Ausgewählte Kapitel der Logik, Übungsblatt 9

Denis Erfurt

17. Juli 2016

Aufgabe 1

Sei $m_1, ...m_k, n \in \mathbb{N}$ sowie $f(m_1, ..., m_k) = n$

$$(1.1) T \models \varphi(\underline{m_1}, ..., \underline{m_k}, \underline{n}) \tag{1}$$
$$(2) T \models \forall y_1 \forall y_2 ((\varphi(\underline{m_1}, ..., \underline{m_k}, y_1) \wedge \varphi(m_1, ..., \underline{m_k}, y_2)) \rightarrow y_1 = y_2) \tag{2}$$

Sei $y_1 = \underline{n}$ und $y_2 = \underline{m}$ mit $m \neq n$ (an dieser stelle wird $Q \subseteq T$ benutzt), dann folgt aus (2) sowie (1.1):

$$T \models \neg(\varphi(\underline{m_1}, ..., \underline{m_k}, \underline{m}) \wedge \varphi(m_1, ..., \underline{m_k}, \underline{n})) \vee \underline{m} = \underline{n} \tag{3}$$
$$\Rightarrow T \models \neg\varphi(\underline{m_1}, ..., \underline{m_k}, \underline{m}) \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

Und damit (1.2)

Aufgabe 2

Angenommen die gegebene Variante von Gödels 1. Unvollständigkeitssatz würde nicht gelten. Dann gibt es min. eine σ_{Ar}-Theorie T die alle 3 Eigenschaften erfüllt und vollständig ist. Da das Axiomensysthem semi-entscheidbar und damit auch rekursiv aufzählbar ist, ist nach Lemma 3.2 T ebenfalls rekursiv aufzählbar. Jedoch ist jede vollständige rekursiv aufzählbare Theorie auch entscheidbar. Dieses ist ein Wiederspruch zum Satz 4.16 nach dem keine wiederspruchsfreie σ_{Ar} -Theorie T mit $Q \subseteq T$ entscheidbar ist. Daher gilt die angegebene Variante von Gödels 1. Unvollständigkeitssatzes.

Aufgabe 3

Beweis durch Wiederspruch. Sei die Menge aller erfüllbaren $FO[\sigma_{Ar}]$-Sätze rekursiv aufzählbar. Dann lässt sich rekursiv eine vollständige Theorie T konstruieren, die Q enthällt. Dieses ist jedoch ein Wiederspruch zum Satz 4.16. Die Theorie T kann konstruiert werden indem ausgehend von Q rekursiv die Sätze hinzugefügt werden, für die Theorie wiederspruchsfrei bleibt. Da die menge aller erfüllbaren Sätze vollständig ist ist nach konstruktion der neuen Theorie T, diese ebenfalls vollständig.