MODUL MATEMATIKA KELAS XII

LAKSONO BANGUN AS'ARI

SMA NEGERI 2 KANDANGAN

BAB I
INTEGRAL

A. INTEGRAL TENTU DAN INTEGRAL TAK TENTU

Integral adalah kebalikan dari turunan (diferensial). Oleh karena itu integral disebut juga anti diferensial. Ada 2 macam integral, yaitu integral tentu dan integral tak tentu. Integral tentu yaitu integral yang nilainya tertentu, sedangkan integral tak tentu, yaitu integral yang nilainya tak tentu. Pada integral tentu ada batas bawah dan batas atas yang nanti berguna untuk menentukan nilai integral tersebut. Kegunaan integral dalam kehidupan sehari-hari banyak sekali, diantaranya menentukan luas suatu bidang, menentukan voluem benda putar, menentukan panjang busur dan sebagainya. Integral tidak hanya dipergunakan di matematika saja. Banyak bidang lain yang menggunakan integral, seperti ekonomi, fisika, biologi, teknik dan masih banyak lagi disiplin ilmu yang lain yang mempergunakannya.

1. INTEGRAL TAK TENTU

Karena integral merupakan kebalikan (invers) dari turunan, maka untuk menemukan rumus integral kita beranjak dari turunan. Turunan suatu fungsi y = f(x) adalah y ‘ = f ‘ (x) atau $\frac{dy}{dx}$, sedangkan notasi integral dari suatu fungsi y = f(x) adalah $\int y\ dx = \int f(x)\ dx$ yang dibaca “ integral y terhadap x ”.
Turunan suatu fungsi konstan adalah 0 atau integral 0 adalah suatu fungsi konstan, biasanya diwakili oleh notasi c.

Rumus umum integral dari $y = ax^n$ adalah $\frac{a}{n+1}x^{n+1} + c$ atau ditulis :

$$\boxed{\int ax^n\ dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c}$$ untuk $n \neq -1$

Contoh 1 : Tentukan :

a. $\int 2x^3\ dx$

b. $\int \left(5x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 7x - 2\right) dx$

c. $\int \frac{8}{3x^4}\ dx$

d. $\int 2x\sqrt{x}\ dx$

Penyelesaian :

a. $\int 2x^3\ dx = \frac{2}{4}x^4 + c = \frac{1}{2}x^4 + c$

b. $\int \left(5x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 7x - 2\right) dx = x^5 - \frac{3}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x + c$

c. $\int \frac{8}{3x^4}\ dx = \int \frac{8}{3}x^{-4} dx = \frac{8}{3(-3)}x^{-3} + c = -\frac{8}{9x^3} + c$

d. $\int 2x\sqrt{x}\ dx = \int 2x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} + c = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + c$

LATIHAN SOAL

1. Integralkan !

   a. $\int 2x^5 dx$

   b. $\int 5x^4 dx$

   c. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

   d. $\int (3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5x + 7) dx$

   e. $\int (6 - 2x + 3x^2 - 8x^3) dx$

   f. $\int (2x-3)^2 dx$

   g. $\int x^2 (x+6) dx$

   h. $\int (1-x)\sqrt{x} dx$

   i. $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx$

   j. $\int \left(x\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right)^2 dx$

2. PEMAKAIAN INTEGRAL TAK TENTU

Pada integral tak tentu terdapat nilai konstanta c yang tidak tentu nilainya. Untuk menentukan fungsi f dari suatu fungsi turunan, maka harus ada data yang lain sehingga harga c dapat diketahui.

Contoh 1 : Diketahui f ‘(x) = 5x – 3 dan f(2) = 18. Tentukan f(x) !

Penyelesaian :

$$f(x) = \int (5x-3) dx = \frac{5}{2} x^2 - 3x + c$$

$$\begin{aligned} f(2) = 18 &\Leftrightarrow \frac{5}{2}(2)^2 + 3.2 + c = 18 \\ &\Leftrightarrow 10 + 6 + c = 18 \\ &\Leftrightarrow 16 + c = 18 \\ &\Leftrightarrow c = 2 \end{aligned}$$

Jadi $f(x) = \frac{5}{2} x^2 - 3x + 2$

Contoh 2 : Jika gradien garis singgung di titik (x,y) pada sebuah kurva yang melalui titik (3,4) ditentukan $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x + 5$, maka tentukan persamaan kurva tersebut !

Penyelesaian :

$$f(x) = \int (3x^2 - 8x + 5) dx = x^3 - 4x^2 + 5x + c$$

$$\begin{aligned} f(3) = 4 &\Leftrightarrow 3^3 - 4.3^2 + 5.3 + c = 4 \\ &\Leftrightarrow 27 - 36 + 15 + c = 4 \\ &\Leftrightarrow c = -2 \end{aligned}$$

Jadi f(x) = $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

LATIHAN SOAL

1. Tentukan rumus f(x) jika diketahui :
   a. f '(x) = 2x dan f(4) = 10
   b. f '(x) = 8x – 3 dan f(-1) = 10
   c. f '(x) = $x^2 - \frac{1}{x^2}$ dan f(1) = $\frac{1}{3}$
   d. f '(x) = x - $\sqrt{x}$ dan f(4) = -3
   e. f '(x) = 1 - $\frac{1}{x^2}$ dan f(4) = 1

2. Diketahui titik (3,2) terletak pada kurva dan gradien garis singgung di titik (x,y) pada kurva tersebut didefinisikan 2x – 3. Tentukan persamaan kurva tersebut !
3. Gradien suatu kurva pada setiap titik (x,y) ditentukan oleh $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x$ dan kurva itu melalui titik (-3,2). Tentukan persamaan kurva itu !
4. Kecepatan suatu benda bergerak dinyatakan oleh $v(t) = 12t^2 - 6t + 1$. Setelah benda itu bergerak 1 detik, jarak yang ditempuh 4 m. Tentukan persamaan gerak dari benda itu !
5. Diketahui rumus percepatan a(t)=$t^2 + 1$ dan kecepatan v(0) = 6. Tentukanlah rumus kecepatan v(t) jika a(t)=$\frac{dv}{dt}$

3. INTEGRAL FUNGSI TRIGONOMETRI

Kita telah mempelajari turunan fungsi trigonometri yang secara ringkas dapat digambarkan sebagai berikut :

$\sin x \to \cos x \to -\sin x \to -\cos x \to \sin x$

$\tan x \to \sec^2 x$

$\cot x \to -\mathrm{cosec}^2 x$

$\to$ artinya turunan.

Karena integral adalah invers dari turunan maka :

Dari $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ diperoleh $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

Dari $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ diperoleh $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

Dari $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ diperoleh $\int \sec^2 x = \tan x + c$

Contoh 1 : Tentukan :

a. $\int (5\sin x + 2\cos x)\, dx$

b. $\int (-2\cos x - 4\sin x + 3)\, dx$

Penyelesaian :

a. $\int (5\sin x + 2\cos x)\, dx = -5\cos x + 2\sin x + c$

b. $\int (-2\cos x - 4\sin x + 3)\, dx = -2\sin x + 4\cos x + 3x + c$

LATIHAN SOAL

1. Tentukan integral fungsi berikut !
   a. $\int 5\sin x\, dx$
   b. $\int (\sin x - \cos x)\, dx$
   c. $\int (8\cos x - 6\sin x)\, dx$
   d. $\int (2 + x + \sin x)\, dx$
   e. $\int (x^2 - 2\sin x)\, dx$

4. INTEGRAL DENGAN SUBSTITUSI

Cara menentukan integral dengan menggunakan cara substitusi-1 yaitu dengan mengubah bentuk integral tersebut ke bentuk lain dengan notasi lain yang lebih sederhana sehingga mudah menyelesaikannya. Cara ini digunakan jika bagian yang satu ada kaitan turunan dari bagian yang lain.

Contoh 1 :Tentukan integral dari :

a. $\int 2x(4x^2 - 1)^{10}\, dx$

b. $\int 2\sin^5 x \cos x\, dx$

Penyelesaian :

a. Misal $: u = 4x^2 - 1$

Maka:

$$\frac{du}{dx} = 8x$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{du}{8x}$$

Sehingga :

$$\int 2x(4x^2 - 1)^{10}\, dx = \int 2x.u^{10}.\frac{du}{8x} = \int \frac{1}{4} u^{10} du = \frac{1}{4.11} u^{11} + c = \frac{1}{44}(4x^2 - 1)^{11} + c$$

b. Misal u = sin x

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

Sehingga :

$$\int 2\sin^5 x \cos x\, dx = \int 2u^5.\cos x \frac{du}{\cos x} = \int 2u^5 du = \frac{2}{6} u^6 + c = \frac{1}{3}\sin^6 x + c$$

LATIHAN SOAL

Tentukan integral dari fungsi –fungsi berikut dengan menggunakan metode substitusi !

1. $\int (2x+3)^5 \, dx$
2. $\int 6(x+4)^5 \, dx$
3. $\int \frac{2}{(5x+1)^4} \, dx$
4. $\int \sqrt[5]{(2x-4)^3} \, dx$
5. $\int 4x(x^2-4)^6 \, dx$
6. $\int 12x^2(x^3+5)^4 \, dx$
7. $\int 6x\sqrt{6-x^2} \, dx$
8. $\int \sin 5x \, dx$
9. $\int \cos^3 x . \sin x \, dx$
10. $\int \cos x \sqrt{1-\sin x} \, dx$

5. INTEGRAL PARSIAL

Bagaimana jika dua bagian pada suatu integral tidak ada kaitan turunan antara bagian yang satu dengan bagian lainnya ? Untuk itu perlu ada cara lain untuk menyelesaikannya yaitu dengan integral parsial.
Seperti telah kita ketahui pada turunan jika y = uv maka y ‘ =u ’ v + uv ’. Jika kita integralkan kedua rua, maka akan didapat :

$$\int y' dx = \int u'v \, dx + \int uv' \, dx \quad \Leftrightarrow \int uv' \, dx = y - \int u'v \, dx = uv - \int u'v \, dx$$

Rumus di atas sering disingkat dengan :

$$\boxed{\int u \, dv = uv - \int v \, du}$$

Contoh 1 : Tentukan :

a. $\int 2x(5x+1)^6 \, dx$

b. $\int x \sin x \, dx$

Penyelesaian : a. Misal 2x = u maka 2 dx = du

Misal dv = $(5x+1)^6 dx \rightarrow v = \frac{1}{5}.\frac{1}{7}(5x+1)^7 = \frac{1}{35}(5x+1)^7$

$$\int 2x(5x+1)^6 \, dx = 2x.\frac{1}{35}(5x+1)^2 - \int \frac{1}{35}(5x+1)^7.2 \, dx$$

$$= \frac{2x}{35}(5x+1)^7 - \frac{2}{35}.\frac{1}{5}.\frac{1}{8}(5x+1)^8 + c$$

$$= \frac{2x}{35}(5x+1)^7 - \frac{1}{700}(5x+1)^8 + c$$

b. Misal x = u maka dx = du
Misal dv = sin x dx maka v = -cos x

$$\int x \sin x \, dx = x.-\cos x - \int -\cos x \, dx = -x\cos x + \sin x + c$$

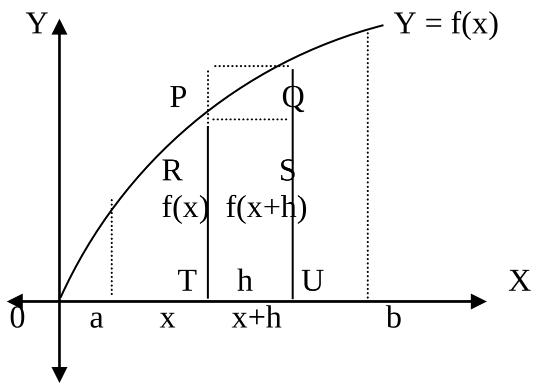
LATIHAN SOAL

Tentukan integral berikut dengan metode parsial !

1. $\int 6x(x+2)^5 \, dx$
2. $\int 8x(1-2x)^3 \, dx$
3. $\int x\sqrt{2x-4} \, dx$
4. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} \, dx$
5. $\int x \sin x \, dx$
6. $\int x^2 \cos x \, dx$
7. $\int (2x+1)\sin 2x \, dx$
8. $\int 6x^3\sqrt{x^2+1} \, dx$
9. $\int x\cos(3x+1)\, dx$
10. $\int x^3 \sin(2x^2+6)^5 \, dx$

6. INTEGRAL TENTU

Perhatikan gambar di bawah ini :



Luas daerah dari x = a hingga x = b adalah L(b) – L(a) ….. (1)

Luas RSUT < Luas RQUT < Luas PQUT

h.f(x) < L(x+h) – L(x) < h.f(x+h)

$$f(x) < \frac{L(x+h)-L(x)}{h} < f(x+h)$$

Untuk h $\rightarrow$ 0 maka :

$$\lim_{h\to 0} f(x) < \lim_{h\to 0} \frac{L(x+h)-L(x)}{h} < \lim_{h\to 0} f(x+h)$$

$$f(x) < L'(x) < f(x) \quad \rightarrow \quad L'(x) = f(x)$$

$$L(x) = \int f(x)\, dx = F(x) + c$$

Dari (1) maka :

$$L = \int_a^b f(x)\, dx = L(b) - L(a) = (F(b)+c) - (F(a)+c) = F(b) - F(a)$$

Jadi : $\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$

Contoh 1 : Hitunglah $\int_{1}^{3} (3x^2 - x + 1)\ dx$

Penyelesaian:

$$\int_{1}^{3} (3x^2 - 4x + 1)\ dx = \left[x^3 - 2x^2 + x\right]_1^3 = \left(3^3 - 2.3^2 + 3\right) - \left(1^3 - 2.1^2 + 1\right) = 12$$

LATIHAN SOAL

1. Tentukan nilai integral di bawah ini :
   - $a.\ \int_{0}^{3} 4x\ dx$
   - $b.\ \int_{-2}^{1} 6x^2\ dx$
   - $c.\ \int_{0}^{4} 12x\sqrt{x}\ dx$
   - $d.\ \int_{-1}^{1} \left(5 - 2x - 6x^2\right) dx$
   - $e.\ \int_{1}^{2} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2\ dx$
2. Tentukan nilai a jika diketahui :
   - $a.\ \int_{0}^{a} \sqrt{x}\ dx = 18$
   - $b.\ \int_{-1}^{2a} \frac{1}{x^2}\ dx = \frac{1}{2}$
3. Tentukan a jika $\int_{-1}^{2} \left(2x + a\right) dx = -6$
4. Tunjukkan dengan arsiran, luas daerah yang dinyatakan dengan integral berikut :
   - $a.\ \int_{0}^{4} 3x\ dx$
   - $b.\ \int_{-2}^{3} x^2\ dx$
   - $c.\ \int_{-3}^{3} \left(x^2 - 4\right) dx$
   - $d.\ \int_{-2}^{2} x^3\ dx$

5. Tentukan nilai integral dari :

$a.\quad \int_{1}^{3} (2x+3)^5 \ dx$

$b.\quad \int_{-2}^{2} 6(x+4)^5 \ dx$

$c.\quad \int_{0}^{1} \frac{2}{(x+1)^4} dx$

$d.\quad \int_{2}^{3} \sqrt[5]{(2x-4)^3} dx$

6. Tentukan nilai integral berikut ini :

$a.\quad \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \cos x \ dx$

$b.\quad \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} 2\cos 2x \ dx$

$c.\quad \int_{0}^{\pi} \sin\left(x+\frac{1}{3}\pi\right) dx$

$d.\quad \int_{0}^{2\pi} (\sin x + \cos x) \ dx$

$e.\quad \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (4\cos x - 1) \ dx$

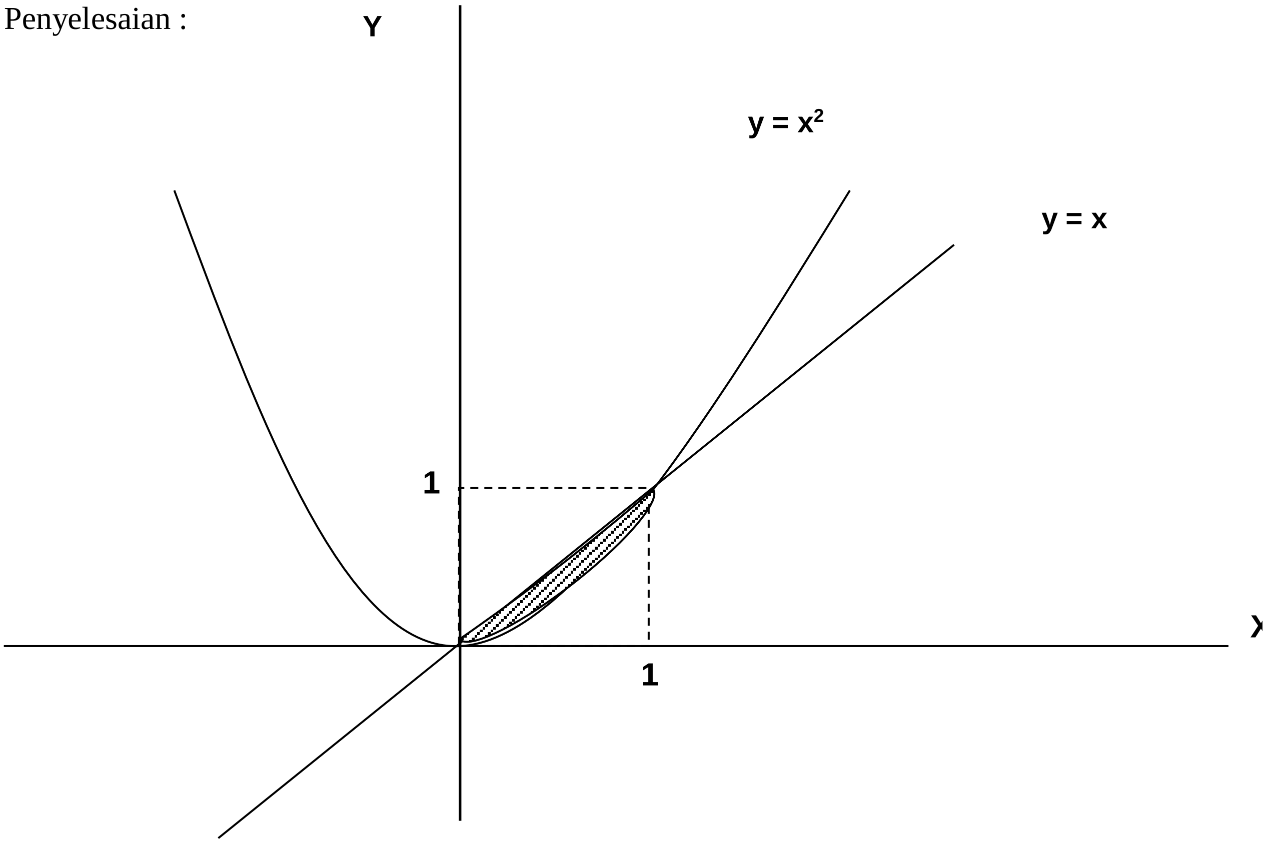
B. LUAS DAN VOLUME BENDA PUTAR

1. DAERAH ANTARA BEBERAPA KURVA

Daerah antara dua kurva yaitu daerah yang dibatasi oleh dua kurva tersebut dengan selang batas tertentu. Selang batas tersebut bisa batas yang ditentukan atau titik potong kedua kurva tersebut.

Contoh 1 : Lukislah daerah antara garis y = x dan kurva $y = x^2$!

Penyelesaian :



<u>LATIHAN SOAL</u>

Lukislah daerah antara beberapa kurva di bawah ini :

1. $x = -2,\ x = 3,\ y = -2\ dan\ y = 3$
2. $y = x,\ y = -x\ dan\ y = 3$
3. $y = x^2\ dan\ y = -x^2 + 2$
4. $y = x\ dan\ y = x^3$
5. $y = x^2 - 4x\ dan\ y = -x^2 + 4x$
6. $y = x^2\ dan\ y = \sqrt{x}$
7. $y = 2x - 1,\ x = 4\ dan\ sumbu\ X$
8. $y = x^2 - 2x - 8,,\ x = -4\ dan\ x = 5$
9. $y = \sin x,\ 0 \le x \le \frac{3}{2}\pi$
10. $y = \sin x\ ,\ y = \cos x\ ,\ \pi \le x \le 2\pi$

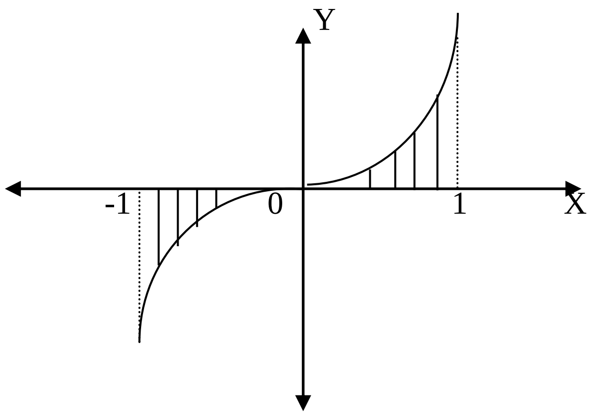
2. LUAS DAERAH ANTARA KURVA DAN SUMBU KOORDINAT

Luas daerah antara kurva y = f(x) dengan sumbu koordinat X pada selang $a \le x \le b$ dimana daerahnya ada di atas atau di bawah sumbu X adalah : $L = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$

Begitupun untuk daerah dengan batas sumbu koordinat Y, yaitu : $L = \left| \int_a^b f(y)\, dy \right|$

Contoh 1 : Tentukan luas daerah antara kurva y = x^3, sumbu X , x = -1 dan x = 1 !

Penyelesaian :

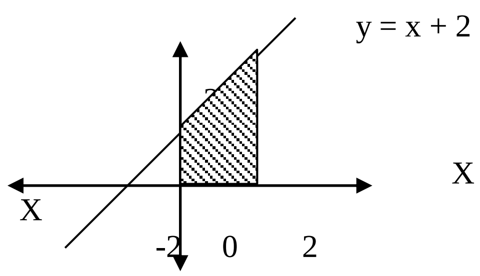


$$L = -\int_{-1}^{0} x^3\, dx + \int_0^1 x^3\, dx = -\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = -(0 - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - 0) = \frac{1}{2} \text{ satuan luas.}$$

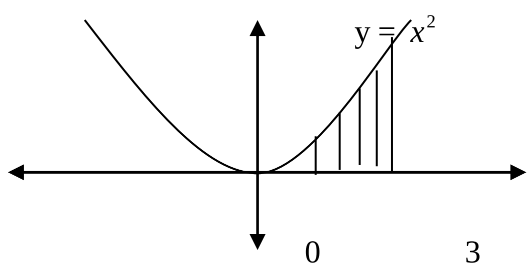
LATIHAN SOAL

1. Tentukan luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini :

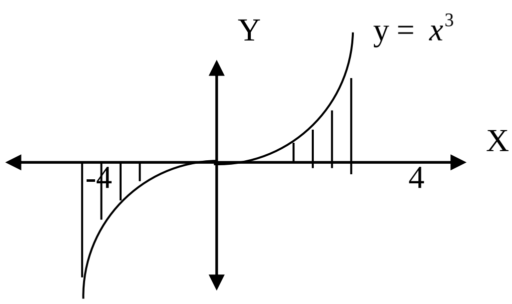
a.



b.



c.



2. Tentukan luas daerah antara kurva berikut dan sumbu koordinat atau garis yang ditentukan :

a. $y = 2x - 1$, sumbu X, x = -2 dan x = 3

b. $y = x^2$, sumbu X, x = 0 dan x = 2

c. $y = x^2 - 1$ dan sumbu X

d. $y = 8x - x^2$, sumbu X dan x = 4

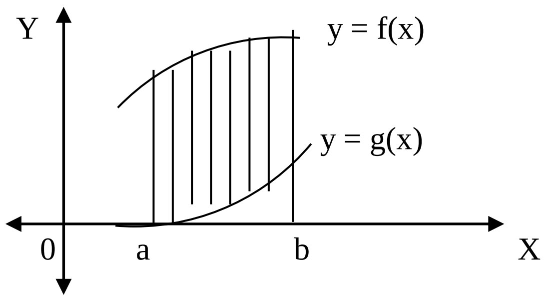
e. $y = x^3$, sumbu X, x = -1 dan x = 3

f. $y = \sqrt{x}$, sumbu X, x = 1 dan x = 4

3. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3 - 3x^2$, sumbu X, x = -1 dan x = 3

3. LUAS ANTARA DUA KURVA

Untuk menentukan luas daerah antara dua kurva, kita berdasarkan luas antara kurva dan sumbu koordinat.
Perhatikan gambar di bawah ini :



Luas daerah yang diarsir adalah :

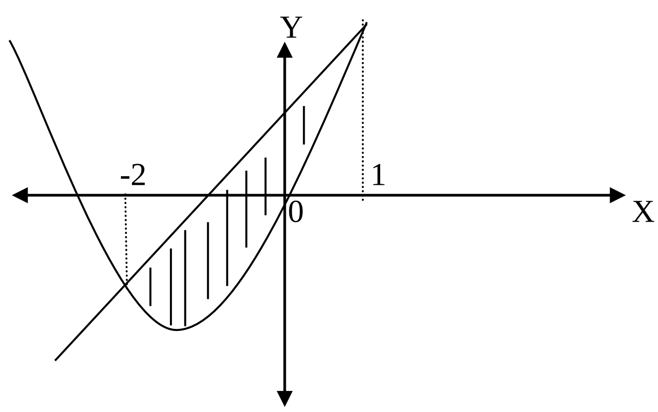
$$L = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Jadi : $\boxed{L = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)}$

Contoh 1: Tentukan luas daerah antara kurva $y = x^2 + 3x$ dan y = 2x + 2 !

Penyelesaian :
Titik potong kedua kurva yaitu :

$$x^2 + 3x = 2x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \; atau \; x = 1$$

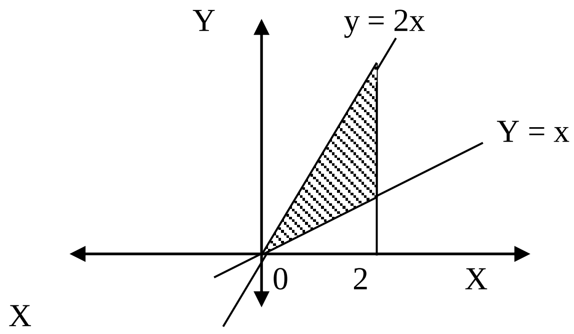


$$L = \int_{-2}^{1} \left[(2x+2) - (x^2 + 3x)\right] dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\,dx = 4\frac{1}{2}$$ satuan luas.

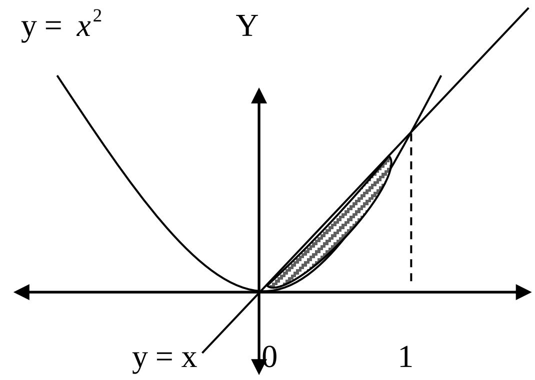
LATIHAN SOAL

1. Hitunglah luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini :

a.



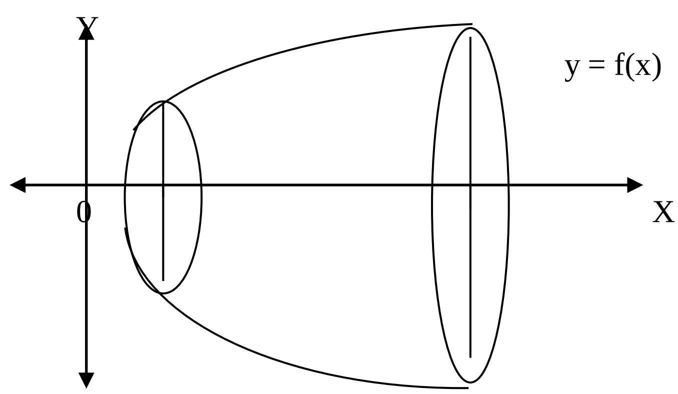
b.



2. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva berikut :
   - a. $y = x^2 \ dan \ y = x + 2$
   - b. $y = 9 - x^2 \ dan \ x - y + 3 = 0$
   - c. $y = x^2 \ dan \quad y = 2x - x^2$
   - d. $y = 2 - x^2 \ dan \ x + y = 0$
   - e. $y = x^2, y = x + 6 \ dan \ sumbu \ Y$
   - f. $y = \sqrt{x} \ dan \ y = x^2$
   - g. $y = x^2 - 4x + 3 \ dan \ x - y - 1 = 0$

4. VOLUME BENDA PUTAR

4.1 VOLUME BENDA PUTAR ANTARA KURVA DAN SUMBU KOORDINAT

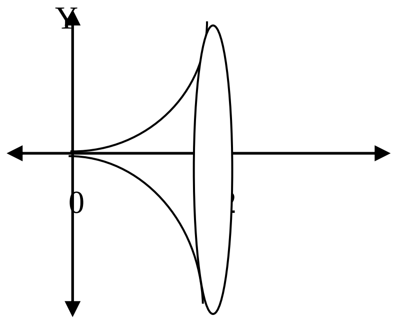


Volume benda putar yang dibatasi oleh kurva y = f(x), x = a, x = b dan sumbu X yang diputar sejauh 360° mengelilingi sumbu X adalah : $\boxed{V = \pi \int_a^b y^2 \ dx}$

Begitu juga pada kurva x = f(y) yang diputar mengelilingi sumbu Y sejauh 360° dan dibatasi oleh y = a, y = b, sumbu Y dan kurva itu sendiri maka volumenya : $\boxed{V = \pi \int_a^b x^2 \ dy}$

Contoh 1 : Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, sumbu X dan garis x = 2 diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360° !

Jawab :

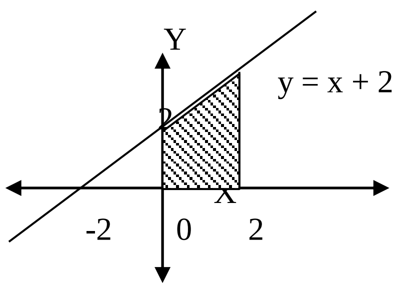


$$V = \pi \int_0^2 \left(x^2\right)^2 \, dx = \pi \int_0^4 x^4 \, dx = \pi \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \pi\left(\frac{32}{5} - 0\right) = \frac{32}{5}\pi \text{ satuan volume.}$$

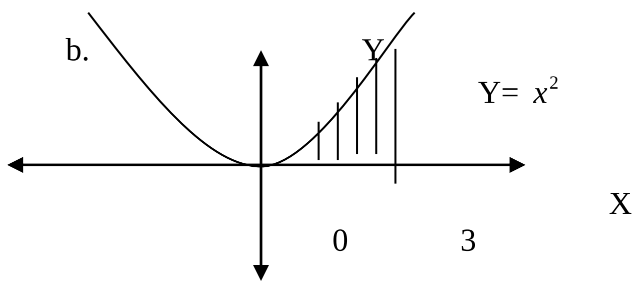
<u>LATIHAN SOAL</u>

1. Pada gambar di bawah, hitunglah volume benda putarnya jika diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360° !

a.



b.



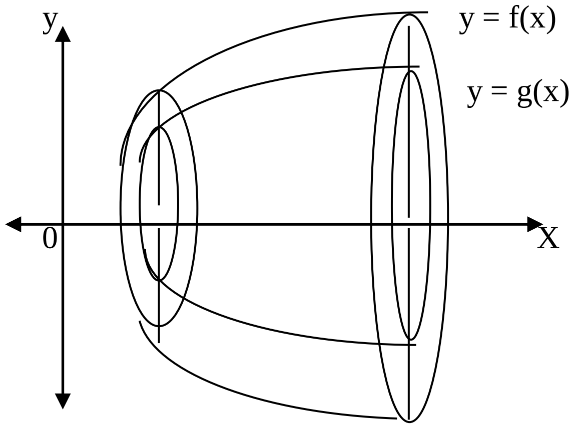
2. Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva yang diketahui diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360° !
   a. y = x, x = 1 dan x = 10
   b. y = x^2, sumbu X, sumbu Y dan x = 6
   c. y = $\sqrt{x}$, sumbu X, sumbu Y dan x = 9
   d. y = $x^2 + 1$, x = 0 dan x = 1
   e. y = x^3, sumbu X, x = -3 dan x = 3

3. Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva yang diketahui diputar mengelilingi sumbu Y sejauh 360° !
   a. y = x dan y = 6
   b. y = $\sqrt{x}$ dan y = 1
   c. y = $x^2 - 1$, y = 0 dan y = 1

<u>Quiss</u> :

1. Tentukan rumus volume kerucut $V = \frac{1}{3}\pi r^2 t$ dari persamaan garis y = $\frac{r}{t}x$ yang diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360°
2. Tentukan rumus volume bola $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ dari persamaan seperempat lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ yang diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360°

4.2 VOLUME BENDA PUTAR ANTARA DUA KURVA



Volume benda putar yang diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360° yang dibatasi oleh kurva y = f(x), y = g(x), x = a dan x = b adalah :

$$\boxed{V = \pi \int_a^b (y_1^{\,2} - y_2^{\,2})\, dx} \quad \text{dimana } y_1 = f(x),\ y_2 = g(x)\ dan\ y_1 > y_2$$

Begitupun untuk benda putar yang diputar mengelilingi sumbu Y.

Contoh 1: Hitunglah isi benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan y = 2x diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360° !

Jawab : $V = \pi \int_0^2 \left[(2x)^2 - (x^2)^2\right] dx = \pi \int_0^2 \left(4x^2 - x^4\right) dx = \pi \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \frac{64}{15}\pi$

LATIHAN SOAL

1. Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh dua kurva diputar sejauh 360° mengelilingi sumbu koordinat yang disebutkan !
   a. y = x dan y = x^2 mengelilingi sumbu X
   b. y = x^2 dan $y^2 = x$ mengelilingi sumbu Y
   c. y = x^2, y = $\sqrt{x}$, mengelilingi sumbu Y
   d. y = x^2 dan y = x^4 mengelilingi sumbu X
   e. y = x^2 dan y = $6x - x^2$ mengelilingi sumbu X
   f. y = $1 + x^2$ dan y = $9 - x^2$ mengelilingi sumbu X

PROGRAM LINIER

Program linier adalah suatu metode untuk mencari nilai maksimum atau minimum dari bentuk linier pada daerah yang dibatasi oleh grafik-grafik fungsi linier.

1. SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINIER

A. Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Suatu garis dalam bidang koordinat dapat dinyatakan deng persamaan yang berbentuk:

$$a_1x + a_2y = b$$

Persamaan semacam ini dinamakan persamaan linear dalam varial x dan y (dua variabel). Secara umum, dapat didefinisikan sebag persamaan linear dengan n variabel $x_1, x_2, \ldots x_n$ dalam bentuk berikut.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ adalah konstanta-konstanta real

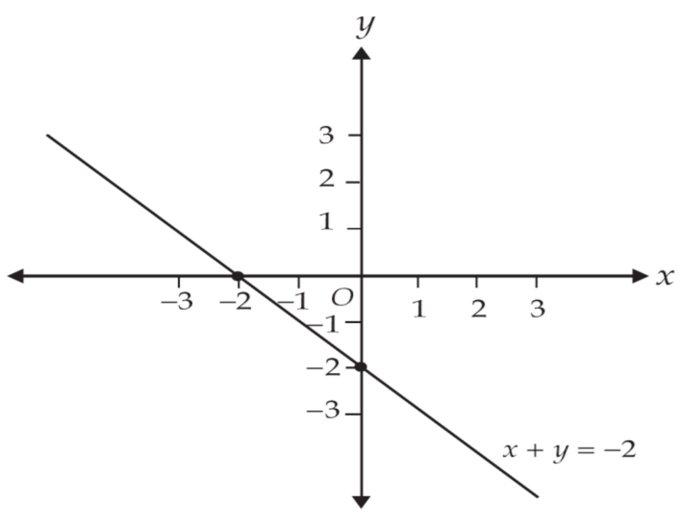
Jika melibatkan lebih dari satu persamaan, maka disebut dengan *sist persamaan linear*. Dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = & b_n \end{array}$$

dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah variabel

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{mn}$ adalah konstanta real.

Untuk saat ini, pembahasan dibatasi menjadi dua variabel saja. Unt pertidaksamaan linear, tanda "=" diganti dengan "≤", "<", "≥", "> Sebagai contoh, untuk pertidaksamaan linear dua variabel dijelask sebagai berikut. Misalnya, kalian menggambar garis $x + y = -2$ dap digambarkan sebagai berikut.

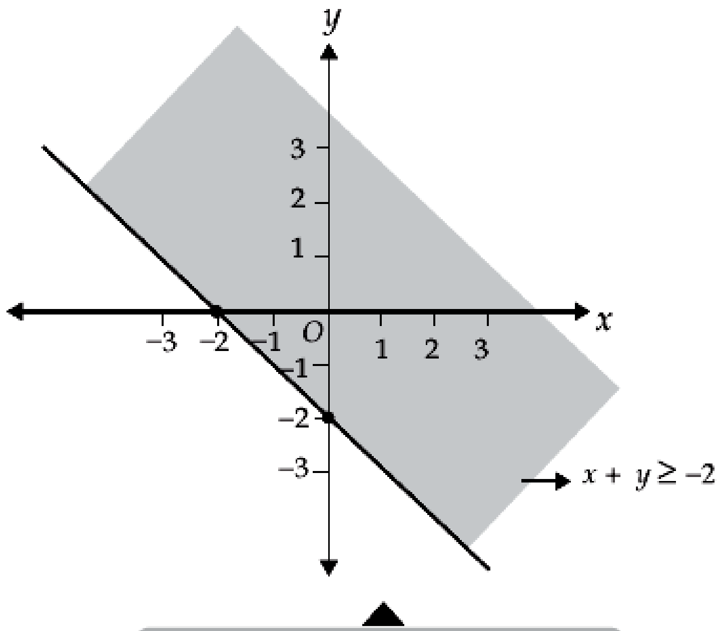


Gambar 2.1
Garis $x + y = -2$

Garis $x + y = -2$ membagi bidang koordinat menjadi dua daerah, ya daerah $x + y < -2$ dan daerah $x + y > -2$.

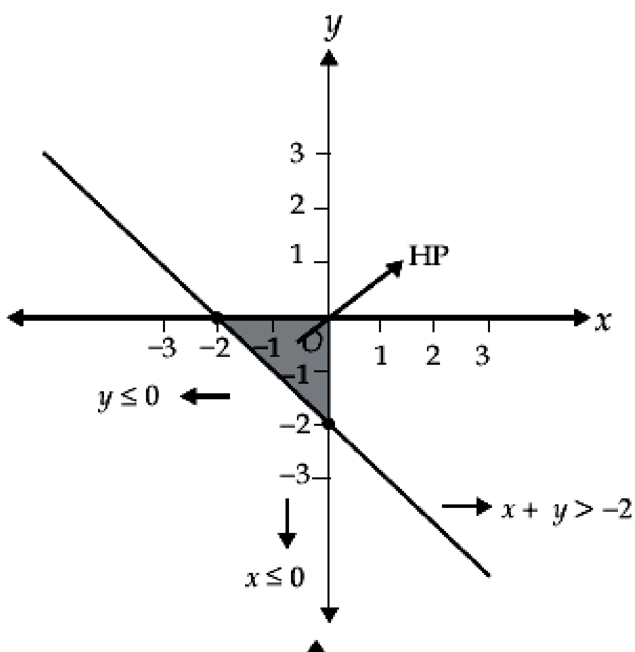
Sekarang, substitusi titik sembarang, misalnya titik $O(0, 0)$ ke persama garis tersebut. Didapat, $0 + 0 = 0 > -2$. Ini berarti, titik $O(0, 0)$ berada pa daerah $x + y > -2$.

Daerah $x + y > -2$ ini diarsir seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.2
Daerah penyelesaian $x + y \geq -2$

Jika daerah tersebut dibatasi untuk nilai-nilai x, $y \leq 0$, maka diperoleh gambar seperti berikut.



Gambar 2.3
Himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan $x + y > -2$, $x \leq 0$, dan $y \leq 0$

Daerah yang diarsir berupa daerah segitiga. Tampak bahwa daerah ini merupakan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear $x + y \geq -2$, $x \leq 0$, dan $y \leq 0$.

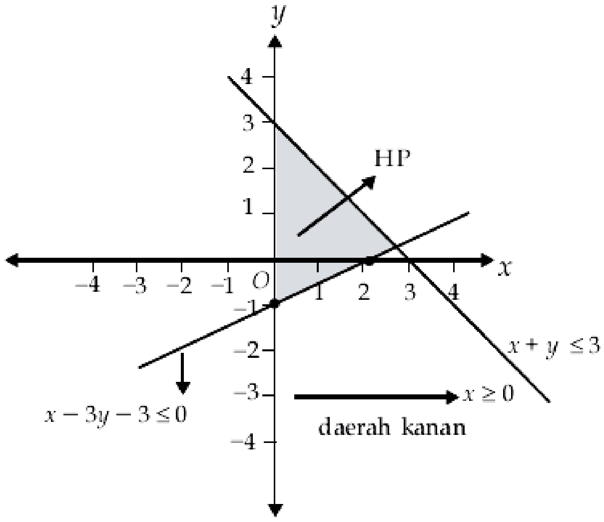
Untuk selanjutnya, himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear ini disebut daerah penyelesaian.

Contoh Soal :

Tentukanlah daerah penyelesaian dari pertidaksamaan dengan $x + y \le 3$, $x - 3y - 3 \le 0$, dan $x \ge 0$.

Jawab:

Daerah yang diarsir berikut merupakan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear $x + y \le 3$, $x - 3y - 3 \le 0$, dan $x \ge 0$.



LATIHAN SOAL

1. Lukislah garis berikut :
   a). x + 2y = 6
   b). -2x + 5y = 10
   c). -3x + 4y = -12
   d). $\frac{1}{2}x - 4y = -18$

2. Arsirlah daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linier :

   a) $-3x - 2y > 6$

   b) $-2 \le x < 4$

   c) $\left.\begin{array}{r} x + y \le 5 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$

   d) $\left.\begin{array}{r} -2x + y \ge 12 \\ x \le 0 \end{array}\right\}$

   e) $\left.\begin{array}{r} 3x - 4y \le 12 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$

   f) $\left.\begin{array}{r} -x + 2y \ge 6 \\ x \le 0 \\ y \le 0 \end{array}\right\}$

   g) $\left.\begin{array}{r} x + y \le 5 \\ 2x + y \le 6 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$

   h) $\left.\begin{array}{r} 2x + y \ge 10 \\ x + y \ge 18 \\ x \ge 8 \\ y \le 8 \end{array}\right\}$

   i) $\left.\begin{array}{r} 3x + 4 \le 36 \\ 2 \le x \le 8 \\ 0 \le y \le 6 \end{array}\right\}$

   j) $\left.\begin{array}{r} y \le 2x \\ x + 2y \le 8 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$

2. MENYELESAIKAN MASALAH PROGRAM LINIER

Dalam kehidupan sehari-hari sering kita dihadapkan dengan permasalahan yang berhubungan dengan nilai optimal (maksimum/minimum). Program linier mempunyai tujuan untuk dapat memanfaatkan bahan-bahan (materi) yang tersedia secara efisien dengan hasil yang optimum. Karena itu program linier banyak digunakan dalam bidang ekonomi, industri, perusahaan dan bidang usaha lain.

a. Model Matemátika dari Permasalahan Program Linier

Sebagai ilustrasi perhatikan contoh berikut :

PT. Samba Lababan memproduksi ban motor dan ban sepeda. Proses pembuatan ban motor melalui tiga mesin, yaitu 2 menit pada mesin I, 8 menit pada mesin II, dan 10 menit pada mesin III. Adapun ban sepeda diprosesnya melalui dua mesin, yaitu 5 menit pada mesin I dan 4 menit pada mesin II. Tiap mesin ini dapat dioperasikan 800 menit per hari. Untuk memperoleh keuntungan maksimum, rencananya perusahaan ini akan mengambil keuntungan Rp40.000,00 dari setiap penjualan ban motor dan Rp30.000,00 dari setiap penjualan ban sepeda. Berdasarkan keuntungan yang ingin dicapai ini, maka pihak perusahaan merencanakan banyak ban motor dan banyak ban sepeda yang akan diproduksinya dengan merumuskan berbagai kendala sebagai berikut. Perusahaan tersebut memisalkan banyak ban motor yang diproduksi sebagai x dan banyak ban sepeda yang diproduksi sebagai y, dengan x dan y bilangan asli. Dengan menggunakan variabel x dan y tersebut, preusan itu membuat rumusan kendala-kendala sebagai berikut.

Pada mesin I : $2x + 5y \leq 800$ …. Persamaan 1
Pada mesin II : $8x + 4y \leq 800$ …. Persamaan 2
Pada mesin III : $10x \leq 800$ …. Persamaan 3
x, y bilangan asli : $x \geq 0$, $y \geq 0$ …. Persamaan 4

Fungsi tujuan (objektif) yang digunakan untuk memaksimumkan keuntungan adalah
$f(x, y) = 40.000x + 30.000y$. Dalam merumuskan masalah tersebut, PT. Samba Lababan telah membuat model matematika dari suatu masalah program linear.

b. Nilai Optimum Fungsi Obyektif

Untuk menentukan nilai optimum fungsi objektif ini, ada dua metode, yaitu metode uji titik pojok dan metode garis selidik.

b.1. Metode Uji Titik Pojok

Untuk menentukan nilai optimum fungsi objektif dengan menggunakan metode uji titik pojok, lakukanlah langkah-langkah berikut.

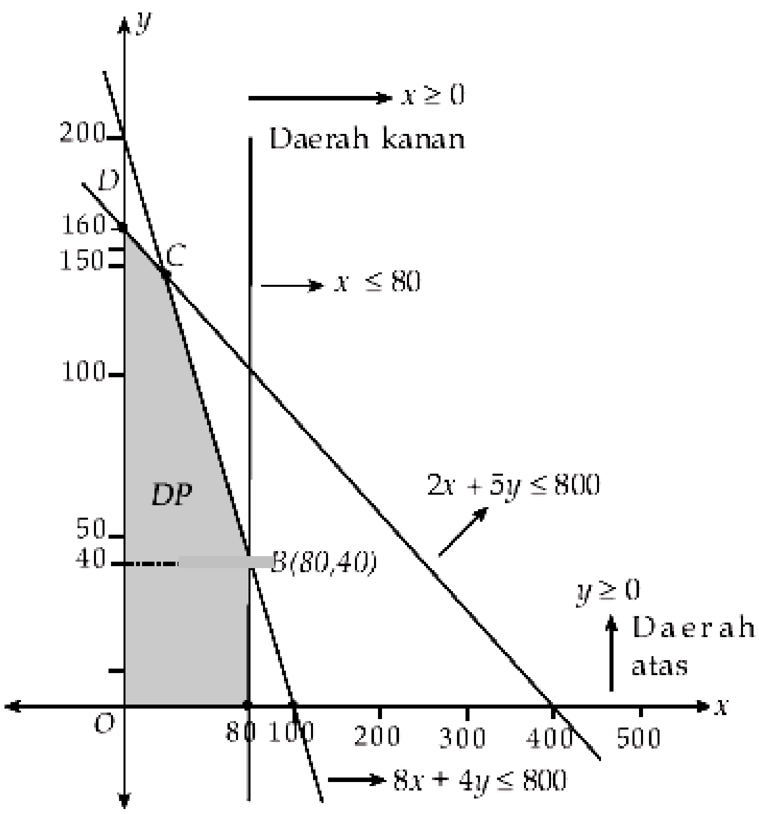
1. Ubah masalah tersebut ke dalam model matematika yaitu dengan membuat tabel, fungsi pembatas dan fungsi tujuan.Tabel di sini untuk mempermudah membaca data. Fungsi pembatas/kendala yaitu beberapa pertidaksamaan linier yang berhubungan dengan permasalahan tersebut. Fungsi tujuan/objektif yaitu suatu fungsi yang berhubungan dengan tujuan yang akan dicapai. Biasanya fungsi tujuan dinyatakan dengan
   $f(x,y) = ax + by$ atau $z = ax + by$
2. Lukislah daerah penyelesaian dari fungsi pembatasnya
3. Tentukan koordinat-koordinat titik ujung daerah penyelesaian
4. Ujilah masing-masing titik ujung daerah penyelesaian
5. Tentukan nilai terbesar/terkecilnya sesuai dengan tujuan yang akan dicapai

Sebagai contoh dalam dari masalah produksi ban PT. Samba Lababan di atas diperoleh model matemátika sebagai berikut :

I : $2x + 5y \leq 800$ …. Persamaan 1
II : $8x + 4y \leq 800$ …. Persamaan 2
III : $10x \leq 800$ …. Persamaan 3

IV : $x \geq 0$, $y \geq 0$ …. Persamaan 4
Fungís Obyektif : $f(x, y) = 40.000x + 30.000y$

Gambar grafik daerah penyelesaian dari model matemática tersebut hádala sebagai berikut :



Perhatikan daerah penyelesaian dari grafik pada gambar di atas.

a. Titik-titik pojoknya adalah titik O, A, B, C, dan D.

- Titik O adalah titik pusat koordinat. Jadi, titik $O(0,0)$.
- Titik A adalah titik potong antara garis $x = 80$ dan sumbu-x.
  Jadi, titik $A(80, 0)$.
- Titik B adalah titik potong antara garis $x = 80$ dan garis $8x + 4y = 800$.
  Substitusi $x = 80$ ke persamaan
  $$8x + 4y = 800$$
  $$8 \cdot 80 + 4y = 800$$
  $$y = 40$$
  Jadi, titik $B(80, 40)$.
- Titik C adalah titik potong antara garis $8x + 4y = 800$ dan $2x + 5y = 800$.
  Dari $8x + 4y = 800$ didapat $y = 200 - 2x$.
  Substitusi nilai y ke persamaan $2x + 5y = 800$
  $$2x + 5(200 - 2x) = 800$$
  $$2x + 1000 - 10x = 800$$
  $$-8x = -200$$
  $$x = 25$$
  Substitusi $x = 25$ ke persamaan $y = 200 - 2x$
  $$y = 200 - 2 \cdot 25$$
  $$y = 150$$
  Jadi, titik $C(25, 150)$.
- Titik D adalah titik potong antara garis $2x + 5y = 800$ dan sumbu-y.
  Substitusi $x = 0$ ke persamaan $2x + 5y = 800$
  $$2 \cdot 0 + 5y = 800$$
  $$5y = 800$$
  $$y = 160$$
  Jadi, titik $D(0, 160)$.

b. Uji titik-titik pojok ke fungsi objektif $f(x, y) = 40.000x + 30.000y$, sehingga fungsi objektif ini maksimum.

Titik Pojok (x, y)	$f(x, y) = 40.000x + 30.000y$
$A(80, 0)$	3.200.000
$B(80, 40)$	4.400.000
$C(25, 150)$	5.500.000
$D(0, 160)$	4.800.000

Dari tabel tersebut dapat diperoleh nilai maksimum fungsi objektif $f(x, y) = 40.000x + 30.000y$ adalah $f(25, 150) = 5.500.000$.
Jadi, PT. Samba Lababan harus memproduksi 25 ban motor dan 150 ban sepeda untuk memperoleh keuntungan maksimum.

LATIHAN SOAL

1. Suatu pesawat udara mempunyai tempat duduk tidak lebih dari 48 penumpang. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa bagasi 60 kg, sedangkan kelas ekonomi dibatasi 20 kg. Pesawat itu hanya dapat membawa bagasi 1440 kg. Jika tiket setiap penumpang kelas utama Rp.100.000 dan kelas ekonomi Rp.50.000, maka tentukan keuntungan maksimum yang dapat diperolehnya ?

2. Luas daerah parkir 360 m^2 . Luas rata-rata untuk parkir sebuah mobil sedan 6 m^2 dan untuk sebuah bus 24 m^2. Daerah parkir tidak dapat memuat lebih dari 30 kendaraan. Jika biaya parkir untuk sebuah mobil sedan Rp.250 dan sebuah bus Rp.750, maka tentukan banyaknya tiap-tiap jenis kendaraan agar diperoleh pendapatan maksimum ?

3. Seorang pengusaha kendaraan roda dua akan memproduksi sepeda balap dan sepeda biasa. Banyak sepeda balap yang akan diproduksi sedikitnya 10 unit dan paling banyak 60 unit perbulannya. Sedangkan untuk sepeda biasa paling banyak diproduksi 120 unit sebulannya. Total produksi perbulannya adalah 160 unit. Harga jual sepeda balap Rp.700.000/unit dan sepeda biasa Rp.300.000/unit. Tentukan banyaknya masing-masing jenis sepeda yang membuat keuntungan maksimal !

4. Sebuah butik memiliki 4 m kain satin dan 5 m kain prada. Dari bahan tersebut akan dibuat 2 baju pesta. Baju pesta I memerlukan 2 m kain satin dan 1 m kain prada. Sedangkan baju pesta II memerlukan 1 m kain satin dan 2 m kain prada. Harga jual baju pesta I sebesar Rp.500.000 dan baju pesta II Rp.400.000. Berapa jenis baju pesta yang akan dibuat agar diperoleh harga jual yang setinggi-tingginya ?

5. Seorang petani membutuhkan pupuk N, P, dan K berturut-turut 10, 12, dan 12 unit untuk menyuburkan tanamannya. Kebutuhan itu dapat dipenuhinya dari pupuk berupa cairan yang mengandung 5 unit N, 2 unit P dan 1 unit K tiap botol dan dari pupuk berbentuk tepung yang mengandung 1 unit N, 2 unit P dan 4 unit K tiap kantong. Berapa banyaknya tiap jenis pupuk dapat dibeli agar biaya pembelian pupuk seminimal mungkin ?

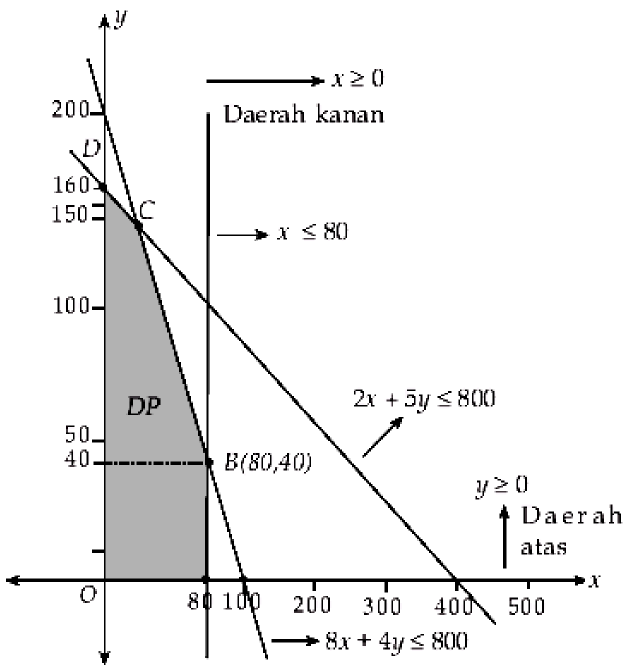
b.2 Metode Garis Selidik

Untuk menentukan nilai optimum fungsi objektif dengan menggunakan metode garis selidik, lakukanlah langkah-langkah berikut:

a. Tentukan garis selidik, yaitu garis-garis yang sejajar dengan garis $ax + by = k$, $a > 0$, $b > 0$, dan $k \in R$.

b. Gambarkan garis selidik-garis selidik tersebut pada koordinat Cartesius!

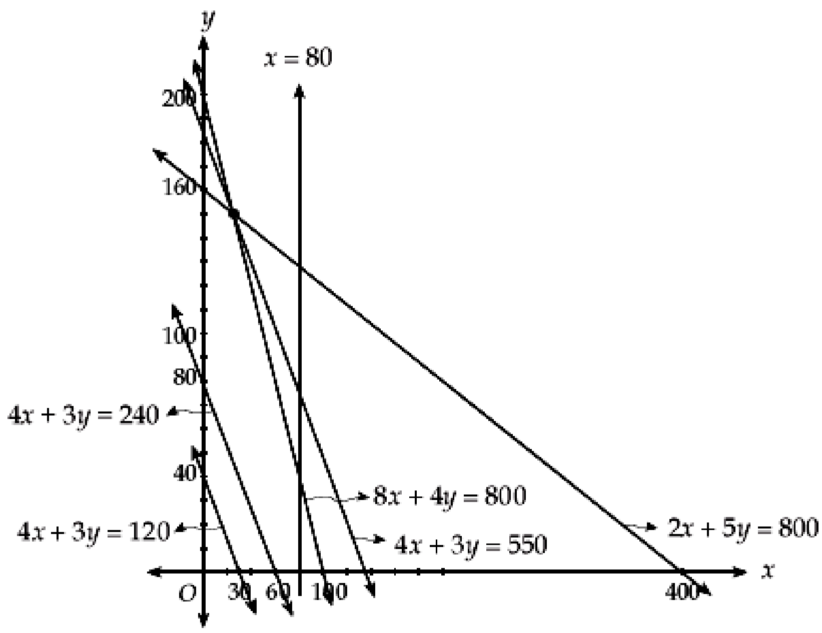
c. Untuk menentukan **nilai maksimum fungsi tujuan** maka carilah garis selidik yang **jaraknya terbesar** terhadap titik pusat $O(0, 0)$ dan berada pada daerah penyelesaian. Sedangkan untuk menentukan **nilai minimum fungsi tujuan** maka carilah garis selidik yang **jaraknya terkecil** terhadap titik pusat $O(0, 0)$ dan berada pada daerah penyelesaian. Sebagai contoh, grafik berikut ini adalah produksi ban PT. Samba Lababan.



Garis selidik dari fungsi objektif $f(x, y) = 40.000x + 30.000y$ adalah $4x + 3y = k$.

Ambil $k = 120$, didapat garis selidik $4x + 3y = 120$.
Ambil $k = 240$, didapat garis selidik $4x + 3y = 240$.
Ambil $k = 550$, didapat garis selidik $4x + 3y = 550$.

Gambarkan garis-garis selidik ini sehingga dapat ditentukan nilai maksimu fungsi objektif $f(x, y) = 40.000x + 30.000y$.



LATIHAN SOAL

1. Tentukan nilai maksimum dan minimum 4x + y dengan menggunakan garis selidik dari daerah sistem pertidaksamaan linier $x + y \geq 6,\ 2x + y \geq 8,\ x \leq 6\ dan\ y \leq 8$

2. Dengan menggunakan garis selidik, tentukan nilai maksimum 4x + 2y pada daerah himpunan penyelesaian $x \leq 8,\ y \leq 6,\ x + 4y \geq 8\ dan\ 2x + y \geq 8$

3. Dengan menggunakan garis selidik, tentukan nilai maksimum dan minimum 2x – y pada pertidaksamaan $x + y \geq 4,\ x + y \leq 6,\ x \leq 4\ dan\ y \leq x + 4$

4. Dengan menggunakan garis selidik, tentukan nilai maksimum dan minimum q = 6x + 10y pada himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan $x + y \leq 16,\ x + 2y \leq 10,\ x \geq 2\ dan\ y \geq 0$

5. Dengan menggunakan garis selidik, tentukan nilai maksimu dan minimum q = 16x – 2y + 40 dari daerah penyelesaian $6x + 8y \leq 48$, $0 \leq y \leq 4$ *dan* $0 \leq x \leq 7$

M A T R I K S

A. PENGERTIAN DAN NOTASI MATRIKS

1. PENGERTIAN BARIS, KOLOM DAN ELEMEN SUATU MATRIKS

Matriks yaitu himpunan bilangan-bilangan yang tersusun menurut baris dan kolom berbentuk persegi panjang dan ditulis diantara tanda kurung ( ) atau [ ].
Nama matriks dengan menggunakan huruf besar. Elemen-elemen suatu matriks dengan huruf kecil sesuai nama matriks dengan indeks sesuai letak elemennya.

Contoh 1: Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

Tentukan :

a. banyak baris
b. banyak kolom
c. elemen-elemen baris ke-2
d. elemen-elemen kolom ke-3
e. $b_{3.2}$
f. $b_{1.3}$

Penyelesaian :

a. banyak baris = 3 baris
b. banyak kolom = 3 kolom
c. celemen-elemen baris ke-2 = 3, 3, - 5
d. elemen-elemen kolom ke-3 = 4, - 5, - 2
e. $b_{3.2}$ = elemen baris ke-3 kolom ke-2 = - 4
f. $b_{1.3}$ = elemen baris ke-1 kolom ke-3 = 4

Contoh 2: Diketahui $X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Tentukan letak elemen 2 dan 6 !

Penyelesaian :

elemen 2 = $x_{21.}$
elemen 6 = $x_{32.}$

2. ORDO MATRIKS

Yaitu banyaknya baris dan kolom yang menyatakan suatu matriks.
A_{mxn} artinya matriks A berordo m x n yaitu banyaknya baris m buah dan banyaknya kolom n buah.

Contoh 3: Diketahui $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Tentukan ordo matriks P

Penyelesaian : Ordo matriks P = 2 x 4

3. JENIS-JENIS MATRIKS

1. Matriks Nol
   Yaitu matriks yang setiap elemennya nol.
   Misal : $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Matriks Baris
   Yaitu matriks yang hanya mempunyai satu baris
   Misal : $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

3. Matriks Kolom
   Yaitu matriks yang hanya mempunyai satu kolom.
   Misal : $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. Matriks Bujur sangkar
   Yaitu suatu matriks yang jumlah baris dan kolomnya sama.
   Ordo matriks n x n sering disingkat dengan n saja.
   Misal : $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

5. Matriks Diagonal
   Yaitu matriks persegi yang semua elemennya nol, kecuali elemen-elemen diagonal utamanya.
   Misal : $E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

6. Matriks Satuan (Identitas)
   Yaitu matriks persegi yang semua elemen diagonal utamanya satu, dan elemen lainnya nol.
   Misal : $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. Matriks Skalar
   Yaitu matriks persegi yang semua elemen pada diagonal utamanya sama, tetapi bukan nol dan semua elemen lainnya nol.
   Misal : $G = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

8. Matriks Segitiga Atas
   Yaitu matriks yang semua elemen di bawah diagonal utamanya nol.

Misal : $H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

9. Matriks Segitiga Bawah
   Yaitu matriks yang semua elemen di atas diagonal utamanya nol.
   Misal : $K = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

LATIHAN SOAL

1. Diketahui $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$
   Tentukan :
   a. elemen-elemen baris ke-2
   b. elemen-elemen kolom ke-2
   c. elemen-elemen kolom ke-4
   d. elemen baris ke-1 kolom ke-3
   e. elemen baris ke-3 kolom ke-5
   f. ordo P
2. Diketahui $X = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$
   Tentrukan :
   a. ordo X
   b. elemen-elemen baris ke-2
   c. $x_{2.3}$
   d. $x_{3.1}$
   e. $x_{3.2}$
3. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -5 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$
   Tentukan letak elemen :
   a. –2 b. 5 c. 6 d. 3 e. 0
4. Berikut ini termasuk jenis matriks apa ?
   a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

   c. $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ d. $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

5. Berikan contoh lain dari matriks :
   a. skalar b. segitiga bawah
   c. segitiga atas d. Diagonal

4. KESAMAAN DUA MATRIKS

Dua matriks dikatakan sama jika ordo dan elemen-elemen yang seletak sama.

Contoh 1: Mana matriks yang sama ?

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix}1 & \sqrt{4}\\ \sqrt{9} & 2^2\end{bmatrix}$$

Penyelesaian : Matriks yang sama yaitu matriks A dan C

Contoh 2: Tentukan x dan y dari $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & x\\ 2y & -5\end{bmatrix}$

Penyelesaian : x = 1

2y = 0
$\Rightarrow$ y = 0

5. TRANSPOSE MATRIKS

Transpose (putaran) matriks A yaitu matriks yang diperoleh dari matriks A dengan menukarkan elemen-elemen pada baris menjadi kolom dan sebaliknya elemen-elemen pada kolom menjadi baris.
Transpose matriks A dinyatakan dengan A^T atau A'.

Contoh 3: Jika $P=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ maka tentukan P^T

Penyelesaian : $P^t=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}$

LATIHAN SOAL

1. Tentukan x dan y dari :

a. $\begin{bmatrix}3 & 3x\\ 8 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -9\\ 2y & -5\end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x & 1\\ 0 & y+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 0 & x\end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix}-4 & y+1\\ 2x & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 2y-x\\ x-5 & 3\end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix}x+2y\\ x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}$

2. Tentukan a, b, c dan d dari :

a. $\begin{bmatrix}5 & 2a-6\\ 3b & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2b\\ 6 & 4\end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix}\frac{10}{b} & 2c\\ a-2 & bd\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a & -6\\ c & 8\end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix}-3 & a\\ b+1 & \frac{d}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{c}{b} & d-3\\ a-2 & 5\end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix}a+c & 3b+4d\\ -b+3d & 2a-c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 15\\ 8 & 5\end{bmatrix}$

3. Tentukan transposenya dari :

a. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

4. Tentukan c jika $A = \begin{bmatrix} 4a & 4 \\ 2b & 3c \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} c-6b & 2a \\ 4a+2 & 2b+14 \end{bmatrix}$ dan $A = B^T$

B. OPERASI MATRIKS

1. PENJUMLAHAN MATRIKS

Dua matriks dapat dijumlahkan jika ordonya sama. Yang dijumlahkan yaitu elemen-elemen yang seletak.

Contoh 1: Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ maka tentukan A + B

Penyelesaian : A + B = …

Contoh 2: Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, tentukan :

a. A + B b. B + A c. A + (B + C) d. (A + B) + C

Penyelesaian : a. A + B = …

b. B + A = …

c. A + (B + C) = …

d. (A + B) + C = …

Contoh 3: Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ dan $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Tunjukkan : a. A + (-A) = (-A) + A = O
b. A + O = O + A = A

Penyelesaian : a. A + (-A) = …

(-A) + A = …

b. A + O = …

O + A = …

Sifat-sifat penjumlahan matriks :

1. A + B = B + A (bersifat komutatif)
2. A + (B + C) = (A + B) + C (bersifat asosiatif)
3. A + O = O + A = A (O matriks identitas dari penjumlahan)
4. A + (-A) = (-A) + A = O (-A matriks invers penjumlahan)

2. PENGURANGAN MATRIKS

Dua matriks dapat dikurangkan jika ordonya sama. Yang dikurangkan elemen-elemen yang seletak.

Contoh 4: Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, maka tentukan :

a. A – B b. B – A

Penyelesaian : a. A – B = …

b. B – A = …

Sifat-sifat Pengurangan matriks :

1. A – B $\neq$ B – A (tidak komutatif)
2. A – (B – C) = (A – B) – C (asosiatif)

LATIHAN SOAL

1. Sederhanakanlah !

a. $\begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & -7 \end{bmatrix}$

f. $\begin{bmatrix}-5 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7 & -3\\ 0 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix}$ g. $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-7 & 2\\ -5 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

h. $\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & -4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-5 & -4\end{bmatrix}$ i. $\begin{bmatrix}2x-y & x\\ 2y & -3y+5x\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3y & -x\\ 5x & 4x-y\end{bmatrix}$

2. Tentukan x jika $\begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{bmatrix}+x=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 2 & -3\end{bmatrix}$

3. Tentukan x jika $-x+\begin{bmatrix}-4 & -1\\ 3 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 2\\ -6 & 3\end{bmatrix}$

4. Tentukan a, b, c dan d dari :

a. $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix}a+b & a\\ c & c-d\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}$

3. PERKALIAN MATRIKS

3.1 PERKALIAN MATRIKS DENGAN BILANGAN REAL (SKALAR)

Hasil perkalian skalar k dengan sebuah matriks A yang berordo m x n adalah sebuah matriks yang berordo m x n dengan elemen-elemennya adalah hasil kali skalar k dengan setiap elemen matriks A.

Contoh 1: Jika $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -5\end{bmatrix}$ maka tentukan :

a. 2A b. $-\frac{1}{2}A$

Penyelesaian : a. 2A = $2\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 6 & -10\end{bmatrix}$

b. $-\frac{1}{2}A$ = …

Contoh 2: Jika $A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix}6 & 4\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ maka tentukan :

a. 2(A + B) b. 2A + 2B c. 2(3A) d. 6A

Penyelesaian : a. 2(A + B) = …

b. 2A + 2B = …

c. 2(3A) = …

d. 6A = …

<u>Sifat-sifat perkalian skalar k dengan suatu matriks</u> :

1. k(A + B) = …
2. (k + l)A = …
3. k(lA) = …

LATIHAN SOAL

1. Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, maka tentukan :

   a. 2A + 2B   b. 3A – 2B   c. $\frac{1}{2}(A+B)$ d. –4(A – B)

2. Tentukan matriks X jika:

   a. $2X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$ b. $2X + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

   c. $2X - \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}X - \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

3. Tentukan a, b, c dan d dari :

   a. $2\begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & d \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 & b \\ c & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

   b. $4\begin{bmatrix} a+1 & c \\ b & 3a \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4b & 8d+2 \\ 2c+4 & 6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} b-2 & c \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$

4. Diketahui $A = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 2b & 3c \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2c-3b & 2a+1 \\ a & b+7 \end{bmatrix}$. Jika $A = 2B^T$, maka tentukan nilai c !

3.2 PERKALIAN MATRIKS DENGAN MATRIKS

Dua matriks A dan B dapat dikalikan jika jumlah kolom matriks A (matriks kiri) sama dengan jumlah baris matriks B (matriks kanan).
Ordo hasil perkalian matriks A_{mxn} dengan B_{nxp}, misalnya matriks C yang akan berordo mxp (seperti permainan domino).

Cara mengalikan matriks A dan B yaitu dengan menjumlahkan setiap perkalian elemen pada baris matriks A dengan elemen kolom matriks B dan hasilnya diletakkan sesuai dengan baris dan kolom pada matriks C (matriks hasil perkalian).

Misal : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix}$ maka :

AB = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+bq & ar+bs & at+bu \\ cp+dq & cr+ds & ct+du \end{bmatrix}$

Contoh 1: Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.

Terntukan :

a. AB b. AC c. AD

Penyelesaian : a. AB = …

b. AC tidak dapat dikalikan, karena …

c. AD = …

Contoh 2: Diketahui $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Tentukan :

a. AB b. BA c. (AB)C d. A(BC)

e. A(B + C) f. AB + AC g. AI h. IA

Penyelesaian : a. AB = …

b. BA = …

c. (AB)C = …

d. A(BC) = …

e. A(B + C) = …

f. AB + AC = …

g. AI = …

h. IA = …

Sifat-sifat perkalian matriks :

1. Umumnya tidak komutatif (AB $\neq$ BA)
2. Asosiatif : (AB)C = A(BC)
3. Distributif kiri : A(B + C) = AB + AC

   Distributif kanan : (B + C)A = BA + CA
4. Identitas : IA = AI = A
5. k(AB) = (kA)B

LATIHAN SOAL

1. Sederhanakan !

a. $\begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -8 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

f. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

g. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ h. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & -3 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

2. Diketahui $X = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Jika $X^2 = X.X$ dan $X^3 = X.X.X$ maka tentukan :

   a. X^2 b. X^3

3. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ maka tentukan :

   a. $(BA)^T$ b. $(AB)^T$

4. Tentukan a jika $\begin{bmatrix} -1 & d \\ -b & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2c & 1 \\ c & a+1 \end{bmatrix}$

C. INVERS MATRIKS

1. INVERS MATRIKS ORDO 2 x 2

Jika AB = BA = I , dimana I matriks satuan yaitu $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka A dan B dikatakan saling invers. Invers matriks A dinotasikan A^{-1}.

Misal $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ maka :

AB = I $\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ap + br = 1
cp + dr = 0 $\Bigg| \Rightarrow p = \dfrac{d}{ad-bc}$ dan $r = \dfrac{-c}{ad-bc}$

aq + bs = 0
cq + ds = 1 $\Bigg| \Rightarrow q = \dfrac{-b}{ad-bc}$ dan $s = \dfrac{a}{ad-bc}$

Karena $B = A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ maka $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$

ad – bc disebut Determinan (D) atau $|A|$ atau det(A).

Jadi $D = |A| = \det(A) = ad - bc$.

Jika D = 0, maka matriks A tidak mempunyai invers dan matriks A disebut matriks Singular.
Jika ad – bc $\neq 0$ maka matriks A disebut matriks Non Singular.

Contoh 1: Tentukan determinan $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian : $|A| = ...$

Contoh 2: Tentukan invers dari $P = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian : $P^{-1} = ...$

Contoh 3: Tentukan x jika $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -2 & x \end{bmatrix}$ merupakan matriks singular !

Penyelesaian : ad – bc = 0 $\Rightarrow$ …

Contoh 4: Tentukan matriks X jika $X\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian : XA = B $\Rightarrow$ X = BA^{-1} = …

Jika ada persamaan matriks berbentuk :

AX = B maka X = $A^{-1}B$ XA = B maka X = BA^{-1}

LATIHAN SOAL

1. Tentukan determinannya !

   a. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ b. B = $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ c. $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ d. $D = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

2. Tentukan inversnya ! (jika ada)

   a. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ c. $C = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$ d. $D = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$

3. Tentukan x jika $P = \begin{bmatrix} x & -8 \\ -x & 2x \end{bmatrix}$ singular

4. Tentukan matriks X jika :

a. $X\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 14 & 15 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 28 \\ -14 \end{bmatrix}$

d. $X\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 14 & 5 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$

2. INVERS MATRIKS ORDO 3 x 3

2.1 DETERMINAN MATRIKS ORDO 3 X 3

Cara menentukan determinan matriks ordo 3 x 3 dengan menggunakan diagram SARRUS, yaitu :

1. Salin kolom ke-1 dan ke-2 pada kolom ke-4 dan ke-5
2. Kurangkan jumlah perkalian elemen-elemen pada diagonal ke bawah dengan jumlah perkalian elemen-elemen pada diagonal ke atas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = |A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

= (…..) + (….) + (….) – (…) - (…) – (…)

Contoh 1: Jika $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ maka tentukan $|P|$

Penyelesaian : $|P| = \left|\begin{array}{ccc|cc} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right| = \ldots$

$= \ldots$

MINOR, KOOFAKTOR DAN ADJOINT

Minor yaitu sebuah determinan yang diperoleh dengan cara menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j, dan ditulis dengan M_{ij}. Sedangkan koofaktor diperoleh dari perkalian M_{ij} dengan $(-1)^{i+j}$ dan ditulis dengan A_{ij}. Sedangkan adjoint yaitu koofaktor yang ditransposekan dan ditulis dengan Adj(A).

Contoh 2: Diketahui $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Tentukan :

a. M_{12} b. M_{22} c. A_{31} d. A_{23} e. Adj(M)

Penyelesaian : a. $M_{12} = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \ldots$

b. $M_{22} = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \ldots$

c. $A_{31} = (-1)^{\ldots+\ldots} \begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \ldots$

d. $A_{23} = (-1)^{\ldots+\ldots} \begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \ldots$

e. $\text{Adj(M)} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$

2.3 INVERS MATRIKS ORDO 3 X 3

Untuk menentukan invers matriks A ordo 3 x 3 dengan menggunakan rumus :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)}$$

Contoh 3: Tentukan invers dari $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$$|P| = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}\begin{matrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{matrix} = \dots.$$

$$Adj(P) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \dots.$$

$$P^{-1} = \frac{\dots}{\dots}\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \dots.$$

LATIHAN SOAL

1. Tentukan determinan dari :

   a. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ c. $C = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

2. Tentukan x jika $\begin{vmatrix} 3 & x & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 35$

3. Diketahui $X = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$. Tentukan :

   a. M_{21} b. M_{33} c. A_{12} d. A_{22} e. Adj(X)

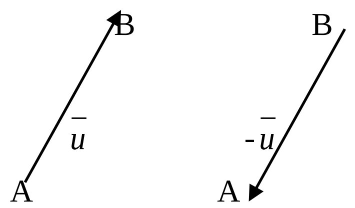
4. Tentukan inversnya dari :

   a. $P = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b. $Q = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

V E K T O R

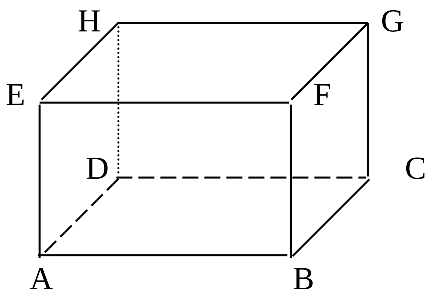
PENGERTIAN VEKTOR

Vektor adalah suatu besaran yang mempunyai nilai (besar) dan arah. Suatu vektor dapat digambarkan sebagai ruas garis berarah. Nilai (besar) vektor dinyatakan dengan panjang garis dan arahnya dinyatakan dengan tanda panah. Notasi vektor biasanya dengan menggunakan tanda anak panah di atasnya atau bisa juga dengan menggunakan huruf kecil yang tebal. Suatu vektor biasanya juga bisa dinyatakan dengan pasangan terurut bilangan real atau bisa juga dengan menggunakan matriks kolom. Misalnya : $\bar{a} = (2,3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Maksudnya vektor tersebut 2 ke arah kanan dan 3 ke arah atas. Vektor $\overrightarrow{AB}$ berarti titik A sebagai titik pangkal dan titik B sebagai ujung. Vektor $\overrightarrow{BA}$ dengan vektor $\overrightarrow{AB}$ besarnya (panjangnya) sama, hanya arahnya saling berlawanan. Jadi jika vektor $\overrightarrow{AB}$ dinyatakan dengan $\bar{u}$ maka vektor suka dinyatakan dengan -$\bar{u}$.



Dua vektor dikatakan sama jika besar dan arahnya sama. Artinya suatu vektor letaknya bisa di mana saja asalkan besar dan arahnya sama.

Contoh 1: Pada balok di bawah ini , tentukan vektor lain yang sama dengan vektor $\overrightarrow{AB}$!



Jawab : ……

A. VEKTOR DI RUANG DIMENSI DUA

1. VEKTOR POSISI

Vektor posisi yaitu vektor yang posisi (letaknya) tertentu. Misalnya $\overrightarrow{AB}$ merupakan vektor posisi dimana pangkalnya di titik A dan ujungnya di titik B. Atau misalnya $\overrightarrow{OA}$ yaitu vektor posisi yang awalnya di titik pusat dan ujungnya di titik A. Vektor posisi $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ dan seterusnya biasanya diwakili oleh vektor dengan huruf kecil misalnya $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ dan sebagainya. Jadi $\overrightarrow{OA} = \bar{a}, \overrightarrow{OB} = \bar{b}, \overrightarrow{OC} = \bar{c}$.

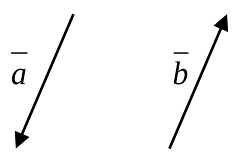
$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \bar{b} - \bar{a}}$$

Contoh 3 : Jika titik A(1,2) dan B(5,9) maka tentukan $\overrightarrow{AB}$!

Penyelesaian : ………….

2. VEKTOR NEGATIF (VEKTOR INVERS)

Vektor negatif (invers) dari vektor $\bar{a}$ sering ditulis - $\bar{a}$ yaitu vektor yang panjangnya sama tetapi arahnya berlawanan.

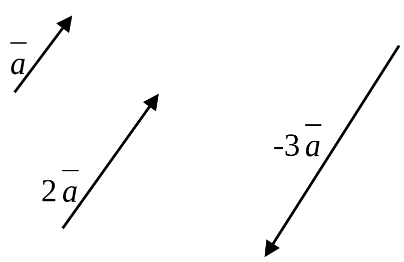


maka $\bar{b}$ = - $\bar{a}$

3. OPERASI PADA VEKTOR DI RUANG DIMENSI DUA

3.1 PERKALIAN VEKTOR DENGAN SKALAR

Jika k suatu bilangan real maka k$\bar{a}$ adalah suatu vektor yang panjangnya k kali lipat panjang $\bar{a}$. Jika k positif maka searah dengan $\bar{a}$ dan jika k negatif maka berlawanan arah dengan $\bar{a}$.

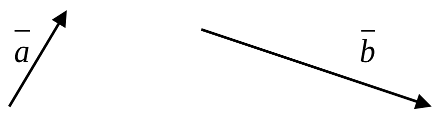


3.2 PENJUMLAHAN VEKTOR

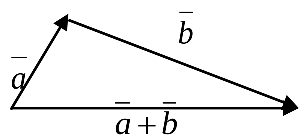
Penjumlahan 2 vektor dapat dilakukan dengan 2 cara, yaitu aturan segitiga dan dengan aturan jajargenjang.
Penjumlahan 2 vektor dengan aturan segitiga yaitu dengan mempertemukan ujung vektor yang satu ($\bar{a}$) dengan awal vektor yang lain ($\bar{b}$), sehingga resultan (hasil penjumlahan vektor) kedua vektor adalah awal vektor yang satu ($\bar{a}$) ke ujung vektor yang lain ($\bar{b}$).

Sedangkan penjumlahan dengan aturan jajargenjang yaitu dengan mempertemukan kedua awal vektor, kemudian membuat vektor kembarannya pada masing-masing ujung kedua vektor sehingga membentuk suatu bangun jajargenjang. Resultan kedua vektor adalah awal pertemuan kedua vektor tersebut ke ujung pertemuan kedua vektor tersebut.

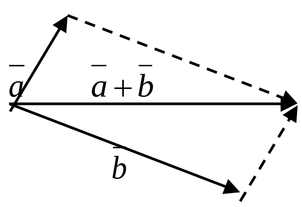
Contoh 4 : Tentukan $\bar{a}+\bar{b}$ dari vektor-vektor di bawah ini !



Penyelesaian : Cara I (aturan segitiga) :

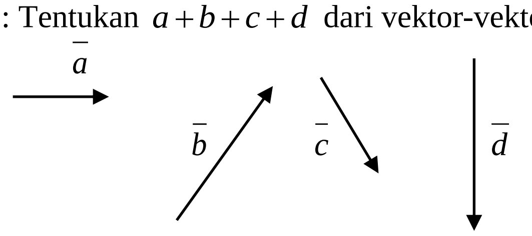


Cara II (aturan jajargenjang) :

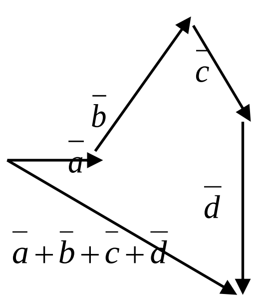


Penjumlahan untuk 3 vektor atau lebih digunakan aturan poligon yang merupakan pengembangan dari aturan segitiga.

Contoh 5 : Tentukan $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}$ dari vektor-vektor di bawah ini :



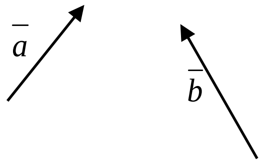
Jawab :



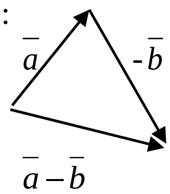
3.3 SELISIH DUA VEKTOR

Selisih dua vektor $\overline{a}$ dan $\overline{b}$ ditulis $\overline{a}-\overline{b}$ dapat dipandang sebagai penjumlahan $\overline{a}$ dengan -$\overline{b}$ (vektor invers $\overline{b}$). Jadi $\overline{a}-\overline{b} = \overline{a}+\left(-\overline{b}\right)$

Contoh 5 : Tentukan $\overline{a}-\overline{b}$ jika diketahui :

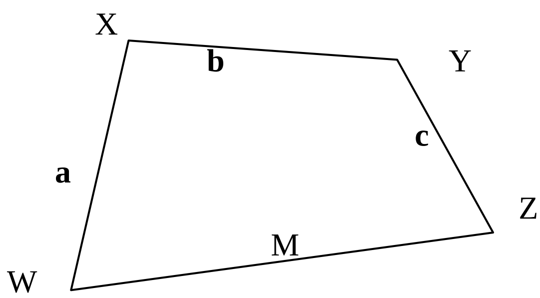


Penyelesaian :



LATIHAN SOAL

1. Perhatikan gambar berikut :



Jika $\overrightarrow{WX}$ = **a**, $\overrightarrow{XY}$ = **b**, dan $\overrightarrow{YZ}$ = **c**, dan M merupakan titik tengah WZ, nyatakan dalam vektor **a, b** dan **c** untuk vektor-vektor berikut :

a. $\overrightarrow{WY}$

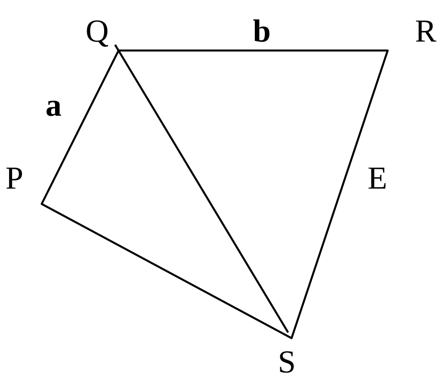
b. $\overrightarrow{ZX}$

c. $\overrightarrow{WZ}$

d. $\overrightarrow{WM}$

e. $\overrightarrow{MY}$

2. Perhatikan gambar berikut :



Jika $\overrightarrow{PQ}$ = **a**, $\overrightarrow{QR}$ = **b** dan $\overrightarrow{RS}$ = **c**. Titik E dan F berturut-turut titik tengah RS dan QS. Nyatakan dalam **a, b** dan **c** untuk vektor-vektor :

$a.\quad \overrightarrow{PR}$

$b.\quad \overrightarrow{RP}$

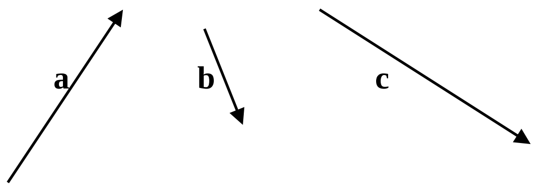
$c.\quad \overrightarrow{PS}$

$d.\quad \overrightarrow{QE}$

$e.\quad \overrightarrow{PF}$

$f.\quad \overrightarrow{FR}$

3. Diberikan vektor-vektor berikut :



Jika panjang vektor **a** = 2 cm, **b** = 1 cm dan **c** = 2,5 cm, maka lukislah dengan aturan poligon vektor-vektor di bawah ini :

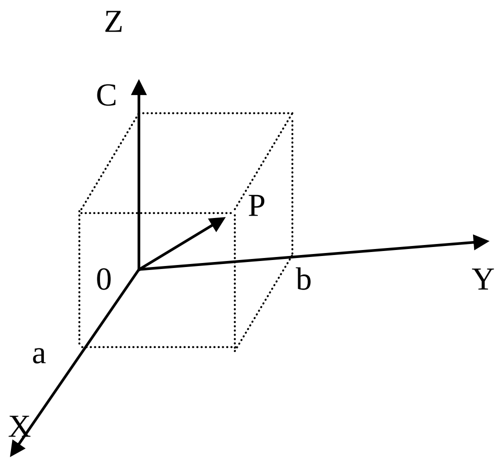
a. **a** + **b** +**c**
b. **a** - 2**b** + 3**c**
c. 2**a** – **b** – **c**

4. Diketahui ABCDEF adalah segienam beraturan. Jika $\overrightarrow{BC}$ dan $\overrightarrow{FC}$ masing-masing mewakili vektor **b** dan **2a**, maka nyatakan vektor-vektor $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\ dan\ \overrightarrow{BE}$ dengan **a** dan **b**

5. P, Q dan R berturut-turut adalah titik tengah sisi AB, BC dan AC suatu segitiga ABC. Jika O adalah sembarang titik dalam segitiga ABC, maka tunjukkan bahwa $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$

B. VEKTOR DI RUANG DIMENSI TIGA

Vektor basis (vektor satuan) di ruang dimensi tiga biasanya dinyatakan dengan $\bar{i}, \bar{j}\ dan\ \bar{k}$. $\bar{i}$ vektor satuan searah sumbu $\overrightarrow{OX}$, $\bar{j}$ vektor satuan searah sumbu $\overrightarrow{OY}$ dan $\bar{k}$ vektor satuan searah sumbu $\overrightarrow{OZ}$. Jadi misalnya vektor $\overrightarrow{OP} = \bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ dapat digambarkan sebagai berikut :



Bentuk vektor di atas dapat juga dinyatakan dengan vektor kolom $\overrightarrow{OP} = \bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

1. OPERASI PADA VEKTOR DI RUANG DIMENSI TIGA

1.1 PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN DUA VEKTOR

Jika $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}\ dan\ \bar{v} = p\bar{i} + q\bar{j} + r\bar{k}$ maka :

$\bar{u} + \bar{v} = (a+p)\bar{i} + (b+q)\bar{j} + (c+r)\bar{k}$

$\bar{u} - \bar{v} = (a-p)\bar{i} + (b-q)\bar{j} + (c-r)\bar{k}$

Contoh 2 : Jika $\bar{a} = 5\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}\ dan\ \bar{b} = -\bar{i} + 7\bar{j} - 5\bar{k}$ maka tentukan $\bar{a} + \bar{b}\ dan\ \bar{b} - \bar{a}$!

Penyelesaian : …….

1.2 PERKALIAN SKALAR DENGAN VEKTOR

Jika $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ dan n suatu skalar bilangan real maka :

$n\bar{u} = na\bar{i} + nb\bar{j} + nc\bar{k}$

Contoh 3 : Jika $\bar{a} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}$ maka tentukan 10 $\bar{a}$!

Penyelesaian : ……

LATIHAN SOAL

1. Nyatakan dalam vektor-vektor posisi dari titik-titik di bawah ini :
   a. A(1,2,3)
   b. B(2,-1,-3)
   c. C(0,2,4)
   d. D(0,1,0)

2. Diberikan titik P(2,4,3) dan Q(1,-5,2).
   a. Nyatakan vektor posisi $\overrightarrow{OP}$ dan $\overrightarrow{OQ}$ dalam vektor satuan **i**, **j** dan **k**
   b. Tentukan vektor $\overrightarrow{PQ}$ dalam satuan **i**, **j** dan **k**

3. Ulangi soal no. 2 untuk P(0,-1,5) dan Q(1,0,-2)

4. Ditentukan vektor-vektor $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ dan $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
   Tentukan :
   a. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$
   b. $\mathbf{r} = 2\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2$

5. Carilah nilai a, b dan c jika : $a\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

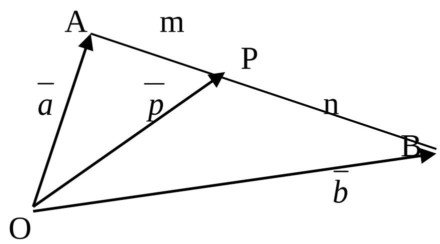
6. Buktikan bahwa vektor-vektor $\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}\ dan \begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$ membentuk sebuah segitiga !

7. Tunjukkan bahwa vektor yang melalui titik-titik (2,2,3) dan (4,3,2) sejajar dengan vektor-vektor yang melalui titik-titik (5,3,-2) dan (9,5,-4)

8. Diketahui P(6,4,2), Q(8,6,4) dan R(2,2,2). Tunjukkan bahwa OPQR adalah jajargenjang !

C. RUMUS PERBANDINGAN

Misalkan titik P pada garis AB dengan perbandingan AP : PB = m : n. Perhatikan gambar di bawah ini !



$$AP : PB = m : n \iff \frac{\bar{p}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{p}} = \frac{m}{n} \iff n\bar{p} - n\bar{a} = m\bar{b} - m\bar{p}$$

$$\bar{p}\,(m+n) = m\bar{b} + n\bar{a} \iff \bar{p} = \frac{m\bar{b}+n\bar{a}}{m+n}$$

Jadi :

$$\boxed{\bar{p} = \frac{m\bar{b}+n\bar{a}}{m+n}}$$

Jadi jika titik $A(x_{A1}, y_A, z_A)$ dan $B(x_B, y_B, z_B)$ maka koordinat :

$$\boxed{P(\frac{mx_A+nx_B}{m+n}, \frac{my_A+ny_B}{m+n}, \frac{mz_A+nz_B}{m+n})}$$

Titik P bisa membagi AB dengan perbandingan di dalam seperti di atas atau bisa juga dengan perbandingan di luar, maksudnya titik P di luar ruas garis AB. Jika arah perbandingannya berlawanan harus dengan menggunakan tanda negatif.

Contoh 1: Diketahui titik A(1,2,3) dan titik B(4,8,12). Jika titik P membagi AB di dalam dengan perbandingan AP : PB = 1 : 2. Tentukan koordinat titik P !

Penyelesaian : …………..

Contoh 2: Diketahui titik A(-1,0,1) dan titik B(2,2,2). Jika titik P membagi AB di luar dengan perbandingan AP : PB = 3 : -1. Tentukan koordinat titik P !

Penyelesaian : …………..

LATIHAN SOAL

1. Gambarlah garis AB yang panjangnya 6 cm. Titik C adalah titik pada AB. Tandailah letak titik C sedemikian sehingga :
   a. AC : CB = 2 : 1
   b. AC : CB = 3 : 1
   c. AC : CB = 3 : -2
   d. AC : CB = 1 : -3

2. Tentukan koordinat C jika :
   a. A(3,2), B(9,5) dan AC : CB = 2 : 1
   b. A(-1,-3), B(7,5) dan C titik tengah dari AB
   c. A(-3,-2), B(7,3) dan AC : CB = 3 : 2

3. R adalah titik pada perpanjangan PQ. Tentukan koordinat R jika :
   a. P(2,1), Q(4,7) dan PR : RQ = 3 : -2
   b. P(-1,-2), Q(4,0) dan PR : RQ = -2 : 1

4. M adalah titik pada garis PQ. Tentukan koordinat M jika :
   a. P(1,0,2), Q(5,4,10) dan PM : MQ = 3 : 1
   b. P(-3,-2,-1), Q(0,-5,2) dan PM : MQ = 4 : -3

5. Titik sudut segitiga ABC adalah A(6,-9,-3), B(2,3,0) dan C(3,5,2). T adalah titik potong garis berat dari B ke sisi AC. Tentukan koordinat titik T !

6. Dalam segitiga ABC, Z adalah titik berat segitiga ABC. Tunjukkan bahwa

   $$\mathbf{z} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$$

7. Pada segitiga ABC, titik E pada AC sedemikian sehingga AE : EC = 3 : 1 dan titik D pada BC sedemikian sehingga BD : DC = 1 : 2. Tunjukkan bahwa ED dapat dinyatakan dengan vektor **a**, **b** dan **c** sebagai $\frac{1}{12}(-3\mathbf{a} + 8\mathbf{b} - 5\mathbf{c})$

D. PANJANG VEKTOR

1. MODULUS VEKTOR (PANJANG VEKTOR) DI RUANG DIMENSI DUA

Modulus (panjang) suatu vektor $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ yaitu $\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}}$

Contoh 2 : Diketahui vektor $\bar{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, tentukan $|\bar{u}|$!

Jawab : ....

2. MODULUS VEKTOR (PANJANG VEKTOR) DI RUANG DIMENSI TIGA

Panjang suatu vektor $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ adalah $\boxed{|\bar{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Contoh 1 : Jika diketahui $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$ maka tentukan $|\bar{a}|$!

Penyelesaian : …………

LATIHAN SOAL

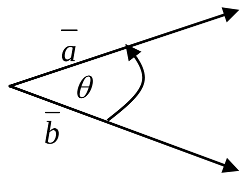
1. Hitunglah panjang vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$
2. Hitunglah jarak antara titik A(-5,-4,-1) dan B(3,2,-1)
3. Jika **a** = **i** – 2**j** + 2**k** dan **b** = **3i** + 6**j** – 2**k**, maka hitunglah :
   a. | **a** |
   b. | **b** |
   c. | **a** – **b** |
4. Vektor posisi titik P dan Q adalah **p** = **2i** – **j** + 3**k** dan **q** = **4i** + 2**j** – 3**k**
   a. Tentukan $\overrightarrow{PQ}$
   b. Hitunglah $|\overrightarrow{PQ}|$
5. Segitiga ABC dengan A(3,-1,5), B(4,2,-5) dan C(-4,0,3). Jika D merupakan titik tengah sisi BC, hitunglah panjang garis AD !
6. Koordinat titik A(7,-5,5), B(7,-3,4) dan C(7,-4,2). Tunjukkan bahwa segitiga ABC siku-siku sama kaki !
7. AB, BC dan CD masing-masing wakil dari vektor $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} dan \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Tunjukkan bahwa A dan D berimpit dan segitiga ABC siku-siku !

E. PERKALIAN SKALAR DUA VEKTOR

Hasil kali skalar dua vektor $\overline{a}$ dan $\overline{b}$ ditulis $\overline{a} \bullet \overline{b}$ yang didefinisikan sebagai berikut :

$\boxed{\overline{a} \bullet \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\theta}$ dimana θ sudut antara vektor $\overline{a}$ dan $\overline{b}$.



Contoh 1 : Jika $|\overline{a}| = 4\ dan\ |\overline{b}| = 6$ dan sudut antara $\overline{a}$ dan $\overline{b}$ adalah 60° maka tentukan $\overline{a} \bullet \overline{b}$!

Penyelesaian : ………….

SIFAT-SIFAT HASIL KALI SKALAR

1. Dua vektor yang saling sejajar : $\overline{a} \bullet \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos 0^\circ = |\overline{a}||\overline{b}|$
2. Dua vektor yang saling tegak lurus : $\overline{a} \bullet \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos 90^\circ = 0$
3. Dua vektor yang berlawanan arah : $\overline{a} \bullet \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos 180^\circ = -|\overline{a}||\overline{b}|$
4. Bersifat komutatif : $\overline{a} \bullet \overline{b} = \overline{b} \bullet \overline{a}$
5. Bersifat distributif : $\overline{a} \bullet (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \bullet \overline{b} + \overline{a} \bullet \overline{c}$

PERKALIAN SKALAR DUA VEKTOR DALAM BENTUK KOMPONEN

Jika $\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}\ dan\ \overline{b} = b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}$ maka $\boxed{\overline{a} \bullet \overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$

Contoh 2 : Diketahui $\overline{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} dan\ \overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ maka tentukan $\overline{a} \bullet \overline{b}$!

Penyelesaian : …………….

LATIHAN SOAL

1. Jika $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, tentukan :
   a. **i . i**
   b. **i . j**
   c. **i . k**
   d. **j . j**
   e. **j . k**
   f. **k . k**

2. Tentukan **a . b** jika θ adalah sudut antara **a** dan **b** dari :
   a. $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$ dan $\theta = 60^\circ$
   b. $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 1$ dan $\theta = 120^\circ$

3. Diketahui **a** = **2i** + 5**j** + **k** dan **b** = **i** – 2**j** – **k**. Tentukan :
   a. **a . b**
   b. **b . a**
   c. **a . a**

4. Diketahui A(1,,0,-1), B(-2,-1,3) dan C(1,1,1). Jika **a** wakil dari vektor $\overrightarrow{BA}$ dan **b** wakil dari vektor $\overrightarrow{BC}$, hitunglah **a . b**

5. Diketahui jajargenjang ABCD dengan A(2,3,1), B(4,5,2) dan D(2,-1,4). Hitunglah vektor $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

6. Diketahui $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 6$ dan sudut antara **a** dan **b** adalah 120°. Hitunglah :
   a. **a** . (**a** + **b**)
   b. **a .** (**a** – **b**)
   c. (**a** + **b**) . (**a** + **b**)
   d. (**a** – **b**) . (**a** + **b**)

7. Diketahui $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 1$, $|\mathbf{c}| = 4$ dan **a** + **b** + **c** = 0. Hitunglah **a . b** + **b . c** + **c . a**

8. Diketahui vektor **a . b** = 6. Hitunglah $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ jika $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{17}$

F. SUDUT ANTARA DUA VEKTOR

Sudut antara vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ adalah $\boxed{\cos\theta = \dfrac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}}$

Contoh 1: Diketahui $\bar{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $dan\, \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tentukan sudut antara $\bar{a}$ dan $\bar{b}$!

Penyelesaian :

$\bar{a} \bullet \bar{b} = ...$

$|\bar{a}| = ...$

$|\bar{b}| = ...$

$\cos\theta = ...\quad \Leftrightarrow \quad \theta = ...$

<u>LATIHAN SOAL</u>

1. Tentukan kosinus sudut antara vektor $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} dan \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

2. Hitunglah besar sudut AOB jika :
   a. A(4,2,-1) dan B(2,-2,4)
   b. A(1,0,1) dan B(0,1,-1)

3. Tentukan kosinus sudut antara vektor **a** = **3i** + 7**j** + 2**k** dan **b** = **i** + **j** – 6**k**

4. Tentukan nilai m jika **a** = m**i** – 2**j** + **k** dan **b** = 2m**i** + m**j** – 4**k** saling tegak lurus.

5. Diketahui A(-5,5,7), B(-3,4,7) dan C(-4,2,7). Perlihatkan bahwa segitiga ABC adalah siku-siku dengan menggunakan perkalian skalar !

6. Diketahui A(1,4,4), B(0,2,3) dan C(1,0,2). Hitunglah besar sudut-sudut segitiga ABC

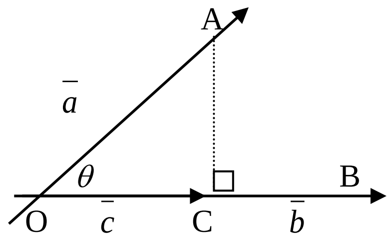
7. Diketahui A(-2,-1,3), B(4,2,3) dan D(3,-1,1). C membagi AB dengan perbandingan 2 : 1. Tunjukkan bahwa sudut ACD siku-siku dengan menggunakan perkalian skalar !

8. Diketahui A(1,0,1), B(4,6,10), C(5,-2,8) dan D(9,6,6). P membagi AB dengan perbandingan 2 : 1 dan Q adalah titik tengah CD.
   a. Tentukan vektor yang diwakili oleh AB, CD dan PQ
   b. Buktikan bahwa PQ tegak lurus AB dan CD

G. PROYEKSI ORTOGONAL SUATU VEKTOR

1. PROYEKSI SKALAR ORTOGONAL

Perhatikan gambar di bawah ini :



Karena $\left|\overrightarrow{OC}\right| = |\bar{c}| = |\bar{a}|\cos\theta \; dan \cos\theta = \dfrac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$ maka :

Panjang proyeksi vektor $\bar{a}$ terhadap $\bar{b}$ yaitu $\boxed{\left|\overrightarrow{OC}\right| = |\bar{c}| = \dfrac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{|\bar{b}|}}$

Contoh 1: Diketahui $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} dan\, \bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Tentukan panjang proyeksi vektor $\bar{a}$ terhadap $\bar{b}$!

Penyelesaian :

$\bar{a} \bullet \bar{b} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$|\bar{b}| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$|\bar{c}| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. VEKTOR SATUAN

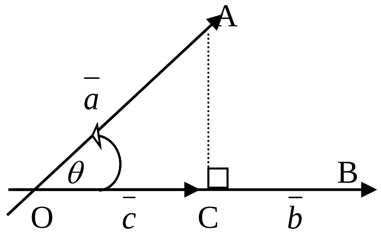
Vektor satuan vektor $\bar{a} = \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$

Contoh 2 : Tentukan vektor satuan vektor $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$!

Penyelesaian : …………

3. VEKTOR PROYEKSI

Perhatikan gambar di bawah ini :



$$\overrightarrow{OC} = \bar{c} = |\bar{c}| \; x \; vektor \;\; satuan \, \bar{b} = \frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{|\bar{b}|} x \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \bar{b}$$

Jadi proyeksi vektor $\bar{a}$ terhadap $\bar{b}$ adalah :

$$\boxed{\bar{c} = \frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \bar{b}}$$

Contoh 3 : Tentukan vektor proyeksi dari vektor $\bar{a}$ terhadap $\bar{b}$ pada contoh 1 di atas !

Penyelesaian : …………….

LATIHAN SOAL

1. Diketahui **a** = 2**i** + 2**j** - **k** dan **b** =6 **i** - 3 **j** + 2**k**. Tentukan :
   a. panjang proyeksi dan vektor proyeksi **a** terhadap vektor **b**
   b. panjang proyeksi dan vektor proyeksi **b** terhadap vektor **a**

2. Diketahui P(2,4,3) dan Q(1,-5,2). O adalah titik pangkal. Tentukan :
   a. panjang proyeksi dan vektor proyeksi **p** terhadap vektor **q**
   b. panjang proyeksi dan vektor proyeksi **q** terhadap vektor **p**

3. Diketahui P(3,2,-1) dan Q(-4,-2,3) serta **a** = -**3i** + 4**j** + **k**
   a. Tentukan panjang proyeksi **a** pada vektor $\overrightarrow{PQ}$
   b. Tentukan panjang proyeksi dan vektor proyeksi $\overrightarrow{PQ}$ terhadap **a**

4. Diketahui P(3,5,0), Q(1,3,-1) dan R(-1,4,1). Hitung panjang vektor proyeksi $\overrightarrow{PQ}$ terhadap vektor $\overrightarrow{PR}$

5. Diketahui | **a** | = 6, | **b** | = 8 dan sudut antara **a** dan **b** sama dengan 45°. Hitung panjang vektor proyeksi dan vektor proyeksi **a** terhadap **b**

6. Tentukan proyeksi **a** = 4**i** - 3**j** + **k** pada garis yang melalui titik-titik (2,3,-1) dan (-2,-4,3)

7. Diketahui **p** = -3**i** + m**j** + n**k** dan **q** =-2**i** + **j** + 2**k**. Jika | **p** | = $3\sqrt{6}$, maka tentukan nilai m dan n agar panjang proyeksi **p** pada **q** sama dengan 2 satuan

8. Vektor proyeksi 2**i** + **j** + 3**k** terhadap vektor **i** + 3**j** – p**k** adalah $\frac{1}{2}$**i** + $\frac{3}{2}$**j** - $\frac{1}{2}$**k**. Tentukan nilai p !

TRANSFORMASI

PENGERTIAN TRANSFORMASI

Transformasi adalah perpindahan dari suatu posisi ke posisi lain. Dalam geometri, transformasi ialah suatu pemetaan setiap bangun geometri pada suatu bidang ke bangun geometri lainnya pada bidang yang sama, yang disebut transformasi bidang.

Ada 2 macam transformasi, yaitu :

1. Transformasi isometri yaitu suatu transformasi yang tidak merubah ukuran bangun semula.
   Yang termasuk transformasi isometri : pergeseran (translasi), pencerminan (refleksi) dan pemutaran (rotasi).
2. Transformasi non-isometri yaitu suatu transformasi yang merubah ukuran bangun semula.
   Yang termasuk transformasi non-isometri : perkalian (dilatasi)

Untuk menentukan bayangan hasil transformasi biasanya dipergunakan bantuan matriks.

1. PERGESERAN (TRANSLASI)

Suatu titik P(x,y) ditranslasikan oleh translasi $T = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ menjadi P'(x',y ') ditulis P(x,y) $\xrightarrow{T}$ P'(x',y ') dimana

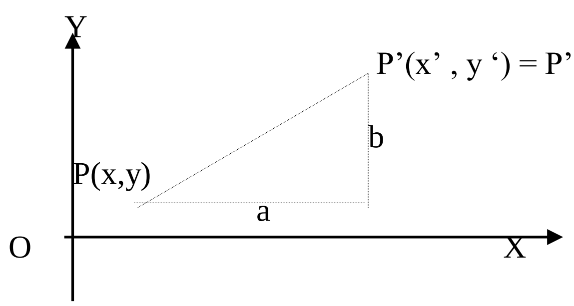
x' = x + a

y ' = y + b

atau

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Secara geometri dapat digambarkan sebagai berikut :



Contoh 1: Tentukan bayangan (peta) dari titik A(-1,2) oleh translasi $T = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian : ……………………..

Tidak hanya titik yang dapat ditranslasikan tetapi bisa juga garis atau kurva. Yaitu dengan menyatakan x dan y dengan x' dan y' kemudian disubstitusikan ke persamaan garis atau kurva yang ditranslasikan.

Contoh 2 : Tentukan bayangan garis y = 2x – 1 oleh translasi $T = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Penyelesaian : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = x' + 3 \\ y = y' - 4 \end{matrix}$

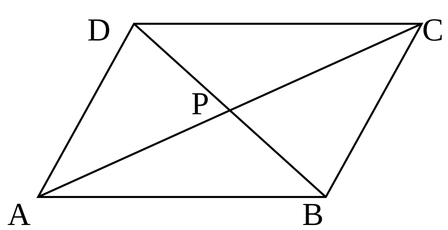
Substitusi x dan y ke persamaan y = 2x – 1 sehingga :

$y'-4 = 2(x'+3)-1 \quad \Leftrightarrow \quad y' = 2x'+9$

Jadi bayangannya y = 2x + 9

LATIHAN SOAL

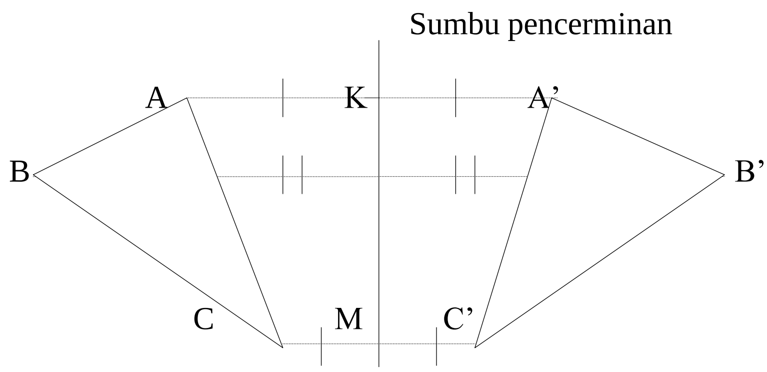
1. Titik A(2,5) dipetakan ke bayangannya A' oleh translasi $T = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$. Tentukan koordinat titik A' !
2. Jika B' merupakan bayangan titik B oleh translasi I, maka tentukan koordinat titik B jika diketahui titik B' (-5,7) dan $I = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$
3. Jika koordiat titik Q(-3,8) ditranslasikan oleh $T_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}$ kemudian ditranslasikan lagi oleh $T_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, maka tentukan bayangan titik Q !
4. P'(-5,8) adalah bayangan titik P(-12,3) oleh translasi $T = \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$. Tentukan nilai h dan k !
5. Diberikan $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}, \overrightarrow{QR} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \overrightarrow{RS} = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \end{bmatrix} \; dan \; \overrightarrow{ST} = \begin{bmatrix} -10 \\ 5 \end{bmatrix}$. Jika translasi tunggal yang mewakili jumlah semua translasi tersebut adalah $\begin{bmatrix} -4 \\ -12 \end{bmatrix}$, tentukan $\overrightarrow{QR}$!
6. Titik (-5,9) ditranslasikan oleh T menjadi (2,-12). Tentukan bayangan titik P(-4,7) oleh translasi T !
7. Garis OA melalui titik O(0,0) dan A(5,5). Tentukan bayangan garis OA oleh translasi $T = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$
8. Tentukan bayangan garis y = x + 5 oleh translasi $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
9. Tentukan bayangan lingkaran yang berpusat di titik (3,5) dan berjari-jari 3 oleh translasi $\begin{bmatrix} -7 \\ -9 \end{bmatrix}$
10.



Jika $\overrightarrow{AB}$ mewakili translasi $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\overrightarrow{BD}$ mewakili translasi $\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$ maka nyatakan translasi yang diwakili oleh $\overrightarrow{AC} \; dan \; \overrightarrow{PC}$!

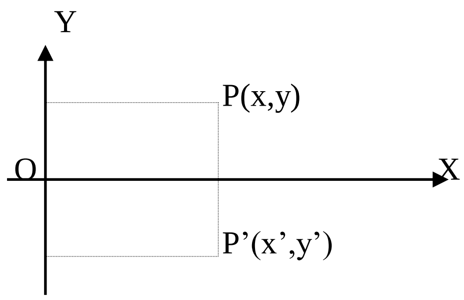
2. PENCERMINAN (REFLEKSI)

suatu pencerminan ditentukan oleh suatu garis tertentu sebagai sumbu pencerminan. Jarak bangun mula-mula ke sumbu pencerminan sama dengan jarak bangun bayangannya ke sumbu pencerminan.



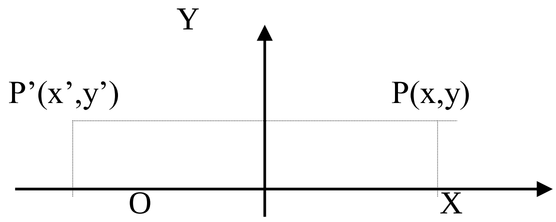
Keterangan : AK = A'K,   BL = B'L   dan   CM = C'M

2.1 PENCERMINAN TERHADAP SUMBU X



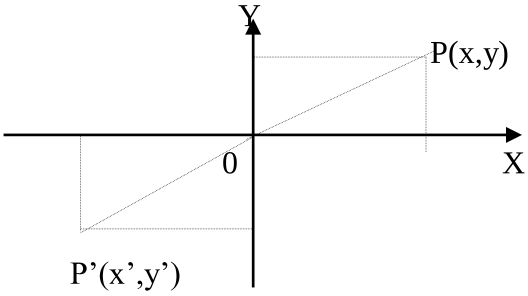
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2.2 PENCERMINAN TERHADAP SUMBU Y



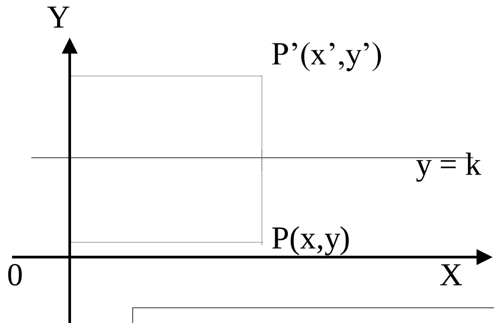
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2.3 PENCERMINAN TERHADAP TITIK ASAL



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2.4 PENCERMINAN TERHADAP GARIS y = k



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix}$$

2.5 PENCERMINAN TERHADAP GARIS x = k

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.6 PENCERMINAN TERHADAP GARIS y = x

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2.7 PENCERMINAN TERHADAP GARIS y = -x

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2.8 PENCERMINAN TERHADAP GARIS y = mx

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha = \arctan m$$

2.9 PENCERMINAN TERHADAP TITIK (a,b)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}$$

2.10 PENCERMINAN TERHADAP GARIS x = k DILANJUTKAN x = h

P’’(x+2(h – k) , y)

2.11 PENCERMINAN TERHADAP GARIS y = k DILANJUTKAN y = h

P”(x , y + 2(h-k))

2.12 PENCERMINAN TERHADAP DUA GARIS x = k DAN y = h YANG SALING TEGAK LURUS

P”(2k – x , 2h – y)

Contoh 1 : Tentukan bayangan dari titik P(5,3) oleh pencerminan terhadap garis y = -x !

Penyelesaian : ……………

Contoh 2 : Tentukan bayangan titik P(3,-2) oleh pencerminan terhadap garis x = 2 dilanjutkan oleh pencerminan terhadap garis x = 6 !

Penyelesaian : ……………..

Contoh 3 : Tentukan bayangan titik P(2,-4) oleh pencerminan terhadap garis x = -1 dilanjutkan pencerminan terhadap garis y = 2 !

Penyelesaian : ……………

LATIHAN SOAL

1. Tentukan bayangan titik (-2,5) dan (3,-6) jika dicerminkan terhadap :
   a. sumbu X
   b. sumbu Y

2. Diketahui persegi panjang ABCD dengan A(1,1), B(4,1) , C(4,3) dan D(1,3). Tentukan bayangan persegi panjang tersebut jika dicerminkan terhadap sumbu Y !

3. Tentukan bayangan titik (-3,1) yang dicerminkan terhadap garis y = 8 !

4. Tentukan bayangan titik (-2,7) yang dicerminkan terhadap garis x = -12 !

5. Tentukan bayangan jajargenjang ABCD dengan A(0,0), B(4,1), C(5,3) dan D(1,2) jika dicerminkan terhadap garis y = -1 !

6. Suatu segitiga ABC dengan A(2,1), B(0,-2) dan C(-1,2) dicerminkan terhadap garis x = 0. Kemudian dicerminkan lagi terhadap garis y = 0. Tentukan koordinatbayangan akhir segitiga ABC tersebut !

7. Titik-titik sudut segitiga ABC adalah A(1,3), B(3,4) dan C(2,1). Segitiga tersebut dicerminkan terhadap sumbu X, dilanjutkan pencerminan terhadap sumbu Y dan terakhir pencerminan terhadap titik asal. Tentukan koordinat bayangan segitiga tersebut !

8. Persegi panjang ABCD dengan A(-1,1), B(-1,3), C(3,3) dan D(3,1) dicerminkan terhadap garis y = x. Tentukan koordinat bayangannya !

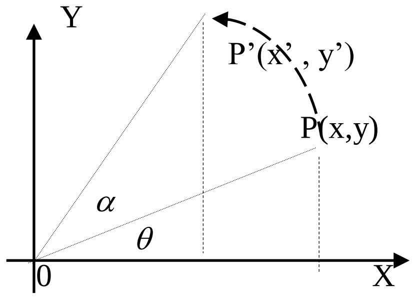
9. Tentukan bayangan titik A(-2,1) oleh pencerminan terhadap garis x = 2 dilanjutkan oleh pencerminan garis x = 4 !

10. Tentukan bayangan titik C(2,3) karena pencerminan terhadap garis y = -1 dilanjutkan oleh pencerminan terhadap garis y = 3 !

3. PERPUTARAN (ROTASI)

Pada rotasi ada 3 komponen, yaitu titik pusat pemutaran, besar sudut putar dan arah sudut putar. Pemutaran mempunyai arah positif jika berlawanan dengan arah putaran jarum jam.

3.1 ROTASI DENGAN PUSAT TITIK ASAL



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$P(x,y) = P(r,\theta)$$
$$P'(x',y') = P'(r,\theta+\alpha)$$
$$x' = r\cos(\theta+\alpha) = r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$y' = r\sin(\theta+\alpha) = r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

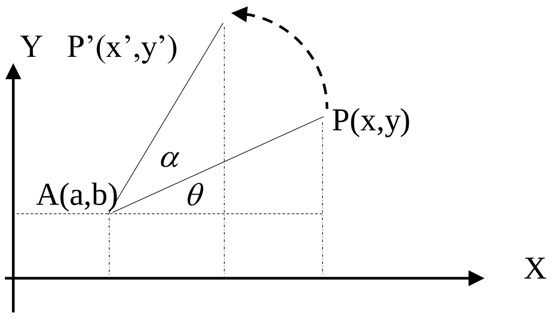
$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

Contoh 1 : Tentukan bayangan titik A(2,-4) jika diputar 90° dengan pusat putaran di titik pusat !

Penyelesaian : ………….

Rotasi dengan pusat (0,0) sebesar α sering ditulis R_α

3.2 ROTASI DENGAN PUSAT (a,b)



Hal ini sebenarnya sama dengan rotasi dengan pusat (0,0) yang di translasikan sebesar $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}$$

Contoh 2 : Tentukan bayangan titik B(4,5) oleh rotasi sebesar 90° dengan pusat (1,2) !

Penyelesaian : …………….

LATIHAN SOAL

1. Tentukan bayangan titik A(3,6) dan B(-2,1) karena rotasi :
   a. R_{90°
   b. R_{180°

2. Diketahui segitiga ABC dengan A(2,3), B(-5,1) dan C(3,5).Tentukan bayangan segitiga tersebut karena rotasi R_{-90° !
3. Tentukan bayangan koordinat jajargenjang ABCD dengan A(1,2), B(3,5), C(6,1) dan D(m,n) karena rotasi R_{180° !
4. Tentukan bayangan titik (5,4) dengan pusat rotasi (1,2) yang diputar sejauh 90° !

5. Tentukan bayangan titik (-1,2) dengan pusat rotasi (0,-3) yang diputar sejauh 270° !

6. Tentukan bayangan titik (-2,3) dengan pusat rotasi (2,-1) yang diputar sejauh 180° !

7. Tentukan persamaan garis yang melalui titik A(1,-4) dan B(-3,4) yang diputar sejauh -90° dengan pusat rotasi R(0,-2) !

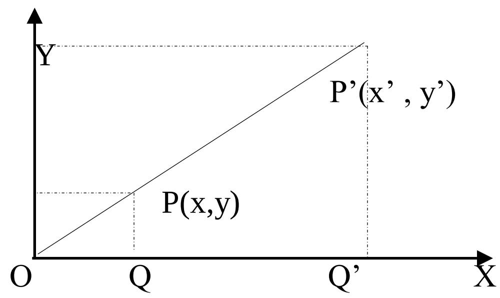
8. Tentukan bayangan titik A(-1,2) karena rotasi R_{90° dilajutkan dengan rotasi R_{180°

9. Tentukan bayangan titik B(3,-2) karena rotasi R_{180° dilanjutkan R_{-90°
10. Tentukan bayangan titik X(-1,-2) karena translasi $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ dilajutkan refleksi terhadap garis x = 5 dan terakhir oleh rotasi R_{90} dengan pusat (1,2) !

4. PERKALIAN (DILATASI)

Pada dilatasi diperlukan suatu titik sebagai pusat perkalian dan faktor skala $k \in R$.

4.1 DILATASI DENGAN PUSAT O(0,0) DAN FAKTOR SKALA k



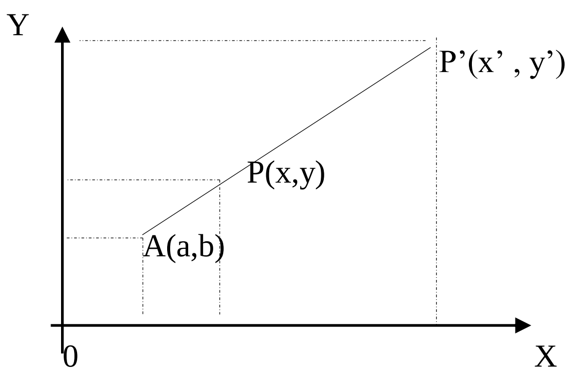
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dilatasi dengan pusat O(0,0) dan faktor skala k sering ditulis $D[O,k)]$

Contoh 1 : Tentukan bayangan titik A(-3,4) oleh dilatasi dengan faktor skala 2 dan pusat (0,0) !

Penyelesaian : ………………

4.2 DILATASI DENGAN PUSAT (a,b) DAN FAKTOR SKALA k



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Contoh 2 : Tentukan bayangan titik P(4,7) dengan pusat A(2,3) dan faktor skala 2 !

Penyelesaian : ………………

LATIHAN SOAL

1. Tentukan bayangan titik (5,7) oleh dilatasi $[O,2]$!
2. Tentukan bayangan titik (12,-27) oleh dilatasi $\left[O,\frac{1}{3}\right]$!
3. Tentukan bayangan titik A(2,1) oleh dilatasi $[P(4,3),2]$!
4. Tentukan bayangan titik B(-3,2) oleh dilatasi $\left[P(3,-1),\frac{2}{3}\right]$!
5. Tentukan bayangan titik C(4,-1) oleh dilatasi $\left[P(0,5),-\frac{1}{2}\right]$!
6. Tentukan bayangan segitiga PQR dengan P(3,2), Q(-1,4) dan R(-2,-1) oleh dilatasi $[O,-2]$!
7. Tentukan luas segitiga hasil bayangan dari segitiga ABC dimana A(2,1), B(3,5) dan C(6,1) oleh dilatasi $\left[O,\frac{1}{2}\right]$
8. Tentukan bayangan titik A(2,3) karena rotasi R_{-90° dilanjutkan refleksi terhadap garis y = 5 dilanjutkan lagi dengan translasi $\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$ dan diakhiri dengan dilatasi $[P(0,3),4]$!

5. TRANSFORMASI TEMPAT KEDUDUKAN

Yang dimaksud tempat kedudukan dalam hal ini yaitu himpunan titik-titik yang mempunyai pola tertentu. Seperti garis dan kurva. Transformasi terhadap suatu garis atau kurva oleh suatu transformasi (translasi, refleksi, rotasi atau dilatasi) dilakukan dengan dengan menyatakan x dan y dengan x’ dan y’ sesuai dengan transformasi yang digunakan. Kemudian disubstitusikan ke persamaan garis atau kurva yang diketahui. Hasilnya akan berupa persamaan yang menggunakan variabel x’ dan y’ sebagai tanda hasil transformasi (bayangan). Sehingga tanda aksennya bisa dihilangkan.

Contoh 1 : Tentukan bayangan parabola $y = x^2 + 1$ karena rotasi sebesar 90° dengan pusat O !

Penyelesaian : Rotasi dengan pusat O sebesar 90°

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}x = y'\\ y = -x'\end{matrix}$$

Substitusi $x = y'\ dan\ y = -x'\ ke\ y = x^2 + 1$ sehingga :

$-x' = (y')^2 + 1 \quad atau \quad -x = y^2 + 1$

LATIHAN SOAL

1. Tentukan persamaan garis $g \equiv x + y + 1 = 0$ terhadap pencerminan sumbu X !
2. Tentukan persamaan garis $g \equiv x + y + 1 = 0$ di atas oleh rotasi R_{90° !
3. Tentukan persamaan bayangan garis y = x + 1 oleh transformasi $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$!
4. Tentukan peta dari garis 2x – y = 7 oleh transformasi $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$!
5. Tentukan bayangan garis x – 2y + 3 = 0 oleh transformasi $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$!
6. Tentukan bayangan lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ oleh transformasi $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$!
7. Tentukan peta lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 5 = 0$ oleh pencerminan terhadap titik pusat !
8. Tentukan peta dari parabola $y = 2x^2 + 1$ oleh dilatasi $[O,3]$!
9. Tentukan persamaan bayangan kurva xy = 4 jika diputar terhadap titik O sebesar 45° !
10. Tentukan persamaan peta lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ oleh transformasi yang ditentukan :
    $x_1 = -x + y$
    $y_1 = 2x - y$

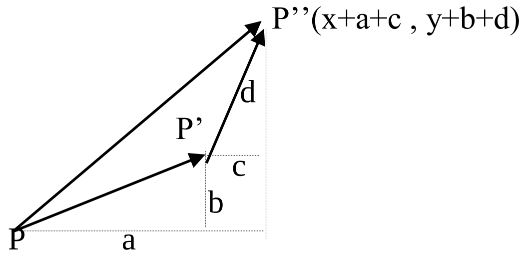
6. KOMPOSISI TRANSFORMASI

Komposisi transformasi berarti transformasi yang dilakukan lebih dari satu kali terhadap suatu objek (titik, garis atau kurva) tertentu.

6.1 KOMPOSISI BEBERAPA TRANSLASI

Komposisi dari dua translasi T_1 dan dilanjutkan dengan T_2 ditulis $T_2 \circ T_1$. Jadi dalam suatu komposisi, yang dilaksanakan/dioperasikan terlebih dahulu adalah elemen yang paling kanan (T_1).

Misal titik P(x,y) ditranslasikan oleh $T_2 \circ T_1$ dimana $T_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ $dan\, T_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ maka bayangan titik P oleh komposisi dua translasi tersebut dapat digambarkan sebagai berikut :



Jadi untuk menentukan bayangan titik P(x,y) oleh komposisi translasi $T_2 \circ T_1$ dapat juga dengan menjumlahkan terlebih dahulu elemen-elemen translasinya yaitu

$T_2 \circ T_1 = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}_1$ baru hasil komposisi translasi tersebut yaitu matriks $\begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$ untuk mentranslasikan P(x,y) ke P’’.

Contoh 1 : Jika titik A(1,-5) maka tentukan bayangan titik A oleh translasi $T_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ dilanjutkan $T_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Penyelesaian : $(T_2 \circ T_1)(1,-5) = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2+(-3) \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Coba tentukan bayangan titik A(1,-5) karena translasi $T_1 \circ T_2$! Apakah hasil bayangannya sama ? Jika sama sifat apakah yang berlaku untuk komposisi dua translasi tersebut ?

6.3 KOMPOSISI BEBERAPA ROTASI

Ada 3 cara menentukan hasil komposisi dua rotasi, yaitu dengan merotasikan satu per satu atau dengan menentukan terlebih dahulu matriks hasil komposisi rotasi kedua rotasi tersebut dengan cara mengalikan. Atau bisa juga dengan menjumlahkan besar rotasi yang digunakan kemudian gunakan matriks rotasi dari hasil penjumlahan tersebut.

Contoh 2 : Tentukan bayangan titik A(-1,2) oleh rotasi 90° dilanjutkan dengan rotasi 180° !

Penyelesaian : Sudut hasil komposisi rotasi = $90^\circ + 180^\circ = 270^\circ$

$$A'' = \begin{pmatrix} \cos 270^\circ & -\sin 270^\circ \\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6.4 KOMPOSISI BEBERAPA DILATASI

Untuk komposisi dilatasi dengan pusat O bisa dilakukan dengan 2 cara yaitu dengan dilatasi satu per satu atau dengan menentukan terlebih dahulu faktor skala hasil komposisi yaitu dengan mengalikan kedua faktor skala dilatasi. Untuk komposisi dilatasi dengan pusat (a,b) dilakukan satu per satu.

<u>LATIHAN SOAL</u>

1. Tentukan bayangan titik (5,3) oleh refleksi terhadap garis x = 2 dan dilanjutkan terhadap garis x = 6 !
2. Tentukan bayangan titik (-3,8) oleh refleksi terhadap garis y = 3 dan dilanjutkan terhadap garis x = -1 !
3. Diketahui segitiga PQR dengan P(1,1), Q(-3,4) dan R(-2,-1) . Tentukan bayangannya jika direfleksikan terhadap garis y = -1 dan dilanjutkan terhadap y = 3 !
4. Tentukan bayangan titik (2,1) yang direfleksikan terhadap garis y = x, kemudian dilajutkan terhadap sumbu Y !
5. Tentukan bayangan titik (5,5) yang dirotasikan terhadap R_{90° dan dilanjutkan R_{270° !
6. Tentukan bayangan titik (-5,4) yang dirotasikan terhadap R_{150° dan dilanjutkan R_{120° !

7. Jika M_y adalah pencerminan terhadap sumbu Y, M_1 adalah pencerminan terhadap garis x = 6 dan M_2 adalah pencerminan terhadap garis x = 11. Tentukan peta segitiga ABC dengan A(-1,1), B(-2,6) dan C(-4,4) oleh komposisi pencerminan :
   a. $M_y \circ M_1$
   b. $M_2 \circ M_1 \circ M_y$

8. Jika M_1, M_2 dan M_3 adalah operasi pencerminan terhadap garis x = 2, x = 3 dan x = 7 berturut-turut, maka tentukan bayangan titik P(3,2) oleh transformasi $M_1 \circ M_2 \circ M_3$!

9. Pada no. 8, tentukan bayangan garis y + x = 3 oleh transformasi $M_3 \circ M_2 \circ M_1$

10. Diketahui transformasi $T_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $R_{90} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $dan\ I = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tentukan bayangan titik (7,10) oleh transformasi $T_2 \circ R_{90} \circ T_1$!