Logik und Komplexität Übung 5

Notizen zur fünften Übung
HU Berlin

Aufgabe 1)

Aufgabe 2)

Zeige 1. *Falls $|A| < |B|$ und $|A| \leq 2^m$ so hat Spoiler eine Gewinnstrategie in m-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.*

$(**)_i$: Sind $a_{2+1}, ..., a_{2+i}$ und $b_{2+1}, .., b_{2+i}$ die in Runden $1, ..., i$ gewählten Elemente in A und B, so gibt es $j, j' \in 1, ..., 2+i$ so dass gilt:
1. ($a_j <^A a_{j'}$ und $b_j \geq^B b_j$) oder ($a_j \geq^A a_{j'}$ und $b_j <^B b_{j'}$)
oder
2. $Dist(a_j, a_{j'}) < 2^{m-i}$ und $Dist(a_j, a_{j'}) < Dist(b_j, b_{j'})$

Zeige 2. *$(**)_i$ gilt für jeden Schritt i:*

IV: $|A| < |B|$ *und* $|A| \leq 2^m$

IA: $i = 0$ $(**)_0$ *gilt, durch die IV*
IS: $i \to i+1$:
Sp. wählt in Runde i+1 das Element b_{i+1} mit $b_j < b_{i+1} < b_{j'}$ mit $Dist(b_j, b_{i+1}) = 2^{m-(i+1)}$
Seien $a_j, a_{j'}$ jeweils die in Runde j, j' von Dup gespielten Elemente.
zeige: *f.a. a_{i+1} gilt $(**)_{i+1}$*
Fall 1: $a_{i+1} = a_j$
$Dist(a_{i+1}, a_j) = 0 < 2^{m-(i+1)}$
$\Rightarrow (**)_{i+1}$ *gilt*
Fall 2: $a_{i+1} < a_j$
gilt nach $(**)_{i+1}.1$

Fall 3: $a_{i+1} > a_{j'}$
gilt nach $(**)_{i+1}.1$
Fall 4: $a_j < a_{i+1} < a_{j'}$
Fall 4.1: $dist(a_j, a_{i+1}) = dist(b_j, b_{i+1})$
Da $da_{j,j'} < db_{j,j'} \Rightarrow da_{i+1,j'} < db_{i+1,j'}$
Da $db_{i+1,j'} \geq 2^{m-(i+1)} \Rightarrow da_{i+1,j'} < 2^{m-(i+1)}$
$\Rightarrow (**)_{i+1}$ *gilt*
Fall 4.2: $dist(a_j, a_{i+1}) < dist(b_j, b_{i+1})$
Da $db_{i+1,j'} \geq 2^{m-(i+1)} \Rightarrow da_{j,i+1} < 2^{m-(i+1)}$
$\Rightarrow (**)_{i+1}$ *gilt*
Fall 4.3: $dist(a_j, a_{i+1}) > dist(b_j, b_{i+1})$
$da_{i+1,j} < 2^{m-i} - da_{j,i+1}$ *und* $da_{j,i+1} > 2^{m-(i+1)}$
$\Rightarrow 2^{m-i} - da_{j,i+1} < 2^{m-(i+1)} \Rightarrow (**)_{i+1}$ *gilt*

Aufgabe 3)

Definition Aquivalenz für Formeln:
$\phi \approx_m \psi \Leftrightarrow$ für jede Äquivalenzklasse $[(A, \bar{a})]_{\approx_m}$ so dass für alle $A \in [(A, \bar{a})]_{\approx_m}$ gilt:

$$A \models \phi \Leftrightarrow A \models \psi$$

Da es für jede Klasse eine Hintikkaformel gibt die Sie beschreibt gilt für alle $\phi \in FO[\sigma]$ mit $qr(\phi) = m$ ein $Q : \phi \equiv \bigvee_{h \in Q \subseteq m-Typen_k[\sigma]} h$.
Da $m - Typen_k[\sigma]$ endlich ist und die Potenzmenge einer endlichen Menge ebenfalls endlich ist, gibt es endlich viele Q's.
Die Vereinigung ($\cup$) über k sowie über m von $m-Typen_k[\sigma]$ liefert nur ebenfalls nur endlich viele Elemente. Somit ist auch bis auf die logische Äquivalenz die menge der $FO[\sigma]$ mit $qr \leq m$ und $frei \subseteq x_1, ..., x_k$ endlich.

Aufgabe 4)