Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông
Khoa Công nghệ thông tin 1

Toán rời rạc 2

Biểu diễn đồ thị trên máy tính

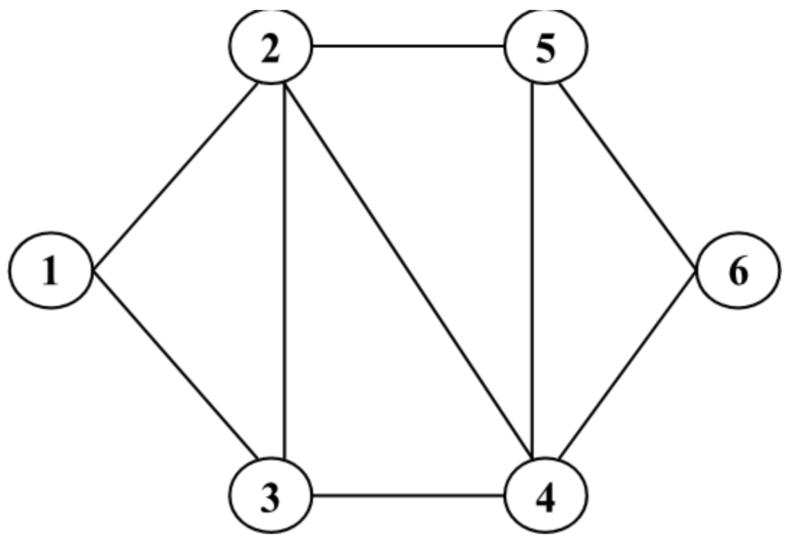
Vũ Hoài Thư

Nội dung

- Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề
- Biểu diễn đồ thị bằng ma trận liên thuộc
- Biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh
- Biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề

Ma trận kề của đồ thị vô hướng (1/2)

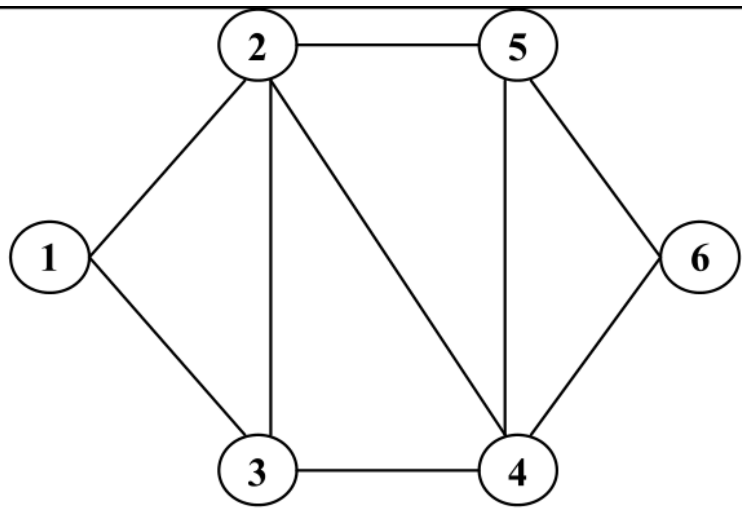
- Xét đồ thị vô hướng $G =< V, E >$, với tập đỉnh $V = \{1,2, \dots, n\}$, tập cạnh $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Ta gọi ma trận kề của đồ thị G là ma trận $n \times n$ có các phần tử hoặc bằng 0 hoặc bằng 1 theo qui định như sau:
  - $A = \{a_{ij}: a_{ij} = 1 \text{ nếu } (i, j) \in E, a_{ij} = 0 \text{ nếu } (i, j) \notin E;\ i, j = 1, 2, \dots, n\}$.



(Phương ND, 2013)

Ma trận kề của đồ thị vô hướng (2/2)

- Xét đồ thị vô hướng $G =< V, E >$, với tập đỉnh $V = \{1,2, \ldots, n\}$, tập cạnh $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Ta gọi ma trận kề của đồ thị G là ma trận $n \times n$ có các phần tử hoặc bằng 0 hoặc bằng 1 theo qui định như sau:
  - $A = \{a_{ij}: a_{ij} = 1\ nếu\ (i, j) \in E, a_{ij} = 0\ nếu\ (i, j) \notin E;\ i, j = 1, 2, \ldots, n\}$.



$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

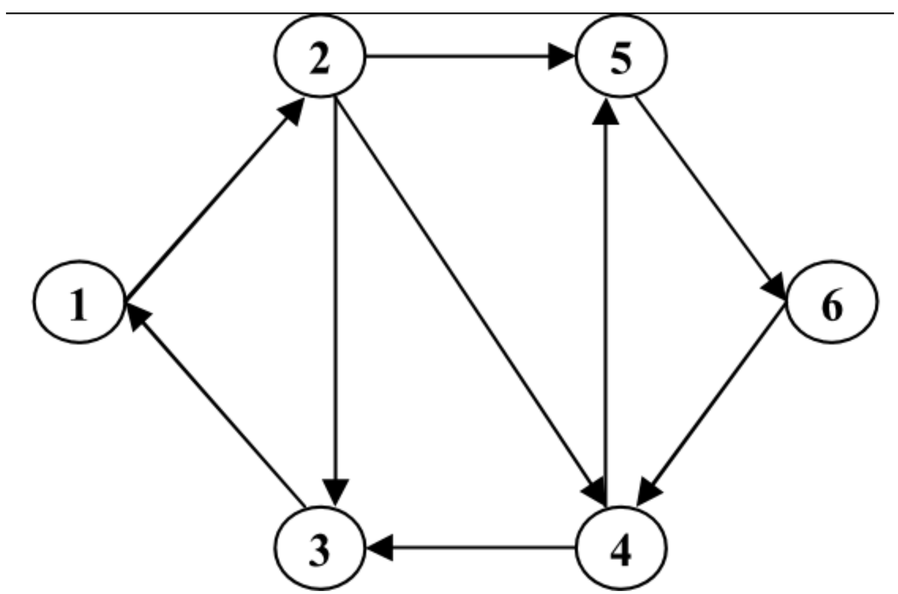
(Phương ND, 2013)

Tính chất của ma trận kề đối với đồ thị vô hướng

- Đối xứng qua đường chéo chính
- Tổng các phần tử của ma trận bằng hai lần số cạnh
  - $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 2|E|$
- Tổng các phần tử của hàng u là bậc của đỉnh u
  - $\sum_{j=1}^{n} a_{uj} = \deg(u)$
- Tổng các phần tử của cột u là bậc của đỉnh u
  - $\sum_{i=1}^{n} a_{iu} = \deg(u)$
- Nếu ký hiệu a_{ij}^{p} $(i, j = 1,2, \dots, n)$ là các phần tử của ma trận $A^p = A.A\dots A$ (p lần), khi đó a_{ij}^{p} cho ta số đường đi khác nhau từ đỉnh i đến đỉnh j qua $p - 1$ đỉnh trung gian

Ma trận kề của đồ thị có hướng (1/2)

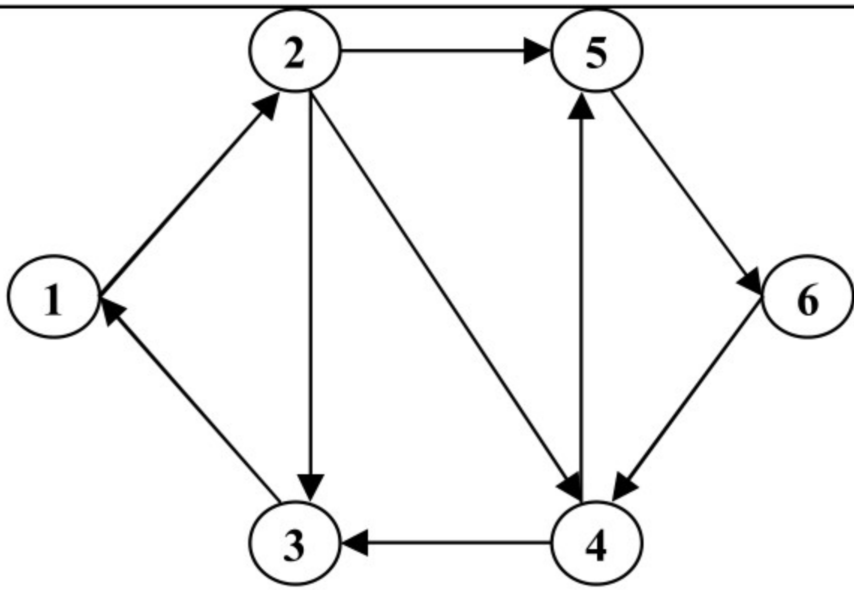
- Định nghĩa hoàn toàn tương tự với đồ thị vô hướng
  - Cần lưu ý tới hướng của cạnh
  - Ma trận kề của đồ thị có hướng là không đối xứng



(Phương ND, 2013)

Ma trận kề của đồ thị có hướng (2/2)

- Định nghĩa hoàn toàn tương tự với đồ thị vô hướng
  - Cần lưu ý tới hướng của cạnh
  - Ma trận kề của đồ thị có hướng là không đối xứng



$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

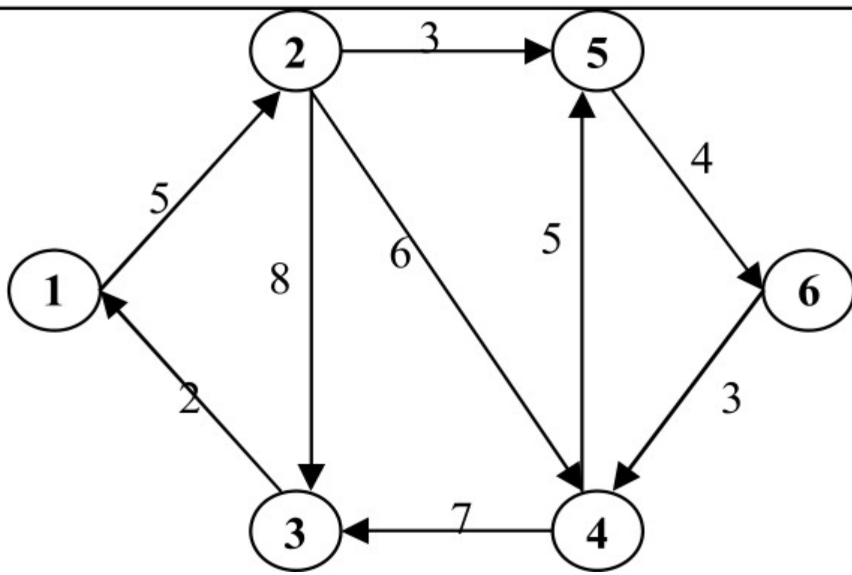
(Phương ND, 2013)

Tính chất của ma trận kề đối với đồ thị có hướng

- Tổng các phần tử của ma trận bằng số cạnh
  - $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = |E|$
- Tổng các phần tử của hàng u là bán bậc ra của đỉnh u
  - $\sum_{j=1}^{n} a_{uj} = deg^{+}(u)$
- Tổng các phần tử của cột u là bán bậc vào của đỉnh u
  - $\sum_{i=1}^{n} a_{iu} = deg^{-}(u)$
- Nếu ký hiệu a_{ij}^{p} $(i, j = 1,2, \dots, n)$ là các phần tử của ma trận $A^p = A.A...A$ (p lần), khi đó a_{ij}^{p} cho ta số đường đi khác nhau từ đỉnh i đến đỉnh j qua $p-1$ đỉnh trung gian

Ma trận trọng số

- Mỗi cạnh $e = (u, v)$ của đồ thị được gán bởi một số $c(e) = c(u, v)$ gọi là trọng số của cạnh e
  - Đồ thị trong trường hợp như vậy gọi là đồ thị trọng số
  - Ma trận trọng số $c = c[i, j]$, $c[i, j] = c(i, j)$ nếu $(i, j) \in E$, $c[i, j] = \theta$ nếu $(i, j) \notin E$. θ nhận các giá trị: $0, \infty, -\infty$ tuỳ theo từng tình huống cụ thể của thuật toán



$$\begin{vmatrix} \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 8 & 6 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 7 & \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \end{vmatrix}$$

(Phương ND, 2013)

Ưu & nhược điểm của ma trận kề

- Ưu điểm
  - Đơn giản, dễ cài đặt trên máy tính
    - Sử dụng một mảng hai chiều để biểu diễn ma trận kề
  - Dễ dàng kiểm tra được hai đỉnh u, v có kề với nhau hay không
    - Đúng một phép so sánh ($a[u][v] \neq 0$?)

- Nhược điểm
  - Lãng phí bộ nhớ: bất kể số cạnh nhiều hay ít ta cần n^2 đơn vị bộ nhớ để biểu diễn
  - Không thể biểu diễn được với các đồ thị có số đỉnh lớn
  - Để xem xét đỉnh đỉnh u có những đỉnh kề nào cần mất n phép so sánh kể cả đỉnh u là đỉnh cô lập hoặc đỉnh treo

Khuôn dạng lưu trữ ma trận kề

- Dòng đầu tiên ghi lại số đỉnh của đồ thị
- n dòng kế tiếp ghi lại ma trận kề của đồ thị
  - Hai phần tử khác nhau của ma trận kề được viết cách nhau một vài khoảng trống

```
10
0    1    1    1    0    0    0    0    0    0
1    0    0    1    1    0    0    0    0    0
1    0    0    1    0    1    0    0    0    0
1    1    1    0    1    1    0    0    1    0
0    1    0    1    0    0    0    1    0    0
0    0    1    1    0    0    1    0    0    0
0    0    0    0    0    1    0    0    1    1
0    0    0    0    1    0    0    0    1    1
0    0    0    1    0    0    1    1    0    1
0    0    0    0    0    0    1    1    1    0
```

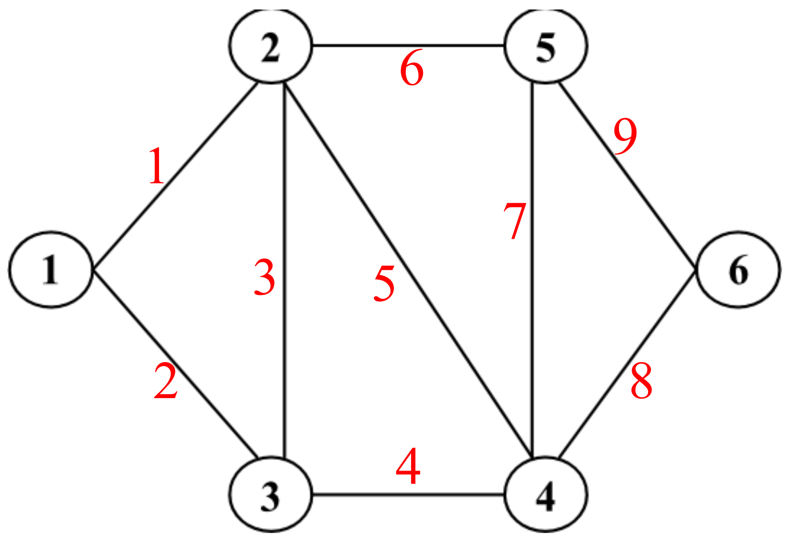
Nội dung

- Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề
- Biểu diễn đồ thị bằng ma trận liên thuộc
- Biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh
- Biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề

Ma trận liên thuộc: Đồ thị vô hướng (1/2)

- Xét đồ thị vô hướng $G = (V, E), V = \{1,2, \dots, n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Ma trận liên thuộc đỉnh-cạnh của G là ma trận kích thước $n \times m$ được xây dựng như sau:

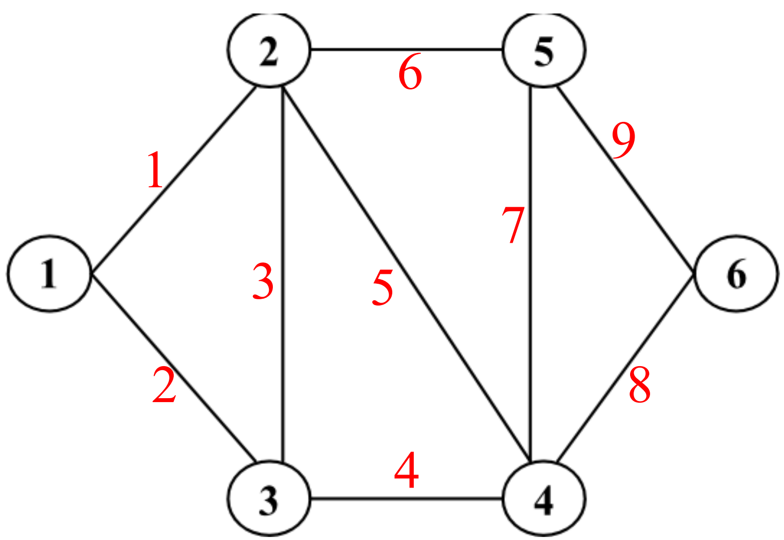
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{nếu đỉnh } i \text{ liên thuộc với cạnh } j \\ 0, & \text{nếu đỉnh } i \text{ không liên thuộc với cạnh } j \end{cases}$$



Ma trận liên thuộc: Đồ thị vô hướng (2/2)

- Xét đồ thị vô hướng $G = (V, E), V = \{1,2, \dots, n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Ma trận liên thuộc đỉnh-cạnh của G là ma trận kích thước $n \times m$ được xây dựng như sau:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{nếu đỉnh } i \text{ liên thuộc với cạnh } j \\ 0, & \text{nếu đỉnh } i \text{ không liên thuộc với cạnh } j \end{cases}$$

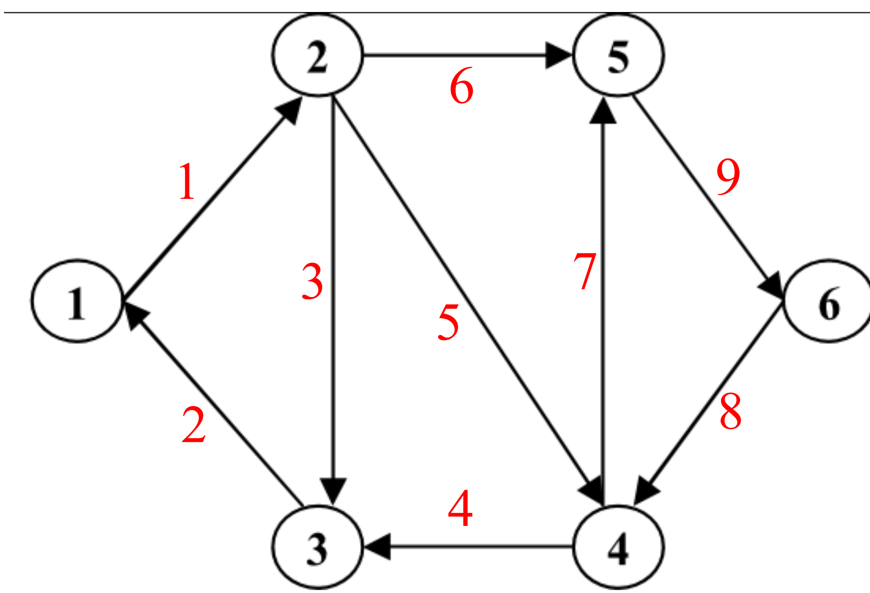


	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	1	1	0	0	0
3	0	1	1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0	1	1	0
5	0	0	0	0	0	1	1	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Ma trận liên thuộc: Đồ thị có hướng (1/2)

- Xét đồ thị có hướng $G = (V, E), V = \{1,2, \ldots, n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Ma trận liên thuộc đỉnh-cung của G là ma trận kích thước $n \times m$ được xây dựng như sau:

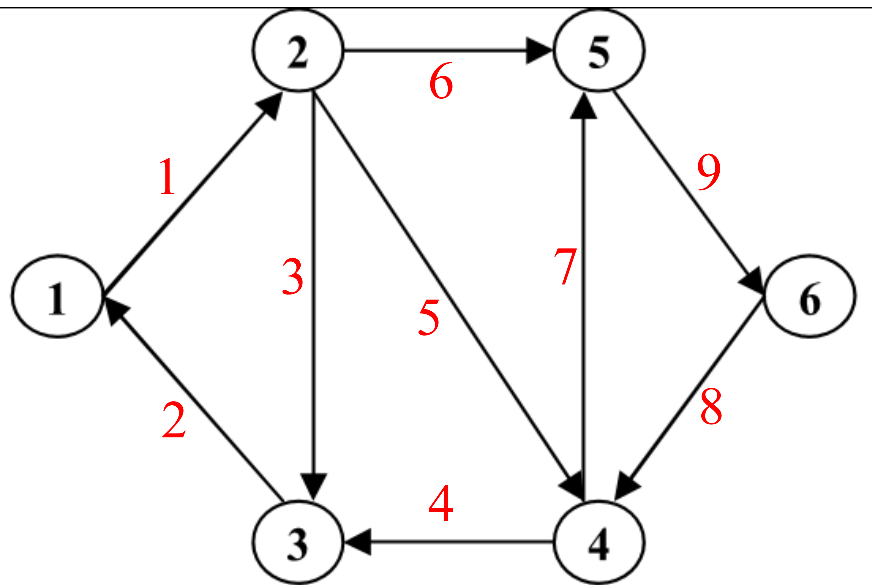
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, nếu\ i\ là\ đỉnh\ đầu\ của\ cung\ e_j \\ -1, nếu\ i\ là\ đỉnh\ cuối\ của\ cung\ e_j \\ 0, nếu\ i\ không\ là\ đầu\ mút\ của\ cung\ e_j \end{cases}$$



Ma trận liên thuộc: Đồ thị có hướng (2/2)

- Xét đồ thị có hướng $G = (V, E), V = \{1,2, \dots, n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Ma trận liên thuộc đỉnh-cung của G là ma trận kích thước $n \times m$ được xây dựng như sau:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{nếu } i \text{ là đỉnh đầu của cung } e_j \\ -1, \text{nếu } i \text{ là đỉnh cuối của cung } e_j \\ 0, \text{nếu } i \text{ không là đầu mút của cung } e_j \end{cases}$$



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	1	0	1	1	0	0	0
3	0	1	-1	-1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	-1	0	1	-1	0
5	0	0	0	0	0	-1	-1	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0	1	-1

Nội dung

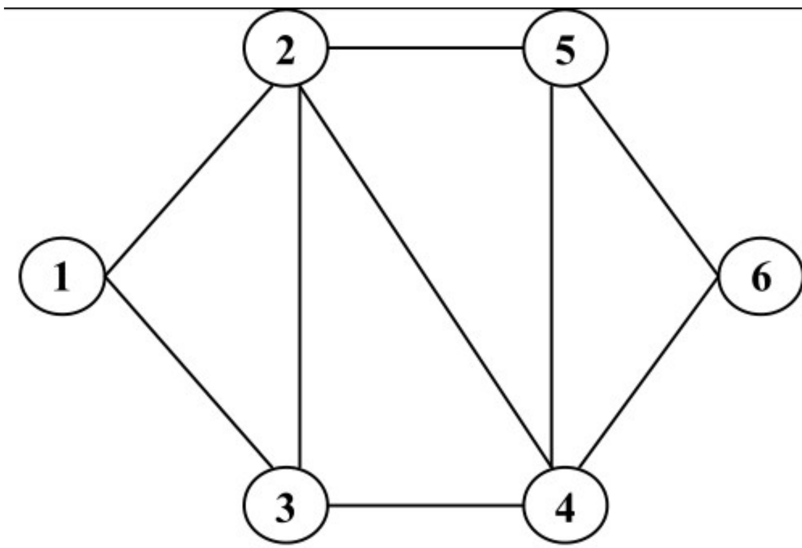
- Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề
- Biểu diễn đồ thị bằng ma trận liên thuộc
- Biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh
- Biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề

Danh sách cạnh (cung)

- Trong trường hợp đồ thị thưa ($m \leq 6n$), ta thường biểu diễn đồ thị dưới dạng danh sách cạnh
  - Ta lưu trữ danh sách tất cả các cạnh (cung) của đồ thị vô hướng (có hướng). Mỗi cạnh (cung) $e(x, y)$ được tương ứng với hai biến $dau[e], cuoi[e]$.
  - Như vậy, để lưu trữ đồ thị, ta cần $2m$ đơn vị bộ nhớ
  - Nhược điểm: để nhận biết những đỉnh nào kề với đỉnh nào chúng ta cần m phép so sánh trong khi duyệt qua tất cả m cạnh (cung) của đồ thị
  - Nếu là đồ thị có trọng số, ta cần thêm m đơn vị bộ nhớ để lưu trữ trọng số của các cạnh

Biểu diễn đồ thị vô hướng bằng danh sách cạnh

- Chỉ cần liệt kê cạnh (u, v), không cần liệt kê cạnh (v, u)
- Nên liệt kê các cạnh theo thứ tự tăng dần của đỉnh đầu mỗi cạnh
- Số cạnh có giá trị u (phải hoặc trái) của danh sách cạnh là bậc của đỉnh u

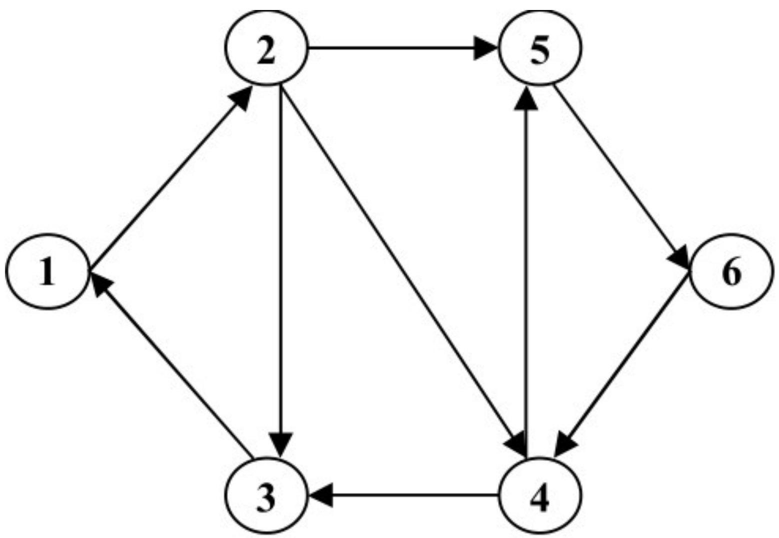


Đỉnh đầu	Đỉnh cuối
1	2
1	3
2	3
2	4
2	5
3	4
4	5
4	6
5	6

(Phương ND, 2013)

Biểu diễn đồ thị có hướng bằng danh sách cạnh

- Mỗi cạnh là bộ có tính đến thứ tự các đỉnh
  - Đỉnh đầu không nhất thiết phải nhỏ hơn đỉnh cuối mỗi cạnh
- Số cạnh có giá trị u thuộc vế trái là $deg^{+}(u)$
- Số cạnh có giá trị u thuộc vế phải là $deg^{-}(u)$

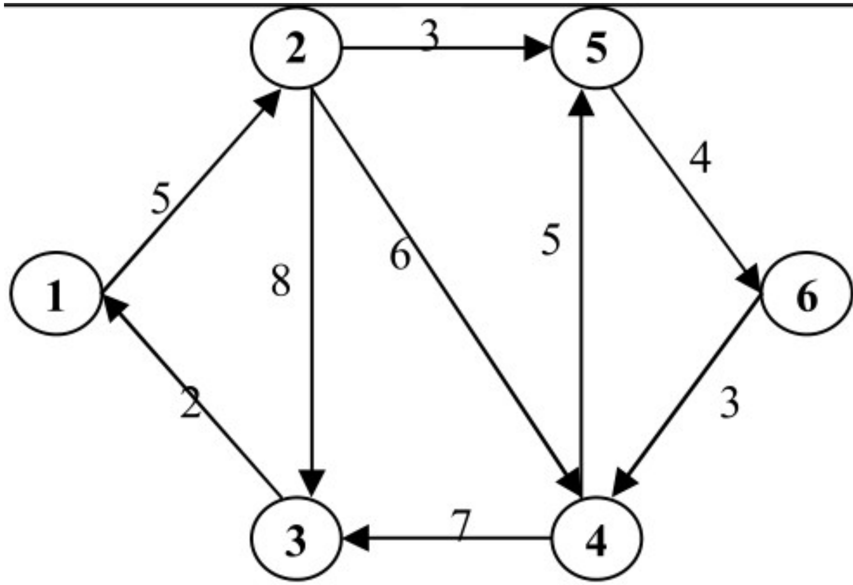


Đỉnh đầu	Đỉnh Cuối
1	2
2	3
2	4
2	5
3	1
4	3
4	5
5	6
6	4

(Phương ND, 2013)

Biểu diễn đồ thị trọng số bằng danh sách cạnh

- Bổ sung thêm một cột là trọng số của mỗi cạnh



Đỉnh đầu	Đỉnh Cuối	Trọng Số
1	2	5
2	3	8
2	4	6
2	5	3
3	1	2
4	3	7
4	5	5
5	6	4
6	4	3

(Phương ND, 2013)

Ưu & nhược điểm của danh sách cạnh

- Ưu điểm
  - Trong trường hợp đồ thị thưa ($m < 6n$), biểu diễn bằng danh sách cạnh tiết kiệm được không gian nhớ
  - Thuận lợi cho một số thuật toán chỉ quan tâm đến các cạnh của đồ thị
- Nhược điểm
  - Khi cần duyệt các đỉnh kề với đỉnh u bắt buộc phải duyệt tất cả các cạnh của đồ thị
    - Điều này làm cho thuật toán có chi phí tính toán cao

Khuôn dạng lưu trữ danh sách cạnh

- Dòng đầu tiên ghi lại số N, M tương ứng với số đỉnh và số cạnh của đồ thị
  - Hai số được viết cánh nhau một vài khoảng trống
- M dòng kế tiếp, mỗi dòng ghi lại một cạnh của đồ thị
  - Đỉnh đầu và đỉnh cuối mỗi cạnh được viết cách nhau một vài khoảng trống

6	9	
1	2	5
2	3	8
2	4	6
2	5	3
3	1	2
4	3	7
4	5	5
5	6	4
6	4	3

(Phương ND, 2013)

Cấu trúc dữ liệu biểu diễn danh sách cạnh

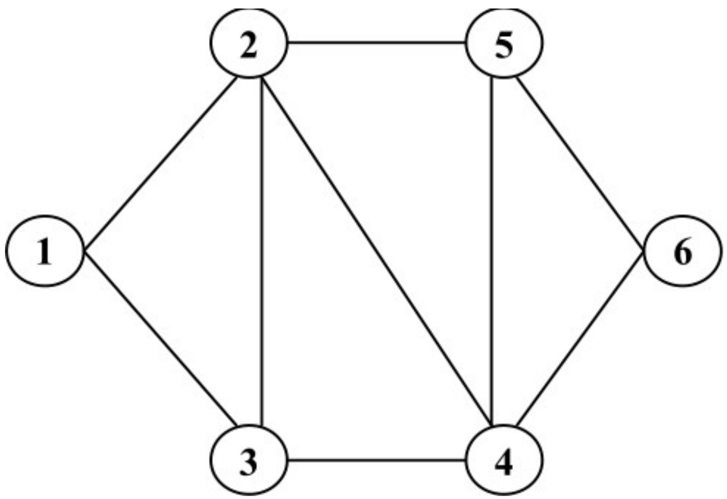
```
//Định nghĩa một cạnh của đồ thị
typedef struct {
  int dau;
  int  cuoi;
  int trongso;
} Edge;

//Danh sách các cạnh được biểu diễn trong mảng G
Edge G[MAX];
```

Nội dung

- Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề
- Biểu diễn đồ thị bằng ma trận liên thuộc
- Biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh
- Biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề

Danh sách kề

- Với mỗi đỉnh u của đồ thị chúng ta lưu trữ danh sách các đỉnh kề với nó mà ta ký hiệu là $Ke(u)$
  - $Ke(u) = \{ v \in V : (u, v) \in E\}$



Ke(1) = { 2, 3).

Ke(2) = {1, 3, 4, 5}.

Ke(3) = {1, 2, 4}.

Ke(4) = {2, 3, 5, 6}.

Ke(5) = {2, 4, 6}.

Ke(6) = { 4, 5}.

(Phương ND, 2013)

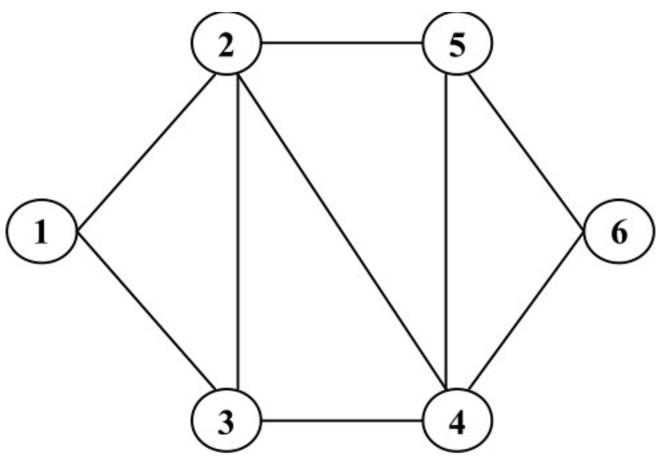
Ưu & nhược điểm của danh sách kề

- Ưu điểm
  - Dễ dàng duyệt tất cả các đỉnh của một danh sách kề
  - Dễ dàng duyệt các cạnh của đồ thị trong mỗi danh sách kề
  - Tối ưu về phương pháp biểu diễn
- Nhược điểm
  - Khó khăn cho người đọc có kỹ năng lập trình yếu

Biểu diễn danh sách kề dùng mảng

- Mảng được chia thành n đoạn
  - Đoạn thứ i trong mảng lưu trữ danh sách kề của đỉnh thứ $i \in V$
  - Để biết một đoạn thuộc mảng bắt đầu từ phần tử nào đến phần tử nào ta sử dụng một mảng khác dùng để lưu trữ vị trí các phần tử bắt đầu và kết thúc của đoạn

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A[i]=?	2	3	1	3	4	5	1	2	4	2	3	5	6	2	4	6	4	5
	Đoạn 1		Đoạn 2				Đoạn 3			Đoạn 4				Đoạn 5			Đoạn 6	



Ke(1) = { 2, 3). (Phương ND, 2013)

Ke(2) = {1, 3, 4, 5}.

Ke(3) = {1, 2, 4}.

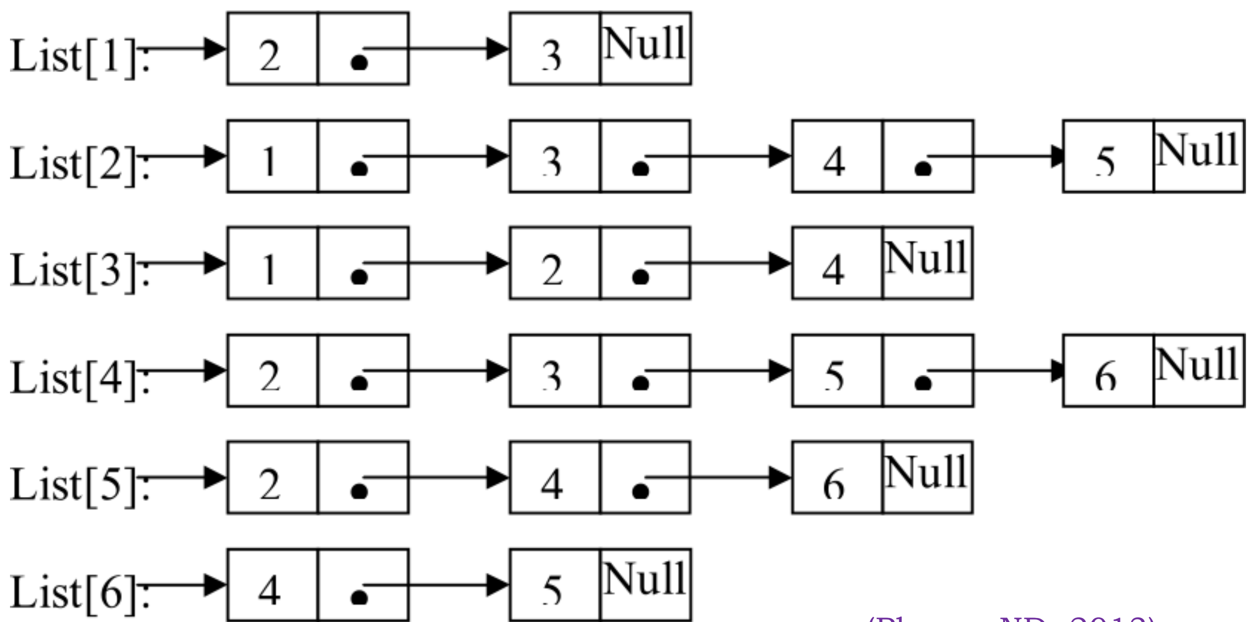
Ke(4) = {2, 3, 5, 6}.

Ke(5) = {2, 4, 6}.

Ke(6) = { 4, 5}.

Biểu diễn danh sách kề dùng danh sách liên kết

- Với mỗi đỉnh $u \in V$, ta biểu diễn danh sách kề của đỉnh bằng một danh sách liên kết $List(u)$



(Phương ND, 2013)

Khuôn dạng lưu trữ danh sách kề

- Dòng đầu tiên ghi lại số đỉnh của đồ thị
- N dòng kế tiếp ghi lại danh sách kề của đỉnh tương ứng theo khuôn dạng:
  - Phần tử đầu tiên là vị trí kết thúc của đoạn, tiếp đến là danh sách các đỉnh của danh sách kề
  - Các phần tử được ghi cách nhau một vài khoảng trống

```
6
2    2    3
6    1    3    4    5
9    1    2    4
13   2    3    5    6
16   2    4    6
18   4    5
```

(Phương ND, 2013)

Bài tập 1

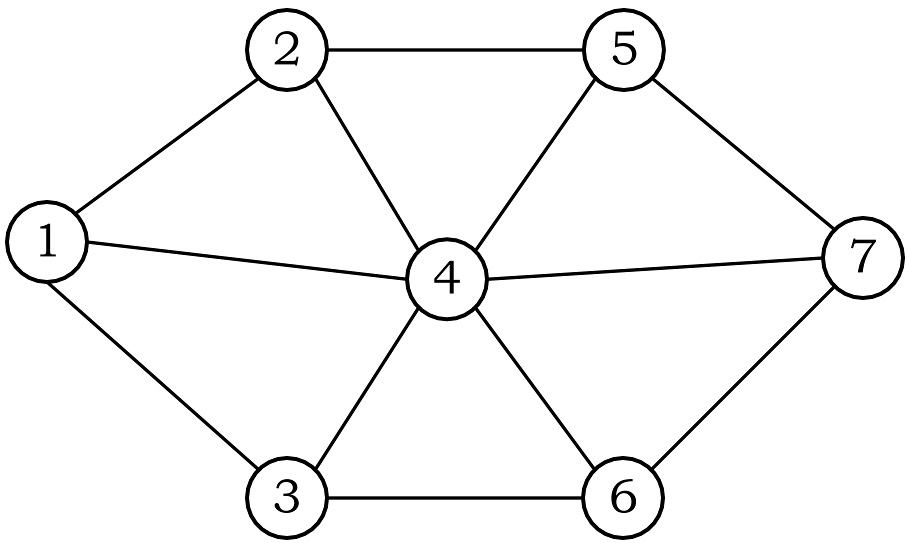
- Trong một buổi gặp mặt, một số khách mời bắt tay với một số khách mời khác. Chứng minh rằng tổng số lượt bắt tay của tất cả các khách mời là số chẵn.

Bài tập 2

- Một đơn đồ thị vô hướng với n đỉnh có nhiều nhất là bao nhiêu cạnh?

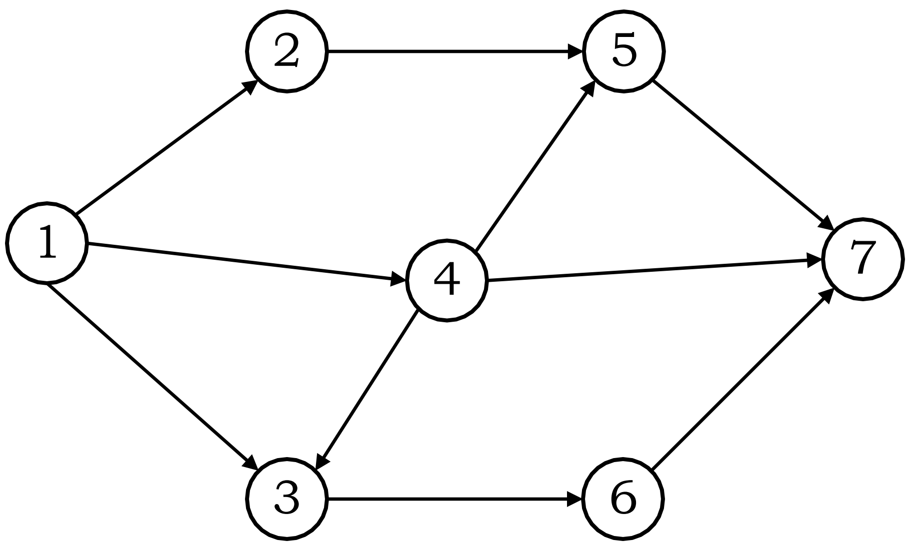
Bài tập 3

- Hãy biểu diễn đồ thị vô hướng dưới đây dưới dạng:
  1) Ma trận kề
  2) Danh sách cạnh
  3) Danh sách kề



Bài tập 4

- Hãy biểu diễn đồ thị có hướng dưới đây dưới dạng:
  1) Ma trận kề
  2) Danh sách cạnh
  3) Danh sách kề



Bài tập 5

- Hãy biểu diễn đồ thị trọng số dưới đây dưới dạng:
  1) Ma trận trọng số
  2) Danh sách cạnh