BÀI TẬP NÂNG CAO: ROTATION MATRIX & EULER ANGLES

# 🎯 Mục tiêu

- Hiểu sâu hơn các tính chất đại số của ma trận quay và mối quan hệ với Euler angles.  
- Thực hành mô phỏng và so sánh nhiều phương pháp biểu diễn orientation.  
- Vận dụng Python/Robotics Toolbox để kiểm chứng và trực quan hóa.

# 📝 Bài tập

## 1. Rotation Matrix – Phân tích nâng cao

a) Chứng minh rằng tích của hai ma trận quay 3D vẫn là một ma trận quay.  
b) Viết một script tạo 100 ma trận quay ngẫu nhiên (sử dụng angvec2tr với trục và góc ngẫu nhiên). Kiểm tra định thức và tính trực giao (R·Rᵀ = I).  
c) Tính khoảng cách giữa hai orientation ngẫu nhiên bằng công thức logarit ma trận (matrix logarithm).

## 2. Euler Angles – Độ mơ hồ và singularity

a) Với Euler angles (φ, θ, ψ) = (π/4, π/2, π/3), hãy tính rotation matrix và tìm lại các góc bằng tr2eul.  
b) Giải thích vì sao có nhiều nghiệm khác nhau dẫn đến cùng một ma trận quay.  
c) Phân tích trường hợp θ = 0 (gimbal lock) và minh họa bằng ví dụ số.  
d) Viết một thuật toán Python kiểm tra xem một rotation matrix có gần singularity hay không.

## 3. So sánh Euler vs RPY vs Quaternion

a) Sinh ngẫu nhiên một quaternion đơn vị và chuyển đổi sang rotation matrix, Euler angles (ZYZ), và RPY angles (ZYX).  
b) So sánh kết quả về độ ổn định số và tính duy nhất.  
c) Viết code vẽ quỹ đạo quay của một trục khi nội suy bằng Euler angles, RPY và Quaternion. Thảo luận ưu nhược điểm của từng phương pháp.

## 4. Ứng dụng thực tế – Robot Arm

a) Một cánh tay robot cần di chuyển end-effector từ orientation ban đầu R₁ sang orientation R₂.  
Hãy đề xuất 3 cách nội suy (Euler, quaternion, twist exponential) và mô phỏng bằng Python.  
b) Đánh giá sự khác biệt về quỹ đạo và tính mượt mà.  
c) Liên hệ với hiện tượng mất ổn định khi robot hàn di chuyển qua nhiều góc Euler khác nhau.

## 5. Thử thách bổ sung

a) Với vector trục a = [2, 3, 4]ᵀ và góc θ = 0.5 rad, hãy:  
 - Tính rotation matrix bằng Rodrigues’ formula.  
 - Tính rotation matrix bằng matrix exponential (scipy.linalg.expm).  
 - So sánh với Toolbox function angvec2tr.  
b) Viết code để kiểm chứng rằng 3 phương pháp trên cho cùng một kết quả.  
c) Tìm quaternion tương đương và so sánh với rotation matrix.