par une méthode itérative converge :

$$|A_p| \geq \sum |A_k| \text{ pour toutes les équations, tous les nœuds.} \quad (5)$$

$$|A_p| > \sum |A_k| \text{ pour au moins une équations, au moins un nœud.} \quad (6)$$

Matrice associée au domaine de calcul 2D :

$$\begin{pmatrix} A_P(1) & A_E(1) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ A_W(2) & A_P(2) & A_E(2) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A_W(3) & A_P(3) & A_E(3) & 0 & \dots \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} SMB(1) - A_W(1)\phi_a \\ SMB(2) \\ SMB(3) \\ SMB(4) \\ \dots \end{pmatrix}$$

Critère de Scarborough

Pour que la résolution d'un système linéaire par une méthode itérative converge, alors la diagonale principale de la matrice doit être dominante.

Matrice à diagonale principale

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{7}$$

- $|3| \ > |1| + |1|$
- $|\text{-}3| \geq |1| + |2|$
- $|4| \ > |\text{-}1| + |2|$

La matrice D est bien à diagonale dominante.

Sommaire

Traitement explicite :

$$A_P\phi_P + A_W\phi_W + A_E\phi_E + A_N\phi_N + A_S\phi_S = (S_C + S_P\phi_P^*)V_P \quad (8)$$

ϕ_P^* : valeur de ϕ_P au pas de temps précédent

Pour des valeurs de ϕ_P^* ou de S_P importantes, il y a divergence dans le calcul.

Traitement explicite :

$$A_P\phi_P + A_W\phi_W + A_E\phi_E + A_N\phi_N + A_S\phi_S = (S_C + S_P\phi_P^*)V_P \quad (8)$$

ϕ_P^* : valeur de ϕ_P au pas de temps précédent

Pour des valeurs de ϕ_P^* ou de S_P importantes, il y a divergence dans le calcul.

Traitement implicite :

$$(A_P - S_P V_P)\phi_P + A_W\phi_W + A_E\phi_E + A_N\phi_N + A_S\phi_S = S_c V_P \quad (9)$$

Rappel : $S_{\phi P} V_P = (S_C + S_P \phi_P) V_P$

On pose : $S_{\phi P} = -5\phi_P - 2$

Donc : $S_C = -2$ et $S_P = -5$, la pente est négative.

Rappel : $S_{\phi P} V_P = (S_C + S_P \phi_P) V_P$

On pose : $S_{\phi P} = -5\phi_P - 2$

Donc : $S_C = -2$ et $S_P = -5$, la pente est négative.

On pose : $S_{\phi P} = 5\phi_P + 2$

Donc : $S_C = 2$ et $S_P = 5$, la pente est positive.

On ne respecte plus la règle de la pente négative.

Rappel : $S_{\phi P} V_P = (S_C + S_P \phi_P) V_P$

Le terme source dépend de ϕ de façon non-linéaire : $S_{\phi_P} = \phi_P^4 - \alpha$

Donc : $S_C = -\alpha$ et $S_P = (\phi_P^*)^3$.

Rappel : $S_{\phi P} V_P = (S_C + S_P \phi_P) V_P$

Le terme source dépend de ϕ de façon non-linéaire : $S_{\phi_P} = \phi_P^4 - \alpha$

Donc : $S_C = -\alpha$ et $S_P = (\phi_P^*)^3$.

De même, si $(\phi_P^*)^3 > 0$, la pente est positive.

On revient à considérer la forme explicite où :
$S_C = 0$ et $S_P = (\phi_P^*)^4 - \alpha$

Généralisation du principe :

$$S_{\phi_P} = S_{\phi_P^*} + (\frac{dS_{\phi_P}}{d\phi_P})^*(\phi_P - {\phi_P}^*) \tag{10}$$

$$S_P = (\frac{dS_{\phi_P}}{d\phi_P})^* \tag{11}$$

$$S_C = S_{\phi_P^*} - (\frac{dS_{\phi_P}}{d\phi_P})^*\phi_P^* \tag{12}$$

Avec le cas précedent :

$$S_P = 4(\phi_P^*)^3 \tag{13}$$

$$S_C = (\phi_P^*)^4 - \alpha - 4(\phi_P^*)^3(\phi_P^*) = -3(\phi_P^*)^4 - \alpha \tag{14}$$

Sommaire

Relaxation : Processus visant à contrôler la variation de ϕ au cours d'un schéma de résolution itératif.

- Résolution de systèmes linéaires, correction différée (DFC)
- Résolution de problèmes de divergence

$$\phi_p^{m+1} = \phi_p^m + \gamma(\bar{\phi}_p - \phi_p^m) \tag{15}$$

$$\begin{cases} \phi_p^m \text{ : valeur de la solution à l'itération } m \\ \bar{\phi}_p \text{ : valeur prédictive} \\ \gamma \text{ : coefficient strictement positif} \end{cases}$$

Implémentation explicite / implémentation implicite

Sous relaxation : $0 < \gamma \leq 1$

Plus γ est faible, plus le système est sous-relaxé et plus les variations de ϕ sont contrôlées et plus le système itératif converge lentement.

Sur relaxation : $1 < \gamma \leq 2$

Meilleure vitesse de convergence, mais si le terme source dépend fortement de la variable ϕ avec de larges variations de celle-ci, il faudra plutôt sous-relaxer sur sur-relaxer.