Ausgewählte Kapitel der Logik

Denis Erfurt

17. Juli 2016

Aufgabe 1

$$1. a^*ba^* \tag{1}$$
$$2. (a^*b^*)^* \tag{2}$$
$$3. (aa)^* \tag{3}$$
$$4. (a^*b^*)^*(a|b)(a|b)(a|b) \tag{4}$$
$$4. a^*ba^*ba^* \tag{5}$$
$$\tag{6}$$

Alle DFA's mit nur einem Buchstaben sind trivialler weise Kommutativ. Untersuchung eines minimalen DFA's, die über mehr als ein Buchstaben sprechen, bezüglich folgender Eigenschaften: Falls ein DFA eine Kommutative Sprache erkennt so muss dieser Bisimilar sei zu eiem:

1. jeder Knoten hat die gleichen Schleifen

2. jeder Übergang bez. der Kanten von Knoten zu Knoten ist gleich.

Eigenschaft 1

Angenommen $\mathcal{L}$ ist kommutativ, sowie Eigenschaft 1 gilt nicht. O.b.d.A gibt es dann ein $x\alpha y\beta z \in \mathcal{L}$ mit $x, y, z, \alpha, \beta \in \Sigma^*$, so dass $\alpha \in \mathcal{L}_1$ und $\beta \in \mathcal{L}_2$ sowie $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$. Daraus folgt dass $x\beta y\alpha z \notin \mathcal{L}$ was ein wiederspruch zur Annahme ist, $\mathcal{L}$ sei Kommutativ.

Eigenschaft 2

Angenommen L ist kommutativ, sowie die Eigenschaft 2 gilt nicht. Beweis analog zu dem von Eigenschaft 1:

O.b.d.A gibt es dann ein $x\alpha y\beta z \in \mathcal{L}$ mit $x, y, z, \alpha, \beta \in \Sigma^*$, so dass $\alpha \in \mathcal{L}_1$ und $\beta \in \mathcal{L}_2$ sowie $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$. Daraus folgt dass $x\beta y\alpha z \notin \mathcal{L}$ was ein wiederspruch zur Annahme ist, $\mathcal{L}$ sei Kommutativ.

Insbesondere sind beide Eigenschaften sowie die Bisimilarität von DFA's entscheidbar.

Aufgabe 2

a)

$$n^2 = (1 + n_{-1})^2 = 1 + 2n_{-1} + n_{-1}^2$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{C=Squares} := C(1) \wedge \forall n \forall n^2 (\exists n_{-1} \exists n_{-1}^2 & \qquad (7)\\
n_{-1}^2 < n^2 \wedge C(n_{-1}^2) \wedge & \qquad (8)\\
\forall z. z < n^2 \wedge C(z) \rightarrow z \leq n_{-1}^2 & \qquad (9)\\
n^2 = n_{-1}^2 + n_{-1} + n_{-1} + 1) & \qquad (10)\\
\rightarrow C(n^2) & \qquad (11)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\psi(x, y) := & C(x) \wedge \exists n_{-1}^2 \exists n_{-1} & \qquad (12)\\
& C(n_{-1}^2) \wedge n_{-1} + 1 = y \wedge x = n_{-1}^2 + n_{-1} + n_{-1} + 1 & \qquad (13)
\end{aligned}$$

c)

$$z = xy = \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}$$

$$\underbrace{\frac{\overbrace{(x+y)^2}^{q^2}}{4}}_{q_4^2} = z + \underbrace{\frac{\overbrace{(\overbrace{x-y}^{d})^2}^{p^2}}{4}}_{p_4^2}$$

$$\begin{aligned}
\varphi'_{\times}(x,y,z) :=& \exists q^2 \exists q_4^2 \exists d \exists p^2 \exists p_4^2 && (14)\\
& \psi(q^2, x+y) \wedge \psi(p^2, d) \wedge && (15)\\
& (x < y \to d + x = y) \wedge && (16)\\
& (y \leq x \to d + y = x) \wedge && (17)\\
& p_4^2 + p_4^2 + p_4^2 + p_4^2 = p^2 \wedge && (18)\\
& q_4^2 + q_4^2 + q_4^2 + q_4^2 = q^2 \wedge && (19)\\
& z + p_4^2 = q_4^2 && (20)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

$$
\begin{align}
\varphi_{root}(x) &:= \forall y \neg E(y, x) \tag{21}\\
\varphi_{leaf}(x) &:= \forall y \neg E(x, z) \wedge y < z \tag{22}\\
\varphi_{l}(x, y) &:= E(x, y) \wedge \exists z E(x, z) \wedge y < z \tag{23}\\
\varphi_{r}(x, y) &:= E(x, y) \wedge \exists z E(x, z) \wedge z < y \tag{24}\\
\varphi_{zz}(x_h) &:= \forall u \forall v \forall w (D(w, x_h) \vee w = x_h) \wedge \tag{25}\\
&(\varphi_l(u, v) \leftrightarrow \varphi_r(v, w)) \tag{26}\\
\varphi_{start}(x_0, x_h) &:= \exists x_1 \varphi_l(x_0, x_1) \wedge D(x_1, x_h) \wedge \tag{27}\\
&\exists x_{h-1} \varphi_r(x_{h-1}, x_h) \tag{28}\\
\varphi_{step}(x, x_h) &:= \exists x_1 \exists x_{h-1} D(x_1, x_h) \wedge D(x_1, x_{h-1}) \wedge \tag{29}\\
&\varphi_{zz}(x_h) \wedge \varphi_{leaf}(x_h) \tag{30}\\
&(\varphi_l(x, x_1) \rightarrow \varphi_r(x_{h-1}, x_h)) \wedge \tag{31}\\
&(\varphi_r(x, x_1) \rightarrow \varphi_l(x_{h-1}, x_h)) \tag{32}\\
& \tag{33}\\
\varphi_{even} &:= \exists x_0 \exists x_h \varphi_{root}(x_0) \wedge \varphi_{leaf}(x_h) \wedge \tag{34}\\
&\varphi_{zz}(x_h) \wedge \varphi_{start}(x_0, x_h) \wedge \tag{35}\\
&\forall x \neg \varphi_{leaf}(x) \rightarrow \forall x'_h \varphi_{step}(x, x'_h) \tag{36}
\end{align}
$$

Aufgabe 4

☼