Logik und Komplexität Übung 4

Notizen zur dritten Übung
HU Berlin

Aufgabe 1)

a)

$$\exists x X(x) \quad \wedge \exists y \neg X(y) \quad \wedge \forall u \forall v((X(u) \wedge \neg X(v)) \quad \rightarrow (\neg E(u,v) \wedge \quad \neg E(v,u)))$$

$$\bigvee_{a \in A} v_a \quad \wedge \bigvee_{a \in A} \neg v_a \quad \wedge \bigwedge_{a \in A} \bigwedge_{b \in A} (v_a \wedge \neg v_b \quad \rightarrow (\neg \begin{cases} 1 & (a,b) \in E \\ 0 & (a,b) \notin E \end{cases} \wedge \neg \begin{cases} 1 & (b,a) \in E \\ 0 & (b,a) \notin E \end{cases}))$$

$$\begin{array}{ll}
 & (v_1 \vee v_2 \vee v_3) \\
\wedge & (\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3) \\
\wedge & (v_1 \wedge \neg v_1 \rightarrow \neg 0 \wedge \neg 0) \\
\wedge & (v_1 \wedge \neg v_2 \rightarrow \neg 1 \wedge \neg 0) \\
\wedge & (v_1 \wedge \neg v_3 \rightarrow \neg 0 \wedge \neg 0) \\
\wedge & (v_2 \wedge \neg v_1 \rightarrow \neg 0 \wedge \neg 0) \\
\wedge & (v_2 \wedge \neg v_2 \rightarrow \neg 0 \wedge \neg 0) \\
\wedge & (v_2 \wedge \neg v_3 \rightarrow \neg 0 \wedge \neg 0) \\
\wedge & (v_3 \wedge \neg v_1 \rightarrow \neg 0 \wedge \neg 0) \\
\wedge & (v_3 \wedge \neg v_2 \rightarrow \neg 0 \wedge \neg 0) \\
\wedge & (v_3 \wedge \neg v_3 \rightarrow \neg 1 \wedge \neg 1)
\end{array}$$

b) Erfüllende Belegung ist $v_1, \neg v_3$ d.h.: Erfüllt für $X = \{1\}, X = \{1, 2\}$

Aufgabe 2)

Zeige: $Eval_{Fin_<}(\Phi)$ für jeden ESO-HORN-Satz Φ liegt in P.
D.h. es ex. ein det. Algorithmus der bei eingabe einer Endlichen Struktur $\mathfrak{A}$ in Polinomialzeit entscheidet, ob $\mathfrak{A} \models \Phi$

Ein ESO-Horn Satz Φ besitzt die form:

$$\exists X_1 ... \exists X_d \forall y_1 .. \forall y_{d'} \phi$$

Wobei ϕ eine Konjunktion von ESO-Horn formeln ist:

$$\phi := \bigwedge_{k \in \Gamma} \bigvee_{j \in K} \beta_{k,j}$$

mit

$$\beta_{k,j} := \begin{cases} \psi(y_1, ..., y_{d'}) & \psi \in FO[\sigma] \\ X_i(\bar{y}) & \bar{y} \in (\{y_1, ..., y_d\} \cup \{c : \text{c ist eine Konstante in } \sigma\})^{ar(X_i)} \\ \neg X_i(\bar{y}) & \bar{y} \in (\{y_1, ..., y_d\} \cup \{c : \text{c ist eine Konstante in } \sigma\})^{ar(X_i)} \end{cases}$$

Aus dem Beweis von Theorem 2.24 konstruieren wir in **Polinomialzeit** bei eingabe von $\mathfrak{A}$ die Aussagenlogische Formel $\alpha_{\Phi,\mathfrak{A}}$. Diese hat die Form:

$$\bigwedge_{a_1 \in A} \cdots \bigwedge_{a'_d \in A} \bigwedge_{k \in \Gamma} \bigvee_{j \in k} \beta'_{k,j}$$

mit

$$\beta'_{k,j} := \begin{cases} \psi(a_1, ..., a_{d'}) & \psi \in FO[\sigma] \\ v_{X_i,(\bar{y})} & \bar{y} \in A^{ar(X_i)} \\ \neg v_{X_i,(\bar{y})} & \bar{y} \in A^{ar(X_i)} \end{cases}$$

$\psi(a_1, ..., a_{d'})$ besitzt keine variablen und kann rekursiv in Polinomialzeit ausgewertet werden. Somit ist Φ ein Aussagenlogischer Horn Satz ist, welcher mit dem Streichungsalgorithmus in Polinomialzeit gelöst werden kann. $\square$

Aufgabe 3)

a) Das kleinste m, so dass Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden Ehrenfeucht-Fraisse Spiel hat ist **3**.

Gewinnstrategie für Spoiler in 3 Runden: Wähle 3 Punkte in $\mathfrak{B}$, die paarweise getrennt sind.
Gewinnstrategie für Duplicator in 2 Runden:
1. Spiegele Spoilers wahl.
2. Falls Spoiler einen verbundenen Knoten wählt, wähle ebenfalls einen verbundenen, andernfalls wähle einen unverbundenen.

b)

$$\exists x \exists y \exists z (x \neq y \land y \neq z \land x \neq z \neg E(x, y) \land \neg E(y, z) \land \neg E(z, x))$$

Aufgabe 4)

SKIZZE
Gewinnbedingungen für Dup.
1) Für alle $j, j' \in 1, ..., k+m$ gilt $a_j = a_{j'} \Leftrightarrow b_j = b_{j'}$
2) Die Abbildung $\pi : a_1, ..., a_{k+m} \rightarrow b_1, ..., b_{k+m}$ mit

$$\pi(a_j) := b_j$$

ist ein partieller Isomorphismus

IA: Sei $m = 0$ sowie $k = 0$, dann sind Bedingung (1) und (2) nicht verletzt. Somit besitzt Dup. eine Gewinnstrategie. Und Sp. keine Gewinnstrategie. Somit hat nur einer von beiden eine Gewinnstrategie.

IS: F1: Sei Dub in (m-1) runden eine Gewinnstrategie. Falls es ein Knoten gibt, den spoiler wählen kann, so dass jede Antwort von dup eine verletzung der Bedingung 1 und 2 nach sich zieht. Besitzt Sp eine Gewinnstrategie und Dup nicht.
F2: Sei Sp in (m-1) runden eine Gewinnstrategie. Dan sind die Bedingung (1) ode (2) verletzt. Nach jeder Wahl von (a, b) Bleiben die bedingungen verletzt. Somit behält Sp. eine Gewinnstrategie und Dup. keine. Somit hat zu jedem Zustand entweder Dup. oder Sp. eine Gewinnstrategie.