KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN LẦN THỨ 23

HUẾ, 13-19/4/2015

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ ĐẠI HỌC HUẾ

HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ
ĐẠI HỌC HUẾ

KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN
LẦN THỨ 23

BIÊN TẬP

Đoàn Trung Cường
Hội Toán học Việt Nam & Viện Toán học
Đỗ Văn Kiên
Đại học Sư phạm Hà Nội 2
Phạm Thanh Tâm
Đại học Sư phạm Hà Nội 2
Nguyễn Văn Tuyên
Đại học Sư phạm Hà Nội 2

HUẾ, 13-19/4/2015

Giới thiệu

Tập kỷ yếu của Kỳ thi Olympic Toán Sinh viên lần thứ 23 tập hợp một số bài cùng với các đáp án do các trường và học viện tham gia kỳ thi đề xuất. Do giới hạn về thời gian nên ở đây chúng tôi chỉ tập hợp bài tập từ những đề được soạn bằng LATEX, những đề thi đề xuất ở dạng file *.doc hoặc *.pdf mà không có file LATEX đi kèm đều không xuất hiện trong tập kỳ yếu này. Chúng tôi cũng giữ nguyên cách trình bày đề và đáp án như đề xuất, chỉ sửa lại một số lỗi nhỏ mà chúng tôi phát hiện ra trong quá trình biên tập.

Nhóm biên tập

Mục lục

Phần I

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN LẦN THỨ 23

THÔNG TIN VỀ KỲ THI

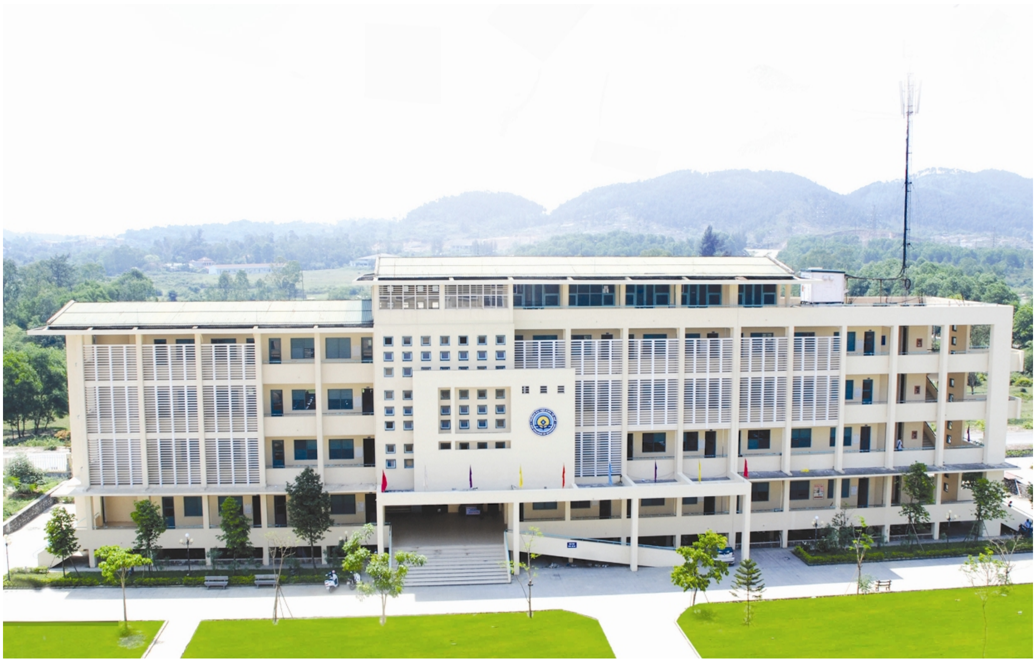
1 Thông tin chung

Kỳ thi Olympic Toán dành cho sinh viên lần thứ 23 được tổ chức từ 13-19/4/2015 tại Trường đại học Kinh tế - Đại học Huế. Năm nay có một thay đổi so với các kỳ thi trước là các đội tuyển được chia thành hai bảng A và B.

Đã có 88 đoàn từ các trường đại học, cao đẳng, học viện trong cả nước tham dự kỳ thi, có 665 sinh viên dự thi các môn Đại số và Giải tích.

Cơ quan tổ chức

- Bộ Giáo dục và Đào tạo
- Liên hiệp các Hội Khoa học và Kỹ thuật Việt Nam
- Trung ương Hội Sinh viên Việt Nam
- Hội Toán học Việt Nam
- Trường đại học Kinh tế - Đại học Huế



Trường đại học Kinh tế - Đại học Huế. *Nguồn: Đại học Kinh tế - Đại học Huế*

Ban tổ chức

Trưởng ban: GS. TSKH. Phùng Hồ Hải (Hội Toán học), PGS. TS. Trần Văn Hòa (Trường đại học Kinh tế - Đại học Huế).

Phó trưởng ban: GS. TSKH. Phạm Thế Long (Hội Toán học), PGS. TS. Nguyễn Tài Phúc (Trường đại học Kinh tế - Đại học Huế), GS. TS. Lê Văn Thuyết (Hội Toán học và Đại học Huế).

Ủy viên: TS. Đoàn Trung Cường (Hội Toán học), TS. Lê Cường (Trường đại học Bách khoa Hà Nội), ThS. Ngô Sỹ Hùng (Trường đại học Kinh tế - Đại học Huế).

2 Kết quả

Với kết quả thi của thí sinh, Hội đồng thi đã thống nhất danh sách sinh viên được trao giải. Số lượng giải được trao cụ thể như sau:

BẢNG A

Môn Đại số

- Giải nhất: 21 giải.
- Giải nhì: 32 giải.
- Giải ba: 46 giải.
- Khuyến khích: 10 giải.

Môn Giải tích

- Giải nhất: 16 giải.
- Giải nhì: 30 giải.
- Giải ba: 57 giải.
- Khuyến khích: 13 giải.

BẢNG B

Môn Đại số

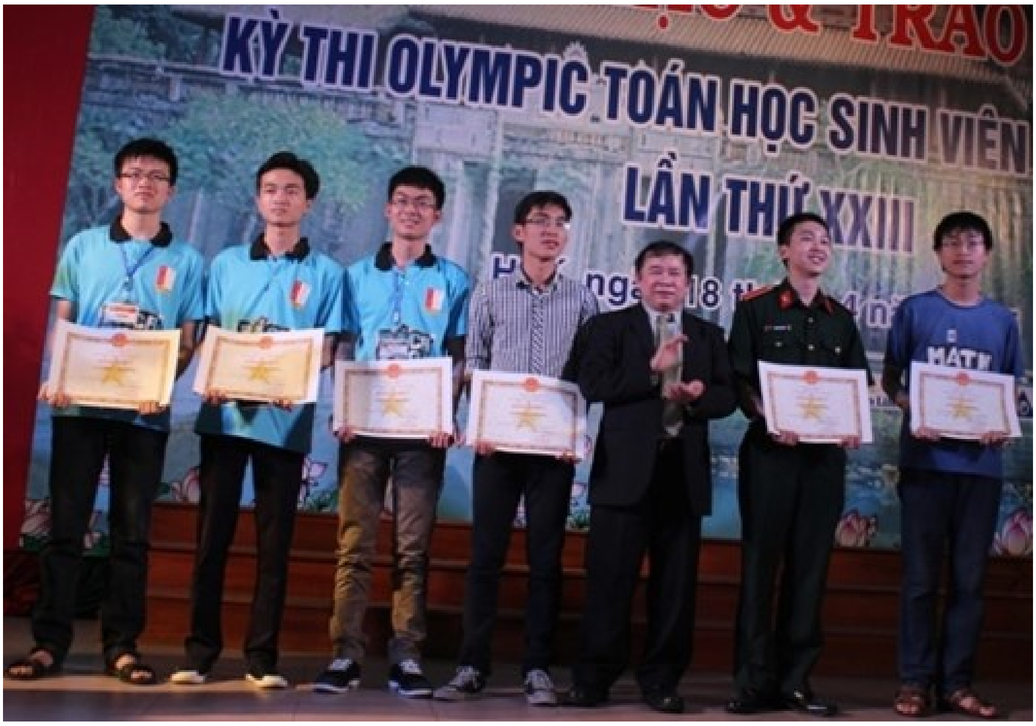
- Giải nhất: 11 giải.
- Giải nhì: 16 giải.
- Giải ba: 32 giải.
- Khuyến khích: 34 giải.

Môn Giải tích

- Giải nhất: 8 giải.
- Giải nhì: 17 giải.
- Giải ba: 30 giải.
- Khuyến khích: 15 giải.

Giải đặc biệt

Ban tổ chức kỳ thi đã quyết định trao 6 giải đặc biệt cho các sinh viên hoặc đạt điểm cao nhất của một môn hoặc đạt hai giải nhất của cả hai môn.



Thứ trưởng Bộ GD&ĐT Bùi Văn Ga và các sinh viên đoạt giải đặc biệt.
Nguồn: Đại học Kinh tế - Đại học Huế

Phó chủ tịch UBND tỉnh Thừa Thiên Huế Nguyễn Dung và các sinh viên đoạt giải nhất.
Nguồn: Đại học Kinh tế - Đại học Huế

OLYMPIC TOÁN DÀNH CHO SINH VIÊN
Khơi dậy tình yêu Toán [1]

Phùng Hồ Hải [2]

Olympic toán học sinh viên là một hoạt động thường niên của Hội Toán học Việt Nam. Kỳ thi nhận được sự hưởng ứng của rất nhiều trường đại học, cao đẳng cũng như các học viện trong toàn quốc. Tại kỳ thi lần thứ XXIII tổ chức tại Huế, tháng Tư năm 2015, đã có 88 trường gửi đoàn tham gia với 665 sinh viên.

Olympic toán học sinh viên được tổ chức theo mô hình của Olympic toán học quốc tế dành cho học sinh trung học (IMO). Việc tổ chức được phối hợp giữa một trường đại học và Hội Toán học Việt Nam. Thông thường, Olympic được tổ chức tại miền Trung, từ Quảng Bình tới Phú Yên. Có nhiều lý do cho quyết định này: giảm chi phí đi lại cho các đơn vị tham gia; mục tiêu động viên phong trào học tập trong sinh viên miền Trung; khung cảnh hữu tình của các thành phố miền Trung; và hơn hết là sự mến khách của con người miền Trung nói chung và các thày cô giáo trong các trường đại học ở đó nói riêng. Mỗi trường đại học, cao đẳng hoặc học viện cử một đoàn tham dự bao gồm trưởng phó đoàn và không quá 10 sinh viên, dự thi một trong hai (hoặc cả hai) môn Đại số và Giải tích. Đề thi do Ban tổ chức lựa chọn dựa trên cơ sở đề xuất từ các đoàn cũng như từ các chuyên gia do Ban tổ chức mời. Kỳ thi được tổ chức trong hai buổi. Ban chấm thi bao gồm các thày cô giáo dẫn đoàn. Không quá một nửa số thí sinh được trao giải, tỷ lệ giải nhất-nhì-ba là 1-2-3.

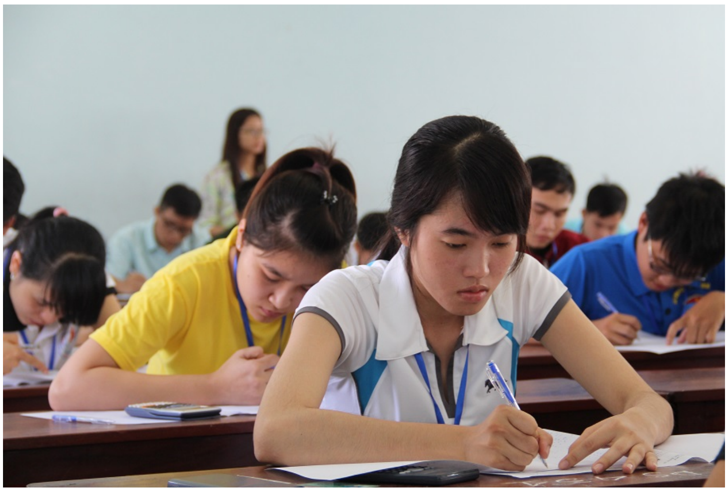
Tuy nhiên kỳ thi có một nét khác biệt cơ bản so với các kỳ thi học sinh giỏi toán khác. Đó là những học sinh ở đây phần lớn không phải là học sinh giỏi toán mà là những học sinh yêu toán. Chỉ có khoảng 1/3 số trường tham dự Olympic có khoa toán tại trường mình, tỷ lệ sinh viên dự thi là sinh viên chuyên ngành toán còn thấp hơn. Và điều đặc biệt, không chỉ những sinh viên theo ngành toán mới là những người đạt giải cao nhất tại kỳ thi. Năm 2015 trong số 6 sinh viên đạt giải đặc biệt có 2 sinh viên không học theo chuyên ngành toán hoặc toán-tin, năm 2014 tỷ lệ này là 3/11.

Mục tiêu của kỳ thi là động viên phong trào học toán trong các trường đại học và cao đẳng. Olympic không chỉ là cuộc thi tìm ra người giỏi nhất, mà quan trọng hơn là nơi tạo ra cơ hội cho mỗi người dự thi được thực hiện khát

1. Bài viết đăng trên Tạp chí Tia sáng (6/2015) và Bản tin Thông tin Toán học (6/2015)

2. Phó chủ tịch kiêm Tổng thư ký Hội Toán học Việt Nam, Trưởng ban tổ chức Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên Toàn quốc lần thứ 23 - Huế, 4/2015

vọng "nhanh hơn, cao hơn, xa hơn", so tài với các bạn để trước hết vượt lên chính mình. Các bạn sinh viên tham gia kỳ thi vì niềm say mê với môn toán. Mong muốn của những người tổ chức là làm sao các bạn sinh viên có thể chuyển niềm say mê đó thành những kiến thức. Những kiến thức toán học, phương pháp tư duy toán học chắc chắn sẽ là những hành trang có ích đối với sinh viên khi ra trường.



Sinh viên đang làm bài thi. *Nguồn: Internet*

Kỳ thi còn là cơ hội để các sinh viên trong toàn quốc gặp gỡ, giao lưu, chia sẻ kinh nghiệm. Cũng là cơ hội để họ tìm hiểu thêm về một miền đất mới. Sau hai buổi thi căng thẳng là nhiều hoạt động chung, tham quan, du lịch. Đối với đa số sinh viên, miền Trung luôn là mảnh đất mới lạ, có nhiều điều để khám phá. Vì thế, được tham dự Olympic toán học sinh viên luôn là mong muốn của nhiều sinh viên. Tại kỳ thi vừa qua ở Huế, một sinh viên trường Đại học Kinh tế, Đại học Huế, khoe với tôi "em tham dự lần này là lần thứ tư, và cũng là lần cuối, hè này em tốt nghiệp rồi".

Tuy vậy, để kỳ thi có thể tồn tại và phát triển cho tới ngày hôm nay cũng có nhiều khó khăn phải vượt qua. Đóng góp to lớn nhất tới sự thành công của kỳ thi là của các thày cô giáo từ các trường. Nhiều thày cô giáo đã tham dự các kỳ thi từ lần đầu tiên cho tới nay. Họ thực sự là hạt nhân của phong trào học toán tại trường mình và có đóng góp mang tính quyết định cho sự tồn tại của Olympic toán học sinh viên toàn quốc.

Nhiều khi thuyết phục được ban giám hiệu nhà trường gửi đoàn dự thi không phải là chuyện dễ dàng. Có những trường, khi một thày hay cô giáo nghỉ hưu, nhà trường không cử đoàn tham dự Olympic toán học sinh viên nữa. Nhiều thày cô giáo chia sẻ với chúng tôi "thi một hai năm mà không có giải nhà trường không cho đi nữa". Tâm lý chạy theo thành tích vẫn còn rất phổ biến trong đội ngũ quản lý giáo dục. Họ chưa hiểu, và chưa muốn hiểu rằng chất lượng đầu ra của sinh viên trường mình mới là giá trị có ý nghĩa nhất cho

nhà trường, mang lại "thương hiệu" cho nhà trường. Ý nghĩa của việc cử đoàn tham dự Olympic trước tiên là để động viên các sinh viên tại trường mình tìm hiểu sâu hơn về toán học, qua đó nâng cao trình độ của các em.
Nhìn từ góc độ chuyên môn, Ban tổ chức Olympic hiểu rằng các khâu ra đề và chấm thi đóng vai trò hết sức quan trọng. Chỉ có việc đảm bảo sự minh bạch, công bằng của kỳ thi mới mang lại uy tín cho kỳ thi, cho mỗi giải thưởng được trao tại kỳ thi. Tuy nhiên quan trọng hơn hết là nội dung đề thi. Bởi thi thế nào thì học thế ấy. Làm sao để việc học tập chuẩn bị cho kỳ thi là có ích nhất cho mỗi sinh viên là suy nghĩ, trăn trở lớn nhất của những người tổ chức. Đó cũng là những định hướng chính cho các kỳ thi Olympic toán học sinh viên toàn quốc trong những năm tới.

THÔNG BÁO
Kỳ thi Olympic Toán Sinh viên lần thứ 24
Quy Nhơn - 4/2016

1 Thông tin chung

Cơ quan tổ chức

- Bộ Giáo dục và Đào tạo
- Liên hiệp các hội khoa học và kĩ thuật Việt Nam
- Trung ương Hội sinh viên Việt Nam
- Hội Toán học Việt Nam
- Đại học Quy Nhơn

Thời gian và địa điểm

Từ 11-17/4/2016 tại Trường đại học Quy Nhơn, 170 An Dương Vương, thành phố Quy Nhơn, Bình Định

Ban tổ chức

Đồng trưởng ban: GS.TSKH. Phùng Hồ Hải (Hội Toán học Việt Nam), GS.TS. Nguyễn Hồng Anh (Đại học Quy Nhơn)

Phó ban: Đại diện Bộ Giáo Dục & Đào Tạo, Đại diện TW Hội Sinh viên Việt Nam, GS.TSKH. Phạm Thế Long (Hội Toán học Việt Nam), PGS.TS. Đinh Thanh Đức (Đại học Quy Nhơn).

Ủy viên: TS. Nguyễn Thái Hòa (Đại học Quy Nhơn), TS. Ngô Lâm Xuân Châu (Đại học Quy Nhơn), TS. Mai Thành Tấn (Đại học Quy Nhơn), TS. Đoàn Trung Cường (Viện Toán học), TS. Lê Cường (Đại học Bách khoa Hà Nội), TS. Nguyễn Chu Gia Vượng (Viện Toán học), TS. Nguyễn Duy Thái Sơn (Đại học Sư phạm Đà Nẵng), TS. Ngô Quốc Anh (Đại học KHTN - ĐHQG Hà Nội).

Đăng ký

Các đoàn đăng ký tham dự trực tuyến tại trang web của Hội Toán học Việt Nam theo địa chỉ http://vms.org.vn (chọn: Hoạt động/Olympic Toán Sinh viên/Đăng ký tham dự).

Thời gian đăng ký: **15/1-15/3/2016**.

Chương trình

- Ngày 11/4/2015:
  8h00: Các đoàn đăng ký.
  14h00: Hội thảo về hoạt động hướng nghiệp đối với học sinh giỏi toán
- Ngày 12-15/4/2016: Tổ chức thi, chấm thi và xét giải
- Ngày 16/4/2016: Tổng kết và trao giải
- Ngày 17/4/2016: Hội thảo về công tác chuẩn bị kỳ thi Olympic sinh viên năm 2017.

Liên hệ

Những vấn đề cần hỗ trợ từ Đại học Quy Nhơn (liên hệ chỗ ở, thông tin khách sạn/nhà khách, địa điểm thi, đường đi, ..):

TS. Mai Thành Tấn
Email: mthanhtan@gmail.com
Điện thoại: 01683677369

Những vấn đề về tổ chức chung

GS. TSKH. Phùng Hồ Hải
Email: olymtoansv@gmail.com
Điện thoại: 0904134384

Các thông tin về kỳ thi đều được cập nhật trên trang web của Hội Toán học Việt Nam tại địa chỉ httt://vms.org.vn

2 Đề cương môn Đại số và Giải tích

MÔN ĐẠI SỐ

Phần I: SỐ PHỨC VÀ ĐA THỨC

1. Số phức, các tính chất cơ bản. Mô tả hình học của số phức.
2. Đa thức một biến: các phép toán của đa thức, số học của đa thức (phân tích thành nhân tử, ước chung lớn nhất, nguyên tố cùng nhau).
3. Nghiệm của đa thức, định lý Bezout, định lý Viete, đa thức đối xứng*.
4. Bài toán xác định đa thức (nội suy, phương pháp hệ số bất định,...)

Phần II: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

1. Hệ phương trình tuyến tính.
   a. Hệ phương trình tuyến tính. Ma trận.

   b. Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gauss-Jordan.
   c. Nghiệm riêng và nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính. Hệ phương trình tuyến tính không suy biến.
   d. Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.
2. Ma trận và định thức
   a. Ma trận, các phép toán của ma trận và một số tính chất cơ bản.
   b. Hạng của ma trận, cách tính.
   c. Ứng dụng của ma trận vào việc nghiên cứu hệ phương trình tuyến tính. Định lý Kronecker-Capelli.
   d. Định thức: định nghĩa (quy nạp theo cấp và theo phép thế), khai triển Laplace, tính chất của định thức, các phương pháp tính định thức.
   e. Ma trận nghịch đảo, các phương pháp tìm ma trận nghịch đảo (phần bù đại số, biến đổi sơ cấp).
   f. Ứng dụng của định thức vào việc giải hệ phương trình tuyến tính: Định lý Cramer.
   g. Ma trận đồng dạng và tính chéo hóa được của ma trận*.
   h. Một số dạng ma trận đặc biệt: ma trận Vandermonde, ma trận đối xứng, ma trận phản đối xứng, ma trận Hermite, ma trận trực giao*.
3. Không gian tuyến tính và ánh xạ tuyến tính.
   a. Định nghĩa, không gian con, các ví dụ liên quan tới Đại số, Giải tích.
   b. Cơ sở và số chiều.
   c. Ánh xạ tuyến tính, ma trận biểu diễn.
   d. Toán tử tuyến tính, trị riêng, véc tơ riêng.
   e. Đa thức đặc trưng, đa thức tối thiểu, Định lý Cayley-Hamilton*.

Phần III: TỔ HỢP

1. Chỉnh hợp, tổ hợp, tam giác Pascal, hệ số nhị thức.
2. Các quy tắc đếm cơ bản: quy tắc cộng, quy tắc nhân, nguyên lý bù trừ.
3. Phân hoạch của số tự nhiên.
4. Nguyên lý quy nạp, nguyên lý Dirichlet, nguyên lý cực hạn.
5. Chuỗi lũy thừa hình thức. Hàm sinh. Ứng dụng của hàm sinh*.

TÀI LIỆU

1. Lê Tuấn Hoa: Đại số tuyến tính qua các ví dụ và bài tập, NXB ĐHQG Hà Nội, 2006.

2. Nguyễn Hữu Việt Hưng: Đại số tuyến tính, NXB ĐHQG Hà Nội, 2000.
3. V. Prasolov: Polynomials, Springer, 2004.
4. K. H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications, Bản dịch tiếng Việt: Toán học rời rạc và Ứng dụng trong tin học, NXB Giáo dục, Hà Nội, 2007.
5. Ngô Việt Trung: Đại số tuyến tính, NXB ĐHQG Hà Nội, 2002.

Ghi chú: *Các nội dung có dấu * dành cho sinh viên dự thi bảng A.*

MÔN GIẢI TÍCH

Phần I: DÃY SỐ VÀ HÀM SỐ

1. Dãy hội tụ, dãy đơn điệu, dãy bị chặn, dãy dần ra vô cực.
2. Các tính chất và phép toán về dãy hội tụ.
3. Tìm giới hạn của dãy số.
4. Hàm đơn điệu, hàm bị chặn, hàm tuần hoàn, hàm chẵn và hàm lẻ, hàm ngược.
5. Giới hạn của hàm số.
6. Tính liên tục, các tính chất của hàm liên tục.
7. Hàm lồi, bất đẳng thức Jensen*.

Phần II: GIẢI TÍCH TRÊN HÀM MỘT BIẾN

1. Phép tính vi phân hàm một biến.
   a. Định nghĩa và các phép toán về đạo hàm.
   b. Các định lý của Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy, L'Hôpital.
   c. Công thức Taylor, công thức Maclaurin.
   d. Cực trị, giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm số.
   e. Hàm lồi khả vi*.
2. Phép tính tích phân hàm một biến.
   a. Nguyên hàm và tích phân bất định.
   b. Các phương pháp tính tích phân bất định.
   c. Tích phân các hàm hữu tỷ, hàm vô tỷ, hàm lượng giác.
   d. Định nghĩa và các phương pháp tính tích phân xác định, tính khả tích.

e. Định lý cơ bản của phép tính vi tích phân (đạo hàm của tích phân xác định theo cận của tích phân, công thức Newton-Leibniz).

f. Tích phân phụ thuộc tham số.

g. Các định lý về trung bình tích phân.

h. Bất đẳng thức tích phân.

i. Sự hội tụ và phân kỳ của tích phân suy rộng, các tiêu chuẩn so sánh đối với tích phân của hàm dương*.

3. Chuỗi số, dãy hàm và chuỗi hàm.

a. Chuỗi số, tiêu chuẩn Cauchy về điều kiện cần và đủ cho sự hội tụ của chuỗi*.

b. Các tiêu chuẩn so sánh, tiêu chuẩn tích phân (Cauchy), tiêu chuẩn đối với chuỗi đan dấu (Leibniz), hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện, tiêu chuẩn căn thức (Cauchy), tiêu chuẩn tỉ số (D'Alembert)*.

c. Các tiêu chuẩn hội tụ Abel, Dirichlet*.

d. Chuỗi lũy thừa*.

e. Tiêu chuẩn hội tụ đều cho dãy hàm và chuỗi hàm một biến, các tính chất cơ bản của dãy hàm và chuỗi hàm hội tụ đều*.

Phần III: KHÔNG GIAN METRIC*

1. Không gian metric.
2. Tôpô trên không gian metric.
3. Ánh xạ liên tục, đẳng cự, đồng phôi.
4. Các tính chất đầy đủ, compact, liên thông.

TÀI LIỆU

1. J. Dieudonné, *Cơ sở giải tích hiện đại* (Phan Đức Chính dịch, tập 1), NXB ĐH&THCN, 1978.
2. G.M. Fichtengon, *Cơ sở giải tích toán học*, NXB ĐH&THCN, 1986.
3. W.A.J. Kosmala, *A friendly introduction to analysis*, Pearson Prentice Hall, 2004.
4. Nguyễn Xuân Liêm, *Giải tích toán học*, NXB Giáo dục, 1997.
5. Nguyễn Duy Tiến, *Bài giảng giải tích*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2005.

Ghi chú: *Các nội dung có dấu * dành cho sinh viên dự thi bảng A.*

Phần II

ĐỀ THI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

1 ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút.

- Sinh viên dự thi Bảng B làm các bài 1, 2, 3, 4, 5.
- Sinh viên dự thi Bảng A làm các bài 3, 4, 5, 6, 7.

Bài 1. Cho α, β, γ là các nghiệm của phương trình $x^3 - 2015x + 4 = 0$. Hãy tìm hạng ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

Bài 2. Cho V là một không gian véc tơ thực có số chiều bằng 2015 và $W \subset V$ là một không gian con có số chiều bằng 2014. Chứng minh rằng tồn tại một cơ sở của V mà không có véc tơ nào nằm trong W.

Bài 3. Ký hiệu $\mathbb{R}[X]$ là không gian các đa thức một biến với hệ số thực, $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ là toán tử đạo hàm:

$$D : f(X) \mapsto f'(X).$$

Chứng minh rằng không tồn tại một ánh xạ $\mathbb{R}$-tuyến tính $d : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ sao cho

$$d^2 = D.$$

Bài 4. Giả sử mỗi điểm trong mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu, xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng luôn tồn tại một hình chữ nhật có các đỉnh cùng màu.

Bài 5. Với mỗi số tự nhiên n ký hiệu

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}; \quad \binom{x}{0} = 1.$$

a) Chứng minh rằng với mọi đa thức $P(x)$ bậc n luôn tồn tại các hệ số $c_0, \ldots, c_n$ sao cho

$$P(x) = c_0\binom{x}{n} + c_1\binom{x}{n-1} + \ldots + c_{n-1}\binom{x}{1} + c_n.$$

b) Cho $(a_n), n = 0, 1, \ldots$ là một dãy số thực. Giả thiết rằng với mọi $n \geq 0$, ta có

$$\sum_{i=0}^{2015} (-1)^i \binom{2015}{i} a_{n+i} = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại đa thức $P(x)$ thỏa mãn $P(n) = a_n$ với mọi $n \geq 0$.

Bài 6. Bạch Tuyết chia 3 lít sữa vào cốc của bảy chú lùn. Trước bữa ăn, các chú lùn chơi một trò chơi như sau: Chú lùn thứ nhất chia đều tất cả sữa của mình vào cốc của sáu chú lùn còn lại (cốc của chú không còn sữa nữa). Tiếp theo, chú lùn thứ hai cũng chia đều tất cả sữa đang có trong cốc của mình vào cốc của sáu chú còn lại. Các chú lùn khác cũng lần lượt làm như vậy. Sau khi chú lùn thứ bảy chia đều tất cả sữa của mình vào cốc của sáu chú lùn kia, mọi người nhận thấy trong cốc của mỗi chú lượng sữa bằng đúng với lượng sữa ban đầu Bạch Tuyết chia cho. Hỏi ban đầu mỗi chú lùn được chia cho bao nhiêu lít sữa?

Bài 7. Khoá học về Xây dựng Câu lạc bộ có tất cả n sinh viên. Thầy giáo yêu cầu các sinh viên của lớp thành lập một số các câu lạc bộ theo nguyên tắc sau:
– Các câu lạc bộ chỉ gồm các thành viên là các bạn sinh viên của khoá học;
– Mỗi câu lạc bộ có một số lẻ thành viên;
– Hai câu lạc bộ khác nhau luôn có một số chẵn các thành viên chung.
Ta đánh số các bạn học sinh từ 1 đến n và gọi $C_1, \ldots, C_m$ là các câu lạc bộ được tạo ra. Kí hiệu $A \in M_{m,n}$ là ma trận cho bởi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu sinh viên } j \text{ thuộc câu lạc bộ } C_i \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

1. Chứng minh rằng ma trận AA^t có định thức là một số nguyên lẻ (A^t kí hiệu ma trận chuyển vị của A).
2. Chứng minh rằng $m \leq n$, nghĩa là không thể xây dựng được quá n câu lạc bộ thỏa mãn điều kiện đề bài.

2 GIẢI TÍCH

Thời gian làm bài: 180 phút.

2.1 Bảng A

Bài 1. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi công thức truy hồi:

$$2a_{n+1} - 2a_n + a_n^2 = 0, \ n = 0, 1, 2, ...$$

1. Chứng minh rằng (a_n) là một dãy đơn điệu.
2. Biết $a_0 = 1$, hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
3. Tìm điều kiện của a_0 để dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn. Trong trường hợp này, hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$.

Bài 2. Cho α, β là hai số thực bất kỳ mà $|\alpha| \neq |\beta|$. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại 0 và thỏa mãn phương trình

$$f(\alpha x) = f(\beta x) + x^2$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có tồn tại hàm f thỏa mãn các điều kiện nói trên không nếu $|\alpha| = |\beta|$?

Bài 3. Cho f là một hàm nhận giá trị thực, xác định và liên tục trên [0,1]. Chứng minh rằng tồn tại các số $x_1, x_2, x_3 \in (0, 1)$ sao cho

$$\frac{f(x_1)}{4x_1} + \frac{f(x_2)}{6x_2^2} = f(x_3).$$

Bài 4. Cho $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ là một hàm liên tục. Biết rằng tồn tại giới hạn

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \int_0^x (f(t))^2 \, dt = a \in (0, \infty),$$

hãy tìm $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x} f(x)$.

Bài 5. Cho (a_n) là một dãy đơn điệu giảm, không âm, sao cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ. Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ cũng hội tụ.

2.2 Bảng B

Bài 1. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi công thức truy hồi:

$$2a_{n+1} - 2a_n + a_n^2 = 0,\ n = 0, 1, 2, ...$$

1. Chứng minh rằng (a_n) là một dãy đơn điệu.
2. Biết $a_0 = 1$, hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
3. Tìm điều kiện của a_0 để dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn. Trong trường hợp này, hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$.

Bài 2. Với mỗi số thực $\alpha \neq \pm 1$, tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại 0 sao cho

$$f(\alpha x) = f(x) + x^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Có tồn tại hàm f thỏa mãn các điều kiện nói trên không nếu $\alpha = \pm 1$?

Bài 3. Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi liên tục. Chứng minh rằng tồn tại các số $x_1, x_2, x_3 \in (0, 1)$ sao cho

$$\frac{f'(x_1)}{4x_1} + \frac{f'(x_2)}{6x_2^2} = f'(x_3).$$

Bài 4. Cho $f : [0, 1] \to (-\infty, 1]$ là một hàm liên tục, thỏa mãn điều kiện $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 (f(x))^3\, dx \leq \frac{1}{4}.$$

Bài 5. Cho $f : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ là một hàm liên tục. Đặt

$$g(x) = \sqrt[3]{f(x)} \int_0^x \frac{1}{f(t)} dt \quad \forall\, x \geq 0.$$

Chứng minh rằng hàm g không thể bị chặn trên $[0, +\infty)$.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: ĐẠI SỐ

1 MA TRẬN

Bài 1.1 (HV An ninh Nhân dân). Cho ma trận thực A vuông cấp n thoả mãn $A^{p+1} = A$ với $p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$. Chứng minh rằng:

1. $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I_n - A^p) = n$.
2. $\operatorname{rank}(I_n - A) = \operatorname{rank}(I_n - A^2) = \dots = \operatorname{rank}(I_n - A^{p-1})$ nếu p là số nguyên tố.

Bài 1.2 (ĐH Đồng Tháp). Cho A là ma trận vuông. Tổng các phân tử trên đường chéo chính của A được gọi là vết của ma trận A, kí hiệu $tr(A)$. Chứng minh rằng nếu A là ma trận lũy linh thì vết của $\operatorname{trace}(A) = 0$.

Bài 1.3 (ĐH Đồng Tháp). Cho A là ma trận vuông. Tổng các phân tử trên đường chéo chính của A được gọi là vết của ma trận A, kí hiệu $\operatorname{trace}(A)$. Chứng minh rằng với mọi ma trận vuông A, B ta luôn có $\operatorname{trace}(AB) = \operatorname{trace}(BA)$. Ứng dụng tính $\operatorname{trace}(A^{2014})$ biết:

$$A = \begin{pmatrix} 3a & 0 & -a \\ 0 & 6a & 0 \\ -a & 0 & 3a \end{pmatrix}.$$

Bài 1.4 (ĐH Đồng Tháp). Trong không gian $M_2(\mathbb{R})$ các ma trận vuông cấp 2 hệ số thực. Chứng minh rằng với mọi $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ thì ma trận $(AB - BA)^2$ giao hoán với mọi ma trận trong $M_2(\mathbb{R})$.

Bài 1.5 (ĐH Hải Phòng). Cho A, B là các ma trận vuông cấp n, trong đó ma trận A khả nghịch và thỏa mãn các điều kiện

$$A^2 + B = BA \text{ và } B^{2016} = 0.$$

Chứng minh ma trận $A^{2015} + B^{2015}$ khả nghịch.

Bài 1.6 (ĐH Khoa học Huế). Cho A là một ma trận đối xứng thực vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu có số nguyên dương k sao cho $A^k = 0$ thì $A = 0$.

Bài 1.7 (ĐH Khoa học Huế). Tính A^n, với n là số nguyên dương và ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Bài 1.8 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần CAND). Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp. Từ $ABAB = 0$ liệu có suy ra được $BABA = 0$ hay không? Giải thích.

Bài 1.9 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần CAND). Cho biết A, B là các ma trận vuông cấp 2 với phần tử nguyên sao cho $A, A+B, A+2B, A+3B, A+4B$ khả nghịch và các ma trận khả nghịch này cũng có tất cả các phần tử đều nguyên. Chứng minh rằng $A+5B$ cũng khả nghịch và ma trận nghịch đảo có tất cả các phần tử nguyên.

Bài 1.10 (HV Kỹ thuật Quân sự). Giả sử A, B, C là các ma trận đối xứng cấp n trên $\mathbb{R}$, trong đó $A \geq O, B \leq C$. Chứng minh rằng $\operatorname{trace}(AB) \leq \operatorname{trace}(AC)$.

Bài 1.11 (ĐH Phạm Văn Đồng). Cho ma trận vuông cấp 10

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Tính A^{2015}.

Bài 1.12 (ĐH Quảng Bình). Cho A là ma trận vuông cấp n và lũy linh. Chứng minh rằng với mọi ma trận B sao cho $AB = A$ thì $\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}(A-B)$.

Bài 1.13 (ĐH Quảng Bình). Cho A là ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

đặt $A^{2015} = (b_{ij})$. Chứng minh rằng $b_{21} < 10.2^{2015} - 14.2015 - 6.2015.2014$.

Bài 1.14 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Cho hai ma trận $P, Q \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{R})$ sao cho $P^2 + 27P + 182I_n = 0, Q^2 + 29Q + 210I_n = 0$ và ma trận $P + Q + 28I_n$ là ma trận khả nghịch. Khi đó:

$$\operatorname{rank}(P + 14I_n) = \operatorname{rank}(Q + 15I_n).$$

Bài 1.15 (ĐH Sư phạm Huế). Cho các ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a+1 & b & -c \\ 2b & -a & b-2 \\ c & 2c-1 & 2a \end{pmatrix}.$$

Tìm điều kiện của a, b, c để tồn tại ma trận X thỏa mãn $A.X = B$.

Bài 1.16 (ĐH Sư phạm Huế)**.** Cho $A, B \in Mat_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A^2B + BA^2 = 2ABA$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương m sao cho $(AB - BA)^m = 0$.

Bài 1.17 (ĐH Tân Trào)**.** Cho A là ma trận vuông cấp n trên trường số thực. Chứng tỏ A là khả nghịch và tìm A^{-1} nếu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bài 1.18 (ĐH Tân Trào)**.** Cho A, B là các ma trận vuông cấp n trên trường $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng: nếu $BA - AB$ là ma trận khả nghịch thì n chia hết cho 3.

Bài 1.19 (ĐH Tây Bắc)**.** Cho α, β, γ là các nghiệm của phương trình $x^3 - 2015x + 4 = 0$. Hãy tìm hạng của ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

Bài 1.20 (ĐH Tây Bắc)**.** Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Tìm P^{-1} và tính $P^{-1}AP$.
2. Tính A^n (với n là số nguyên dương)

Bài 1.21 (ĐH Tây Bắc)**.** Cho $A, B \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$ thỏa mãn $\mathrm{Trace}(AB) \neq 0$ và $(AB)^2 = \alpha^2 I$ trong đó α là số thực khác 0 cho trước, $I \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$ là ma trận đơn vị. Chứng minh rằng $AB = BA$.

Bài 1.22 (ĐH Tây Bắc)**.** Cho $n > 0$. Chứng minh rằng nếu $A, B \in Mat(n, \mathbb{R})$ thỏa mãn $AB - BA = A$ thì $A^kB - BA^k = kA^k; \forall k \in \mathbb{N}^*$ và A là lũy linh.

Bài 1.23 (ĐH Tây Bắc)**.** Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng

(a) Luôn tồn tại $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ thỏa mãn đẳng thức:

$$A^3 + 3A = I \text{ (trong đó} I \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \text{ là ma trận đơn vị).}$$

(b) Nếu $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ thỏa mãn đẳng thức $A^3 + 3A = I$ thì $\det A > 0$.

2 ĐỊNH THỨC

Bài 2.1 (ĐH An Giang)**.** Tính định thức cấp n của ma trận sau trên $\mathbb{R}$:

$$A=\begin{bmatrix} -(a+1) & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & -(a+2) & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & -(a+3) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(a+n-1) & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & -(a+n) \end{bmatrix}.$$

Bài 2.2 (HV An ninh Nhân dân)**.** Cho ma trận thực A vuông cấp n với $\mathrm{rank}(A)=1$. Chứng tỏ rằng $\det(I_n+A)=1+\mathrm{trace}(A)$.

Bài 2.3 (HV An ninh Nhân dân)**.** Cho ma trận thực A vuông cấp n phản đối xứng (tức là $A^t=-A$). Chứng minh rằng $\det(I+\alpha.A^2)\geqslant 0$ với mọi số thực α.

Bài 2.4 (BTC)**.** Cho số tự nhiên n và các số thực $a_1,\dots,a_n$. Tính định thức

$$\begin{vmatrix} \binom{a_1}{0} & \binom{a_1+1}{0} & \cdots & \binom{a_1+n-1}{0} \\ \binom{a_2}{1} & \binom{a_2+1}{1} & \cdots & \binom{a_2+n-1}{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{a_n}{n-1} & \binom{a_n+1}{n-1} & \cdots & \binom{a_n+n-1}{n-1} \end{vmatrix}$$

trong đó với mỗi số thực a và số tự nhiên k, ta đặt

$$\binom{a}{k}:=\frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!},\quad \binom{a}{0}:=1.$$

Bài 2.5 (BTC)**.** Cho các ma trận thực vuông A,B có cỡ $n\times n$. Chứng minh rằng

(a) $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix}=|A+iB|.|A-iB|$. Ở đây i là số phức thỏa mãn $i^2=-1$.

(b) Định thức ma trận khối trên là một số thực không âm.

Bài 2.6 (BTC)**.** Cho số nguyên dương n. Kí hiệu $S_1,\dots,S_{2^n-1}$ các tập con khác rỗng của $\{1,2,\dots,n\}$ (được đánh chỉ số theo một thứ tự nào đó). Kí hiệu A ma trận cấp 2^n-1 với các hệ số được cho bởi $a_{i,j}=1$ nếu $S_i\cap S_j\neq\emptyset$ và bằng 0 nếu $S_i\cap S_j=\emptyset$. Tính định thức $\det A$.

Bài 2.7 (ĐH Đồng Tháp). Không tính ra kết quả định thức hãy chứng minh rằng:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Bài 2.8 (ĐH Hải Phòng). Cho A, B, C, D là các ma trận vuông thực cấp n, trong đó $AC = CA$. Chứng minh rằng

$$\det M = \det(AD - CB),$$

trong đó $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Bài 2.9 (ĐH Khoa học Huế). Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp n xác định bởi

$$a_{ij} = \begin{cases} 5 & \text{nếu } i = j, \\ 2 & \text{nếu } i = j+1, \\ 3 & \text{nếu } i = j-1, \\ 0 & \text{nếu } i \notin \{j, j+1, j-1\}. \end{cases}$$

1. Tìm định thức của ma trận A.

2. Giải hệ phương trình $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 10 \\ \vdots \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Bài 2.10 (ĐH Phạm Văn Đồng). Tính định thức

$$D_{2015}(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2014 & x & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2013 & x & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2012 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$$

Bài 2.11 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Cho A là ma trận vuông cấp n trên trường số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$\det(AA^T + 16I_n) \geq 2^{4n}.$$

Bài 2.12 (ĐH Tân Trào)**.** Cho $a_{ij} = (x_i + y_j)^n$, $0 \leq i, j \leq n$. Chứng minh rằng

$$\det(a_{ij}) = (-1)^n \binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}\prod_{j<i}(x_i - x_j)(y_i - y_j).$$

Bài 2.13 (ĐH Tây Bắc)**.** Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c khác 0 ta luôn có $\det A = \det B$.

(b) Nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác thì $\det A < 0$.

3 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài 3.1 (ĐH Đồng Tháp)**.** Cho $a_{ij}, 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq n$ là các số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại các số hữu tỉ $w_1, w_2, ..., w_{n+1}$ thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1 & = & w_1 + w_2 + ... + w_n \\ w_1 & = & a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + ... + a_{1n}w_n \\ & ... & \\ w_t & = & a_{t1}w_1 + a_{t2}w_2 + ... + a_{tn}w_n \end{cases}$$

Bài 3.2 (ĐH Khoa học Huế)**.** Giải hệ phương trình sau trên $\mathbb{C}$

$$\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ xyz & = 1 \\ |x| = |y| = |z| & = 1. \end{cases}$$

Bài 3.3 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 & + & 2^2x_2 & + & +... + 2014^{2014}x_{2014} & = & \dfrac{1}{14}x_1 \\ 2x_1 & + & 3^2x_2 & + & +... + 2015^{2014}x_{2014} & = & \dfrac{1}{14}x_2 \\ ... & & & & & & \\ 2014x_1 & + & 2015^2x_2 & + & +... + 4027^{2014}x_{2014} & = & \dfrac{1}{14}x_{2014} \end{cases}$$

Bài 3.4 (ĐH Sư phạm Huế). Chứng minh hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = a \\ -bx_1 + ax_2 + dx_3 - cx_4 = b \\ -cx_1 - dx_2 + ax_3 + bx_4 = c \\ -dx_1 + cx_2 - bx_3 + ax_4 = d \end{cases}$$

có nghiệm với mọi a, b, c, d.

Bài 3.5 (ĐH Tân Trào). Giải phương trình $X^2 = I_4$, trong đó I_4 là ma trận đơn vị cấp 4 và X là ma trận vuông, cấp 4 trên trường số phức $\mathbb{C}$,

$$X = \begin{pmatrix} a & b & b & c \\ b & a & c & b \\ b & c & a & b \\ c & b & b & a \end{pmatrix}, (a, b, c \in \mathbb{C}).$$

4 KHÔNG GIAN VÉC TƠ VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Bài 4.1 (ĐH An Giang). Ký hiệu $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, tập hợp tất cả các ánh xạ từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$, là một không gian vector thực đối với phép cộng và phép nhân vô hướng. Cho n là số nguyên dương và đặt E_n là tập hợp các ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ trong đó $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ với mọi i. Chứng minh E_n là không gian con của $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ và $2n + 1$ ánh xạ $x \mapsto 1$, $x \mapsto \cos kx$, $x \mapsto \sin kx$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ lập thành một cơ sở của E_n.

Bài 4.2 (ĐH An Giang). Cho K là một trường và $K_{n+1}[x]$ là không gian vector của các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n trên K. Ánh xạ $\varphi : K_{n+1}[x] \to K_{n+1}[x]$ được cho bởi $\varphi(f(x)) = f(x + 1)$ với $f(x) \in K_{n+1}[x]$.

(a) Chứng minh φ là một toán tử tuyến tính.

(b) Tìm ma trận biểu diễn của φ theo cơ sở $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ của $K_{n+1}[x]$.

(c) Tìm đa thức đặc trưng và đa thức cực tiểu của φ.

Bài 4.3 (BTC). Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ánh xạ tuyến tính sao cho ma trận trong cơ sở chính tắc được cho bởi

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Xác định các không gian con của $\mathbb{R}^3$ ổn định dưới f (nghĩa là $f(W) \subseteq W$).

Bài 4.4 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần CAND). Cho v_0 là vector 0 của $\mathbb{R}^n$. Cho $v_i \in \mathbb{R}^n$ là các vector sao cho chuẩn Euclide $|v_i - v_j|$ là các số hữu tỉ với $0 \leq i, j \leq n$. Chứng minh rằng, các vector $v_1, v_2, \cdots, v_{n+1}$ phụ thuộc tuyến tính trên $\mathbb{Q}$.

Bài 4.5 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần CAND). Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận vuông cấp n trên trường số thực. Ta gọi số được xác định bởi công thức $\mathrm{trace}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ là vết của ma trận A. Trong không gian $M(n, \mathbb{R})$ các ma trận vuông cấp n, cho V là một không gian véc tơ con thỏa mãn điều kiện với mọi ma trận $X, Y \in V$, $\mathrm{trace}(XY) = 0$.
Hãy tìm giá trị lớn nhất của $\dim V$.

Bài 4.6 (ĐH Phạm Văn Đồng). Gọi $\mathbb{P}_n$ là không gian véc tơ các đa thức với hệ số thực có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n

$$\mathbb{P}_n := \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 0, 1, \ldots, n\}.$$

a. Chứng minh rằng $B_n = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ là một cơ sở trong $\mathbb{P}_n$.
b. Xét ánh xạ $f : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{n+1}$ xác định bởi

$$f(p)(x) := \int_0^x p(t)dt.$$

Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính f đối với cơ sở B_n trong $\mathbb{P}_n$ và cơ sở B_{n+1} trong $\mathbb{P}_{n+1}$.

Bài 4.7 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Cho $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ là ma trận lũy linh cấp k. Chứng minh rằng:
1) Hệ các ma trận $\{I_n, A, ..., A^{k-1}\}$ là độc lập tuyến tính.
2) $\mathrm{rank}(A + A^2 + ... + A^{2014}) = \mathrm{rank}(A + A^2 + ... + A^{2015})$.

Bài 4.8 (ĐH Tây Bắc). Cho V là không gian vectơ hữu hạn chiều trên trường số thực và $f : V \to V$ là ánh xạ tuyến tính thỏa mãn $f^3 = f$. Chứng minh rằng $V = \mathrm{Im}\, f \oplus \ker f$.

5 GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG

Bài 5.1 (ĐH An Giang). (a) Tìm các vector riêng và giá trị riêng của toán tử tuyến tính sau trên $\mathbb{R}^3$

$$\varphi(x, y, z) = (2x + y - z, -2x - y + 3z, z).$$

(b) Cho V là không gian vector hữu hạn chiều trên K và φ là một toán tử tuyến tính trên V sao cho $\varphi^2 = Id_V$. Chứng minh rằng tổng các giá trị riêng của φ là một số nguyên.

Bài 5.2 (BTC)**.** Cho ma trận thực vuông M cỡ $n \times n$. Giả sử có hai số thực $c \neq d$ sao cho $(M - I_n)(M - 2I_n) = 0$. Chứng minh rằng M chéo hóa được và tìm ma trận đường chéo đồng dạng với M.

Bài 5.3 (BTC)**.** Cho ma trận đối xứng thực $M = (a_{ij})_{n\times n}$ với các giá trị riêng của M là $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Với mỗi véc tơ $v = (x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, đặt

$$\rho_M(v) = \frac{v^T Av}{v^T v}.$$

(i) Chứng minh rằng $\lambda_1 \leq \rho_M(v) \leq \lambda_n$, với mọi véc tơ $v \neq 0$.

(ii) Xét ma trận vuông con $N = (a_{ij})_{i,j=1,2}$ cỡ 2×2 của M. Giả sử các giá trị riêng của N là $\mu_1 \leq \mu_2$. Chứng minh rằng

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \lambda_n.$$

Bài 5.4 (ĐH Phạm Văn Đồng)**.** Cho A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $A^4 + E = 0$ (trong đó E là ma trận đơn vị cấp n) thì A không có giá trị riêng là số thực.

Bài 5.5 (ĐH Sư phạm Huế)**.** Cho A là ma trận vuông cấp n hệ số thực như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Giả sử $b_i \neq 0$, với mọi i. Chứng minh rằng A có n giá trị riêng phân biệt.

6 ĐA THỨC

Bài 6.1 (ĐH An Giang)**.** (a) Cho đa thức có dạng $p(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$. Hãy xác định đa thức $p(x)$ biết rằng $p(x)$ chia hết cho đa thức $(x-2)(x+2)(x+3)$.

(b) Giả sử x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 6x + 1 = 0$. Chứng minh rằng với mọi số k, tổng $S = x_1^k + x_2^k$ là một số nguyên không chia hết cho 5.

Bài 6.2 (BTC, ĐH Sư phạm Huế)**.** Cho đa thức với hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn $P(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng có hai đa thức hệ số thực $H(x)$ và $K(x)$ thỏa mãn

$$P(x) = H(x)^2 + K(x)^2.$$

Bài 6.3 (BTC)**.** Cho $n+1$ số phức $z_0, z_1, \dots, z_n$ đôi một khác nhau với tính chất: với mọi đa thức $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ với bậc $\leq n-1$, giá trị của f tại z_0 bằng trung bình cộng của các giá trị của f tại các điểm $z_1, \dots, z_n$. Chứng minh rằng trong mặt phẳng phức, $z_1, \dots, z_n$ là các đỉnh của một đa giác đều với tâm z_0.

Bài 6.4 (ĐH Đồng Tháp)**.** Với mỗi số phức $z = a + ib$ trên trường số phức $\mathbb{C}$, liên hợp của z là số phức $\bar{z} = a - ib$. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là đa thức hệ số thực bậc lớn hơn 1 nhận z làm nghiệm thì nó cũng nhận $\bar{z}$ làm nghiệm.

Bài 6.5 (ĐH Hải Phòng)**.** Cho a, b, c là các số hữu tỉ, trong đó $c \neq 0$. Gọi x_1, x_2, x_3 là các nghiệm thực của đa thức

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Chứng minh rằng nếu $\dfrac{x_1}{x_2}$ là số hữu tỉ khác -1 thì x_1, x_2, x_3 cũng là các số hữu tỉ.

Bài 6.6 (ĐH Khoa học Huế)**.** Cho f và g là hai đa thức hệ số hữu tỷ bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ và có hệ số bậc cao nhất bằng 1. Chứng minh rằng nếu f và g có một nghiệm phức chung thì $f = g$.

Bài 6.7 (ĐH Phạm Văn Đồng)**.** Cho a là số nguyên lẻ và $b_1, b_2, \cdots, b_n$ là các số nguyên sao cho $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ lẻ. Chứng minh rằng đa thức $P(x) = ax^{n+1} + b_1x^n + \cdots + b_nx + a$ không có nghiệm hữu tỉ.

Bài 6.8 (ĐH Phạm Văn Đồng)**.** Trong vành đa thức $\mathbb{R}[x]$ cho đa thức

$$P(x) = \frac{x(x-b)(x-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{x(x-c)(x-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{x(x-a)(x-b)}{c(c-a)(c-b)}$$

với $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại số $m \in \mathbb{R}$ sao cho

$$P(x) = m(x-a)(x-b)(x-c) + 1.$$

Bài 6.9 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Xác định tất cả các đa thức với hệ số thực $P(x)$ sao cho

$$P(x)^2 - 2 = 2P(2x^2 - 1).$$

Bài 6.10 (ĐH Sư phạm Huế)**.** Cho m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đa thức $x^m + x^n + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ là $mn - 2$ chia hết cho 3.

Bài 6.11 (ĐH Sư phạm Huế)**.** Cho đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng tồn tại các đa thức $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $f(x) = f_1(x)^2 + f_2(x)^2$.

Bài 6.12 (ĐH Tân Trào). Cho hai đa thức $p(x) = x^5 + x$ và $q(x) = x^5 + x^2$. Tìm tất cả các cặp số phức w, z, $w \neq z$ thỏa mãn $p(w) = p(z)$, $q(w) = q(z)$.

Bài 6.13 (ĐH Tây Bắc). (a) Cho đa thức $f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$ trong đó a, b, c là các số thực. Hãy tìm a, b, c sao cho $|f(x)| \leq 1$ với mọi x thỏa mãn $|x| \leq 1$.

(b) Cho đa thức $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$, với các hệ số $a_i \in \mathbb{Z}, i = 0, ..., n-1)$. Chứng minh rằng nếu $r = a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, là nghiệm của $f(x)$ thì a và b là các số nguyên.

Bài 6.14 (ĐH Tây Bắc).

1. Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên sao cho $f(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$.
2. Cho đa thức $g(x) = x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q$ với m, n, p, q là các hằng số thực. Giả sử rằng $g(1) = 10, g(2) = 20, g(3) = 30$. Hãy tính $\dfrac{g(12) + g(-8)}{10}$.

7 TỔ HỢP

Bài 7.1 (ĐH An Giang). Giả sử mỗi điểm trong mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng luôn tồn tại một hình chữ nhật có các đỉnh cùng màu. dirichlet

Bài 7.2 (ĐH Quảng Bình). Trong một trò chơi định thức: Cho ma trận A là ma trận vuông cấp 3 chưa điền giá trị. Có hai game thủ chơi, game thủ số 1 chỉ được điềm số nguyên lẻ vào ma trận và game thủ số hai chỉ được điền số nguyên chẵn vào ma trận. Hai game thủ chơi xen kẽ nhau, game thủ số 1 đi trước và cứ như thế cho đến khi ma trận A được điền đầy đủ các phần tử. Nếu $detA$ là số lẻ thì game thủ thứ nhất thắng, nếu $detA$ là số chẵn thì game thủ số hai thắng. Giả sử cả hai game thủ đều đưa ra chiến thuật chơi tối ưu nhất. Bạn hãy cho biết game thủ nào sẽ luôn thắng? Vì sao? dem thu vi

Bài 7.3 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương? chia keo euler

Bài 7.4 (ĐH Tân Trào). Chứng minh rằng: với mọi $0 < n \in \mathbb{N}$:

dem 2 cach

$$n\binom{2n-1}{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2.$$

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: GIẢI TÍCH

1 DÃY SỐ

Bài 1.1 (ĐH An Giang). Cho dãy (a_n) xác định bởi $a_0 = \dfrac{1}{2}, a_{n+1} = a_n - a_n^2$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 1$.

Bài 1.2 (HV An Ninh). Cho các dãy số (a_n) và (b_n) thoả mãn các điều kiện sau

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0 \ , \ \lim_{n\to\infty}(a_n^{2k+1} - b_n^{2k+1}) = 0$$

với k là số nguyên không âm nào đó. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

Bài 1.3 (ĐH Bách Khoa Thành phố Hồ Chí Minh). Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $u_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.
a) Chứng minh rằng u_n chia hết cho $n+1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{5^n}$.

Bài 1.4 (HV Công nghệ Bưu chính Viễn thông). Cho dãy số

$$x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{k}{(k+1)!} \quad \forall k = 1, 2, ..., 2014.$$

Tìm giới hạn

$$I = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{2014}^n}.$$

Bài 1.5 (ĐH Đồng Tháp). Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ với (a_n) là dãy số xác định bởi

$$a_0 = 1, \ \ a_1 = 2015, \ \ a_n = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)a_{n-1} + \frac{1}{n}a_{n-2} \ \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Bài 1.6 (ĐH Hùng Vương Phú Thọ). Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi

$$x_1 = 1; x_{n+1} = 2014\ln(x_n^2 + 2015^2) - 2015^2, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ.

Bài 1.7 (ĐH Khoa Học Huế). Cho dãy số thực (a_n), với $a_1 = 2015$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$, $n \geq 1$.

$a)$ Gọi p, q là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2015x + 1 = 0$. Chứng minh

$$a_n = p^{2^{n-1}} + q^{2^{n-1}},\ \forall\, n \geq 1.$$

$b)$ Tính giới hạn

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Bài 1.8 (ĐH Kỹ Thuật Hậu Cần CAND). Tìm tất cả các số thực dương a, b sao cho nếu dãy $\{x_n\}$ thỏa mãn

$$\mathop{lim}_{n\to\infty} (ax_{n+1} - bx_n) = 0$$

thì $\mathop{lim}\limits_{n\to\infty} x_n = 0.$

Bài 1.9 (ĐH Phạm Văn Đồng). Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2017u_n + 2015}{2015u_n + 2017}, n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Tính số hạng u_n.

Bài 1.10 (ĐH Phạm Văn Đồng). Cho dãy số

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}}.$$

Tính $\lim S_n$.

Bài 1.11 (ĐH Quảng Bình). Cho hai dãy số $(a_n), (b_n)$ được xác định bởi: $a_1 = 3, b_1 = 2$,

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2, b_{n+1} = 2a_n b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{b_n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{a_1 a_2 ... a_n}$.

Bài 1.12 (ĐH Quảng Bình). Cho dãy số (x_n) được xác định bởi công thức truy hồi:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2015}{6} \\ \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + ... + \frac{x_n}{n} = \frac{n+1}{2} x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tính $\lim\limits_{n\to\infty} (2015 + n)x_n$.

Bài 1.13 (ĐH Sư Phạm Hà Nội 2). Cho dãy các số thực không âm $\{x_n\}$ thoả mãn

$$\begin{cases} x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2} \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1, \end{cases}$$

với mọi $n \geq 0$. Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ.

Bài 1.14 (ĐH Sư Phạm Huế). Cho dãy số $(x_n)_n$ xác định như sau:

$$\begin{cases} x_1 & = a,\ a \in (0, 2) \\ x_{n+1} & = 1 + \sqrt{2x_n - x_n^2}, n \geq 1. \end{cases}$$

Tìm a sao cho dãy số $(x_n)_n$ hội tụ.

Bài 1.15 (ĐH Sư Phạm Huế). Cho hàm số $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ liên tục. Tính

$$\lim_{n\to\infty} n \int\limits_0^1 x^n f(x) dx.$$

2 HÀM SỐ

Bài 2.1 (ĐH An Giang). Cho f, g là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và

$$|f(x) - x| \leq g(x) - g(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có nghiệm.

Bài 2.2 (ĐH Bách Khoa Thành phố Hồ Chí Minh). Cho hàm số $f : [0, 2015] \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa $f(0) = f(2015)$. Chứng minh tồn tại $x_0 \in [0, 1984]$ sao cho $f(x_0) = f(x_0 + 31)$.

Bài 2.3 (HV Công nghệ Bưu chính Viễn thông). Cho hai hàm số f và g liên tục trên đoạn [0;1], $g(x) > 0 \quad \forall x \in [0; 1]$ và

$$\int_0^1 g(x)dx = m.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0; 1]$sao cho

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \frac{1}{m} f(c).$$

Bài 2.4 (ĐH Đồng Tháp)**.** Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $(a; b)$ sao cho $(f(x))^2 = (g(x))^2 \neq 0$ với mọi $x \in (a; b)$. Chứng minh rằng $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in (a; b)$ hoặc $f(x) = -g(x)$ với mọi $x \in (a; b)$.

Bài 2.5 (ĐH Hùng Vương Phú Thọ)**.** Cho $f(x)$ là hàm khả vi cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - |x|) = 0 \text{ và } f(0) = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại x_0 sao cho $f''(x_0) = 0$.

Bài 2.6 (ĐHKH Huế)**.** Cho f là hàm lồi trên đoạn $[a, b]$, tức là

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),\ \forall x,\ y \in [a, b],\ t \in [0, 1].$$

Chứng minh rằng, với mọi $x, y \in [a, b]$ mà $x + y = a + b$, ta có

$$f(x) + f(y) \leq f(a) + f(b).$$

Từ đó suy ra

$$\int_a^b f(x)dx \leq \frac{[f(a) + f(b)](b-a)}{2}.$$

Bài 2.7 (ĐH Kỹ Thuật Hậu Cần CAND)**.** Cho $C(\alpha)$ là hệ số của x^{2015} trong biểu diễn dưới dạng chuỗi lũy thừa tại $x = 0$ của $(1 + x)^\alpha$. Tính

$$\int\limits_0^1 C(-y-1)\left(\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y+2} + \cdots + \frac{1}{y+2015}\right)dy.$$

Bài 2.8 (ĐH Sư Phạm Huế)**.** Chứng minh không tồn tại hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $f(x)$ là số hữu tỉ khi và chỉ khi $f(x + 1)$ là số vô tỉ.

3 PHÉP TÍNH VI PHÂN

Bài 3.1 (ĐH An Giang)**.** Cho hàm số $f(x)$ khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}$, $f^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, 2, \ldots$ và

$$f^{(k)}(x) \geqslant 0, \forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0.$$

Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với $x > 0$.

Bài 3.2 (HV An Ninh)**.** Cho hàm số $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục và thỏa mãn $f(0) = 0, f(1) = 1$. Chứng minh rằng với mỗi $n \in \mathbb{N}$ tồn tại các số $x_1, x_2, ..., x_n \in [0, 1]$ sao cho

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + ... + \frac{1}{f'(x_n)} = n$$

Bài 3.3 (HV An Ninh). Cho $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi đến cấp 2 và thỏa mãn $f'(a) = f'(b) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho

$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|$$

Bài 3.4 (HV Công nghệ Bưu chính Viễn thông). Cho hàm $f(x)$ khả vi trên $[0, +\infty]$ và

$$\lim_{x\to+\infty} f^{'}(x) = 0.$$

Chứng minh rằng:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Bài 3.5 (ĐH Đồng Tháp). Cho hàm số f liên tục, khả vi trên $\mathbb{R}$ sao cho $f(1) = 0$. Chứng minh rằng phương trình $xf'(x) = (x - 2015)f(x)$ có nghiệm.

Bài 3.6 (ĐH Hùng Vương Phú Thọ). Chứng minh rằng nếu hàm số $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0; 2]$ và thỏa mãn các điều kiện $f(0) = 1, f(2) = 3; |f'(x)| \leq 2, \forall x \in [0; 2]$ thì $\int\limits_0^2 f(x)dx > 2$.

Bài 3.7 (ĐHKH Huế). Cho f liên tục đều trên $(0, +\infty)$. Những giới hạn nào sau đây chắc chắn tồn tại hữu hạn?

$$\lim_{x\to 0^+} f(x); \quad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Bài 3.8 (ĐHKH Huế). Cho $f \in C^2[0, 1]$, sao cho

$$|f(x)| \leq 1, \ \forall\, x \in [0, 1].$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0, 1]$ thỏa mãn $|f''(c)| \leq 16$.

Bài 3.9 (ĐH Kỹ Thuật Hậu Cần CAND). Cho $f \in C^1(a, b)$, $\underset{x\to a^+}{lim} f(x) = +\infty$, $\underset{x\to b^-}{lim} f(x) = -\infty$ và $f'(x) + f^2(x) \geq -1, \quad \forall x \in (a, b)$. Chứng minh rằng $b - a \geq \pi$ và cho ví dụ để có $b - a = \pi$.

Bài 3.10 (ĐH Phạm Văn Đồng). Cho hàm số f liên tục trên [2015; 2017] và $\displaystyle\int_{2015}^{2017} f(x)dx = 0$. Chứng minh rằng tồn tại số $c \in (2015; 2017)$ sao cho

$$2cf(c) = \int_{2015}^{c} f(x)dx.$$

Bài 3.11 (ĐH Quảng Bình)**.** Cho $f(x)$ liên tục trên $[0, a]$, khả vi trên $(0, a)$ sao cho $f(a) = 0$.
Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, a)$ để $f'(c) = f(c).\left(1 - \frac{1}{c}\right)$.

Bài 3.12 (ĐH Sư Phạm Hà Nội 2)**.** Chứng minh rằng

$$\frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{a}{b}\right) \leq \sup_{x>0}\left|\frac{\sin(ax)}{ax} - \frac{\sin(bx)}{bx}\right| \leq 4\left(1 - \frac{a}{b}\right)$$

với mọi $0 < a < b$.

Bài 3.13 (ĐH Sư Phạm Huế)**.** Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi cấp hai trên $\mathbb{R}$ sao cho tồn tại $c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \neq f'(c)$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$. Chứng minh rằng $f''(c) = 0$.

4 PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Bài 4.1 (ĐH An Giang)**.** Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to [0; +\infty)$ khả vi liên tục và $f(0) = 0$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 f^3(x)\,dx \leq \max_{0\leq x\leq 1} f'(x)\,.\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2.$$

Bài 4.2 (HV An Ninh Nhân Dân)**.** Cho hàm $f \in C^1[0,1]$ khả vi liên tục trên $[0,1]$ thoả mãn $f(0) = 0$ và $f'(x) > 0 \forall x \in (0,1)$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 \frac{[f(x)]^3}{[f'(x)]^2}dx \geqslant \frac{1}{9}\int_0^1 (1-x)^2 f(x)dx$$

Bài 4.3 (ĐH Bách Khoa Thành phố Hồ Chí Minh)**.** Cho hàm số f có đạo hàm liên tục đến cấp hai trên $[-2014, 2015]$. Chứng minh giới hạn sau tồn tại hữu hạn

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_\varepsilon^{2015}\frac{f(x)}{x^2}dx + \int_{-2014}^{-\varepsilon}\frac{f(x)}{x^2}dx\right).$$

Bài 4.4 (HV Công nghệ Bưu chính Viễn thông)**.** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ có giá trị nhỏ nhất $m > 0$ và giá trị lớn nhất M. Chứng minh rằng:

$$1 \leq \int_0^1 f(x)dx.\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

Bài 4.5 (ĐH Đồng Tháp). Tính tích phân $I = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}dx.$

Bài 4.6 (ĐH Hùng Vương Phú Thọ). Chứng minh rằng nếu tích phân $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và bằng J thì tích phân

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right)dx$$

cũng hội tụ và bằng J.

Bài 4.7 (ĐHKH Huế). Cho f và g là các hàm cùng đồng biến hoặc cùng nghịch biến trên đoạn $[0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \geq \int_0^1 f(x)dx. \int_0^1 g(x)dx.$$

Bài 4.8 (ĐH Kỹ Thuật Hậu Cần CAND). Chứng minh rằng với

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^3 - 3x + 1}$$

thì

$$I = \int\limits_{-100}^{-10} f^2(x)dx + \int\limits_{\frac{1}{101}}^{\frac{1}{11}} f^2(x)dx + \int\limits_{\frac{101}{100}}^{\frac{11}{10}} f^2(x)dx,$$

là số hữu tỉ.

Bài 4.9 (ĐH Quảng Bình). Cho hàm số f liên tục trên $[a, b]$ và có $f''(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$. Chứng minh rằng

$$\int_a^b f(x)dx \geq (b-a)\left(f(c) + (\frac{a+b}{2} - c)f'(c)\right), \forall c \in (a, b).$$

Bài 4.10 (ĐH Sư Phạm Hà Nội 2). Cho hàm f xác định, khả vi liên tục trên đoạn $[0; b]$ và f' nghịch biến trên $[0; b]$. Chứng minh rằng, với mọi $a \in (0, b)$ ta đều có

$$\frac{1}{b^2}\int_0^b f\left(x\right)dx - \frac{1}{a^2}\int_0^a f\left(x\right)dx \geq \frac{f\left(b\right)}{b} - \frac{f\left(a\right)}{a}$$

.

Bài 4.11 (ĐH Sư Phạm Huế). Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho $\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$. Chứng minh rằng

$$\int\limits_0^1 f^2(x)dx \geq 12 \left(\int\limits_0^1 xf(x)dx \right)^2.$$

5 CHUỖI SỐ

Bài 5.1 (ĐH An Giang). Xét sự hội tụ của chuỗi số sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n.n!}{n^n}.$$

Bài 5.2 (ĐH Bách Khoa Thành phố Hồ Chí Minh). Cho chuỗi số thực $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ là chuỗi hội tụ tuyệt đối (tức là chuỗi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ hội tụ).

(a) Với mỗi số nguyên dương n và $x \in [0, \pi]$. Chứng minh chuỗi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \sin^n(kx)$ hội tụ. Kết luận này còn đúng không nếu thay giả thiết chuỗi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ hội tụ tuyệt đối bởi giả thiết yếu hơn là chuỗi này hội tụ?

(b) Ký hiệu $S_n(x)$ là tổng của chuỗi ở câu (a). Chứng minh rằng $S_n(x)$ là hàm liên tục theo biến x trên $[0, \pi]$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\pi} S_n(x)\,dx = 0$.

Bài 5.3 (HV Công nghệ Bưu chính Viễn thông). Thí sinh chọn một trong hai câu dưới đây:

1) Cho $0 < \alpha < \beta$. Tính tích phân suy rộng

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx.$$

2) Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx.$$

Bài 5.4 (ĐH Hùng Vương Phú Thọ). Chứng minh đẳng thức

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)...(n+k)} = \int\limits_0^1 \frac{e^x-1}{x}dx.$$

Bài 5.5 (HV Kỹ Thuật Quân Sự). Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-2}}{e^n n!}$.

Bài 5.6 (ĐH Phạm Văn Đồng). Xét tính hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ trong đó f xác định bởi

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t(t+1)} \forall x > 1.$$

Bài 5.7 (ĐH Sư Phạm Hà Nội 2). Kí hiệu $\mathcal{A}$ là tập tất cả các dãy số thực dương $\{a_n\}$ thỏa mãn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 2015$. Tìm $\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 : \{a_n\} \in \mathcal{A}\right\}$.

6 PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Bài 6.1 (ĐH An Giang). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = x + f(y) + xf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.2 (ĐH Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh). Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $f(f(f(x))) = 2x - f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 6.3 (HV Công nghệ Bưu chính Viễn thông). Cho hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục trên [0;1] thỏa mãn

$$f(2015x + 2014) = 2015f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tìm hàm $f(x)$.

Bài 6.4 (ĐH Đồng Tháp). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn $f(1) = 2015$ và

$$f(2014x - f(y)) = f(2015x) - f(y) - x, \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.5 (ĐH Đồng Tháp). Cho f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(0) = 0$ và $|f(x) - f(y)| \leq |\sin x - \sin y|$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(f(x))^2 - f(x)]dx \leq \frac{\pi}{4} + 1$. Tìm hàm f để đẳng thức xảy ra.

Bài 6.6 (ĐH Hùng Vương Phú Thọ)**.** Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x)) = 4f(x) - 3x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.7 (ĐH Phạm Văn Đồng)**.** Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(\frac{15}{4}) = 2015$ và

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 8xy(x^4 - y^4).$$

Bài 6.8 (ĐH Quảng Bình)**.** Tìm hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) \geq 2015x$ và

$$f(x+y) \geq f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}\ (1).$$

Bài 6.9 (ĐH Sư Phạm Hà Nội 2)**.** Tìm hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^{2015}(x) = f\left(\sin^{2015} x\right), \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 6.10 (ĐH Sư Phạm Huế)**.** Có tồn tại hay không hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y|, \forall\, x, y \in \mathbb{R}?$$

Phần III

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

1 ĐẠI SỐ

Bài 1. $\det A = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$
$= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)$.
Do α, β, γ là nghiệm phương trình $x^3 - 2015x + 4 = 0$ nên ta có: nên $\det A = 0$.
Mặt khác ta có:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta\gamma$$

và do α, β, γ là các nghiệm của $x^3 - 2015x + 4 = 0$ nên nêu đều khác 0, suy ra:

$$\alpha(\alpha^2 - \beta\gamma) = \alpha^3 - \alpha\beta\gamma = \alpha^3 + 4 = 2015\alpha$$

nghĩa là

$$\alpha^2 - \beta\gamma = 2015 \neq 0$$

Từ đó hạng của A bằng 2.

Bài 2. Tồn tại một cơ sở $(e_1, e_2, \ldots, e_{2015})$ của V sao cho 2014 véc tơ đầu lập thành một cơ sở của W. Như vậy e_{2015} không nằm trong W. Xét hệ các véc tơ mới

$$e_i' := e_i + e_{2015}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2014.$$

Chúng lập thành một cơ sở mới và không có véc tơ nào nằm trong W.

Bài 3. Giả sử toán tử d như vậy tồn tại. Xét $V = \ker D^2$. Như vậy V chính là không gian các đa thức bậc ≤ 1. Nói riêng, $\dim V = 2$. Dễ thấy D, d làm ổn định V: với D điều này là hiển nhiên, với d, điều này được suy ra từ việc D, d giao hoán với nhau (và do đó D^2, d giao hoán).
Kí hiêu Δ, δ tương ứng là các hạn chế của D, d xuống V. Thế thì do $\Delta^2 = 0$ và do đó $\delta^4 = \Delta^2 = 0$. Như vậy, δ là một tự đồng cấu luỹ linh của V. Thế nhưng V có số chiều bằng 2 nên ta phải có $\delta^2 = 0$ (chẳng hạn được suy ra từ đa thức đặc trưng của một tự đồng cấu luỹ linh). Như vậy $\Delta = \delta^2 = 0$. Đẳng thức này nói rằng đạo hàm đồng nhất bằng 0 trên không gian các đa thức bậc ≤ 1. Đây hiển nhiên là một điều vô lý. Vậy, không tồn tại ánh xạ d với tính chất đã yêu cầu.

Bài 4. Ta tạo một lưới các ô được tạo bởi 9 đường dọc và 3 đường ngang. Do mỗi điểm đều được tô bởi màu xanh hoặc đỏ nên các điểm nút được tô màu xanh hoặc đỏ. Xét 3 nút trên một đường dọc, do mỗi nút có hai cách tô màu nên có $2^3 = 8$ các tô màu. Vậy mỗi đường dọc có 8 cách tô màu. Mà có 9 đường dọc nên tồn tại ít nhất 2 đường có cùng một cách tô màu.
Giả sử đó là hai đường dọc a_1 và a_2. Do mỗi điểm chỉ được tô một trong hai màu nên trên a_1 có 2 điểm nút được tô cùng màu. Do dọc a_2 tô giống a_1 nên sẽ có 2 điểm nút được tô cùng màu với hai điểm nút trên a_1. Bốn điểm cùng màu này tạp nên một hình chữ nhật.

Bài 5. b) *Cách 1*
Ta sẽ giải bài toán tổng quát, thay 2015 bằng một số tự nhiên $m > 0$ tùy ý, và chứng minh bằng quy nạp theo m khẳng định của bài toán đồng thời chứng minh rằng đa thức phải tìm có bậc không quá $m - 1$ $(*)$.
Với $m = 1$, điều kiện bài toán có dạng $a_{n+1} - a_n = 0$ với mọi $n \geq 0$, từ đó (a_n) là dãy hằng. Đa thức cần tìm là một đa thức bậc 0.
Giả thiết khẳng định $(*)$ đúng tới m. Xét dãy (a_n) thỏa mãn

$$\sum_{i=0}^{m+1}(-1)^i\binom{m+1}{i}a_{n+i} = 0.$$

Đặt $b_n := a_{n+1} - a_n$ với mọi $n \geq 0$. Sử dụng đẳng thức

$$\binom{m+1}{i+1} - \binom{m+1}{i} = \binom{m}{i}$$

ta suy dãy (b_n) thỏa mãn

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}b_{n+i} = 0.$$

Từ đó theo giả thiết quy nạp tồn tại đa thức $P(x)$ bậc không quá $m - 1$ sao cho $b(n) = P(n)$.
Sử dụng khai triển Hilbert ở câu a), ta có nhận xét sau. Nếu

$$P(x) = c_0\binom{x}{m} + c_1\binom{x}{m-1} + \ldots + c_m$$

thì đa thức $P_1(x)$ xác định bởi

$$P_1(x) := P(x+1) - P(x)$$

có khai triển Hilbert như sau:

$$P(x) = c_0\binom{x}{m-1} + c_1\binom{x}{m-2} + \ldots + c_{m-1}.$$

Như vậy, với mọi đa thức $P(x)$ đã cho, luôn tồn tại đa thức $Q(x)$ thỏa mãn $Q(x+1) - Q(x) = P(x)$ và $Q(0)$ có thể nhận giá trị bất kỳ. Từ đó bằng cách chọn giá trị $Q(0) = a_0$ ta có ngay đa thức thỏa mãn

$$Q(n) = a_n$$

với mọi $n \geq 0$.
Chú ý Khẳng định về sự tồn tại của $Q(x)$ sao cho $Q(x+1) - Q(x) = P(x)$ cũng có thể chứng minh trực tiếp bằng phương pháp hệ số bất định hoặc bằng phương pháp nội suy (ví dụ nội suy đa thức $Q(x)$ tại các giá trị $0, 1, \ldots, m+1$.
Cách 2 Coi hệ thức trong bài toán như một hệ thức truy hồi cho dãy (a_n), ta mô tả số hạng tổng quát của dãy theo các số hạng đầu tiên $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Đa thức đặc trưng tương ứng là $(T-1)^{2015}$ có duy nhất nghiệm $T = 1$ bội 2015, từ đó số hạng tổng quát của dãy có dạng

$$a_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \ldots + c_{2014} n^{2014}.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.
Cách 3 Ta chứng minh rằng dãy b_n cho bởi công thức

$$b_n = \sum_{j=0}^{2014} c_j \binom{n}{j}$$

với c_j là các hệ số bất kỳ thỏa mãn hệ thức truy hồi trong bài. Thật vây ta có

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2015} (-1)^i \binom{2015}{i} b_{n+i} &= \sum_{i=0}^{2015} \sum_{j=0}^{2014} c_j (-1)^i \binom{2015}{i} \binom{n+i}{j} \\ &= \sum_{j=0}^{2014} c_j \sum_{i=0}^{2015} (-1)^i \binom{2015}{i} \binom{n+i}{j} \end{aligned}$$

Vế phải của đẳng thức luôn bằng 0 vì nó là hệ số của x^j $(0 \leq j \leq 2014)$ trong khai triển của

$$\sum_{i=0}^{2015} (-1)^i \binom{2015}{i} (1+x)^{n+i} = (1+x)^n (1 - (1+x))^{2015} = (1+x)^n x^{2015}.$$

Bài 6. Ký hiệu lượng sữa mỗi chú được Bạch Tuyết chia cho lần lượt là $x_1, x_2, \ldots, x_7$. Ký hiệu tổng lượng sữa chú lùn thứ k nhận được trước khi chú chia đều cho anh em là y_k. Dễ thấy $y_1 = 0$ và $x_7 = 0$. Ta có

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 3.$$

Lượng sữa chú lùn thứ k có trước khi chú chia là $x_k + y_k$. Vì trước khi chú lùn thứ k chia sữa thì tổng lượng sữa chú thứ k và $k+1$ là y_k như nhau nên tổng lượng sữa mà chú lùn $k+1$ nhận được trước khi chú chia là

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(x_k + y_k).$$

Như vậy ta được sáu phương trình tuyến tính đầu tiên.
Sau khi chia hết thì chú lùn thứ k không còn giọt sữa nào trong cốc nữa. Lượng sữa trong cốc của chú sau lần chia của chú thứ bảy là x_k là do các chú lùn tiếp theo chia cho, gồm hai phần:

- lượng $\frac{1}{6}(x_{k+1} + y_{k+1})$ do chú lùn thứ $k+1$ chi cho;
- những lần chia tiếp theo, hai chú lùn k và $k+1$ được chia lượng như nhau và bằng x_{k+1}.

Như vậy

$$x_k = x_{k+1} + \frac{1}{6}(x_{k+1} + y_{k+1}).$$

Ta được thêm sáu phương trình nữa. Giải các phương trình này bắt đầu từ $k = 1$. Khi đó từ $y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(x_1 + y_1)$ và $x_1 = x_2 + \frac{1}{6}(x_2 + y_2)$ kết hợp với $y_1 = 0$, ta được

$$y_2 = \frac{1}{6}x_1, x_2 = \frac{5}{6}x_1.$$

Giải tiếp ta được $y_3 = \frac{1}{3}x_1$, $x_3 = \frac{2}{3}x_1$, ... $x_6 = \frac{1}{6}x_1$, $x_7 = 0$. Kết hợp với $x_1 + \ldots + x_7 = 3$, ta được nghiệm duy nhất là

$$x_1 = \frac{6}{7}, x_2 = \frac{5}{7}, x_3 = \frac{4}{7}, x_4 = \frac{3}{7}, x_5 = \frac{2}{7}, x_6 = \frac{1}{7}, x_7 = 0.$$

Bài 7. Theo định nghĩa, ma trận $B = AA^t$ là một ma trận vuông cấp m với các hệ số được cho bởi:

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{jk}.$$

Như vậy, b_{ik} đếm số thành viên chung của hai câu lạc bộ C_i, C_k. Nói riêng, tất cả các hệ số trên đường chéo là một số lẻ còn các hệ số còn lại là chẵn.
Tính chẵn lẻ của định thức của ma trận B tất nhiên chỉ phụ thuộc vào tính chẵn lẻ của các hệ số của chúng: tính chẵn lẻ của $\det B$ không đổi nếu ta thay một hệ số của B bởi một số có cùng tính chẵn lẻ. Quan sát này cho thấy tính chẵn lẻ của $\det B$ không thay đổi nếu ta thay đổi các hệ số trên đường chéo bởi 1 và các hệ số còn lại bởi 0, nghĩa là:

$$\det B \equiv \det I_m = 1 \pmod 2.$$

Theo phần a), B là một ma trận khả nghịch, nói riêng có hạng bằng m. Ta biết rằng hạng của một tích hai ma trận không vượt quá hạng của mỗi nhân tử. Vậy, hạng của B nhỏ hơn hoặc bằng hạng của A. Nhưng tất nhiên, hạng của A không vượt quá n. Từ đó suy ra $m \leq n$.

2 GIẢI TÍCH

2.1 Bảng A

Bài 1. 1. Ta có $a_{n+1} - a_n = -\frac{a_n^2}{2} \le 0$ nên dãy đơn điệu không tăng
2. Nếu $a_0 = 1$ ta thấy $0 < a_n \le 1$ với mọi n; suy ra tồn tại $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
3. Khi dãy có giới hạn hữu hạn thì giới hạn đó phải là 0.
Nếu $a_0 < 0$ thì vì dãy giảm nên giới hạn không thể là 0.
Nếu $a_0 > 2$ thì $a_1 < 0$ và ta đưa về trường hợp vừa xét bên trên.
Nếu $0 \le a_0 \le 2$ thì $a_n \ge 0$ với mọi n nên có giới hạn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
– Tính $\lim_{n\to\infty} na_n$.
Cách 1. Nếu $a_0 = 0$ hoặc $a_0 = 2$, thì $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.
Xét trường hợp $0 < a_0 < 2$. Khi đó,

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{2a_{n+1} - a_n^2} = \frac{1}{2 - a_n} + \frac{1}{a_n};$$

suy ra

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2 - a_i}.$$

Do $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ nên (theo định lý trung bình Cesaro)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2 - a_i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 - a_{n-1}} = \frac{1}{2}.$$

Vậy, từ đẳng thức trước đó, ta có ngay $\lim_{n\to\infty} na_n = 2$.
Cách 2. Nếu $a_0 = 0$ hoặc $a_0 = 2$, thì $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.
Xét trường hợp $0 < a_0 < 2$. Ta có: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{a_n}{2}\right) = 1$, nên từ định lý Stolz ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}}{(n+1) - n}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2a_{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Do đó, $\lim_{n\to\infty} na_n = 2$.

Bài 2. **Cách 1**. Giả sử $|\beta| < |\alpha|$. Đặt $k = \frac{\beta}{\alpha}$, ta có $|k| < 1$. Phương trình của f trở thành

$$f(y) = f(ky) + \frac{y^2}{\alpha^2}.$$

Liên tiếp dùng công thức này ta nhận được

$$f(y) = f(k^n y) + \frac{y^2}{\alpha^2} \sum_{i=0}^{n-1} k^{2i}.$$

Do f liên tục tại 0 nên cho $n \to \infty$ ta có

$$f(y) = f(0) + \frac{y^2}{\alpha^2}\sum_{i=0}^{\infty} k^{2i} = f(0) + \frac{y^2}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

Nếu $|\beta| > |\alpha|$, đặt $k = \frac{\alpha}{\beta}$, $|k| < 1$, ta có

$$f(y) = f(ky) - \frac{y^2}{\beta^2}.$$

Do đó (theo cách tương tự trường hợp trên),

$$f(y) = f(0) - \frac{y^2}{\beta^2 - \alpha^2} = f(0) + \frac{y^2}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

Thử lại!
Nếu $\alpha = \beta$, dễ thấy là không tồn tại f thỏa mãn các điều kiện của đề bài. Giả sử $\alpha = -\beta$ và f là một hàm thỏa mãn các điều kiện của đề bài. Trong phương trình đã cho thay x bởi $-x$, ta được $f(\beta x) = f(\alpha x) + (-x)^2$; so sánh với phương trình ban đầu ta suy ra $(-x)^2 = -x^2$ (với mọi $x \in \mathbb{R}$), vô lý!
Cách 2. Đặt $c = \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}$ và $f_c(x) = cx^2$, $g(x) = f(x) - f_c(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Bài toán quy về việc tìm các hàm g liên tục tại 0 và thỏa mãn phương trình

$$g(\alpha x) = g(\beta x)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Không mất tính tổng quát, xem $|\beta| < |\alpha|$. Đặt $k = \frac{\beta}{\alpha}$, ta có $|k| < 1$ và

$$g(y) = g(k^n y) \to g(0) = f(0) \text{ khi } n \to \infty$$

với mọi y. Vậy, g không đổi và $f(x) = f(0) + f_c(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Thử lại!
Nếu $\alpha = \beta$, dễ thấy là không tồn tại f thỏa mãn các điều kiện của đề bài. Giả sử $\alpha = -\beta$. Khi đó, hàm F được cho bởi công thức $F(x) := f(\alpha x)$ sẽ thỏa mãn đồng nhất thức $F(x) - F(-x) = x^2$; điều này là không thể vì vế trái là một hàm lẻ, trong khi vế phải là một hàm chẵn (khác không)!

Bài 3. Cách 1. Đặt $F(x) = \int_0^x f(y)\,dy$. Ta thấy $F(0) = 0$. Vì vậy, theo định lý Lagrange, tồn tại $x_3 \in (0,1)$ để $F(1) = F(1) - F(0) = F'(x_3) = f(x_3)$.
Mặt khác, áp dụng định lý Cauchy cho hàm $F(x)$ lần lượt với các hàm $g(x) = x^2,\ g(x) = x^3$ ta suy ra sự tồn tại của $x_1,\ x_2 \in (0,1)$ để

$$F(1) = \frac{F(1) - F(0)}{1^2 - 0^2} = \frac{F'(x_1)}{2x_1} = \frac{f(x_1)}{2x_1},$$

$$F(1) = \frac{F(1) - F(0)}{1^3 - 0^3} = \frac{F'(x_2)}{3x_2^2} = \frac{f(x_2)}{3x_2^2}.$$

Suy ra đpcm.
Cách 2. Ta thử tìm nghiệm trên $(0, 1)$ của phương trình

$$\frac{1}{4x} + \frac{1}{6x^2} = 1.$$

Phương trình trên tương đương với: $g(x) := 12x^2 - 3x - 2 = 0$; mà $g(0)g(1) < 0$, nên nó có một nghiệm $x_1 \in (0, 1)$.
Đặt $x_2 := x_1,\ x_3 := x_1$, ta có ngay đẳng thức được yêu cầu (với mọi hàm số $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, không nhất thiết liên tục).
Cách 3. Chọn $x_1 := 3/4,\ x_2 := 1/2$, ta thấy:

$$\frac{f(x_1)}{4x_1} + \frac{f(x_2)}{6x_2^2} = \frac{f(x_1)}{3} + \frac{2f(x_2)}{3};$$

vì thế, chú ý tính liên tục của f, ta có thể viết

$$\min_{[x_2,x_1]} f \leq \frac{f(x_1)}{4x_1} + \frac{f(x_2)}{6x_2^2} \leq \max_{[x_2,x_1]} f;$$

và suy ra sự tồn tại của $x_3 \in [x_2, x_1] \subset (0, 1)$ thỏa mãn đẳng thức có trong đề bài.

Bài 4. Đặt $F(x) = \int_0^x f(y)^2\,dy$ và $g(x) = f(x)^2 F(x)^2 = F(x)^2 F'(x)$. Theo giả thiết, $\lim_{x\to\infty} g(x) = a^2$.
Trước hết, ta chứng minh rằng $F(x) \uparrow \infty$ khi $x \uparrow \infty$. Thật vậy, nếu điều này không đúng thì $\lim_{x\to\infty} F(x) = M < \infty$; do đó $\lim_{x\to\infty} f(x) = a/M > 0$; suy ra $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$, vô lý!
Vì vậy, ta có thể áp dụng quy tắc L'Hospital và thu được

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)^3}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3F(x)^2 F'(x)}{1} = 3 \lim_{x\to\infty} g(x) = 3a^2.$$

Từ đó,

$$(3a^2)^{1/3} = \lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)F(x)}{\sqrt[3]{x} f(x)}.$$

Suy ra

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x} f(x) = \sqrt[3]{\frac{a}{3}}.$$

Bài 5. Cách 1. Trước hết, $0 \leq \frac{n}{2}a_n \leq \sum\limits_{k=[n/2]}^{n} a_k \to 0$ nên $na_n \to 0$ khi $n \to \infty$.

Vì thế, từ đẳng thức $\sum\limits_{k=1}^{n-1}[ka_k - (k+1)a_{k+1}] = a_1 - na_n$, ta có chuỗi hội tụ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[na_n - (n+1)a_{n+1}] = a_1.$$

Vậy, đẳng thức $n(a_n - a_{n+1}) = [na_n - (n+1)a_{n+1}] + a_{n+1}$ cho thấy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ cũng hội tụ (đpcm).

Nhận xét. Cách giải này cho phép ta tính được $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = a_1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Cách 2. Từ giả thiết ta nhận thấy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ là một chuỗi dương.

Hơn nữa, nếu gọi S là tổng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ thì do $a_{n+1} \geq 0$ ta có đánh giá:

$$\sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = -na_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq S$$

với mọi n. Vậy, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) < \infty$.

Nhận xét. Nếu chứng minh thêm $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ (xem Cách 1) thì từ đẳng thức

$$\sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = -na_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

ta thấy Cách 2 cũng cho ta: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2.2 Bảng B

Bài 1. 1. Ta có $a_{n+1} - a_n = -\frac{a_n^2}{2} \leq 0$ nên dãy đơn điệu không tăng

2. Nếu $a_0 = 1$ ta thấy $0 < a_n \leq 1$ với mọi n; suy ra tồn tại $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

3. Khi dãy có giới hạn hữu hạn thì giới hạn đó phải là 0.
   Nếu $a_0 < 0$ thì vì dãy giảm nên giới hạn không thể là 0.
   Nếu $a_0 > 2$ thì $a_1 < 0$ và ta đưa về trường hợp vừa xét bên trên.
   Nếu $0 \leq a_0 \leq 2$ thì $a_n \geq 0$ với mọi n nên có giới hạn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

– Tính $\lim_{n\to\infty} na_n$.
Cách 1. Nếu $a_0 = 0$ hoặc $a_0 = 2$, thì $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.
Xét trường hợp $0 < a_0 < 2$. Khi đó,

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{2a_{n+1} - a_n^2} = \frac{1}{2 - a_n} + \frac{1}{a_n};$$

suy ra

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2 - a_i}.$$

Do $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ nên (theo định lý trung bình Cesaro)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2 - a_i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 - a_{n-1}} = \frac{1}{2}.$$

Vậy, từ đẳng thức trước đó, ta có ngay $\lim_{n\to\infty} na_n = 2$.
Cách 2. Nếu $a_0 = 0$ hoặc $a_0 = 2$, thì $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.
Xét trường hợp $0 < a_0 < 2$. Ta có: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{a_n}{2}\right) = 1$, nên từ định lý Stolz ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}}{(n+1) - n}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2a_{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Do đó, $\lim_{n\to\infty} na_n = 2$.

Bài 2. Bài 2 là trường hợp riêng ứng với $\beta = 1$ của bài 2 trong đề của Bảng A.

Bài 3. Cách 1. Theo định lý Lagrange, tồn tại $x_3 \in (0, 1)$ để $f(1) - f(0) = f'(x_3)$.
Mặt khác, áp dụng định lý Cauchy cho hàm f lần lượt với các hàm $g(x) = x^2,\ g(x) = x^3$ ta suy ra sự tồn tại của $x_1,\ x_2 \in (0, 1)$ để

$$f(1) - f(0) = \frac{f(1) - f(0)}{1^2 - 0^2} = \frac{f'(x_1)}{2x_1},$$

$$f(1) - f(0) = \frac{f(1) - f(0)}{1^3 - 0^3} = \frac{f'(x_2)}{3x_2^2}.$$

Suy ra đpcm.
Cách 2. Ta thử tìm nghiệm trên $(0, 1)$ của phương trình

$$\frac{1}{4x} + \frac{1}{6x^2} = 1.$$

Phương trình trên tương đương với: $g(x) := 12x^2 - 3x - 2 = 0$; mà $g(0)g(1) < 0$, nên nó có một nghiệm $x_1 \in (0,1)$.
Đặt $x_2 := x_1,\ x_3 := x_1$, ta có ngay đẳng thức được yêu cầu (với mọi hàm số $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, chỉ cần khả vi).
Cách 3. Chọn $x_1 := 3/4,\ x_2 := 1/2$, ta thấy:

$$\frac{f'(x_1)}{4x_1} + \frac{f'(x_2)}{6x_2^2} = \frac{f'(x_1)}{3} + \frac{2f'(x_2)}{3};$$

vì thế, chú ý tính liên tục của f', ta có thể viết

$$\min_{[x_2,x_1]} f' \le \frac{f'(x_1)}{4x_1} + \frac{f'(x_2)}{6x_2^2} \le \max_{[x_2,x_1]} f';$$

và suy ra sự tồn tại của $x_3 \in [x_2, x_1] \subset (0,1)$ thỏa mãn đẳng thức có trong đề bài.

Bài 4. Giả sử $a > 0$. Ta có

$$\int_0^1 f(x)^3\,dx = \int_0^1 f(x)^3\,dx - 3a\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (f(x)^3 - 3af(x))\,dx.$$

Sự kiện $f(x) \le 1$ gợi ý ta xét giá trị lớn nhất của hàm số $g(y) = y^3 - 3ay$ trên khoảng $-\infty < y \le 1$.
Có thể thấy giá trị lớn nhất này là

$$h(a) = \max\{1 - 3a, 2a\sqrt{a}\}.$$

Lại có $\min\{h(a) : a \ge 0\} = \frac{1}{4}$, đạt khi $a = \frac{1}{4}$.
Vậy, $f(x)^3 - \frac{3}{4}f(x) \le \frac{1}{4}$. Suy ra

$$\int_0^1 f(x)^3\,dx = \int_0^1 (f(x)^3 - \frac{3}{4}f(x))\,dx \le \frac{1}{4}.$$

Bài 5. Giả sử g bị chặn, nghĩa là tồn tại số thực $M > 0$ sao cho $g(x) < \sqrt[3]{M}$ hay $g(x)^3 < M$ với mọi $x \in [0, +\infty)$.
Đặt $F(x) = \int_0^x \dfrac{1}{f(t)}dt$, ta có $F'(x) = \dfrac{1}{f(x)}$; vậy $g(x)^3 = \dfrac{F(x)^3}{F'(x)}$.
Suy ra

$$\frac{1}{M} < \frac{1}{(g(x))^3} = \frac{F'(x)}{(F(x))^3} \Longrightarrow \frac{1}{M}(t-1) < \int_1^t \frac{F'(x)}{(F(x))^3}dx = \frac{1}{2F(1)^2} - \frac{1}{2F(t)^2} < \frac{1}{2F(1)^2},$$

Từ bất đẳng thức trên cho $t \to +\infty$ ta gặp mâu thuẫn. Vậy g là bị chặn trên $[0, +\infty)$.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: ĐẠI SỐ

1 MA TRẬN

Bài 1.1 (HV An ninh Nhân dân).

1. Theo bất đẳng thức Sylvester về hạng của ma trận

$$|\operatorname{rank}(A)-\operatorname{rank}(B)| \leqslant \operatorname{rank}(A+B) \leqslant \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$$
$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-n \leqslant \operatorname{rank}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I_n-A^p)-n &\leqslant \operatorname{rank}(A(I_n-A^p))\\ &=\operatorname{rank}(A-A^{p+1})\\ &=\operatorname{rank}(0_n)\\ &=0\end{aligned}$$

nên ta được $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I_n-A^p)\leqslant n$.
Vẫn theo bất đẳng thức Sylvester ta có

$$\begin{aligned}n&=\operatorname{rank}(I_n)\\ &=\operatorname{rank}(A^p+I_n-A^p)\\ &\leqslant \operatorname{rank}(A^p)+\operatorname{rank}(I_n-A^p)\\ &\leqslant \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I_n-A^p).\end{aligned}$$

Vậy ta được $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I_n-A^p)=n$.

2. Ta nhận xét rằng với $k,m\in\mathbb{N}$ mà k là ước của m thì $I_n-A^m=(I_n-A^k)P(A)$ với $P(x)$ là đa thức xác định bởi phép chia đa thức $1-x^m$ cho đa thức $1-x^k$. Suy ra

$$\operatorname{rank}(I_n-A^k)\geqslant \operatorname{rank}(I_n-A^m)(\text{theo bất đẳng thức Sylvester}).$$

Bây giờ xét p là số nguyên tố. Lấy bất kỳ số $k\in\{2,3,...,p-1\}$.
Xét tập hợp $S=\{p+1,2p+1,...,kp+1\}$ gồm k phần tử.
Từng cặp 2 phần tử trong S có số dư khác nhau khi chia cho k. Thật vậy, giả sử ngược lại có $r,s\in\{1,2,...,k\}$ $(r<s)$ để $rp+1$ và $sp+1$ có cùng số dư khi chia cho k, thì $(s-r)p$ chia hết cho k, suy ra $(s-r)$ chia hết cho k, điều này vô lý vì $(s-r)\in\{1,2,...,k-1\}$.
Suy ra phải có một phần tử $(qp+1)\in S$ mà $qp+1$ chia hết cho k, hay

k là ước của $qp+1$, trong đó $q \in \{1, 2, ..., k-1\}$ (vì rằng $kp+1$ không chia hết cho k).
Theo kết quả trên ta có

$$\text{rank}(I_n - A) \geqslant \text{rank}(I_n - A^k) \geqslant \text{rank}(I_n - A^{qp+1})$$

Nhưng

$$A^{qp+1} = A^{p+1}A^{qp-p} = AA^{qp-p} = A^{(q-1)p+1}$$

Lại có

$$A^{(q-1)p+1} = A^{p+1}A^{(q-1)p-p} = AA^{(q-1)p-p} = A^{(q-2)p+1}$$

Tiếp tục như vậy sau q bước ta được $A^{qp+1} = A^{(q-q)p+1} = A$.
Do đó $\text{rank}(I_n - A^{qp+1}) = \text{rank}(I_n - A)$.
Vậy ta được $\text{rank}(I_n - A) = \text{rank}(I_n - A^k)$ với bất kỳ $k \in \{2, 3, ..., p-1\}$, tức là

$$\text{rank}(I_n - A) = \text{rank}(I_n - A^2) = ... = \text{rank}(I_n - A^{p-1})$$

Bài 1.2 (ĐH Đồng Tháp). Từ A là ma trận lũy linh nên mọi giá trị riêng của A đều bằng 0. Viết đa thức đặc trưng $f_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} tr(A) x^{n-1} + ...$ Theo định lý Viet, tổng các nghiệm của đa thức đặc trưng bằng $\text{trace}(A)$. Nhưng theo nhận xét trên các nghiệm cyar đa thức $f_A(x)$ đều bằng không. Vậy $\text{trace}(A) = 0$.

Bài 1.3 (ĐH Đồng Tháp). Gọi n cấp của ma trận A, B. Khi đó ta có:

$$\text{trace}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{ji}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(b_{ji}a_{ij}) = \text{trace}(BA).$$

Dễ thấy, các số $2a, 4a.6a$ là các giá trị riêng của A. Khi đó tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $A = P^{-1}CP$, trong đó ma trận $C = \begin{pmatrix} 2a & 0 & \\ 0 & 4a & 0 \\ 0 & 0 & 6a \end{pmatrix}$.
Theo kết quả trên $\text{trace}(A^{2014}) = tr(C^{2014}) = 2^{2014}a^{2014}(1 + 2^{2014} + 3^{2014})$.

Bài 1.4 (ĐH Đồng Tháp). Tính toán trực tiếp hoặc sử dụng tính chất về vết suy ra ma trận $AB - BA$ có dạng $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ nên từ đó suy ra $(AB - BA)^2$ có dạng αI. Điều này chứng tỏ ma trận $(AB - BA)^2$ giao hoán với mọi ma trận vuông cùng cấp.

Bài 1.5 (ĐH Hải Phòng)**.** Ký hiệu I_n là ma trận đơn vị cấp n. Ta có

$$A^2 + B = BA \Leftrightarrow (A - B)(I_n - A) = A \Leftrightarrow (A - B)(A^{-1} - I_n) = I_n,$$

suy ra

$$(A^{-1} - I_n)(A - B) = I_n \Leftrightarrow (I_n - A)(A - B) = A \Leftrightarrow A^2 + B = AB.$$

Vậy $AB = BA$.
Từ đó suy ra $A^{-1}B = BA^{-1}$, dẫn đến $[(A^{-1})^{2015}B^{2015}]^{2016} = 0$, hay $(A^{-1})^{2015}B^{2015}$ là ma trận lũy linh.
Mặt khác với mọi ma trận X lũy linh thì $\det(I_n + X) \neq 0$. Thật vậy, do X lũy linh nên tồn tại số nguyên dương k sao cho $X^{2k+1} = 0$, do đó

$$I_n = I_n + X^{2k+1} = (I_n + X)(I_n - X + X^2 - \ldots + X^{2k}),$$

dẫn đến $\det(I_n + X) \neq 0$. Trong tình huống trên ta suy ra

$$\det(I_n + (A^{-1})^{2015}B^{2015}) \neq 0,$$

hay $\det(A^{2015} + B^{2015}) \neq 0$. Vậy $A^{2015} + B^{2015}$ khả nghịch.

Bài 1.6 (ĐH Khoa học Huế)**.** Vì A đối xứng nên A chéo hóa (trực giao) được. Do đó tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho

$$A = PDP^{-1},$$

trong đó $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ là ma trận chéo có các phần tử chéo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của A. Từ đó suy ra $A^k = PD^kP^{-1} = P \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)\, P^{-1}$. Vì $A^k = 0$ nên $D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k) = P^{-1}A^kP = 0$ hay $D = 0$. Vì vậy $A = 0$.

Bài 1.7 (ĐH Khoa học Huế)**.** Ta có đa thức đặc trưng của A

$$p_A(x) = (x + 2)^2$$

có nghiệm kép $x = -2$. Thực hiện phép chia đa thức x^n cho $p_A(x)$:

$$x^n = p_A(x)q(x) + ax + b.$$

Thay $x = -2$ ta được $-2a + b = (-1)^n 2^n$ và sau đó lấy đạo hàm hai vế tại $x = -2$ ta được $a = (-1)^{n-1}n2^{n-1}$. Từ đó cũng có $b = (-1)^n(1 - n)2^n$. Theo định lí Cayley-Hamilton, A là nghiệm của p_A nên

$$A^n = aA + bI_2 = \begin{pmatrix} (-1)^n 2^n + (-1)^{n+1}3n2^{n-1} & (-1)^{n+1}3n2^{n-1} \\ (-1)^n 3n2^{n-1} & (-1)^n(3n2^{n-1} + 2^n) \end{pmatrix}.$$

Bài 1.8 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần CAND)**.** Từ $ABAB = O_n$ không suy ra được $BABA = O_n$ ví dụ với $n = 3$ và

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bài 1.9 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần CAND)**.** Trước hết ta chứng minh rằng nếu M là ma trận nguyên và nghịch đảo cũng là ma trận nguyên khi và chỉ khi $\det(M) = \pm 1$. Thật vậy, nếu M là ma trận nguyên khả nghịch sao cho ma trận nghịch đảo của nó là N cũng có các phần tử nguyên. Khi đó ta có $\det(M), det(N)$ là các số nguyên. Mặt khác $\det(M)\det(N) = \det(MN) = 1$ nên ta phải có $\det(M) = \pm 1$. Ngược lại, nếu $det(M) = \pm 1$. thì ma trận nghịch đảo của M là ma trận nguyên là hiển nhiên theo công thức định thức tính ma trận nghịch đảo.

Đặt $f(x) = \det(A + xB), \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$. Khi đó theo giả thiết f là một đa thức bậc cao nhất là 2 với biến x. Theo kết quả trên $f(x) = \pm 1, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ba giá trị của x sao cho $f(x)$ nhận cùng một giá trị. Từ đó suy ra $f(x)$ là đa thức hằng. Trong trường hợp đặc biệt $\det(A + 5B) = \pm 1$. Vì vậy $A + 5B$ là ma trận khả nghịch và ma trận nghịch đảo có tất cả các phần tử nguyên.

Bài 1.10 (HV Kỹ thuật Quân sự)**.** Đầu tiên ta chứng minh trong trường hợp khi A là ma trận hạng 1. Khi đó tồn tại một vector $v \neq \theta$ sao cho $A = vv^T$. Ta có

$$\begin{aligned} &\operatorname{trace}(AB) = \operatorname{trace}\left(vv^T B\right) = \operatorname{trace}\left(v^T B v\right) \\ &= v^T B v \leqslant v^T C v = \operatorname{trace}\left(vv^T C\right) = \operatorname{trace}(AC) \end{aligned}$$

Nếu A có hạng bất kỳ, do A đối xứng, không âm nên A luôn có đủ n trị riêng $\lambda_1, ..., \lambda_n$ không âm (kể cả bội), giả sử $u_1, ..., u_n$ là một cơ sở đường chéo của A ứng với n trị riêng trên. Khi đó

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^T = \sum_{i=1}^{n} v_i v_i^T$$

ở đó $v_i = \sqrt{\lambda_i} u_i$. Ta có

$$\operatorname{trace}(AB) = \operatorname{trace}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i v_i^T B\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \operatorname{trace}\left(v_i v_i^T C\right) = \operatorname{trace}(AC).$$

Bài 1.11 (ĐH Phạm Văn Đồng)**.** Ta có

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Tính toán tương tự:

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Vậy $A^{2015} = A^5 = (a_{ij})$, trong đó

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \text{nếu } j = i + 5, i = \overline{1,5} \text{ và } j = i - 4, i = \overline{5,10} \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{bmatrix}$$

Bài 1.12 (ĐH Quảng Bình)**.** Theo giả thiết $A^k = 0$ nên các ma trận $A + I$ và $A - I$ là các ma trận khả nghịch. Khi đó, với ma trận B bất kì sao cho $AB = A$ thì ta có:

$$\text{rank}(A + B) = \text{rank}(A - I)(A + B) = \text{rank}(A^2 - A) = \text{rank}A.$$

Tương tự:

$$\text{rank}(A - B) = \text{rank}A.$$

Vậy $\text{rank}(A + B) = \text{rank}(A - B)$.

Bài 1.13 (ĐH Quảng Bình)**.** Đa thức đặc trưng của A là $f(x) = (x-1)^4 - (x-1)^3$. Theo định lý Cayley - Hamilton ta có $(A - I)^4 = (A - I)^3$.
Vậy

$$\begin{aligned} A^{2015} =& \sum_{k=0}^{2015} C_{2015}^k (A - I)^k \\ =& I + 2015(A - I) + \frac{2015.2014}{2}(A - I)^2 \\ &+ (2^{2015} - C_{2015}^0 - C_{2015}^2)(A - I)^3. \end{aligned}$$

Tính toán ta được $b_{21} = 10.2^{2015} - 10 - 14.2015 - 12.2015.2014$.

Bài 1.14 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Từ giả thiết ta có $(P+14I_n)^2 = P+14I_n$ và $(Q+15I_n)^2 = Q+15I_n$. Do đó nếu đặt $X = P+14I_n, Y = Q+15I_n$ thì cũng theo giả thiết chúng ta có $X^2 = X, Y^2 = Y$ và $X+Y-I_n$ khả nghịch. **(3 điểm).**
Khi đó từ việc $XY = XY + X^2 - X = X(Y+X-I_n)$ và $XY = XY+Y^2-Y = (Y+X-I_n)Y$ ta có

$$\operatorname{rank}X(Y+X-I_n) = \operatorname{rank}(Y+X-I_n)Y.$$

Vì vậy từ $X+Y-I_n$ khả nghịch ta có $\operatorname{rank}X = \operatorname{rank}Y$, đây là điều phải chứng minh. **(2 điểm).**

Bài 1.15 (ĐH Sư phạm Huế). Giả sử $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$. Ma trận X tồn tại khi và chỉ khi các hệ phương trình tuyến tính $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 2b \\ c \end{pmatrix}$; $A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 2c-1 \end{pmatrix}$ và $A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ b-2 \\ 2a \end{pmatrix}$ có nghiệm. Xét ma trận bổ sung

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & a+1 & b & -c \\ 2 & 3 & -1 & 2b & -a & b-2 \\ 0 & -7 & 1 & c & 2c-1 & 2a \end{array}\right).$$

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp ta có $\overline{A}$ tương đương ma trận

$$\overline{A'} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & a+1 & b & -c \\ 0 & 7 & -1 & -2a+2b-2 & -a-2b & b+2c-2 \\ 0 & 0 & 0 & -2a+2b+c-2 & -a-2b+2c-1 & 2a+b+2c-2 \end{array}\right).$$

Do đó 3 hệ phương trình tuyến tính trên có nghiệm khi và chỉ khi hàng thứ 3 của ma trận $\overline{A'}$ bằng 0, tức là a, b, c là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} -2a + 2b + c - 2 = 0 \\ -a + -2b + 2c - 1 = 0 \\ 2a + b + 2c - 2 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a = \frac{-1}{9}, b = \frac{4}{9}, c = \frac{8}{9}$.

Bài 1.16 (ĐH Sư phạm Huế). Trước hết, ta đặt $C = AB - BA$ và chứng minh A và C giao hoán nhau. Ta có

$$AC - CA = A(AB-BA) - (AB-BA)A = A^2B + BA^2 - 2ABA = O.$$

Chứng minh bằng quy nạp ta được $C^m = AC^{m-1}B - C^{m-1}BA, \forall m \geq 1$. Sử dụng $\text{trace}(AB) = tr(BA)$ ta có $\text{trace}(C^m) = 0, \forall m \geq 1$. Điều này chứng tỏ tất cả các giá trị riêng của C đều bằng 0, do đó tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho $C^m = 0$.

Bài 1.17 (ĐH Tân Trào). Đặt $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$. Khi đó ta có hệ phương trình

$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 + \cdots + x_n = y_1 \\ x_1 + x_3 + \cdots + x_n = y_2 \\ \dots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = y_n \end{cases} \quad (1)$$

Cộng từng vế của hệ phương trình (1) ta có phương trình

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{n-1}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n). \quad (2)$$

Lấy phương trình (2) trừ đi từng phương trình trong hệ (1) ta được kết quả

$$\begin{cases} x_1 = \frac{n-2}{n-1}y_1 + \frac{1}{n-1}(y_2 + y_3 + \cdots + y_n) \\ x_2 = \frac{n-2}{n-1}y_2 + \frac{1}{n-1}(y_1 + y_3 + \cdots + y_n) \\ \dots \\ x_n = \frac{n-2}{n-1}y_n + \frac{1}{n-1}(y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) \end{cases}$$

Kết quả này chứng tỏ A là ma trận khả nghịch và

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} n-2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n-2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n-2 & \cdots & 1 \\ & . & . & \cdots & . \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-2 \end{pmatrix}$$

Bài 1.18 (ĐH Tân Trào). Đặt $S = A + \epsilon B$, trong đó $\epsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ta có $\overline{S} = A + \overline{\epsilon}B$ và theo giả thiết:

$$\begin{array}{rcl} S\overline{S} & = & (A + \epsilon B)(A + \overline{\epsilon}B) \\ & = & A^2 + B^2 + \epsilon BA + \overline{\epsilon}AB = AB + \epsilon BA + \overline{\epsilon}AB \\ & = & \epsilon BA + (1 + \overline{\epsilon})AB = \epsilon BA - \epsilon AB \\ & = & \epsilon(BA - AB) \\ \Rightarrow (S\overline{S}) & = & \epsilon^n(BA - AB) \end{array}.$$

Vì $(S\overline{S}) = S\overline{S}$ là một số thực, $(BA - AB) \in \mathbb{R}^*$ và $[\epsilon(BA - AB)] = \epsilon^n(BA - AB)$, suy ra $\epsilon^n \in \mathbb{R}$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi n chia hết cho 3.

Bài 1.19 (ĐH Tây Bắc).

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$$
$$= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma).$$

Do α, β, γ là các nghiệm của phương trình $x^3 - 2015x + 4 = 0$ nên ta có $\det A = 0$.
Mặt khác ta lại có: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta\gamma$ và các nghiệm α, β, γ của phương trình $x^3 - 2015x + 4 = 0$ đều khác 0, suy ra

$$\alpha(\alpha^2 - \beta\gamma) = \alpha^3 - \alpha\beta\gamma = \alpha^3 + 4 = 2015\alpha \Rightarrow \alpha^2 - \beta\gamma = 2015 \neq 0$$

Vậy hạng của ma trận bằng 2.

Bài 1.20 (ĐH Tây Bắc). 1. Ta có

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}; B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Ta có

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I + C,$$

trong đó $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Vì I và C giao hoán và $C^3 = 0$ nên theo công thức nhị thức Newton ta có

$$B^n = (2I + C)^n = 2^n I + C_n^1 2^{n-1} C + C_n^2 2^{n-2} C^2 = \begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(5-n)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & -n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

Suy ra

$$A^n = PB^nP^{-1} = 2^{n-3} \begin{bmatrix} -n^2 + n + 8 & n^2 - n & n^2 + 3n \\ -n^2 + 5n & n^2 - 5n + 8 & n^2 - n \\ -4n & 4n & 4n + 8 \end{bmatrix}$$

Bài 1.21 (ĐH Tây Bắc). Ta có $(AB)^2 = \alpha^2 I; \alpha \neq 0$ nên A, B là các ma trận khả nghịch.
Từ $(AB)^2 = \alpha^2 I \Rightarrow AB = \alpha^2 (AB)^{-1} = \alpha^2 B^{-1}A^{-1}$. Suy ra

$$(BA)^2 = B(AB)A = B\alpha^2 B^{-1}A^{-1}A = \alpha^2 I.$$

Đặt $X = \dfrac{1}{\alpha}AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ thì $X^2 = I$.
Theo định lý Cayley - Hamilton ta có:

$$X^2 - (a+d)X + |X|\,I = 0 \Rightarrow I - (a+d)X + |X|\,I = 0$$

Do $X^2 = I$ nên $|X| = \pm 1$.
– Nếu $|X| = 1$ thì

$$(a+d)X = 2I \Rightarrow X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a+d} & 0 \\ 0 & \frac{2}{a+d} \end{bmatrix} \Rightarrow X = \pm I$$

– Nếu $|X| = -1$ thì $(a+d)X = 0$. Do X khả nghịch nên $X \neq 0$ suy ra $a + d = 0$. Điều này mâu thuẫn với $Tr(X) = \dfrac{1}{\alpha}Tr(AB) \neq 0$. Vậy $X = \pm I$ hay $AB = \pm\alpha I$ suy ra $(BA)^2 = B(AB)A = \pm\alpha BA$. Do A, B khả nghịch suy ra $BA = \pm\alpha I = AB$.

Bài 1.22 (ĐH Tây Bắc). Bằng quy nạp theo k ta chứng minh đẳng thức $A^kB - BA^k = kA^k$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Thật vậy,
– Nếu $k = 1$ thì đẳng thức đúng theo giả thiết.
– Giả sử $A^kB - BA^k = kA^k$ với $k \geq 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} A^{k+1}B - BA^{k+1} &= (A^{k+1}B - ABA^k) + (ABA^k - BA^{k+1}) \\ &= A(A^kB - BA^k) + (AB - BA)A^k \\ &= kA^{k+1} + A^{k+1} = (k+1)A^{k+1}. \end{aligned}$$

Vậy $A^kB - BA^k = kA^k$ với mọi k nguyên dương.
Nếu $A^k \neq 0$ với mọi số nguyên dương k thì xét:

$$f : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$$

$$X \mapsto XB - BX$$

Ta có f là ánh xạ tuyến tính và $f(A^k) = A^kB - BA^k = kA^k$ với mọi k. Do $A^k \neq 0$ nên k là giá trị riêng của f với mọi k. Mặt khác $\dim_{\mathbb{R}} Mat(n, \mathbb{R}) = n^2$ suy ra f có nhiều nhất n^2 giá trị riêng phân biệt. Mâu thuẫn. Vậy phải tồn tại số nguyên dương k sao cho $A^k = 0$.

Bài 1.23 (ĐH Tây Bắc). (a) Xét ma trận $A = \lambda I$ khi đó ta có

$$A^3 + 3A = I \Leftrightarrow (\lambda^3 + 3\lambda)I = I \Leftrightarrow \lambda^3 + 3\lambda = 1 \qquad (1)$$

Gọi λ_0 là nghiệm thực của phương trình(1) thì $A = \lambda_0 I \in Mat(n, \mathbb{R})$ thỏa mãn đẳng thức $A^3 + 3A = I$.

(b) Xét $p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda - 1$, ta có $p' = 3\lambda^2 + 3 > 0$ với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$ và $p(0) = -1 < 0$ suy ra $p(x)$ có duy nhất một nghiệm thực $\lambda_0 > 0$ và hai nghiệm phức liên hợp kí hiệu là $\lambda_1; \overline{\lambda_1}$.
Từ đẳng thức $A^3 + 3A = I$. Suy ra các giá trị riêng của A thuộc tập $\{ \lambda_0, \lambda_1, \overline{\lambda_1}\}$
Gọi $f_A(x)$ là đa thức đặc trưng của A. Khi đó $f_A(x)$ có 3 nghiệm phân biệt $\lambda_0, \lambda_1, \overline{\lambda_1}$ với số bội tương ứng là $m_0; m_1; m_1$ với $m_0, m_1 \geqslant 0; m_0 + 2m_1 = n$ (Chú ý rằng $\lambda_1, \overline{\lambda_1}$ luôn có số bội như nhau).
Từ đó ta có $\det A = \lambda_0^{m_0}(\lambda_1.\overline{\lambda_1})^{m_1}$. Do $\lambda_0 > 0; \lambda_1\overline{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2 > 0$ nên $\det A > 0$.

2 ĐỊNH THỨC

Bài 2.1 (ĐH An Giang). Đặt $D_n = \det(A)$. Cộng các cột vào cột thứ n, ta được

$$D_n = \begin{vmatrix} -(a+1) & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a \\ a & -(a+2) & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & -(a+3) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(a+n-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & -n \end{vmatrix}.$$

Khai triển theo cột n ta được $D_n = (-1)^{n+1}(-a)(a)^{n-1} - nD_{n-1}$. Với $D_1 = -(a+1)$, thực hiện truy hồi ta được

$$D_n = (-1)^n n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \right).$$

Bài 2.2 (HV An ninh Nhân dân). Vì $\operatorname{rank}(A) = 1$, nên A phải có dạng

$$A = \begin{bmatrix} k_1a_1 & k_2a_1 & \dots & k_ia_1 & \dots & k_na_1 \\ k_1a_2 & k_2a_2 & \dots & k_ia_2 & \dots & k_na_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_1a_i & k_2a_i & \dots & k_ia_i & \dots & k_na_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1a_n & k_2a_n & \dots & k_ia_n & \dots & k_na_n \end{bmatrix}$$

có một hàng (cột) độc lập tuyến tính, còn các hàng (cột) khác bểu diễn tuyến tính qua hàng (hàng) cột này, với $(a_1, a_2, ..., a_n) \neq (0, 0, ..., 0)$ và $(k_1, k_2, ..., k_n) \neq (0, 0, ..., 0)$.
Khi đó

$$I_n + A = \begin{bmatrix} 1 + k_1a_1 & k_2a_1 & \dots & k_ia_1 & \dots & k_na_1 \\ k_1a_2 & 1 + k_2a_2 & \dots & k_ia_2 & \dots & k_na_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_1a_i & k_2a_i & \dots & 1 + k_ia_i & \dots & k_na_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1a_n & k_2a_n & \dots & k_ia_n & \dots & 1 + k_na_n \end{bmatrix}$$

Nếu $\exists k_ia_i = 0$ (tức là $k_i = 0$ hoặc $a_i = 0$) thì

$$I_n + A = \begin{bmatrix} 1 + k_1a_1 & k_2a_1 & \dots & 0 & \dots & k_na_1 \\ k_1a_2 & 1 + k_2a_2 & \dots & 0 & \dots & k_na_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_1a_i & k_2a_i & \dots & 1 & \dots & k_na_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1a_n & k_2a_n & \dots & 0 & \dots & 1 + k_na_n \end{bmatrix}$$

hoặc

$$I_n + A = \begin{bmatrix} 1 + k_1a_1 & k_2a_1 & \dots & k_ia_1 & \dots & k_na_1 \\ k_1a_2 & 1 + k_2a_2 & \dots & k_ia_2 & \dots & k_na_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1a_n & k_2a_n & \dots & k_ia_n & \dots & 1 + k_na_n \end{bmatrix}$$

nên khai triển Laplace cho $\det(I_n + A)$ theo cột thứ i hoặc theo hàng thứ i ta được $\det(I_n + A) = \det(I_{n-1} + B)$ với B là ma trận cấp $(n-1)$ có dạng như ma trận A .
Do đó giả sử $\forall a_i \neq 0$ và $\forall k_i \neq 0$. Rút thừa số chung của các hàng và các cột ta có

$$\det(I_n + A) = (k_1a_1k_2a_2...k_na_n)\det \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{k_1a_1} & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 + \frac{1}{k_2a_2} & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 + \frac{1}{k_ia_i} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 + \frac{1}{k_na_n} \end{bmatrix}$$

Nhân hàng đầu với (-1) rồi cộng vào các hàng từ thứ 2 đến hàng thứ n ta được

$$\det(I_n + A) = (k_1a_1k_2a_2...k_na_n)\det\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{k_1a_1} & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ -\frac{1}{k_1a_1} & \frac{1}{k_2a_2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{k_1a_1} & 0 & \dots & \frac{1}{k_ia_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{k_1a_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{k_na_n} \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} 1+k_1a_1 & k_2a_2 & \dots & k_ia_i & \dots & k_na_n \\ -1 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Cộng tất cả các cột từ thứ 2 đến thứ n vào cột đầu tiên ta được

$$\det(I_n + A) = \det\begin{bmatrix} 1+\sum_{i=1}^n k_ia_i & k_2a_2 & \dots & k_ia_i & \dots & k_na_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$
$$= 1 + \sum_{i=1}^n k_ia_i = 1 + trace(A)$$

Bài 2.3 (HV An ninh Nhân dân). Với ma trận M ta gọi $\overline{M}$ là ma trận liên hợp của M theo nghĩa

$$\text{nếu } M = [m_{ij} = a + ib]_n \text{ thì } \overline{M} = [a - ib]_n \text{ trong đó } i^2 = -1$$

Từ định nghĩa của định thức dễ dàng chứng tỏ được $\det(\overline{M}) = \overline{\det(M)}$.
Do đó với $\alpha \geqslant 0$, đặt $M = I + i\sqrt{\alpha}.A$ ta có

$$I + \alpha.A^2 = (I + i\sqrt{\alpha}.A)(I - i\sqrt{\alpha}.A) = M.\overline{M}$$
$$\det(I + \alpha.A^2) = \det(M).\det(\overline{M}) = \det(M).\overline{\det(M)}$$
$$= |\det(M)|^2 \geqslant 0$$

Với $\alpha < 0$ thì $I + \alpha.A^2 = (I - \sqrt{-\alpha}.A)(I + \sqrt{-\alpha}.A)$, nên

$$\begin{aligned}\det(I - \sqrt{-\alpha}.A) &= \det[(I - \sqrt{-\alpha}.A)^t] = \det(I + \sqrt{-\alpha}.A)\\ \det(I + \alpha.A^2) &= \det(I + \sqrt{-\alpha}.A).\det(I + \sqrt{-\alpha}.A)\\ &= [\det(I + \sqrt{-\alpha}.A)]^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

Bài 2.4 (BTC)**.** Định thức cần tính bằng 1.
Sử dụng đẳng thức $\binom{a+1}{k} - \binom{a}{k} = \binom{a}{k-1}$, trừ từng cột cho cột ngay trước ta có

$$D(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} \binom{a_1}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{a_2}{1} & \binom{a_2}{0} & \binom{a_2+1}{0} & \cdots & \binom{a_2+n-2}{0} \\ \binom{a_3}{2} & \binom{a_3}{1} & \binom{a_3+1}{1} & \cdots & \binom{a_3+n-2}{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{a_n}{n-1} & \binom{a_n}{n-2} & \binom{a_n+1}{n-2} & \cdots & \binom{a_n+n-2}{n-2} \end{vmatrix} = D(a_2, a_3, \ldots, a_n).$$

Từ đó bằng quy nạp ta suy ra $D(a_1, \ldots, a_n) = 1$.

Bài 2.5 (BTC)**.** (a) Bằng cách cộng hàng và cột, ta có

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = i^n \begin{vmatrix} A+iB & -B+iA \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & 0 \\ B & A-iB \end{vmatrix} = |A+iB|.|A-iB|.$$

(b) Từ định nghĩa, dễ thấy $|A - iB| = \overline{|A + iB|}$. Do đó định thức ma trận khối bằng

$$|A + iB|^2,$$

nên là một số thực không âm.

Bài 2.6 (BTC)**.** Trước hết, nhận xét rằng định thức của ma trận A không phụ thuộc vào cách đánh chỉ số của các tập con khác rỗng của $\{1, 2, \ldots, n\}$. Thật vậy, một cách đánh chỉ số khác tương ứng với một hoán vị σ của các S_i và do đó khiến A trở thành một ma trận có dạng $P_\sigma A P_\sigma^{-1}$, trong đó P_σ là ma trận hoán vị định nghĩa bởi công thức $p_{ij} = 1$ nếu $\sigma(i) = j$ và $= 0$ nếu không.
Bây giờ, để tính định thức yêu cầu, ta sẽ đánh thứ tự một cách hợp lý và xây dựng một công thức truy hồi.
Với các tập con khác rỗng của $\{1, 2, \ldots, n + 1\}$, ta chọn một cách đánh chỉ số như sau: trước hết, sắp thứ tự (bất kì) các tập con của $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ không chứa $n + 1$ (như vậy, có cả thảy $2^n - 1$ tập con như vậy), rồi tiếp theo là các tập con của $\{1, 2, \ldots, n + 1\}$ có chứa $n + 1$ (như vậy, có cả thảy 2^n tập con như vậy). Với các tập con chứa $n + 1$ này ta đánh thứ tự như sau: chú ý rằng mỗi tập như vậy là hợp của $\{n + 1\}$ với một tập con của $\{1, 2, \ldots, n\}$ nên ta có thể sắp thứ tự dựa vào cách sắp thứ tự đã cố định ở trên, riêng với tập $\{n + 1\}$ ta xếp sau cùng (thứ tự lớn nhất).

Xét ma trận A_{n+1} là ma trận tương ứng với một cách đánh thứ tự như vậy. Dễ thấy rằng A_{n+1} có dạng như sau

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & A_n & & A_n & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ & A_n & & Id & \vdots \\ & & & & 1 \\ 0 & \cdots 0 & 1 & \cdots \; 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ma trận A_{n+1} có cấp $2^{n+1}-1$, là ma trận theo khối: A_n là ma trận vuông cấp 2^n-1 và Id là ma trận đơn vị cấp 2^n-1. Bằng cách thay mỗi cột của A_n, trừ cột cuối, bởi cột cuối cùng, ta suy ra

$$\det A_{n+1} = \det \begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & A_n & & A_n & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & A_n & & 0 & \vdots \\ & & & & 1 \\ 0 & \cdots 0 & 0 & \cdots \; 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Từ đây, dựa vào khai triển Laplace theo hàng cuối cùng,

$$\det A_{n+1} = \det \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ 0 & -A_n \end{pmatrix} = -(\det A_n)^2.$$

Đẳng thức áp chót đến từ việc thay mỗi cột của khối bên phải bởi hiệu của nó với mỗi cột tương ứng ở bên trái (rõ nghĩa ?), còn dấu -1 đến từ việc ma trận A_n có cấp lẻ.
Bây giờ, dễ tính toán được $A_2 = -1$. Ta suy ra $\det A_n = -1$ với mọi $n \geq 2$.

Bài 2.7 (ĐH Đồng Tháp)**.** Dễ thấy vế trái là hệ số của x^3 trong khai triển của định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{vmatrix}.$$

Theo định thức Vandermonde $D = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$

nên từ định lý Viet ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.8 (ĐH Hải Phòng)**.** Nếu A là ma trận khả nghịch ta có sự phân tích

$$M = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ X & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

trong đó $X = CA^{-1}, Y = D - CA^{-1}B$. Khi đó

$$\det(M) = \det\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ X & I_n \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \det(A)\det(Y).$$

Từ đó suy ra $\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B) = \det(AD - CB)$. Nếu ma trận A không khả nghịch thì ta xét đa thức

$$P(x) = \det(A - xI_n) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Ta có $P(x) \neq 0$ và $\deg(P(x)) = n$ nên P có không quá n nghiệm. Nói riêng, có vô số số thực x sao cho $P(x) \neq 0$, hay $A - xI_n$ khả nghịch.
Ta có

$$\det\begin{pmatrix} A - xI_n & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A - xI_n)\det(Y) = \det((A - xI_n)D - CB).$$

Do đẳng thức đúng với vô số x nên đúng với mọi số thực x. Thay $x = 0$ ta được điều phải chứng minh.

Bài 2.9 (ĐH Khoa học Huế)**.** a) Ta có A là ma trận ba đường chéo. Đặt $D_n = \det A$. Khai triển Laplace theo cột đầu tiên, ta được

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$$

và dễ thấy $D_1 = 5$ và $D_2 = 19$. Dễ tìm được số hạng tổng quát của dãy hồi quy tuyến tính cấp hai này là

$$D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

b) Vì $D_n = \det A \neq 0$ nên hệ đã cho có nghiệm duy nhất. Hơn nữa dễ thấy $x = (1, 1, \ldots, 1)$ là nghiệm nên đây là nghiệm duy nhất của hệ đã cho.

Bài 2.10 (ĐH Phạm Văn Đồng)**.** Từ dòng 1 đến dòng 2014, cộng vào nó tổng tất cả các dòng đứng sau ta được

$$\begin{vmatrix} x+2014 & x+2014 & x+2014 & \cdots & x+2014 & x+2014 \\ 2014 & x+2013 & x+2014 & \cdots & x+2014 & x+2014 \\ 0 & 2013 & x+2012 & \cdots & x+2014 & x+2014 \\ \cdots & & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$$

Nhân cột j với -1 và cộng vào cộng $(j+1)$ với $j = 1, 2, \ldots, n-1$ thì

$$\begin{aligned} D_{2015}(x) &= \begin{vmatrix} x+2014 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2014 & x-1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 2013 & x-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x+2014) \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2013 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x+2014) D_{2014}(x-1) = \cdots \\ &= \prod_{i=1}^{2015} (x + 2016 - 2i). \end{aligned}$$

Bài 2.11 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Ma trận $B = AA^T + 16I_n$ là ma trận đối xứng nên ma trận B có đủ n giá trị riêng thực.
Gọi $\lambda \in \mathbb{R}$ là một giá trị riêng của B ứng với véc tơ riêng $X \neq 0$. Khi đó:

$$AA^T x = (\lambda - 16)X.$$

Nhân hai về của phương trình này với véc tơ X^T ta được:

$$X^T AA^T X = (\lambda - 16) X^T X.$$

Vì vậy từ $X \neq 0$ ta kéo theo rằng $\lambda \geq 16$. **(3điểm)** Do đó, $\det(AA^T + 16I_n) \geq 16^n = 2^{4n}$. Đây là điều phải chứng minh.

Bài 2.12 (ĐH Tân Trào)**.** Ta xét trường hợp $n = 2$, ta có:

$$\begin{aligned}
D_2 = & \begin{pmatrix} (x_0+y_0)^2 & (x_0+y_1)^2 & (x_0+y_2)^2 \\ (x_1+y_0)^2 & (x_1+y_1)^2 & (x_1+y_2)^2 \\ (x_2+y_0)^2 & (x_2+y_1)^2 & (x_2+y_2)^2 \end{pmatrix} \\
= & \begin{vmatrix} 1 & 2x_0 & x_0^2 \\ 1 & 2x_1 & x_1^2 \\ 1 & 2x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_0^2 & y_1^2 & y_2^2 \\ y_0 & y_1 & y_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
= & \tbinom{2}{0}\tbinom{2}{1}\tbinom{2}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_0^2 & y_1^2 & y_2^2 \\ y_0 & y_1 & y_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
= & -\tbinom{2}{0}\tbinom{2}{1}\tbinom{2}{2} \textstyle\prod_{0\le j<i\le 2}(x_i-x_j)(y_i-y_j).
\end{aligned}$$

Trong trường hợp tổng quát, $i, j = 0, 1, 2, ..., n$, thực hiện một cách tương tự ta có:

$$D = |(x_i+y_j)^n| = (-1)^n \binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{n} \prod_{0\le j<i\le n}(x_i-x_j)(y_i-y_j).$$

Bài 2.13 (ĐH Tây Bắc)**.** (a) Rút nhân tử chung $\frac{1}{bc}; \frac{1}{ca}; \frac{1}{ab}$ tương ứng ở các dòng 2, 3, 4 ta được

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2b^2c^2} \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ abc & 0 & bc^2 & cb^2 \\ abc & ac^2 & 0 & ca^2 \\ abc & ab^2 & ba^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Rút nhân tử chung abc, a, b, c tương ứng ở các cột 1, 2, 3, 4 ta được

$$\frac{1}{a^2b^2c^2} \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ abc & 0 & bc^2 & cb^2 \\ abc & ac^2 & 0 & ca^2 \\ abc & ab^2 & ba^2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = \det B$$

Vậy $\det A = \det B$.

(b) Nhân dòng thứ 2 với -1 rồi cộng lần lượt với các dòng 3, 4 ta được

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 0 & c^2 & -c^2 & a^2-b^2 \\ 0 & b^2 & a^2-c^2 & -b^2 \end{vmatrix}$$

Khai triển theo dòng thứ 2 ta được

$$\det B = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c^2 & -c^2 & a^2-b^2 \\ b^2 & a^2-c^2 & -b^2 \end{vmatrix} = a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2.$$

Từ đó ta có

$$\det A = a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2 = -(a+b+c)(-a+b+c)(a+b+c)(a-b-c)$$

Do a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nên các nhân tử của $\det A$ đều dương. Vậy $\det A < 0$.

3 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài 3.1 (ĐH Đồng Tháp). Bài toán được đưa về tìm véc tơ $x \in \mathbb{Q}^{n+t}$ để $Ax = (1, 0, ..., 0)^T$, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 & ... & 1 & 1 & ... & 1 \\ a_{11}-1 & a_{12} & ... & a_{1t} & ... & a_{1n} & a_{11} & ... & a_{1t} \\ a_{21}-1 & a_{22}-1 & ... & a_{2t} & ... & a_{2n} & a_{21} & ... & a_{2t} \\ ... & ... & & ... & & ... & ... & & ... \\ a_{t1}-1 & a_{t2} & ... & a_{tt}-1 & ... & a_{tn} & a_{t1} & ... & a_{tt} \end{pmatrix}.$$

Biến đổi trên các cột đưa ma trận A về ma trận dạng:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 & ... & 1 & 0 & ... & 0 \\ a_{11}-1 & a_{12} & ... & a_{1t} & ... & a_{1n} & 1 & ... & 0 \\ a_{21}-1 & a_{22}-1 & ... & a_{2t} & ... & a_{2n} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & & ... & & ... & ... & & ... \\ a_{t1}-1 & a_{t2} & ... & a_{tt}-1 & ... & a_{tn} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Điều này chứng tỏ luôn tồn tại $x \in \mathbb{Q}^{n+t}$ để $Ax = (1, 0, ..., 0)^T$.

Bài 3.2 (ĐH Khoa học Huế). Điều kiện $|x| = |y| = |z| = 1$ suy ra $\bar{x} = 1/x,\ \bar{y} = 1/y$ và $\bar{z} = 1/z$. Từ đó lấy liên hợp phương trình đầu ta được $1/x + 1/y + 1/z = 1$ và do đó $xy + yz + zx = 1$. Theo Định lí Viet, x, y, z là 3 nghiệm của phương trình bậc ba

$$t^3 - t^2 + t - 1 = 0.$$

Phương trình này có ba nghiệm là 1 và $\pm i$ nên $(x, y, z) = (1, i, -i)$ và các hoán vị của chúng.

Bài 3.3 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Viết hệ cho dưới dạng $AX = \frac{1}{14}X$, trong đó $A \in \mathrm{Mat}(2014 \times 2014, \mathbb{Z})$.
Theo tính chất của ma trận nguyên, mọi giá trị riêng có dạng $\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}$ đều kéo theo $n = \pm 1$.
Điều này chứng tỏ rằng $\det(A - \frac{1}{14}I_{2014}) \neq 0$. Vì vậy, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $X = 0$.

Bài 3.4 (ĐH Sư phạm Huế)**.** Gọi A là ma trận hệ số của hệ. Ta có $A.A^T = (a^2+b^2+c^2+d^2)E$. Do đó $\det(A) = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$. Vậy nếu $a = b = c = d = 0$ thì hệ thỏa mãn với mọi (x_1, x_2, x_3, x_4). Trong trường hợp ngược lại ta có $\det(A) > 0$ và hệ có duy nhất nghiệm.

Bài 3.5 (ĐH Tân Trào)**.** - Ta có

$$X^2 = \begin{pmatrix} a^2+2b^2+c^2 & 2ab+2bc & 2ab+2bc & 2ac+2b^2 \\ 2ab+2bc & a^2+2b^2+c^2 & 2ac+2b^2 & 2ab+2bc \\ 2ab+2bc & 2ac+2b^2 & a^2+2b^2+c^2 & 2ab+2bc \\ 2ac+2b^2 & 2ab+2bc & 2ab+2bc & a^2+2b^2+c^2 \end{pmatrix}$$

- Phương trình $X^2 = I_4$ tương đương với hệ

$$\begin{cases} a^2+2b^2+c^2 = 1 \\ 2ab+2bc \quad = 0 \\ 2ac+2b^2 \quad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2b^2+c^2 = 1 \\ b(a+c) \quad = 0 \\ ac+b^2 \quad = 0 \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình này ta tìm được các cặp nghiệm $(a, b, c) \in \{(0;0;1),$ $(0;0;-1), (1;0;0), (-1;0;0), (\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}),$ $(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})\}$.

4 KHÔNG GIAN VÉC TƠ VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Bài 4.1 (ĐH An Giang)**.** Kiểm tra được E_n đóng với phép cộng và phép nhân vô hướng. Suy ra E_n là một không gian con của $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Xét $S = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx\}$. Khi đó

– Dễ thấy S là một tập sinh của E_n.

– Giả sử $f(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = 0$, ta chứng minh $a_i = 0, b_i = 0$ với mọi i bằng quy nạp như sau: Với $n = 1$, $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x = 0$. Cho x các giá trị $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ ta được $a_0 = a_1 = b_1 = 0$. Giả sử $f(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = 0$, khi đó

$$(f'' + n^2 f)(x) = n^2 a_0 + \sum_{k=1}^{n-1}((n^2-k^2)a_k \cos kx + (n^2-k^2)b_k \sin kx) = 0.$$

Theo giả thiết quy nạp ta được $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}$ đều bằng 0, do đó,

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = 0.$$

Cho x các giá trị $0, \frac{\pi}{2n}$ là được $a_n = b_n = 0$. Vậy, S là hệ độc lập tuyến tính nên suy ra S là một cơ sở của E_n.

Bài 4.2 (ĐH An Giang). (a) Với mọi $f(x), g(x) \in K_{n+1}[x]$ ta có

$$\begin{aligned}\varphi(f(x)+g(x)) &= \varphi((f+g)(x)) = (f+g)(x+1)\\ &= f(x+1)+g(x+1) = \varphi(f(x))+\varphi(g(x)),\end{aligned}$$

$$\varphi(af(x)) = \varphi((af)(x)) = (af)(x+1) = af(x+1) = a\varphi(f(x)).$$

Vậy, φ là một toán tử tuyến tính.

(b) Ma trận biểu diễn của φ theo cơ sở S là

$$[\varphi]_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots & \frac{1}{2}n(n-1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Đa thức đặc trưng của φ là $f(t) = (1-t)^{n+1}$. Đa thức của φ là $m(t) = (t-1)^{n+1}$.

Bài 4.3 (BTC). Một cách tầm thường, $0, \mathbb{R}^3$ ổn định dưới tác động của f. Ta sẽ xác định các đường thẳng và mặt phẳng ổn định dưới f. Chú ý rằng, các đường thẳng ổn định dưới f rõ ràng có dạng $\mathbb{R}v$ với v là một vector riêng. Thật vậy, một mặt, nếu $\mathbb{R}v$ ($v \neq 0$) ổn định dưới f thì $f(v) = \lambda v$ với λ nào đó nên v là một vector riêng và $\mathbb{R}v$ là một không gian riêng. Đảo lại, mọi đường thẳng có dạng $\mathbb{R}v$ với v là một vector riêng hiển nhiên ổn định dưới f.
Để xác định các vector riêng, ta tính đa thức đặc trưng của f, hay của ma trận A (ma trận đã cho):

$$P_f(X) = \det(A - XI_3) = -X(X+2)^2.$$

Như vậy, f có hai giá trị riêng là 0 và -2. Các tính toán đơn giản cho ta

$$\ker f = \mathbb{R}v_1, \ker(f+2Id) = \mathbb{R}v_2,$$

trong đó $v_1 = (3,1,5)^t, v_2 = (1,-1,1)^t$.
Nhân tiện, các tính toán này cho thấy f không chéo hoá được. Như vậy, các đường thẳng ổn định dưới f là

$$\mathbb{R}v_1 = \{(3x,x,5x)^t; x\in\mathbb{R}\} \quad \text{và} \quad \mathbb{R}v_2 = \{(x,-x,x)^t; x\in\mathbb{R}\}.$$

Giả sử U là một mặt phẳng (không gian con hai chiều) của $\mathbb{R}^3$ ổn định dưới f. Kí hiệu ϕ hạn chế của f lên U. Rõ ràng, đa thức đặc trưng của ϕ phải là ước của đa thức đặc trưng của f. Đây là một sự kiện quen biết và có thể được chứng minh bằng cách chọn một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ được tạo thành từ một cơ sở của U cùng với một vector $\neq 0$ bất kì không nằm trong U: ma trận của

f trong cơ sở này là một ma trận tam giác trên theo khối với một khối trên đường chéo có kích thước 2×2 chính là ma trận của ϕ trong một cơ sở của U, từ đó suy ra tính chất cần chỉ ra. Quan sát này cho thấy chỉ có 2 khả năng cho $P_\phi(X)$:

$$P_\phi(X) = X(X+2) \quad \text{hoặc} \quad P_\phi(X) = (X+2)^2.$$

Ta chia ra làm hai trường hợp tuỳ theo công thức của P_ϕ.

– Giả sử $P_\phi(X) = X(X+2)$. Thế thì U bị triệt tiêu bởi $\phi(\phi + 2Id)$ và do đó bởi $f(f+2Id)$. Có nghĩa là $U \subset \ker f(f+2Id)$. Theo công thức phân tích hạch, do $X, X+2$ nguyên tố cùng nhau,

$$\ker f(f+2Id) = \ker f \oplus \ker(f+2Id) = \mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_2.$$

  Nói riêng bao hàm thức $U \subset \ker f(f+2Id) = \mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_2$ phải là một đẳng thức. Đảo lại rõ ràng nếu

$$U = \mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_2 = \{(3x+y, x-y, 5x+y)^t; x, y \in \mathbb{R}\}$$

  thì U ổn định dưới f.

– Giả sử $P_\phi(X) = (X+2)^2$. Như vậy, U triệt tiêu bởi $(\phi + 2Id)^2$ và như vậy bởi $(f+2Id)^2$, hay $U \subset \ker(f+2Id)^2$. Các tính toán đơn giản cho thấy

$$\ker(f+2Id)^2 = \{(x, y, 2x+y)^t; x, y \in \mathbb{R}\},$$

  và đây là một không gian 2 chiều. Một lần nữa, trong trường hợp này ta phải có đẳng thức

$$U = \ker(f+2Id)^2 = \{(x, y, 2x+y)^t; x, y \in \mathbb{R}\}.$$

  Và đảo lại, đây là một không gian ổn định của f.

Kết luận, ta tìm được các không gian con ổn định của f: $0, \mathbb{R}^3$, các đường thẳng $\{(3x, x, 5x)^t; x \in \mathbb{R}\}, \{(x, -x, x)^t; x \in \mathbb{R}\}$ và các mặt phẳng $\{(3x+y, x-y, 5x+y)^t; x, y \in \mathbb{R}\}, \{(x, y, 2x+y)^t; x, y \in \mathbb{R}\}$.

Bài 4.4 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần CAND). Không giảm tính tổng quát, giả sử rằng $v_1, v_2, \cdots, v_n$ độc lập tuyến tính trên $\mathbb{R}$. Khi đó tồn tại $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sao cho

$$v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k.$$

Chúng ta sẽ chứng minh rằng $\lambda_k \in \mathbb{Q}, \quad \forall k$. Thật vậy, từ giả thiết và từ

$$-2 < v_i, v_j >= |v_i - v_j|^2 - |v_i|^2 - |v_j|^2$$

ta nhận được $< v_i, v_j >\in \mathbb{Q}, \quad \forall i, j$. Gọi A là ma trận vuông cấp n có các phần tử ở hàng thứ i, cột thứ j là $A_{ij} =< v_i, v_j >, \quad 1 \le i, j \le n$. Giả sử $\omega_i =< v_i, v_{n+1} >, \quad 1 \le i \le n$ khi đó $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \mathbb{Q}^n$. Đặt $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$. Khi đó, ta có

$$< v_i, v_{n+1} >= \sum_{k=1}^{n} \lambda_i < v_i, v_j >,$$

cho ta $A\lambda = \omega$. Do $v_1, v_2, \cdots, v_n$ độc lập tuyến tính nên A là ma trận khả nghịch. Giả sử nghịch đảo của A là ma trận A^{-1}. Khi đó, các phần tử của ma trận A^{-1} là các số hữu tỉ. Do đó $\lambda = A^{-1}\omega \in \mathbb{Q}^n$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 4.5 (ĐH Kỹ thuật Hậu cần CAND)**.** Giả sử A là ma trận đối xứng, khi đó ta có $trace(AA^t) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$. Do đó A là ma trận đối xứng thuộc V khi và chỉ khi A là ma trận O_n. Vì vậy nếu gọi S là không gian tất cả các ma trận đối xứng thì $V \cap S = \{0_n\}$. Ta lại có $dimS = \frac{n(n+1)}{2}$ và $V, S \subset M(n, \mathbb{R})$ trong đó $M(n, \mathbb{R})$ là không gian các ma trận vuông cấp n nên $dimV + dimS \le dimM(n, \mathbb{R}) = n^2$. Vì vậy $dimV \le \frac{n(n-1)}{2}$.
Mặt khác không gian tất cả các ma trận tam giác trên có chiều $\frac{n(n-1)}{2}$ thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.
Vậy chiều lớn nhất có thể có của V là $\frac{n(n-1)}{2}$.

Bài 4.6 (ĐH Phạm Văn Đồng)**.** a. Giả sử $k_0.1 + k_1x + k_2x^2 + \cdots + k_nx^n = 0$. Khi đó hệ phương trình

$$\begin{cases} 1.k_0 + x_1k_1 + x_1^2k_2 + \cdots + x_1^nk_n = 0 \\ 1.k_0 + x_2k_1 + x_2^2k_2 + \cdots + x_2^nk_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1k_0 + x_{n+1}k_1 + x_{n+1} + \cdots + x_{n+1}^nk_n = 0 \end{cases}$$

có định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} \ne 0$$

Suy ra hệ có nghiệm duy nhất tầm thường. Do đó hệ độc lập tuyến tính. Dễ thấy đây là một hệ sinh của $\mathbb{P}_n$ nên nó là cơ sở của $\mathbb{P}_n$.

b. Ma trận của ánh xạ f là

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{m+1} \end{bmatrix}.$$

Bài 4.7 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** 1) Giả sử có phương trình

$$a_0 I_n + a_1 A + ... + a_{k-1} A^{k-1} = 0.$$

Khi đó, từ tính chất lũy linh của ma trận A nhân cả hai vế trên với ma trận A^{k-1} ta được $a_0 = 0$.
Tương tự, ta có điều phải chứng minh.
2) Sử dụng tính chất lũy linh của ma trận A chứng minh rằng $\mathrm{rank}(A + A^2 + ... + A^{2014}) = \mathrm{rank} A$ và $\mathrm{rank}(A + A^2 + ... + A^{2015}) = \mathrm{rank} A$. **(2.5 điểm).**
Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4.8 (ĐH Tây Bắc)**.** – Với $\forall x \in V$ ta có $f(f^2 - id)(x) = (f^3 - f)(x) = 0$. Suy ra

$$f^2(x) - x = (f^2 - id)(x) \in \ker f.$$

Đặt $y = f^2(x) - x$ thì ta được $x = f^2(x) - y \in \operatorname{Im} f^2 + \ker f$. Vậy $V = \operatorname{Im} f^2 + \ker f \quad (1)$

– $\forall y \in \operatorname{Im} f^2 \cap \ker f \Rightarrow \begin{cases} y \in \operatorname{Im} f^2 \\ y \in \ker f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists x \in V : y = f^2(x) \\ f(y) = 0 \end{cases}$. Suy ra

$$0 = f(y) = f(f^2(x)) = f^3(x) = f(x)$$

Từ đó ta có $y = f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$. Vậy $\operatorname{Im} f^2 \cap \ker f = 0 \quad (2)$.
Từ (1) và (2) suy ra $V = \operatorname{Im} f^2 \oplus \ker f$. Mặt khác ta lại có $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^3 \subset \operatorname{Im} f^2 \Rightarrow \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$. Vậy $V = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$.

5 GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG

Bài 5.1 (ĐH An Giang)**.** (a) Ma trận biểu diễn của φ đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– Đa thức đặc trưng của φ là $f(t) = -t(t-1)^2$.
– Các giá trị riêng của φ là 0, 1.
– Với giá trị riêng là 0, vector riêng là $x = a(1, 2, 0)$. Với giá trị riêng là 1, vector riêng là $y = b(1, -1, 0)$.

(b) Chú ý rằng nếu α là giá trị riêng của φ thì α^2 là giá trị riêng của φ^2. Gọi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là các giá trị riêng của φ, khi đó, $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_n^2$ là các giá trị riêng của $\varphi^2 = Id_V$ nên

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \cdots = \alpha_n^2 = 1.$$

Do đó $\alpha_i = \pm 1$. Vậy tổng các giá trị riêng của φ là một số nguyên.

Bài 5.2 (BTC). M đồng dạng với ma trận đường chéo

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 2I_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Có thể chứng minh khẳng định này trực tiếp, hoặc thông qua ánh xạ $\phi : V \to V$ ứng với M. Theo cách thứ hai này, ta có

$$(\phi - \mathrm{Id}_V) \circ (\phi - 2\mathrm{Id}_V) = 0.$$

Đặt $V_1 = \mathrm{Ker}(\phi - \mathrm{Id}_V)$, $V_2 = \mathrm{Ker}(\phi - 2\mathrm{Id}_V)$. Dễ thấy $V_1 \cap V_2 = 0$. Ta cũng có $\mathrm{Im}(\phi - 2\mathrm{Id}_V) \subseteq V_1$. Do đó

$$\dim V_1 + \dim V_2 \geq \dim \mathrm{Im}(\phi - 2\mathrm{Id}_V) + \dim V_2 = n.$$

Từ đó suy ra $V = V_1 \oplus V_2$. Chọn một cơ sở của V_1 và một cơ sở của V_2. Ma trận của ϕ đối với cơ sở của V hợp từ hai cơ sở này có dạng

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 2I_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Bài 5.3 (BTC). (i) Vì M là đối xứng nên có một cơ sở trực giao là các véc tơ riêng của M, ký hiệu là $e_1, \dots, e_n$, ứng với các giá trị riêng $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Đặt $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$. Ta có

$$\rho_M(v) = \frac{\sum_{i,j} x_i x_j e_i^T M e_j}{\sum_{i,j} \langle e_i^T, e_j \rangle} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Từ đó suy ra $\lambda_1 \leq \rho_M(v) \leq \lambda_n$.

(ii) Ta có

$$M = \begin{vmatrix} N & D \\ D^T & P \end{vmatrix}.$$

Ma trận đối xứng N có các véc tơ riêng không trùng phương u_1, u_2 ứng với các giá trị riêng μ_1, μ_2. Đặt

$$v_1 = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} u_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$\rho_M(v_i) = \frac{v_i^T M v_i}{v_i^T v_i} = \frac{u_i^T N u_i}{u_i^T u_i} = \rho_N(u_i) = \mu_i,$$

với $i = 1, 2$. Áp dụng kết quả phần (i) ta suy ra

$$\lambda_1 \le \mu_1 \le \mu_2 \le \lambda_2.$$

Bài 5.4 (ĐH Phạm Văn Đồng)**.** Gọi k là giá trị riêng của ma trận A. Khi đó

$$AX = kX$$

cho nên $A^4X = k^4X$ hay k^4 là giá trị riêng của A^4. Mà $A^4 = -E$ nên $k^4 = -1$. Vì vậy, $k \notin \mathbb{R}$.

Bài 5.5 (ĐH Sư phạm Huế)**.** Do các $b_i \neq 0$ nên tồn tại định thức con cấp $n-1$ của A khác 0. Từ đó suy ra $\mathrm{rank}(A) \ge n-1$.
Mặt khác, do A la ma trận đối xứng nên A chéo hóa được. Ta chứng minh số chiều của các không gian con riêng của A bằng 1. Thật vậy:
Gọi λ là một giá trị riêng của A lúc đó theo nhận xét trên ta có $rank(A-\lambda I) \ge n-1$ và $det(A-\lambda I) = 0$ nên $rank(A-\lambda I) = n-1$. Do đó $dim(Ker(A-\lambda I)) = n-(n-1) = 1$. Vậy A có n giá trị riêng phân biệt.

6 ĐA THỨC

Bài 6.1 (ĐH An Giang)**.** (a) Do $p(x)$ chia hết cho $(x-2)(x+2)(x+3)$ nên suy ra $2, -2, -3$ là các nghiệm của $p(x)$, nghĩa là $p(2) = p(-2) = p(-3) = 0$. Từ đó tìm được $a = -1, b = 20, c = -12$. Vậy,

$$p(x) == x^5 + x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12.$$

(b) Ta có $S_1 = x_1 + x_2 = 6$, $S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 34$, $S_3 = 198$ và

$$S_k - 6S_{k-1} + S_{k-2} = 0, \forall k > 3.$$

Ta có S_1, S_2, S_3 không chia hết cho 5. Giả sử tồn tại k sao cho S_k chia hết cho 5. Gọi m là số nhỏ nhất sao cho S_m chia hết cho 5 ($m > 3$). Khi đó ta có

$$\begin{aligned} S_m &= 6S_{m-1} - S_{m-2} = (S_{m-1} - S_{m-2}) + 5S_{m-1} \\ &= 6S_{m-2} - S_{m-3} - S_{m-2} + 5S_{m-1} \\ &= 5(S_{m-1} + S_{m-2}) - S_{m-3}. \end{aligned}$$

Suy ra S_{m-3} chia hết cho 5. Vô lý do m là số nhỏ nhất mà S_m chia hết cho 5. Vậy, với mọi k, S_k không chia hết cho 5.

Bài 6.2 (BTC). - Sử dụng nghiệm phức, chứng minh được các đa thức thực bất khả quy gồm đa thức tuyến tính và tam thức bậc hai không có nghiệm.

- Có phân tích
$$P(x) = P_0(x)Q(x)$$
trong đó $P_0(x)$ là tích lũy thừa bậc chẵn của các đa thức bậc nhất, $Q(x)$ là tích các tam thức bậc hai không có nghiệm, nói cách khác có dạng $(ax+b)^2 + c^2$ với $c \neq 0$.

- Sử dụng đẳng thức
$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2.$$

Bài 6.3 (BTC). Xét các đa thức $(X - z_0)^k, k = 1, 2, \ldots, n-1$. Theo giả thiết, với mọi $1 \leq k \leq n-1$,
$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(z_k - z_0)^k = 0.$$
Như vậy,
$$s_k = (z_1 - z_0)^k + (z_2 - z_0)^k + \cdots + (z_n - z_0)^k = 0, \forall 1 \leq k \leq n-1.$$
Ký hiệu σ_i các đa thức đối xứng cơ bản của $z_1 - z_0, z_2 - z_0, \ldots, z_n - z_0$, định nghĩa bởi
$$(X - (z_1 - z_0)) \cdots (X - (z_n - z_0)) = X^n + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \sigma_i X^{n-i}.$$
Ta nhắc lại các hệ thức Newton:
$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1} s_1 \sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0, \forall 1 \leq k \leq n-1.$$
Như vậy, nếu $s_1, \ldots, s_{n-1} = 0$ thì ta có
$$\sigma_k = 0, \forall 1 \leq k \leq n-1.$$
Nói cách khác, $z_1 - z_0, \ldots, z_n - z_0$ là các nghiệm của đa thức $X^n + (-1)^n \sigma_n$. Điều này cũng có nghĩa là chúng là các căn bậc n của σ_n và do đó là các đỉnh của một đa giác đều trong mặt phẳng phức.

Bài 6.4 (ĐH Đồng Tháp). Từ đa thức $f(x)$ hệ số thực ta có $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$, nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 6.5 (ĐH Hải Phòng). Rõ ràng 0 không phải là nghiệm của đa thức $P(x)$. Bước 1. Giờ ta chứng minh đa thức $P(x)$ có ít nhất một nghiệm hữu tỉ. Thật vậy, theo định lý Viet ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b \end{cases}$$

Theo giả thiết $m = x_1/x_2 \in \mathbb{Q}$. Thay $x_1 = mx_2$, $x_3 = -a - (m+1)x_2$ vào phương trình thứ hai ta được

$$(m^2 + m + 1)x_2^2 + a(m+1)x_2 + b = 0.$$

Vậy x_2 là nghiệm của đa thức với hệ số hữu tỉ $Q(x) = (m^2+m+1)x^2+a(m+1)x+b$.
Chia đa thức ta có $P(x) = Q(x)(\alpha x + \beta) + mx + n$, với $\alpha, \beta, m, n \in \mathbb{Q}$, $\alpha \neq 0$. Dẫn đến $mx_2 + n = 0$. Nếu $m \neq 0$ thì $x_2 = -n/m$ là số hữu tỷ. Nếu $m = 0$ thì $n = 0$ và $P(x) = Q(x)(\alpha x + \beta)$, chứng tỏ $x = -\beta/\alpha$ là nghiệm hữu tỷ của $P(x)$.
Vậy trong mọi trường hợp thì đa thức $P(x)$ đều có nghiệm hữu tỉ.
Bước 2. Nếu đa thức $P(x)$ có nghiệm hữu tỉ thì mọi nghiệm khác của nó đều là số hữu tỉ. Do đó các nghiệm x_1, x_2, x_3 của $P(x)$ đều là số hữu tỉ.

Bài 6.6 (ĐH Khoa học Huế). Giả sử $\alpha \in \mathbb{C}$ là nghiệm phức chung của f và g. Gọi $\mathcal{P}$ là tập tất cả các đa thức hệ số hữu tỷ nhận α làm nghiệm. Ta có $\mathcal{P} \neq \emptyset$ vì $f, g \in \mathcal{P}$. Gọi $p \in \mathcal{P}$ là đa thức có bậc thấp nhất với hệ số bậc cao nhất bằng 1. Sử dụng phép chia Euclide, dễ thấy mọi đa thức thuộc $\mathcal{P}$ đều chia hết cho p. Nói riêng, f và g chia hết cho p. Vì f và g đều bất khả quy và có hệ số bậc cao nhất bằng 1 nên ta phải có $f = g = p$. Đó là điều cần chứng minh.

Bài 6.7 (ĐH Phạm Văn Đồng). Giả sử $\frac{r}{s}$ là nghiệm hữu tỉ của $P(x)$ suy ra $r|a$ và $s|a$ cho nên r, s là các số lẻ. Vì vậy, $s - r$ là số chẵn.
Ta có $P(x) = (sx - r)q(x)$ và $P(1) = 2a + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ cho nên $P(1)$ là số lẻ. Mặt khác lại có $P(1) = (s - r)q(1)$ suy ra $(s - r)|P(1)$. Điều này là mâu thuẫn với $s - r$ chẵn.

Bài 6.8 (ĐH Phạm Văn Đồng). Đặt $f(x) = P(x) - 1$ khi đó $f(a) = f(b) = f(c) = 0$ cho nên a, b, c là các nghiệm của đa thức bậc ba $f(x)$. Do đó hệ số cao nhất là

$$m = \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-c)(b-a)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}$$

thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 6.9 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Dễ thấy $P(1) = a$ trong đó a thỏa mãn phương trình $a^2 - 2a - 2 = 0$.
TH1. Nếu $P(x)$ là đa thức hằng. Khi đó, dễ thấy đa thức $P(x) = a$ trong đó a là nghiệm phương trình $a^2 - 2a - 2 = 0$ thỏa mãn.
TH2. Nếu $P(x)$ là đa thức khác hằng. Khi đó ta có thể viết $P(x) = (x - 1)^n P_1(x) + a, P_1(1) \neq 0$. Thay dạng này vào phương trình ban đầu ta được phương trình:

$$(x-1)P_1^2(x) + 2aP_1(x) = 2(2x+2)^n P_1(2x^2-1)..$$

Thay $x = 1$ vào phương trình này ta được $P_1(1) = 0$ hoặc $a = 3^n$. Cả hai điều này đều không thể xảy ra.
Vậy trường hợp này không tồn tại đa thức $P(x)$ trong trường hợp này.

Bài 6.10 (ĐH Sư phạm Huế). Biểu diễn $m = 3k + r$ và $n = 3l + s$, với $k, l \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{N}$ và $0 \leq r, s \leq 2$. Khi đó $x^m + x^n + 1 = (x^{3k} - 1)x^r + (x^{3l} - 1)x^s + x^r + x^s + 1$.
Vì $x^{3k} - 1$ và $x^{3l} - 1$ cùng chia hết cho $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ nên $x^m + x^n + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi $x^r + x^s + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$.
Do $r, s \in \{0, 1, 2\}$ nên $x^r + x^s + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi $r = 2, s = 1$ hoặc $r = 1, s = 2$.
Mặt khác $mn - 2 = (3k + r)(3l + s) - 2 = 3(3kl + ks + lr) + rs - 2$. Nhưng $rs - 2$ chia hết cho 3 khi và chỉ khi $r = 2, s = 1$ hoặc $r = 1, s = 2$.
Vậy $x^m + x^n + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi $mn - 2$ chia hết cho 3.

Bài 6.11 (ĐH Sư phạm Huế). Nếu $f(x)$ là đa thức hằng thì khẳng định hiển nhiên đúng. Bây giờ ta giả sử $f(x)$ là đa thức có bậc dương. Khi đó $f(x)$ luôn phân tích được thành tích của các đa thức bậc nhất hoặc đa thức bậc hai không có nghiệm thực. Mà $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có thể phân tích $f(x) = g(x)^2 h(x)$, trong đó $h(x)$ là tích của các đa thức bậc 2 không có nghiệm thực.
Xét đa thức $t(x) = x^2 + px + q$ với $p^2 - 4q < 0$. Ta luôn phân tích được $t(x)$ thành tổng bình phương của 2 đa thức như sau

$$x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + (\sqrt{q - \frac{p^2}{4}})^2.$$

Mặt khác, với mọi đa thức f_1, f_2, f_3, f_4 ta có

$$(f_1^2 + f_2^2)(f_3^2 + f_4^2) = (f_1f_3 + f_2f_4)^2 + (f_1f_4 - f_2f_3)^2.$$

Do đó $f(x) = g(x)^2 h(x)$ luôn có thể được phân tích được thành tổng bình phương của hai đa thức.

Bài 6.12 (ĐH Tân Trào)**.** Đặt

$$P(x,y) = \frac{p(x)-p(y)}{x-y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 + 1$$

$$Q(x,y) = \frac{q(x)-q(y)}{x-y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 + x + y.$$

Ta phải tìm các cặp số phức w, z thỏa mãn $P(w,z) = Q(w,z) = 0$. Ta có $P(w,z) - Q(w,z) = 0$, suy ra $w + z = 1$. Đặt $c = wz$. Do đó, từ đẳng thức $P(w,z) = 0$ ta có phương trình:

$$c^2 - 3c + 2 = 0 \Leftrightarrow c = 1, c = 2.$$

Khi đó, giải hai hệ phương trình

$$\begin{cases} w + z = 1 \\ wz = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} w + z = 1 \\ wz = 2 \end{cases}$$

ta thu được các cặp số w, z thỏa mãn yêu cầu bài ra

$$\left(\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 \mp i\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}; \frac{1 \mp i\sqrt{7}}{2}\right).$$

Bài 6.13 (ĐH Tây Bắc)**.** (a) Giả sử $|f(x)| \leq 1$ với mọi x thỏa mãn $|x| \leq 1$.
Thay lần lượt $x = 1; x = -1$ ta có hệ bất đẳng thức

$$\begin{cases} 4 + a + b + c \leqslant 1 \\ -4 + a - b + c \geqslant -1 \end{cases} \Rightarrow b \leqslant -3$$

Thay lần lượt $x = \frac{1}{2}; x = -\frac{1}{2}$ ta có hệ bất đẳng thức

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c \geqslant -1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow b \geqslant -3$$

Từ đó suy ra $b = -3$. $f(x) = 4x^3 - 3x + ax^2 + c$.
Lại thay $x = 1; x = -1$ ta có hệ bất đẳng thức

$$\begin{cases} a + c \leqslant 0 \\ a + c \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow a + c = 0 \quad (1)$$

Thay lần lượt $x = \frac{1}{2}; x = -\frac{1}{2}$ ta có hệ bất đẳng thức

$$\begin{cases} \frac{a}{4} + c \geqslant 0 \\ \frac{a}{4} + c \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{4} + c = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = c = 0$. Vậy $f(x) = 4x^3 - 3x$. Thử lại với $|x| \leq 1$ thì đặt $x = \cos t$ ta sẽ có

$$|f(x)| = \left|4x^3 - 3x\right| = \left|4\cos^3 t - 3\cos t\right| = |\cos 3t| \leqslant 1$$

(b) Giả sử $\alpha = a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}$ là nghiệm của đa thức $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0; (a_i \in \mathbb{Z})$, thì số $\overline{\alpha} = a - b\sqrt{2}$ cũng là nghiệm của $f(x)$. Suy ra đa thức $(x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) = x^2 - 2ax + a^2 - 2b^2$ là ước của $f(x)$ (trên $\mathbb{R}$) và do đó $f(x)$ phân tích được thành

$$f(x) = (x^2 - 2ax + a^2 - 2b^2)(x^{n-2} + b_1x^{n-3} + ... + b_{n-2}); b_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n-2$$

Khai triển vế phải rồi đồng nhất hệ số ta có

$$\begin{cases} b_1 - 2a = a_{n-1} \\ b_2 - 2ab_1 + a^2 - 2b^2 = a_{n-2} \\ .... \\ b_{n-2}(a^2 - 2b^2) = a_0 \end{cases}$$

Vì các số $a, b, a_i; (i = 0, ..., n-1)$ đều là các số hữu tỉ nên các số $b_1, b_2, ..., b_{n-2}$ là hữu tỉ. Quy đồng mẫu số các hệ số của đa thức $x^2 - 2ax + a^2 - 2b^2;\ x^{n-2} + b_1x^{n-3} + ... + b_{n-2}$ và viết $f(x)$ dưới dạng $f(x) = \frac{p}{q}g(x)h(x)$ trong đó $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản và $g(x), h(x)$ là các đa thức nguyên bản với hệ số bậc cao nhất đều dương. Vì $f(x)$ là đa thức có hệ số nguyên, hệ số cao nhất bằng 1 suy ra $\frac{p}{q} = 1$. Điều này chứng tỏ rằng $g(x) = x^2 - 2ax + a^2 - 2b^2 \in \mathbb{Z}[x]$ hay $2a$ và $a^2 - 2b^2$ là các số nguyên. Suy ra $4a^2; 4a^2 - 8b^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 8b^2 \in \mathbb{Z}$.

Ta viết a dưới dạng $a = \frac{m}{2}$ với m nguyên và b dưới dạng phân số tối giản $\frac{p}{q}, q > 0$ thì q^2 là ước của 8. Từ đó $q = 1$ hoặc $q = 2$.

Khi $q = 1$ thì $b \in \mathbb{Z}$ và $a^2 - 2b^2 = \frac{m^2}{4} - 2b^2 = c \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow m^2 = 4(2b^2 + c) \Rightarrow m \vdots 2 \Rightarrow a = \frac{m}{2} \in \mathbb{Z}$.

Khi $q = 2$ thì $a^2 - 2b^2 = \frac{m^2 - 2p^2}{4}$ là số nguyên suy ra m và p đều chẵn điều này dẫn đến a và b nguyên.

Bài 6.14 (ĐH Tây Bắc). 1. . Đặt $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow x^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow (x^2 - 5)^2 = 24 \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. Suy ra $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ là nghiệm của đa thức $p(x) = x^4 - 10x + 1$. Ta có $p(x)$ bất khả quy. Thật vậy, do $p(x)$ không có nghiệm hữu tỉ nên $p(x)$ không có nhân tử bậc nhất, suy ra nhân tử của $p(x)$ nếu có phải có bậc 2.

Giả sử rằng $p(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \quad (1)$, do $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ nên ta có thể giả thiết a, b, c, d nguyên. Khai triển vế phải của (1) rồi đồng nhất hệ số ta được

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ b + d + ac = -10 \\ bc + ad = 0 \\ bd = 1 \end{cases}$$

Do hệ không có nghiệm nguyên nên $p(x)$ không có nhân tử bậc 2. Vậy $p(x)$ bất khả quy. Giả sử $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ nhận $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ là nghiệm thì $f(x)$ chia hết cho $p(x)$ trên $\mathbb{Q}$, vì nếu ngược lại thì $(p(x), f(x)) = 1$ khi đó tồn tại các đa thức với hệ số hữu tỉ $u(x), v(x)$ sao cho $f(x)u(x) + p(x)v(x) = 1$. Thay $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ vào đẳng thức trên sẽ gặp mâu thuẫn $0 = 1$. Từ đó $f(x)$ phân tích thành

$$f(x) = (x^4 - 10x + 1)(b_{n-4}x^{n-4} + ... + b_1 x + b_0); b_k \in \mathbb{Q}; k = 0, ..., n - 4$$

Khai triển vế phải và đồng nhất hệ số ta được

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = a_1 \\ b_{2k+1} = a_{2k+1} \\ b_{2k} - 10b_{2k-2} = a_k \\ \forall k \geqslant 1 \end{cases}$$

Do các $a_i; i = 0, ..., n$ đều nguyên suy ra các $b_k; k = 0, ..., n - 4$ nguyên. Vậy $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ nhận $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ là nghiệm khi và chỉ khi $f(x)$ có dạng:

$$f(x) = p(x)g(x); g(x) \in \mathbb{Z}[\text{x}].$$

2. Từ giả thiết ta có $f(x) = \frac{1}{10}g(x) - x$ có 3 nghiệm là 1, 2, 3. Do đó $f(x)$ viết được dưới dạng $f(x) = \dfrac{1}{10}(x-1)(x-2)(x-3)(x-a)$. Suy ra

$$f(12) + f(-8) = \frac{1}{10}(11.10.9(12 - a) + 11.10.9(8 + a)) = 11.9.20 = 1980.$$

Suy ra

$$\frac{g(12) + g(-8)}{10} = 1980 + (12 - 8) = 1984.$$

7 TỔ HỢP

Bài 7.1 (ĐH An Giang). Ta tạo một lưới các ô được tạo bởi 9 đường dọc và 3 đường ngang. Do mỗi điểm đều được tô bởi màu xanh hoặc đỏ nên các điểm nút được tô màu xanh hoặc đỏ. Xét 3 nút trên một đường dọc, do mỗi nút có hai cách tô màu nên có $2^3 = 8$ các tô màu. Vậy mỗi đường dọc có 8 cách tô màu. Mà có 9 đường dọc nên tồn tại ít nhất 2 đường có cùng một cách tô màu. Giả sử đó là hai đường dọc a_1 và a_2. Do mỗi điểm chỉ được tô một trong hai màu nên trên a_1 có 2 điểm nút được tô cùng màu. Do dọc a_2 tô giống a_1 nên sẽ có 2 điểm nút được tô cùng màu với hai điểm nút trên a_1. Bốn điểm cùng màu này tạo nên một hình chữ nhật.

Bài 7.2 (ĐH Quảng Bình). Game thủ số 2 luôn thắng vì:
Xét đồng dư modulo 2 thì trò trở thành: game thủ số 1 điền số 1, game thủ số 2 điền số 0 vào ma trận. Định thực thu được cuối cùng bằng 1 thì game thủ 1 sẽ thắng và ngược lại game thủ số 2 thắng.
Chú ý rằng, khi thay đổi các dòng và các cột thì định thức chỉ thay đổi dấu nên nó không thay đổi tính chất chẵn lẻ. Vì vậy ta có thể giả sử game thủ thứ nhất điền vào ô a_{11}. Khi đó người chơi thứ hai điền vào ô a_{22}.
sau bước điền tiếp theo của game thủ thứ nhất còn ít nhất 3 trong 4 ô $a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32}$ sẽ còn trống. Game thủ số hai sẽ điền vào một trong ba ô đó sao cho cùng với ô a_{22} tạo thành 1 dòng hoặc 1 cột mà không có giá trị 1, chẳng hạn điền vào a_{23}.

$$\begin{vmatrix} 1 & * & * \\ * & 0 & 0 \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

Điều này bắt buộc người chơi thứ nhất phải điền vào ô a_{21} trong bước tiếp theo để tránh định thức có một hàng toàn phần tử 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & * & * \\ 1 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

Lúc này trước khi game thủ thứ hai chơi tiếp ta có 5 khả năng có thể xảy ra như sau:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & * & * \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & * & * \end{vmatrix};2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & * \\ 1 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{vmatrix};3)\begin{vmatrix} 1 & * & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{vmatrix};4)\begin{vmatrix} 1 & * & * \\ 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & * \end{vmatrix};5)\begin{vmatrix} 1 & * & * \\ 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 \end{vmatrix}$$

- Khả năng 1) người chơi thứ hai chỉ cần điền vào ô a_{12} thì game thủ thứ nhất phải chặn 2 ô là a_{32} và a_{13}.

- Khả năng 2) người chơi thứ hai chỉ cần điền vào ô a_{33} thì game thủ thứ nhất phải chặn 2 ô là a_{32} và a_{13}.
- Khả năng 3) người chơi thứ hai chỉ cần điền vào ô a_{32} thì game thủ thứ nhất phải chặn 2 ô là a_{12} và a_{33}.
- Khả năng 4) người chơi thứ hai chỉ cần điền vào ô a_{32} thì game thủ thứ nhất phải chặn 2 ô là a_{12} và a_{33}.
- Khả năng 5) người chơi thứ hai chỉ cần điền vào ô a_{12} thì game thủ thứ nhất phải chặn 2 ô là a_{13} và a_{32}.

Bài 7.3 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Hàm sinh cho các lựa chọn của x_1, x_2, x_3, x_4 cho bởi, vì các $1 \leq x_i \leq 17$:

$$A(x) = x + x^2 + ... + x^{17}$$

$$B(x) = x + x^2 + ... + x^{17}$$

$$C(x) = x + x^2 + ... + x^{17}$$

$$D(x) = x + x^2 + ... + x^{17}.$$

Khi đó, hàm sinh cho sự lựa chọn bộ nghiệm của phương trình đã cho là:

$$G(x) = A(x)B(x)C(x)D(x) = (x+x^2+...+x^{17})^4 = x^4(1-x^{17})^4(1+x+x^2+...)^4.$$

Vì vậy, số lời giải của phương trình đã cho tương ứng là hệ số của x^{20} trong khai triển trên. Do đó nó xác định bằng hệ số của x^{16} trong khai triển của $(1 + x + x^2 + ...)^4$.
Vì vậy, số lời giải của phương trình đã cho bằng C_{19}^{16}.

Bài 7.4 (ĐH Tân Trào)**.** Để chứng minh đẳng thức này ta giải bài toán sau bằng hai cách.
Bài toán. *Đếm số cách thành lập một ban đề thi có n thành viên từ một nhóm có n giáo viên Toán, n giáo viên Tin sao cho Trưởng ban đề thi luôn là giáo viên Toán.*
Cách 1. Chọn Trưởng ban trước.
- Có n cách chọn Trưởng ban là 01 giáo viên Toán;
- Còn lại $2n - 1$ thành viên. Trong số này chọn ra $n - 1$ thành viên để thành lập Ban đề thi có n thành viên. Số cách chọn $n - 1$ thành viên còn lại là $\binom{2n-1}{n-1}$.

Theo quy tắc nhân, số cách thành lập thỏa mãn yêu cầu là

$$n\binom{2n-1}{n-1}.$$

Cách 2. Chọn k thành viên Toán trước và chọn Trưởng ban từ k thành viên này, $1 \leq k \leq n$.

- Có $\binom{n}{k}$ cách chọn k thành viên Toán từ nhóm có n giáo viên Toán. Khi đó sẽ có k cách lựa chọn Trưởng ban.
- Chọn tiếp $n-k$ thành viên còn lại từ nhóm có n giáo viên Tin. Số cách chọn là
$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$
Theo quy tắc nhân, số cách thành lập một Ban đề thi có k giáo viên Toán và Trưởng ban luôn là giáo viên Toán là
$$k\binom{n}{k}^2, k = 1, 2, ..., n$$
Do đó theo quy tắc cộng số cách thỏa mãn yêu cầu là
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2.$$
Hai cách đếm khác nhau, nhưng cho ta một kết quả giống nhau, suy ra
$$n\binom{2n-1}{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2.$$

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: GIẢI TÍCH

1 DÃY SỐ

Bài 1.1 (ĐH An Giang)**.** Do $a_{n+1} - a_n = -a_n^2 \leq 0$, với mọi $n \in \mathbb{N}$, nên suy ra (a_n) là dãy giảm. Mặt khác $a_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}$ nên dãy (a_n) tồn tại giới hạn hữu hạn. Qua giới hạn phương trình

$$a_{n+1} = a_n - a_n^2,$$

ta được $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Mặt khác, ta có

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}a_n} = \frac{a_n^2}{\left(a_n - a_n^2\right)a_n} = \frac{1}{1-a_n} \to 1(n \to \infty).$$

Áp dụng Định lý trung bình Cesaro, ta được

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{na_n} = 1.$$

Vì vậy $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 1$.

Bài 1.2 (HV An Ninh)**.** +) Trước tiên ta chứng minh bất đẳng thức

$$|t-1|^{2k+1} \leqslant 2^{2k}|t^{2k+1} - 1|, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy, khi $t = 1$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
Với $t \neq 1$ xét hàm $f(t) = \dfrac{(t-1)^{2k+1}}{t^{2k+1}-1}$, thì $f(t)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{(2k+1)(t-1)^{2k}(t^{2k+1}-1) - (2k+1)t^{2k}(t-1)^{2k+1}}{(t^{2k+1}-1)^2} \\ &= \frac{(2k+1)(t-1)^{2k}(t^{2k}-1)}{(t^{2k+1}-1)^2}. \end{aligned}$$

Như thế dấu của $f'(t)$ là dấu của $(t^{2k}-1)$ với $t \neq 1$. Ta thấy
$f'(t) > 0$ khi $-\infty < t < -1$ hoặc $1 < t < +\infty$,
$f'(t) < 0$ khi $-1 < t < 1$

$f'(-1) = 0$ và $f(-1) = 2^{2k}$.
Lại thấy

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 1, \lim_{t\to 1} f(t) = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)^{2k+1}}{t^{2k+1}-1} = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)^{2k}}{t^{2k}} = 0.$$

Do đó suy ra

$$0 \leqslant f(t) = \frac{(t-1)^{2k+1}}{t^{2k+1}-1} \leqslant 2^{2k} \quad \Rightarrow \quad \frac{|t-1|^{2k+1}}{|t^{2k+1}-1|} \leqslant 2^{2k}, \forall t \neq 1$$

dẫn đến có bất đẳng thức cần phải chứng minh.
+) Tiếp theo ta chứng minh bất đẳng thức

$$|x-y|^{2k+1} \leqslant 2^{2k}|x^{2k+1} - y^{2k+1}|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy, khi $y = 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
Với $y \neq 0$, thì trong bất đẳng thức đã chứng minh ở trên ta chỉ việc đặt $t = \dfrac{x}{y}$ là suy ra bất đẳng thức cần phải chứng minh.
+) Bây giờ trở lại bài toán đã cho, ta coi $x = a_n$, $y = b_n$ thì được

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant |a_n - b_n|^{2k+1} \leqslant 2^{2k}|a_n^{2k+1} - b_n^{2k+1}|, \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \leqslant |a_n - b_n| \leqslant 2^{\frac{2k}{2k+1}} \left| a_n^{2k+1} - b_n^{2k+1} \right|^{\frac{1}{2k+1}}. \end{aligned}$$

Cho $n \to \infty$ ta được $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Kết hợp với giả thiết $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$ ta dẫn tới $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Bài 1.3 (ĐH Bách Khoa Thành phố Hồ Chí Minh). (a) Ta có

$$C_{2n+1}^n = \frac{2n+1}{n+1} C_{2n}^n = \frac{2n+1}{n+1} u_n \in \mathbb{Z}.$$

Mặt khác $(2n+1, n+1) = 1$ nên $\dfrac{u_n}{n+1} \in \mathbb{Z}$.

(b) Dễ thấy $u_{n+1} = \dfrac{4n+2}{n+1} u_n \leq 4u_n$.
Từ $u_1 = 2 \leq 4$, dùng quy nạp dẫn đến $u_n \leq 4^n$, với mọi n. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{5^n} = 0$.

Bài 1.4 (HV Công nghệ Bưu chính Viễn thông). Ta có

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{(n+2)!} > 0.$$

Do vậy, $x_{n+1} > x_n \quad \forall n = 1, 2, \cdots, 2013$. Như vậy
$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2014}.$$
Khi đó
$$x_{2014} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{2014}^n} < 2014^{\frac{1}{n}} x_{2014}.$$
Cho $n \to +\infty$. Ta có $I = x_{2014}$.
Mặt khác, từ
$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$
suy ra
$$x_k = (1 - \frac{1}{2!}) + (\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}) + \cdots + (\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}) = 1 - \frac{1}{(k+1)!}.$$
Do vậy
$$x_{2014} = 1 - \frac{1}{2015!}.$$
Suy ra
$$I = 1 - \frac{1}{2015!}.$$
Bài 1.5 (ĐH Đồng Tháp)**.** Với mỗi $k \geq 1$, ta có
$$\begin{aligned} a_k - a_{k-1} &= \frac{(-1)^1}{k}(a_{k-1} - a_{k-2}) \\ &= \frac{(-1)^2}{k(k-1)}(a_{k-2} - a_{k-3}) \\ &\dots \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{k!}(a_1 - a_0) \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{k!} 2014. \end{aligned}$$
Cho k nhận các giá trị từ 1 đến n và cộng n đẳng thức lại, ta được:
$$a_n - a_0 = 2014 \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = -2014 \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 - 2014 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$.
Mặt khác, $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.
Với $x = -1$, ta được $e^{-1} - 1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$.
Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2005 - 2014e^{-1}$.

Bài 1.6 (ĐH Hùng Vương Phú Thọ)**.** Xét hàm số

$$f(x) = 2014\ln(x^2 + 2015^2) - 2015^2 \quad , x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $x_{n+1} = f(x_n)$. Ta có
$f'(x) = 2014\dfrac{2x}{x^2 + 2015^2} \Rightarrow |f'(x)| \leq \dfrac{2014}{2015}$.
Xét hàm số $g(x) = x - f(x), \quad x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow g'(x) = 1 - f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x)$ đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $g(0) = -f(0) = -2014\ln(2015^2) + 2015^2 > 0$.
và $g(-2015^2) = -2014\ln(2015^2 + 2015^4) < 0$.
$\Rightarrow g(0).g(-2015^2) < 0 \Rightarrow \exists c \in (-2015^2; 0)$ thỏa mãn $g(c) = 0$.
Do g đồng biến nên c là duy nhất
$\Rightarrow \exists! c \in (-2015^2; 0)$ thỏa mãn $f(c) = c$.
Lại có: $x_{n+1} = f(x_n)$ nên với mỗi n tồn tại q_n nằm giữa c và x_n thỏa mãn :
$f(x_n) - f(c) = f'(q_n).(x_n - c)$.
$\Rightarrow |x_{n+1} - c| = |f'(q_n)|.|x_n - c| \leq \dfrac{2014}{2015}.|x_n - c|$.
$\Rightarrow |x_n - c| \leq \dfrac{2014}{2015}.|x_{n-1} - c| \leq \cdots \leq \left(\dfrac{2014}{2015}\right)^{n-1}|x_1 - c|$.
Cho $n \to \infty$ ta được $|x_n - c| \to 0$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

Bài 1.7 (ĐHKH Huế)**.** a) Dễ dàng chứng minh bằng qui nạp.
b) Vì cả hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2015x + 1 = 0$ đều dương và phân biệt, ta có thể giả thiết $p > q > 0$. Chú ý rằng

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_1a_2\dots a_n} &= \frac{p^{2^n} + q^{2^n}}{(p+q)(p^2+q^2)\dots(p^{2^{n-1}} + q^{2^{n-1}})}\\ &= \frac{(p-q)(p^{2^n} + q^{2^n})}{(p-q)(p+q)(p^2+q^2)\dots(p^{2^{n-1}} + q^{2^{n-1}})}\\ &= \frac{(p-q)(p^{2^n} + q^{2^n})}{p^{2^n} - q^{2^n}}.\end{aligned}$$

Lại do $\frac{q}{p} < 1$ ta suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_1a_2\dots a_n} = p - q.$$

Bài 1.8 (ĐH Kỹ Thuật Hậu Cần CAND)**.** Ta chứng minh rằng các giá trị a, b thỏa mãn $a > b > 0$ là các giá trị cần tìm. Thật vậy, nếu $a < b$ thì với dãy $x_n = (\frac{b}{a})^n$, ta có

$$\mathop{lim}_{n\to\infty}(ax_{n+1} - bx_n) = \mathop{lim}_{n\to\infty}(a(\frac{b}{a})^{n+1} - b(\frac{b}{a})^n) = 0,$$

tuy nhiên
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (\frac{b}{a})^n = +\infty.$$
Với $a = b$ thì xét dãy $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ thỏa mãn
$$\lim_{n\to\infty} (ax_{n+1} - bx_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0$$
nhưng
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) = +\infty.$$
Với $a > b$. Đặt $l_- = \liminf_{n\to\infty} x_n$ và $l_+ = \limsup_{n\to\infty} x_n$.
Ta có
$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n\to\infty} (ax_{n+1} - bx_n) &\geq \limsup_{n\to\infty}(ax_{n+1}) + \limsup_{n\to\infty}(-bx_n) \\ &= al_+ - \liminf_{n\to\infty} f(bx_n) \\ &= al_+ - bl_-. \end{aligned}$$
Do đó $l_+ \leq \frac{b}{a} l_-$. Do $l_- \leq l_+$, nên ta có $l_+ \leq \frac{b}{a} l_+$ và do đó $l_- \leq l_+ \leq 0$.
Tương tự, ta có $l_- \geq \frac{b}{a} l_+$. Do $l_- \leq l_+$, nên ta có $l_- \geq \frac{b}{a} l_-$ vì vậy $l_+ \geq l_- \geq 0$.
Do đó $l_+ = l_- = 0$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 1.9 (ĐH Phạm Văn Đồng)**.** + Tính $u_{n+1} - 1 = \dfrac{2(u_n - 1)}{2015u_n + 2017}$.
+ Tính $u_{n+1} + 1 = \dfrac{4032(u_n + 1)}{2015u_n + 2017}$.
Suy ra
$$\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{1}{2016} \frac{u_n - 1}{u_n + 1}.$$
Đặt
$$y_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$
thì
$$y_{n+1} = \frac{1}{2016} y_n = ... = \frac{1}{2016^n} y_1.$$
Mà $y_1 = \dfrac{1}{3}$ nên $y_{n+1} = \dfrac{1}{3.2016^n}$.
Cho nên
$$y_n = \frac{1}{3.2016^{n-1}}.$$
Vì vậy,
$$u_n = \frac{-y_n - 1}{y_n - 1} = \frac{3.2016^{n-1} - 1}{3.2016^{n-1} + 1}.$$

Bài 1.10 (ĐH Phạm Văn Đồng). Viết

$$S_n = \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{4-\frac{2^2}{n^2}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4-\frac{n^2}{n^2}}}\Big)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ trên đoạn $[0;1]$ và phân hoạch đoạn $[0;1]$ bằng các điểm chia có độ dài bằng nhau và bằng $\frac{1}{n}$. Khi đó S_n là tổng tích phân thứ n của hàm số. Do đó

$$\lim S_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \frac{\pi}{4}.$$

Bài 1.11 (ĐH Quảng Bình). Ta có
$a_n + b_n\sqrt{2} = (a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{2})^2 = (a_{n-2} + b_{n-2}\sqrt{2})^{2^2} = ... = (a_1 + b_1\sqrt{2})^{2^{n-1}} = (3+2\sqrt{2})^{2^{n-1}} = (\sqrt{2}+1)^{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$
Tương tự ta có $a_n - b_n\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$
Suy ra

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2}((\sqrt{2}+1)^{2^n} + (\sqrt{2}-1)^{2^n}) \\ b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}((\sqrt{2}+1)^{2^n} - (\sqrt{2}-1)^{2^n}) \end{cases}$$

Mặt khác

$$\sqrt[2^n]{\frac{(\sqrt{2}+1)^{2^n}}{4\sqrt{2}}} < \sqrt[2^n]{b_n} < \sqrt[2^n]{a_n} < \sqrt{2}+1.$$

và $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\frac{(\sqrt{2}+1)^{2^n}}{4\sqrt{2}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}+1}{(4\sqrt{2})^{\frac{1}{2^n}}} = \sqrt{2}+1$
nên

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{a_n} = \sqrt{2}+1.$$

Lại có

$$a_1a_2...a_n = \frac{b_2}{2b_1}\frac{b_3}{2b_2}...\frac{b_{n+1}}{2b_n} = \frac{a_nb_n}{2^n}.$$

Do đó:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{a_1a_2...a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\frac{a_nb_n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{a_n}.\sqrt[2^n]{b_n}.\sqrt[2^n]{\frac{1}{2^n}} = (\sqrt{2}+1)^2.$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\frac{1}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2^n}} = 1.$

Bài 1.12 (ĐH Quảng Bình). Từ công thức truy hồi ta có

$$\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+...+\frac{x_n}{n}=\frac{n+1}{2}x_n$$

và

$$\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+...+\frac{x_{n-1}}{n-1}=\frac{n}{2}x_{n-1}$$

Trừ từng vế hai đẳng thức ta được:

$$\frac{x_n}{n}=\frac{(n+1)x_n}{2}-\frac{nx_{n-1}}{2}, n\geq 3.$$

Khi đó: $x_n\left(\frac{n+1}{2}-\frac{1}{n}\right)=\frac{n}{2}x_{n-1}\Leftrightarrow x_n=\frac{n^2}{n^2+n-2}x_{n-1}$.
Với mọi $n\geq 3$, ta có:

$$x_n=\frac{n^2}{n^2+n-2}x_{n-1}=\frac{n^2}{(n-1)(n+2)}x_{n-1}=\frac{n^2}{(n-1)(n+2)}\frac{(n-1)^2}{(n-2)(n+1)}x_{n-2}$$

$$x_n=\frac{n^2}{(n-1)(n+2)}.\frac{(n-1)^2}{(n-2)(n+1)}...\frac{3^2}{2.5}x_2=\frac{4.3n}{2(n+2)(n+1)}x_2$$

$=\dfrac{2015n}{(n+2)(n+1)}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.
Do đó $\lim\limits_{n\to\infty}(2015+n)x_n=2015$.

Bài 1.13 (ĐH Sư Phạm Hà Nội 2). Theo giả thiết suy ra

$$x_i-x_{i+1}\geq x_{i+1}-x_{i+2} \text{ và } 0\leq x_i\leq 1,\ \forall i=1,2,...$$

Giả sử k là số nguyên dương bấy kỳ, với mọi $n>k$ ta có

$$x_k-x_{k+1}\geq\cdots\geq x_{n-1}-x_n.$$

Suy ra

$$x_k-x_n=x_k-x_{k+1}+x_{k+1}-x_{k+2}+\cdots+x_{n-1}-x_n\leq(n-k)\left(x_k-x_{k+1}\right).$$

Hay

$$x_k-x_{k+1}\geq\frac{x_k-x_n}{n-k}.$$

Mà $0\leq x_i\leq 1,\ \forall i=1,2,...$ suy ra $x_k-x_n\geq -1$. Kết hợp với trên suy ra

$$x_k-x_{k+1}\geq\frac{x_k-x_n}{n-k}\geq\frac{-1}{n-k}.$$

Cho n tiến ra vô cùng, ta suy ra

$$x_k-x_{k+1}\geq 0.$$

Hay dãy $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới. Vì vậy, dãy $\{x_n\}$ là dãy hội tụ.

Bài 1.14 (ĐH Sư Phạm Huế). Ta có

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 1 + \sqrt{(1+\sqrt{2x_n - x_n^2})(1-\sqrt{2x_n - x_n^2})} \\ &= 1 + |x_n - 1|. \end{aligned}$$

Do đó $x_n \geq 1$ với mọi $n \geq 2$.
Ta xét 3 trường hợp sau:
i) Nếu $x_1 < 1$ thì

$$x_n = \begin{cases} x_1 & \text{nếu } n = 1 \\ x_2 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ x_3 & \text{nếu } n \text{ lẻ }, n > 1. \end{cases}$$

Dãy hội tụ nếu $x_2 = x_3 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$, các trường hợp còn lại dãy phân kì. Khi đó $a = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.
ii) Nếu $x_1 = 1$ thì

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ 2 & \text{nếu } n \text{ chẵn}. \end{cases}$$

Dãy trên phân kì.
iii) Nếu $x_1 > 1$ thì $x_{n+2} = x_n$. Dãy hội tụ nếu và chỉ nếu $x_1 = x_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Bài 1.15 (ĐH Sư Phạm Huế). Vì f liên tục tại 1 nên với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta \in (0,1)$ sao cho $-\epsilon + f(1) < f(x) < f(1) + \epsilon$ với $x \in (\delta, 1]$. Ta có

$$\int_0^1 nx^n f(x)dx = \int_0^\delta nx^n f(x)dx + \int_\delta^1 nx^n f(x)dx.$$

Mặt khác,

$$0 < |\int_0^\delta nx^n f(x)dx| \leq \delta^{n+1}\frac{n}{n+1}. \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

và

$$\frac{n}{n+1}(1-\delta^{n+1})(-\epsilon + f(1)) < \int_\delta^1 nx^n f(x)dx < \frac{n}{n+1}(1-\delta^{n+1})(\epsilon + f(1)).$$

Cho $n \to \infty$, ta được $-\epsilon + f(1) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 nx^n f(x)dx \leq f(1) + \epsilon$. Vì ϵ tùy ý nên ta có được kết quả cần tìm là $f(1)$.

2 HÀM SỐ

Bài 2.1 (ĐH An Giang)**.** Lấy $x_1 \in \mathbb{R}$, đặt $x_{n+1} = f\left(x_n\right), n \geqslant 1$. Ta có

$$\left|f\left(x_n\right) - x_n\right| \leq g\left(x_n\right) - g\left(f\left(x_n\right)\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow \left|x_{n+1} - x_n\right| \leq g\left(x_n\right) - g\left(x_{n+1}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Suy ra dãy $\left(g\left(x_n\right)\right)_n$ là dãy giảm và bị chặn dưới nên hội tụ. Do đó $\left(g\left(x_n\right)\right)_n$ là dãy Cauchy. Mặt khác, do $\left|x_{n+1} - x_n\right| \leq g\left(x_n\right) - g\left(x_{n+1}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| \leq \left|x_{n+p} - x_{n+p-1}\right| + \cdots + \left|x_{n+1} - x_n\right|$$

$$\leq g\left(x_n\right) - g\left(x_{n+p}\right) \leq \left|g\left(x_{n+p}\right) - g\left(x_n\right)\right|, \forall n, p \in \mathbb{N}^*$$

Suy ra $\left(x_n\right)$ là dãy Cauchy nên hội tụ. Gọi $c = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ ta được $f\left(c\right) = c$.

Bài 2.2 (ĐH Bách Khoa Thành phố Hồ Chí Minh)**.** Xét hàm $g : [0, 1984] \to \mathbb{R}$; $g\left(x\right) := f\left(x\right) - f\left(x + 31\right)$. Ta thấy g liên tục trên $[0, 1984]$. Từ tính liên tục của g nên có thể giả sử $g < 0$ hoặc $g > 0$ trên $[0, 1984]$, vì ngược lại thì ta có kết luận bài toán. Giả sử $g\left(x\right) < 0$, với mọi $x \in [0, 1984]$. Dẫn đến $g\left(1984\right) = f\left(1984\right) - f\left(2015\right) < 0$, nên $f\left(1984\right) < f\left(2015\right) = f\left(0\right)$. Thêm nữa $f\left(0\right) < f\left(31\right) < f\left(2 \times 31\right) < \ldots < f\left(64 \times 31\right) = f\left(1984\right)$. Mâu thuẫn dẫn đến giả sử không xảy ra. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.3 (HV Công nghệ Bưu chính Viễn thông)**.** Do $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$, nên tồn tại các số $x_1, x_2 \in [0; 1]$ sao cho

$$f(x_1) = \min f(x) : x \in [0; 1], f(x_2) = \max f(x) : x \in [0; 1].$$

Với $g(x) > 0$ ta có

$$g(x)f(x_1) \leq g(x)f(x) \leq g(x)f(x_2)$$

và do đó

$$\int_0^1 g(x)f(x_1)dx \leq \int_0^1 g(x)f(x)dx \leq \int_0^1 g(x)f(x_2)dx.$$

Khi đó

$$f(x_1) \leq \frac{1}{m}\int_0^1 f(x)g(x)dx \leq f(x_2).$$

Do $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$, nên tồn tại số $c \in [0; 1]$ sao cho

$$\frac{1}{m}\int_0^1 f(x)g(x)dx = f(c).$$

Bài 2.4 (ĐH Đồng Tháp). Từ $f(x))^2 = (g(x))^2$, ta có $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0$ với mọi $x \in (a; b)$ (1). Ta xét hai trường hợp sau:
Trường hợp 1: $f(x) - g(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a; b)$. Từ (1), ta có $f(x) = -g(x)$ với mọi $x \in (a; b)$.
Trường hợp2: Tồn tại $x_0 \in (a; b)$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$. Ta sẽ chứng minh $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in (a; b)$. Giả sử tồn tại $x_1 \in (a; b)$ sao cho $f(x_1) \neq g(x_1)$. Khi đó, từ (1) ta có $f(x_1) = -g(x_1)$. Do đó $f(x_0)f(x_1) = -g(x_0)g(x_1) \neq 0$. Nếu $f(x_0)f(x_1) < 0$ thì tồn tại $x_2 \in (a; b)$ sao cho $f(x_2) = 0$. Điều này là mâu thuẫn. Nếu $f(x_0)f(x_1) > 0$ thì $g(x_0)g(x_1) < 0$. Do đó tồn tại $x_3 \in (a; b)$ sao cho $g(x_3) = 0$. Điều này là mâu thuẫn. Vậy $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in (a; b)$.

Bài 2.5 (ĐH Hùng Vương Phú Thọ). Từ giả thiết suy ra
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$
Rõ ràng $f'(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta xét 2 trường hợp sau:
- Nếu $f'(x)$ không là đơn ánh trên $\mathbb{R}$ nghĩa là tồn tại $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ và $f'(x_1) = f'(x_2)$
thì theo định lý Rolle, tồn tại x_0 sao cho $f''(x_0) = 0$.
- Nếu $f'(x)$ là đơn ánh khi đó $f'(x)$ là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$.
Do đó tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$
và $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1.$
Vậy $f'(x)$ là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ và $-1 < f'(x) < 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Đặt $\varphi(x) = x - f(x)$.
Ta có $\varphi'(x) = 1 - f'(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(0) = -f(0) = 0$.
Từ đó $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) \geq \varphi(0) > 0$

Vậy $x - f(x) \nrightarrow 0 \quad (x \to +\infty)$, mâu thuẫn giả thiết. Như vậy trường hợp này không xảy ra.

Bài 2.6 (ĐHKH Huế). Lấy $x, y \in [a, b]$ sao cho $x + y = a + b$. Gọi $t \in [0, 1]$ là số sao cho $x = ta + (1-t)b$. Lúc đó $y = a + b - x = (1-t)a + tb$. Vì vậy,

$$f(x) \leq tf(a) + (1-t)f(b); \; f(y) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Suy ra $f(x) + f(y) \leq f(a) + f(b)$. Dùng phép đổi biến $x = a + b - u$ ta có

$$I := \int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(a+b-u)(-du) = \int_a^b f(a+b-x)dx.$$

Vì vậy, do chứng minh trên: $f(x) + f(a+b-x) \leq f(a) + f(b)$, ta có

$$2I = \int_a^b (f(x) + f(a+b-x))dx \leq \int_a^b (f(a) + f(b))dx.$$

Suy ra

$$I \leq \frac{[f(a)+f(b)](b-a)}{2}.$$

Bài 2.7 (ĐH Kỹ Thuật Hậu Cần CAND). Từ giả thiết ta có $C(\alpha) = \frac{1}{2015!}\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - 2014)$, suy ra

$$C(-y-1) = -\frac{1}{2015!}(y+1)(y+2)\cdots(y+2015).$$

Do đó

$$C(-y-1)(\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+2}+\cdots+\frac{1}{y+2015}) = -\frac{d}{dy}(\frac{1}{2015!}(y+1)(y+2)\cdots(y+2015)).$$

Vì vậy, tích phân cần tính là

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{d}{dy}(-\frac{1}{2015!}(y+1)(y+2)\cdots(y+2015))dy \\ &= -\frac{1}{2015!}(y+1)(y+2)\cdots(y+2015)|_0^1 = -2015. \end{aligned}$$

Bài 2.8 (ĐH Sư Phạm Huế). Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu. Xét hàm $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Theo giả thiết, g chỉ nhận giá trị vô tỉ. Vì g liên tục nên nó là hàm hằng, tức là $g(x) = c$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, c là số vô tỉ. Suy ra $f(x+2) - f(x) = 2c$ với mọi x. Gọi $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0)$ là số hữu tỉ. Khi đó $f(x_0+2)$ cũng là số hữu tỉ, do đó $f(x_0+2) - f(x_0)$ là số hữu tỉ (mâu thuẫn). Mâu thuẫn này chứng tỏ f không tồn tại.

3 PHÉP TÍNH VI PHÂN

Bài 3.1 (ĐH An Giang). Với $x > 0$ tùy ý, theo công thức Maclaurin ta có

$$f(x) = 0 + 0 + \cdots + 0 + \frac{f^{(k)}(\theta)}{k!}x^k, 0 < \theta < x$$

Do $f^{(k+1)}(t) \geqslant 0, \forall t > 0$ nên $f^{(k)}(t)$ tăng trên $[0; +\infty)$, từ đó $f^{(k)}(\theta) \leq f^{(k)}(x)$. Suy ra $f(x) \leq \dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}x^k$. Bây giờ khai triển Taylor hàm $f(2x)$ tại x ta được:

$$f(2x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}x^n \geqslant nf(x),$$

với $0 < \theta < x, \forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
Vậy $f(x) = 0, \forall x > 0$.

Bài 3.2 (HV An Ninh)**.** Theo định lý Lagrange tồn tại số $c \in (0, 1)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1$$

Có hai trường hợp xảy ra:
1) Với mọi $x \in [0, 1]$ thì $f'(x) \geqslant 1$ (hoặc $f'(x) \leqslant 1$)
2) Tồn tại $a, b \in [0, 1]$ để $f'(a) < 1 < f'(b)$
+) Trường hợp 1) ta suy ra $f(x) \equiv x, \forall x \in [0, 1]$. Thật vậy, xét $f'(x) \geqslant 1, \forall x \in [0, 1]$. Giả sử phản chứng: tồn tại $t \in [0, 1]$ để $f(t) \neq t$. Tức là $f(t) > t$ hoặc $f(t) < t$.
Khi $f(t) > t$. Ta có $t \neq 1$, áp dụng định lý Lagrange cho hàm f trên $[t, 1]$ tồn tại $\alpha \in (1, t)$ để

$$f'(\alpha) = \frac{f(1) - f(t)}{1 - t} = \frac{1 - f(t)}{1 - t} < \frac{1 - t}{1 - t} = 1$$

mâu thuẫn với việc $f'(x) \geqslant 1, \forall x \in [0, 1]$.
Khi $f(t) < t$. Ta có $t \neq 0$, áp dụng định lý Lagrange cho hàm f trên $[0, t]$ tồn tại $\beta \in (0, t)$ để

$$f'(\beta) = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{f(t)}{t} < \frac{t}{t} = 1$$

mâu thuẫn với $f'(x) \geqslant 1, \forall x \in [0, 1]$. Tương tự với $f'(x) \leqslant 1, \forall x \in [0, 1]$.
Kết quả $f(x) \equiv x, \forall x \in [0, 1]$ dẫn đến $f'(x) \equiv 1, \forall x \in [0, 1]$ và kết luận của bài toán hiển nhiên là đúng.
+) Trường hợp 2) ta thấy do $f'(x)$ liên tục, nên giá trị của $f'(x)$ lấp đầy một đoạn nào đó $[m, M] \subset \mathbb{R}$. Gọi $\varepsilon = \min\{1 - f'(a)\ , f'(b) - 1\} > 0$ thì $[1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \subset [m, M]$ và giá trị của $f'(x)$ lấp đầy $[1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$.
Lấy bất kỳ $y_1 \in (1, 1 + \varepsilon]$, thì phải tồn tại $x_1 \in [0, 1]$ để $f'(x_1) = y_1$.
Xét hệ thức $\dfrac{1}{y_1} + \dfrac{1}{y_2} = 2$, ta được $y_2 = \dfrac{y_1}{2y_1 - 1}$.
Dựa vào tính nghịch biến của hàm $g(x) = \dfrac{x}{2x - 1}$ (do $g'(x) = \dfrac{-1}{(2x - 1)^2} < 0, \forall x \neq \dfrac{1}{2}$) ta suy ra

$$1 > y_2 > \frac{1 + \varepsilon}{1 + 2\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} > 1 - \varepsilon \quad \text{hay} \quad y_2 \in (1 - \varepsilon, 1)$$

nên phải tồn tại $x_2 \in [0, 1]$ để $f'(x_2) = y_2$.
Như vậy ta đã có $x_1, x_2 \in [0, 1]$ để $\dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{1}{f'(x_2)} = 2 \quad (*)$.
Bây giờ nếu n chẵn ($n = 2k$) thì bằng cách lấy k điểm dạng y_1 như nói ở trên và theo kết quả $(*)$ ta sẽ được kết luận của bài toán.
Nếu n lẻ ($n = 2k + 1$) thì vẫn bằng cách xét k điểm dạng y_1 như nói ở trên và theo kết quả $(*)$, đồng thời lấy thêm điểm $c \in (0, 1)$ mà $f'(c) = 1$ đã có ở phần đầu, ta sẽ được kết luận của bài toán.

Bài 3.3 (HV An Ninh). Nếu $f(x)$ là hàm hằng số thì bài toán trở thành tầm thường.
Nếu $f(x)$ là hàm tuyến tính ($f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$) thì mâu thuẫn với giả thiết $f'(a) = f'(b) = 0$.
Áp dụng định lý Cauchy cho $f(x)$ và $\phi(x) = \frac{1}{2}(x-a)^2$ trên đoạn $[a, \frac{1}{2}(a+b)]$ ta có

$$\frac{8[f(\frac{a+b}{2}) - f(a)]}{(b-a)^2} = \frac{f'(\xi_1)}{\xi_1 - a}\ ,\ a < \xi_1 < \frac{a+b}{2}$$

Áp dụng định lý Cauchy cho $f(x)$ và $\psi(x) = \frac{1}{2}(x-b)^2$ trên đoạn $[\frac{1}{2}(a+b), b]$ ta có

$$\frac{8[f(b) - f(\frac{a+b}{2})]}{(b-a)^2} = \frac{f'(\xi_2)}{\xi_2 - b}\ ,\ \frac{a+b}{2} < \xi_2 < b$$

Suy ra

$$\frac{8[f(\frac{a+b}{2}) - f(a)]}{(b-a)^2} + \frac{8[f(b) - f(\frac{a+b}{2})]}{(b-a)^2} = \frac{f'(\xi_1)}{\xi_1 - a} + \frac{f'(\xi_2)}{\xi_2 - b}$$
$$\frac{8[f(b) - f(a)]}{(b-a)^2} = \frac{f'(\xi_1) - f'(a)}{\xi_1 - a} + \frac{f'(\xi_2) - f'(b)}{\xi_2 - b}$$

Áp dụng định lý Lagrange cho $f'(x)$ ta được

$$\frac{f'(\xi_1) - f'(a)}{\xi_1 - a} = f''(\eta_1)\ ,\ \frac{f'(\xi_2) - f'(b)}{\xi_2 - b} = f''(\eta_2)\ ,\ a < \eta_1 < \xi_1\ ,\ \xi_2 < \eta_2 < b$$

Do đó

$$\frac{8[f(b) - f(a)]}{(b-a)^2} = f''(\eta_1) + f''(\eta_2)$$
$$\frac{8}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)| = |f''(\eta_1) + f''(\eta_2)| \leqslant |f''(\eta_1)| + |f''(\eta_2)|$$
$$\leqslant 2.\max\{|f''(\eta_1)|, |f''(\eta_2)|\}$$

Như vậy tồn tại $c = \eta_1$ hoặc $c = \eta_2$ và $a < c < b$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Bài 3.4 (HV Công nghệ Bưu chính Viễn thông). Theo định nghĩa của $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{'}(x) = 0$, ta có

$$\forall\epsilon > 0, \exists x_{n_0} \forall x \geq x_{n_0} \Rightarrow |f^{'}(x)| < \frac{\epsilon}{2}\ \ (1)$$

Với mọi dãy (x_n) sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x)$ trên đoạn $[x_{n_0}, x_n]$, tồn tại $\xi_n \in (x_{n_0}, x_n)$ sao cho

$$|\frac{f(x_n) - f(x_{n_0})}{x_n - x_{n_0}}| = |f'(\xi_n)|\ \ (2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta nhận được

$$\left|\frac{f(x_n) - f(x_{n_0})}{x_n - x_{n_0}}\right| = |f'(\xi_n)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Khi đó

$$\frac{f(x_{n_0})}{x_n} - \frac{\epsilon}{2}(1 - \frac{f(x_{n_0})}{x_n}) < \frac{f(x_n)}{x_n} < \frac{f(x_{n_0})}{x_n} + \frac{\epsilon}{2}(1 - \frac{x_{n_0}}{x_n}).$$

Với n đủ lớn, ta có

$$-\frac{\epsilon}{2} < \frac{f(x_{n_0})}{x_n} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Mà $\frac{\epsilon}{2}(1 - \frac{x_{n_0}}{x_n}) < \frac{\epsilon}{2}$. Khi đó, ta có

$$-\epsilon < \frac{f(x_n)}{x_n} < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Bài 3.5 (ĐH Đồng Tháp)**.** Xét hàm số $h(x) = x^{2015}e^{-x}f(x)$ liên tục khả vi trên $\mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$h'(x) = x^{2014}e^{-x}[2015f(x) - xf(x) + xf'(x)].$$

Ta lại có $h(0) = h(1) = 0$, h là hàm số liên tục trên $[0;1]$ và khả vi trong khoảng $(0;1)$. Theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (0;1)$ sao cho $h'(c) = 0$. Điều này suy ra $xf'(x) = (x - 2015)f(x)$ có nghiệm trong $(0;1)$.

Bài 3.6 (ĐH Hùng Vương Phú Thọ)**.** Với mọi $x \in (0,2)$ ta có

$$\begin{cases} f(x) &= f(0) + f'(\theta_1).x \quad ,\theta_1 \in (0;x) \\ f(x) &= f(2) + f'(\theta_2).(x-2) \quad ,\theta_2 \in (x;2) \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} f(x) \geq 1 - 2x, \forall x \in (0;2) \\ f(x) \geq 2x - 1 \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$\int_0^1 f(x)dx \geq \int_0^1 (1-2x)dx = 0$$

$$\int_1^2 f(x)dx \geq \int_1^2 (2x-1)dx = 2$$

$\Rightarrow \int\limits_0^2 f(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_1^2 f(x)dx \geq 2.$

Mặt khác $\displaystyle\int\limits_0^2 f(x)dx = 2$ khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - 2x & \forall x \in [0;1] \\ f(x) = 2x - 1 & \forall x \in [1;2] \end{cases}$$

Điều này mâu thuẫn với tính khả vi liên tục của f. Vậy $\displaystyle\int\limits_0^2 f(x)dx > 2$.

Bài 3.7 (ĐHKH Huế)**.** Lấy dãy $x_n \to 0^+$ tùy ý, ta chứng minh $(f(x_n))$ là dãy Cauchy. Thật vậy, với mọi $\epsilon > 0$, do f liên tục đều nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f(x) - f(x')| < \epsilon$ với mọi $x, x' > 0$ mà $|x - x'| < \delta$. Do $x_n \to 0^+$ nên chọn $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - x_m| < \delta$ với mọi $n, m \geq n_0$. Nhưng lúc đó, $|f(x_m) - f(x_n)| < \epsilon$ với mọi $m, n \geq n_0$. Suy ra $(f(x_n))$ là dãy Cauchy. Vậy, với mọi dãy $x_n \to 0^+$, $(f(x_n))$ là dãy Cauchy, nên hội tụ. Suy ra tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x\to 0^+} f(x).$$

Chọn $f(x) = \sin(x)$, ta thấy f liên tục đều nhưng giới hạn

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)$$

không tồn tại.

Bài 3.8 (ĐHKH Huế)**.** Nếu khẳng định của bài toán là sai thì ta phải có $f''(x) > 16$ (vì nếu $f''(x) < -16$ ta sẽ xét hàm $-f$) với mọi $x \in [0,1]$. Gọi $a \in [0,1]$ là điểm tại đó f đạt giá trị bé nhất. Ta xét hai trường hợp:
+ Nếu $a \in [0, \frac{1}{2}]$, thì $f'(a) \geq 0$ ($f'(a) = 0$ nếu $a \in (0, \frac{1}{2}]$). Do đó

$$2 \geq f(1) - f(a) = f'(a)(1-a) + \frac{f''(\xi)}{2}(1-a)^2 \geq \frac{f''(\xi)}{2}(1-a)^2 > \frac{16}{2}(\frac{1}{2})^2 = 2.$$

+ Nếu $a \in (\frac{1}{2}, 1]$, thì $f'(a) \leq 0$ ($f'(a) = 0$ nếu $a \in (\frac{1}{2}, 1)$). Do đó

$$2 \geq f(0) - f(a) = f'(a)(0-a) + \frac{f''(\xi)}{2}(0-a)^2 \geq \frac{f''(\xi)}{2}a^2 > \frac{16}{2}(\frac{1}{2})^2 = 2.$$

Vậy cả hai trường hợp đều dẫn đến mâu thuẫn.

Bài 3.9 (ĐH Kỹ Thuật Hậu Cần CAND). Từ giả thiết, ta có

$$\frac{d}{dx}(arctanf(x)+x) = \frac{f'(x)}{f^2(x)+1} + 1 \geq 0, \quad \forall x \in (a,b).$$

Do đó $arctanf(x)+x$ là hàm đơn điệu tăng trong (a,b), và do đó

$$\lim_{x\to a^+}(arctanf(x)+x) \leq \lim_{x\to b^-}(arctanf(x)+x)$$

hay

$$\frac{\pi}{2} + a \leq -\frac{\pi}{2} + b.$$

Tức là $b - a \geq \pi$.
Ví dụ $f(x) = cotanx, a = 0, b = \pi$.

Bài 3.10 (ĐH Phạm Văn Đồng). Đặt hàm số

$$F(x) = \frac{\displaystyle\int_{2015}^{x} f(t)dt}{\sqrt{x}}; x \in [2015; 2017].$$

Khi đó $F(2015) = F(2017) = 0$, nên theo định lý Rolle thì tồn tại $c \in (2015; 2017)$ sao cho $F'(c) = 0$.
Mà

$$F'(x) = \frac{2xf(x) - \displaystyle\int_{2015}^{x} f(t)dt}{2x\sqrt{x}}.$$

Nên ta suy ra được điều cần chứng minh.

Bài 3.11 (ĐH Quảng Bình). Xét hàm số $g(x) = x.f(x).e^{-x}$ liên tục trên $[0,a]$, khả vi trên $(0,a)$. Ta có $g(0) = g(a) = 0; g(x)$ Theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (0,a)$ sao cho $g'(c) = 0$. Mà

$$g'(x) = e^{-x}[-xf(x) + f(x) + xf'(x)].$$

Nên $g'(c) = 0 \Leftrightarrow -cf(c) + f(c) + cf'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = f(c).\left(1 - \dfrac{1}{c}\right)$.

Bài 3.12 (ĐH Sư Phạm Hà Nội 2). Cố định $0 < a < b$ và đặt $\lambda = \dfrac{a}{b}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x > 0$ và

$$\mu(\lambda, x) = \frac{f(x) - f(\lambda x)}{1-\lambda}.$$

+ Chứng minh

$$\sup_{x>0}\left|\frac{\sin(ax)}{ax}-\frac{\sin(bx)}{bx}\right|\le 4\left(1-\frac{a}{b}\right).(1)$$

Từ $|f(x)|<1$ với mọi $x>0$ suy ra

$$|\mu(\lambda,\ x)|<\frac{2}{1-\lambda}\le 4,$$

nếu $0<\lambda\le\frac{1}{2}$. Tiếp theo, ta phải chứng minh $|\mu(\lambda,\ x)|\le 4$ với mọi $\frac{1}{2}<\lambda<1$. Áp dụng định lý Lagrange cho hàm f trên đoạn $[\lambda x,\ x]$, suy ra tồn tại $\zeta_x\in(\lambda x,\ x)$ sao cho $\mu(\lambda,\ x)=x.f'(\zeta_x)$. Ta có

$$xf'(\zeta_x)=\frac{x(\cos\zeta_x-f(\zeta_x))}{\zeta_x}.$$

Do đó,

$$|\mu(\lambda,x)|\le\frac{2x}{\zeta_x}\le\frac{2}{\lambda}<4.$$

Vì vậy, ta có

$$\sup_{x>0}|\mu(\lambda,\ x)|\le 4$$

với mọi $\lambda\in(0,\ 1)$. Do đó, ta có (1).
+ Chứng minh

$$\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{a}{b}\right)\le\sup_{x>0}\left|\frac{\sin(ax)}{ax}-\frac{\sin(bx)}{bx}\right|(2)$$

Ta có

$$\mu(\lambda,\ \pi)=\frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda(1-\lambda)\pi}=\mu(1-\lambda,\ \pi).$$

Vì vậy, ta chỉ cần chứng minh (2) đúng với $\lambda\in\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$. Dễ thấy f là hàm giảm trên $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ nên ta có

$$\mu(\lambda,\pi)\ge\frac{1}{1-\lambda}\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\ge\frac{2}{\pi}$$

với mọi $\lambda\in\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$. Do đó, ta có (2).

Bài 3.13 (ĐH Sư Phạm Huế). Vì $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ne f'(c)$ với mọi $a,b\in\mathbb{R},a\ne b$ nên hàm số $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định bởi $g(x)=f(x)-x.f'(c)$ đơn ánh và liên tục, do đó g đơn điệu ngặt. Suy ra $g'(x)=f'(x)-f'(c)$ có dấu không đổi, từ đó c là điểm cực trị của f'. Vì vậy $f''(c)=0$.

4 PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Bài 4.1 (ĐH An Giang). Đặt $M = \max\limits_{0\le x\le 1} f'(x)$. Ta có $f'(x) \le M, \forall x \in [0;1]$, suy ra

$$f(x)\,f'(x) \le Mf(x)\,, x\in[0;1] \quad (1).$$

Tích phân hai vế BĐT (1) ta được

$$\int\limits_0^x f(t)\,f'(t)\,dt \le M\int\limits_0^x f(t)\,dt, x\in[0;1]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}f^2(x) - \frac{1}{2}f^2(0) \le M\int\limits_0^x f(t)\,dt, x\in[0;1]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}f^3(x) \le Mf(x)\int\limits_0^x f(t)\,dt, x\in[0;1] \quad (2)$$

Lấy tích phân 2 vế BĐT (2) ta được

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f^3(x)\,dx \le M\int\limits_0^1\left(f(x)\int\limits_0^x f(t)\,dt\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f^3(x)\,dx \le M\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^x f(t)\,dt\right)d\left(\int\limits_0^x f(t)\,dt\right)$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f^3(x)\,dx \le M\left(\int\limits_0^1 f(t)\,dt\right)^2$$

Bài 4.2 (HV An Ninh Nhân Dân). Vì $f'(x) > 0, \forall x \in (0,1)$ và $f(0) = 0$ nên $f(x) > 0, \forall x\in[0,1]$.
Dùng tích phân từng phần ta có

$$\int_0^1 (1-x)^3 f'(x)dx = (1-x)^3 f(x)\Big|_0^1 + 3\int_0^1 (1-x)^2 f(x)dx = 3\int_0^1 (1-x)^2 f(x)dx$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder về tích phân

$$\int_a^b |u(x)v(x)|dx \leqslant \left(\int_a^b |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |v(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}},\ (p>0, q>0, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$$

với $u(x) = \dfrac{f(x)}{[f'(x)]^{\frac{2}{3}}}$, $v(x) = (1-x)^2[f'(x)]^{\frac{2}{3}}$, $p = 3$, $q = \dfrac{3}{2}$, ta được

$$\int_0^1 |u(x)v(x)|dx = \int_0^1 (1-x)^2 f(x)dx = I \geqslant 0$$
$$\left(\int_0^1 |u(x)|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\int_0^1 \frac{[f(x)]^3}{[f'(x)]^2}dx\right)^{\frac{1}{3}} = J^{\frac{1}{3}} \ ,\ J \geqslant 0$$
$$\left(\int_0^1 |v(x)|^{\frac{3}{2}} dx\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\int_0^1 (1-x)^3 f'(x)dx\right)^{\frac{2}{3}} = (3I)^{\frac{2}{3}}$$

Do đó $I \leqslant J^{\frac{1}{3}}.(3I)^{\frac{2}{3}}$, suy ra $J \geqslant \dfrac{1}{9}I$, ta có bất đẳng thức cần phải chứng minh.

Bài 4.3 (ĐH Bách Khoa Thành phố Hồ Chí Minh)**.** Vì f có đạo hàm liên tục đến cấp 2 trên $[-2014, 2015]$ nên tồn tại hàm liên tục trên $[-2014, 2015]$, gọi là ψ, sao cho $f(x) = f(0) + xf'(0) + \dfrac{1}{2}x^2\psi(x)$, với mọi $x \in [-2014, 2015]$. Chẳng hạn

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(0) - xf'(0)}{\frac{1}{2}x^2} & \text{khi } x \neq 0, \\ f"(0) & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$

Dễ thấy

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{2015} \frac{f(0)}{x^2}dx + \int_{-2014}^{-\varepsilon} \frac{f(0)}{x^2}dx &= \left(-\frac{1}{2015} - \frac{1}{2014}\right) f(0), \\ \int_{\varepsilon}^{2015} \frac{f'(0)}{x}dx + \int_{-2014}^{-\varepsilon} \frac{f'(0)}{x}dx &= (\ln(2015) - \ln(2014))\, f'(0), \\ \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{\varepsilon}^{2015} \frac{1}{2}\psi(x)\,dx + \int_{-2014}^{-\varepsilon} \frac{1}{2}\psi(x)\,dx \right) &= \int_{-2014}^{2015} \frac{1}{2}\psi(x)\,dx < \infty. \end{aligned}$$

Dẫn đến sự hữu hạn của giới hạn cần tính.

Bài 4.4 (HV Công nghệ Bưu chính Viễn thông)**.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho tích phân, ta có

$$\int_0^1 f(x)dx.\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \geq \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}.\sqrt{\frac{1}{f(x)}}dx\right)^2 = 1.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\sqrt{\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx} &= \sqrt{\int_0^1\frac{f(x)}{M}dx.\int_0^1\frac{m}{f(x)}dx}.\sqrt{\frac{M}{m}}\\ &\le \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{M}{m}}\Big(\int_0^1\frac{f(x)}{M}dx+\int_0^1\frac{m}{f(x)}dx\Big)\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}}\int_0^1\Big(\frac{f(x)}{M}+\frac{m}{f(x)}\Big)dx.\end{aligned}$$

Xét hàm $g(t)=\dfrac{t}{M}+\dfrac{m}{t}$ trên đoạn $[m,M]$. Ta có

$$g^{'}(t)=\frac{1}{M}-\frac{m}{t^2}.$$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $1+\dfrac{m}{M}$ khi và chỉ khi $t=m$ hoặc $t=M$. Do đó

$$\sqrt{\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx}\le\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}}.(1+\frac{m}{M})$$

Như vậy, bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 4.5 (ĐH Đồng Tháp)**.** Bằng cách nhân liên hợp ta có

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}\\ =&\frac{(\sqrt{x^2+1}+x-1)[\sqrt{x^2+1}-(x-1)]}{(\sqrt{x^2+1}+1+x)(\sqrt{x^2+1}+1-x)}\\ =&\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}.\end{aligned}$$

Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ $\mathbb{R}$. Do đó $I=0$.

Bài 4.6 (ĐH Hùng Vương Phú Thọ)**.** Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\big(x-\frac{1}{x}\big)dx &= \int\limits_{-\infty}^{0} f\big(x-\frac{1}{x}\big)dx+\int\limits_{0}^{+\infty} f\big(x-\frac{1}{x}\big)dx\\ &= I_1+I_2\end{aligned}$$

Đặt $t=x-\dfrac{1}{x}$

Ta có $x = \dfrac{t + \sqrt{t^2+4}}{2} > 0$ hoặc $x = \dfrac{t - \sqrt{t^2+4}}{2} < 0$
$dx = \dfrac{1}{2}\big(1 + \dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}\big)dt$ với $x > 0$.
$dx = \dfrac{1}{2}\big(1 - \dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}\big)dt$ với $x < 0$. Do đó

$$I_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\big(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\big)dt$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\big(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\big)dt$$

Do $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ nên $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x).\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$ hội tụ (do tiêu chuẩn Aben).

$$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\big(x - \frac{1}{x}\big)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = J.$$

Bài 4.7 (ĐHKH Huế)**.** Vì f và g là các hàm cùng đồng biến hoặc cùng nghịch biến, nên

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0,\ \forall x, y \in [0,1].$$

Ngoài ra, f và g đều khả tích, và ta có

$$\int_0^1 dx \int_0^1 (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))dy \geq 0.$$

Chú ý rằng tích phân ở vế trái bằng

$$2\int_0^1 f(x)g(x)dx - 2\int_0^1 f(x)dx.\int_0^1 g(y)dy.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. (Chú ý: Bài này cũng có thể giải một cách cơ bản hơn, bằng cách lấy giới hạn của tổng Darboux với phân hoạch đều, và sử dụng Bất đẳng thức Chebyshev).

Bài 4.8 (ĐH Kỹ Thuật Hậu Cần CAND)**.** Đa thức $x^3 - 3x + 1$ đổi dấu trong các khoảng $[-2,-1], [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], [\frac{3}{2}, 2]$, do đó không có không điểm ngoài các khoảng trên. Từ đó hàm f xác định và liên tục trên các đoạn lấy tích phân.
Thực hiện phép đổi biến $x = \frac{1}{1-t}$ trên đoạn $[\frac{1}{101}, \frac{1}{11}]$ ta nhận được

$$\int\limits_{\frac{1}{101}}^{\frac{1}{11}} f^2(x)dx = \int\limits_{-100}^{-10} \frac{f^2(x)}{x^2}dx. \ (1)$$

Thực hiện phép đổi biến $x = 1 - \frac{1}{t}$ trên đoạn $[\frac{101}{100}, \frac{11}{10}]$ ta nhận được

$$\int\limits_{\frac{101}{100}}^{\frac{11}{10}} f^2(x)dx = \int\limits_{-100}^{-10} \frac{f^2(x)}{(1-x)^2}dx. \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta nhận được

$$I = \int\limits_{-100}^{-10} f^2(x)(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2})dx.$$

Do đó

$$I = -\frac{x^2 - x}{x^3 - 3x + 1}\Big|_{-100}^{-10} = \frac{11131110}{107634259}$$

là một số hữu tỉ.

Bài 4.9 (ĐH Quảng Bình). Khai triển Taylor hàm f tại $c \in (a, b)$ ta có với mọi $x \in (a, b)$

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + f"(c + \theta(x - c)).\frac{(x-c)^2}{2!}, \theta \in (0, 1).$$

Nên

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c), \forall x \in (a, b)$$

và

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b (f(c) + f'(c)(x - c))dx$$
$$= (b - a)\left(f(c) + (\tfrac{a+b}{2} - c)f'(c)\right), \forall c \in (a, b).$$

Bài 4.10 (ĐH Sư Phạm Hà Nội 2). Với mọi $a \in (0, b)$. Theo giả thiết f' nghịch biến trên $[0, b]$ nên với mọi $x \in [a, b]$ ta đều có $f'(x) \leq f'(a)$ kéo theo $xf'(x) \leq f'(a)x$. Suy ra

$$\int_a^b xf'(x)\,dx \leq f'(a)\int_a^b xdx = \frac{b^2 - a^2}{2}f'(a).$$

Hay

$$f'(a) \geq \frac{2}{b^2 - a^2}\int_a^b xf'(x)\,dx \ \ (1).$$

Mặt khác, khi $x \in [0, a]$ ta đều có $f'(x) \geq f'(a)$ kéo theo $xf'(x) \geq f'(a)x$. Suy ra

$$\int_0^a xf'(x)\,dx \geq f'(a)\int_0^a xdx = \frac{a^2}{2}f'(a).$$

Hay

$$f'(a) \le \frac{2}{a^2}\int_0^a xf'(x)\,dx \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{2}{a^2}\int_0^a xf'(x)\,dx \ge \frac{2}{b^2-a^2}\int_a^b xf'(x)\,dx.$$

Hay

$$\left(b^2-a^2\right)\int_0^a xf'(x)\,dx \ge a^2\int_a^b xf'(x)\,dx = a^2\left(\int_a^0 xf'(x)\,dx + \int_0^b xf'(x)\,dx\right).$$

Vì vậy

$$b^2\int_0^a xf'(x)\,dx \ge a^2\int_a^b xf'(x)\,dx.$$

Lấy tích phân từng phần hai vế ta thu được

$$\frac{f(a)}{a} - \frac{1}{a^2}\int_0^a f(x)\,dx \ge \frac{f(b)}{b} - \frac{1}{b^2}\int_0^b f(x)\,dx.$$

Suy ra

$$\frac{1}{b^2}\int_0^b f(x)\,dx - \frac{1}{a^2}\int_0^a f(x)\,dx \ge \frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $f \equiv 1$ trên đoạn $[0,b]$.

Bài 4.11 (ĐH Sư Phạm Huế). Đặt $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$. Tích phân từng phần ta được

$$\int\limits_0^1 F(x)dx = -\int\limits_0^1 xf(x)dx.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\left(\int\limits_0^{1/2} xf(x)dx\right)^2 \le \left(\int\limits_0^{1/2} x^2dx\right)\left(\int\limits_0^{1/2} f^2(x)dx\right) = \frac{1}{24}\int\limits_0^{1/2} f^2(x)dx$$

$$\left(\int\limits_{1/2}^1 (x-\frac{1}{2})f(x)dx\right)^2 \le \left(\int\limits_{1/2}^1 (x-\frac{1}{2})^2dx\right)\left(\int\limits_{1/2}^1 f^2(x)dx\right) = \frac{1}{24}\int\limits_{1/2}^1 f^2(x)dx$$

Do đó

$$\left(\int\limits_0^{1/2} xf(x)dx\right)^2 + \left(\int\limits_{1/2}^{1} (x-\frac{1}{2})f(x)dx\right)^2 \le \frac{1}{24}\int\limits_0^1 f^2(x)dx.$$

Mặt khác

$$\int\limits_0^{1/2} xf(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} f(x)dx - \int\limits_0^{1/2} F(x)dx$$

và

$$\int\limits_{1/2}^{1} (x-\frac{1}{2})f(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{1/2}^{1} f(x)dx - \int\limits_{1/2}^{1} F(x)dx.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{24}\int\limits_0^1 f^2(x)dx &\ge \left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} f(x)dx - \int\limits_0^{1/2} F(x)dx\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\int\limits_{1/2}^{1} f(x)dx - \int\limits_{1/2}^{1} F(x)dx\right)^2 \\
&\ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} f(x)dx - \int\limits_0^{1/2} F(x)dx + \frac{1}{2}\int\limits_{1/2}^{1} f(x)dx - \int\limits_{1/2}^{1} F(x)dx\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 F(x)dx\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 xf(x)dx\right)^2.
\end{aligned}$$

5 CHUỖI SỐ

Bài 5.1 (ĐH An Giang)**.** Đặt $u_n = \dfrac{e^n.n!}{n^n}$. Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} e\dfrac{n^n}{(n+1)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 1$. Mặt khác, do dãy $(a_n)\,, a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, là dãy tăng nghiêm ngặt và $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ nên $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra (u_n) là dãy tăng. Vì vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \ne 0$. Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

Bài 5.2 (ĐH Bách Khoa Thành phố Hồ Chí Minh). (a) Từ giả thiết $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ hội tụ và $|a_k \sin^n(kx)| \leq |a_k|$, với mọi $n \in \mathbb{Z}$ và $x \in [0, \pi]$ dẫn đến chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin^n(kx)$ hội tụ tuyệt đối và đều.

Kết luận sẽ không đúng nếu chỉ cho giả thiết chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ hội tụ. Ví dụ chọn dãy $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ là

$$a_k = \begin{cases} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \dfrac{1}{k} & \text{nếu } k \text{ lẻ,} \\ 0 & \text{nếu } k \text{ chẵn.} \end{cases}$$

Khi đó chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ hội tụ (chuỗi đan dấu) nhưng không hội tụ tuyệt đối. Chọn $n = 1$, $x = \frac{\pi}{2}$, khi đó dễ thấy chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)$ phân kỳ vì

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{k-1}{2}} & \text{nếu } k \text{ lẻ,} \\ 0 & \text{nếu } k \text{ chẵn.} \end{cases}$$

(b) Vì các hàm $u_k(x) = a_k \sin^n(kx)$ liên tục trên $[0, \pi]$ và chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ hội tụ đều trên $[0, \pi]$ nên tổng của chuỗi, tức $S_n(x)$, là hàm liên tục trên $[0, \pi]$. Đặt

$$\begin{aligned} I_{k,n} &= \int_0^{\pi} \sin^n(kx)\, dx, \\ J_n &= \int_0^{\pi} \sin^n(x)\, dx. \end{aligned}$$

Bằng tích phân từng phân ta thấy $I_{k,n} = \dfrac{n-1}{n} I_{k,n-2}$, thêm nữa

$$\int_0^{\pi} \sin(kx)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k \text{ chẵn,} \\ \dfrac{2}{k} & \text{nếu } k \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Dẫn đến

$$I_{k,n} = \begin{cases} J_n & \text{nếu } n \text{ chẵn,} \\ 0 & \text{nếu } n \text{ lẻ, } k \text{ chẵn,} \\ \dfrac{1}{k} J_n & \text{nếu } n \text{ lẻ, } k \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Chú ý $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = 0$ bởi vì các dãy con $\{J_{2n}\}$ và $\{J_{2n+1}\}$ là dãy giảm và bị chặn dưới $(J_n > 0, \forall n)$ ngoài ra có ràng buộc $J_n = \dfrac{n-1}{n} J_{n-2}$. Từ tính chất hội tụ đều ta được

$$\begin{aligned} \int\limits_0^\pi S_n(x)\,dx &= \sum_{k=0}^\infty \int\limits_0^\pi u_k(x)\,dx \\ &= \sum_{k=0}^\infty a_k I_{k,n} \\ &\le \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^\infty |a_k|\right) J_n & \text{nếu } n \text{ chẵn,} \\ \left(\sum_{k=0}^\infty \dfrac{|a_k|}{k}\right) J_n & \text{nếu } n \text{ lẻ.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 5.3 (HV Công nghệ Bưu chính Viễn thông)**.** 1) Đặt

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} e^{-ax^2} dx, a \ge 0$$

Ta có

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^\infty x(e^{-(\beta+a)x^2} - e^{-(\alpha+a)x^2})dx \\ &= \frac{1}{2(a+\beta)} - \frac{1}{2(a+\alpha)} \end{aligned}$$

Do vậy $I(a) = \dfrac{1}{2} ln \dfrac{a+\beta}{a+\alpha} + C$
Cho $a \to +\infty$ ta nhận được $C = 0$. Như vậy

$$I(a) = \frac{1}{2} ln \frac{a+\beta}{a+\alpha}$$

Nói riêng $I(0) = \dfrac{1}{2} ln \dfrac{\beta}{\alpha}$

2) Ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n(n+1)\dots(n+k-1)} - \frac{1}{(n+1)\dots(n+k)}\Big)\frac{1}{k}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}\frac{1}{k!}\Big) \quad (1)$$

Mặt khác

$$\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\Big)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big(\int_0^1\frac{x^k}{x}\Big)dx = \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k.k!} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Bài 5.4 (ĐH Hùng Vương Phú Thọ)**.** Ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)...(n+k)}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)...(n+k)}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}.\frac{n+k-n}{n(n+1)...(n+k)}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\Big(\frac{1}{n(n+1)...(n+k-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)...(n+k)}\Big)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\Big(\frac{1}{1.2.3...k} - \frac{1}{2.3.4...(k+1)} + \frac{1}{2.3.4...(k+1)} - \frac{1}{3.4.5...(k+2)} + ...\Big)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}.\frac{1}{1.2.3...k}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k.k!}.$$

Ta lại có

$$\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}dx$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^1 \frac{x^k}{x}dx$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k.k!}.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 5.5 (HV Kỹ Thuật Quân Sự)**.** Ta có

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2}.\frac{(n+\frac{1}{n})^n}{e} < \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \quad (1)$$

Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \dfrac{1}{n^2}$ (2). Từ (1) ta có $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} < \dfrac{a_n}{b_n} =: c_n$. Như vậy dãy $\{c_n\}$ là dãy dương và đơn điệu giảm do đó bị chặn, tức là tồn tại M sao cho $c_n \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant M\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do (2) hội tụ, nên theo tiêu chuẩn so sánh chuỗi số dương ta có chuỗi đã cho hội tụ.

Bài 5.6 (ĐH Phạm Văn Đồng)**.** Tính được $f(x) = \ln 2 + \ln x - \ln(x+1)$.
Do đó $f(n) = \ln 2 + \ln n - \ln(n+1)$.
Suy ra tổng riêng thứ n của chuỗi là

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \ln\frac{2^n}{n+1}.$$

Mà

$$\lim_{n\to\infty}\ln(\frac{2^n}{n+1}) = +\infty$$

nên chuỗi phân kỳ.

Bài 5.7 (ĐH Sư Phạm Hà Nội 2)**.** Lấy $\{a_n\} \in \mathcal{A}$. Ta có

$$2015^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + 2\sum_{\substack{1\leq m<n\\ m,\ n\in\mathbb{N}}} a_m a_n.$$

Do đó,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \in \left(0,\ 2015^2\right).$$

Ta sẽ chỉ ra

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 :\ \{a_n\} \in \mathcal{A}\right\} = \left(0,\ 2015^2\right).$$

Thật vậy, với bất kì $S \in \left(0,\ 2015^2\right)$, ta chọn $\{a_n\} = \{\frac{\lambda}{q^{n-1}}\}$, với $q = \frac{2015^2+S}{2015^2-S}$ và $\lambda = 2015\frac{(q-1)}{q}$. Khi đó, $\{a_n\} \in \mathcal{A}$ và

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = S.$$

Vì vậy, $\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 :\ \{a_n\} \in \mathcal{A}\right\} = \left(0,\ 2015^2\right)$.

6 PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Bài 6.1 (ĐH An Giang)**.** Thay $x = 0$ ta được $f\left(f\left(y\right)\right) = f\left(y\right) \forall y \in \mathbb{R}$. Ta viết lại phương trình

$$f\left(x + f\left(y\right)\right) = \left(f\left(y\right) + 1\right)x + f\left(y\right), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Rõ ràng $f\left(y\right) = -1, \forall y \in \mathbb{R}$ là nghiệm của phương trình. Giả sử tồn tại y_0 sao cho$f\left(y_0\right) \neq -1$. Thay $y = y_0$, ta được

$$f\left(x + f\left(y_0\right)\right) = \left(f\left(y_0\right) + 1\right)x + f\left(y_0\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do vế phải là một hàm bậc nhất theo biến x nên ta suy ra f là toàn ánh. Do đó với $x \in \mathbb{R}$ ta tìm được $u \in \mathbb{R}$ sao cho $f\left(u\right) = x$. Vì vậy ta có

$$f\left(x\right) = f\left(f\left(u\right)\right) = f\left(u\right) = x.$$

Thử lại ta thấy $f\left(x\right) = x$ không là nghiệm của phương trình. Vậy $f\left(y\right) = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 6.2 (ĐH Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh)**.** Dễ thấy f phải là hàm đơn ánh từ yêu cầu. Dẫn đến tính đơn điệu ngặt của f. Từ tính đơn điệu của f ta sẽ chỉ ra $f\left(x\right) \equiv x$ trên $\mathbb{R}$. Thật vậy, giả sử có $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f\left(x_0\right) > x_0$. Khi đó $f\left(f\left(f\left(x_0\right)\right)\right) + f\left(x_0\right) > 2x_0$ nếu f đơn điệu tăng, mâu thuẫn. Nếu f đơn điệu giảm thì $f\left(x_0\right) > f\left(f\left(x_0\right)\right)$ và $f\left(f\left(f\left(x_0\right)\right)\right) > f\left(f\left(x_0\right)\right)$, dẫn đến $x_0 > f\left(f\left(x_0\right)\right)$. Vậy $f\left(x_0\right) < f\left(f\left(f\left(x_0\right)\right)\right)$, dẫn đến $f\left(f\left(f\left(x_0\right)\right)\right) + f\left(x_0\right) > 2f\left(x_0\right) > 2x_0$, mâu thuẫn. Vì tính bình đẳng nên tình huống tương tự cho giả sử $f\left(x_0\right) < x_0$. cũng không xảy ra.

Bài 6.3 (HV Công nghệ Bưu chính Viễn thông). Lấy đạo hàm 2 vế của

$$f(2015x + 2014) = 2015f(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó

$$2015f^{'}(2015x + 2014) = 2015f^{'}(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Thay x bởi $\frac{x-2014}{2015}$, ta có

$$\begin{aligned} f^{'}(x) =& f^{'}(\frac{x-2014}{2015}) \\ =& f^{'}(\frac{\frac{x-2014}{2015} - 2014}{2015}) \\ =& f^{'}(\frac{x - 2015^2 + 1}{2015^2}) \\ =& \cdots \\ =& f^{'}(\frac{x - 2015^n + 1}{2015^n}). \end{aligned}$$

Cho $n \to \infty$, ta nhận được

$$f^{'}(x) = f^{'}(-1).$$

Như vậy

$$f(x) = mx + k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

trong đó $m = f^{'}(1)$. Thay $x = -1$ vào hệ thức ban đầu, ta có

$$f(-1) = 2014f(-1)$$

và do đó $f(-1) = 0$. Bởi vậy $k = m$ và do đó

$$f(x) = m(x + 1).$$

Thử lại: Thỏa mãn. Như vậy

$$f(x) = m(x + 1)$$

trong đó m hằng số.

Bài 6.4 (ĐH Đồng Tháp). Từ $f(2014x - f(y)) = f(2015x) - f(y) - x$ (1), cho $x = y = 0$, ta có

$$f(-f(0)) = f(0) - f(0) = 0.$$

Tiếp tục trong (1) lấy $y = -f(0)$, ta có $f(2014x) = f(2015x) - x$ (2). Từ (1) và (2), ta có $f(2014x - f(y)) = f(2014x) - f(y)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$f(x - f(y)) = f(x) - f(y), \forall x \in \mathbb{R} \ \ (3)$$

Đặt $u = x - f(y)$, ta có $f(y) = x - u$. Thay vào (3), ta được $f(u) = f(x) - x + u$ hay $f(u) - u = f(x) - x$ với mọi $x, u \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x) - x = c$ với c là hằng số. Do $f(1) = 2015$ nên $c = 2014$. Vậy $f(x) = x + 2014$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thoả mãn.

Bài 6.5 (ĐH Đồng Tháp)**.** Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$|f(x) - f(0)| \leq |\sin x - \sin 0| = |\sin x|.$$

Do đó

$$|(f(x))^2 - f(x)| = |f(x)||f(x) - 1| \leq |\sin x|(|\sin x| + 1).$$

Suy ra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(f(x))^2 - f(x)]dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(\sin x + 1)dx = \frac{\pi}{4} + 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi f liên tục trên $\mathbb{R}$ và $|f(x)| = |\sin x|$, $|f(x) - 1| = |\sin x| + 1$. Suy ra $f(x) = -\sin x$ với $x \in \mathbb{R}$.

Bài 6.6 (ĐH Hùng Vương Phú Thọ)**.** Thay x bởi $f(x)$ ta được

$$f(f(f(x))) = 4f(f(x)) - 3f(x).$$

Tiếp tục quá trình trên và đặt $x_n = f(f(...f(x))), n$ lần, ta được phương trình sai phân:

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n.$$

Phương trình đặc trưng là $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$.
Phương trình này có nghiệm $\lambda = 1$ hoặc $\lambda = 3$.
Vậy $x_n = c_1 + c_2 3^n$.
Ta có

$$\begin{cases} x_0 = c_1 + c_2 = x \\ x_1 = c_1 + 3c_2 = f(x) \end{cases}$$

Từ đó ta có $f(x) = x + 2c_2$ hoặc $f(x) = 3x - 2c_1$.
Thay vào điều kiện ban đầu ta được $c_2 = 0$ và c_1 tùy ý.
Vậy hàm cần tìm là $f(x) = x$ hoặc $f(x) = 3x - c$, c tùy ý.

Bài 6.7 (ĐH Phạm Văn Đồng)**.** Từ giả thiết suy ra rằng khi $x \neq y$ thì

$$\frac{f(x+y)}{x+y} - \frac{f(x-y)}{x-y} = 8xy(x^2 + y^2).$$

Đặt

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

thì
$$g(x+y)-g(x-y)=8xy(x^2+y^2).$$
Chọn $x=a+\frac{h}{2}$ và $y=\frac{h}{2}$ thì ta có được $g'(a)=4a^3, \forall a \in \mathbb{R}$.
Do đó $g(x)=x^4+C$ nên $f(x)=x^5+Cx$. Mà $f(\frac{15}{4})=2015$ nên $C=2015.\frac{4}{15}-(\frac{15}{4})^4$.
Thử lại, ta nhận $f(x)=x^5+(2015.\frac{4}{15}-(\frac{15}{4})^4)x$ là hàm số cần tìm.

Bài 6.8 (ĐH Quảng Bình)**.** Nhận thấy $f(x)=2015x$ là một hàm thỏa mãn.
Đặt $g(x)=f(x)-2015x$ thay vào (1) ta được $g(x)\geq 0$ **(2)**, $\forall x\in\mathbb{R}$ và
$$g(x+y)\geq g(x)+g(y)\ (3), \forall x,y\ \in\mathbb{R}.$$
- Cho $x=y=0$, từ (3) ta được $g(0)\leq 0$, kết hợp với (2) ta có $g(0)=0$.
- Cho $x=-y, x\in\mathbb{R}$, từ (2) và (3) ta có
$$g(x)\geq 0, g(-x)\geq 0, 0\geq g(x)+g(-x);$$
suy ra: $g(x)=g(-x)=0$ và $f(x)=2015x, \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy đúng.

Bài 6.9 (ĐH Sư Phạm Hà Nội 2)**.** Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn đề bài. Khi đó, ta có $|f(x)|^{2015}=\left|f\left(\sin^{2015}x\right)\right|$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Lấy $x\in\mathbb{R}$ tùy ý, xét dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi $x_1=\sin^{2015}x$, $x_{n+1}=\sin^{2015}x_n$, $\forall n=1,2,...$ Khi đó $|f(x)|^{2015^n}=|f(x_n)|$, $\forall n=1,2,....$ Ta dễ dàng chứng minh được:
Nếu $0\leq x_1\leq 1$ thì dãy $\{x_n\}$ giảm bị chặn dưới;
Nếu $-1\leq x_1<0$ thì dãy $\{x_n\}$ tăng bị chặn trên.
Suy ra tồn tại giới hạn của dãy $\{x_n\}$. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, theo tính chất liên tục của hàm $\sin$ suy ra $\sin^{2015}a=a$ hay $a=0$. Giả sử tồn tại n_0 nào đó sao cho $f(x_{n_0})=0$ khi đó
$$|f(x)|^{2015^{n_0}}=f(x_{n_0})=0$$
suy ra $f(x)=0$.
Giả sử không tồn tại n nào đó sao cho $f(x_n)=0$, hay $f(x_n)\neq 0$, $\forall n=1,2,...$
Khi đó
$$|f(x)|=|f(x_n)|^{\frac{1}{2015^n}}\neq 0.(1)$$
Chuyển qua giới hạn (1) ta suy ra $|f(x)|=1$. Theo giả thiết hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thử lại ta suy ra phương trình đã cho có ba nghiệm $f\equiv 0$, $f\equiv -1$, $f\equiv 1$ trên $\mathbb{R}$.

Bài 6.10 (ĐH Sư Phạm Huế)**.** Giả sử tồn tại f thỏa mãn đề bài. Ta sẽ chỉ ra mâu thuẫn.
+) Theo giả thiết

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $y \geq x$. Đặt $\epsilon = \frac{y-x}{3}$, $x_0 = x$, $x_1 = x+\epsilon$, $x_2 = x+2\epsilon$, $x_3 = x+3\epsilon = y$.
Ta có

$$\frac{f(x_0)+f(x_2)}{2} \geq f(x_1) + 2\epsilon$$
$$\frac{f(x_1)+f(x_3)}{2} \geq f(x_2) + 2\epsilon$$

Suy ra

$$\frac{f(x_0)+f(x_3)}{2} \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + 4\epsilon \geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + 5\epsilon.$$

hay

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{5}{3}(y-x).$$

+) Chứng minh tương tự với mỗi $n = 1, 2, ...$ ta cũng có

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f(\frac{x+y}{2}) + (\frac{5}{3})^n|x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Cho $n \to \infty$, ta gặp điều vô lí.