Ausgewählte Kapitel der Logik

Denis Erfurt

22. Juni 2016

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
\underline{0} &= 0 && (1)\\
\underline{1} &= +(0,1) && (2)\\
\underline{2} &= +(+(0,1),1) && (3)\\
\underline{3} &= +(+(+(0,1),1),1) && (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
<\underline{0}> &= d && (5)\\
<\underline{1}> &= b7dfe8 && (6)\\
<\underline{2}> &= b7b7dfe8fe8 && (7)\\
<\underline{3}> &= b7b7b7dfe8fe8fe8 && (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[<\underline{0}>]_{\mathbb{N}} &= 14 && (9)\\
[<\underline{1}>]_{\mathbb{N}} &= 12050408 && (10)\\
[<\underline{2}>]_{\mathbb{N}} &= 12625022717928 && (11)\\
[<\underline{3}>]_{\mathbb{N}} &= 13238251801993449448 && (12)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a)

Die Mengen Y, V, T, L, S, G, B $\subseteq \mathcal{A}^*$ sind entscheidbar.

1. Y - σ - nach def. in O(1) entscheidbar (2-f)
2. V - v_i - nach def. 100..00 - i mal die 0
3. T - 0, 1 nach def. Y. $\leq, +, \times$ nach induktion entscheidbar: Sei t_1, t_2 entscheidbar, dann sind: $+(t_1, t_2)$; $\times(t_1, t_2)$ entscheidbar. (e.g. CFG grammatik + Parser)
4. L - formeln - Nach ind. entscheidbar: T und V sind entscheidbar: $t_1 = t_2$ und für $\leq (t_1, t_2)$; sind entscheidbar. Sei ϕ_1, ϕ_2 entscheidbar: $\phi_1 \wedge \phi_2$, $\phi_1 \vee \phi_2$, $\neg\phi_1$, $\exists x \phi_1$ sowie $\forall x.\phi_1$ sind entscheidbar.
5. S - sätze - L ist entscheidbar - falls freie variablen = 0 $\Rightarrow$ ja $\Rightarrow$ entscheidbar
6. G - endliche Formelmengen - L entscheidbar + $ff \notin L \Rightarrow \phi_1 ff \phi_2 ff..$ entscheidbar
7. B - beweis - $fff \notin G, L \Rightarrow fffGfff\phi fff$ entscheidbar

b)

Die logischen Operationen:

1. Negation
2. Disjunktion
3. Konjunktion
4. existentielle Quantifizierung
5. universelle Quantifizierung

aufgefasst als 1- bzw 2-stellige partielle Funktionen auf $\mathcal{A}^*$, sind berechenbar.

QUESTION: Do they mean the interpretter function here? what is the encoding of true and false values?

c)

Die beiden Funktionen, die jeder $FO[\sigma]$-Formel die endliche Menge ihrer variablen bzw. die endliche Menge ihrer Subformeln zuordnen, sind berechenbar.

Rekursiv über den aufbau der Formeln, entscheide ob terme variablen sind, falls ja, füge sie einer globalen Menge hinzu. gib die menge aus.

d)

Die Substitution einer Variablen durch einen Term in einer Formel, aufgefasst als 3-stellige partielle Funktion auf $\mathcal{A}^*$, ist berechenbar.

Rekursiv über den aufbau der Formeln. Prüfe ob term = die gesuchte variable, falls ja, gib den substitution zurück, andernfalls gib das andere zurück.

e)

Die 2-stellige Relation $\{(f, g) \in \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^* : f \in L$ ist die Kodierung einer Formel und g ist die Kodiereung einer endlcihen Menge Γ mit $\phi \in \Gamma\}$ ist entscheidbar.

Dekodiere Γ, ϕ, prüfe ob $\phi \in \Gamma$, daher ist die Relation entscheidbar.

f)

Die 3-stellige Relation

$$\{(b, g, f) \in (\mathcal{A}^*)^3\}$$

ist entscheidbar.

Dekodiere alles(berechenbar), prüfe ob $\Gamma \vdash \phi$ (entscheidbar), daher ist die Relation ebenfalls entscheidbar.

Aufgabe 3

Die funktion $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert als:

$$g(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + 1)(y_1 + y_2) + y_2 \tag{13}$$

Ist injektiv: Sei $t = y_1 + y_2$. Dann ist $g(t - y_2, y_2) = g(y_1, y_2)$. Sei $g(t_1 y_2) = g(t_2 - y_3, y_3)$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2}(t_1 + 1)t_1 + y_2 = \frac{1}{2}(t_2 + 1)t_2 + y_3$$
$$t_1^2 + t_1 + 2y_2 = t_3^2 + t_3 + 2y_3$$

Da die zwei variablen t und y_2 sind von einender unabhänging benötigen wir:

$$2y_2 = 2y_3 \to y_2 = y_3 \tag{14}$$

$$t_1^2 + t_1 = t_3^2 + t_3 \to t_1 = t_3 \tag{15}$$