Ausgewählte Kapitel der Logik, Übungsblatt 10

Denis Erfurt

17. Juli 2016

Aufgabe 1

Alle DFA's mit nur einem Buchstaben sind trivialler weise Kommutativ. Untersuchung eines minimalen DFA's, die über mehr als ein Buchstaben sprechen, bezüglich folgender Eigenschaften: Falls ein DFA eine Kommutative Sprache erkennt so muss dieser Bisimilar sei zu eiem:

1. jeder Knoten hat die gleichen Schleifen
2. jeder Übergang bez. der Kanten von Knoten zu Knoten ist gleich.

Eigenschaft 1

Angenommen $\mathcal{L}$ ist kommutativ, sowie Eigenschaft 1 gilt nicht. O.b.d.A gibt es dann ein $x\alpha y\beta z \in \mathcal{L}$ mit $x, y, z, \alpha, \beta \in \Sigma^*$, so dass $\alpha \in \mathcal{L}_1$ und $\beta \in \mathcal{L}_2$ sowie $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$. Daraus folgt dass $x\beta y\alpha z \notin \mathcal{L}$ was ein wiederspruch zur Annahme ist, $\mathcal{L}$ sei Kommutativ.

Eigenschaft 2

Angenommen L ist kommutativ, sowie die Eigenschaft 2 gilt nicht. Beweis analog zu dem von Eigenschaft 1:

O.b.d.A gibt es dann ein $x\alpha y\beta z \in \mathcal{L}$ mit $x, y, z, \alpha, \beta \in \Sigma^*$, so dass $\alpha \in \mathcal{L}_1$ und $\beta \in \mathcal{L}_2$ sowie $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$. Daraus folgt dass $x\beta y\alpha z \notin \mathcal{L}$ was ein wiederspruch zur Annahme ist, $\mathcal{L}$ sei Kommutativ.

Insbesondere sind beide Eigenschaften sowie die Bisimilarität von DFA's entscheidbar.

Aufgabe 2

a)

$$n^2 = (1 + n_{-1})^2 = 1 + 2n_{-1} + n_{-1}^2$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{C=Squares} := C(1) \land \forall n \forall n^2 (\exists n_{-1} \exists n_{-1}^2 \quad & (1)\\
n_{-1}^2 < n^2 \land C(n_{-1}^2) \land \quad & (2)\\
\forall z. z < n^2 \land C(z) \to z \leq n_{-1}^2 \quad & (3)\\
n^2 = n_{-1}^2 + n_{-1} + n_{-1} + 1) \quad & (4)\\
\to C(n^2) \quad & (5)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\psi(x, y) := C(x) \land \exists n_{-1}^2 \exists n_{-1} \quad & (6)\\
C(n_{-1}^2) \land n_{-1} + 1 = y \land x = n_{-1}^2 + n_{-1} + n_{-1} + 1 \quad & (7)
\end{aligned}$$

c)

$$z = xy = \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}$$

$$\underbrace{\frac{\overbrace{(x+y)^2}^{q^2}}{4}}_{q_4^2} = z + \underbrace{\frac{\overbrace{(\overbrace{x-y}^{d})^2}^{p^2}}{4}}_{p_4^2}$$

$$
\begin{align}
\varphi'_{\times}(x,y,z) :=& \exists q^2 \exists q_4^2 \exists d \exists p^2 \exists p_4^2 \tag{8}\\
& \psi(q^2, x+y) \wedge \psi(p^2, d) \wedge \tag{9}\\
& (x < y \to d + x = y) \wedge \tag{10}\\
& (y \leq x \to d + y = x) \wedge \tag{11}\\
& p_4^2 + p_4^2 + p_4^2 + p_4^2 = p^2 \wedge \tag{12}\\
& q_4^2 + q_4^2 + q_4^2 + q_4^2 = q^2 \wedge \tag{13}\\
& z + p_4^2 = q_4^2 \tag{14}
\end{align}
$$

Aufgabe 3

$$
\begin{align}
\varphi_{root}(x) :=& \forall y \neg E(y,x) \tag{15}\\
\varphi_{leaf}(x) :=& \forall y \neg E(x,z) \wedge y < z \tag{16}\\
\varphi_{l}(x,y) :=& E(x,y) \wedge \exists z E(x,z) \wedge y < z \tag{17}\\
\varphi_{r}(x,y) :=& E(x,y) \wedge \exists z E(x,z) \wedge z < y \tag{18}\\
\varphi_{zz}(x_h) :=& \forall u \forall v \forall w (D(w, x_h) \vee w = x_h) \wedge \tag{19}\\
& (\varphi_l(u,v) \leftrightarrow \varphi_r(v,w)) \tag{20}\\
\varphi_{start}(x_0, x_h) :=& \exists x_1 \varphi_l(x_0, x_1) \wedge D(x_1, x_h) \wedge \tag{21}\\
& \exists x_{h-1} \varphi_r(x_{h-1}, x_h) \tag{22}\\
\varphi_{step}(x, x_h) :=& \exists x_1 \exists x_{h-1} D(x_1, x_h) \wedge D(x_1, x_{h-1}) \wedge \tag{23}\\
& \varphi_{zz}(x_h) \wedge \varphi_{leaf}(x_h) \tag{24}\\
& (\varphi_l(x, x_1) \to \varphi_r(x_{h-1}, x_h)) \wedge \tag{25}\\
& (\varphi_r(x, x_1) \to \varphi_l(x_{h-1}, x_h)) \tag{26}\\
& \tag{27}\\
\varphi_{even} :=& \exists x_0 \exists x_h \varphi_{root}(x_0) \wedge \varphi_{leaf}(x_h) \wedge \tag{28}\\
& \varphi_{zz}(x_h) \wedge \varphi_{start}(x_0, x_h) \wedge \tag{29}\\
& \forall x \neg \varphi_{leaf}(x) \to \forall x'_h \varphi_{step}(x, x'_h) \tag{30}
\end{align}
$$

Aufgabe 4

☼