Ausgewählte Kapitel der Logik

Denis Erfurt

15. Juli 2016

Aufgabe 1

Sei H die Menge aus Übungsblatt 7. 3 c). Wir wissen, dass H rekursiv aufzählbar ist. Nach Bemerkung 3.22 exestiert eine Formel $\varphi_R \in \Sigma_1$, so dass gilt:

$$n \in H \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi_R[n] \tag{1}$$

Wir zeigen dass es keine zu $\neg\varphi$ äquivalente Σ_1 definierbare Formel gibt durch ein wiedersrpruch:

Angenommen $\neg\varphi$ währe Σ_1 definierbar. Dann währe die Menge $\bar{H}$ nach Bemerkung 3.22. ebenfalls definierbar:

$$n \in \mathbb{N} \setminus H \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \neg\varphi[n] \tag{2}$$

Dieses würde jedoch bedeuten das das Halteproblem entscheidbar ist welches ein Wiederspruch zur Annahme ist.

$\square$

Aufgabe 2

Zu zeigen: $Th(\mathcal{Z})$ ist nicht rekursiv aufzählbar.

Wir nehmen an $Th(\mathcal{Z})$ sei r.e. Insbesondere ist $Th(\mathcal{Z})$ vollständing.

Im folgenden wird ein Algorithmuss gezeigt, der eine rekursiv aufzählbare Theorie T konstruiert:

Sei $T_0 := Q$. Beobachtung: T ist eine Theorie, T ist wiederspruchsfrei und $\mathcal{N} \models T$.

Der Algorithmuss geht folgendermaßen vor: zähle rekursiv $\varphi \in Th(\mathcal{Z})$ auf:

1. Falls $\varphi \notin T_{i-1} \wedge \neg\varphi \notin T_{i-1} \Rightarrow T_i := \{\psi \in FO[\sigma_{Ar}] : T_{i-1} \cup \{\varphi\} \models \psi\}$

Nach Lemma 3.2 ist T_i rekursiv aufzählbar. T_i ist eine Theorie. T_i ist wiederspruchsfrei.

Sei $T := \bigcup_{i \in N} T_i$.

1. T ist vollständing, dieses folgt direkt aus der Vollständigkeit von $Th(\mathcal{Z})$.
2. T ist wiederspruchsfreie Theorie. (Folgt aus dem Kompaktheitssatz)
3. T ist rekursiv aufzählbar und mit 1. dadurch effektiv Axiomatisierbar.
4. $T \subseteq Q$

Nach dem Gödlischen Unvollständigkeitssatz folgt aus 1-3: T ist Unvollständig. Dieses ist jedoch ein Wiederspruch zu 1.

□

□

Aufgabe 3

Sei φ_n die aus Satz 2.25 konstruierte $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz für den gilt:

$$\mathcal{N} \models \varphi_n \Leftrightarrow n \in H$$

Wir geben nun eine bijektion für σ an, die ein $\hat{\sigma}$ konstruiert, eine bijektion für die Sturktur $\mathcal{N}$ die eine Struktur $\hat{\mathcal{N}}$ konstruiert sowie eine, die aus einer Formel φ eine $\hat{\varphi}$ Formel konstruiert so dass gilt:

$$\hat{\mathcal{N}} \models \hat{\varphi} \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi \tag{3}$$

Konstruktion für $\hat{\sigma}$

$$\sigma = \{R_{\leq}, R_{+}, R_{*}, R_0, R_1\}$$

$$\hat{\sigma} = \{R_{\leq}, R_{+}^{0}, R_{+}^{1}, R_{+}^{2}, R_{*}^{0}, R_{*}^{1}, R_{*}^{2}, R_0, R_1\}$$

Jede Relation in $\hat{\sigma}$ hat die Stelligkeit 2.

Konstruktion für $\hat{\mathcal{N}}$

1. $R_0^{\hat{\mathcal{N}}} = \{(0,0)\}$
2. $R_1^{\hat{\mathcal{N}}} = \{(1,1)\}$
3. $R_{\leq}^{\hat{\mathcal{N}}} = R_{\leq}^{\mathcal{N}}$

Da R_+ sowie R_* rekursiv aufzählbar sind kann man volgendermaßen vorgehen:

Für $p \in \{+, *\}$ zähle rekursiv $(a_0, a_1, a_2) \in R_p$ auf. Für jeden Schritt sein $j \in \mathbb{N}$ der Index des Schrittes, sodass j für jedes Tupel eindeutig gewählt ist.

1. $a_0 \in R_p^{0,\hat{\mathcal{N}}}$
2. $a_1 \in R_p^{1,\hat{\mathcal{N}}}$
3. $a_2 \in R_p^{2,\hat{\mathcal{N}}}$

Wir sehen nun also:

$(a_0, a_1, a_2) \in R_p \Leftrightarrow$ es exestiert ein j $\in \mathbb{N} : (a_0, j) \in R_p^{0,\hat{\mathcal{N}}}, (a_1, j) \in R_p^{1,\hat{\mathcal{N}}}, (a_2, j) \in R_p^{2,\hat{\mathcal{N}}}$

Konstruktion für $\hat{\varphi}$

Sei $\varphi \in FO[\sigma_{Ar}]$. Wir konstruieren einen $\hat{\varphi} \in FO[\hat{\sigma}_{Ar}]$ Satz indem wir jedes vorkommen von Relationen nach folgener strategie ersetzen:

1. $R_0(t) \leftrightsquigarrow R_0(t,t)$
2. $R_1(t) \leftrightsquigarrow R_1(t,t)$
3. $R_+(t_0,t_1,t_2) \leftrightsquigarrow \exists j R_+^0(t_0,j) \wedge R_+^1(t_1,j) \wedge R_+^2(t_2,j)$
4. $R_*(t_0,t_1,t_2) \leftrightsquigarrow \exists j R_*^0(t_0,j) \wedge R_*^1(t_1,j) \wedge R_*^2(t_2,j)$

Nach dieser konstruktion sowie (1) haben wir gezeigt dass es eine binäre Relation gibt, für die das endliche Erfüllbarkeitsproblem unentscheidbar ist.

Aufgabe 4

Wir wissen aus Aufgabe 3, dass es eine binäre Signatur gibt, für die das EEP nicht entscheidbar ist. Wir zeigen nun dass das EEP für $\sigma_{Graph} = \{E\}$ ebenfalls unentscheidbar ist. Hinreichend hierfür ist es zu zeigen, dass es eine bijektion für die Formel $\hat{\varphi}$ zu einer Formel ψ gibt, sowie eine aus bijektion die die Struktur $\hat{\mathcal{N}}$ auf eine Struktur $\mathcal{G}$ abbildet so dass gilt:

$$\hat{\mathcal{N}} \models \hat{\varphi} \Leftrightarrow \mathcal{G} \models \psi \tag{4}$$

Die Idee ist das alle Relationen in $\hat{\sigma}$ durch einen Index eindeutig gekennzeichnet werden. Jedes vorkommen einer Relaion in $\hat{\mathcal{N}}$ wird nun durch einen Pfad mit der Länge des indexes eindeutig bestimmt, indem für den Pfad neue Knoten eingefügt werden. Um die Knotenmengen zu unterscheiden werden alle Knoten des Universums von $\hat{\mathcal{N}}$ in der neuen Struktur mit einer Schleife identifiziert.

Konstruktion von $\mathcal{G}$

Sei $\hat{\sigma} = \{R_1, ..., R_n\}$ mit $|\hat{\sigma}| = n$ sowie $\hat{\mathcal{N}} = (N, R_1^{\hat{\mathcal{N}}}, ..., R_n^{\hat{\mathcal{N}}})$

$$
\begin{aligned}
G :=& N\dot{\cup}\{e_{1,R_i}, ..., e_{i,R_i} : R_i \in \hat{\sigma}\} && (5)\\
E :=& \{(a,a) : a \in N\}\cup && (6)\\
& \bigcup_{R_i \in \hat{\sigma}} (&& (7)\\
& \{(a, e_{1,R_i}), (e_{i,R_i}, b) | (a,b) \in R_i^{\hat{\mathcal{N}}}\}\cup && (8)\\
& \{e_{j,R_i}, e_{j+1,R_i} | j < i\}) && (9)
\end{aligned}
$$

Konstruktion von ψ

Alle vorkommen in der form $R_i(t_1, t_2)$ in $\hat{\varphi}$ werden durch $\varphi_{R_i}(t_1, t_2)$ ersetzt.

$$
\begin{aligned}
\varphi_{R_i}(t_1, t_2) :=& E(t_1, t_1) \wedge E(t_2, t_2)\wedge && (10)\\
& \exists e_1 ... \exists e_i E(t_1, e_1) \wedge E(e_i, t_2)\wedge && (11)\\
& \bigwedge_{0<j<i} \varphi_{eindeutig}(e_j) \wedge E(e_j, e_{j+1}) && (12)\\
\varphi_{eindeutig}(x) :=& \exists y \forall z && (13)\\
& (E(x,y) \wedge E(x,z) \rightarrow y = z) && (14)\\
& (E(y,x) \wedge E(z,x) \rightarrow y = z) && (15)\\
& && (16)
\end{aligned}
$$

Wir sehen nun dass nach Konstruktion (4) gilt.

□