

# ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN OLYMPIC SINH VIÊN 2025

Môn: ĐẠI SỐ

(Thời gian làm bài: 150 phút)

**Câu 1 (2 điểm).** Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -3 & a \\ 2 & 4 & 2-b & 0 \\ b+1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

- Tìm  $a, b$  để  $\det A = 0$ .
- Biện luận theo  $a, b$  hạng của ma trận  $A$ .

**Câu 2 (2 điểm).** Cho 2 ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

- Chứng minh rằng nếu hai ma trận đồng dạng thì có cùng đa thức đặc trưng (hai ma trận  $A, B$  đồng dạng nếu tồn tại ma trận  $T$  không suy biến thoả mãn  $B = T^{-1}AT$ ).
- Tìm  $a, b$  để hai ma trận  $A, B$  nói trên đồng dạng. Tìm ma trận  $T$  không suy biến sao cho  $B = T^{-1}AT$ .

**Câu 3 (2 điểm).** 1) Cho ánh xạ  $f : P_3[x] \rightarrow P_4[x]$  xác định bởi:

$$f(p(x)) = (x-1)p(x) + (x^2-2)p'(x).$$

Chứng minh  $f$  là một ánh xạ tuyến tính. Tìm ma trận của  $f$  đối với cặp cơ sở chính tắc  $B = \{1, x, x^2, x^3\} \subset P_3[x]$  và  $B' = \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \subset P_4[x]$ .

- Trong không gian vectơ các hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ , xét sự độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của hệ vectơ sau:

$$S = \{\sin x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 4x, \sin 5x\}.$$

**Câu 4 (2 điểm).** Giả sử có 36600 con chim cánh cụt sống ở 3 khu vực: A, B, C. Số lượng chim cánh cụt ở mỗi khu vực thay đổi theo thời gian do tình trạng di cư. Biết rằng sau mỗi tháng, trong số những con chim cánh cụt ở khu A có 10% chuyển sang khu B và 20% chuyển sang khu C; trong số những con ở khu B có 15% chuyển sang khu A và 10% chuyển sang khu C; trong số những con ở khu C có 20% chuyển sang khu A và 5% chuyển sang khu B.

- Giả sử sau 2 tháng số chim cánh cụt ở các khu A, B, C lần lượt là 13647, 7158 và 15795 con. Tính số chim cánh cụt ở thời điểm ban đầu tại mỗi khu vực.
- Hỏi thời điểm ban đầu số lượng chim cánh cụt ở mỗi khu A, B, C là bao nhiêu, để sau mỗi tháng số lượng chim cánh cụt ở mỗi khu trên không đổi. Biết rằng tổng số lượng chim cánh cụt ở 3 khu trên luôn là 36600 con.
- Giả sử tổng lượng chim cánh cụt ở 3 khu vực A, B, C là  $n$ . Hãy tìm điều kiện của  $n$  để quần thể chim cánh cụt trên không thể xuất hiện **trạng thái dừng** (trạng thái dừng tức là sau mỗi tháng lượng chim ở mỗi khu vực không thay đổi)

**Câu 5 (1 điểm).** Cho  $A, B$  là các ma trận vuông khả nghịch. Chứng minh rằng nếu  $A + B$  khả nghịch thì  $A^{-1} + B^{-1}$  cũng khả nghịch.

**Câu 6 (1 điểm).** Cho ma trận  $A$  có  $n$  giá trị riêng dương phân biệt  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Chứng minh rằng

$$\det(A + A^{-1}) \geq 2^n.$$

-----Hết-----

**Chú ý:** Thí sinh không được dùng tài liệu.