Retournement d'une droite en coordonnées cartésiennes

Marc Deléglise

July 4, 2025

Soit d la droite du plan euclidien , définie par son équation cartésienne :

$$ax + by + c = 0 \tag{1}$$

où a, b et c sont des réels, et d_1 la droite d'équation

$$ux + vy + w = 0. \tag{2}$$

On recherche l'équation de d_2, image de d_1 par le retournement r_d autour de d (la symétrie axiale d'axe d).

Commençons par rechercher l'image par r_d d'un point arbitraire $P = (x, y)$. Puisque le vecteur (a, b) est orthogonal à d, la projection orthogonale H est telle que $\overrightarrow{PH} = \lambda(a, b)$ pour un réel λ et le point H est:

$$H = (x + \lambda a, y + \lambda b)\,.$$

On obtient la valeur de λ en écrivant que H satisfait l'équation (1) de d:

$$a\,(x + \lambda a) + b\,(y + \lambda b) + c = 0.$$

qui s'écrit encore $(ax + by + c) + \lambda\,(a^2 + b^2) = 0$ et donne

$$\lambda = -\frac{ax + by + c}{a^2 + b^2}.$$

L'image P' de P par r_d est caractérisée par $\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{PH}$; On a donc

$$\begin{aligned} P' &= (x + 2\lambda a, y + 2\lambda b) \\ &= \left(x - \frac{2(ax + by + c)}{a^2 + b^2}a, y - \frac{2(ax + by + c)}{a^2 + b^2}b\right). \end{aligned}$$

Le point P appartient à d_2 si et seulement si son symétrique P' appartient à d_1 c'est-à-dire si, et seulement si

$$0 = u\left(x - \frac{2(ax+by+c)}{a^2+b^2}a\right) + v\left(y - \frac{2(ax+by+c)}{a^2+b^2}b\right) + w.$$

Cette équation aux inconnues x, y est, par définition, l'équation de d_2. Il nous reste à la mettre sous forme canonique. En la développant, on obtient :

$$0 = ux + vy + w - \frac{2}{a^2+b^2}\left(ua(ax+by+c) + vb(ax+by+c)\right),$$

puis, en regroupant les termes en x, y on obtient l'équatin de d_2.

$$\left(u - \frac{2}{a^2+b^2}\left(ua^2+vab\right)\right)x + \left(v - \frac{2}{a^2+b^2}\left(uab+vb^2\right)\right)y + \left(w - \frac{2}{a^2+b^2}\left(uac+vbc\right)\right) = 0. \quad (3)$$