# C2: Lý thuyết thông tin thống kê

## Lý thuyết thông tin


Biên soạn: Phạm Văn Sự

Bộ môn Xử lý tín hiệu và Truyền thông
Khoa Kỹ thuật Điện tử I
Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông


ver. 22a



Notes

## Mục tiêu của bài học

- Công thức tính và đơn vị đo lường của thông tin
- Đánh giá lượng tin trung bình thống kê của nguồn
- Mối liên hệ về lượng tin giữa các nguồn thông tin
- Lượng thông tin trung bình truyền qua kênh



Notes

## Các câu hỏi cần trả lời

- Một sự kiện xuất hiện sẽ mang lại một lượng tin bằng bao nhiêu? Đơn vị lượng tin?
- Lượng tin tiên nghiệm, hậu nghiệm, tương hỗ là gì? Ý nghĩa các đại lượng trong mô hình phát - thu? Giá trị và ý nghĩa của các đại lượng này trong hai trường hợp cực đoan của kênh?
- Lượng thông tin trung bình thống kê của nguồn rời rạc không nhớ xác định thế nào? Tính chất? Áp dụng?
- Mối quan hệ về lượng tin giữa các nguồn thông tin? Tính chất? Mối quan hệ giữa các đại lượng?
- Lượng tin trung bình truyền qua kênh xác định thế nào?
- Suy diễn các khái niệm tương tự cho nguồn liên tục?



Notes

# Phần I

Lý thuyết thông tin thống kê cho nguồn rời rạc



Notes

# C2: Lý thuyết thông tin thống kê

Nội dung chính

1. Đo lường thông tin
   - Lượng tin riêng
   - Lượng tin hậu nghiệm, lượng tin tương hỗ, hai trạng thái cực đoan của kênh
2. Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc
   - Entropy
   - Entropy của các trường sự kiện đồng thời
   - Entropy có điều kiện
   - Entropy tương đối và Lượng thông tin tương hỗ giữa các nguồn
   - Tính chất và các mối quan hệ giữa các đại lượng
3. Lý thuyết thông tin thống kê cho nguồn liên tục
   - Tín hiệu liên tục, Nguồn liên tục
   - Entropy vi phân
   - Entropy vi phân hợp, Entropy vi phân có điều kiện, Lượng tin tương hỗ của các nguồn liên tục



Notes

# C2: Lý thuyết thông tin thống kê

Nội dung chính

1. Đo lường thông tin
   - Lượng tin riêng
   - Lượng tin hậu nghiệm, lượng tin tương hỗ, hai trạng thái cực đoan của kênh
2. Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc
   - Entropy
   - Entropy của các trường sự kiện đồng thời
   - Entropy có điều kiện
   - Entropy tương đối và Lượng thông tin tương hỗ giữa các nguồn
   - Tính chất và các mối quan hệ giữa các đại lượng
3. Lý thuyết thông tin thống kê cho nguồn liên tục
   - Tín hiệu liên tục, Nguồn liên tục
   - Entropy vi phân
   - Entropy vi phân hợp, Entropy vi phân có điều kiện, Lượng tin tương hỗ của các nguồn liên tục



Notes

# Đo lường thông tin

Lượng tin riêng: Ví dụ 1

**Ví dụ**

*Chúng ta nhận được một bức thư.*

- **TH1**: Đã biết hoặc đoán biết chắc chắn nội dung của bức thư → không có độ bất định: bức thư không mang lại thông tin.
- **TH2**: Không biết và có thể đoán biết không chắc chắn nội dung của bức thư → có độ bất định: bức thư mang lại một lượng thông tin.
- **TH3**: Không biết và không thể đoán biết không được nội dung của bức thư → độ bất định rất lớn: bức thư mang lại một lượng thông tin lớn.

⇒ Độ bất định: một đặc trưng quan trọng trong đo lường lượng thông tin.

- Lượng thông tin tỷ lệ thuận với độ bất định

⇒ Không có độ bất định: không có thông tin. ⇒ Lượng thông tin thu được bằng cách làm giảm độ bất định.



Notes

# Đo lường thông tin

Lượng tin riêng: Ví dụ 2

**Ví dụ**

*Một rổ đựng $n$ bóng ($n = 1, 2, \ldots$), các bóng được đánh nhãn từ 1 đến hết. Lấy ngẫu nhiên một bóng và quan sát nhãn của nó. Quan sát xác suất, độ bất định của sự kiện chúng ta lấy được một bóng có nhãn là "1".*

| $n$ | Xác suất | Độ bất định |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 2 | 1/2 | $\neq 0$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\infty$ | $\approx 0$ | $\infty$ |

Lượng thông tin: là một hàm giảm của xác suất xuất hiện của tin.



Notes

# Đo lường thông tin

## Lượng thông tin riêng: Định nghĩa

**Nhận xét**: Gọi $x$ là một tin với xác suất xuất hiện $p(x)$, gọi $I(x)$ là đại lượng biểu diễn *lượng thông tin mà chúng ta thu được khi biết rằng x đã xảy ra (hoặc một cách tương đương, lượng độ bất định mất đi khi chúng ta biết x đã xảy ra)*

1. $I(x)$: là một hàm của $p(x) \Rightarrow I(x) = I(p(x))$
   - $I(.)$ là liên tục của $p(x)$ với $p(x) \in [0, 1]$; $I(p(x) = 1) = 0$.
   - $I(.)$ là một hàm đơn điệu giảm theo $p(x)$.
   - $I(x) \geq 0$.
2. Nếu $x$ và $y$ là hai tin độc lập thì $I(x \cap y) = I(x) + I(y)$
   - $I(p(x) \times p(y)) = I(p(x)) + I(p(y))$.

**Định nghĩa: Lượng thông tin riêng**

Một tin (sự kiện) $x$ với xác suất xuất hiện $p(x)$ thì việc nó xuất hiện sẽ mang lại lượng thông tin, hay còn gọi là lượng tin riêng/lượng thông tin tiên nghiệm, được xác định bởi:

$$I(x) \triangleq -log(p(x))$$



Notes

# Đo lường thông tin

## Lượng thông tin riêng: Đơn vị

$$I(x_k) = -\log(p(x_k))$$

- Logarithm:

- Cơ số 2: đơn vị [*bit*].
- Cơ số $e = 2,7\ldots$: đơn vị [*nat*].
- Cơ số 10: đơn vị [*hartley*].

**Ví dụ**

*Một bình đựng 2 viên bi màu đen và ba viên bi màu trắng. Thực hiện việc lấy ngẫu nhiên hai lần liên tiếp, mỗi lần một viên bi, bi đã được lấy không được bỏ lại bình. Gọi x là thông điệp cho chúng ta biết đã lấy được cả hai viên bi màu đen. Tính lượng tin của thông điệp x.*



Notes

# C2: Lý thuyết thông tin thống kê

## Nội dung chính

1. Đo lường thông tin
   - Lượng tin riêng
   - Lượng tin hậu nghiệm, lượng tin tương hỗ, hai trạng thái cực đoan của kênh
2. Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc
   - Entropy
   - Entropy của các trường sự kiện đồng thời
   - Entropy có điều kiện
   - Entropy tương đối và Lượng thông tin tương hỗ giữa các nguồn
   - Tính chất và các mối quan hệ giữa các đại lượng
3. Lý thuyết thông tin thống kê cho nguồn liên tục
   - Tín hiệu liên tục, Nguồn liên tục
   - Entropy vi phân
   - Entropy vi phân hợp, Entropy vi phân có điều kiện, Lượng tin tương hỗ của các nguồn liên tục



Notes

# Đo lường thông tin

## Lượng thông tin hậu nghiệm, lượng tin tương hỗ, 2 trạng thái cực đoan của kênh

$$x_k \longrightarrow y_l$$

$p(x_k|y_l)$

Biết đã nhận được tin $y_l$ → tin $x_k$ phát đi với xác suất $p(x_k|y_l)$

- $I(x_k|y_l) \triangleq -log(p(x_k|y_l))$: Lượng thông tin hậu nghiệm
  - Lượng tin riêng về $x_k$ sau khi đã có (biết) $y_l$
- $I(x_k; y_l) \triangleq I(x_k) - I(x_k|y_l)$: Lượng thông tin chéo về $x_k$ do $y_l$ mang.
  - Lượng tin tương hỗ giữa tin $x_k$ và $y_l$
- $\Rightarrow I(x_k|y_l) = I(x_k) - I(x_k; y_l)$: Lượng thông tin tổn hao trên kênh.

Nhận xét:

- Kênh không có nhiễu: $I(x_k|y_l) = 0$; $I(x_k; y_l) = I(x_k)$
- Kênh bị đứt (bị nhiễu tuyệt đối): $I(x_k; y_l) = 0$, $I(x_k|y_l) = I(x_k)$.



Notes

# C2: Lý thuyết thông tin thống kê

## Nội dung chính

1. Đo lường thông tin
   - Lượng tin riêng
   - Lượng tin hậu nghiệm, lượng tin tương hỗ, hai trạng thái cực đoan của kênh
2. Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc
   - Entropy
   - Entropy của các trường sự kiện đồng thời
   - Entropy có điều kiện
   - Entropy tương đối và Lượng thông tin tương hỗ giữa các nguồn
   - Tính chất và các mối quan hệ giữa các đại lượng
3. Lý thuyết thông tin thống kê cho nguồn liên tục
   - Tín hiệu liên tục, Nguồn liên tục
   - Entropy vi phân
   - Entropy vi phân hợp, Entropy vi phân có điều kiện, Lượng tin tương hỗ của các nguồn liên tục



Notes

# C2: Lý thuyết thông tin thống kê

## Nội dung chính

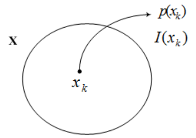
1. Đo lường thông tin
   - Lượng tin riêng
   - Lượng tin hậu nghiệm, lượng tin tương hỗ, hai trạng thái cực đoan của kênh
2. Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc
   - Entropy
   - Entropy của các trường sự kiện đồng thời
   - Entropy có điều kiện
   - Entropy tương đối và Lượng thông tin tương hỗ giữa các nguồn
   - Tính chất và các mối quan hệ giữa các đại lượng
3. Lý thuyết thông tin thống kê cho nguồn liên tục
   - Tín hiệu liên tục, Nguồn liên tục
   - Entropy vi phân
   - Entropy vi phân hợp, Entropy vi phân có điều kiện, Lượng tin tương hỗ của các nguồn liên tục



Notes

# Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc

## Entropy - Lượng tin trung bình thống kê của nguồn




$X$: nguồn rời rạc không nhớ (DMS) gồm các tin $x_k$ xung khắc với xác suất xuất hiện $p(x_k)$

### Định nghĩa (Entropy)

*Entropy của nguồn rời rạc không nhớ $X$ là trung bình thống kê của lượng thông tin riêng của các tin (phần tử) $x_k$ (xung khắc) thuộc nguồn, ký hiệu là $H(X)$.*

$$H(X) \triangleq E[I(x_k)] = \sum_{k=1}^{N} p(x_k) I(x_k) = -\sum_{k=1}^{N} p(x_k) \log(p(x_k))$$
$$= E[-\log(p(x_k))]$$

- $H(X)$ còn được gọi là entropy một chiều của nguồn rời rạc.
- $H(X)$ có đơn vị của lượng thông tin (bit, nat, hartley).



Notes

# C2: Lý thuyết thông tin thống kê

## Nội dung chính

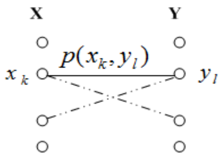




Notes

## Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc

### Entropy của các trường sự kiện đồng thời - Entropy hợp




Hình: Mô hình của cặp nguồn rời rạc X và Y

**Định nghĩa (Entropy hợp)**

*Entropy hợp $H(X,Y)$ của một cặp nguồn rời rạc $(X,Y)$ (còn gọi là Entropy của trường sự kiện đồng thời (X,Y)) với xác suất phân bố đồng thời của các tin $x_k$ và $y_l$ là $p(x_k, y_l)$ được cho bởi công thức:*

$$\begin{aligned} H(X,Y) &\triangleq -\sum_{x_k \in X}\sum_{y_l \in Y} p(x_k, y_l)\log(p(x_k, y_l)) = -\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M} p(x_k, y_l)\log(p(x_k, y_l)) \\ &= E[-\log(p(x_k, y_l))]_{(x_k, y_k)\in(X,Y)} \end{aligned}$$



Notes

## C2: Lý thuyết thông tin thống kê

### Nội dung chính

1. Đo lường thông tin
   - Lượng tin riêng
   - Lượng tin hậu nghiệm, lượng tin tương hỗ, hai trạng thái cực đoan của kênh
2. Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc
   - Entropy
   - Entropy của các trường sự kiện đồng thời
   - Entropy có điều kiện
   - Entropy tương đối và Lượng thông tin tương hỗ giữa các nguồn
   - Tính chất và các mối quan hệ giữa các đại lượng
3. Lý thuyết thông tin thống kê cho nguồn liên tục
   - Tín hiệu liên tục, Nguồn liên tục
   - Entropy vi phân
   - Entropy vi phân hợp, Entropy vi phân có điều kiện, Lượng tin tương hỗ của các nguồn liên tục



Notes

# Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc

## Entropy có điều kiện: Entropy có điều kiện từng phần (1/2)

### Định nghĩa (Entropy có điều kiện từng phần - Partial Conditional Entropy)

*Cho hai nguồn rời rạc $X$, $Y$. $H(X|Y=y_l)$ được gọi là Entropy có điều kiện từng phần, là Entropy có điều kiện về một nguồn tin này khi đã nhận được một tin nhất định của nguồn kia.*

$$\begin{aligned}
H(X|Y=y_l) &\triangleq E[I(x_k|Y=y_l)]_{x_k\in X|Y=y_l}\\
&= \sum_{x_k\in X} p(x_k|Y=y_l)I(x_k|Y=y_l)\\
&= -\sum_{x_k\in X} p(x_k|Y=y_l)\log(p(x_k|Y=y_l))\\
&= -\sum_{k=1}^{N} p(x_k|y_l)\log(p(x_k|y_l))
\end{aligned}$$

$H(X|Y=y_l)$: lượng tin tổn hao trung bình của mỗi tin ở đầu phát khi đầu thu đã



Notes

# Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc

## Entropy có điều kiện: Entropy có điều kiện từng phần (2/2)

### Định nghĩa (Entropy có điều kiện từng phần - Partial Conditional Entropy)

*Cho hai nguồn rời rạc $X$, $Y$. $H(Y|X=x_k)$ được gọi là Entropy có điều kiện từng phần, là Entropy có điều kiện về một nguồn tin này khi đã phát đi một tin nhất định của nguồn kia.*

$$\begin{aligned}
H(Y|X=x_k) &\triangleq E[I(y_l|X=x_k)]_{y_l\in Y|X=x_k}\\
&= \sum_{y_l\in Y} p(y_l|X=x_k)I(y_l|X=x_k)\\
&= -\sum_{y_l\in Y} p(y_l|X=x_k)\log(p(y_l|X=x_k))\\
&= -\sum_{l=1}^{M} p(y_l|x_k)\log(p(y_l|x_k))
\end{aligned}$$

$H(Y|X=x_k)$: lượng tin riêng trung bình chứa trong mỗi tin ở đầu thu khi đầu



Notes

## Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc

Entropy có điều kiện (1/2)

### Định nghĩa (Entropy có điều kiện)

*Với một cặp nguồn rời rạc $(X, Y)$ có xác suất phân bố hợp $p(x_k, y_l)$, xác xuất phân bố có điều kiện $p(x_k|y_l)$, Entropy có điều kiện $H(X|Y)$ được cho bởi công thức:*

$$\begin{aligned} H(X|Y) &\triangleq E[H(X|Y=y_l)]_{y_l \in Y} = \sum_{y_l \in Y} p(y_l) H(X|Y=y_l) \\ &= -\sum_{y_l \in Y} p(y_l) \sum_{x_k \in X} p(x_k|y_l) \log(p(x_k|y_l)) \\ &= -\sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{M} p(x_k, y_l) \log(p(x_k|y_l)) \\ &= E[-\log(p(X|Y))]_{p(x_k, y_l)} \end{aligned}$$

$H(X|Y)$: lượng tin riêng tổn hao trung bình của mỗi tin ở đầu phát khi đầu thu đã thu được một tin nào đó.



Notes

## Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc

Entropy có điều kiện (2/2)

### Định nghĩa (Entropy có điều kiện)

*Với một cặp nguồn rời rạc $(X, Y)$ có xác suất phân bố hợp $p(x_k, y_l)$, , xác xuất phân bố có điều kiện $p(x_k|y_l)$, Entropy có điều kiện $H(Y|X)$ được cho bởi công thức:*

$$\begin{aligned} H(Y|X) &\triangleq E[H(Y|X=x_k)]_{x_k \in X} = \sum_{x_k \in X} p(x_k) H(Y|X=x_k) \\ &= -\sum_{x_k \in X} p(x_k) \sum_{y_l \in Y} p(y_l|x_k) \log(p(y_l|x_k)) \\ &= -\sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{M} p(x_k, y_l) \log(p(y_l|x_k)) \\ &= E[-\log(p(Y|X))]_{p(x_k, y_l)} \end{aligned}$$

$H(Y|X)$: lượng tin riêng trung bình chứa trong mỗi tin ở đầu thu khi đầu phát đã phát đi một tin nào đó.



Notes

# C2: Lý thuyết thông tin thống kê

Nội dung chính

1. Đo lường thông tin
   - Lượng tin riêng
   - Lượng tin hậu nghiệm, lượng tin tương hỗ, hai trạng thái cực đoan của kênh
2. Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc
   - Entropy
   - Entropy của các trường sự kiện đồng thời
   - Entropy có điều kiện
   - Entropy tương đối và Lượng thông tin tương hỗ giữa các nguồn
   - Tính chất và các mối quan hệ giữa các đại lượng
3. Lý thuyết thông tin thống kê cho nguồn liên tục
   - Tín hiệu liên tục, Nguồn liên tục
   - Entropy vi phân
   - Entropy vi phân hợp, Entropy vi phân có điều kiện, Lượng tin tương hỗ của các nguồn liên tục



Notes

# Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc

Entropy tương đối và lượng thông tin tương hỗ giữa các nguồn: Entropy tương đối

## Định nghĩa (Entropy tương đối - Relative Entropy)

*Entropy tương đối, còn gọi là khoảng cách Kullback Leibler giữa hai phân bố rời rạc $p(x_k)$ và $q(x_k)$ của một nguồn rời rạc $X$ được xác định bởi:*

$$D(p||q) \triangleq \sum_{k=1}^{N} p(x_k) \log\left(\frac{p(x_k)}{q(x_k)}\right)$$

- Quy ước: $0 \log(\frac{0}{q}) = 0$; $p \log(\frac{p}{0}) = \infty$
- Tính chất:
  - $D(p||q) \geq 0$, $D(p||q) = 0$ nếu và chỉ nếu $p(x_k) = q(x_k)$
  - Tổng quát $D(p||q) \neq D(q||p)$
  - Không thỏa mãn $D(p||q) + D(q||r) \geq D(p||r) \Rightarrow$ không phải khoảng cách thông thường.



Notes

# Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc

Entropy tương đối và lượng thông tin tương hỗ giữa các nguồn: Lượng thông tin tương hỗ giữa các nguồn

**Định nghĩa (Lượng thông tin tương hỗ - Mutual Information)**

*Cho hai nguồn rời rạc $X$, $Y$ có các xác suất phân bố hợp, phân bố riêng, và phân bố có điều kiện lần lượt là $p(x_k, y_k)$, $p_X(x_k) = p(x_k)$, $p_Y(y_l) = p(y_l)$, và $p(x_k|y_l)$. Lượng thông tin tương hỗ, còn gọi là lượng thông tin chéo trung bình của hai nguồn được xác định bởi:*

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) \triangleq E[I(x_k;y_l)] &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M} p(x_k, y_l)\log\left(\frac{p(x_k|y_l)}{p(x_k)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M} p(x_k, y_l)\log\left(\frac{p(x_k, y_l)}{p(x_k)p(y_l)}\right) \\
&= D(p(x_k, y_l)||p(x_k)p(y_l))
\end{aligned}
$$

- $I(X;Y)$: lượng thông tin mà $X$ cho biết về $Y$ cũng như lượng thông tin $Y$ cho biết về $X$.



Notes

# C2: Lý thuyết thông tin thống kê

Nội dung chính





Notes

## Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc

### Tính chất và các mối quan hệ giữa các đại lượng: Các tính chất của Entropy, ví dụ minh họa

- $H(X) \geq 0$ , $H(X) = 0$ khi và chỉ khi $p(x_k) = 1$ và $p(x_r) = 0$ $(\forall r \neq k)$
- $H(X) \leq \log|X| = \log(N)$ , $H(X) = \log(N)$ khi và chỉ khi các $x_k$ có phân bố xác suất đồng đều, $p(x_k) = 1/N \; \forall k$
- $H(X)$ là một hàm chỉ phụ thuộc vào đặc tính thống kê của nguồn
- $H_b(X) = (\log_b(a))H_a(X)$, $H_a(X)$: entropy được tính với cơ số $a$; Quy ước: $H(X)$ cơ số 2.



Notes

## Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc

### Tính chất và các mối quan hệ giữa các đại lượng: Các tính chất của Entropy có điều kiện, Entropy hợp (1/2)

$0 \leq H(X|Y) \leq H(X)$; $0 \leq H(Y|X) \leq H(Y)$

- Đạt đẳng thức phía phải khi và chỉ khi $X$ và $Y$ là độc lập: kênh bị đứt.
- Đạt đẳng thức phía trái khi và chỉ khi kênh hoàn hảo.

Nếu $X$ và $Y$ độc lập

- $H(X|Y = y_l) = H(X)$; $H(X|Y) = H(X)$.
- $H(Y|X = x_k) = H(Y)$; $H(Y|X) = H(Y)$.

Trường hợp tổng quát $H(X|Y) \neq H(Y|X)$.

$$H(X,Y) = H(Y,X) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$$

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} H(X_i|X_{i-1}, X_{i-2}, \ldots, X_1)$$



Notes

## Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc

Tính chất và các mối quan hệ giữa các đại lượng: Các tính chất của Entropy có điều kiện, Entropy hợp (2/2)

$$H(X,Y) \leq H(X) + H(Y)$$

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \sum_{i=1}^{n} H(X_i)$$

- Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $X$ và $Y$ độc lập: kênh bị đứt.

$H(X,Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|X,Z)$.

Cho nguồn rời rạc $X$, $g()$ là một hàm mô tả quan hệ toán học xác định, khi đó:

- $H(g(X)|X) = 0$
- $H(X|g(X)) \geq 0$
- $H(X) \geq H(g(X))$
  - Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $g()$ là quan hệ toán học $1-1$.



Notes

## Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc

Tính chất và các mối quan hệ giữa các đại lượng: Các tính chất của lượng tin tương hỗ

$0 \leq I(X;Y) \leq H(X)$, $0 \leq I(X;Y) \leq H(Y)$

- Xảy ra đẳng thức bên phải khi và chỉ khi $X$ và $Y$ độc lập
- Xảy ra đẳng thức bên trái khi và chỉ khi kênh lý tưởng không nhiễu

$I(X;Y) = I(Y;X)$

- Lượng thông tin mà $X$ cho biết về $Y$ cũng bằng lượng thông tin mà $Y$ cho biết về $X$.

$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$

- $I(X;Y)$: lượng giảm độ bất định trung bình của $X$ do việc biết $Y$.

$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$

$I(X;X) = H(X)$

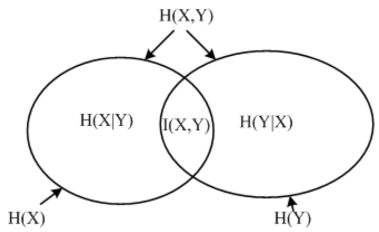
- $H(X)$: lượng thông tin riêng trung bình của $X$.



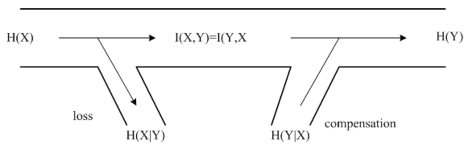
Notes

# Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc

## Tính chất và các mối quan hệ giữa các đại lượng: Biểu diễn mối liên hệ giữa các đại lượng




(a) Biểu đồ Venn




(b) Sơ đồ kênh



Notes

# C2: Lý thuyết thông tin thống kê

## Nội dung chính

1. Đo lường thông tin
   - Lượng tin riêng
   - Lượng tin hậu nghiệm, lượng tin tương hỗ, hai trạng thái cực đoan của kênh
2. Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc
   - Entropy
   - Entropy của các trường sự kiện đồng thời
   - Entropy có điều kiện
   - Entropy tương đối và Lượng thông tin tương hỗ giữa các nguồn
   - Tính chất và các mối quan hệ giữa các đại lượng
3. Lý thuyết thông tin thống kê cho nguồn liên tục
   - Tín hiệu liên tục, Nguồn liên tục
   - Entropy vi phân
   - Entropy vi phân hợp, Entropy vi phân có điều kiện, Lượng tin tương hỗ của các nguồn liên tục



Notes

## Phần II

Lý thuyết thông tin thống kê cho nguồn liên tục



Notes

## C2: Lý thuyết thông tin thống kê

### Nội dung chính

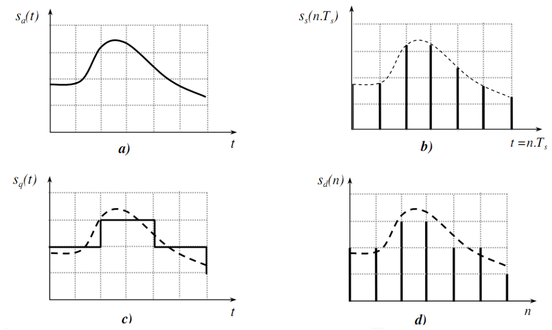




Notes

# Tín hiệu liên tục, nguồn liên tục

## Tín hiệu liên tục: Minh họa đồ thị các loại tín hiệu




Tín hiệu:

- Biểu diễn: hàm toán học của các biến độc lập
- Đặc trưng tín hiệu liên tục: Công suất phổ trung bình, bề rộng phổ



Notes

# Tín hiệu liên tục, nguồn liên tục

## Nguồn liên tục

### Nguồn liên tục

Nguồn tin $X$ phát ra các tin $x$ có giá trị liên tục trong khoảng $x_{min} \div x_{max}$ với hàm mật độ phân bố xác suất $f(x)$

### Mô hình toán học nguồn liên tục

- Biến ngẫu nhiên liên tục $X$ với hàm mật độ phân bố xác suất $f(x)$



Notes

# C2: Lý thuyết thông tin thống kê

Nội dung chính

1. Đo lường thông tin
   - Lượng tin riêng
   - Lượng tin hậu nghiệm, lượng tin tương hỗ, hai trạng thái cực đoan của kênh
2. Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc
   - Entropy
   - Entropy của các trường sự kiện đồng thời
   - Entropy có điều kiện
   - Entropy tương đối và Lượng thông tin tương hỗ giữa các nguồn
   - Tính chất và các mối quan hệ giữa các đại lượng
3. Lý thuyết thông tin thống kê cho nguồn liên tục
   - Tín hiệu liên tục, Nguồn liên tục
   - Entropy vi phân
   - Entropy vi phân hợp, Entropy vi phân có điều kiện, Lượng tin tương hỗ của các nguồn liên tục



Notes

# Entropy vi phân

## Định nghĩa (Entropy vi phân - Differential Entropy)

*Entropy vi phân của một nguồn liên tục $X$ có hàm mật độ phân bố xác suất $f(x)$ được xác định bởi:*

$$h(X) \triangleq -\int_S f(x)\log(f(x))dx$$

*trong đó, $S$ là miền xác định dương (support set: tập trên đó $f(x) \geq 0$) của $X$.*

- $h(X)$ mặc định chỉ xem xét trên điều kiện các hàm liên tục, xác định và khả tích.
- $h(X) = h(f)$

## Ví dụ

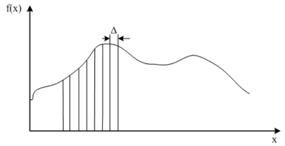
*Cho $X$ là một nguồn liên tục có hàm mật đố phân bố xác suất đều (uniform distribution) trong đoạn $[a, b]$. Tính $h(X)$.*



Notes

## Entropy vi phân

Mối quan hệ giữa Entropy vi phân và Entropy rời rạc




- $X \to X^{\Delta} = \{x_i\}$ $(i\Delta \leq X \leq (i+1)\Delta)$.
- $p(X^{\Delta} = x_i) = p(x_i) = f(x_i)\Delta = \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} f(x)dx$
- $\to H(X^{\Delta}) = -\sum_{-\infty}^{\infty} f(x_i)\Delta \log(f(x_i)\Delta) = -\sum_{-\infty}^{\infty} \Delta f(x_i)\log(f(x_i)) + \log(1/\Delta)$

### Định lý

*Một nguồn liên tục $X$ với hàm mật độ phân bố xác suất $f(x)$ khả tích theo tiêu chuẩn Riemann thì:*

$$H(X^{\Delta}) + \log(\Delta) \to h(X) \text{ khi } \Delta \to 0$$

- Entropy của một nguồn rời rạc thu được từ nguồn liên tục $X$ bằng phép lượng tử hóa sử dụng $n$ bít có giá trị xấp xỉ bằng $h(X) + n$



Notes

## Entropy vi phân

Minh họa Entropy của nguồn liên tục

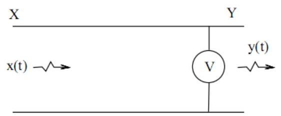
$\lim_{\Delta \to 0} \log(\frac{1}{\Delta}) \to \infty \Rightarrow H(X)$ lớn vô hạn.

### Ví dụ

*Xét việc truyền thông tin từ nguồn liên tục $X$ đến nguồn $Y$ bằng dây dẫn lý tưởng (không tổn hao, không nhiễu). Tín hiệu phát $x(t)$ nhận các giá trị liên tục trong khoảng $[0,1]$ (V). Ở đầu thu $Y$ ta đặt một vôlt kế lý tưởng (tạp âm nội bằng 0, $Z_V = \infty$). Khi đó việc thu tín hiệu thỏa mãn $y(t) = x(t)$. Xem xét việc lượng tử hóa, và tính toán $H(X)$.*

Lượng tử đều:

- 10 mức $\Delta = 0,1$: $X^{\Delta} = \{x_i\}$ $(i = \overline{1,10}) \Rightarrow H(X^{\Delta}) = \log(10)$.
- $\Delta = 0,01 \Rightarrow H(X^{\Delta}) = \log(100)$.
- $\Delta \to 0 \Rightarrow H(X^{\Delta}) \to H(X) \to \infty$.






Notes

## Entropy vi phân

### Một số tính chất

- $h(X)$ có thể âm, dương.
- $h(X)$ có giá trị hữu hạn.
- Với một hằng số $c$: $h(X + c) = h(X)$
- Với một hằng số $c \neq 0$: $h(cX) = h(X) + \log(|c|)$
  - $h(X)$ phụ thuộc vào thang tỷ lệ (đơn vị đo)

**Định lý**

*Trong số những quá trình ngẫu nhiên (tín hiệu) có cùng công suất trung bình $P_x = \sigma^2$, quá trình (tín hiệu) có hàm mật độ phân bố chuẩn (phân bố Gausse) sẽ cho Entropy vi phân lớn nhất. Nói cách khác*

$$h(X) \leq \log(\sqrt{2\pi e P_x})$$

- Trong số các tín hiệu nhiễu (tạp âm) có cùng công suất trung bình, tín hiệu nhiễu Gausse có tác hại lớn nhất với việc truyền tin.



Notes

## C2: Lý thuyết thông tin thống kê

### Nội dung chính

1. Đo lường thông tin
   - Lượng tin riêng
   - Lượng tin hậu nghiệm, lượng tin tương hỗ, hai trạng thái cực đoan của kênh
2. Entropy và các đại lượng liên quan của nguồn rời rạc
   - Entropy
   - Entropy của các trường sự kiện đồng thời
   - Entropy có điều kiện
   - Entropy tương đối và Lượng thông tin tương hỗ giữa các nguồn
   - Tính chất và các mối quan hệ giữa các đại lượng
3. Lý thuyết thông tin thống kê cho nguồn liên tục
   - Tín hiệu liên tục, Nguồn liên tục
   - Entropy vi phân
   - Entropy vi phân hợp, Entropy vi phân có điều kiện, Lượng tin tương hỗ của các nguồn liên tục



Notes

# Entropy vi phân hợp, Entropy vi phân có điều kiện, Lượng tin tương hỗ của các nguồn liên tục

Entropy vi phân hợp, Entropy vi phân có điều kiện

**Định nghĩa (Entropy vi phân hợp )**

*Entropy vi phân hợp của cặp nguồn liên tục $(X, Y)$ với hàm mật độ phân bố hợp (phân bố đồng thời) $f(x, y)$, được định nghĩa:*

$$h(X, Y) \triangleq -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\log(f(x, y))dxdy$$

**Định nghĩa (Entropy vi phân có điều kiện )**

*Các Entropy vi phân có điều kiện của cặp nguồn liên tục $(X, Y)$ với hàm mật độ phân bố hợp (phân bố đồng thời) $f(x, y)$, được định nghĩa:*

$$h(X|Y) \triangleq -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\log(f(x|y))dxdy$$

$$h(Y|X) \triangleq -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\log(f(y|x))dxdy$$



Notes

# Lượng thông tin tương hỗ của các nguồn liên tục

**Định nghĩa (Entropy vi phân tương đối)**

*Xét một nguồn liên tục $X$, với nguồn $X$ giả sử có hai phân bố $f(x)$ và $g(x)$. Entropy vi phân tương đối hay còn gọi là khoảng cách Kullback Leibler được tính bằng công thức:*

$$D(f(x)||g(x)) \triangleq \int_S f(x)\log\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)dx$$

- $D(f||g) < \infty$ iff miền xác định (support set) của $f()$ chứa miền của $g()$.
- Quy ước $0\log\frac{0}{0} = 0$

**Định nghĩa (Lượng thông tin tương hỗ)**

*Lượng thông tin tương hỗ $I(X; Y)$ giữa hai nguồn liên tục $X$ và $Y$ có xác suất phân bố hợp $f(x, y)$ được xác định bởi công thức:*

$$I(X; Y) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\log\left(\frac{f(x, y)}{f(x)f(y)}\right)dxdy$$



Notes

# Entropy vi phân hợp, Entropy vi phân có điều kiện, Lượng tin tương hỗ của các nguồn liên tục

## Một số tính chất (1)

$h(X, Y) = h(X) + h(Y|X) = h(Y) + h(X|Y)$

$h(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} h(X_i|X_{i-1}, \ldots, X_1)$

$h(X|Y) \leq h(X)$; $h(Y|X) \leq h(Y)$

- Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $X$ và $Y$ độc lập nhau.

$h(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \sum_{i=1}^{n} h(X_i)$

$D(f(x)|g(x)) \geq 0$

- Xảy ra đẳng thức iff $f() = g()$ trên gần toàn miền xác định.



Notes

# Entropy vi phân hợp, Entropy vi phân có điều kiện, Lượng tin tương hỗ của các nguồn liên tục

## Một số tính chất (2)

$I(X; Y) = D(f(x, y)|f(x)f(y))$

$I(X; Y) \geq 0$

- Xảy ra đẳng thức iff $X$ và $Y$ độc lập nhau.

$I(X; Y) = I(Y; X)$

$I(X; Y) = h(X) - h(X|Y) = h(Y) - h(Y|X)$

$I(X^{\Delta}; Y^{\Delta}) \approx I(X; Y)$

- $I(X; Y)$ là giới hạn của lượng thông tin tương hỗ giữa các nguồn rời rạc hóa (lượng tử hóa) tương ứng.



Notes

Kết thúc bài học



Notes

Notes