Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông
Khoa Công nghệ thông tin 1

Toán rời rạc 2

Các khái niệm cơ bản của lý thuyết đồ thị

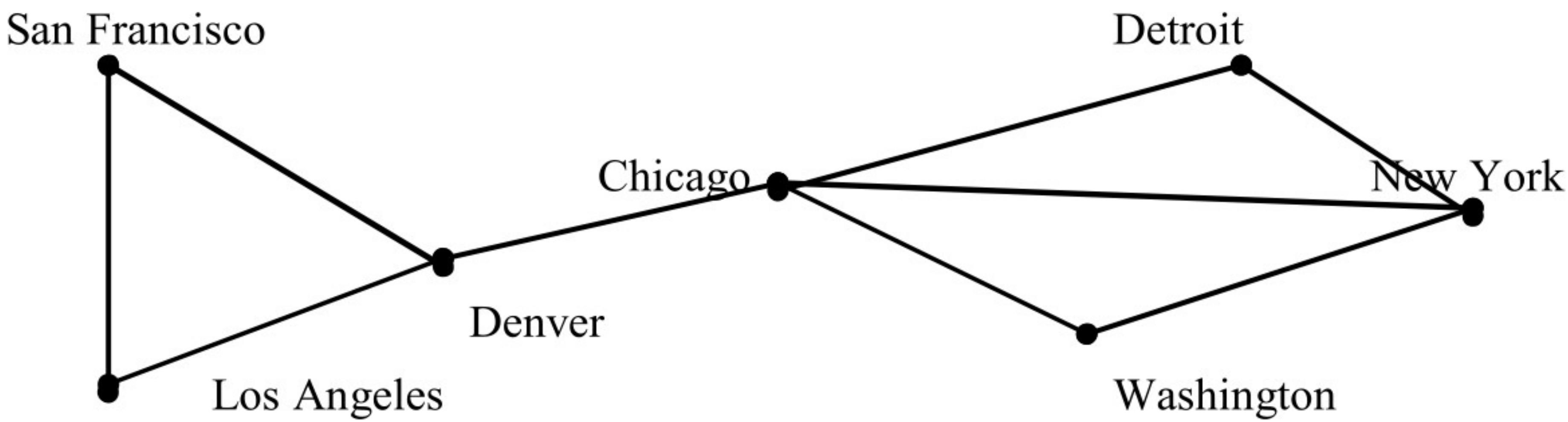
Vũ Hoài Thư

Nội dung

- Định nghĩa đồ thị
- Một số thuật ngữ cơ bản trên đồ thị vô hướng
- Một số thuật ngữ cơ bản trên đồ thị có hướng
- Một số dạng đồ thị đặc biệt

Đơn đồ thị vô hướng

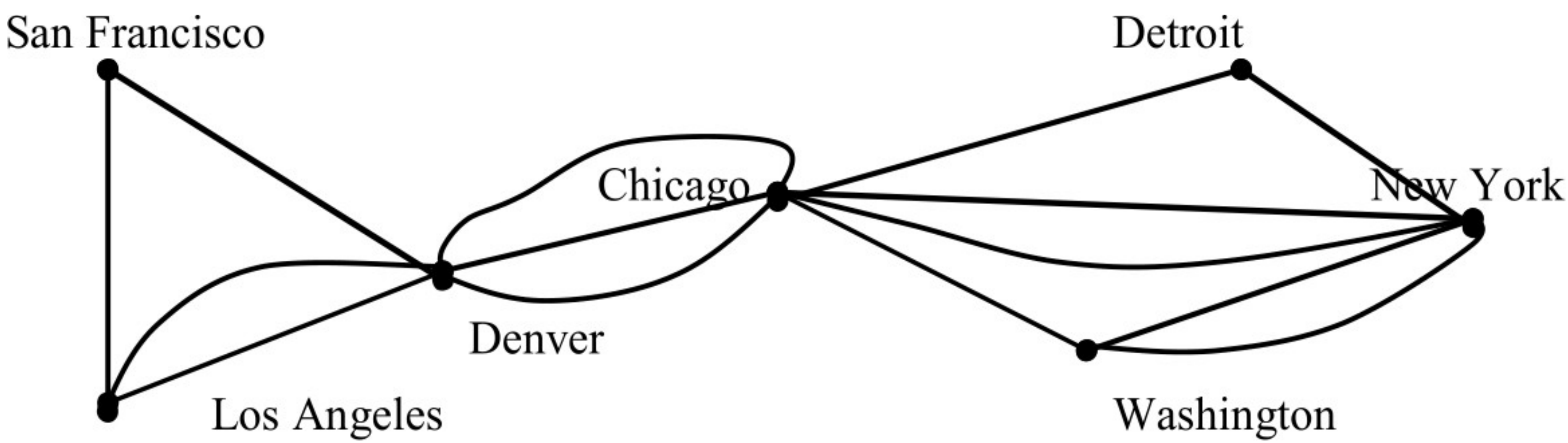
- **Định nghĩa 1**: Đơn đồ thị vô hướng $G = < V, E >$ bao gồm V là tập các đỉnh, E là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cạnh.



(Phương ND, 2013)

Đa đồ thị vô hướng

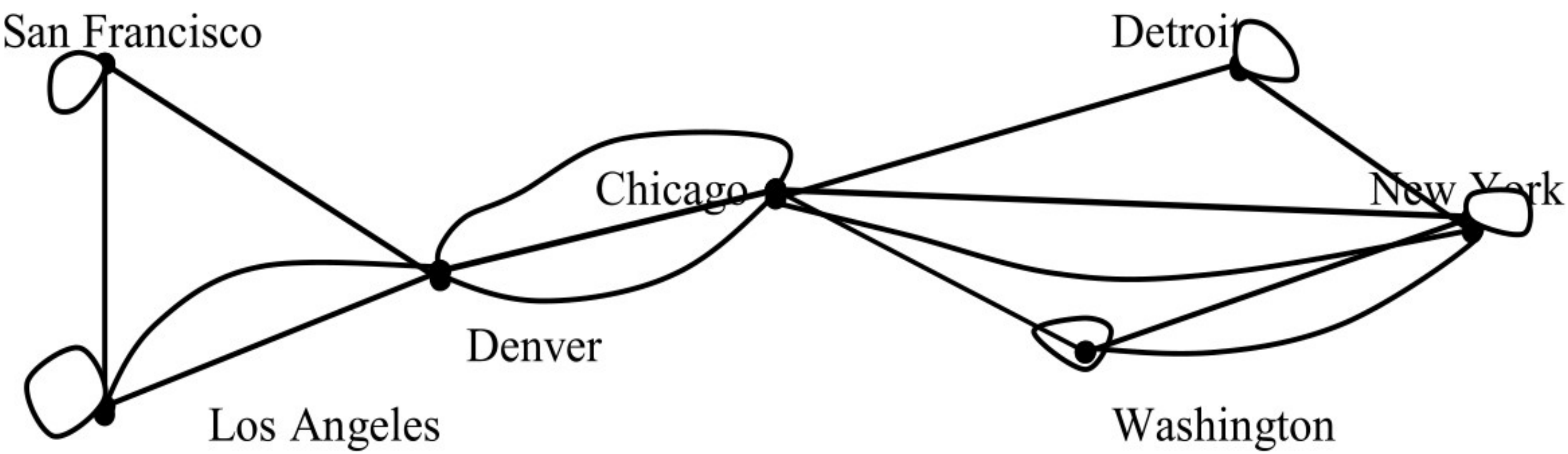
- **Định nghĩa 2**: Đa đồ thị vô hướng $G = < V, E >$ bao gồm V là tập các đỉnh, E là họ các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là tập các cạnh. $e_1 \in E$, $e_2 \in E$ được gọi là cạnh bội nếu chúng cùng tương ứng với một cặp đỉnh.



(Phương ND, 2013)

Giả đồ thị vô hướng

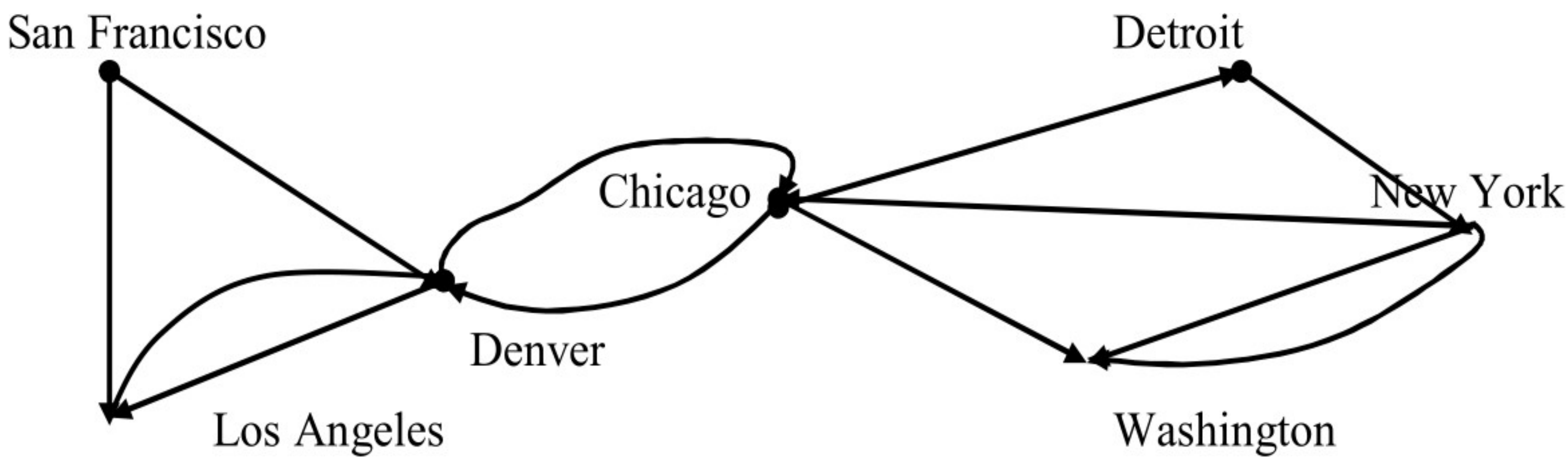
- **Định nghĩa 3**: Giả đồ thị vô hướng $G = < V, E >$ bao gồm V là tập đỉnh, E là họ các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử (hai phần tử không nhất thiết phải khác nhau) trong V được gọi là các cạnh. Cạnh e được gọi là khuyên nếu có dạng $e = (u, u)$, trong đó u là đỉnh nào đó thuộc V.



(Phương ND, 2013)

Đơn đồ thị có hướng

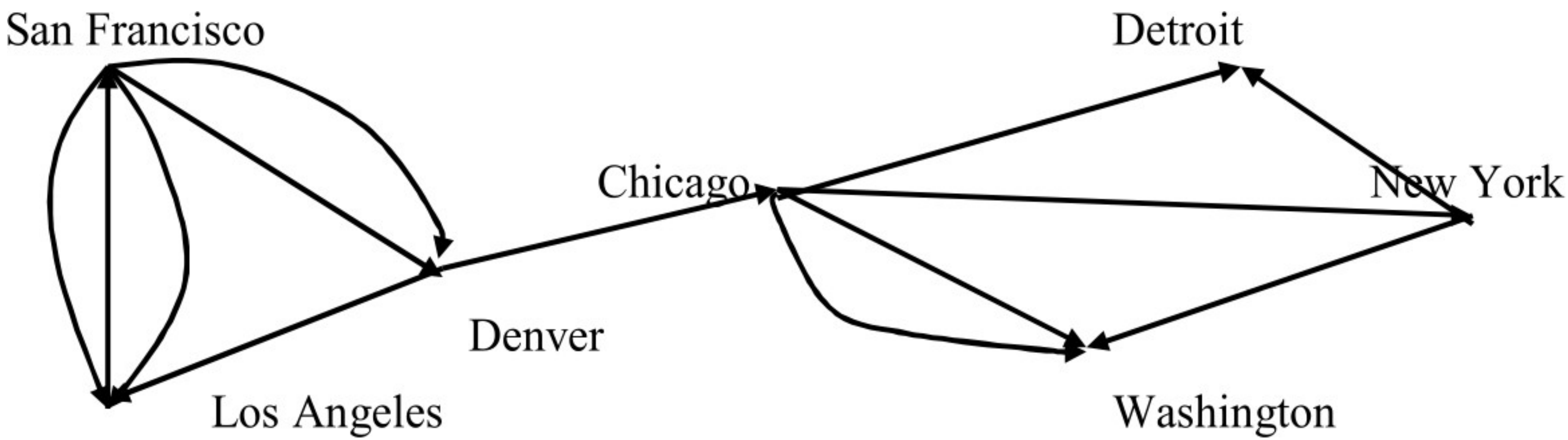
- **Định nghĩa 4**: Đơn đồ thị có hướng $G = < V, E >$ bao gồm V là tập các đỉnh, E là tập các cặp có thứ tự gồm hai phần tử của V gọi là các cung.



(Phương ND, 2013)

Đa đồ thị có hướng

- **Định nghĩa 5**: Đa đồ thị có hướng $G = < V, E >$ bao gồm V là tập đỉnh, E là họ các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V được gọi là các cung. Hai cung e_1, e_2 tương ứng với cùng một cặp đỉnh được gọi là cung lặp.



(Phương ND, 2013)

Quy ước

- Ta chủ yếu làm việc với đơn đồ thị vô hướng và đơn đồ thị có hướng
- Khi viết "đồ thị vô hướng" ta hiểu là "đơn đồ thị vô hướng"
- Khi viết "đồ thị có hướng" ta hiểu là "đơn đồ thị có hướng"

Nội dung

- Định nghĩa đồ thị
- Một số thuật ngữ cơ bản trên đồ thị vô hướng
- Một số thuật ngữ cơ bản trên đồ thị có hướng
- Một số dạng đồ thị đặc biệt

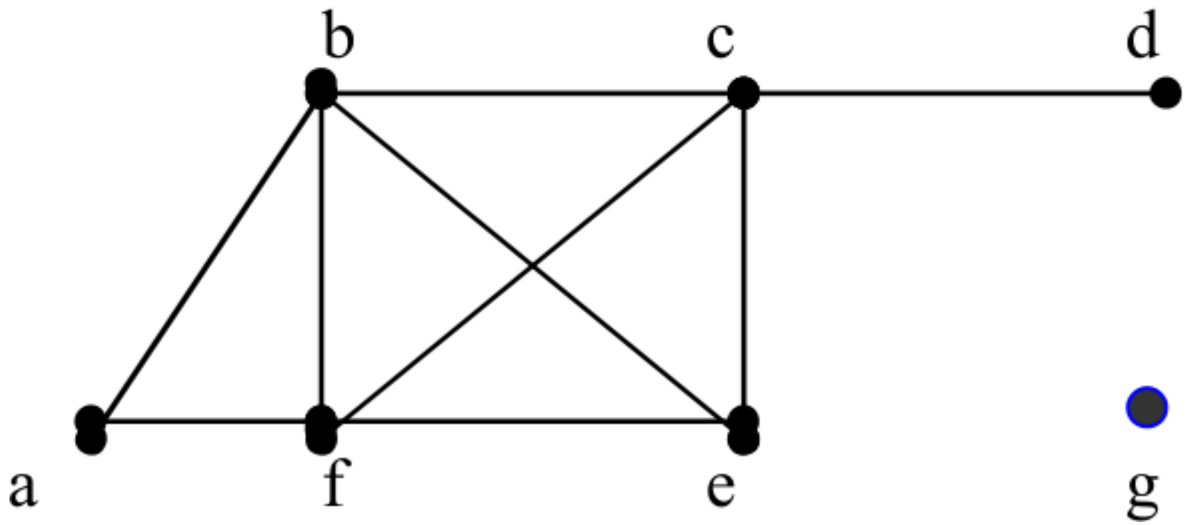
Bậc của đỉnh

- **Định nghĩa 1**: Hai đỉnh u và v của đồ thị vô hướng $G = < V, E >$ được gọi là kề nhau nếu (u, v) là cạnh thuộc đồ thị G. Nếu $e = (u, v)$ là cạnh của đồ thị G thì ta nói cạnh này liên thuộc với hai đỉnh u và v, hoặc ta nói cạnh e nối đỉnh u với đỉnh v, đồng thời các đỉnh u và v sẽ được gọi là đỉnh đầu của cạnh (u, v).

- **Định nghĩa 2**: Ta gọi bậc của đỉnh v trong đồ thị vô hướng là số cạnh liên thuộc với nó và ký hiệu là $\deg(v)$.

Ví dụ

- $\deg(a) = 2, \deg(b) = \deg(c) = \deg(f) = 4;$
- $\deg(e) = 3, \deg(d) = 1, \deg(g) = 0.$



(Phương ND, 2013)

- Đỉnh có bậc 0 được gọi là đỉnh cô lập (ví dụ g)
- Đỉnh bậc 1 được gọi là đỉnh treo (ví dụ d)

Định lý về tổng bậc các đỉnh

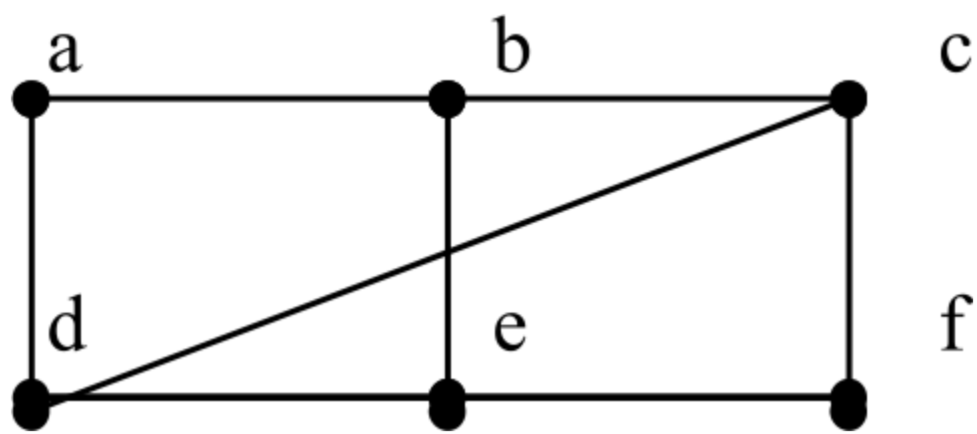
- **Định lý 1**: Giả sử $G =< V, E >$ là đồ thị vô hướng với m cạnh, khi đó: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$.
- Chứng minh: với mỗi cạnh $e = (u,\ v)$, số bậc được tính một lần trong $\deg(u)$ và một lần trong $\deg(v)$. Như vậy tổng số bậc của tất cả các đỉnh sẽ bằng 2 lần số cạnh.
- **Hệ quả**: Trong đồ thị vô hướng $G =< V, E >$, số các đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.

Đường đi, chu trình

- **Định nghĩa 1**: Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v trên đồ thị vô hướng $G =< V, E >$ là dãy $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, trong đó n là số nguyên dương, $x_0 = u, x_n = v, (x_i, x_{i+1}) \in E$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.
- Đường đi như trên còn có thể biểu diễn thành dãy các cạnh $(x_0, x_1)(x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$.
- Đỉnh u là đỉnh đầu, đỉnh v là đỉnh cuối của đường đi
- Đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối $(u = v)$ được gọi là chu trình
- Đường đi hay chu trình được gọi là đơn nếu như không có cạnh nào lặp lại

Ví dụ

- a, d, c, f, e là đường đi đơn độ dài 4
- d, e, c, b không là đường đi vì (e, c) không phải là cạnh của đồ thị
- b, c, f, e, b là chu trình độ dài 4
- Đường đi a, b, e, d, a, b có độ dài 5 không phải là đường đi đơn vì cạnh (a, b) có mặt hai lần



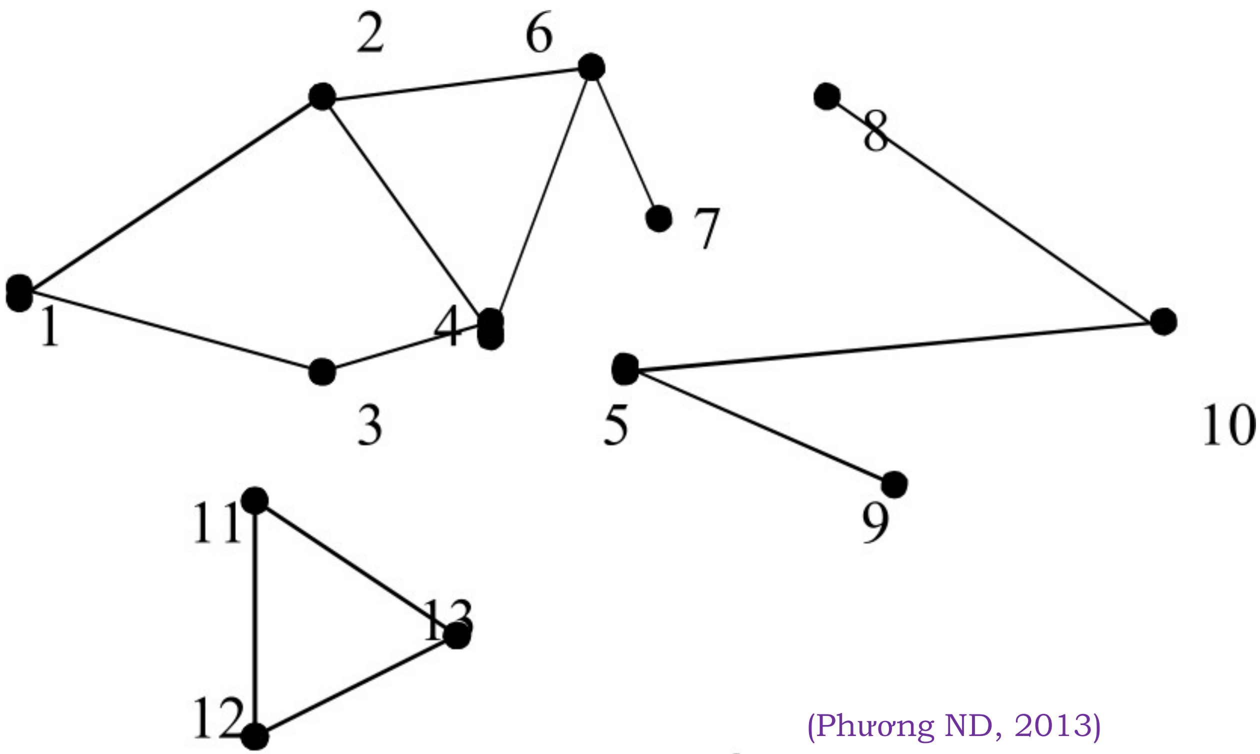
(Phương ND, 2013)

Liên thông

- **Định nghĩa 2**: Đồ thị vô hướng được gọi là liên thông nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó
- Trong trường hợp đồ thị $G =< V, E >$ không liên thông, ta có thể phân rã G thành một số đồ thị con liên thông mà chúng đôi một không có đỉnh chung.
  - Mỗi đồ thị con như vậy được gọi là một thành phần liên thông của G.
  - Như vậy, đồ thị liên thông khi và chỉ khi số thành phần liên thông của nó là 1.
- Trong đồ thị vô hướng, nếu tồn tại đỉnh $u \in V$ sao cho u có đường đi đến tất cả các đỉnh còn lại của đồ thị thì đồ thị là liên thông.

Ví dụ

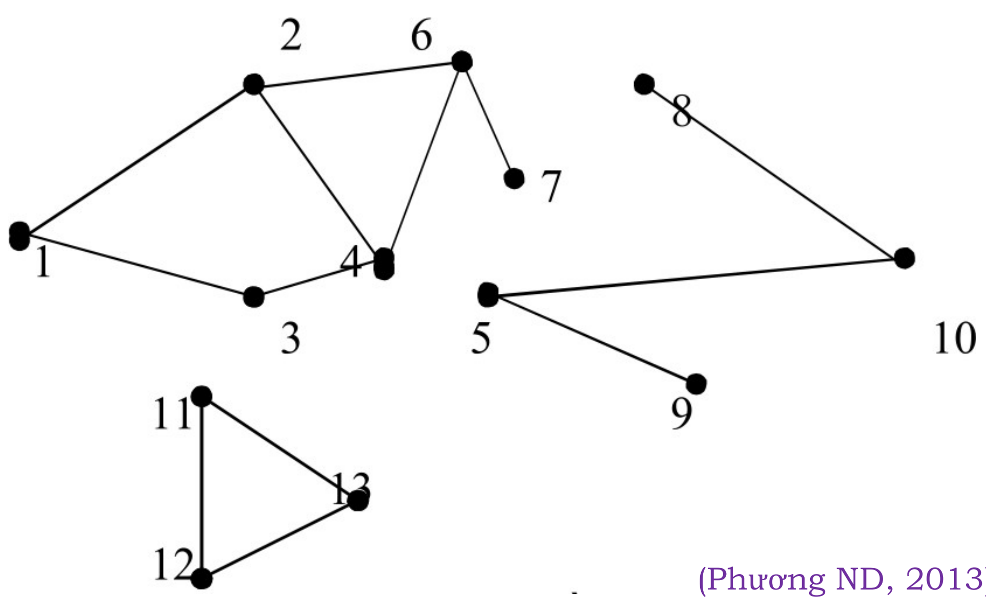
- Đồ thị vô hướng G dưới đây gồm 3 thành phần liên thông



(Phương ND, 2013)

Cầu, trụ

- **Định nghĩa 3**: Cạnh $e \in E$ được gọi là cầu nếu loại bỏ e làm tăng thành phần liên thông của đồ thị. Đỉnh $u \in V$ được gọi là đỉnh trụ nếu loại bỏ u cùng với các cạnh nối với u làm tăng thành phần liên thông của đồ thị.
- Ví dụ cạnh các $(5,9), (5,10)$ là cầu, các đỉnh $5,6$ là trụ



(Phương ND, 2013)

Nội dung

- Định nghĩa đồ thị
- Một số thuật ngữ cơ bản trên đồ thị vô hướng
- Một số thuật ngữ cơ bản trên đồ thị có hướng
- Một số dạng đồ thị đặc biệt

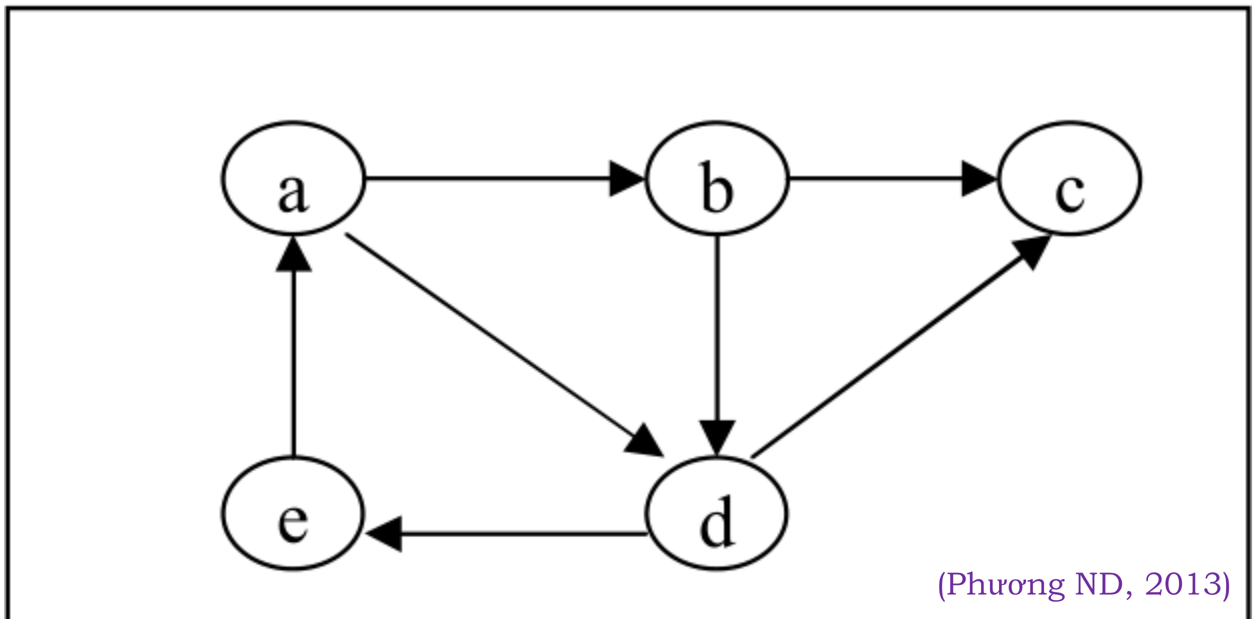
Bán bậc của đỉnh

- **Định nghĩa 1**: Nếu $e = (u, v)$ là cung của đồ thị có hướng G thì ta nói hai đỉnh u và v là kề nhau, và nói cung (u, v) nối đỉnh u với đỉnh v, hoặc nói cung này đi ra khỏi đỉnh u và đi vào đỉnh v. Đỉnh u được gọi là đỉnh đầu, đỉnh v được gọi là đỉnh cuối của cung (u, v).

- **Định nghĩa 2**: Ta gọi bán bậc ra của đỉnh v trên đồ thị có hướng là số cung của đồ thị đi ra khỏi v và ký hiệu là $deg^+(v)$. Ta gọi bán bậc vào của đỉnh v trên đồ thị có hướng là số cung của đồ thị đi vào v và ký hiệu là $deg^-(v)$.

Ví dụ

- $deg^{+}(a) = 2, deg^{+}(b) = 2, deg^{+}(c) = 0,$
  $deg^{+}(d) = 2, deg^{+}(e) = 1.$
- $deg^{-}(a) = 1, deg^{-}(b) = 1, deg^{-}(c) = 2,$
  $deg^{-}(d) = 2, deg^{-}(e) = 1.$



Định lý về tổng bán bậc các đỉnh

- **Định lý 1**: Giả sử $G =< V, E >$ là đồ thị có hướng. Khi đó $\sigma_{v \in V} deg^{+}(v) = \sigma_{v \in V} deg^{-}(v) = |E|$.
- **Chứng minh**: Do mỗi cung (u, v) được tính một lần trong bán bậc vào của đỉnh v và một lần trong bán bậc ra của đỉnh u.
- **Chú ý**:
  - Rất nhiều tính chất của đồ thị có hướng không phụ thuộc vào hướng trên các cung của nó. Vì vậy, trong nhiều trường hợp, ta bỏ qua các hướng trên cung của đồ thị.
  - Đồ thị vô hướng nhận được bằng cách bỏ qua hướng trên các cung được gọi là đồ thị vô hướng tương ứng với đồ thị có hướng đã cho.

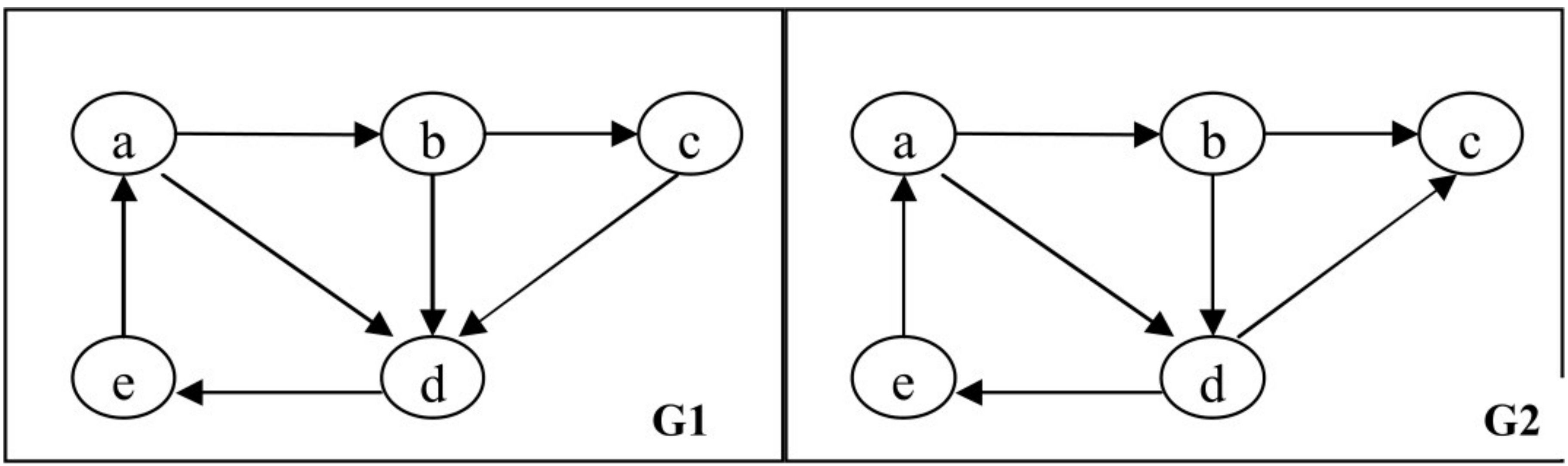
Đường đi, chu trình

- **Định nghĩa 1**: Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v trên đồ thị có hướng $G =< V, E >$ là dãy $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, trong đó n là số nguyên dương, $x_0 = u, x_n = v$, $(x_i, x_{i+1}) \in E$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.
- Đường đi như trên còn có thể biểu diễn thành dãy các cung $(x_0, x_1)(x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$.
- Đỉnh u là đỉnh đầu, đỉnh v là đỉnh cuối của đường đi
- Đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối $(u = v)$ được gọi là chu trình
- Đường đi hay chu trình được gọi là đơn nếu như không có cạnh nào lặp lại

Liên thông mạnh, liên thông yếu

Định nghĩa 2: Đồ thị có hướng $G =< V, E >$ được gọi là liên thông mạnh nếu giữa hai đỉnh bất kỳ $u \in V, v \in V$ đều có đường đi từ u đến v.

Định nghĩa 3: Đồ thị có hướng $G =< V, E >$ được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng tương ứng với nó là liên thông.



(Phương ND, 2013)

Định chiều được

- **Định nghĩa 4**: Đồ thị vô hướng $G =< V, E >$ được gọi là định chiều được nếu ta có thể biến đổi các cạnh trong G thành các cung tương ứng để nhận được một đồ thị có hướng liên thông mạnh.

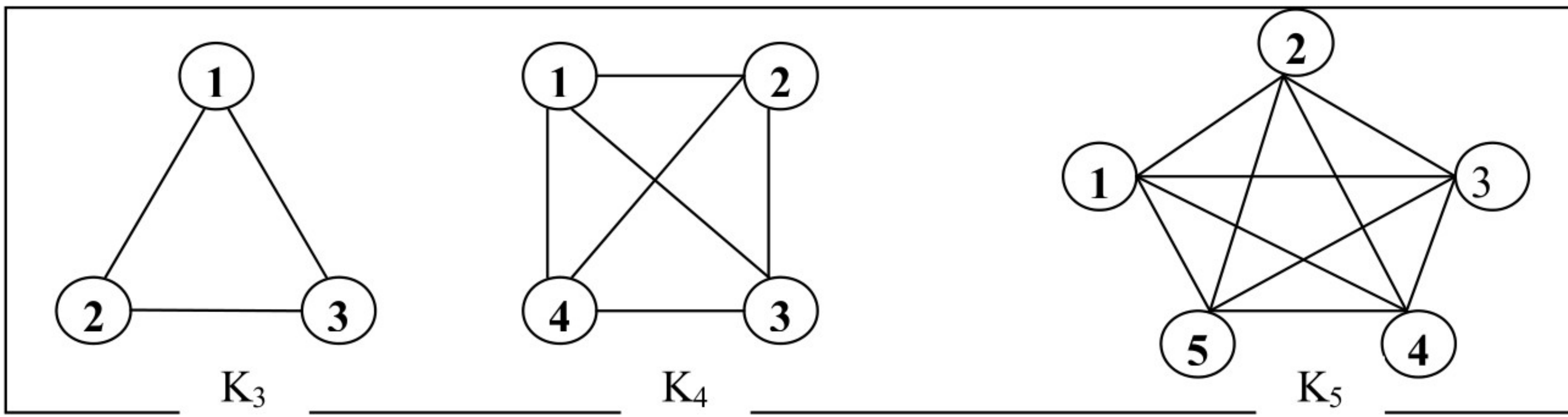
- **Định lý 1**: Đồ thị vô hướng $G =< V, E >$ định chiều được khi và chỉ khi các cạnh của nó không phải là cầu.

Nội dung

- Định nghĩa đồ thị
- Một số thuật ngữ cơ bản trên đồ thị vô hướng
- Một số thuật ngữ cơ bản trên đồ thị có hướng
- Một số dạng đồ thị đặc biệt

Đồ thị đầy đủ

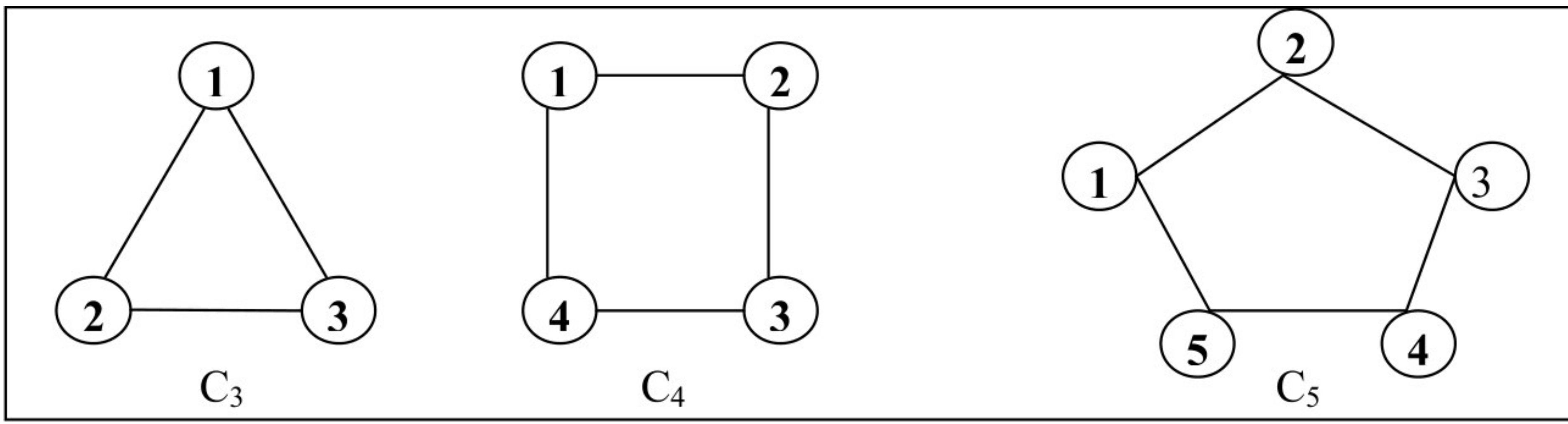
- **Đồ thị đầy đủ** n đỉnh, ký hiệu là K_n, là đơn đồ thị vô hướng mà giữa hai đỉnh bất kỳ của nó đều có cạnh nối
  - Số cạnh: $\frac{n(n-1)}{2}$



(Phương ND, 2013)

Đồ thị vòng

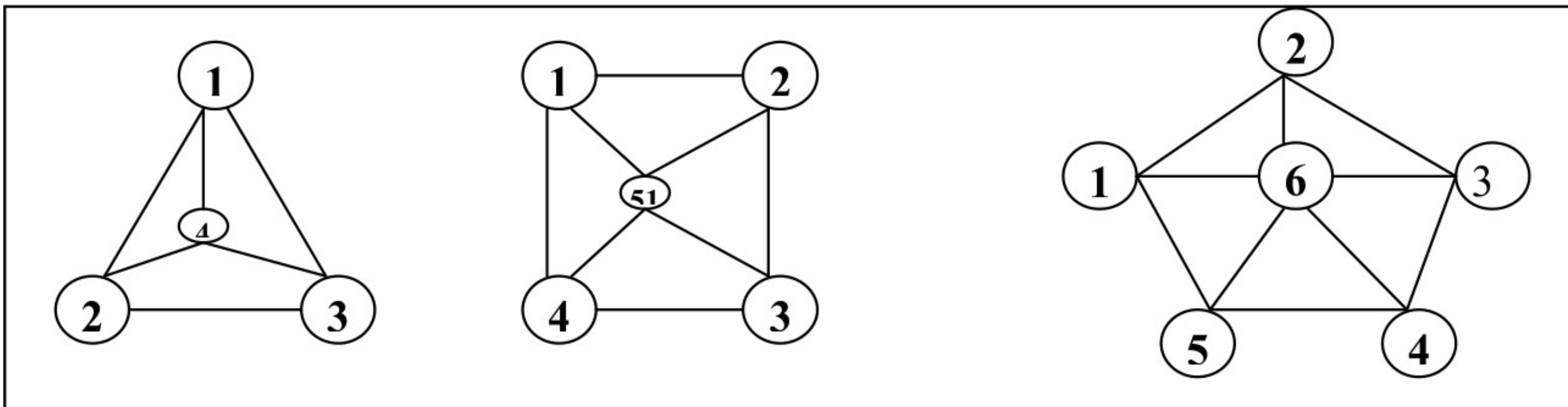
- **Đồ thị vòng** n đỉnh, ký hiệu là C_n $(n \geq 3)$ là đơn đồ thị vô hướng gồm các cạnh $(1,2), (2,3), \ldots, (n-1, n), (n, 1)$



(Phương ND, 2013)

Đồ thị bánh xe

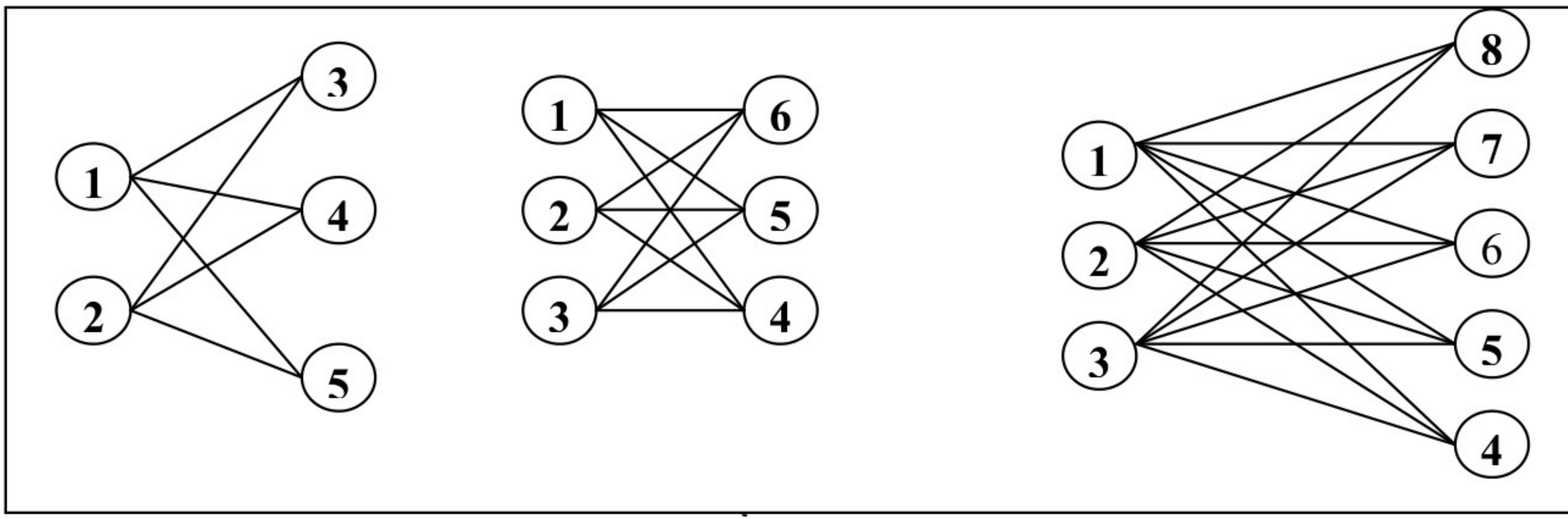
- **Đồ thị bánh xe** n đỉnh, ký hiệu là W_n là đồ thị thu được bằng cách bổ sung một đỉnh nối với tất cả các đỉnh của đồ thị vòng C_{n-1}.



(Phương ND, 2013)

Đồ thị hai phía

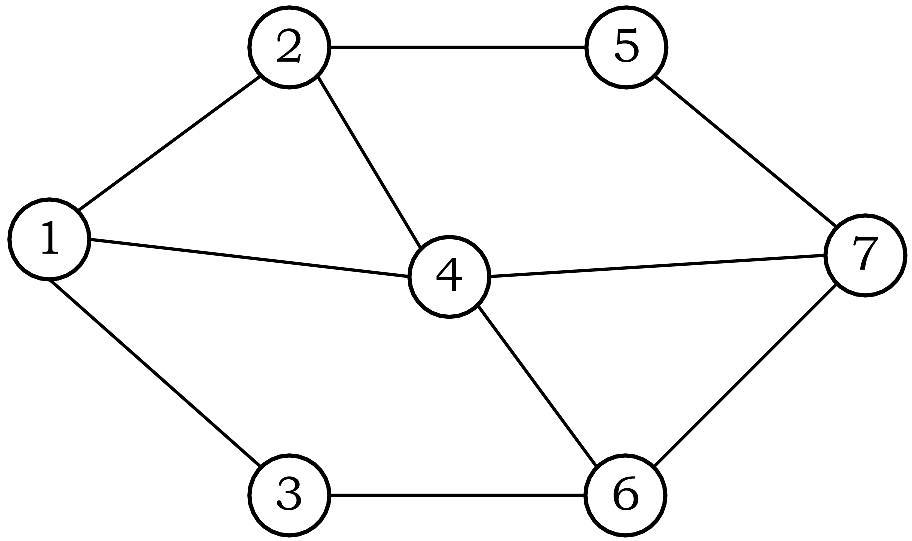
- Đồ thị $G = < V, E >$ được gọi là đồ thị hai phía nếu tập đỉnh V của nó có thể phân hoạch thành hai tập X và Y sao cho mỗi cạnh của đồ thị chỉ có dạng (x, y), trong đó $x \in X$ và $y \in Y$.



(Phương ND, 2013)

Bài tập 1

- Xác định bậc của mỗi đỉnh trong đồ thị vô hướng sau



Bài tập 2

- Xác định bán bậc vào và bán bậc ra của mỗi đỉnh trong đồ thị có hướng sau