Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông
Khoa Công nghệ thông tin 1

Toán rời rạc 2

Cây và Cây khung của đồ thị

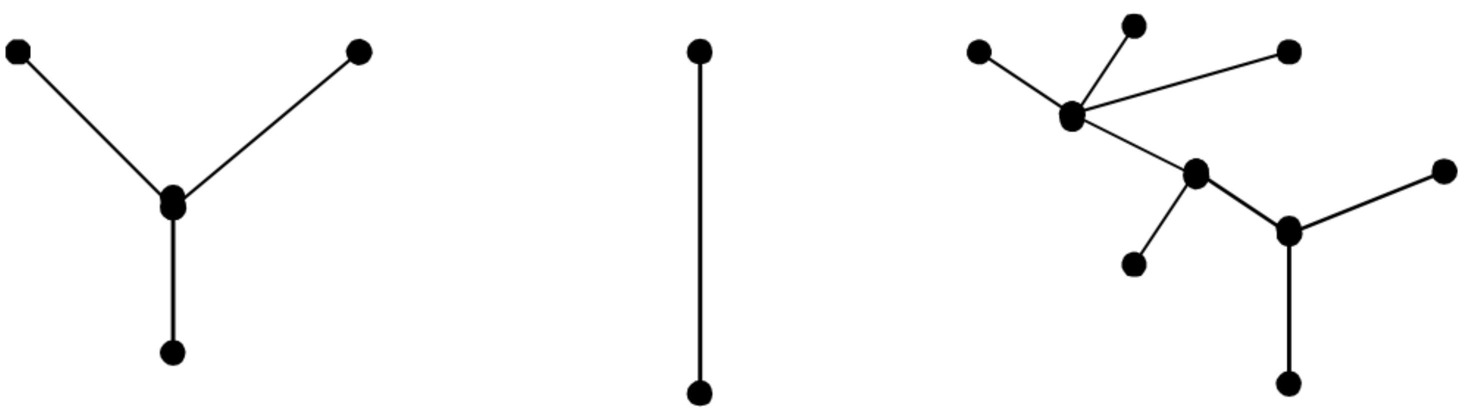
Vũ Hoài Thư

Nội dung

- Cây và các tính chất của cây
- Cây khung của đồ thị
- Bài toán cây khung nhỏ nhất

Định nghĩa và ví dụ

- **Định nghĩa 1**: Ta gọi cây là một đồ thị vô hướng, liên thông, không có chu trình
- **Định nghĩa 2**: Ta gọi rừng là một đồ thị vô hướng, không có chu trình
  - Như vậy rừng là một đồ thị mà mỗi thành phần liên thông của nó là một cây
- **Ví dụ**: một rừng có 3 cây



(Phương ND, 2013)

Các tính chất của cây

- **Định lý**: Giả sử $T = < V, E >$ là đồ thị vô hướng n đỉnh, khi đó những khẳng định sau là tương đương:
  1) T là một cây
  2) T không có chu trình và có $n - 1$ cạnh
  3) T liên thông và có đúng $n - 1$ cạnh
  4) T liên thông và mỗi cạnh của nó đều là cầu
  5) Giữa hai đỉnh bất kỳ của T được nối với nhau bởi đúng một đường đi đơn
  6) T không chứa chu trình nhưng hễ cứ thêm vào nó một cạnh ta thu được đúng một chu trình

- **Chứng minh**: Theo sơ đồ

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (1)$$

Chứng minh (1)

Chứng minh (1) ⇒ (2)

Vì T là cây nên T không chứa chu trình.

⇒ Cần chứng minh "Cây có n đỉnh thì sẽ có n-1 cạnh".

Rõ ràng, khẳng định đúng với n=1. Cần chứng minh quy nạp với n>1.

- Nhận thấy rằng, trong mọi cây T có n đỉnh đều tìm được ít nhất một đỉnh treo. Gọi v_1, v_2,..., v_k là đường đi dài nhất trong cây T. Khi đó rõ ràng v_1 và v_k là các đỉnh treo (do đồ thị không có chu trình và đường đi đang xét là dài nhất).
- Loại bỏ đỉnh v1 (và cạnh (v_1, v_2) khỏi cây T thì sẽ thu được cây T_1 với n-1 đỉnh. Mà theo giả thiết quy nạp, cây T_1 có n-2 cạnh. Do đó, cây T sẽ có n-2+1 = n-1 cạnh.

Chứng minh (2)

Chứng minh (2) ⇒ (3)

Giả sử T không liên thông. Khi đó, cây T có thể phân rã thành k ($k >= 2$) thành phần liên thông, ký hiệu là $T_1, T_2, \ldots, T_k$.

- Do T không chứa chu trình nên mỗi thành phần liên thông T_i cũng không chứa chu trình, vì thế mỗi T_i sẽ là một cây.
- Gọi n_i và e_i là số đỉnh và số cạnh của cây Ti, ta có $e_i = n_i - 1$

Suy ra:

$n-1 = e$

$= e_1 + e_2 + \ldots + e_k$

$= (n_1-1) + (n_2 -1) + \ldots + (n_k-1)$

$= n_1 + n_2 + \ldots + n_k - k < n-1$ => Mâu thuẫn

Vậy chứng tỏ cây T là liên thông

Chứng minh (3)

Chứng minh (3) ⇒ (4)

Cần chứng minh: “T liên thông và có đúng n-1 cạnh thì mỗi cạnh của nó đều là cạnh cầu”

Việc loại bỏ một cạnh bất kỳ khỏi T dẫn đến đồ thị với n đỉnh và n-2 cạnh rõ ràng là một đồ thị không liên thông. Vậy mọi cạnh trong T đều là cạnh cầu.

Chứng minh (4)

Chứng minh (4) ⇒ (5)

Cần chứng minh: "Nếu T liên thông và mỗi cạnh của nó đều là cạnh cầu thì giữa hai cạnh bất kỳ của T được nối với nhau bởi đúng một đường đi đơn."

Do T là liên thông nên hai đỉnh bất kỳ của nó được nối với nhau bởi một đường đi đơn. Nếu có cặp đỉnh nào của T có hai đường đi đơn khác nhau nối chúng, thì từ đó suy ra đồ thị có chứa chu trình, và vì thế các cạnh trên chu trình này không phải cạnh cầu.

Chứng minh (5)

Chứng minh (5) ⇒ (6)

Cần chứng minh: "Nếu giữa hai đỉnh bất kỳ của T được nối với nhau bởi đúng một đường đi đơn thì nếu thêm một cạnh vào T ta thu được một chu trình."

Cây T không chứa chu trình vì nếu có chu trình thì giữa hai cặp đỉnh bất kỳ của T được nối với nhau bởi hai đường đi đơn. Nếu them vào T một cạnh e nối hai đỉnh u và v. Khi đó cạnh này cùng với đường đi đơn nối u và v sẽ tạo thành chu trình trong T. Chu trình này phải là duy nhất, vì nếu thu được nhiều hơn một chu trình thì suy ra trong T trước đó đã có một chu trình.

Chứng minh (6)

Chứng minh (6) $\Rightarrow$ (1)

Cần chứng minh: "Nếu T không chứa chu trình nhưng hễ cứ thêm vào nó một cạnh ta thu được đúng một chu trình thì T là một cây"

Giả sử T không liên thông. Khi đó T gồm ít nhất hai thành phần liên thông. Vì vậy nếu thêm vào T một cạnh nối hai đỉnh thuộc hai thành phần liên thông khác nhau thì ta không thu được thêm chu trình nào cả => Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

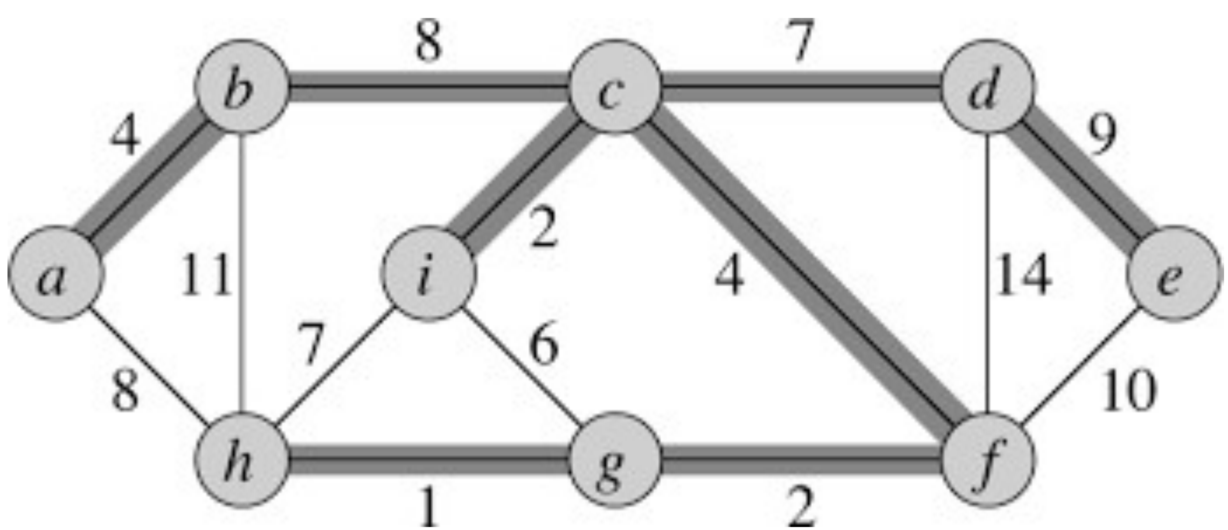
=> Định lý được chứng minh.

Nội dung

- Cây và các tính chất của cây
- Cây khung của đồ thị
- Bài toán cây khung nhỏ nhất

Định nghĩa và ví dụ

- **Định nghĩa 3**: Cho G là đồ thị vô hướng liên thông. Ta gọi đồ thị con T của G là một cây khung của G (Cây bao trùm) nếu T thoả mãn hai điều kiện:
  - T là một cây
  - Tập đỉnh của T bằng tập đỉnh của G
- **Ví dụ**:



Xây dựng cây khung của đồ thị

- **Bài toán**: Cho đồ thị vô hướng $G =< V, E >$. Hãy xây dựng một cây khung của đồ thị bắt đầu tại đỉnh $u \in V$.

- **Cách làm**
  - Sử dụng thuật toán duyệt DFS hoặc BFS
  - Mỗi khi ta đến được đỉnh v (tức $chuaxet[v] = true$) từ đỉnh u thì cạnh (u, v) được kết nạp vào cây khung

Xây dựng cây khung của đồ thị sử dụng thuật toán DFS (1/2)

Thuật toán tạo cây khung từ một đỉnh u

Tree-DFS$(u)\{$
    $chuaxet[u] = false;$ //đánh dấu đỉnh u đã duyệt
    for$(v \in Ke(u))\{$
        if$(\ chuaxet[v])\{$ //nếu v chưa được duyệt
            $T = T \cup \{(u, v)\};$ //hợp cạnh (u, v) vào cây
khung
            Tree-DFS$(v);$ //duyệt theo chiều sâu từ v
        $\}$
    $\}$
$\}$

Xây dựng cây khung của đồ thị sử dụng thuật toán DFS (2/2)

Thuật toán xây dựng cây khung

Tree-Graph-DFS( ){
  //Khởi tạo các đỉnh đều chưa xét
  for($u \in V$)
    $chuaxet[u] = true$;

  $root = <$ *đỉnh bất kỳ của đồ thị* $>$; //Lấy một đỉnh bất kỳ làm gốc
  $T = \emptyset$; //Cây ban đầu chưa có cạnh nào
  Tree-DFS(root); //Gọi thuật toán tạo cây khung từ một đỉnh

  if($|T| < n-1$)
    <đồ thị không liên thông>;
  else
    <ghi nhận tập cạnh của cây khung T>;
}

Kiểm nghiệm thuật toán (1/2)

- Cho đồ thị vô hướng được biểu diễn bằng ma trận kề như hình bên. Áp dụng thuật toán xây dựng cây khung của đồ thị sử dụng DFS cho đồ thị trên bắt đầu từ đỉnh $u = 1$.

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{vmatrix}$$

(Phương ND, 2013)

Kiểm nghiệm thuật toán (2/2)

Bước	Ngăn xếp đỉnh theo thứ tự gọi Tree-DFS(u)	T
0	1	$T = \emptyset$
1	1, 2	$T = T \cup \{(1,2)\}$
2	1, 2, 3	$T = T \cup \{(2,3)\}$
3	1, 2, 3, 4	$T = T \cup \{(3,4)\}$
4	1, 2, 3	
5	1, 2, 3, 5	$T = T \cup \{(3,5)\}$
6	1, 2, 3, 5, 6	$T = T \cup \{(5,6)\}$
7	1, 2, 3, 5, 6, 7	$T = T \cup \{(6,7)\}$
8	1, 2, 3, 5, 6, 7, 8	$T = T \cup \{(7,8)\}$
9	1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9	$T = T \cup \{(8,9)\}$
10	1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10	$T = T \cup \{(9,10)\}$
11	1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11	$T = T \cup \{(10,11)\}$
12	1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12	$T = T \cup \{(11,12)\}$
13	1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13	$T = T \cup \{(12,13)\}$
Không thêm được cạnh nào nữa vào T		
$T = \{(1,2),(2,3),(3,4),(3,5),(5,6),(6,7),(7,8),(8,9),(9,10),(10,11),(11,12,(12,13))\}$		

Xây dựng cây khung của đồ thị sử dụng thuật toán BFS

```
Tree-BFS(u){
        Bước 1: Khởi tạo
        T = ∅; queue = ∅; push(queue, u); chuaxet[u] = false;
        Bước 2: Lặp
        while(queue ≠ ∅){
                s = pop(queue);
                for(t ∈ Ke(s)){
                        if( chuaxet[t]){
                                push(queue, t);
                                T = T ∪ {(s, t)};
                                chuaxet[t] = false;
                        }
                }
        }
        Bước 3: Trả lại kết quả
        if(|T| < n − 1) <đồ thị không liên thông>;
        else <ghi nhận tập cạnh của cây khung T>;
}
```

Kiểm nghiệm thuật toán (1/2)

- Cho đồ thị vô hướng được biểu diễn bằng ma trận kề như hình bên. Áp dụng thuật toán xây dựng cây khung của đồ thị sử dụng BFS cho đồ thị trên bắt đầu từ đỉnh $u = 1$.

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{vmatrix}$$

(Phương ND, 2013)

Kiểm nghiệm thuật toán (2/2)

Bước	Trạng thái hàng đợi	T
0	1	$T = \emptyset$
1	2, 3, 4	$T = T \cup \{(1,2), (1,3), (1,4)\}$
2	3, 4	
3	4, 5	$T = T \cup \{(3,5)\}$
4	5	
5	6, 7, 8, 9	$T = T \cup \{(5,6), (5,7), (5,8), (5,9)\}$
6	7, 8, 9	
7	8, 9	
8	9	
9	10	$T = T \cup \{(9,10)\}$
10	11, 12, 13	$T = T \cup \{(10,11), (10,12), (10,13)\}$
11	12, 13	
12	13	
13	$\emptyset$	
$T = \{(1,2), (1,3), (1,4), (3,5), (5,6), (5,7), (5,8), (5,9), (9,10), (10,11), (10,12, (10,13))\}$		

Nội dung

- Cây và các tính chất của cây
- Cây khung của đồ thị
- Bài toán cây khung nhỏ nhất

Phát biểu bài toán

- Cho $G =< V, E >$ là đồ thị vô hướng liên thông với tập đỉnh V và tập cạnh E. Mỗi cạnh e của đồ thị được gán với một số không âm $c(e)$ được gọi là độ dài cạnh.
- Giả sử $H =< V, T >$ là một cây khung của đồ thị G. Ta gọi độ dài $c(H)$ của cây khung H là tổng độ dài các cạnh:

$$c(H) = \sigma_{e \in T} c(e)$$

- **Bài toán**: Trong số các cây khung của đồ thị hãy tìm cây khung có độ dài nhỏ nhất.

Ví dụ

- Bài toán nối mạng máy tính
  - Một mạng máy tính gồm n máy tính được đánh số từ $1, 2, \ldots, n$. Biết chi phí nối máy i với máy j là $c[i, j]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Hãy tìm cách nối mạng sao cho chi phí là nhỏ nhất.

- Bài toán xây dựng hệ thống cáp
  - Giả sử ta muốn xây dựng một hệ thống cáp điện thoại nối n điểm của một mạng viễn thông sao cho điểm bất kỳ nào trong mạng đều có đường truyền tin tới các điểm khác. Biết chi phí xây dựng hệ thống cáp từ điểm i đến điểm j là $c[i, j]$. Hãy tìm cách xây dựng hệ thống mạng cáp sao cho chi phí là nhỏ nhất.

Thuật toán Kruskal (1/2)

- Thêm dần từng cạnh vào cây khung
- Mỗi bước chọn cạnh có trọng số nhỏ nhất chưa nằm trong cây khung
  - Nếu việc thêm cạnh này vào cây khung không tạo thành chu trình thì thêm cạnh này vào
- Thuật toán dừng lại khi
  - Cây khung có đủ $(n-1)$ cạnh,
  - Hoặc không còn cạnh nào chưa nằm trong cây khung

Thuật toán Kruskal (2/2)

Kruskal( ){

Bước 1 (khởi tạo):

$T = \emptyset$; //Ban đầu tập cạnh cây khung là rỗng

$d(\mathrm{T}) = 0$; //Ban đầu độ dài cây khung là 0

Bước 2 (sắp xếp):

<sắp xếp các cạnh đồ thị theo thứ tự tăng dần của trọng số>;

Bước 3 (lặp):

while($|T| < n - 1$ && $E \neq \emptyset$){

e = <Cạnh có độ dài nhỏ nhất>;

$E = E \setminus \{e\}$; //Loại cạnh e ra khỏi tập cạnh

if ($T \cup \{e\}$ không tạo nên chu trình){

$\mathrm{T} = T \cup \{e\}$; //Đưa e vào cây khung

$d(\mathrm{T}) = d(\mathrm{T}) + d(e)$; //cập nhật độ dài cây khung

}

}

Bước 4 (trả lại kết quả):

if($|T| < n - 1$) <Đồ thị không liên thông>;

else return (T, d(T));

}

Kiểm nghiệm thuật toán

- Áp dụng thuật toán Kruskal tìm cây khung nhỏ nhất cho đồ thị được biểu diễn bằng ma trận trọng số như hình bên ?

$$
\begin{vmatrix}
\infty & 2 & 1 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
2 & \infty & 2 & \infty & \infty & 5 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
1 & 2 & \infty & 4 & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
3 & \infty & 4 & \infty & 5 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 5 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 5 & 5 & 5 & 6 & \infty & 6 & 6 & 6 & 6 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 6 & \infty & 7 & \infty & \infty & 7 & 7 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 7 & \infty & 7 & 7 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 6 & \infty & \infty & 7 & \infty & 7 & 7 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & 7 & \infty & 8 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & 7 & 8 & \infty & 8 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty & 8 & \infty
\end{vmatrix}
$$

(Phương ND, 2013)

Thuật toán Prim (1/2)

- Duy trì hai tập đỉnh V_{T} (tập đỉnh của cây khung) V (tập các đỉnh chưa nằm trong cây khung)
  - Ban đầu $V_{\mathrm{T}} = \{s\}$, s là một đỉnh bất kỳ của đồ thị
  - V bằng tập đỉnh của đồ thị trừ đi s
- Mỗi bước chọn cạnh có trọng số nhỏ nhất và có 1 đỉnh trong V_{T} và 1 đỉnh trong V
  - Đưa cạnh này vào cây khung
  - Đưa đỉnh liền kề với cạnh này từ V sang V_{T}
- Thuật toán dừng lại khi
  - Cây khung có đủ $(n - 1)$ cạnh,
  - Hoặc không còn đỉnh nào trong V

Thuật toán Prim (2/2)

```
Prim( s){
    Bước 1 (khởi tạo):
    V_T = {s};          //Ban đầu V_T chỉ chứa s
    V = V\{s};          //Loại s ra khỏi V
    T = ∅;              //Cây khung ban đầu chưa có cạnh nào
    d(T) = 0;           //Độ dài cây khung ban đầu bằng 0
    Bước 2 (lặp):
    while(V ≠ ∅ ){
        e = (u, v);             //Cạnh có độ dài nhỏ nhất với u ∈ V, v ∈ V_T
        if(không tìm được e)
                return <Đồ thị không liên thông>;
        T = T ∪ {e};            //Đưa e vào cây khung
        d(T) = d(T) + d(e);     //Cập nhật độ dài cây khung
        V_T = V_T ∪ {u};        //Đưa u vào V_T
        V = V\{u};              //Loại u ra khỏi V
    }
    Bước 3 (trả lại kết quả):
    return (T, d(T));
}
```

Kiểm nghiệm thuật toán

- Áp dụng thuật toán Prim tìm cây khung nhỏ nhất cho đồ thị được biểu diễn bằng ma trận trọng số như hình bên bắt đầu từ đỉnh số 1?

$$
\begin{vmatrix}
\infty & 2 & 1 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
2 & \infty & 2 & \infty & \infty & 5 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
1 & 2 & \infty & 4 & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
3 & \infty & 4 & \infty & 5 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 5 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 5 & 5 & 5 & 6 & \infty & 6 & 6 & 6 & 6 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 6 & \infty & 7 & \infty & \infty & 7 & 7 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 7 & \infty & 7 & 7 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 6 & \infty & \infty & 7 & \infty & 7 & 7 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & 7 & \infty & 8 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & 7 & 8 & \infty & 8 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty & 8 & \infty
\end{vmatrix}
$$

(Phương ND, 2013)

Tóm tắt

- Khái niệm cây, các tính chất của cây
- Cây khung của đồ thị
  - Mọi đồ thị vô hướng liên thông đều có ít nhất một cây khung
  - Xây dựng cây khung của đồ thị sử dụng các thuật toán BFS và DFS
- Bài toán cây khung nhỏ nhất
  - Thuật toán Kruskal và thuật toán Prim

Bài tập 1

Vẽ các đồ thị sau, nếu không vẽ được thì giải thích tại sao không?

1. Rừng: 12 đỉnh, 10 cạnh
2. Rừng: 10 đỉnh, 12 cạnh
3. Rừng: 12 đỉnh, 12 cạnh
4. Rừng: 12 đỉnh, 11 cạnh

Bài tập 2

- Áp dụng thuật toán Prim tìm cây khung nhỏ nhất cho đồ thị được biểu diễn bằng ma trận trọng số như hình bên bắt đầu từ đỉnh số 1?

1	∞	7	∞	∞	7	7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	7	∞	6	∞	6	7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
3	∞	6	∞	4	6	∞	∞	∞	∞	∞	4	∞	∞
4	∞	∞	4	∞	6	∞	4	4	∞	4	4	∞	∞
5	7	6	6	6	∞	6	6	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	7	7	∞	∞	6	∞	6	∞	∞	∞	∞	∞	∞
7	∞	∞	∞	4	6	6	∞	4	∞	∞	∞	∞	∞
8	∞	∞	∞	4	∞	∞	4	∞	3	3	∞	∞	∞
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3	∞	3	∞	2	2
10	∞	∞	∞	4	∞	∞	∞	3	3	∞	3	3	2
11	∞	∞	4	4	∞	∞	∞	∞	∞	3	∞	3	∞
12	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	2	3	3	∞	2
13	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	2	2	∞	2	∞
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Bài tập 3

- Áp dụng thuật toán Kruskal tìm cây khung nhỏ nhất cho đồ thị được biểu diễn bằng ma trận trọng số như hình bên ?

1	∞	7	∞	∞	8	8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	7	∞	6	∞	6	8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
3	∞	6	∞	4	6	∞	∞	∞	∞	∞	4	∞	∞
4	∞	∞	4	∞	6	∞	4	4	∞	4	4	∞	∞
5	8	6	6	6	∞	6	6	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	8	8	∞	∞	6	∞	6	∞	∞	∞	∞	∞	∞
7	∞	∞	∞	4	6	6	∞	4	∞	∞	∞	∞	∞
8	∞	∞	∞	4	∞	∞	4	∞	3	3	∞	∞	∞
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3	∞	3	∞	5	5
10	∞	∞	∞	4	∞	∞	∞	3	3	∞	3	3	5
11	∞	∞	4	4	∞	∞	∞	∞	∞	3	∞	3	∞
12	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	5	3	3	∞	5
13	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	5	5	∞	5	∞
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13