Ausgewählte Kapitel der Logik

Martin Lundfall

15. Juli 2016

Aufgabe 1

Nach Satz 3.21 (zusammen mit Bemerkung 3.22) ist eine Relation TM-rekursiv abzählbar genau dann wenn sie Σ_1-definierbar ist.
Deswegen ist unser Ziel eine TM-rekursiv abzählbar Relation zu bauen, welche Σ_1-definition unter Negation entspricht keine TM-rekursiv abzälbare Relation. In Aufgabe 3 von Übungsblatt 7 haben wir gezeigt dass die Relation H definiert durch

$$H := \{n_M : M \text{ ist eine Turing-Maschine, deren Zustandsmenge eine endliche Teilmenge von N ist, die bei leerer Eingabe nach endlich vielen Schritten anhält}\} \tag{1}$$

Σ_1-definierbar ist.
Sei φ die Σ_1-Formel die definiert H. Wenn $\neg\varphi$ Σ_1-definierbar wäre, würden die Mengen $\mathbb{N} \setminus H$ und H beide rekursiv abzählbar sein, aber dass würde bedeuten dass die Halte-probleme entsheidbar wäre.

Aufgabe 2

Angenommen dass Th($\mathcal{Z}$) ist rekursiv aufzählbar. Wir zeigen dass, es gibt eine berechenbare Funktion Bau T wie folgt. Anfangen mit $T_0 = Th(Q)$. Für alle $\varphi \in$ Th($\mathcal{Z}$), falls $\varphi \cup Th(Q)$ widerspruchsfrei ist, sei $T_{n+1} = T_n \cup \varphi$, sonst $T_{n+1} = T_n \cup \neg\varphi$. $T = Th(\mathcal{N})$ und rekursiv abzählbar. Widerspruch.

Aufgabe 3

Das Ziel ist zu Übersetzen σ_{Ar} zu eine endliche binäres Signatur $\hat{\sigma}$.
Sei $\hat{\sigma} = E, ...$ wobei

$$\begin{aligned} R_0 &= \{n, m \in \mathbb{N} : m = 0\} \\ R_1 &= \{n, m \in \mathbb{N} : m = 1\} \\ R_+ &= \{n, m \in \mathbb{N} : R_T(n, m)\} \end{aligned} \tag{2}$$

sei $E_g =$ Für alle $n, m, s \in \mathbb{N}$ sei