Logik und Komplexität Übung 7

Denis Erfurt, 532437
HU Berlin

Aufgabe 1)

a)

zeige Conn ist nicht $L^2_{\infty\omega}$-definierbar in UGraph
nach Theorem 4.24 genügt e zu zeigen, dass es ein $\mathfrak{A} \in Conn$ und ein $\mathfrak{B} \in UGraph \setminus Conn$ gibt, so dass $\mathfrak{A} \approx^2_\infty \mathfrak{B}$
Sei $\mathfrak{A} := K_8$ ein Kreis mit 8 Steinen, $\mathfrak{B} := K_4 \cup K_4$ 2 Kreise mit jeweils 4 Steinen
zeige $\mathfrak{A} \approx^2_\infty \mathfrak{B}$
IA: Für alle Steine gilt: $a_i, b_i = *$. Insbesondere sind die Gewinnbedingungen für Duplicator erfüllt. **IS:** $i \to i+1$

O.b.d.A bewegt Spoiler den Stein α_k von $a_k \in A$ nach $a_{k'} \in A$, die Fälle für B sind analog.

Sei $k, l \in \{1, 2\}$ sowie $k \neq l$.

Fall 1. In Runde i+1 gilt: $\alpha_k = \alpha_l$
So setzt Duplicator β_k auf β_l und Gewinnt in Runde i+1

Fall 2. In Runde i+1 gilt: $(\alpha_k, \alpha_l) \in E^{\mathfrak{A}}$

$$\phi := \forall x_1 \exists x_2 \exists x_3 (\neg x_2 = x_3) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_1, x_3)$$

Beobachhtung 1: $\mathfrak{B} \models \phi$

Fall 2.1. In Runde i war $(\alpha_k, \alpha_l) \in E^{\mathfrak{A}}$

Nach Beobachhtung 1. gibt es ein $b_{k'} \in B$ mit $b_k \neq b_{k'}$ und $(b_{k'}, \beta_l) \in E^{\mathfrak{B}}$. Duplicator wählt $\beta = b_{k'}$ und gewinnt die Runde i+1.

Fall 2.2. In Runde i war $(\alpha_k, \alpha_l) \notin E^{\mathfrak{A}}$

Nach Beobachhtung 1. gibt es ein $b_{k'} \in B$ mit $(b_{k'}, \beta_l) \in E^{\mathfrak{B}}$.

Duplicator wählt $\beta = b_{k'}$ und gewinnt die Runde i+1.

Fall 3. In runde i+1 gilt: $(\alpha_k, \alpha_l) \notin E^{\mathfrak{A}}$

Fall 3.1. Spoiler wählt $\alpha_k = *$

Duplicator wählt $\beta_k = *$ und gewinnt die Runde i+1.

Fall 3.2. Spoiler wählt ein beliebiges $a_{k'}$

Duplicator wählt ein beliebiges $\beta_k = b_{k'}$ so dass $(b_{k'}, b_l) \notin E^{\mathfrak{B}}$ und gewinnt die Runde i+1.

Damit ist gezeigt, dass Duplicator die Runde i+1 übersteht. Somit hat Duplicator eine Gewinnstrategie im 2-Pebble-Spiel.

□

b)

Behauptung: Conn ist $L^3_{\infty\omega}$-definierbar in UGraph.

Sei $\mathfrak{A} \in Conn$ sowie $\mathfrak{B} \in UGraphs \setminus Conn$.
Sei $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$.

nach Theorem 4.24. genügt es zu zeigen, dass Spoiler eine Gewinnstrategie für beliebige $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ besitzt: Spoiler wählt $\beta_1, \beta_2 \in B_1$ und $\beta_3 \in B_2$ um zu gewinnen muss Duplicator $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in A$ wählen. Nun wählt in Runde i+1 Spoiler das α_i mit $i \in \{1, 2\}$ aus, welches die größte Entfernung zum α_3 besitzt und plaziert es auf das $a \in A$, welches die geringste Entfernung zum α_3 besitzt und noch eine Verbindung zum α_j mit $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$ besitzt. Die Distanz zwischen den α_1, α_2 Steinen und dem α_3 Stein verringert sich bei jeder Runde um 1. Um zu gewinnen muss Duplicator einen Stein in B_1 bewegen. Nach endlich vielen Runden ist besitzt ein α_i eine Verbindung mit α_j sowie α_3. Da jedoch β_1 sowie β_2 sich auf Steinen in B_1 befinden kann Duplicator keine Verbindung zwischen den 3 Steinen herstellen. Somit ist es kein partialler Isomorphismus und Duplicator hat nach endlich vielen Zügen verlohren.

Aufgabe 2)

a)

$$\varphi_1(x) := \forall y E(x, y)$$

1. PROVE: φ_1 ist keine um x lokale Formel.
2. LET: $\sigma := \{E\}$
3. LET: $\mathfrak{A} := (\{1, 2\}, \{\})$
4. $\mathfrak{A} \not\models \varphi_1[1]$
5. Für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(1) = (\{1\}, \{\})$
6. $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}[1] \models \varphi_1[1]$
7. Q.E.D.

   PROOF:Def. 5.3. b), 4, 6

GNF:

$$\varphi_1^{Nr(x)}(x) := (\forall y \; dist(x, y) \leq 2 \rightarrow E(x, y)) \wedge (\neg \exists z_1 \exists z_2 \; dist(z_1, z_2) > 2)$$

b)

$$\varphi_2(x_1, x_2) := \neg x_1 = x_2 \wedge \forall y E(x_1, y) \vee E(x_2, y)$$

1. PROVE: φ_2 ist keine um x_1, x_2 lokale Formel.
2. LET: $\sigma := \{E\}$
3. LET: $\mathfrak{A} := (\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (2, 1)\})$
4. $\mathfrak{A} \not\models \varphi_2[1, 2]$
5. Für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(1, 2) = (\{1, 2\}, \{(1, 2), (2, 1)\})$
6. $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(1, 2) \models \varphi_2[1, 2]$
7. Q.E.D.

   PROOF:Def. 5.3. b), 4, 6

GNF:

$$\begin{aligned} \varphi_2(x_1, x_2) \quad := \quad & \neg x_1 = x_2 & (1) \\ & \wedge(\forall y \; dist(y, \{x_1, x_2\}) \leq 2 \rightarrow E(x_1, y) \vee E(x_2, y)) & (2) \\ & \wedge \neg \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 (\bigwedge_{z_i \neq z_j} dist(z_i, z_j) > 2) & (3) \end{aligned}$$

Aufgabe 3)

1. LET: ϕ ist atomar.
2. ϕ ist lokal um $frei(\phi)$
3. LET: ϕ ist lokal um $frei(\phi)$
4. PROOF:$\neg\phi$ ist lokal um $frei(\phi)$
   4.1. $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\bar{a}]$
   4.2. $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\bar{a}]$
   4.3. $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \not\models \varphi[\bar{a}]$
   4.4. $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \models \neg\varphi[\bar{a}]$
   4.5. Q.E.D.
   Def. r-lokalität
5. LET: ϕ_1, ϕ_2 sind lokal um jeweils $frei(\phi_1), frei(\phi_2)$
6. PROOF:$\phi_1 \wedge \phi_2$ sind lokal um $frei(\phi_1) \cup frei(\phi_2)$
   6.1. LET: die benennung von $frei(\varphi_1)$ und $frei(\varphi_2)$ ist beliebig.
   6.2. LET: $\mathfrak{A}$ beliebig.
   6.3. LET: $r := |frei(\varphi_1) \cup frei(\varphi_2)|$
   6.4. LET: $\bar{a} \in A^r$
   6.5. LET: $\mathfrak{A} \models \varphi_1[\bar{a}]$
   6.6. LET: $\mathfrak{A} \models \varphi_2[\bar{a}]$
   6.7. $\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\bar{a}]$
   6.8. $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}} \models \varphi_1[\bar{a}]$
   PROOF:5, Def. r-lokal
   6.9. $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}} \models \varphi_2[\bar{a}]$
   PROOF:5, Def. r-lokal
   6.10. $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\bar{a}]$

6.11. Q.E.D.
PROOF:6.10, 6.7

Aufgabe 4)