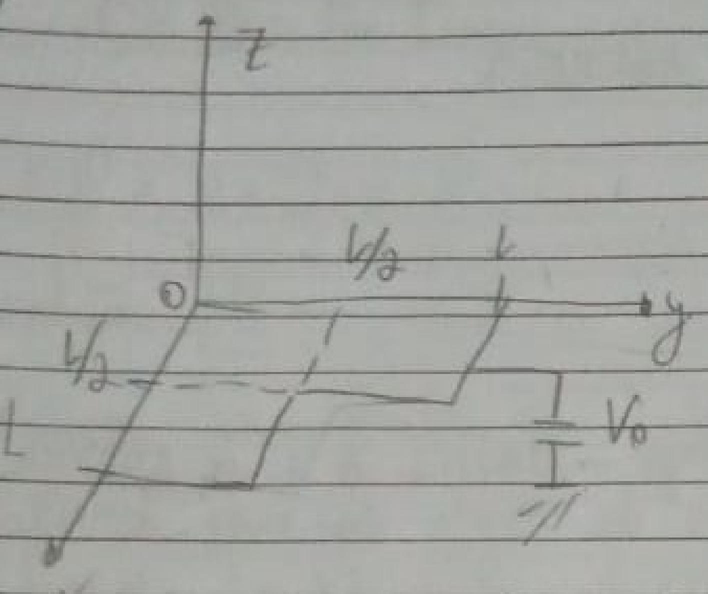
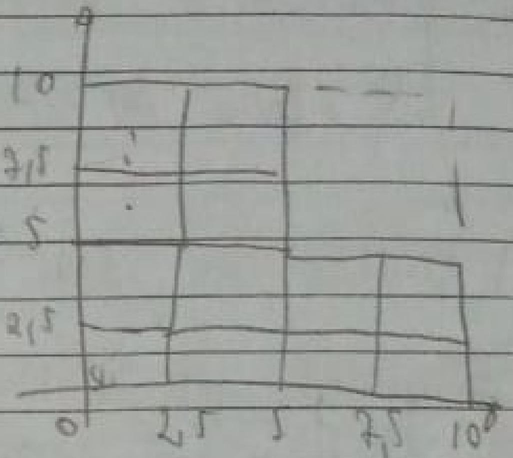
Calculando Métodos Momentos

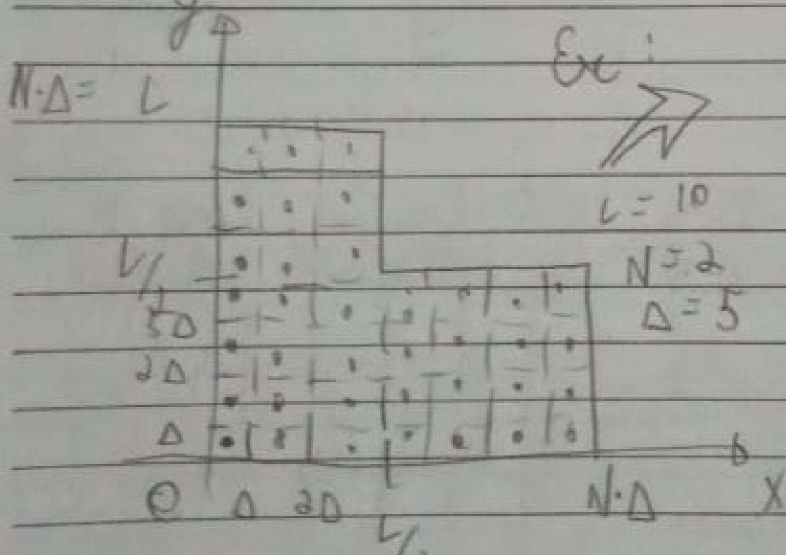
(1)





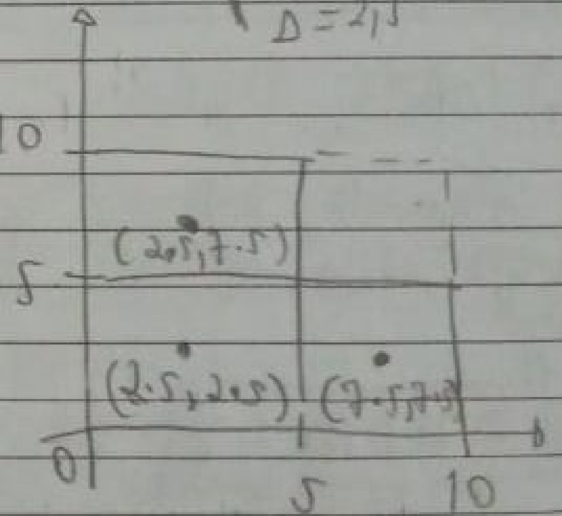
• Discretizando:

$L = 10$
$N = 4$
$\Delta = 2{,}5$



Ex:

$L = 10$
$N = 2$
$\Delta = 5$



Potencial constante da placa V_0 =

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, ds' \quad \vec{r} \in \text{Placa}$$

Usando a condição de contorno no centro de cada quadrado:

$$r_m, \; i = 1, 2, \ldots \left(N^2 - \frac{L^2}{4}\right)$$

$$r_m = (x_p, y_p) \begin{cases} x_i = (p - 1/2)\Delta \\ y_j = (q - 1/2)\Delta \end{cases}$$, pontos centrais

Usando a aproximação da distribuição de cargas, onde

$$\left.\begin{aligned} \rho_s(x,y) &= \sum_{n=1}^{(N^2 - L^2/4)} a_n P_n(x,y) \\ V_0 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}')}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} ds' \end{aligned}\right\} \quad V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sum_{n=1}^{(N^2 - L^2/4)} a_n P_n(x', y')}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} ds'$$

$$V_0 = \sum_{n=1}^{(N^2 - L^2/4)} \frac{a_n}{4\pi\varepsilon_0} \int_{x_i - \Delta/2}^{x_i + \Delta/2} \int_{y_j - \Delta/2}^{y_j + \Delta/2} \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} dx' dy'$$

$$[Z] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{N^2 - \frac{L^2}{4}} \end{bmatrix} = [V]$$

$$Z_{mn} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{x_{ni}-\Delta/2}^{x_{ni}+\Delta/2} \int_{y_{nj}-\Delta/2}^{y_{nj}+\Delta/2} \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} dx'dy'$$

Como $|\vec{r}_m - \vec{r}'| = \sqrt{(x_p - x')^2 + (y_q - y')^2}$

Então

$$Z_{mn} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{x_{ni}-\Delta/2}^{x_{ni}+\Delta/2} \int_{y_{nj}-\Delta/2}^{y_{nj}+\Delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_p - x')^2 + (y_q - y')^2}} dx'dy'$$

Se $m \neq n$, então $\cong$ toda a carga em n pode ser considerada como concentrada no centro, logo

$$\boxed{Z_{mn} \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\Delta^2}{\sqrt{(x_p - x_i)^2 + (y_q - y_j)^2}}}$$

Se $m = n$, então calcularmos a integral, onde

$u = x_p - x' \therefore du = -dx'$
$v = y_q - y' \therefore dv = -dy'$

$\therefore$

$$Z_{nn} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} du\, dv$$

$$Z_{nn} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \ln\left[u + \sqrt{u^2 + v^2}\right]\Bigg|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} dv$$

$$Z_{nn} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \ln\left[\frac{\Delta/2 + \sqrt{(\Delta/2)^2 + v^2}}{-\Delta/2 + \sqrt{(\Delta/2)^2 + v^2}}\right] dv$$

$\therefore$

$$\boxed{Z_{nn} = \frac{\Delta}{\pi\varepsilon_0} \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)}$$

(2) Plote do gráfico anexado.

(3) Baseado nos resultados, podemos analisar que quanto maior o valor de N, melhor a aproximação das distribuições de carga, no entanto mais tempo computacional é requerido, além disso, o resultado dos plotes tendem a observarmos um comportamento de distribuições quase uniformes nas regiões centrais das placas, mas com picos próximos das bordas.

(4) O valor da carga total tende à algo em torno de $3,6 \cdot 10^{-12}$ C.