Logik und Komplexität ÜBUNG 7

Denis Erfurt, 532437
HU Berlin

Aufgabe 1)

a)

zeige Conn ist nicht $L^2_{\infty\omega}$-definierbar in UGraph
nach Theorem 4.24 genügt e zu zeigen, dass es ein $\mathfrak{A} \in Conn$ und ein $\mathfrak{B} \in UGraph \setminus Conn$ gibt, so dass $\mathfrak{A} \approx^2_\infty \mathfrak{B}$
Sei $\mathfrak{A} := K_8$ ein Kreis mit 8 Steinen, $\mathfrak{B} := K_4 \cup K_4$ 2 Kreise mit jeweils 4 Steinen
zeige $\mathfrak{A} \approx^2_\infty \mathfrak{B}$
IA: Für alle Steine gilt: $a_i, b_i = *$. Insbesondere sind die Gewinnbedingungen für Duplicator erfüllt. **IS:** $i \to i+1$

O.b.d.A bewegt Spoiler den Stein α_k von $a_k \in A$ nach $a_{k'} \in A$, die Fälle für B sind analog.

Sei $k, l \in \{1, 2\}$ sowie $k \neq l$.

Fall 1. In Runde i+1 gilt: $\alpha_k = \alpha_l$
So setzt Duplicator β_k auf β_l und Gewinnt in Runde i+1

Fall 2. In Runde i+1 gilt: $(\alpha_k, \alpha_l) \in E^{\mathfrak{A}}$

$$\phi := \forall x_1 \exists x_2 \exists x_3 (\neg x_2 = x_3) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_1, x_3)$$

Beobachhtung 1: $\mathfrak{B} \models \phi$

Fall 2.1. In Runde i war $(\alpha_k, \alpha_l) \in E^{\mathfrak{A}}$

Nach Beobachhtung 1. gibt es ein $b_{k'} \in B$ mit $b_k \neq b_{k'}$ und $(b_{k'}, \beta_l) \in E^{\mathfrak{B}}$.

Duplicator wählt $\beta = b_{k'}$ und gewinnt die Runde i+1.

Fall 2.2. In Runde i war $(\alpha_k, \alpha_l) \notin E^{\mathfrak{A}}$

Nach Beobachhtung 1. gibt es ein $b_{k'} \in B$ mit $(b_{k'}, \beta_l) \in E^{\mathfrak{B}}$.

Duplicator wählt $\beta = b_{k'}$ und gewinnt die Runde i+1.

Fall 3. In runde i+1 gilt: $(\alpha_k, \alpha_l) \notin E^{\mathfrak{A}}$

Fall 3.1. Spoiler wählt $\alpha_k = *$

Duplicator wählt $\beta_k = *$ und gewinnt die Runde i+1.

Fall 3.2. Spoiler wählt ein beliebiges $a_{k'}$

Duplicator wählt ein beliebiges $\beta_k = b_{k'}$ so dass $(b_{k'}, b_l) \notin E^{\mathfrak{B}}$ und gewinnt die Runde i+1.

Damit ist gezeigt, dass Duplicator die Runde i+1 übersteht. Somit hat Duplicator eine Gewinnstrategie im 2-Pebble-Spiel.

@□

b)

Behauptung: Conn ist $L^3_{\infty\omega}$-definierbar in UGraph.

Sei $\mathfrak{A} \in Conn$ sowie $\mathfrak{B} \in UGraphs \setminus Conn$.

Sei $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$.

nach Theorem 4.24. genügt es zu zeigen, dass Spoiler eine Gewinnstrategie für beliebige $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ besitzt: Spoiler wählt $\beta_1, \beta_2 \in B_1$ und $\beta_3 \in B_2$ um zu gewinnen muss Duplicator $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in A$ wählen. Nun wählt in Runde i+1 Spoiler das α_i mit $i \in \{1, 2\}$ aus, welches die größte Entfernung zum α_3 besitzt und plaziert es auf das $a \in A$, welches die geringste Entfernung zum α_3 besitzt und noch eine Verbindung zum α_j mit $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$ besitzt. Die Distanz zwischen den α_1, α_2 Steinen und dem α_3 Stein verringert sich bei jeder Runde um 1. Um zu gewinnen muss Duplicator einen Stein in B_1 bewegen. Nach endlich vielen Runden ist besitzt ein α_i eine Verbindung mit α_j sowie α_3. Da jedoch β_1 sowie β_2 sich auf Steinen in B_1 befinden kann Duplicator keine Verbindung zwischen den 3 Steinen herstellen. Somit ist es kein partialler Isomorphismus und Duplicator hat nach endlich vielen Zügen verlohren.

Aufgabe 2)

a)

$$\varphi_1(x) := \forall y E(x, y)$$

1. ZEIGE: φ_1 ist keine um x lokale Formel.
2. SEI: $\sigma := \{E\}$
3. SEI: $\mathfrak{A} := (\{1, 2\}, \{\})$
4. $\mathfrak{A} \not\models \varphi_1[1]$
5. Für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(1) = (\{1\}, \{\})$
6. $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}[1] \models \varphi_1[1]$
7. Q.E.D.
   BEWEIS:Def. 5.3. b), 4, 6

GNF:

$$\varphi_1^{Nr(x)}(x) := (\forall y\ dist(x, y) \leq 2 \rightarrow E(x, y)) \wedge (\neg \exists z_1 \exists z_2\ dist(z_1, z_2) > 2)$$

b)

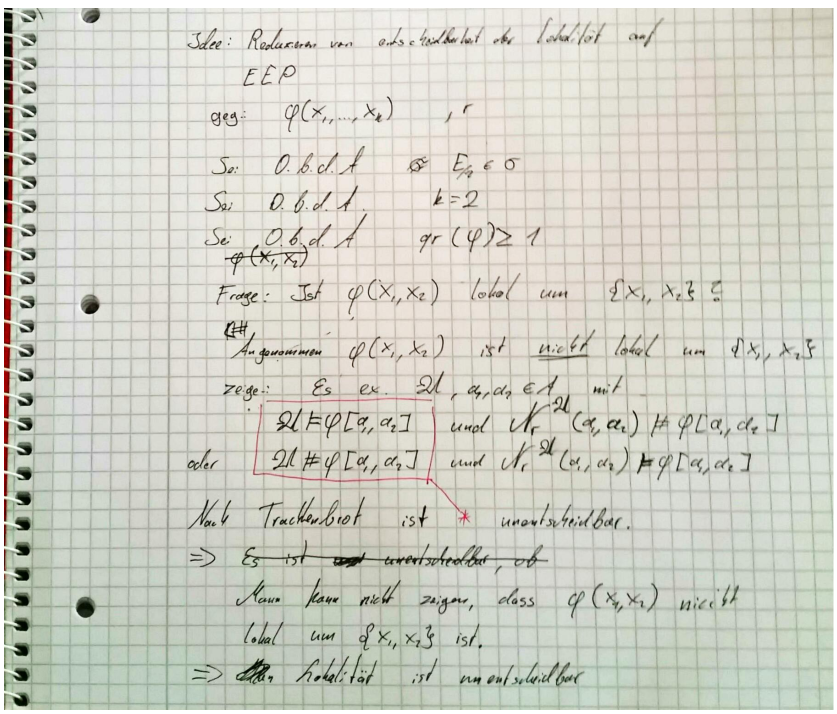
$$\varphi_2(x_1, x_2) := \neg x_1 = x_2 \wedge \forall y E(x_1, y) \vee E(x_2, y)$$

1. ZEIGE: φ_2 ist keine um x_1, x_2 lokale Formel.
2. SEI: $\sigma := \{E\}$
3. SEI: $\mathfrak{A} := (\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (2, 1)\})$
4. $\mathfrak{A} \not\models \varphi_2[1, 2]$
5. Für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(1, 2) = (\{1, 2\}, \{(1, 2), (2, 1)\})$
6. $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(1, 2) \models \varphi_2[1, 2]$
7. Q.E.D.
   BEWEIS:Def. 5.3. b), 4, 6

GNF:

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x_1, x_2) \quad := \quad & \neg x_1 = x_2 && (1)\\
& \wedge(\forall y\ dist(y, \{x_1, x_2\}) \leq 2 \rightarrow E(x_1, y) \vee E(x_2, y)) && (2)\\
& \wedge \neg \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 (\bigwedge_{z_i \neq z_j} dist(z_i, z_j) > 2) && (3)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3)



Idee: Reduzieren von Entscheidbarkeit der Lokalität auf EEP

geg.: $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, r

Sei: O.b.d.A $E_{/2} \in \sigma$

Sei O.b.d.A $k = 2$

Sei O.b.d.A $gr(\varphi) \geq 1$

~~$\varphi(x_1, x_2)$~~

Frage: Ist $\varphi(x_1, x_2)$ lokal um $\{x_1, x_2\}$?

Angenommen $\varphi(x_1, x_2)$ ist nicht lokal um $\{x_1, x_2\}$

zeige: Es ex. $\mathfrak{A}$, $a_1, a_2 \in A$ mit

$\boxed{\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, a_2]}$ und $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2) \not\models \varphi[a_1, a_2]$

oder $\boxed{\mathfrak{A} \not\models \varphi[a_1, a_2]}$ und $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2) \models \varphi[a_1, a_2]$

Nach Trakhtenbrot ist * unentscheidbar.

$\Rightarrow$ ~~Es ist unentscheidbar, ob~~

Man kann nicht zeigen, dass $\varphi(x_1, x_2)$ nicht lokal um $\{x_1, x_2\}$ ist.

$\Rightarrow$ Lokalität ist unentscheidbar

Abbildung 1:

(1) Sei M eine Menge von r-lokalen Formeln. Dann ist $\phi \in BC(M)$ ebenfalls r-lokal.

(2) Sei M eine Menge von Formeln und sei $\psi \in M$ nicht r-lokal. Dann ist $\phi \in BC(M)$ und $\phi beinhaltet \psi$ nicht r-lokal.

geg. $\phi(x_1, ..., x_k)$

ges.: Ist ϕ r-lokal?

1. Forme ϕ zu ϕ' um.

2. (a) Forme ψ' in die pränexte normalform um.

   (b) Forme $\forall x$ um in $\neg\exists x\neg$ und entferne $\neg\neg$

   (c) Forme $\exists x_1...\exists x_l\psi$ mit um zu $\exists x_1...\exists x_l\psi'$ mit ψ' ist in KNF

   (d) Vereinfache: Steht ψ und $\neg\psi$ in einer verundung. Lösche die Verundung.
   Steht: ψ in einer beliebigen Verundung und $\neg\psi$ in einer anderen beliebigen Verundung. Lösche alle vorkommen von ψ und $\neg\psi$

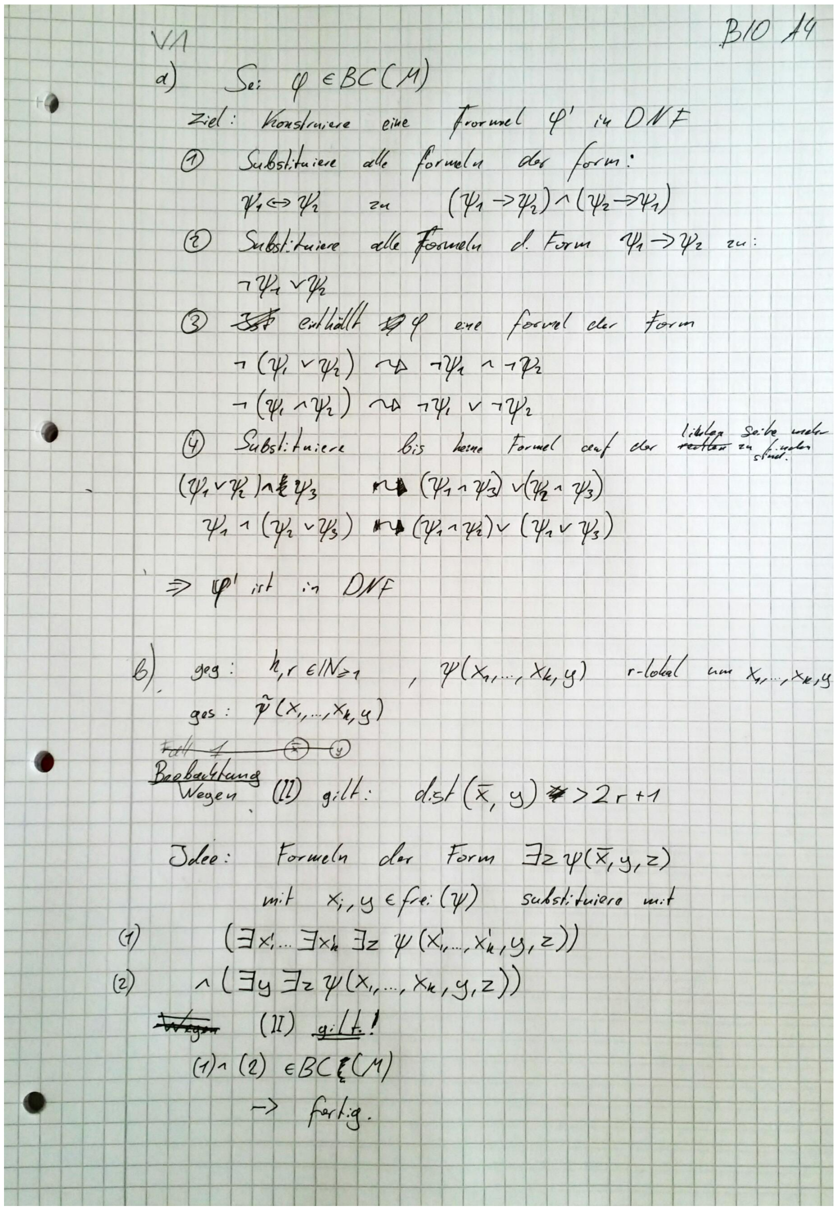
ϕ' hat die Form $[\neg]\exists x_1...[\neg]\exists x_l \bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J_i} \psi_{i,j}$ mit $\psi_{i,j}$ ist aomar.

Für alle J_i betrachte die Menge $M_i := \{\psi_{i,j} | j \in J\}$ sowie $M_i^+ := \{\psi_{i,j} | j \in J \text{ und } \psi \text{ ist nicht negiert.}\}$

$\mathcal{G}(M_i^+)$ ist ein Geifmann-Graph. mit $G := frei(M_i)$

Für jedes $\psi \in M_i \setminus M_i^+$ und $x, y \in frei(\psi)$ teste ob $dist(x, y) > r$ in $\mathcal{G}(M_i^+)$. Falls ja, so ist ϕ nach (2) nicht r-lokal.

Aufgabe 4)



VA B10 A4

a) Sei $\varphi \in BC(M)$

Ziel: Konstruiere eine Formel φ' in DNF

(1) Substituiere alle Formeln der Form:

$\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ zu $(\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge (\psi_2 \rightarrow \psi_1)$

(2) Substituiere alle Formeln d. Form $\psi_1 \rightarrow \psi_2$ zu:

$\neg \psi_1 \vee \psi_2$

(3) ~~Ist~~ enthält φ eine Formel der Form

$\neg(\psi_1 \vee \psi_2) \rightsquigarrow \neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2$

$\neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \rightsquigarrow \neg\psi_1 \vee \neg\psi_2$

(4) Substituiere bis keine Formel auf der linken ~~rechten~~ Seite mehr zu finden sind.

$(\psi_1 \vee \psi_2) \wedge \psi_3 \rightsquigarrow (\psi_1 \wedge \psi_3) \vee (\psi_2 \wedge \psi_3)$

$\psi_1 \wedge (\psi_2 \vee \psi_3) \rightsquigarrow (\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \vee \psi_3)$

$\Rightarrow \varphi'$ ist in DNF

b) geg: $k, r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $\psi(x_1, \dots, x_k, y)$ r-lokal um $x_1, \dots, x_k, y$

ges: $\tilde{\psi}(x_1, \dots, x_k, y)$

~~Fall 1~~ $\bar{x}$ y

~~Beobachtung~~ Wegen (II) gilt: $dist(\bar{x}, y) > 2r+1$

Idee: Formeln der Form $\exists z\, \psi(\bar{x}, y, z)$

mit $x_i, y \in frei(\psi)$ substituiere mit

(1) $(\exists x_1' \dots \exists x_k' \exists z\, \psi(x_1', \dots, x_k', y, z))$

(2) $\wedge (\exists y \exists z\, \psi(x_1, \dots, x_k, y, z))$

~~Wegen~~ (II) gilt!

$(1) \wedge (2) \in BC(M)$

$\rightarrow$ fertig.

Abbildung 2: