

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Laboratorium 6

Rozwiązywanie układów równań liniowych

22 kwietnia 2021

Przydatne funkcje

`numpy.linalg.solve`, `scipy.linalg.lu`, `numpy.linalg.svd`

Zadanie 1 Metoda Gaussa-Jordana

Napisz i sprawdź funkcję rozwiązującą układ równań liniowych $n \times n$ metodą Gaussa-Jordana. Dla rozmiarów macierzy współczynników większych niż 500×500 porównaj czasy działania zaimplementowanej funkcji z czasami uzyskanymi dla wybranych funkcji bibliotecznych. Opisz wyniki i podaj zalety i wady w stosunku do metody eliminacji Gaussa.

Zadanie 2 Faktoryzacja LU

1. Zaimplementuj i sprawdź funkcję dokonującą faktoryzacji $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ macierzy \mathbf{A} . Zastosuj częściowe poszukiwanie elementu wiodącego oraz skalowanie. Sprawdź wyniki.
2. Opisz w jaki sposób faktoryzacja LU może być wykorzystana do rozwiązywania układów równań liniowych i zaimplementuj rozwiązanie. Porównaj wyniki z funkcją biblioteczną.

Zadanie 3 Przekształcenie sfery w elipsoidę

1. Korzystając z równania parametrycznego narysuj sferę jednostkową w 3D

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos(s) \sin(t) \\ \sin(s) \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$
$$s \in [0, 2\pi], t \in [0, \pi]$$

- Wygeneruj 3 różne macierze $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$, ($\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$), za ich pomocą dokonaj przekształcenia sfery w elipsoidę, a następnie przedstaw wizualizację uzyskanego wyniku.
- Dokonaj rozkładu według wartości osobliwych (SVD) każdej macierzy \mathbf{A}_i . Na wykresie elipsoidy odpowiadającej przekształceniu \mathbf{A}_i dodaj wizualizację jej pólów wyznaczonych za pomocą SVD.
- Znajdź taką macierz \mathbf{A}_i , aby stosunek jej największej i najmniejszej wartości osobliwej był większy od 100. Narysuj odpowiadającą jej elipsoidę. Czym charakteryzuje się wygenerowana elipsoida i czemu tak się dzieje?
- Dla wybranej macierzy \mathbf{A}_i przedstaw wizualizacje $\mathbf{S}\mathbf{V}_i^T$, $\mathbf{S}\mathbf{\Sigma}_i\mathbf{V}_i^T$ oraz $\mathbf{S}\mathbf{U}_i\mathbf{\Sigma}_i\mathbf{V}_i^T$, gdzie

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{U}_i\mathbf{\Sigma}_i\mathbf{V}_i^T,$$

a \mathbf{S} oznacza sferę z punktu 1. Opisz jakie przekształcenia mają miejsce w kolejnych krokach.

Zadanie 4 Układ źle uwarunkowany

- Rozwiąż układ równań

$$0.835x + 0.667y = 0.168$$

$$0.333x + 0.266y = 0.067$$

- Zaburz delikatnie rozwiązanie zmieniając wartość 0.067 na 0.066 i rozwiąż ponownie. Czemu wyniki się znacząco różnią?
- Używając rozkładu SVD na macierzy współczynników znajdź stosunek maksymalnej do minimalnej wartości osobliwej. Porównaj to z wartościami wygenerowanymi dla 3 losowych macierzy tego samego rozmiaru i opisz wyniki.