Logik und Komplexität Übung 7

Denis Erfurt, 532437
HU Berlin

Aufgabe 1)

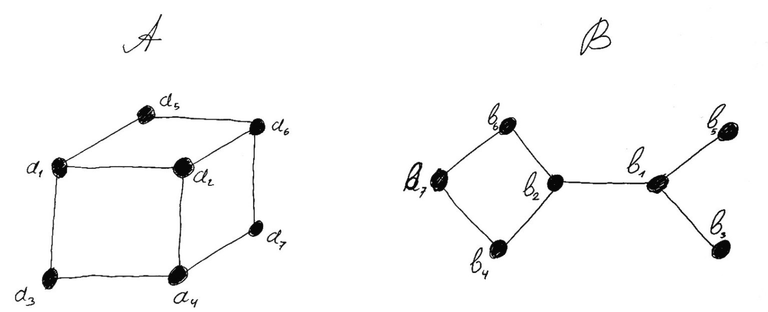

Abbildung 1: Strukturen

a) $b_1, b_2 \in \mathfrak{B}$ so wie in Abbildung 1 angegeben.

b) Das größte m, so dass es $b_1, b_2 \in B$ gibt mit $(A, a_1, a_2) \cong_m (B, b_1, b_2)$ ist $m = 1$.

zeige dass $(I_j)_{j \leq 1} : (A, a_1, a_2) \cong_1 (B, b_1, b_2)$ ein Hin-und-Her-System ist.

1) $I_1 \neq \varnothing$

Sei $p =$ "$\varnothing$" die Abbildung, deren Definitionsberreich leer ist. $I_1 = \{p\}$ Sei $q : a_3 \mapsto b_3$. Klar ist, dass $q \supseteq p$ sowie $p, q \neq \varnothing$ und $q \in Part((A, a_1, a_2), (B, b_1, b_2))$

2) Wähle für jedes $a_i \in A$ ein $b_i \in B$ wie in Abbildung 1. Klar ist: $a_i \mapsto b_i \in Part((A, a_1, a_2), (B, b_1, b_2))$ sowie $a_i \mapsto b_i \supseteq p$

3) Wähle für jedes $b_i \in B$ ein $a_i \in A$ wie in Abbildung 1. Klar ist: $a_i \mapsto b_i \in Part((A, a_1, a_2), (B, b_1, b_2))$ sowie $a_i \mapsto b_i \supseteq p$

Somit ist $(I_j)_{j \leq 1} : (A, a_1, a_2) \cong_m (B, b_1, b_2)$ ein Hin-und-Her-System.

c) Angenommen $(I_j)_{j \leq 2} : (A, a_1, a_2) \cong_m (B, b_1, b_2)$ ist ein Hin-und-Her-System. aus b) wissen wir, dass $p = a_3 \mapsto b_3 \in I_1$ Nach der "Hin-Eigenschaft" müsste für p und a_4 ein $q \in I_0$ geben, so dass $q \supseteq p$ und $a_4 \in Def(q)$.

Jedoch ist für jedes $b_i \in B : a_3, a_4 \mapsto b_3, b_i \notin Part((A, a_1, a_2), (B, b_1, b_2))$

Somit folgt, dass $(I_j)_{j \leq 2} : (A, a_1, a_2) \cong_m (B, b_1, b_2)$ kein Hin-und-Her-System ist.

Aufgabe 2)

Sei $GG \subseteq UGraph$ die Klasse der Strukturen, bei denen jeder Knoten einen Geraden Grad besitzt.

zeige GG ist nicht EMSO-definierbar in $UGraph$.

Laut dem Satz von Ajtai und Fagin genügt es zu zeigen, dass Duplicator eine Gewinnstrategie im (l,m)-Ajtai-Fagin-Spiel besitzt.

Phase 1. Duplicator wählt einen vollständigen-Graphen $\mathfrak{A} = K_{2^{l+m}+1}$.

Beobachtung: für einen vollständigen-Graphen gilt:

$$\text{n ist ungerade} \Leftrightarrow K_n \in GG$$

Spoiler wählt hiernach die Mengen $X_1^{\mathfrak{A}}, ..., X_l^{\mathfrak{A}} \subseteq V$

Sei $c^{\mathfrak{A}}(a) := \{X_i^{\mathfrak{A}} : a \in X_i^{\mathfrak{A}}\}$ die Farbe eines Knotens a.

Für jede Farbe $f \subseteq \{X_1^{\mathfrak{A}}, ..., X_l^{\mathfrak{A}}\}$ sei

$$M_f^{\mathfrak{A}} := \{a \in A : c^{\mathfrak{A}}(a) = f\}$$

zeige: nach l Mengen exestiert exestiert ein $M_f^{\mathfrak{A}}$ so dass $|M_f^{\mathfrak{A}}| \geq 2^m$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsannahme: nach der i-ten Menge $X_i^{\mathfrak{A}}$ exestiert ein f mit $|M_f^{\mathfrak{A}}| \geq 2^{l-i+m}$

Induktionsanfang: $i = 0$ Wir wissen dass $|A| = 2^{l+m}$. Für $f = \{\}$ ist $M_f^{\mathfrak{A}} = A \Rightarrow |M_f^{\mathfrak{A}}| \geq 2^{l+m}$

Induktionsschritt: $i \rightarrow i+1$ Nach **IA** exestiert ein f mit $|M_f^{\mathfrak{A}}| \geq 2^{l-i+m}$ Spoiler wählt ein $X_{i+1}^{\mathfrak{A}}$.

Sei $f' := f \cup \{X_{i+1}^{\mathfrak{A}}\}$

Nach **IA** wissen wir:

$$|M_{f'}^{\mathfrak{A}}| + |M_f^{\mathfrak{A}}| \geq 2^{l-i+m}$$

Falls $|M_{f'}^{\mathfrak{A}}| < 2^{l-(i+1)+m}$, dann folgt daraus $|M_f^{\mathfrak{A}}| \geq 2^{m-(i+1)+m}$
Falls $|M_f^{\mathfrak{A}}| < 2^{l-(i+1)+m}$, dann folgt daraus $|M_{f'}^{\mathfrak{A}}| \geq 2^{m-(i+1)+m}$

Indunktionsschluss: Nach l Mengen exestiert eine Farbe f mit $|M_f^{\mathfrak{A}}| \geq 2^m$

Phase 2. Duplicator wählt $\mathfrak{B} = K_{2^{l+m}+2}$. Nach Beobachtung ist $\mathfrak{B} \in UGraph \setminus GG$ Weiter wählt Duplicator die Mengen $X_1^{\mathfrak{B}}, ..., X_l^{\mathfrak{B}}$ so, dass für jede Farbe f gilt:

$$|M_f^{\mathfrak{B}}| = |M_f^{\mathfrak{A}}| \text{ oder } |M_f^{\mathfrak{B}}|, |M_f^{\mathfrak{A}}| \geq 2^m \tag{1}$$

Intuitiv färbt Duplicator den neuen Knoten mit der in $\mathfrak{A}$ häufigsten Farbe.

Phase 3. Betrachte das EF-Spiel auf $\mathfrak{A}' := (\mathfrak{A}, X_1^{\mathfrak{A}}, ..., X_l^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B}' := (\mathfrak{B}, X_1^{\mathfrak{B}}, ..., X_l^{\mathfrak{B}})$

Für jede Wahl $a_i \in A$ von Spoiler kann Dup wegen (1) ein $b_i \in B$ wählen, so dass $c(a)^{\mathfrak{A}} = c(b)^{\mathfrak{B}}$: Falls $|M_f^{\mathfrak{B}}| = |M_f^{\mathfrak{A}}|$ so hat Duplicator eine Gewinnstrategie, in dem er Spoilers züge Kopiert. Falls $|M_f^{\mathfrak{B}}|, |M_f^{\mathfrak{A}}| \geq 2^m$ so besitzt Duplicator eine Gewinnstrategie, indem er ein neues Element wählt, falls Spoiler ein neues Element mit dieser Farbe gewählt hat. Andernfalls falls Spoiler ein in Runde i gewähltes Element wählt, so wählt Duplicator in Runde i gewählte Element der anderen Struktur. Analog für Spoilers wahl aus $\mathfrak{B}$.

Somit ist gezeigt das Duplicator eine Gewinnstrategie im (l,m)-Ajtai-Fagin-Spiel besitzt. Somit ist nach Satz 3.44 GG nicht EMSO-definierbar in $UGraph$. □

Aufgabe 3)

Angelehnt an Beispiel 4.6 c)
Sei k:=4. Zur Erinnerung: $EA_k = EA_{2k,k}$
Für jeden Graphen $G = (V, E)$ mit $G \models EA_k$ und $|V| \geq 2k = 4$ gilt gemäß

Beob. 4.3:
$G \models EA_{l,m}$ $f.a.$ $l \geq 1, m \geq 0$ mit $m \leq l \leq k$
Aus $G \models EA_{1,1}$ und $|V| > 1$ folgt: Es gibt Knoten a und b, s.d. diese Verbunden sind.
Weiter folgt aus $G \models EA_{2,2}$ mit $S := a, b = T$, dass es einen Knoten c nicht aus der Menge gibt, s.d. c zu a und b verbunden ist. Dies ist ein Dreieck, also der vollständige Graph K_3.
- $G \models EA_{3,3}$ mit $S := \{a, b, c\} = T$, es gibt d, s.d. d zu a,b,c verbunden ist. Dies bildet K_4.
- $G \models EA_{4,4}$ mit $S := \{a, b, c, d\} = T$, es gibt e, s.d. e zu a,b,c,d verbunden ist. Dies bildet K_5.

Die Menge aller nicht-planaren Graphen ist größer/gleich der Menge derer, die einen K_5-Teilgraphen haben. Somit gilt für die planaren Graphen die Gegenwahrscheinlichkeit:
$\mu_n(NP|UG) \geq \mu_n(EA_4|UG) \to_{n\to\infty} 1$
$\mu_n(P|UG) = 1 - \mu_n(NP|UG) = 0$

$\square$

Aufgabe 4)

a) Sei $\leq (a, b)$:='a steht vor b in w'.
Für jedes $l \in \mathbb{N}$ *seien* $x_1..x_{l+1}$ paarweise verschieden und sei
$\Delta_{l+1}^{\sigma_{\{a,b\}}} := \{\leq (a, x_{l+1}) : a \in \{x_1, .., x_{l+1}\}\}$
(Teile das Wort in zwei Partitionen, Buchstaben kleiner bzw. größer x_{l+1})
Für $F \subseteq \Delta_{l+1}^{\sigma_{\{a,b\}}}$ sei $\bar{F} := \Delta_{l+1}^{\sigma_{\{a,b\}}} \backslash F$
$EA_{l,F} := \forall x_1..x_{l+1}(\bigwedge_{1\leq i<j\leq l} x_i \neq x_j \to \exists x_{l+1}(\bigwedge_{i=1}^{l} x_{l+1} \neq x_i \wedge \bigwedge_{\phi\in F} \phi \wedge \bigwedge_{\psi\in\bar{F}} \neg\psi))$
Bws: $\xi := \{EA_{l,F} : 0 \leq l \leq k =$'Wortlänge'$\}$
Beobachte: ξ ist endlich.
$\eta := \bigwedge_{\phi\in F} \phi$
Seien ALL alle Wortstrukturen.

Sollte es eine σ-Struktur geben, die η *und* ψ erfüllt, dann gilt f.a. n≥1:
$\mu_n(\phi|ALL) \geq \mu_n(\eta|ALL) \to 1$
Ansonsten: $\mu_n(\neg\phi|ALL) \geq \mu_n(\eta|ALL) \to 1$ und somit $\mu_n(\phi|ALL) = 0$

$\square$

b) Aus Beispiel 2.10 wissen wir dass es ein EMSO-Satz ϕ_{even} gibt, der genau die Strukturen Beschreibt deren Universum gerade Kardinalität haben. Außerdem wissen wir aus Beispiel 4.1 a) dass $\mu(EVEN|ALL) = undefined$ ist. Demnach besitzt $MSO[\leq]$ kein 0-1-Gesetz bzgl. der Klasse aller endlichen linearen Ordnungen.

c) analog zu a)

d) Sei S die Klasse der Strukturen, die einen vollständigen Graphen beinhalten, falls das Universum gerade ist. Außerdem besitz S die Graphen ohne Verbindungen falls das universum ungerade ist.

$S := \{(V, E) : |V| \text{ ist gerade und } E = V^2\} \cup \{(V, E) : |V| \text{ ist ungerade und } E = \emptyset\}$

Daraus folgt analog zu Beispiel 4.1 a):

$$\phi := \exists x \exists y E(x, y) \Rightarrow \mu_n(\phi|S) = undefined$$

Somit beistzt $FO[E]$ kein 0-1-Gesetz bezüglich S.