Lista - Matematica Computacional

Cesar Arturo Sanchez Pena

Pregunta 5.2

A partir da segunda lei de Newton

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

Podemos expresar a aceleração como:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

Agora as Forças que influenciam sobre uma parcela de ar na atmosfera são:

1) Forças Fundamentales:
- Força de Gradiente de Pressão
- Força Gravitacional
- Força Viscosa

2) Forças Aparentes:
- Força Centrifuga
- Força de Gravidade
- Força de Coriolis

Tambem é usada a diferenciação total:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + u\frac{\partial A}{\partial x} + v\frac{\partial A}{\partial y} + w\frac{\partial A}{\partial z}$$

$$\therefore \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}A$$

onde, $\vec{V}\cdot\vec{\nabla}A$ é o termo advectivo.

- Gradiente de Presão:

Pode-se aproximar a força sobre as componentes como:

$$F_x = -\frac{m}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \; ; \; F_y = -\frac{m}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \; ; \; F_z = -\frac{m}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\therefore \; \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-1}{\rho}\vec{\nabla}\vec{P} \quad ; \; \rho \text{ é a densidade.}$$

- Força Gravitacional:

$$\vec{F_g} = -G\frac{M_1 M_2}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{|r|}\right) \quad ; \; G \text{ é a constante de gravitação universal.}$$

Considerando um elemento de masa m na atmosfera, a atração da terra é:

$$\frac{\vec{F_g}}{m} = -\frac{GM}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{|r|}\right)$$

E se pode considerar:

$$g^* = -\frac{GM}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{|r|}\right) \; ; \; g^* \text{ é a força gravitatoria}$$

$$\therefore \; \frac{\vec{F_g}}{m} = g^*$$

- Força viscosa:

As componentes da força viscosa são; E considerando que as modificações están sobre seu propio eixo:

$$F_{rx} = \nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$F_{ry} = \nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right] = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$F_{rz} = \nu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] = \nu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

$$\therefore \; F_{viscose} = \nu\vec{\nabla}^2\vec{V} \quad , \text{ onde } \nu \text{ é o coeficiente de viscocidade cinematica.}$$

- Forsa Centrífuga:

Definimos a aceleração centrípeta:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\omega^2 r$$

Para a Forsa de Gravidade (Gravitacional + Centrífuga)

$$g = g^* + \Omega^2 R$$; Ω é a velocidade angular
R é o vector de posição

- Forsa de Coriolis:

Para uma particula em movimentação sobre um sistema em rotação, sua forsa centrizura é:

$$\left(\Omega + \frac{u}{R}\right)^2 \vec{R} = \underbrace{\Omega^2 \vec{R}}_{\text{Forsa centrifuge da terre}} + \underbrace{\frac{2 \Omega u \vec{R}}{R} + u^2 \frac{\vec{R}}{R}}_{\text{Forsas desviadores}}$$

Para movimentos en grades esales; $u \ll \Omega R$, podenos despreciar o ultimo termo, e o termo restante é a forsa de coriolis debido ao movimento relativo:

$$\frac{dv}{dt} = -2\Omega u \operatorname{Sen}\phi$$

$$\frac{dw}{dt} = 2\Omega u \operatorname{Cos}\phi$$

onde:
ϕ é a latitude

Agora uma particula que inicialmente se encontre em reposo, inicie seu movimento sobre a terra e em direcção ao equador, esta particula apresenta um aumento em sua fuerza centrífuga e por conservação do momento angular:

$$\Omega R^2 = \left(\Omega + \frac{\delta u}{R + \delta R}\right)(R + \delta R)^2$$

Onde sua velocidade relativa hacia o norte quando a particula alcanza a latitude $\phi + \delta\phi$, para o segundo membro da equação anterior e desprezando os termos de segunda orden:

$$\delta u = -2\Omega\,\delta R = 2\Omega a\,\delta\phi \operatorname{sen}\phi$$

Onde se utilizou: $\delta R = -a\,\delta\phi \operatorname{sen}\phi$; a: radio de terra

Fazendo: $\lim_{\delta t} \frac{du}{dt}$, obtemos:

$$\frac{du}{dt} = 2\Omega a \frac{d\phi}{dt} \operatorname{sen}\phi = 2\Omega v \operatorname{sen}\phi \quad ; \quad v = a\frac{d\phi}{dt}$$

Para ambos movimentos, horizontales e verticales:

$$\frac{du}{dt} = 2\Omega v \operatorname{sen}\phi - 2\Omega w \cos\phi \quad ; \quad \phi = \text{latitude}$$

Por tanto e minimizando as expresões:

$$\frac{du}{dt} = 2\Omega v \operatorname{sen}\phi$$

$$\frac{dv}{dt} = -2\Omega u \operatorname{sen}\phi$$

Para a componente vertical (Z) a força de coriolis e despreciada ja que e muito menor a força de gravidade.

Agora voltando a segunda lei de Newton, e usando as forças mostradas anteriormente obtemos a equação de Navier - Stokes:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{variação temporal}} + \underbrace{\vec{v}.\vec{\nabla} v}_{\text{Advecção}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\vec{p}}_{\text{Gradiente de Pressão}} + \underbrace{\nu \nabla^2 \vec{v}}_{\text{Força Viscosa}} + \underbrace{\vec{g}}_{\text{Gravidade}} + \underbrace{\vec{F}_{coriolis}}_{\text{Força de Coriolis}}$$

Descompondo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\Omega v \operatorname{sen}\phi$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2\Omega u \operatorname{sen}\phi$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - g$$