دانشگاه تهران

پردیس دانشکده‌های فنی

دپارتمان مهندسی برق و کامپیوتر

امنیت شبکه پیشرفته

تمرین تحلیلی سری سوم

محمدحسین بدیعی

شماره دانشجویی 810199106

استاد : دکتر محمد صیاد حقیقی

زمستان 1400-1401

پاسخ سؤال ۱:

.a.1

با توجه به اینکه در یک گراف مجموع درجات رئوس دو برابر تعداد یالها می‌باشد لذا:

instub کل $= 2m$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{n} k_i = 2m$

حال برای میانگین تعداد یالها می‌توان گفت:

$$\langle k \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{n} = \frac{2m}{n} \longrightarrow \boxed{\langle k \rangle = \frac{2m}{n}} \quad (I)$$

حال یک یال را در نظر می‌گیریم، احتمال آنکه به یک نود با درجه‌ی k برسیم برابر است با:

احتمال رسیدن به یک نود با درجه k $= \dfrac{k}{2m}$ (II)

از طرفی با توجه به اینکه هر نود با احتمال P_k از درجه k می‌باشد لذا nP_k تعداد نودهای با درجه k در گراف است. لذا:

تعداد نودهای با درجه k در گراف $= nP_k$ (III)

لذا احتمال آنکه از یالی که انتخاب می‌کنیم به رأسی با درجه k در شبکه متصل شویم برابر است با:

$$\xrightarrow{(III),(II)} \boxed{\frac{k}{2m} \times nP_k \overset{(I)}{=} \frac{k}{\langle k \rangle} P_k} \quad (IV)$$

حال با تبدیل $k \to k+1$ احتمال رسیدن به یک نود با k excessive link بدست می‌آوریم: (constant ← $\langle k \rangle = \frac{2m}{n}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} (IV) \\ k \to k+1 \end{cases} \Longrightarrow q_k = \frac{(k+1)\, P_{k+1}}{\langle k \rangle}$$

.b.1

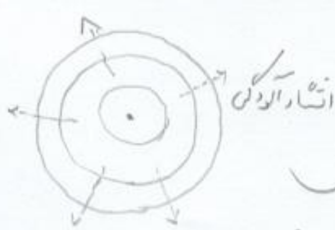
در مدل fully-mixed همه با یکدیگر در ارتباط هستند و لذا این مدل خیلی انتزاعی است در صورتیکه در واقعیت یک نفر با نفری دیگر در آن شبه گراف در ارتباط نیست. در degree-based ارتباط با همسایگان وجود دارد و این به دنیای واقعی شبیه‌تر است. چراکه هر نود با تعداد محدودی از همسایگان خود در ارتباط است. طبیعتاً این مدلی که مبتنی بر درجه و نزدیکتر به واقعیت است از fully-mixed بهتر خواهد بود.

این استدلال در دنیای واقعی نیز ملموس است. به عنوان نمونه در شیوع یک بیماری، فرد بیمار همسایگان خود و یا به عبارت دیگر کسانی را تحت تاثیر قرار می‌دهد که با آنها مرتبط و در حیطه‌ی همسایگی آن فرد هستند. لذا مشاهده می‌فرمایید که degree-based مشابه با این مدل و مبتنی بر واقعیت بیشتری است. (هرچه فرد با بیماران بیشتری در همسایگی خود در ارتباط باشد، خود احتمال بیمار شدنش بیشتر است)

.c.1

شکلی که در degree-based approximation مطرح است به صورت زیر می‌باشد.

اول توجه داشته باشید که آلودگی در این مدل اطراف source به صورت موج گونه منتشر می‌شود.



حال توجه می‌نمایید (از شکل روبرو) که تمامی نودهای داخلی به گونه‌ای می‌باشند که تمامی نودهای اطراف آلوده هستند و لذا با توجه به اینکه این نودها آلوده شده اند پس چگونه آلودگی در این محدوده انتشار بیشتری می‌تواند پیدا کند؟ نمی‌تواند.

لذا در این مدل نرخ آلودگی بیشتر از چیزی که مشاهده می‌کنیم، محاسبه می‌شود. به عنوان یک نمونه‌ی دیگر حالتی را می‌توانیم در نظر بگیریم که آلودگی از دو نود به یکی منتقل می‌شود و این هم در نرخ مذکور تاثیر گذار است.

پاسخ سؤال ۲

.a.2

۸ نفر از ۱۰۰ آنها در یک روز

$$\frac{dS}{dt} = -\beta \frac{SI}{n} \Longrightarrow \frac{dS}{dt} = -0.00002\, SI \quad , \quad \frac{dR}{dt} = \underset{\gamma}{\underline{0.08}}\, I$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{dI}{dt} = 0.00002\, SI - 0.08\, I}$$

.b.2

$$\left.\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -30 \\ \gamma &= 0.08 \end{aligned}\right\} \longrightarrow I(t) = 100 - 0.08(100) + 30 = 122$$

از طرفی: $\frac{dS}{dt} = -\beta \frac{SI}{n} = -0.00002\, SI$

$$\Longrightarrow -0.00002\, S(122) = -30 \Longrightarrow \boxed{S = \frac{30}{0.00002 \times 122} \simeq 12295.08}$$

.c.2 کاملاً مشهود است که با توجه به فضای احتمالاتی و مدل هندسی ایجاد شده در زیر میانگین مدل هندسی 0.08 است

Time	P(not recover)
$t=1$	$\Longrightarrow 1-\gamma$
$t=2$	$\Longrightarrow (1-\gamma)^2$
$t=3$	$\Longrightarrow (1-\gamma)^3$
$\downarrow \infty$	

$$\Longrightarrow \boxed{\text{میانگین مدل هندسی} = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{0.08} = 12.5}$$

دقت بفرمایید که احتمال recover شدن را در گام آخر هر زمان ننوشتیم و این احتمال recover نشدن تا زمان مذکور است.

اثبات: $E(.) = \sum_{t=1}^{\infty} t\gamma(1-\gamma)^{t-1} = \gamma\left(\sum_{t=1}^{\infty} t(1-\gamma)^{t-1}\right) = \gamma\left(-\frac{d}{d\gamma}\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)$

$$= \gamma\left(\frac{d}{d\gamma}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\right) = \gamma\left(\frac{1}{\gamma^2}\right) = \frac{1}{\gamma} \Longrightarrow \boxed{E = \frac{1}{\gamma} = 12.5}$$

.d.2

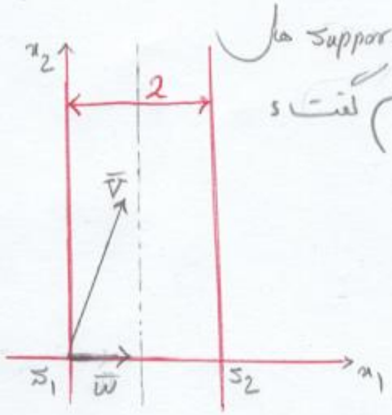
$$\frac{dI}{dt} = 0.00002\,SI - 0.08\,I = 0$$

$$\longrightarrow S = \frac{0.08\,I}{0.00002\,I} \Longrightarrow \boxed{S = ۴۰۰۰}$$

پاسخ سوال ۳

در روش SVM هدف حداقل نمودن رابطه ذیل معروف به رابطه لاگرانژ است :

$$L = \frac{1}{2}\|\bar{w}\|^2 - \sum \alpha_i \left[y_i(\bar{x}_i \cdot \bar{w} + b) - 1 \right]$$



حال داریم :

با توجه به support vector ها مساله می توان گفت :

$\longrightarrow$ معادله خط وسط : $\bar{w}\cdot\bar{x} + b = 0$

$$\text{decison rule} \longrightarrow \vec{w}\cdot\vec{x} + b \begin{cases} \geq 0 \longrightarrow + \\ < 0 \longrightarrow - \end{cases}$$

حال با مشتق گیری رابطه لاگرانژ نسبت به w و b داریم :

$$\frac{\partial L}{\partial w} = 0 \longrightarrow \vec{w} = \sum \alpha_i y_i \vec{x_i} \quad (I)$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = 0 \longrightarrow \sum \alpha_i y_i = 0 \quad (II)$$

$$\xrightarrow[\text{جایگذاری در رابطه لاگرانژ}]{(II)\ و\ (I)} L = -\frac{1}{2}\sum\sum \alpha_i\alpha_j y_i y_j \vec{x}_i \vec{x}_j + \sum \alpha_i$$

$$width = (x^+ - x^-)\cdot\frac{\bar{w}}{\|w\|} = \frac{2}{\|w\|}$$

★ ادامه در صفحه بعد ★

$$\left.\begin{aligned} width &= \frac{2}{\|w\|} \\ width &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{2}{\|w\|} = 2 \Rightarrow \|w\| = 1 \xRightarrow[\text{طبق صفحه قبل}]{} \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow (\mathrm{I})$$

راستای $\vec{w}$

$$y = \begin{cases} +1 & \text{for } S_i^+ \\ -1 & \text{for } S_i^- \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{good behavior} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{bad behavior} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \vec{w} = \sum \alpha_i y_i \vec{x}_i = \alpha_1 y_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 y_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow (\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{I}), (\mathrm{II}) \rightarrow \begin{bmatrix} 2\alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \vec{x}^- \cdot \vec{w} = \underline{x}^{-T} \underline{w} = [0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 - b \rightarrow -1 - b = 0 & (\mathrm{III}) \\ \vec{x}^+ \cdot \vec{w} = \underline{x}^{+T} \underline{w} = [2 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 - b \rightarrow 1 - b = 2 & (\mathrm{IV}) \end{cases}$$

$$(\mathrm{III}), (\mathrm{IV}) \longrightarrow \boxed{b = -1}$$

$$\text{decision rule} \longrightarrow \vec{w} \cdot \vec{x} + b \begin{cases} \geqslant 0 & \text{then } + \\ < 0 & \text{then } - \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{x}_s + b = \underline{w}^T \underline{x}_s + b = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{s_1} \\ x_{s_2} \end{bmatrix} - 1 = x_{s_1} - 1$$

معادله خط

لذا معادله خط بین good behavior , bad behavior برابر $x_1 - 1 = 0$ است پس داریم؛

$$\Longrightarrow \forall \text{ sample} \mid \text{coord} = \begin{bmatrix} x_{s_1} \\ x_{s_2} \end{bmatrix} \longrightarrow y_s = \begin{cases} + & \text{if } x_{s_1} - 1 \geqslant 0 \\ - & \text{if } x_{s_1} - 1 < 0 \end{cases}$$

پاسخ سؤال ۴

4.a. مجدداً در اینجا با یک سری هندسی مواجه هستیم:

$$\begin{cases} \underline{n} & & \underline{P} \\ 1 \text{ forward} & \Rightarrow & P_f \\ 2 \text{ forward} & \Rightarrow & P_f^2 \\ \vdots & & \vdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{میانگین سری هندسی} = \frac{1}{1-P_f}$$

دقت بفرمایید که این احتمالات تا قبل از رسیدن به موفقیت (یعنی $1-P_f$) در گام مربوطه است.

اثبات: $E(.) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-P_f)P_f^{k-1} = (1-P_f)\sum_{k=1}^{\infty} k P_f^{k-1} = (1-P_f)\left(\frac{1}{(1-P_f)^2}\right)$

$$= \frac{1}{1-P_f} \Rightarrow E = \frac{1}{1-P_f}$$

میانگین قبل از رسیدن به موفقیت است

4.b. با توجه صورت سؤال باید توجه کنیم که برای اینکه اتصال حذف نشود نباید نود آغازین malicious باشد و لذا این را به عنوان اولین فرض قبل از حل در نظر می‌گیریم. دومین فرض هم که در نظر می‌گیریم وجود نودهای تکراری در طول مسیر است. با توجه به دو مفروض صورت گرفته داریم:

$$P = \underbrace{\overbrace{(1-P_f)}^{\text{توسط نود یک فرستاده شود به مقصد}}}_{\text{طبق فرض نود اول malicious نیست}} + \left(\underbrace{\frac{n-c}{n}P_f}_{\text{به نودهای malicious نمی‌فرستد}}\right)(1-P_f) + \left(\frac{n-c}{n}P_f\right)^2(1-P_f) + \cdots + \left(\frac{n-c}{n}P_f\right)^t(1-P_f)$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n-c}{n}P_f\right)^k(1-P_f)}$$