Ausgewählte Kapitel der Logik

Denis Erfurt

30. April 2016

Aufgabe 1

1	$\Gamma, \phi, \psi \vdash \chi$	A
2	$\Gamma, \phi \wedge \psi, \psi \vdash \chi$	$\wedge A_1(1)$
3	$\Gamma, \phi \wedge \psi, \phi \wedge \psi \vdash \chi$	$\wedge A_2(2)$
4	$\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \chi$	(3)
5	$\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \neg(\phi \wedge \psi) \vee \chi$	$\vee S_2(4)$
6	$\Gamma, \neg(\phi \wedge \psi) \vdash \neg(\phi \wedge \psi)$	V
7	$\Gamma, \neg(\phi \wedge \psi) \vdash \neg(\phi \wedge \psi) \vee \chi$	$\vee S_1(6)$
8	$\Gamma \vdash \neg(\phi \wedge \psi) \vee \chi$	$FU(5,7)$

Aufgabe 2

a)

Zeige $\frac{}{\Gamma, \exists x\phi \vdash \forall x\phi}$ ist korrekt. Sei I eine σ-Interpretation so dass $I \models \exists x\phi$ gilt. Zu Zeigen: $I \models \forall x\phi$

$$I \models \exists x\phi \Leftrightarrow \text{es exestiert ein } a \in A, \text{ so dass } [\![\psi]\!]^{I\frac{a}{x}} = 1 \tag{1}$$

Sei o.B.d.A. $|A| > 1$ sowie $a' \in A$ mit $a \neq a'$, $[\![\psi]\!]^{I\frac{a'}{x}} = 0$

$$\Rightarrow \text{ nicht für alle } a \in A \text{ gilt } [\![\psi]\!]^{I\frac{a}{x}} = 1 \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow [\![\forall x\psi]\!]^{I} = 0 \Leftrightarrow I \not\models \forall x\psi \tag{3}$$

$$\Rightarrow \forall\exists \text{ ist nicht korrekt} \tag{4}$$

Aufgabe 3

a)

Für die Formel $\phi := \exists xx = x$ ist $\phi\frac{x}{x} = \exists v_0(v_0 = v_0)$, da $x \in var(\frac{x}{x})$ wird nach der Definition der Substitution für Quantoren, die variable ausgetauscht. Somit ist $\phi \neq \phi\frac{x}{x}$. Im angegebenen Beispiel könnte es zum Problem für die Formel $\phi := \exists z\exists vv = z$, da nach der herleitung das ϕ im Sukzedenz ein anderes ist, as das im Antezedenz.

b)

Die Anwending einer σ-Subsitution für Quantoren-Formeln könnte folgendermaßen erweitert werden:

- Falls $x \neq var(S)$ oder $S(x) = x$, so $y := x$ und $S' := S_{|Def(S)\setminus\{x\}|}$
- ...