# Ausgewählte Kapitel der Logik

Martin Lundfall

13. Juli 2016

## Aufgabe 1

Nach Satz 3.21 (zusammen mit Bemerkung 3.22) ist eine Relation TM-rekursiv abzählbar genau dann wenn sie $\Sigma_1$-definierbar ist.
Deswegen ist unser Ziel eine TM-rekursiv abzählbar Relation zu bauen, welche $\Sigma_1$-definition unter Negation entspricht keine TM-rekursiv abzälbare Relation. In Aufgabe 3 von Übungsblatt 7 haben wir gezeigt dass die Relation $H$ definiert durch

$$\begin{aligned} H := \{n_M : M &\text{ ist eine Turing-Maschine, deren Zustandsmenge eine} \\ &\text{endliche Teilmenge von N ist, die bei leerer Eingabe nach endlich} \\ &\text{vielen Schritten anhält}\} \end{aligned} \tag{1}$$

$\Sigma_1$-definierbar ist.
Sei $\varphi$ die $\Sigma_1$-Formel die definiert H. Wenn $\neg\varphi$ $\Sigma_1$-definierbar wäre, würden die Mengen $\mathbb{N} \setminus H$ und $H$ beide rekursiv abzählbar sein, aber dass würde bedeuten dass die Halte-probleme entsheidbar wäre.

## Aufgabe 2

Angenommen dass Th($\mathcal{Z}$) ist rekursiv aufzählbar. Unsere Zeil ist zu zeigen dass das impliziert dass Th($\mathcal{N}$) rekursiv aufzählbar ist.

Es gilt dass $\varphi \in Th(\mathcal{N})$ genau dann wenn $\varphi' \in Th(\mathcal{Z})$, wo $\varphi'$ ist $\varphi$ wo alle die Quantoren hat die weitere forderung dass die variablen sie quantifieren positiv sein muss.

Genauer: $\varphi'$ ist die Formel wo jeder Subformel von $\varphi$ an der Form $\exists v_i.\psi$ (oder $\forall v_i.\psi$), ist ausgetauchst für die Subformel $\exists v_i.0 \leq v_i.\psi$ (oder $\forall v_i.0 \leq v_i\psi$).

Beweis: Für alle positive Zahl $m_Z, n_Z, k_Z$ in $\mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned} 0_Z &= 0 \\ 1_z &= 1 \\ m_Z \leq_Z n_Z &\iff m_N \leq_N n_N \\ m_Z +_Z n_Z = k_z &\iff m_N +_N n_N = k_N \\ m_Z \cdot_Z n_Z = k_z &\iff m_N \cdot_N n_N = k_N \end{aligned} \tag{2}$$

Dass heißt, die Teil (substruktur) von positiven Zahlen in die struktur $\mathcal{Z}$ ist isomorph zu $\mathcal{N}$, und deswegen gilt $Th(\mathcal{N}) \equiv Th(\mathcal{Z}|_{pos})$. Bau die algoritmus die zählt Th($\mathcal{N}$) wie folgt: Gegeben eine Formel $\varphi' ander \in Th(\mathcal{Z})$ von die algoritmus die zählt sie auf, ACCEPT $\varphi$ und $\varphi'$ wenn $\varphi'$ hat die beschränkungen von positivität beschreibt wie oben. Da wir wissen dass $Th(\mathcal{N})$ nicht rekursiv aufzählbar ist, haben wir hier ein widerspruch. Deswegen kann $Th(\mathcal{Z})$ nicht rekursiv aufzählbar sein.

# Aufgabe 3

Das Ziel ist zu Übersetzen $\sigma_{Ar}$ zu eine endliche binäres Signatur $\hat{\sigma}$.
Sei $\hat{\sigma} = E, ...$ wobei

$$\begin{aligned} R_0 &= \{n, m \in \mathbb{N} : m = 0\} \\ R_1 &= \{n, m \in \mathbb{N} : m = 1\} \\ R_+ &= \{n, m \in \mathbb{N} : R_T(n, m)\} \end{aligned} \tag{3}$$

sei $E_g =$ Für alle $n, m, s \in \mathbb{N}$ sei