

Logik und Komplexität ÜBUNG 7

Denis Erfurt, 532437
HU Berlin

Aufgabe 1)

Zeige 1. C ist Hanf-lokal in $S \Rightarrow C$ ist FO-definierbar in S

Beweis. Es exestiert eine Zahl $r \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in S$ gilt:

$$\text{Falls } \mathfrak{A} \rightleftharpoons_r \mathfrak{B}, \text{ so } (\mathfrak{A} \in C \Leftrightarrow \mathfrak{B} \in C)$$

\Rightarrow für jeden r -Umgebungstyp ϱ gilt:

$$\text{Falls } \#_{\varrho}(\mathfrak{A}) = \#_{\varrho}(\mathfrak{B}), \text{ so } (\mathfrak{A} \in C \Leftrightarrow \mathfrak{B} \in C)$$

Da es sich bei S um endliche Strukturen handelt sind \mathfrak{A} und \mathfrak{B} ebenfalls endlich. Sei $r = 3^m$. Falls $k = 0$ so sind alle Bedingungen vom Satz von Hanf erfüllt. Andernfalls folgt aus $\mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B}$ der Isomorphismus beider strukturen für ein beliebiges k . Somit sind hier auch alle Bedingungen Erfüllt. Somit gilt

$$\text{Falls } \mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B}, \text{ so } (\mathfrak{A} \in C \Leftrightarrow \mathfrak{B} \in C)$$

Somit gibt es nach Ehrenfeucht eine (FO) Hintikka Formel, die die Gewinnstrategie für Dup. auf m Runden EF Spiel für \mathfrak{A} und \mathfrak{B} beschreibt.

$$\text{Falls } \mathfrak{B} \models \phi_A^m, \text{ so } (\mathfrak{A} \in C \Leftrightarrow \mathfrak{B} \in C)$$

Sei $Q \subseteq m - \text{Typen}_0[\sigma]$ so dass f.a. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in C$ gilt: $\mathfrak{B} \models \phi_A^m \Rightarrow \phi_A^m \in Q$

$$\psi := \bigvee_{\phi \in Q} \phi$$

Da Q endlich ist exestiert ein solches $\psi \in FO[\sigma]$. Somit gilt

$$\mathfrak{A} \in C \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi$$

Somit ist $C := \{\mathfrak{A} \in S : \mathfrak{A} \models \psi\}$ und damit FO-definierbar in S .

□

Aufgabe 2)

Idee: Zerteilung mit dem Kompositionslemma.

Das EF Spiel wird auf Strukturen gespielt, bei denen alle Konstanten durch eine Sligneton Relation ersetzt wurden. Demnach ist für alle Strukturen σ eine relationelle Signatur.

Sei $\mathcal{A}_f := \mathcal{A}|_{M_f^{\mathcal{A}}}$.

$\Rightarrow \mathcal{A} := \bigsqcup_{f \subseteq \sigma_{k,l}} \mathcal{A}_f$

Nach dem Kompositionslemma folgt:

Falls für alle $\mathcal{A}_f, \mathcal{B}_f$ gilt $\mathcal{A}_f \approx_m \mathcal{B}_f \Rightarrow \mathcal{A} \approx_m \mathcal{B}$

Beobachtung 1: für alle $P \in \sigma_{k,l} : P^{\mathcal{A}_f} = \begin{cases} A^{\mathcal{A}_f} & P \in f \\ \{\} & P \notin f \end{cases}$

Beobachtung 2: Für alle $f \subseteq \sigma_{k,l}$ hängt die Gewinnstrategie von Dup. im $EF(\mathcal{A}_f, \mathcal{B}_f)$ -Spiel **nur** von den Universen $A^{\mathcal{A}_f}, B^{\mathcal{B}_f}$ ab.

\Rightarrow um zu zeigen $\mathcal{A}_f \approx_m \mathcal{B}_f$ genügt es demnach zu Zeigen: $\mathcal{A}'_f \approx_m \mathcal{B}'_f$. Dabei sind $\mathcal{A}'_f, \mathcal{B}'_f$ σ -Strukturen mit $A^{\mathcal{A}'_f} = A^{\mathcal{A}_f}$ sowie $B^{\mathcal{B}'_f} = B^{\mathcal{B}_f}$.

Falls $|A^{\mathcal{A}'_f}| = |B^{\mathcal{B}'_f}|$: dann sind beide Strukturen isomorph und somit gilt: $\mathcal{A}'_f \approx_m \mathcal{B}'_f$.

Falls $|A^{\mathcal{A}'_f}|, |B^{\mathcal{B}'_f}| > 2^m$:

Angenommen Sp. hat eine Gewinnstrategie. Da Elemente aus A nicht in Beziehung zu einander zu bringen sind, muss Sp. den Unterschied anhand der Kardinalität des Universums zeigen. Hierfür könnte er für 2 Quantifizierte Variablen durch eine Binäre suche den Suchraum halbieren. Da nach der Annahme beide Universen die Kardinalität $> 2^m$ besitzen, kann nach m -Runden immer noch nicht gezeigt werden das sich die Kardinalitäten unterscheiden, was aber ein Widerspruch zur Annahme ist. Somit muss Dup. eine Gewinnstrategie besitzen.

Aufgabe 3. a)

Zeige 2. $2 - COL$ ist nicht Fo-definierbar in $DGraph$

\Rightarrow Für jedes $r \in \mathbb{N}$ existiert ein $\mathfrak{A}_r \in 2 - COL$ und $\mathfrak{B}_r \in DGraph \setminus 2 - COL$ mit $\mathfrak{B}_r \rightleftharpoons_r \mathfrak{A}_r$:

Beweis. Sei \mathfrak{A}_r eine Struktur bestehend aus 2 gerichteten Kreisen mit je $2r+3$ Knoten. Sei \mathfrak{B}_r ein Großer Kreis mit $4r + 6$ Knoten.

Für alle $a \in A$ sieht der r -Umgebungstyp $\mathfrak{N}_r^{\mathfrak{A}_r}(a)$ wie eine Linie aus mit $2r + 1$ Knoten.

Auch gilt für alle $a \in A, b \in B$:

$$(\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}_r}(a), a) \cong (\mathcal{N}_r^{\mathfrak{B}_r}(b), b)$$

Somit gilt für jeden r -Umgebungstyp $\varrho : \#_{\varrho}(\mathfrak{A}_r) = \#_{\varrho}(\mathfrak{B}_r)$ und somit:

$$\mathfrak{A} \rightleftharpoons_r \mathfrak{B}_r$$

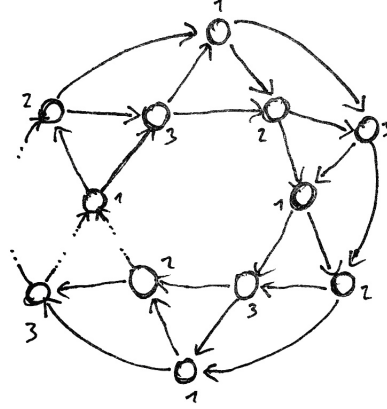
Klar ist auch: $\mathfrak{A}_r \in DGraph \setminus 2 - COL$, da die Kreise jeweils eine ungerade Anzahl an Knoten besitzen. Jedoch ist $\mathfrak{B}_r \in 2 - COL$.

\Rightarrow Somit ist $2 - COL$ nicht FO-definierbar in $DGraph$. □

Aufgabe 3. b)

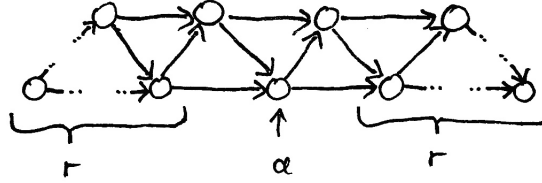
Zeige 3. $3 - COL$ ist nicht FO-definierbar in $DGraph$. \Rightarrow Für jedes $r \in \mathbb{N}$ existiert ein $\mathfrak{A}_r \in 3 - COL$ und $\mathfrak{B}_r \in DGraph \setminus 3 - COL$ mit $\mathfrak{B}_r \rightleftharpoons_r \mathfrak{A}_r$:

Beweis. Sei \mathcal{K}_r ein Graph mit: $V = \{1, \dots, r\}$ sowie $E = \{(n, n+1) : n \in \{1, \dots, r-1\}\} \cup \{(n, n+2) : n \in \{1, \dots, r-2\}\} \cup \{(n-1, 1), (n, 1), (n, 2)\}$



$$\mathcal{K}_r \in 3 - COL \Leftrightarrow r = 6n \text{ für } n \in \mathbb{N}^+$$

Für ein Kreis \mathcal{K}_{r+1} und ein Beliebigen $a \in V$ sieht die r-Umgebung $\mathcal{N}^{\mathcal{K}_{r+1}}(a)$ folgendermaßen aus:



Außerdem gilt für $a \in \mathcal{K}_p, b \in \mathcal{K}_q$ mit $p, q \geq r + 1$:

$$(\mathcal{N}_r^{\mathcal{K}_p}(a), a) \cong (\mathcal{N}_r^{\mathcal{K}_q}(b), b)$$

Sei $\mathfrak{A}_r := \mathcal{K}_{6r+6} \cup \mathcal{K}_{6r+8} \cup \mathcal{K}_{6r+10}$

\Rightarrow f.a. $r \in \mathbb{N}$: $\mathfrak{B}_r \in DGraph \setminus 3 - COL$

Sei $\mathfrak{B}_r := \mathcal{K}_{18r+24}$

\Rightarrow f.a. $r \in \mathbb{N}$: $\mathfrak{B}_r \in 3 - COL$

Da $|A| = |B| \Rightarrow$ für jeden r-Umgebungstyp ϱ : $\#_{\varrho}(\mathfrak{A}_r) = \#_{\varrho}(\mathfrak{B}_r)$

und somit $\mathfrak{B}_r \rightleftharpoons_r \mathfrak{A}_r$

□

Aufgabe 4)