

Logik und Komplexität ÜBUNG 7

Denis Erfurt, 532437
HU Berlin

Aufgabe 1)

a)

zeige Conn ist nicht $L^2_{\infty\omega}$ -definierbar in UGraph

nach Theorem 4.24 genügt es zu zeigen, dass es ein $\mathfrak{A} \in Conn$ und ein $\mathfrak{B} \in UGraph \setminus Conn$ gibt, so dass $\mathfrak{A} \approx^2_{\infty} \mathfrak{B}$

Sei $\mathfrak{A} := K_8$ ein Kreis mit 8 Steinen, $\mathfrak{B} := K_4 \cup K_4$ 2 Kreise mit jeweils 4 Steinen

zeige $\mathfrak{A} \approx^2_{\infty} \mathfrak{B}$

IA: Für alle Steine gilt: $a_i, b_i = *$. Insbesondere sind die Gewinnbedingungen für Duplicator erfüllt. **IS:** $i \rightarrow i + 1$

O.b.d.A bewegt Spoiler den Stein α_k von $a_k \in A$ nach $a_{k'} \in A$, die Fälle für B sind analog.

Sei $k, l \in \{1, 2\}$ sowie $k \neq l$.

Fall 1. In Runde $i+1$ gilt: $\alpha_k = \alpha_l$

So setzt Duplicator β_k auf β_l und Gewinnt in Runde $i+1$

Fall 2. In Runde $i+1$ gilt: $(\alpha_k, \alpha_l) \in E^{\mathfrak{A}}$

$$\phi := \forall x_1 \exists x_2 \exists x_3 (\neg x_2 = x_3) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_1, x_3)$$

Beobachtung 1: $\mathfrak{B} \models \phi$

Fall 2.1. In Runde i war $(\alpha_k, \alpha_l) \in E^{\mathfrak{A}}$

Nach Beobachtung 1. gibt es ein $b_{k'} \in B$ mit $b_k \neq b_{k'}$ und $(b_{k'}, \beta_l) \in E^{\mathfrak{B}}$.

Duplicator wählt $\beta = b_{k'}$ und gewinnt die Runde $i+1$.

Fall 2.2. In Runde i war $(\alpha_k, \alpha_l) \notin E^{\mathfrak{A}}$

Nach Beobachtung 1. gibt es ein $b_{k'} \in B$ mit $(b_{k'}, \beta_l) \in E^{\mathfrak{B}}$.

Duplicator wählt $\beta = b_{k'}$ und gewinnt die Runde $i+1$.

Fall 3. In runde $i+1$ gilt: $(\alpha_k, \alpha_l) \notin E^{\mathfrak{A}}$

Fall 3.1. Spoiler wählt $\alpha_k = *$

Duplicator wählt $\beta_k = *$ und gewinnt die Runde $i+1$.

Fall 3.2. Spoiler wählt ein beliebiges $a_{k'}$

Duplicator wählt ein beliebiges $\beta_k = b_{k'}$ so dass $(b_{k'}, b_l) \notin E^{\mathfrak{B}}$ und gewinnt die Runde $i+1$.

Damit ist gezeigt, dass Duplicator die Runde $i+1$ übersteht. Somit hat Duplicator eine Gewinnstrategie im 2-Pebble-Spiel.

□

b)

Behauptung: Conn ist $L^3_{\infty\omega}$ -definierbar in UGraph.

Sei $\mathfrak{A} \in Conn$ sowie $\mathfrak{B} \in UGraphs \setminus Conn$.

Sei $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$.

nach Theorem 4.24. genügt es zu zeigen, dass Spoiler eine Gewinnstrategie für beliebige \mathfrak{A} und \mathfrak{B} besitzt: Spoiler wählt $\beta_1, \beta_2 \in B_1$ und $\beta_3 \in B_2$ um zu gewinnen muss Duplicator $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in A$ wählen. Nun wählt in Runde $i+1$ Spoiler das α_i mit $i \in \{1, 2\}$ aus, welches die größte Entfernung zum α_3 besitzt und platziert es auf das $a \in A$, welches die geringste Entfernung zum α_3 besitzt und noch eine Verbindung zum α_j mit $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$ besitzt. Die Distanz zwischen den α_1, α_2 Steinen und dem α_3 Stein verringert sich bei jeder Runde um 1. Um zu gewinnen muss Duplicator einen Stein in B_1 bewegen. Nach endlich vielen Runden ist besitzt ein α_i eine Verbindung mit α_j sowie α_3 . Da jedoch β_1 sowie β_2 sich auf Steinen in B_1 befinden kann Duplicator keine Verbindung zwischen den 3 Steinen herstellen. Somit ist es kein partieller Isomorphismus und Duplicator hat nach endlich vielen Zügen verloren.

Aufgabe 2)

a)

$$\varphi_1(x) := \forall y E(x, y)$$

$\langle 1 \rangle 1$. PROVE: φ_1 ist keine um x lokale Formel.

$\langle 1 \rangle 2$. LET: $\sigma := \{E\}$

$\langle 1 \rangle 3$. LET: $\mathfrak{A} := (\{1, 2\}, \{\})$

$\langle 1 \rangle 4$. $\mathfrak{A} \not\models \varphi_1[1]$

$\langle 1 \rangle 5$. Für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(1) = (\{1\}, \{\})$

$\langle 1 \rangle 6$. $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}[1] \models \varphi_1[1]$

$\langle 1 \rangle 7$. Q.E.D.

PROOF:Def. 5.3. b), $\langle 1 \rangle 4$, $\langle 1 \rangle 6$

GNF:

$$\varphi_1^{Nr(x)}(x) := (\forall y \text{ dist}(x, y) \leq 2 \rightarrow E(x, y)) \wedge (\neg \exists z_1 \exists z_2 \text{ dist}(z_1, z_2) > 2)$$

b)

$$\varphi_2(x_1, x_2) := \neg x_1 = x_2 \wedge \forall y E(x_1, y) \vee E(x_2, y)$$

$\langle 1 \rangle 1$. PROVE: φ_2 ist keine um x_1, x_2 lokale Formel.

$\langle 1 \rangle 2$. LET: $\sigma := \{E\}$

$\langle 1 \rangle 3$. LET: $\mathfrak{A} := (\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (2, 1)\})$

$\langle 1 \rangle 4$. $\mathfrak{A} \not\models \varphi_2[1, 2]$

$\langle 1 \rangle 5$. Für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(1, 2) = (\{1, 2\}, \{(1, 2), (2, 1)\})$

$\langle 1 \rangle 6$. $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(1, 2) \models \varphi_2[1, 2]$

$\langle 1 \rangle 7$. Q.E.D.

PROOF:Def. 5.3. b), $\langle 1 \rangle 4$, $\langle 1 \rangle 6$

GNF:

$$\varphi_2(x_1, x_2) \quad := \quad \neg x_1 = x_2 \quad (1)$$

$$\wedge (\forall y \, dist(y, \{x_1, x_2\}) \leq 2 \rightarrow E(x_1, y) \vee E(x_2, y)) \quad (2)$$

$$\wedge \neg \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \left(\bigwedge_{z_i \neq z_j} dist(z_i, z_j) > 2 \right) \quad (3)$$

Aufgabe 3)

Aufgabe 4)