Logik und Komplexität Übung 7

Denis Erfurt, 532437
HU Berlin

Aufgabe 1)

Zeige 1. *C ist Hanf-lokal in $S \Rightarrow$ C ist FO-definierbar in S*

Beweis. Es exestiert eine Zahl $r \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in S$ gilt:

$$\text{Falls } \mathfrak{A} \rightleftarrows_r \mathfrak{B}, \text{ so } (\mathfrak{A} \in C \Leftrightarrow \mathfrak{B} \in C)$$

$\Rightarrow$ für jeden r-Umgebungstyp ϱ gilt:

$$\text{Falls } \#_\varrho(\mathfrak{A}) = \#_\varrho(\mathfrak{B}), \text{ so } (\mathfrak{A} \in C \Leftrightarrow \mathfrak{B} \in C)$$

Da es sich bei S um endliche Strukturen handelt sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ebenfalls endlich. Sei $r = 3^m$.

QUESTION: Kann ich $k = 0$ so annähmen, oder muss ich das für alle k berücksichtigen?

O.b.d.A. ist $k = 0$. Somit sind alle Bedingungen vom Satz von Hanf erfüllt. Somit gilt

$$\text{Falls } \mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B}, \text{ so } (\mathfrak{A} \in C \Leftrightarrow \mathfrak{B} \in C)$$

Somit gibt es nach Ehrenfeucht eine (FO) Hintikka Formel, die die Gewinnstrategie für Dup. auf m Runden EF Spiel für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beschreibt.

$$\text{Falls } \mathfrak{B} \models \phi_A^m, \text{ so } (\mathfrak{A} \in C \Leftrightarrow \mathfrak{B} \in C)$$

Sei $Q \subseteq m - Typen_0[\sigma]$ so dass f.a. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in C$ gilt: $\mathfrak{B} \models \phi_A^m \Rightarrow \phi_A^m \in Q$

$$\psi := \bigvee_{\phi \in Q} \phi$$

Da Q endlich ist exestiert ein solches $\psi \in FO[\sigma]$. Somit gilt

$$\mathfrak{A} \in C \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi$$

Somit ist $C := \{\mathfrak{A} \in S : \mathfrak{A} \models \psi\}$ und damit FO-definierbar in S.

□

Aufgabe 2)

Aufgabe 3. a)

Zeige 2. *$2-COL$ ist nicht Fo-definierbar in DGraph*
$\Rightarrow$ Für jedes $r \in \mathbb{N}$ exestiert ein $\mathfrak{A}_r \in 2-COL$ und $\mathfrak{B}_r \in DGraph \setminus 2-COL$ mit $\mathfrak{B}_r \rightleftarrows_r \mathfrak{A}_r$:

Beweis. Sei $\mathfrak{A}_r$ eine Struktur bestehend aus 2 gerichteten Kreisen mit je 2r+3 Knoten. Sei $\mathfrak{B}_r$ ein Großer Kreis mit $4r+6$ Knoten.

Für alle $a \in A$ sieht der r-Umgebungstyp $\mathfrak{N}_r^{\mathfrak{A}_r}(a)$ wie eine Linie aus mit $2r+1$ Knoten.
Auch gilt für alle $a \in A, b \in B$:

$$(\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}_r}(a), a) \cong (\mathcal{N}_r^{\mathfrak{B}_r}(b), b)$$

Somit gilt für jeden r-Umgebungstyp $\varrho : \#_\varrho(\mathfrak{A}_r) = \#_\varrho(\mathfrak{B}_r)$ und somit:

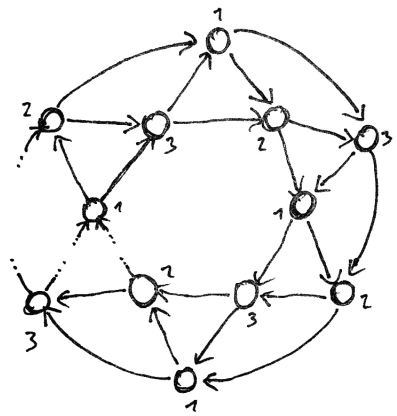
$$\mathfrak{A} \rightleftarrows_r \mathfrak{B}_r$$

Klar ist auch: $\mathfrak{A}_r \in DGraph \setminus 2-COL$, da die Kreise jeweils eine ungerade Anzahl an Knoten besitzen. Jedoch ist $\mathfrak{B}_r \in 2-COL$.
$\Rightarrow$Somit ist $2-COL$ nicht FO-definierbar in $DGraph$. □

Aufgabe 3. b)

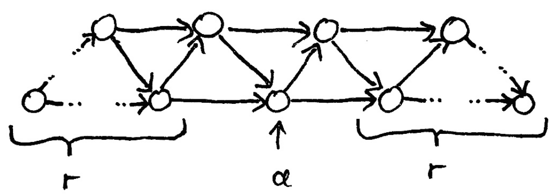
Zeige 3. *$3-COL$ ist nicht FO-definierbar in DGraph. $\Rightarrow$ Für jedes $r \in \mathbb{N}$ exestiert ein $\mathfrak{A}_r \in 3-COL$ und $\mathfrak{B}_r \in DGraph \setminus 3-COL$ mit $\mathfrak{B}_r \rightleftarrows_r \mathfrak{A}_r$:*

Beweis. Sei $\mathcal{K}_r$ ein Graph mit: $V = \{1, ..., r\}$ sowie $E = \{(n, n+1) : n \in \{1, ..., r-1\}\} \cup \{(n, n+2) : n \in \{1, ..., r-2\}\} \cup \{(n-1, 1), (n, 1), (n, 2)\}$



$\mathcal{K}_r \in 3-COL \Leftrightarrow r = 6n$ für $n \in \mathbb{N}^+$

Für ein Kreis $\mathcal{K}_{r+1}$ und ein Beliebigen $a \in V$ sieht die r-Umgebung $\mathcal{N}^{\mathcal{K}_{r+1}}(a)$ folgendermaßen aus:



Außerdem gilt für $a \in \mathcal{K}_p, b \in \mathcal{K}_q$ mit $p, q \geq r+1$:

$$(\mathcal{N}_r^{\mathcal{K}_p}(a), a) \cong (\mathcal{N}_r^{\mathcal{K}_q}(b), b)$$

Sei $\mathfrak{A}_r := \mathcal{K}_{6r+6} \cup \mathcal{K}_{6r+8} \cup \mathcal{K}_{6r+10}$

$\Rightarrow$ f.a. $r \in \mathbb{N}$: $\mathfrak{B}_r \in DGraph \setminus 3-COL$

Sei $\mathfrak{B}_r := \mathcal{K}_{18r+24}$

$\Rightarrow$ f.a. $r \in \mathbb{N}$: $\mathfrak{B}_r \in 3-COL$

Da $|A| = |B| \Rightarrow$ für jeden r-Umgebungstyp ϱ: $\#_\varrho(\mathfrak{A}_r) = \#_\varrho(\mathfrak{B}_r)$

und somit $\mathfrak{B}_r \rightleftarrows_r \mathfrak{A}_r$

$\square$

Aufgabe 4)