Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
Laboratorium 8
Dekompozycja spektralna

6 maja 2021

Literatura

- *Numerical Mathematics and Computing*, W. Cheney, D. Kincaid, 6th edition, rozdział 8.4
- *Marix Analysis and Applied Linear Algebra*, Carl D. Mayer, SIAM, 2000, przykłady 7.3.7 i 7.3.8

Przydatne funkcje NumPy

- `numpy.linalg.eig`

1 Metoda potęgowa

Napisz funkcję obliczającą metodą potęgową dominującą wartość własną (największą co do modułu) i odpowiadający jej wektor własny dla danej macierzy rzeczywistej symetrycznej. Sprawdź automatycznie poprawność działania programu porównując wyniki (dominująca wartość własna i odpowiadający jej wektor własny) własnej implementacji z funkcją biblioteczną. Przedstaw na wykresie zależność czasu obliczeń obu implementacji od rozmiaru macierzy (rozmiary macierzy NxN gdzie $N = range(100, 2500, 100)$). Opisz i zinterpretuj wyniki.

- Powtarzaj mnożenie wektora $\mathbf{x_i}$ przez macierz $\mathbf{A}$:

  $$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_i,$$

  dzieląc za każdym razem wektor wynikowy przez $||x_{i+1}||_\infty$
- Element wektora $\mathbf{x}_i$ przed przeskalowaniem o największej wartości bezwzględnej zbiega do dominującej wartości własnej

- Przeskalowany wektor $\mathbf{x}_i$ zbiega do dominującego wektora własnego
- Obliczenia powinny się zatrzymać po przekroczeniu maksymalnej liczby iteracji, albo w przypadku gdy $||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}|| < \epsilon$ (kryterium małej poprawki)
- Pod koniec obliczeń znormalizuj otrzymany wektor własny.

2 Odwrotna metoda potęgowa

Opierając się na twierdzeniu o transformacji widma macierzy:

Twierdzenie 1 *Macierz* $(\mathbf{A}-\sigma\mathbf{I})^{-1}$ *(jeśli istnieje), to ma wartości własne równe* $\dfrac{1}{\lambda_k - \sigma}$ *(*λ_k *jest k-tą wartością macierzy* $\mathbf{A}$*) i wektory własne identyczne z macierzą* $\mathbf{A}$*.*

oraz wykorzystując metodę potęgową i faktoryzację LU zaimplementuj odwrotną metodę potęgową pozwalającą na szybkie znalezienie wektorów własnych macierzy $\mathbf{A}$, dla wartości σ bliskich odpowiedniej wartości własnej. Wykorzystaj fakt, że mnożenie wektora $\mathbf{x}_i$ przez macierz $\mathbf{A}^{-1}$ ($\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_i$) odpowiada rozwiązaniu układu równań $\mathbf{A}\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i$. Opisz poszczególne kroki algorytmu i zinterpretuj wyniki.

3 Iteracje z ilorazem Rayleigha

Zaimplementuj iteracyjną metodę wyznaczania wartości własnej i skojarzonego z nią wektora własnego wykorzystując odwróconą metodę potęgową oraz iloraz Rayleigha. Porównaj zbieżność metody ze zbieżnością algorytmu potęgowego (macierz symetryczna rzeczywista). Opisz poszczególne kroki algorytmu i zinterpretuj wyniki.

$$r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}^T}{\mathbf{x}\mathbf{x}^T}$$

$$r(\mathbf{q}_i) = \lambda_i$$