

Chương 1. Entropy

Câu 1.1:

- Viết biểu thức tính lượng tin chứa trong tin x với xác suất $p(x)$.
- Cho $p(x)=1/16$. Tính lượng tin riêng chứa trong sự kiện x .

Câu 1.2: Cho nguồn rời rạc $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Tính entropy của nguồn α

Câu 1.4: Hãy viết các công thức mô tả mối quan hệ giữa các đại lượng $H(X)$, $H(Y)$, $H(X/Y)$, $H(Y/X)$, $H(X,Y)$ và $I(X;Y)$.

Câu 1.7: Nêu định nghĩa và tính chất của entropy của nguồn rời rạc A sau:

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Câu 1.11: Tính entropy của nguồn rời rạc nhị phân sau: $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$

Câu 1.12: Nêu định nghĩa và tính chất của Entropy có điều kiện $H(A/B)$

Câu 1.13: Nêu định nghĩa và tính chất của lượng thông tin chéo

Câu 1.22: Tính entropy vi phân của biến ngẫu nhiên X có hàm phân bố xác suất:

$$p(x) = \begin{cases} a^{-1} & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x \neq) \end{cases}$$

Với hai trường hợp:

- $a = 1$
- $a = 4$

Câu 1.23: Cho một nguồn rời rạc không nhớ (DMS) như sau.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1/2 & p & q \end{pmatrix}$$

- Tính lượng thông tin trung bình thống kê $H(X)$ của nguồn.
- Tìm giá trị cực đại của $H(X)$, chỉ rõ điều kiện để có cực đại này.



Lý thuyết thông tin – Đức Huy

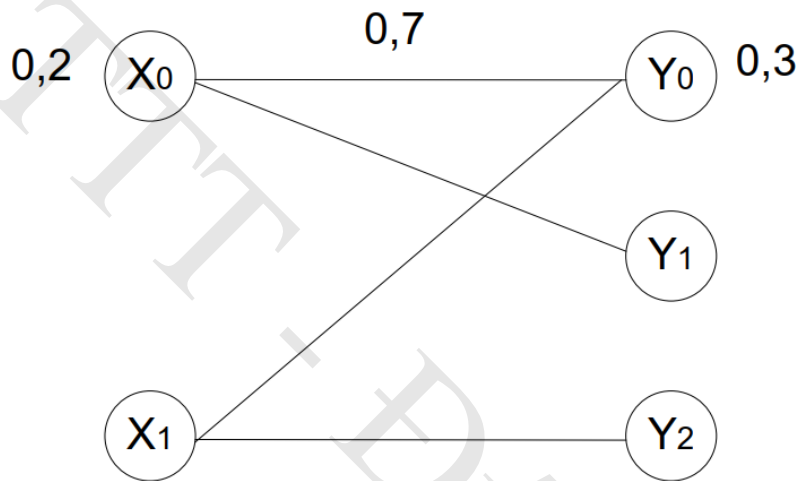
Câu 2.1: Cho nguồn rời rạc $\alpha = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ 0,01 & 0,24 & 0,05 & 0,2 & 0,47 & 0,01 & 0,02 \end{pmatrix}$

a. Tính entropy của nguồn α

b. Không cần tính, em hãy cho biết tin nào trong nguồn này chứa nhiều thông tin nhất và giải thích tại sao.

Câu 2.2: Tính Entropy vi phân của các quá trình ngẫu nhiên liên tục X có phân bố hàm số mũ $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x \geq 0$) với hằng số $\lambda > 0$.

Câu 2.3: Cho mô hình kênh rời rạc sau:



Điền các xác suất còn thiếu vào mô hình này.

Câu 2.4: Giả sử rằng X là một biến ngẫu nhiên có entropy $H(X) = 8$ bit. Giả sử rằng $Y(X)$ là một hàm toán học thỏa mãn quan hệ ánh xạ 1-1.

a. Hỏi entropy của Y bằng bao nhiêu?

b. Entropy có điều kiện $H(Y/X)$ và $H(X/Y)$ bằng bao nhiêu?

c. Entropy kết hợp của X và Y , $H(X,Y)$ bằng bao nhiêu?

d. Giả sử rằng hàm xác định $Y(X)$ là không thể biến đổi ngược; nghĩa là các giá trị khác nhau của X có thể tương ứng với cùng một giá trị của $Y(X)$. Trong trường hợp đó, $H(Y)$ và $H(X/Y)$ sẽ thay đổi ra sao?

Câu 2.5: Một nguồn nhị phân độc lập với phân bố xác suất nguồn là 0,25 và 0,75 được truyền trên kênh nhị phân đối xứng với xác suất chuyển sai $p = 0,01$. Tính các đại lượng $H(X/Y)$ và $I(X;Y)$.



Lý thuyết thông tin – Đức Huy

Câu 2.6: Trong một bộ tú lơ khơ 52 quân bài (không kể phăng teo), A rút ra 1 một quân bài bất kỳ. Tính số câu hỏi trung bình tối thiểu mà B cần đặt ra cho A để xác định được quân bài mà A đã rút (câu hỏi có dạng trả lời có – không hoặc đúng – sai). Nêu thuật toán hỏi. Giả sử A đã rút ra 5 cơ, hãy nêu các câu hỏi cần thiết của B, các trả lời tương ứng của A và phán đoán tương ứng của B.

Câu 2.7: Có 2 hộp đựng bút chì, mỗi hộp đựng 20 bút chì. Hộp thứ nhất có 10 bút chì trắng, 5 bút chì đen và 5 bút chì đỏ. Hộp thứ 2 có 8 bút chì trắng, 8 bút chì đen, 4 bút chì đỏ. Thực hiện các 2 phép thử lấy hú hoạ một bút chì từ mỗi hộp. Hỏi rằng phép thử nào trong hai phép thử nói trên có độ bất định lớn hơn.

Câu 2.8: Một thiết bị điện tử gồm 16 khối có giá trị như nhau về độ tin cậy và được mắc nối tiếp. Giả sử có một khối hỏng. Hãy sử dụng một thiết bị đo tín hiệu ra để xác định khối hỏng. Tính số lần đo trung bình tối thiểu cần thực hiện bằng thiết bị đo này để có thể xác định được khối hỏng. Nêu thuật toán đo? Giả sử khối hỏng là khối thứ 12 hãy chỉ ra các lần đo cần thiết và kết quả đo tương ứng, các phán đoán đưa ra sau mỗi lần đo?

Câu 2.10: Có 8 chai nước mắm được đánh số từ 1 đến 8 trong đó có 1 chai làm từ cá ở gần nhà máy Formosa nên có chứa kim loại nặng. Kết quả phân tích một mẫu nước mắm chỉ cho biết chính xác mẫu đó có chứa kim loại nặng hay không. Giả thiết các chai nước mắm có xác suất chứa kim loại nặng như nhau. Hãy cho biết số lần phân tích mẫu nước mắm tối thiểu cần thực hiện? Hãy nêu thuật toán tổng quát để tạo mẫu nước mắm đem phân tích? Giả sử chai số 7 chứa kim loại nặng, hãy chỉ ra cách tạo mẫu nước mắm trong các lần phân tích, kết quả tương ứng với mỗi lần phân tích và phán đoán đưa ra sau mỗi lần phân tích?

Câu 2.13: Một thành phố nọ có 1% dân số là sinh viên. Trong số sinh viên có 50% là nam thanh niên. Số nam thanh niên trong thành phố là 32% dân số. Giả sử ta gặp một nam thanh niên. Hãy tính lượng thông tin chứa trong tin khi biết rằng đó là một nam sinh viên

Câu 2.14: Một bình đựng gồm hai viên bi đen và ba viên bi trắng. Thực hiện lấy hai lần liên tiếp một cách ngẫu nhiên ra mỗi lần một viên bi, bi được lấy ra thì không bỏ lại vào bình. Quan sát thứ tự màu các viên bi lấy được. Gọi A là thông điệp (tin) cho chúng ta biết đã lấy được viên bi thứ hai là viên bi đen. Hãy tính lượng tin mang lại của thông điệp A

Câu 2.15: Trong 27 đồng xu giống nhau có một đồng xu giả nhẹ hơn. Giả sử ta dùng một cân đĩa thăng bằng (có 2 đĩa cân) để xác định đồng xu giả. Hãy tính số lần cân trung bình tối thiểu để có thể xác định được đồng xu giả. Nêu thuật toán cân.



Lý thuyết thông tin – Đức Huy

Câu 3.13: Cho sơ đồ một kênh rời rạc không nhớ (DM) trong đó nguồn phát X gồm hai tin x_1 và x_2 ; nguồn Y gồm hai tin y_1 và y_2 . Biết $p(x_1) = 1/2$, $p(y_1/x_1) = 1$, $p(y_1/x_2) = \alpha$, $p(y_2/x_1) = 0$, $p(y_2/x_2) = 1 - \alpha$.

a. Hãy tính $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$.

b. Tìm điều kiện của α để $H(Y)$ đạt giá trị cực đại. Khi đó, giá trị của $I(X,Y)$ bằng bao nhiêu (dẫn giải một cách chi tiết nhất có thể để có được kết quả đó).

Câu 3.14: Xét một kênh rời rạc nhị phân đối xứng không nhớ có ma trận kênh cho như sau: $\begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$. Biết đầu vào kênh là một nguồn rời rạc nhị phân không nhớ $X = \{0,1\}$ với $p(0) = 1/2$, đầu ra kênh là một nguồn rời rạc nhị phân không nhớ $Y = \{0,1\}$.

a. Hãy tính $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$ và $I(X,Y)$.

b. Xác định các giá trị của ε để dung lượng của kênh đạt cực đại, và cực tiểu.

Câu 3.16: Cho các nguồn rời rạc với bảng phân bố xác suất hợp $p(x_k, y_l)$ như bảng dưới đây.

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	1/8	1/16	1/32	1/32
y_2	1/16	1/8	1/32	1/32
y_3	1/16	1/16	1/16	1/16
y_4	1/4	0	0	0

Hãy tính $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$, $H(X/Y)$, $H(Y/X)$, $I(X,Y)$.

Câu 3.17: Các tín hiệu x_1 và x_2 có xác suất xuất hiện tiên nghiệm tương ứng là $p(x) = 3/4$ và $p(x_2) = 1/4$ được truyền theo kênh nhị phân rời rạc đối xứng không nhớ có nhiễu có xác suất chuyển sai $p_e = 1/8$. Tính:

a. Lượng tin tức riêng có điều kiện $I(x_2/y_2)$

b. Lượng tin tức chéo $I(x_2;y_2)$

c. Các đại lượng $H(X/y_1)$, $H(X)$, $H(X,Y)$, $H(X/Y)$, $I(X;Y)$



Câu 3.18: Cho sơ đồ kênh như hình vẽ. Biết $p(x_1) = 2/3$, hãy tính các đại lượng $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$, $H(X/Y)$, $H(Y/X)$, $I(X,Y)$

