

# AOTidf Bagger Game

DENIS ERFURT, TOBIAS BEHRENS, ABDALLAH KADOUR

---

TODO: Abstract

## ACM Reference format:

Denis Erfurt, Tobias Behrens, Abdallah Kadour. 2016. AOTidf Bagger Game. 1, 1, Article 1 (January 2016), 8 pages.

DOI: 10.1145/nnnnnnn.nnnnnnn

---

## 1 GLIEDERUNG

TODO: gliederung

## 2 VORAUSSETZUNGEN

In diesem Kapitel werden wir in Abschnitt 2.1 einen Gesamtüberblick über die Aufgabenstellung geben sowie Prämissen für die weitere Bearbeitung formulieren. Außerdem im Abschnitt 2.2 notwendige theoretische Grundlagen zusammenfassen die für das weitere verständnis der Arbeit notwendig sind.

### 2.1 Aufgabenstellung

Als gegebenes Szenario war eine Menge an Bauaufträgen und Baufirmen, im folgenden Agenten genannt, gegeben. Den Agenten verfügen über ein Bestand an Skillkapazitäten und Baustellen besitzen ein Bedarf an Skillkapazitäten der für die Ausschüttung eines Erlöses gedeckt werden muss.

Diese Arbeit Modelliert (Kapitel 3) dieses Szenario und untersucht Mechanismen (Kapitel 4), die mit hilfe von Koalitionsbildung eine Zuordnung von Bestand und Bedarf an Skillkapazitäten berechnen, bezüglich der **sozialen Wohlfahrt**, **Stabilität und Fairness** der Gewinnausschüttung sowie ihrer **absoluten Performance**.

*Prämissen.* Allgemein gehen wir von folgenden Grundannahmen aus:

- (1) **Rationalität:** Agenten arbeiten ausschließlich für ihr eigenes Interesse.
- (2) **Multiskill:** Agenten können mehrere Skilltypen mit beliebiger quantität besitzen.
- (3) **linearität:** Skillkapazitäten können höchstens ein mal eingesetzt werden und werden nach ihrem einsatz "verbraucht".
- (4) **unvollständige Information der Konkurrenz:** Agenten haben keine Information über die Ressourcen anderer Agenten.
- (5) **vollständige Informationen des Bedarfs:** Agenten haben vollständige Information über die Anzahl, Position, Bedarf sowie Vergütung der Bauaufträge.
- (6) **Zeitagnostisch:** Alle betrachtungen werden ohne Zeit gemacht: insbesondere verändert sich nichts an den Bauaufträgen oder den Agenten.

### 2.2 Grundlagen

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden Funktionen mit kleinem Anfangsbuchstaben und Relationen mit einem großen Anfangsbuchstaben geschrieben. Ebenfalls gehen wir davon aus, dass alle Funktionen total und mit 0 initialisiert

sind, falls für eine Struktur Eingabeparameter nicht näher definiert wurden. Wir verwenden die Schreibweise in Prädikatenlogik und die Mengenschreibweise equivalent:  $a \in A \equiv A(a)$  Um das gegebene Problem strukturell analysieren zu können, benutzen wir die Sprache der HOL (Higher Order Logic).

### 3 MODELLIERUNG

Ziel dieses Kapitels ist es durch eine Formalisierung der Aufgabenstellung eine geeignete Grundlage zu schaffen auf der nachfolgende Mechanismen formalisiert und zentrale Fragestellungen formal beantwortet werden können. Zunächst werden wir in Abschnitt (3.2) grundlegende Definitionen vorstellen sowie in Abschnitt (3.1) zwei Signaturen sowie einige zentrale Modellklassen einführen.

#### 3.1 Signaturen und Modellklassen

Wir führen nun zwei verschiedene Signaturen mit den dazugehörigen Modellklassen ein:

- (1) **CSGS** - Coalition Skill Game Setting
- (2) **CSG** - Coalition Skill Game

*Definition 3.1 (CSGS).* Eine COALITIONAL SKILL GAME SETTING-Signatur (CSGS-Signatur) sei definiert als

$$\sigma_{CSGS} := \{Agent_{/1}, Baustelle_{/1}, supply_{/2}, demand_{/2}, budget_{/1}, kosten_{/4}\}$$

##### Intuition

$Agent(x)$	$\Leftrightarrow$	$x$ ist ein Agent (Baufirma)
$Baustelle(x)$	$\Leftrightarrow$	$x$ ist eine Baustelle
$supply(x, t) \mapsto n$	$\Leftrightarrow$	Agent $x$ besitzt $n$ Einheiten vom Skilltyp $t$
$demand(x, t) \mapsto n$	$\Leftrightarrow$	Baustelle $x$ benötigt $n$ Einheiten vom Skilltyp $t$
$budget(x) \mapsto n$	$\Leftrightarrow$	Baustelle $x$ ist bereit einen Gewinn von maximal $n$ bei Fertigstellung auszus zahlen
$kosten(t, n, x, y) \mapsto n$	$\Leftrightarrow$	Kosten für Agenten $x$ für den Transport von $n$ Einheiten des Skilltyp $t$ an die Baustelle $y$ .

Im folgenden werden wir die  $\sigma_{CSGS}$ -Struktur  $\mathcal{S}$  als ein Setting bezeichnen. Die Modellklasse  $M_{CSGS}$  steht für die Gesamtheit an validen Settings die zudem folgende Bedingungen erfüllt:

$$Agent \cap Baustelle = \emptyset \tag{1}$$

##### Beispiel 1:

Ein Beispiel für eine valides Setting ist die Struktur  $\mathcal{S} \in M_{CSGS}$  mit:

$Agent^{\mathcal{S}} := \{a_1, a_2, a_3\}$	$Baustelle^{\mathcal{S}} := \{b_1, b_2\}$
$supply^{\mathcal{S}}(a_1, t_1) \mapsto 2$	$demand^{\mathcal{S}}(b_1, t_1) \mapsto 10$
$supply^{\mathcal{S}}(a_1, t_2) \mapsto 7$	$demand^{\mathcal{S}}(b_1, t_2) \mapsto 5$
$supply^{\mathcal{S}}(a_2, t_1) \mapsto 3$	$demand^{\mathcal{S}}(b_2, t_1) \mapsto 2$
$supply^{\mathcal{S}}(a_2, t_2) \mapsto 5$	$demand^{\mathcal{S}}(b_2, t_2) \mapsto 2$
$supply^{\mathcal{S}}(a_3, t_1) \mapsto 20$	$budget^{\mathcal{S}}(b_1) \mapsto 10$
$supply^{\mathcal{S}}(a_3, t_2) \mapsto 5$	$budget^{\mathcal{S}}(b_2) \mapsto 3$

*Definition 3.2 (CSG).* Eine COALITIONAL SKILL GAME-Signatur (CSG-Signatur) sei definiert als

$$\sigma_{CSG} := \sigma_{CSGS} \cup \{m_{/3}, v_{/2}\}$$

## Intuition

$m(x, t, y) \mapsto n \quad :\Leftrightarrow$  Agent  $x$  sendet  $n$  Einheiten des Skilltyps  $t$  an die Baustelle  $y$

$$v(x, y) \mapsto n \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Agent } x \text{ erh\u00e4lt von Baustelle } y \text{ die Verg\u00fctung } n$$

Wir bezeichnen eine  $\sigma_{CSG}$ -Struktur als ein Game  $\mathcal{G}$ . Intuitiv ist ein Game ein valides Setting mit einer möglichen validen Lösung: eine mögliche Verteilung der verfügbaren Skills der Baufirmen mit entsprechender Vergütungen der Baustellen.

$M_{CSG}$  bezeichnen wir als Klasse aller valider Games, die folgende (informelle) Eigenschaften erfüllen:

- (1) Ein Agent kann nicht mehr Einheiten eines Skills ausgeben als er besitzt.
- (2) Eine Baustelle kann nicht mehr Geld ausgeben, als sie besitzt.
- (3) Eine Baustelle gibt genau dann Geld aus, wenn sie vollständig mit den benötigten Skills versorgt wird.

Sei  $M_{OCSG} \subset M_{CSG}$  eine Modellklasse die zusätzlich "optimal" ist:

- (1) Es exestiert kein Matching, so dass der summierte Gewinn für alle Agenten größer wäre.

Sei  $M_{FOCSG} \subset M_{OCSG}$  eine Modellklasse, die zusätzlich "fair" ist:

TODO: verweis für Kriterien für "fearheit"

### 3.2 Terminologie

**Definition 3.3 (Koalition).** Eine **Koalition** ist ein Zusammenschluss an Agenten die vollständige Informationen über alle Koalitionsteilnehmer besitzen und die Verteilung gemeinsamer Ressourcen auf Bauaufträge beabsichtigen. Ebenfalls haben sie einen gemeinsamen Mechanismus welches den Erlös auf die Koalitionsteilnehmer aufteilt. Formal:  $K \subseteq \text{Agenten}$  mit folgenden Eigenschaften:

$$\exists x \exists t \exists y. m(x, t, y) > 0 \wedge K(x) \rightarrow (\forall x' \forall t' m(x', t', y) > 0 \Rightarrow K(x')) \quad (2)$$

$$\exists x \exists y v(x, y) > 0 \wedge K(x) \rightarrow (\forall x'. v(x', y) > 0 \rightarrow K(x')) \quad (3)$$

Dabei sagt Bedingung 2 aus, dass eine Baustelle nur von einer Koalition gebaut werden kann, sowie Bedingung 3, dass eine Baustelle nur geld an eine Koalition senden kann.

**Definition 3.4 (Matching).** Ein **Matching** ist eine Konkrete zuordnung von Skillkapazitäten zu Bauaufträgen. Formal das Prädikat  $m \in \sigma_{CSG}$

### 3.3 Mechanismen

**TODO:** Mechanismuskritätien

TODO: phasen

TODO: überarbeiten

Bei der gegebenen Aufgabenstellung interessieren wir uns für ein Mechanismus, der bei einem gegebenen Setting ein möglichst optimales Game dezentral hervorbringt. Formal gesehen:

$$m : M_{\text{CSGS}} \rightarrow M_{\text{CSG}} \quad (4)$$

TODO: define mechanismus kritären

Die Kriterien, nach denen der dezentrale Mechanismus arbeitet und das Ergebnis – bei uns ein Game – bewertet wird, ist nicht hart formuliert und lässt uns Gestaltungsspielraum. Die Forderung an das Ergebnis ist, dass die "soziale Wohlfahrt maximiert wird und die Gewinne möglichst stabil und fair verteilt werde".

## 4 ERGEBNISSE

### 4.1 Theoretische Ergebnisse

#### 4.1.1 Superadditivität.

LEMMA 4.1 (SUPERADDITIVITÄT). *Das CSG ist superadditiv.*

Bevor wird die Superadditivität des CSG zeigen, führen wir zunächst zwei weitere "simple" Signaturen mit dazugehörigen Modellklassen ein und zeigen, dass Ergebnisse auf ihnen direkt auf CSG übertragen werden können. Außerdem führen wir die Begriffe *potentielle Matches* einer Koalition, die Menge der *gleichzeitig möglichen Baustellen einer Koalition*, *Outcome-Menge* von zwei Koalitionen und den *Wert* einer Baustelle ein.

- (1) **SCSGS** - Simple Coalition Skill Game Setting
- (2) **SCSG** - Simple Coalition Skill Game

Wir zeigen später, dass sich jedes Setting bzw. Game zu einem Setting bzw. Game vereinfachen lässt, in dem jeder Agent nur eine Einheit eines Skilltypen besitzt. Diese Vereinfachung erleichtert uns den Beweis der Superadditivität und die Betrachtung möglicher Algorithmen zur Verteilungsberechnung. Hierfür benötigen wir jedoch die neue Relation  $AgentOwner_{/2}$ , mit der wir uns die Zuteilung einer Skillkapazität zu seinem ursprünglichen Agenten merken:

**Definition 4.2 (SCSGS).** Eine SIMPLE COALITION SKILL GAME SETTING-Signatur sei definiert als

$$\sigma_{SCSGS} := \{gentOwner_{/2}, Agent_{/1}, Baustelle_{/1}, supply_{/2}, demand_{/2}, budget_{/1}, kosten_{/4}\}$$

#### Intuition

$AgentOwner(a, x)$	$:\Leftrightarrow$	Agent $x$ gehört zu dem ursprüngl. Agenten $a$
$Agent(x)$	$:\Leftrightarrow$	$x$ ist ein Agent (Baufirma)
$Baustelle(x)$	$:\Leftrightarrow$	$x$ ist eine Baustelle
$type(x) \mapsto t$	$:\Leftrightarrow$	Agent $x$ ist vom Skilltyp $t$
$demand(x, t) \mapsto n$	$:\Leftrightarrow$	Baustelle $x$ benötigt $n$ Einheiten vom Skilltyp $t$
$budget(x) \mapsto n$	$:\Leftrightarrow$	Baustelle $x$ ist bereit einen Gewinn von maximal $n$ bei Fertigstellung auszusahlen
$kosten(t, n, a, y) \mapsto n$	$:\Leftrightarrow$	Kosten für den zugehörigen ursprüngl. Agenten $a$ für den Transport von $n$ Einheiten des Skilltyp $t$ an die Baustelle $y$ .

Wir bezeichnen eine  $\sigma_{SCSGS}$ -Struktur  $SS$  als *Simple Setting* und die dazugehörige Modellklasse valider Strukturen  $M_{SCSGS}$ . Auch hier werden wir die Validitätskriterien nicht weiter erläutern.

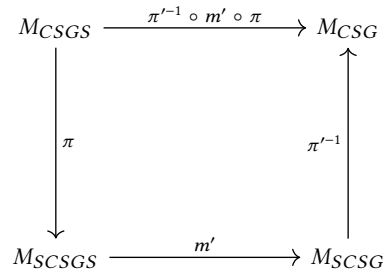
**Definition 4.3 (SCSG).** Eine SIMPLE COALITION SKILL GAME-Signatur (SCSG) sei definiert als

$$\sigma_{SCSG} := \sigma_{SCSGS} \cup \{M_{/3}, v_{/2}\}$$

$$\begin{array}{ll} m(x, t, y) & :\Leftrightarrow \text{Agent } x \text{ sendet eine Einheiten des Skilltyps } t \text{ an} \\ & \text{die Baustelle } y \\ v(x, y) \mapsto n & :\Leftrightarrow \text{Agent } x \text{ erh\u00e4lt von Baustelle } y \text{ die Verg\u00fctung } n \end{array}$$

## 4.2 Beziehungen zwischen den Modellklassen

Formal:


$$\pi \quad - \quad \text{total, injektiv} \quad (5)$$

$$\pi^{-1} \quad - \quad \text{surjektiv} \quad (6)$$

$$\pi' \quad - \quad \text{total, injektiv} \quad (7)$$

$$\pi'^{-1} \quad - \quad \text{surjektiv} \tag{8}$$

$$\pi^{-1} \circ \pi = id_{M_{CSGS}} \quad (9)$$

$$\pi'^{-1} \circ \pi' = id_{M_{CSG}} \quad (10)$$

Dabei wird die Zugehörigkeit von Agenten zum Skill in der *AgentOwner* Relation gesichert. Die Kostenfunktion bleibt bestehen und wird lediglich auf den *AgentOwner* übertragen. Bei den Matches und Vergütungen wird ähnlich verfahren. Hierdurch gehen keine Informationen verloren und alle Betrachtungen können auf den vereinfachten Modellen durchgeführt werden.

Manuscript submitted to ACM

$$PM(K) := \{ \quad (11)$$

$$m : Agent \times Skilltyp \times Baustelle \rightarrow \mathbb{N} \mid (12)$$

$$\phi_{Match}(m) \wedge (13)$$

$$\forall x \forall t \forall y : m(x, t, y) > 0 \rightarrow x \in K \quad \} (14)$$

Dabei bezeichnet  $\phi_{Match}(m)$  die Menge der validen Matches:

$$\phi_{Match}(m) := \forall x \forall t : \left( \sum_{y \in Baustelle} m(x, t, y) \right) \leq supply(x, t) (15)$$

Der Ausdruck (14) verdeutlicht, dass nur solche Matches für eine Koalition betrachtet werden, deren liefernder Agent auch Teil der Koalition ist.

*Definition 4.5 (Gleichzeitig mögliche Baustellen einer Koalition).* Sei  $K \subseteq Agent$  eine beliebige Koalition. Die Menge der möglichen Baustellen, die von  $K$  gleichzeitig gebaut werden können –  $B(K)$  – ist definiert als

$$B(K) := \{ B_K \subseteq Baustelle \mid (16)$$

$$\exists m \in PM(K), \forall b \in B_K, \forall t : (17)$$

$$\left( \sum_{x \in K} m(x, t, b) \right) \geq demand(b, t) \quad \} (18)$$

Da wir ein Simple Game betrachten, können wir o.B.d.A. annehmen, dass eine Agent nur einer Koalition zugeordnet ist:

$$K \neq S \Rightarrow K \cap S = \emptyset (19)$$

Hieraus folgt, dass eine Baustelle in einem Spiel nur von einer Koalition gebaut werden kann, da eine Baustelle pro Spiel nur einmal gebaut wird. Um dies formal festzuhalten, definieren wir im Folgenden die Outcome-Relation:

*Definition 4.6 (Outcome-Menge zweier Koalitionen).* Seien  $K, S \subseteq Agent$  beliebige Koalitionen. Eine *Outcome-Menge* weist beiden Koalitionen ein Tupel der Baustellen zu, die sie jeweils zur gleichen Zeit bauen können:

$$Outcome(K, S) := \{ (B_K, B_S) \subseteq Baustelle \times Baustelle \mid (20)$$

$$B_K \in B(K) \wedge B_S \in B(S) \wedge B_K \cap B_S = \emptyset \quad \} (21)$$

Zur weiteren Vereinfachung definieren wir noch eine Bewertungsfunktion für eine Menge von Baustellen:

*Definition 4.7 (Wert einer Baustelle).* Sei  $B \subseteq Baustelle$  beliebig. Dann ist der *Wert* von  $B$  definiert als

$$v(B) := \sum_{b \in B} budget(b) (22)$$

*Definition 4.8 (erzielbarer Wert zweier Koalitionen).* Seien  $K, S \subseteq Agent$  beliebige Koalitionen. Der *erzielbare Wert* zweier Koalitionen  $K$  und  $S$  ist nun definiert als

$$v(K) + v(S) := \max_{(B_K, B_S) \in Outcome(K, S)} (v(B_K) - \varphi_{kosten}(K, B_K) + (23)$$

$$v(B_S) - \varphi_{kosten}(S, B_S) \quad ) (24)$$

Die Baustellen, die von einer Koalition gebaut werden, können nicht mehr von einer anderen Koalition gebaut werden. Deshalb müssen wir diese zeitgleich betrachten.  $\varphi_{kosten}(B, K)$  ist dabei diejenige Funktion, die basierend auf der vorhandenen Kostenfunktion, der Koalition und den Baustellen die Kosten der Koalition für die Bereitstellung aller notwendigen Skills berechnet, um die Baustellen fertig zu stellen. **Bemerkung:** Nach Definition ist das Ergebnis pareto-effizient.

Existiert eine Koalition isoliert, lässt sich diese auch isoliert betrachten:

*Definition 4.9.* Sei  $K \subseteq Agent$  eine beliebige Koalition.

$$v(K) := \max_{B' \in B(K)} (v(B') - \varphi_{kosten}(B', K)) \quad (25)$$

Insbesondere gilt dann auch für zwei allein agierende Koalitionen  $K, S \subseteq Agent$ :

$$v(K \cup S) = \max_{B' \in B(K \cup S)} (v(B') - \varphi_{kosten}(B', K)) \quad (26)$$

Beachte auch das für einen Outcome zweier Koalitionen eine mögliche Baustellenmenge der potentiellen Baustellen der Vereinigung der Koalitionen existiert die alle Baustellen des separaten Outcomes beinhaltet:

$$\forall (B_K, B_S) \in Outcome(K, S), \exists B' \in B(K \cup S) : B_K \cup B_S \subseteq B' \quad (27)$$

Hieraus können wir die Superadditivität des Spiels schließen:

$$v(K \cup S) \geq v(K) + v(S) \quad (28)$$

Insbesondere ist das Spiel Konvex. Nach einem Theorem (TODO) ist bei einem konvexen Spiel das Shapley Value im Core enthalten, sodass die beste Lösung dieses Spiels die große Koalition ist und eine stabile und faire Lösung immer existiert.

**4.2.1 NP-härte des Problems.** Im folgenden möchten wir die NP-härte eines gewünschten mechanismusses Zeigen. Hierfür reduzieren wir das Rucksackproblem, ein allgemein bekanntes NP-vollständiges Problem, auf ein CSG. Das Rucksackproblem ist folgendermaßen definiert:

**LEMMA 4.10.** Sei  $m : CSGS \rightarrow CSG$  ein Mechanismus, der ein optimales Matching berechnet, dann ist  $m$  NP-hart.

*Definition 4.11 (Rucksackproblem).* Sei  $U$  eine Menge von Objekten,  $w$  eine Gewichtsfunktion und  $v$  eine Nutzenfunktion:

$$w : U \rightarrow \mathbb{R} \quad (29)$$

$$v : U \rightarrow \mathbb{R} \quad (30)$$

Sei weiter  $B \in \mathbb{R}$  eine vorgegebene Gewichtsschranke. Gesucht ist eine Teilmenge  $K \subseteq U$ , die folgende Bedingungen erfüllt:

$$\sum_{w \in K} w(u) \leq B \quad (31)$$

$$\max(\sum_{w_i \in K} v(u)) \quad (32)$$

Sei  $K = \{U, w, v\} \in \text{KNAPSACK}$  ein beliebiges Rucksackproblem. Wir geben eine Übersetzung in eine CSGS-Signatur an:

$$\text{Agent} = \{a\} \quad (33)$$

$$\text{supply}(a, t) \mapsto B \quad (34)$$

$$\text{Baustelle} = U \quad (35)$$

$$\text{demand}(u, t) \mapsto w(u) \quad (36)$$

$$\text{kosten}(t, n, x, y) \mapsto 0 \quad (37)$$

**TODO:** In Worten beschreiben, was hier passiert.

Intuitiv sorgt die Bedingung 31 dafür, dass der Agent seine Ressourcen nicht überschreitet, sowie die Bedingung 32, dass der Agent sein Profit maximiert. Beides sind ebenfalls Anforderungen, die von einem Mechanismus erfüllt werden müssen, der ein optimales CSG berechnet.

**TODO:** Referenz zum Abschnitt über den Mechanismus

Angenommen es gäbe ein  $m \in P$ , das aus einem CSGS ein CSG mit einem optimalem Matching berechnet, dann wäre auch  $\text{KNAPSACK} \in P$ . Dieses ist jedoch ein Widerspruch zur Annahme  $\text{KNAPSACK} \in NP$ .

### 4.3 Praktische Ergebnisse

## 5 ZUSAMMENFASSUNG

**TODO:** Zusammenfassung