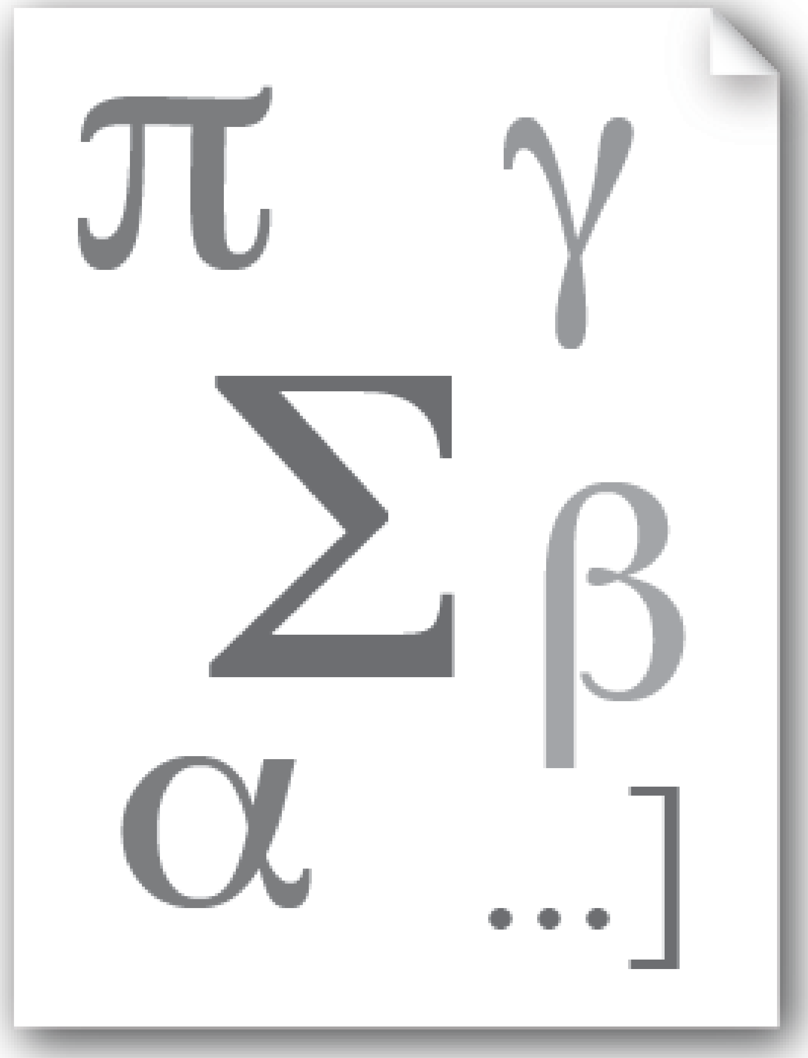
tủ sách **-TΘÁΠ HỌC KÌ THÚ-**

Đỗ Minh Triết



[ÔN THI OLYMPIC TOÁN ĐẠI SỐ SINH VIÊN VIỆT NAM TOÀN TẬP]

ĐỖ MINH TRIẾT

ÔN THI OLYMPIC TOÁN ĐẠI SỐ SINH VIÊN VIỆT NAM TOÀN TẬP

tủ sách **-TOÁN HỌC KÌ THÚ-**

Copyright © 2017 Toán học kì thú

XUẤT BẢN BỞI TOÁN HỌC KÌ THÚ

facebook.com/ToanHocThuVi

TOANHOCKITHU@HOTMAIL.COM

LỜI NÓI ĐẦU

Quyển sách nhỏ bé này được tích cóp trong quá trình học tập của bản thân của tác giả, là kết quả của bốn năm ngồi trên ghế nhà trường Sư phạm, là những gì còn đọng lại của một ngọn lửa đam mê Toán học giờ đây đang lụi tàn dần vì hoàn cảnh, vì cuộc sống. Tranh thủ ngọn lửa này còn le lói chút ít, tác giả đã cố gắng hoàn thiện nó, mong nó sẽ là những gì tốt nhất cho các em sinh viên thế hệ sau này.

Sai sót là điều không tránh được, mọi ý kiến, đóng góp xin liên hệ qua

Đỗ Minh Triết

Website: facebook.com/ToanHocThuVi

E-mail: toanhockithu@hotmail.com | dominhtriet.gm@gmail.com

SĐT: 0164 952 6053

Sách được xuất bản miễn phí qua facebook-page trên, bản quyền thuộc về tác giả cũng như Toán học kì thú, vui lòng không sao chép cũng như đem qua các website, forum khác, nếu có thì chỉ dẫn link trực tiếp đến page.

Vũng Tàu, Ngày 11 tháng 7 năm 2017

Tác giả

Đỗ Minh Triết

MỤC LỤC

PHẦN I: SỐ PHỨC 10

PHẦN II: MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ MA TRẬN 13

A. CƠ SỞ LÍ THUYẾT 13

Ma trận nghịch đảo, ma trận khả nghịch 13

Ma trận chuyển vị 13

Ma trận liên hợp 13

Ma trận chuyển vị liên hợp 14

Ma trận đồng dạng 14

Ma trận xác định dương 14

Ma trận đối xứng 14

Ma trận phản đối xứng 15

Ma trận trực giao 15

Ma trận Unita 15

Ma trận Hermite (đối xứng) 16

Ma trận Hermite đối xứng lệch 17

Ma trận băng 17

ma trận phụ hợp 17

Ma trận Vandermonde 18

B. BÀI TẬP 18

PHẦN III: MA TRẬN KHỐI 29

A. CƠ SỞ LÍ THUYẾT 29

B. BÀI TẬP 29

PHẦN IV: MA TRẬN LUỸ LINH 35

A. CƠ SỞ LÍ THUYẾT 35

B. BÀI TẬP 36

PHẦN V: VẾT CỦA MA TRẬN 41

A. CƠ SỞ LÍ THUYẾT 41

B. BÀI TẬP 41

PHẦN VI: HẠNG CỦA MA TRẬN 44

A. CƠ SỞ LÍ THUYẾT 44

B. BÀI TẬP 44

PHẦN VII: GIÁ TRỊ RIÊNG, VECTOR RIÊNG 56

A. CƠ SỞ LÍ THUYẾT 56

B. BÀI TẬP 61

PHẦN VIII: ĐA THỨC ĐẶC TRƯNG, ĐA THỨC TỐI TIỂU 78

A. CƠ SỞ LÍ THUYẾT 78

B. BÀI TẬP 78

PHẦN IX: ĐỊNH THỨC 84

A. CƠ SỞ LÍ THUYẾT 84

I. Tính định thức 84

II. Sử dụng định nghĩa định thức giải một số bài toán liên quan 105

B. BÀI TẬP 107

PHẦN X: LUỸ THỪA MA TRẬN 113

I. LUỸ THỪA MA TRẬN CẤP 3 113

II. LUỸ THỪA MA TRẬN CẤP 2 118

III. LUỸ THỪA MA TRẬN CẤP CAO ($n \geq 4$) 122

IV. LUỸ THỪA MA TRẬN QUA CÁC BÀI TOÁN VỀ DÃY TRUY HỒI TUYẾN TÍNH 125

PHẦN XI: BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH MA TRẬN 131

DẠNG 1: TÌM MỌI MA TRẬN $\boldsymbol{X}$ GIAO HOÁN HOẶC PHẢN GIAO HOÁN VỚI MỘT MA TRẬN $\boldsymbol{A}$ CHO TRƯỚC........ 131

DẠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH MA TRẬN........ 135

CÁC DẠNG KHÁC 137

PHẦN XII: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH........ 139

PHẦN XIII: MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC 142

PHẦN I: SỐ PHỨC
(Complex number)

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ SỐ PHỨC $\mathbb{C}$

1. Dạng lượng giác của số phức:

a) Đưa số phức dạng đại số *(algebraic form)* về số phức dạng lượng giác *(trigonometric form)*

Giả sử ta muốn đưa số phức $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$ về dạng lượng giác dạng $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, thì modun $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ và argument φ được xác định như sau:

Rõ ràng là

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases}$$

Ta xét các trường hợp:

- Nếu $a = 0, b \neq 0$ thì dễ thấy

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, b > 0 \\ \dfrac{3\pi}{2}, b < 0 \end{cases}$$

- Nếu $a \neq 0$ thì từ $\tan\varphi = \frac{b}{a}$, ta được

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} + k\pi$$

trong đó

$$k = \begin{cases} 0 & \text{nếu } a > 0, b \geq 0 & \quad (a, b) \in I \\ 1 & \text{nếu } a < 0, b \in \mathbb{R} & \text{hay } (a, b) \in II, III \\ 2 & \text{nếu } a > 0, b < 0 & \quad (a, b) \in IV \end{cases}$$

b) Các phép Toán

- Phép nhân:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1).r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

- Phép chia:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]\ \ (z_2 \neq 0)$$

- Luỹ thừa (Định lí De Moivre):

$$\forall n \in \mathbb{N}: z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

2. Dạng mũ của số phức:

Công thức Euler: $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$

Từ đó $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$

Làm việc với số phức dưới dạng mũ có rất nhiều tiện lợi. Để đưa số phức về dạng mũ, cần phải xác định modun và argument của nó.

3. Luỹ thừa và khai căn số phức

a) Luỹ thừa với số mũ n nguyên dương

Như trên đã nói, ta có thể đưa số phức về dạng lượng giác hay dạng mũ rồi từ đó tính luỹ thừa được dễ dàng.

b) Căn bậc n *(n^{th} root)* của số phức

Trước hết, căn bậc n của đơn vị là n số phức phân biệt sau

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\ , k = \overline{0, n-1}$$

Định lí: Cho $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ là số phức với $r > 0$ và $\varphi \in [0,2\pi)$, khi đó căn bậc n của z là n số phức phân biệt

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, k = \overline{0, n-1}$$

II. TÍCH VÔ HƯỚNG *(INNER PRODUCT, SCALAR PRODUCT)* CỦA HAI VECTOR TRÊN TRƯỜNG SỐ PHỨC $\mathbb{C}$

Mục đích của chúng ta là trang bị tích vô hướng cho các không gian vector trên trường số phức. Tuy nhiên, nếu định nghĩa tích vô hướng như trong trường hợp $\mathbb{K}$ là trường số thực thì gặp một số trở ngại chẳng hạn:

$\langle x, x\rangle$ không hẳn thuộc $\mathbb{R}$, do đó không đảm bảo $\langle x, x\rangle \geq 0\ \forall x$

Có thể xảy ra trường hợp $x \neq 0$ nhưng $\langle x, x\rangle = 0$.

Ví dụ: $(1, i) \neq 0$, nhưng $\langle (1, i), (1, i)\rangle = 1 + i^2 = 0$

Do đó, cần một định nghĩa mới thích hợp cho tích vô hướng trong trường số phức $\mathbb{C}$.

Định nghĩa: V là một không gian vector trên $\mathbb{C}$. Ta gọi một *tích vô hướng* trên V là một ánh xạ:

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$
$$(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$$

thỏa các điều kiện sau:

$\forall x, x', y \in V, k \in \mathbb{C}$ thì

i) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

ii) $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$

iii) $\langle kx, y\rangle = k\langle x, y\rangle$

iv) Nếu $x \neq 0$ thì $\langle x, x\rangle > 0$

v) $\langle x, ky\rangle = \overline{\langle ky, x\rangle} = \overline{k\langle y, x\rangle} = \bar{k}\overline{\langle y, x\rangle} = \bar{k}\langle x, y\rangle$

Nhận xét:

Điều kiện i) đảm bảo $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$

$$\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle = \overline{\langle \alpha y_1 + \beta y_2, x\rangle} = \overline{\alpha\langle y_1, x\rangle} + \overline{\beta\langle y_2, x\rangle} = \bar{\alpha}\langle x, y_1\rangle + \bar{\beta}\langle x, y_2\rangle$$

Ánh xạ định nghĩa như trên được gọi là *dạng song tuyến tính đối xứng liên hợp* xác định trên V.

Khi đó cặp $U = (V, \langle , \rangle)$ được gọi là một *không gian Unita.*

Ví dụ: $V = \mathbb{C}^n$ thì $\forall\, x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in V$ thì

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

Khi đó $U = (V, \langle , \rangle)$ được gọi là không gian Unita.

PHẦN II: MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ MA TRẬN

A. CƠ SỞ LÍ THUYẾT

MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO, MA TRẬN KHẢ NGHỊCH
(The Inverse of the Matrix, Matrix Inversion)

Định nghĩa: Cho $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, nếu $AB = BA = I$ thì ta nói A là *ma trận nghịch đảo* của ma trận B và ngược lại, ta còn nói A, B là hai ma trận nghịch đảo của nhau. Kí hiệu nghịch đảo của A là A^{-1}.

Nếu $\det A \neq 0$ thì A được gọi là *ma trận khả nghịch* (hay *không suy biến*).

Tính chất:

- Theo định nghĩa, hiển nhiên 2 ma trận là nghịch đảo của nhau thì giao hoán: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ $(k \neq 0)$

- Nghịch đảo của nghịch đảo một ma trận là chính nó: $(A^{-1})^{-1} = A$

- Với hai ma trận A, B khả nghịch bất kì, ta luôn có: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

- $\det(A^{-1}) = \overset{-1}{\det} A$

MA TRẬN CHUYỂN VỊ
(Transpose of the Matrix)

Định nghĩa: Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, *ma trận chuyển vị* của A là ma trận mà các hàng của nó tương ứng là các cột của A, kí hiệu $A^T = (a_{ji})$.

Tính chất:

- Chuyển vị của chuyển vị một ma trận là chính nó: $(A^T)^T = A$

- Hiển nhiên rằng: $(kA)^T = kA^T$

- Chuyển vị của tổng là tổng các chuyển vị: $(A + B)^T = A^T + B^T$

- Với hai ma trận A, B bất kì, ta luôn có: $(AB)^T = B^T A^T$, từ đó $(A^2)^T = (A^T)^2$

- Nghịch đảo ma trận chuyển vị bằng chuyển vị nghịch đảo ma trận đó: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

- Định thức của một ma trận bằng định thức ma trận chuyển vị của nó: $\det A = \det(A^T)$

MA TRẬN LIÊN HỢP

Định nghĩa: Cho $A \in M_n(\mathbb{K})$, *ma trận liên hợp* của A là ma trận có các phần tử tương ứng liên hợp với các phần tử của A, kí hiệu $\bar{A}$.

Nếu $A \in M_n(\mathbb{R})$ là ma trận thực thì ma trận liên hợp của A cũng là chính nó, tức là $A = \bar{A}$ nên ta không xét gì đến ma trận liên hợp trên trường $\mathbb{R}$.

Tính chất:

- $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$

- $\overline{kA} = \bar{k}\bar{A}$
- $\overline{AB} = \bar{B}\bar{A}$
- $(\bar{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$
- $\overline{A^T} = \bar{A}^T$

MA TRẬN CHUYỂN VỊ LIÊN HỢP

Định nghĩa: Đơn giản đó là ma trận vuông A lấy chuyển vị rồi liên hợp. Kí hiệu $A^* = \overline{A^T} = \bar{A}^T$.

Nếu $A \in M_n(\mathbb{R})$ là ma trận thực thì ma trận chuyển vị liên hợp của nó là ma trận chuyển vị, tức là $A^* = A^T$.

Tính chất:

- $(A^*)^* = A$
- $(A + B)^* = A^* + B^*$
- $(kA)^* = \bar{k}A^*$

MA TRẬN ĐỒNG DẠNG

Định nghĩa: Hai ma trận vuông $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ được gọi là *đồng dạng* nếu tồn tại một ma trận P không suy biến sao cho $A = PBP^{-1}$, kí hiệu $A \backsim B$.

Tính chất:

Hai ma trận đồng dạng có cùng định thức, giá trị riêng, hạng và đa thức đặc trưng. Muốn cho hai ma trận trực giao hoặc Unita hoặc đối xứng là đồng dạng thì điều kiện cần và đủ là chúng phải có chung một hệ các giá trị riêng.

MA TRẬN XÁC ĐỊNH DƯƠNG

(Positive Definite Matrix)

Một ma trận vuông $A \in M_n(\mathbb{K})$ cấp n được gọi là *xác định dương* nếu với một vector $x \neq 0$ bất kì thì tích vô hướng của x và Ax dương: $\langle Ax, x\rangle > 0$. Chú ý là ma trận xác định dương thì khả nghịch.

Với $A \in M_n(\mathbb{R})$ là ma trận thực thì là $x^T Ax > 0$, $x \neq 0$.

MA TRẬN ĐỐI XỨNG

(Symmetric Matrix)

Định nghĩa: $A = \left(a_{ij}\right) \in M_n(\mathbb{K})$ được gọi là *đối xứng* nếu $A = A^T$, hay $a_{ij} = a_{ji}$. Ma trận đối xứng là ma trận của một dạng toàn phương.

Tính chất 1:

- Nếu A đối xứng, không suy biến thì A^{-1} cũng là ma trận đối xứng: $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$
- Nếu A đối xứng thì kA cũng đối xứng: $kA = (kA)^T$

- Nếu A, B đối xứng thì $A + B$ cũng đối xứng: $A = A^T, B = B^T \Rightarrow (A + B) = A^T + B^T = (A + B)^T$

- Tích hai ma trận đối xứng là một ma trận đối xứng nếu và chỉ nếu chúng giao hoán.

Tính chất 2: Ma trận thực, đối xứng có

- Các giá trị riêng đều là số thực.

- Các vector riêng ứng với các trị riêng phân biệt thì trực giao nhau và độc lập tuyến tính (vuông góc với nhau theo nghĩa tích vô hướng của chúng bằng 0).

- Luôn chéo hóa được.

MA TRẬN PHẢN ĐỐI XỨNG

$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ được gọi là *phản đối xứng* nếu $A = -A^T$, hay $a_{ij} = -a_{ji}$.

MA TRẬN TRỰC GIAO
(Orthogonal Matrix)

Định nghĩa: Ma trận $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là *ma trận trực giao* nếu các cột tạo thành một hệ vectơ trực chuẩn, nghĩa là:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ik} = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } j \neq k \\ 1 \text{ nếu } j = k \end{cases}$$

Nói cách khác, A là ma trận trực giao khi và chỉ khi $AA^T = A^TA = I$ (hay $A^{-1} = A^T$ hoặc $A = (A^T)^{-1}$). Ma trận trực giao là ma trận chuyển từ một cơ sở trực chuẩn này sang một cơ sở trực chuẩn khác trong không gian Euclide. Ma trận trực giao cũng là ma trận các phép biến đổi trực giao của một không gian Euclide trong một cơ sở trực chuẩn. Tập các ma trận trực giao cấp n lập thành một nhóm gọi là nhóm trực giao, kí hiệu O_n. Tập các ma trận trực giao có định thức bằng 1 lập thành một nhóm con của O_n, kí hiệu SO_n.

Tính chất:

- $\det A = \pm 1$

- Nếu A, B là các ma trận vuông trực giao thì A^T, A^{-1}, AB cũng là các ma trận trực giao:

$$(A^T)^{-1} = (A^T)^T = A \;;\; A = (A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \;;\; (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^TA^T = (AB)^T$$

MA TRẬN UNITA
(Unita Matrix)

Định nghĩa: $A \in M_n(\mathbb{C})$ không suy biến thoả mãn điều kiện $AA^* = A^*A = I$ (tức là $A^{-1} = A^*$ hay $A = A^{*\,-1}$).

Nếu A là ma trận thực thì $A^* = A^T = A^{-1}$, tức A là ma trận trực giao.

<u>Ví dụ</u>:

Ma trận $A = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -i\sin\alpha \\ i\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ là ma trận Unita.

Tính chất:

- Mọi ma trận trực giao là ma trận Unita.
- Tích của hai ma trận Unita là ma trận Unita
- Ma trận nghịch đảo của một ma trận Unita là ma trận Unita.
- Định thức của ma trận Unita là một số phức có môđun bằng 1: $\det A = a + bi$ với $r = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$.
- Tất cả các giá trị riêng của ma trận Unita cũng có môđun bằng 1.

MA TRẬN HERMITE (ĐỐI XỨNG)

(Hermite Matrix)

Định nghĩa: $A \in M_n(\mathbb{C})$ được gọi là *ma trận Hermite (đối xứng)* nếu $A = A^*$.

Nếu A là ma trận thực thì $A = A^T$, tức A là ma trận đối xứng.

Ví dụ: Với $A, B \in M_2(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} i & 3-i \\ 2 & 1+i \end{pmatrix} \to \bar{A} = \begin{pmatrix} -i & 3+i \\ 2 & 1-i \end{pmatrix} \to \bar{A}^T = \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 3+i & 1-i \end{pmatrix} \neq A$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3-i \\ 3+i & 6 \end{pmatrix} \to \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3+i \\ 3-i & 6 \end{pmatrix} \to \bar{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3-i \\ 3+i & 6 \end{pmatrix} = B$$

Tính chất: Như tính chất của ma trận đối xứng đã nói ở trên.

Định lí: Ma trận Hermite chéo hóa được nhờ ma trận trực giao Unita, kí hiệu: U.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

*Đa thức đặc trưng của A: $P_A(x) = -x^2(x-6)$

*Cơ sở của không gian riêng E_0 ứng với trị riêng $x = 0$ là

$$B = \{X_1 = (-1,1,0), X_2 = (-2,0,1)\}$$

Cơ sở của không gian riêng E_6 ứng với trị riêng $x = 0$ là

$$C = \{X_3 = (1,1,2)\}$$

Các vector riêng ứng với các trị riêng phân biệt vuông góc với nhau.

*Trực giao các vector trong không gian E_0 (tích vô hướng của 2 vector khác nhau bằng 0)

Đặt $Y_1 = X_1 = (-1,1,0)$ => $||Y_1|| = \sqrt{2}$

$Y_2 = X_2 - \frac{X_2Y_1}{Y_1^2}Y_1 = (-2,0,1) - (-1,1,0) = (-1,-1,1)$ => $||Y_2|| = \sqrt{3}$

*Trực chuẩn cơ sở B, C (độ dài mỗi vector bằng 1 và tích vô hướng của 2 vector khác nhau bằng 0)

$$Z_1 = \frac{Y_1}{||Y_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$Z_2 = \frac{Y_2}{||Y_2||} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1) = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$Z_3 = \frac{Y_3}{||Y_3||} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Vậy ma trận làm chéo hóa A là ma trận Unita $U = (Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

và $U^{-1}AU = U^TAU = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

MA TRẬN HERMITE ĐỐI XỨNG LỆCH

Định nghĩa: $A \in M_n(\mathbb{C})$ được gọi là *ma trận Hermite đối xứng lệch* nếu $A = -\overline{A^T} = -A^*$.

Nếu $A \in M_n(\mathbb{R})$ thì A là ma trận phản đối xứng.

Tính chất:

- Mọi giá trị riêng của một phép biến đổi tuyến tính đối xứng lệch đều là số thuần ảo (số phức có phần thực bằng 0).

MA TRẬN BĂNG

Là ma trận có các phần tử trên đường chéo chính và một số đường chéo phụ hai bên đường chéo chính khác 0, các phần tử còn lại bằng 0. Độ rộng của băng được tính bằng số đường chéo phụ ở một bên đường chéo chính.

MA TRẬN PHỤ HỢP

(Adjunct Matrix, Adjutage Matrix)

Ma trận phụ hợp của ma trận $A \in M_n(\mathbb{K})$ được định nghĩa và kí hiệu như sau:

$$A' = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

trong đó, A_{ij} là *phần bù đại số của phần tử a_{ij} (cofactor of the element a_{ij})* của A, ngoài ra ta còn kí hiệu $\operatorname{adj}(A) = A'^T$.

$A.A'^T = A'^T.A = (\det A)I$ và nếu A khả nghịch thì $A^{-1} = \frac{1}{\det A}.A'^T$.

Bổ đề: Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, khi đó

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2, \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } j = k \\ 0 & \text{nếu } j \neq k \end{cases}$$

MA TRẬN VANDERMONDE

(Vandermonde Matrix)

Định nghĩa: $A \in M_n(\mathbb{K})$ được gọi là *ma trận Vandermone* khi các phần tử nằm trên mỗi cột (hay mỗi hàng) lập thành một cấp số nhân số có hạng đầu bằng 1, công bội tương ứng là $a_1, \dots, a_n$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Tính chất:

- $\det A = \prod_{1 \le j < i \le n}(a_i - a_j)$, dễ thấy rằng $\det A \neq 0$ khi và chỉ khi các công bội $a_1, \dots, a_n$ đôi một phân biệt, $\det A$ được gọi là định thức Vandermonde.

Ta có bảng đối chiếu giữa $M_n(\mathbb{C})$ và $M_n(\mathbb{R})$:

$A \in M_n(\mathbb{C})$	$A \in M_n(\mathbb{R})$
Liên hợp: $\bar{A}$	Chính nó: $A = \bar{A}$
Chuyển vị liên hợp: $A^* = \overline{A^T}$	Chuyển vị: $A^* = A^T$
Unita: $A = A^{*-1}$	Trực giao: $A = (A^T)^{-1}$
Hermite (đối xứng): $A = A^*$	Đối xứng: $A = A^T$
Hermite (đối xứng lệch): $A = -A^*$	Phản đối xứng: $A = -A^T$

B. BÀI TẬP

Câu 1 ⭐⭐⭐⭐⭐: Chứng minh rằng

a) Mọi ma trận cấp n đều có thể phân tích được thành tổng của một ma trận đối xứng và một ma trận phản đối xứng.

b) Tích hai ma trận đối xứng là một ma trận đối xứng nếu và chỉ nếu chúng giao hoán. Lấy ví dụ chứng tỏ tích hai ma trận đối xứng có thể không đối xứng.

c) Tích hai ma trận phản đối xứng A và B là một ma trận phản đối xứng nếu và chỉ nếu $AB = -BA$. Lấy ví dụ chứng tỏ tích hai ma trận phản đối xứng có thể không phản đối xứng.

d) Nghịch đảo (nếu có) của một ma trận đối xứng là một ma trận đối xứng.

e) Nghịch đảo (nếu có) của một ma trận phản đối xứng là một ma trận phản đối xứng.

f) Định thức của ma trận phản đối xứng cấp lẻ bằng 0.

Chứng minh

a) $A = \frac{1}{2}[(A + A^T) + (A - A^T)]$

b) Giả sử A, B là hai ma trận đối xứng, ta có

$$AB = (AB)^T <=> AB = B^T A^T \left(\text{tính chất của ma trận}\right) <=> AB = BA \left(A, B \text{ đối xứng}\right)$$

c) Giả sử A, B là hai ma trận phản đối xứng, ta có

$$AB = -(AB)^T <=> AB = -B^TA^T \text{ (tính chất của ma trận) } <=> AB = -BA\big(A, B \text{ phản đối xứng}\big)$$

d) Giả sử A là ma trận đối xứng khả nghịch, ta có

$$A^{-1} = (A^T)^{-1}\big(A \text{ đối xứng}\big) = (A^{-1})^T \text{ (tính chất của ma trận)}$$

e) Giả sử A là ma trận phản đối xứng khả nghịch, ta có

$$A^{-1} = (-A^T)^{-1}\big(A \text{ phản đối xứng}\big) = -(A^{-1})^T \text{ (tính chất của ma trận)}$$

f) Giả sử A là ma trận phản đối xứng cấp n lẻ, ta có

$$|A| = |A^T| \text{ (tính chất định thức)} = |-A^T| \big(A \text{ phản đối xứng}\big) = (-1)^n|A^T| = -|A^T| \text{ (do } n \text{ lẻ)}$$

Suy ra $|A| = 0$.

Câu 2 ⭐⭐⭐⭐: Cho A là ma trận vuông cấp n thoả $A^2 + A^T = I$. Chứng minh rằng $A^4 - 2A^2 + A = 0$.

Chứng minh

Từ giả thiết $A^2 + A^T = I$ => $(A^2)^T = (I - A^T)^T = I - A$. Mặt khác $(A^2)^T = (AA)^T = A^TA^T = (A^T)^2$.

Từ đó, ta có

$$A^4 - 2A^2 + A = A^2(A^2 - 2I) + A = A^2(-A^T - I) + A = -(I - A^T)(I + A^T) + A = -I + (A^T)^2 + A$$
$$= -I + (A^2)^T + A = -I + I - A + A = 0$$

Câu 3 (Câu A2 Putnam 1991) ⭐⭐⭐⭐: Cho A và B là các ma trận vuông thực cấp n thỏa mãn $A \neq B$, $A^3 = B^3$ và $A^2B = B^2A$**.** Chứng minh ma trận $A^2 + B^2$không khả nghịch.

Chứng minh

Ta có $(A^2 + B^2)(A - B) = A^3 - B^3 + B^2A - A^2B = 0$.

Nếu $A^2 + B^2$ khả nghịch thì $A - B = 0$, mâu thuẫn giả thiết. Vậy $A^2 + B^2$ không khả nghịch.

Câu 4 ⭐⭐⭐⭐: Giả sử A, B là hai ma trận vuông cấp $n \in \mathbb{N}^*$ khả nghịch thoả mãn $AB + BA = 0$. Chứng minh n là một số chẵn. Tìm một ví dụ về hai ma trận A, B khả nghịch thoả $AB + BA = 0$.

Chứng minh

Ta có $|AB| = |-BA| = (-1)^n|BA| = (-1)^n|AB|$ do A, B khả nghịch nên ta c ó $1 = (-1)^n$ suy ra n phải là số chẵn.

Lấy $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, khi đó $AB + BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Câu 5 (Từ forum.mathscope.org) ⭐⭐⭐⭐: Chứng tỏ hai ma trận sau đồng dạng trên $\mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

Câu 6 ⭐⭐⭐⭐⭐: Cho $n \in \mathbb{N}$, A là ma trận thực, phản đối xứng cấp n. Chứng minh $I + A$ khả nghịch.

Chứng minh

Xét hệ $(I+A)x=0$ với $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, ta có

$Ax=-x \Leftrightarrow (Ax)^T=-x^T \Leftrightarrow x^TA^T=-x^T \Leftrightarrow x^TA^Tx=-x^Tx$

Do $A^T=-A$ và $Ax=-x$ nên ta có $x^TAx=x^Tx \Leftrightarrow x^Tx=-x^Tx \Leftrightarrow x^Tx=0$

$$\Leftrightarrow (x_1 \quad \dots \quad x_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=x_1^2+\ldots+x_n^2=0 \Leftrightarrow x_1=\ldots=x_n=0$$

Hệ $(I+A)x=0$ chỉ có nghiệm tầm thường nên $I+A$ khả nghịch.

**Câu 7 : ** Cho $A \in M_n(\mathbb{K})$. Chứng minh rằng

a) Nếu $(XA)^2=0\ \forall\ X \in M_n(\mathbb{K})$ thì $A=0$.

b) Nếu $AD=DA$ với $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ là ma trận đường chéo có các phần tử chéo khác nhau thì A cũng là ma trận đường chéo.

Chứng minh

a) Lần lượt chọn n^2 ma trận $X_{ij}=(x_{ij})$ chỉ có một phần tử $x_{ij}=1$, mọi phần tử khác đều bằng 0. Khi đó ma trận $X_{ij}A$ là ma trận có hàng i là hàng j của A, mọi hàng khác đều bằng 0. Từ $(X_{ij}A)^2=0$ ta suy ra $a_{ji}^2=0$ dẫn đến $a_{ji}^2=0$. Vậy $A=0$.

b) So sánh các hàng i của AD và DA, ta có

$$\begin{aligned}&(\lambda_1 a_{i1},\lambda_2 a_{i2},\dots\lambda_{i-1}a_{i,i-1},\lambda_i a_{ii},\lambda_{i+1}a_{i,i+1},\dots,\lambda_{n-1}a_{i,n-1},\lambda_n a_{in})\\ &=(\lambda_i a_{i1},\lambda_i a_{i2},\dots,\lambda_i a_{i,i-1},\lambda_i a_{ii},\lambda_i a_{i,i+1},\dots\lambda_i a_{i,n-1},\lambda_i a_{in})\end{aligned}$$

do các λ_i khác nhau nên $a_{i1}=a_{i2}=\ldots a_{i,i-1}=a_{i,i+1}=\ldots=a_{i,n-1}=a_{in}=0$, tức là các phần tử ngoài đường chéo chính của A đều bằng 0 nên A là ma trận đường chéo.

**Câu 8 : ** Cho A là ma trận cấp n thoả $A^n=\alpha A$ với α là số thực khác 1 và -1. Chứng minh $A+I$ khả nghịch.

Chứng minh

Ta có $A^n=(A+I-I)^n=(A+I)C+(-1)^nI$, mặt khác $A^n=\alpha(A+I-I)$, từ đó

$$(A+I)(C-\alpha I)=[(-1)^{n+1}-\alpha]I$$

Vì $\alpha \neq \pm 1$ suy ra $A+I$ khả nghịch và $(A+I)^{-1}=\frac{1}{(-1)^{n+1}-\alpha}(C-\alpha I)$.

**Câu 9 (Từ forum.mathscope.org) : ** Cho $A=(a_{ij})_n$ là ma trận trực giao, n lẻ. Chứng minh rằng $|\operatorname{tr} A| \le n$ và $\det(A^2-I)=0$.

Chứng minh

Ta có $A^TA=I$, so sánh các phần tử trên đường chéo chính của hai bên, ta thấy rằng tổng bình phương các phần tử trên một hàng của A bằng 1, suy ra mọi phần tử của A có trị tuyệt đối không quá 1, vậy $|\operatorname{tr} A| \le n$.

Vì n lẻ nên A có ít nhất một giá trị riêng λ thực và vector riêng x tương ứng, tức là $Ax = \lambda x$.

Từ $A^TA = I$, ta có

$$x^TA^TAx = x^Tx <=> (Ax)^TAx = x^Tx <=> \lambda^2x^Tx = x^Tx => \lambda^2 = 1$$

Mặt khác λ^2 là giá trị riêng của A^2, từ đó suy ra $\det(A^2 - I) = 0$.

Câu 10 (Câu 4 Olympic 1997) ⭐⭐⭐⭐⭐: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau

$$M = \begin{pmatrix} C_0^0 & 2C_1^0 & 2^2C_2^0 & \dots & 2^nC_n^0 \\ 0 & C_1^1 & 2C_2^1 & \dots & 2^{n-1}C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_n^n \end{pmatrix}$$

Chứng minh

Đặt $X = (1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^n)$ và $\bar{X} = (1 \quad 2+x \quad (2+x)^2 \quad \dots \quad (2+x)^n$

Dễ thấy với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$XM = \bar{X} \quad \text{hay} \quad X = \bar{X}M^{-1}$$

Đặt $x = t - 2$, ta được

$$(1 \quad t-2 \quad (t-2)^2 \quad \dots \quad (t-2)^n) = (1 \quad t \quad t^2 \quad \dots \quad t^n)M^{-1}$$

Suy ra

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} C_0^0 & -2C_1^0 & (-2)^2C_2^0 & \dots & (-2)^nC_n^0 \\ 0 & C_1^1 & -2C_2^1 & \dots & (-2)^{n-1}C_n^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 & \dots & (-2)^{n-2}C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_n^n \end{pmatrix}$$

Câu 11 (Câu 3 đề chọn đội tuyển ĐH Kinh tế Quốc dân 2004) ⭐⭐⭐⭐: Cho A là ma trận vuông cấp n thoả mãn $AB + BA = 0$, trong đó $B = AX - XA$ với X là ma trận vuông cấp n tuỳ ý. Chứng minh A^2 là ma trận có dạng kI.

Chứng minh

Từ giả thiết, ta có

$$AB + BA = A(AX - XA) + (AX - XA)A = A^2X - AXA + AXA - XA^2 = A^2X - XA^2 = 0$$

hay $A^2X = XA^2$

Kí hiệu $A = (a_{ij})$. Vì X tuỳ ý nên trước tiên, ta chọn X lần lượt là n ma trận $X_{ii} = (x_{ij})$, trong đó phần tử $x_{ii} = 1$, mọi phần tử khác đều bằng 0, so sánh hai vế của đẳng thức $A^2X = XA^2$, ta thu được A là ma trận đường chéo $A = \operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$.

Tiếp theo, ta chọn X lần lượt là n ma trận $X_{i,n-i+1} = (x_{ij})$, trong đó phần tử $x_{i,n-i+1} = 1$, mọi phần tử khác đều bằng 0, lại so sánh hai vế của đẳng thức $A^2X = XA^2$, ta thu được $a_{11} = \dots = a_{nn}$.

Vậy $A^2 = kI$.

Câu 12 (Câu 4 Olympic 2006) ☆☆☆☆☆: Cho A là ma trận vuông cấp n sao cho mỗi dòng của nó chứa đúng hai phần tử khác 0, trong đó phần tử nằm ở đường chéo chính bằng 2006, phần tử còn lại bằng 1. Chứng minh A khả nghịch.

Chứng minh

Đặt $A = (a_{ij})$, ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử A suy biến, kí hiệu c_i là cột thứ i của A, khi đó các cột $c_1, c_2, \dots, c_n$ của A là phụ thuộc tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$. Do đó phải có một tổ hợp tuyến tính

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda_{n-1} c_{n-1} + \lambda_n c_n = 0$$

trong đó có ít nhất một hệ số khác 0. Giả sử $|\lambda_m| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}$, hiển nhiên là $|\lambda_m| > 0$. Giả sử hai phần tử khác 0 của dòng m là $a_{mm} = 2006, a_{mp} = 1$ $(1 \le p \le n, p \ne m)$, ta có

$$\lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + \dots + \lambda_n a_{mn} = \lambda_m 2006 + \lambda_p = 0$$

Suy ra

$$|\lambda_p| = 2006|\lambda_m| > |\lambda_m|$$

mâu thuẫn cách chọn $|\lambda_m|$. Vậy A khả nghịch.

(Có thể xem thêm chứng minh det $A > 0$ ở bài tập phần Giá trị riêng, vector riêng).

Câu 13 (Câu 5 Olympic 2006) ☆☆☆☆☆: Cho A là ma trận vuông cấp n hạng 1 thoả $A^{2006} = A$. Chứng minh ma trận $I - A$ suy biến.

Chứng minh

Cách 1:

Vì rank $A = 1$ nên tồn tại một dòng khác 0 trong A và các dòng còn lại đều biểu diễn tuyến tính được qua dòng này. Do đó ma trận A có dạng sau:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_1 x_2 & \dots & \lambda_1 x_n \\ \lambda_2 x_1 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_n x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_i x_1 & \lambda_i x_2 & \dots & \lambda_i x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n x_1 & \lambda_n x_2 & \dots & \lambda_n x_n \end{pmatrix} \ne 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử dòng khác 0 đó là dòng đầu và $\lambda_i \ne 0$ $(i = \overline{1,n})$.

Đặt $U = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \ne 0,\ V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ne 0.$

Khi đó $A = U^T V$ và $VU^T = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = \operatorname{tr} A = x$.

Ta có $A^2 = (U^T V)(U^T V) = U^T (VU^T) V = xU^T V = xA$.

Bằng quy nạp, ta có $A^{2006} = x^{2005} A$ mà $A^{2006} = A$ suy ra $(1 - x^{2005})A = 0$, do $A \ne 0$ nên $x = 1$.

Từ đó $A^2 = A$ hay $A(I - A) = 0$. Nếu $I - A$ suy biến thì $A = 0$, mâu thuẫn.

Vậy $I - A$ khả nghịch.

Cách 2: Sử dụng ánh xạ tuyến tính

Với $n = 1$ thì hiển nhiên. Giả sử $n \ge 2$, xét ánh xạ

$$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto \varphi(x) = Ax$$

Khi đó $\varphi(\mathbb{R}^n)$ là không gian con của $\mathbb{R}^n$ có số chiều bằng 1 (do $\operatorname{rank} A = 1$). Gọi e_0 là một vector khác 0 bất kì của $\varphi(\mathbb{R}^n)$. Khi đó $Ae_0 = ae_0$ ($a \in \mathbb{R}^*$). Mặt khác, do $A^{2006} = A$ nên ta có

$$Ae_0 = A^{2006}e_0 = A^{2005}ae_0 = A^{2004}a^2e_0 = \ldots = a^{2006}e_0$$

Từ đó, ta thu được đẳng thức $ae_0 = a^{2006}e_0$ hay $(a^{2006} - a)e_0 = 0$ suy ra $a = 1$. Như vậy $Ae_0 = e_0$ hay $(I - A)e_0 = 0$ nghĩa là hệ phương trình tuyến tính có nghiệm không tầm thường ($e_0 \neq 0$) nên ma trận $I - A$ suy biến.

Câu 14 (Câu 7 Virginia Tech Regional Mathematics Contest 1991) ☆☆☆☆: Cho $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ là các ma trận vuông cấp n, A khả nghịch, A_t, B_t là ma trận mà hàng cuối của A, B được nhân thêm một số $t \neq 0$. Chứng minh với mọi n thì $A_t^{-1}B_t = A^{-1}B$.

Chứng minh

Cách 1:

Kí hiệu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

thì khi đó

$$A_t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ ta_{n1} & \cdots & ta_{nn} \end{pmatrix}; B_t = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n} \\ tb_{n1} & \cdots & tb_{nn} \end{pmatrix}$$

Do $t \neq 0$ nên A_t khả nghịch và

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}; A_t^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n-1,1} & \frac{1}{t}A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{n-1,n} & \frac{1}{t}A_{nn} \end{pmatrix}$$

Tính toán và so sánh $A_t^{-1}B_t$ với $A^{-1}B$, ta có điều phải chứng minh.

Cách 2:

Đặt $D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t \end{pmatrix}$ thì ta có $A_t = DA, B_t = DB$, khi đó do $t \neq 0$ nên D khả nghịch và

$$A_t^{-1}B_t = (DA)^{-1}DB = A^{-1}D^{-1}DB = A^{-1}B$$

Câu 15 (Câu 3 đề chọn đội tuyển ĐH Kinh tế Quốc dân 2009) ☆☆☆☆: Cho A làm ma trận khả nghịch, ma trận A^{-1} sẽ thay đổi ra sao nếu ta thực hiện các phép biến đổi sau đây trên A:

a) Đổi chỗ dòng i, j cho nhau.

b) Nhân dòng i với số thực $\alpha \neq 0$.

c) Cộng một bội của dòng j vào dòng i.

Chứng minh

Kí hiệu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i,n-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{j,n-1} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{i1} & \dots & A_{j1} & \dots & A_{n-1,1} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{i2} & \dots & A_{j2} & \dots & A_{n-1,2} & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ A_{1,n-1} & A_{2,n-1} & \dots & A_{i,n-1} & \dots & A_{i,n-1} & \dots & A_{n-1,n-1} & A_{n,n-1} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{in} & \dots & A_{jn} & \dots & A_{n-1,n} & A_{nn} \end{pmatrix}$$

trong đó $A_{ij}, (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$ là các phần bù đại số ứng với phần tử a_{ij}.

<u>Cách 1</u>:

a) Đổi chỗ dòng i, j của A cho nhau

$$A \to A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{j,n-1} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i,n-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Khi đó:

- $|A_1| = -|A|$.
- Các phần bù đại số ngoài dòng i, j bị đổi dấu.
- Các phần bù đại số của dòng i, j bị hoán đổi về định thức con bù, còn dấu của chúng không đổi.

Như vậy, ma trận khả nghịch bị biến đổi như sau

$$A^{-1} \to A_1^{-1}$$

$$= \frac{1}{-|A|}\begin{pmatrix} -A_{11} & -A_{21} & \dots & (-1)^{i+1}M_{j1} & \dots & (-1)^{j+1}M_{i1} & \dots & -A_{n-1,1} & -A_{n1} \\ -A_{12} & -A_{22} & \dots & (-1)^{i+2}M_{j2} & \dots & (-1)^{j+2}M_{i2} & \dots & -A_{n-1,2} & -A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ -A_{1,n-1} & -A_{2,n-1} & \dots & (-1)^{i+n-1}M_{j,n-1} & \dots & (-1)^{j+n-1}M_{i,n-1} & \dots & -A_{n-1,n-1} & -A_{n,n-1} \\ -A_{1n} & -A_{2n} & \dots & (-1)^{i+n}M_{jn} & \dots & (-1)^{j+n}M_{in} & \dots & -A_{n-1,n} & -A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{j1} & \dots & A_{11} & \dots & A_{n-1,1} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{j2} & \dots & A_{i2} & \dots & A_{n-1,2} & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ A_{1,n-1} & A_{2,n-1} & \dots & A_{j,n-1} & \dots & A_{i,n-1} & \dots & A_{n-1,n-1} & A_{n,n-1} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{jn} & \dots & A_{in} & \dots & A_{n-1,n} & A_{nn} \end{pmatrix}$$

b) Dòng i của A được nhân thêm một số thực $\alpha \neq 0$

$$A \to A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{i,n-1} & \alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{j,n-1} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Khi đó:

- $|A_2| = \alpha |A|$

- Các phần bù đại số của dòng i không đổi.

- Các phần bù đại số ngoài dòng i được nhân thêm α.

$$A^{-1} \to A_2^{-1} = \frac{1}{\alpha|A|}\begin{pmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{21} & \dots & A_{i1} & \dots & \alpha A_{j1} & \dots & \alpha A_{n-1,1} & \alpha A_{n1} \\ \alpha A_{12} & \alpha A_{22} & \dots & A_{i2} & \dots & \alpha A_{j2} & \dots & \alpha A_{n-1,2} & \alpha A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \alpha A_{1,n-1} & \alpha A_{2,n-1} & \dots & A_{i,n-1} & \dots & \alpha A_{i,n-1} & \dots & \alpha A_{n-1,n-1} & \alpha A_{n,n-1} \\ \alpha A_{1n} & \alpha A_{2n} & \dots & A_{in} & \dots & \alpha A_{jn} & \dots & \alpha A_{n-1,n} & \alpha A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & \frac{1}{\alpha}A_{i1} & \dots & A_{j1} & \dots & A_{n-1,1} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & \frac{1}{\alpha}A_{i2} & \dots & A_{j2} & \dots & A_{n-1,2} & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ A_{1,n-1} & A_{2,n-1} & \dots & \frac{1}{\alpha}A_{i,n-1} & \dots & A_{i,n-1} & \dots & A_{n-1,n-1} & A_{n,n-1} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & \frac{1}{\alpha}A_{in} & \dots & A_{jn} & \dots & A_{n-1,n} & A_{nn} \end{pmatrix}$$

c) Giả sử ta cộng k lần dòng j vào dòng i của ma trận A, tức là

$$A \to A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \dots & a_{i,n-1} + ka_{j,-1} & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{j,n-1} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Khi đó:

- Hiển nhiên là $|A_3| = |A|$.

- Các phần bù đại số của dòng i không thay đổi.

- Các phần bù đại số của những phần tử ở dòng j thay đổi, sử dụng tính đa tuyến tính để tách định thức, ta được $A_{3_{jk}} = A_{jk} - kA_{ik}\ , k = \overline{1,n}$.

- Mọi phần bù đại số còn lại không thay đổi, vì là những định thức được biến đổi sơ cấp cộng vào một dòng một bội lần dòng khác.

$$A^{-1} \to A_3^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{i1} & \dots & A_{j1} - kA_{i1} & \dots & A_{n-1,1} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{i2} & \dots & A_{j2} - kA_{i2} & \dots & A_{n-1,2} & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ A_{1,n-1} & A_{2,n-1} & \dots & A_{i,n-1} & \dots & A_{i,n-1} - kA_{i,n-1} & \dots & A_{n-1,n-1} & A_{n,n-1} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{in} & \dots & A_{jn} - kA_{in} & \dots & A_{n-1,n} & A_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>Cách 2</u>:

a) Ta có $A_1 = DA$, trong đó D là ma trận mà dòng i, j đổi chỗ cho nhau trong ma trận đơn vị và dễ thấy $D = D^{-1}$, suy ra $A_1^{-1} = (DA)^{-1} = A^{-1}D^{-1} = A^{-1}D$ cho kết quả như trên.

b) Ta có $A_2 = MA$, trong đó M là ma trận đường chéo có phần tử $a_{ii} = \alpha$, các phần tử chéo còn lại bằng 1. Khi đó M^{-1} cũng là ma trận đường chéo có phần tử $a_{ii} = \frac{1}{\alpha}$, các phần tử chéo còn lại bằng 1, suy ra $A_2^{-1} = (MA)^{-1} = A^{-1}M^{-1}$ cho kết quả trên.

c) Ta có $A_3 = TA$, trong đó T là ma trận mà mọi phần tử trên đường chéo chính bằng 1 và phần tử ở hàng i cột j là k và dễ thấy T^{-1} cũng là ma trận mà mọi phần tử trên đường chéo chính bằng 1 nhưng phần tử ở hàng i cột j là $-k$, suy ra $A_3^{-1} = (TA)^{-1} = A^{-1}T^{-1}$ cho kết quả như trên.

Câu 16 (Câu 4 Olympic 2008) : Cho các số thực $a_1, a_2, \dots, a_{2008}$. Chứng minh rằng tồn tại các ma trận thực vuông cấp n $(n > 1)$ $A_1, A_2, \dots, A_{2008}$ thỏa mãn

$$\det A_k = a_k\ , k = 1, \dots, 2008 \text{ và } \det\left(\sum_{K=1}^{2008} A_k\right) = 2009$$

Chứng minh

Đặt $s = \sum_{k=1}^{2008} a_k\ ,\ b = 2008s - \frac{2009}{2008^{n-2}}$. Xét các ma trận cấp n sau

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},\ A_k = \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\ (k = 3, 4, \dots 2008)$$

Do đó $\det A_k = a_k\ ,\ k = 1, \dots, 2008$. Mặt khác:

$$\sum_{k=1}^{2008} A_k = \begin{pmatrix} s & 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ b & 2008 & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & 2008 & \dots\dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2008 \end{pmatrix}$$

Khai triển Laplace theo cột thứ nhất, ta được:

$$\det\left(\sum_{k=1}^{2008} A_k\right) = s.2008^{n-1} - b.2008^{n-2} = 2009$$

Câu 17 (Câu 3 Olympic Quốc tế 2000): Cho $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ và $\operatorname{rank}(AB - BA) = 1$. Chứng minh $(AB - BA)^2 = 0$.

Chứng minh

Vì $\operatorname{rank}(AB - BA) = 1$ nên tồn tại vector dòng khác 0 trong A và các vector dòng còn lại đều biểu diễn tuyến tính được qua dòng này. Do đó ma trận $AB - BA$ có dạng sau:

$$AB - BA = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_1 x_2 & \dots & \lambda_1 x_n \\ \lambda_2 x_1 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_n x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_i x_1 & \lambda_i x_2 & \dots & \lambda_i x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n x_1 & \lambda_n x_2 & \dots & \lambda_n x_n \end{pmatrix} \neq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử dòng khác 0 đó là dòng đầu và $\lambda_i \neq 0$ $(i = \overline{1,n})$.

Đặt $U = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \neq 0$, $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$.

Khi đó $AB - BA = U^T V$ và $VU^T = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \operatorname{tr}(AB - BA) = 0$

Ta có $(AB - BA)^2 = (U^T V)(U^T V) = U^T (VU^T) V = U^T \operatorname{tr}(AB - BA) V = 0$.

Câu 18 (Từ forum.mathscope.org): Cho các ma trận khả nghịch $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ và số thực c thoả $c^2 \neq 1$. chứng minh rằng $cA^T + B^{-1}AB^T \neq 0$.

Chứng minh

Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử $cA^T + B^{-1}AB^T = 0 \Leftrightarrow cA^T = -B^{-1}AB^T$

Lấy định thức hai vế, ta được

$$\det(cA^T) = \det(-B^{-1}AB^T) \Leftrightarrow c^n \det(A^T) = (-1)^n \det(B^{-1}) \det A \det(B^T)$$

$$\Leftrightarrow c^n \det A = (-1)^n \det(B^{-1}) \det B \det A \Leftrightarrow c^n \det A = (-1)^n \det A \Leftrightarrow c^n = (-1)^n$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $c \neq \pm 1$ dù n chẵn hay lẻ. Vậy $cA^T + B^{-1}AB^T \neq 0$.

Câu 19: Chứng minh rằng nếu A là ma trận vuông cấp n thoả $aA^2 + bA + cI = 0$ thì $A - kI$ khả nghịch và tính $(A - kI)^{-1}$.

Chứng minh

Ta có $aA^2 + bA + cI = 0 \Leftrightarrow a(A^2 - 2kA + k^2 I) + (b - 2ak)A + cI - ak^2 I = 0$

$\Leftrightarrow a(A - kI)^2 + (b - 2ak)(A - kI) + cI + kbI - 3ak^2 I = 0$

$\Leftrightarrow (A - kI)[a(A - kI) + (b - 2ak)I] = -(c + kb - 3ak^2)I$

Suy ra $A - kI$ khả nghịch và $(A - kI)^{-1} = \frac{-1}{c + kb - 3ak^2}[a(A - kI) + (b - 2ak)I]$

Câu 20 (Từ math.vn) ☆☆☆☆☆: Cho $A_1, A_2, B, C \in M_2(\mathbb{K})$. Chứng minh $A_1(BC - CB)^2 A_2 = A_1 A_2 (BC - CB)^2$.

Chứng minh

Vì $\operatorname{tr}(BC - CB) = 0$ nên đặt $BC - CB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, khi đó $(BC - CB)^2 = (a^2 + bc)I$.

Do đó

$$A_1(BC - CB)^2 A_2 = A_1(a^2 + bc)IA_2 = A_1A_2(a^2 + bc)I = A_1A_2(BC - CB)^2$$

Câu 21 (Đề chọn đội tuyển Đại học Vinh 2003) ☆☆☆☆: Cho A, B, C là ba ma trận vuông cấp 2003. Biết C khả nghịch và $AC = CB$. Các phần tử trên đường chéo chính của A là 0 hoặc 1, các phần tử trên đường chéo chính của B là 0 hoặc -1. Tìm số phần tử 0 trên đường chéo chính của A và B.

Chứng minh

Từ $AC = CB$ và C khả nghịch, ta có $A = CBC^{-1}$. Suy ra A và B là hai ma trận đồng dạng nên $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.

Kết hợp với điều dễ thấy là $\operatorname{tr} A \geq 0$ và $\operatorname{tr} B \leq 0$, suy ra $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 0$.

Vậy các phần tử chéo của A và B là 0 cả.

Câu 22 ☆☆☆☆☆: Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})$ khả nghịch có mọi phần tử đều dương. Chứng minh rằng số phần tử bằng 0 của ma trận A^{-1} không quá $n^2 - 2n$.

Chứng minh

Kí hiệu $A^{-1} = (b_{ij})$ thì từ $A^{-1}A = I$ ta có

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = 0 \; \forall i \neq j \text{ hay } b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \ldots + b_{i,n-1}a_{n-1,j} + b_{in}a_{nj} = 0$$

Hiển nhiên là trong một dòng của A^{-1} có ít nhất một phần tử khác 0, nhưng vì $a_{ij} > 0 \; \forall i, j$ nên từ đẳng thức trên số phần tử khác 0 trong một dòng của A^{-1} phải là 2. Suy ra số phần tử bằng 0 của ma trận A^{-1} không quá $n^2 - 2n$.

PHẦN III: MA TRẬN KHỐI

A. CƠ SỞ LÍ THUYẾT

Thông thường, ta chỉ dùng đến ma trận khối cỡ 2×1, 1×2, 2×2, với $A, B, C, D, E, F, G, H \in M_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC & AD \\ BC & BD \end{pmatrix} \;\; ; \;\; \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = (AB + CD)$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BD \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leq \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & B \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & * \end{pmatrix}$$

Tính định thức của một ma trận khối không như tính định thức của ma trận thông thường. Khi ma trận khối có dạng tam giác (trên, dưới, đường chéo) thì định thức của nó bằng tích các định thức của ma trận nằm trên đường chéo chính (trong phần Định thức sẽ nói rõ điều này).

B. BÀI TẬP

Câu 1 (Câu 1 ngày thứ hai Olympic Quốc tế 2004)☆☆☆☆☆:

Cho A là ma trận cỡ 4×2 và B là ma trận cỡ 2×4 thoả $AB = \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$. Tìm BA.

Giải:

Cách 1:

Giả sử $A = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} E & F \end{pmatrix}$ với C, D, E, F là ma trận vuông cấp 2 thì ta có

$$BA = (EC + FD) \;, \qquad AB = \begin{pmatrix} CE & CF \\ DE & DF \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

=> $CE = I = EC, DF = I = FD$

Do đó $BA = EC + FD = 2I_2$

Cách 2:

Ta có $\operatorname{rank}(AB) = 2, (AB)^2 = 2AB$

=> $2 = \operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(2AB) = \operatorname{rank}[(AB)^2] = \operatorname{rank}[A(BA)B] \leq \operatorname{rank} BA \leq 2$

do BA là ma trận vuông cấp 2 => $\operatorname{rank}(BA) = 2$ hay BA khả nghịch.

Mặt khác $(BA)^3 = BABABA = B(AB)^2A = 2BABA = 2(BA)^2$. Vì BA khả nghịch nên $BA = 2I_2$.

Câu 2 (Câu 6b Putnam 1986 - Câu 5 đề chọn đội tuyển CĐ SP BR-VT 2012) ☆☆☆☆☆: Cho $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$ thoả $AB^T = CD^T$ là các ma trận đối xứng và $AD^T - BC^T = I$. Chứng minh $A^TD - C^TB = I$.

Chứng minh

Do AB^T và CD^T là các ma trận đối xứng nên $\begin{cases} AB^T = (AB^T)^T = BA^T \\ CD^T = (CD^T)^T = DC^T \end{cases}$

Mặt khác, $AD^T - BC^T = I \Rightarrow I = (AD^T - BC^T)^T = (AD^T)^T - (BC^T)^T = DA^T - CB^T$.

Ta có

$$\begin{cases} AB^T - BA^T = 0 \\ CD^T - DC^T = 0 \\ AD^T - BC^T = I \\ DA^T - CB^T = I \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$\begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \Rightarrow A^TD - C^TB = I.$$

Câu 3 **(Câu 4 Olympic 1993)** ☆☆☆☆☆**:** Cho A, B là các ma trận vuông cấp n sao cho tổng, hiệu của chúng là các ma trận không suy biến. Chứng minh rằng $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ cũng là ma trận không suy biến.

Chứng minh

Cách 1:

Ta có $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}$ là một định thức cấp $2n$.

Nhân -1 vào cột $n + i$ rồi cộng vào cột i $(i = 1, \dots, n)$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A - B & B \\ B - A & A \end{vmatrix}$$

Nhân 1 vào hàng $n + i$ rồi cộng vào hàng i $(i = 1, \dots, n)$

$$\begin{vmatrix} A - B & B \\ B - A & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A + B \\ B - A & A \end{vmatrix}$$

Khai triển Laplace theo n hàng đầu

$$\begin{vmatrix} 0 & A + B \\ B - A & A \end{vmatrix} = (-1)^{n^2}|B - A||A + B| \neq 0$$

Cách 2:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - B & 0 \\ 0 & A + B \end{pmatrix}$$

Lấy định thức hai vế, suy ra điều phải chứng minh.

Cách 3:

Xét hệ

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Ax + By = 0 \\ Bx + Ay = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A + B)(x + y) = 0 \\ (A - B)(x - y) = 0 \end{cases}$$

Do $|A + B| \neq 0$ nên $x + y = 0$ và $|A - B| \neq 0$ nên $x - y = 0$

Suy ra $x = y = 0$. Nói cách khác, hệ chỉ có nghiệm tầm thường nên $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \neq 0$.

Câu 4 (Từ artofproblemsolving.com) ⭐⭐⭐⭐: Cho $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{C})$ giao hoán với nhau từng đôi một. Đặt $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Chứng minh X khả nghịch khi và chỉ khi $(AD - BC)$ khả nghịch.

Chứng minh

Ta chứng minh $\det X = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$:

Giả sử x không là giá trị riêng của D, khi đó $(D - xI)$ khả nghịch. Ta có

$$\begin{pmatrix} D - xI & -B \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D - xI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (D - xI)A - BC & 0 \\ C & D - xI \end{pmatrix}$$

Lấy định thức hai vế, ta được

$$\det(D - xI) \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D - xI \end{pmatrix} = \det[(D - xI)A - BC] \det(D - xI)$$

$$<=> \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D - xI \end{pmatrix} = \det[(D - xI)A - BC]$$

Xét đa thức $P(x) = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D - xI \end{pmatrix} - \det[(D - xI)A - BC]$

Dễ thấy $\deg P(x) \le n$ và $P(x) = 0$ với mọi x không là là giá trị riêng của D. Suy ra $P(x) \equiv 0$ hay $P(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{C}$.

Từ đó $P(0) = 0$, ta có điều phải chứng minh.

Câu 5 (Từ artofproblemsolving.com) ⭐⭐⭐⭐: Cho $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ giao hoán với nhau từng đôi một. Đặt $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix}$. Chứng minh M khả nghịch khi và chỉ khi $(A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC)$ khả nghịch.

Chứng minh

Ta chứng minh $\det M = \det \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix}$

Giả sử x không là giá trị riêng của A, khi đó $A_1 = (A - xI)$ khả nghịch. Ta có

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & B & C \\ C & A_1 & B \\ B & C & A_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -A_1^{-1}C & I & 0 \\ -A_1^{-1}B & 0 & I \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} A_1 & B & C \\ C & A_1 & B \\ B & C & A_1 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} A_1 & B & C \\ 0 & A_1 - BCA_1^{-1} & B - C^2A_1^{-1} \\ 0 & C - B^2A_1^{-1} & A_1 - BCA_1^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \det A_1 \det[(A_1 - BCA_1^{-1})(A_1 - BCA_1^{-1}) - (C - B^2A_1^{-1})(B - C^2A_1^{-1})]$$

$$= \det[A_1(A_1^2 + B^3A_1^{-1} + C^3A_1^{-1} - 3BC)] = \det(A_1^3 + B^3 + C^3 - 3A_1B)$$

Xét đa thức $P(x) = \det \begin{pmatrix} A_1 & B & C \\ C & A_1 & B \\ B & C & A_1 \end{pmatrix} - \det(A_1^3 + B^3 + C^3 - 3A_1B)$

Dễ thấy $\deg P(x) \le 3n$ và $P(x) = 0$ với mọi x không là là giá trị riêng của A. Suy ra $P(x) \equiv 0$ hay $P(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{C}$.

Từ đó $P(0) = 0$, ta có điều phải chứng minh.

Câu 6 ⭐⭐⭐⭐: Cho các ma trận vuông không suy biến $A = (a_{ij})_n$, $B = (b_{ij})_m$. Tính

$$|M| = \begin{vmatrix} b_{11}A & b_{12}A & \dots & b_{1m}A \\ b_{21}A & b_{22}A & \dots & b_{2m}A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}A & b_{m2}A & \dots & b_{mm}A \end{vmatrix}$$

theo $|A|$ và $|B|$.

<u>Giải</u>:

Dùng các phép biến đổi sơ cấp theo dòng , ta có

$$|B| = |\mathrm{diag}(c_1, c_2, \dots, c_m)| = c_1 \dots c_m$$

điều này thực hiện được do B khả nghịch.

Nếu ta áp dụng một phép biến đổi sơ cấp nào đó với dòng i, k của $|B|$ thì ta cũng áp dụng phép biến đổi đó cho tất cả các dòng của khối $(b_{i1}A \quad b_{i2}A \quad \dots \quad b_{im}A)$ và $(b_{k1}A \quad b_{k2}A \quad \dots \quad b_{km}A)$. Khi đó ta được

$$|M| = \begin{vmatrix} c_1A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & c_mA \end{vmatrix} = (c_1 \dots c_m)^n |A|^m = |A|^m |B|^n$$

Câu 7 (Câu 1 Đề Virginia Tech Regional Mathematics Contest 2004) ⭐⭐⭐⭐:

Cho A, B, C là các ma trận vuông thực cấp 2 và đặt $M = \begin{pmatrix} I & A \\ B & C \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} I & B \\ A & C \end{pmatrix}$. Nếu M khả nghịch thì N có khả nghịch không?

<u>Giải</u>:

Chọn $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ thì $\det M = \det \begin{pmatrix} I & A \\ B & C \end{pmatrix} \neq 0$ nhưng $\det N = \det \begin{pmatrix} I & B \\ A & C \end{pmatrix} = 0$.

Câu 8 (Định lí phân tích hạng) ⭐⭐⭐⭐⭐: Cho ma trận $A_{m\times n}$ hạng $r \neq 0$,. Chứng minh tồn tại hai ma trận $B_{m\times r}$, $C_{r\times n}$ sao cho $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} C = r$ và $A = BC$.

Chứng minh

Do $\operatorname{rank} A = r$ nên không gian sinh bởi họ các vector cột của A có hạng là r.

Gọi $B_{m\times r}$ với r cột là r cột cơ sở của không gian này lấy từ các cột của A. Khi đó mỗi cột của A là một tổ hợp tuyến tính các cột của B nên tồn tại ma trận $C_{r\times n}$ thoả $A = BC$ (giả sử các cột của B là $b_1, b_2, \dots, b_r$ và cột thứ j của ma trận A có sự biểu diễn $c_j(A) = c_{1j}b_1 + c_{2j}b_2 + \dots + c_{rj}b_r$ thì $C = (c_{ij})$ là ma trận cần tìm).

Bây giờ, do cách xây dựng như trên nên $\operatorname{rank} B = r$. Hơn nữa, $r = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(BC) \leq \operatorname{rank} C$ và C có r hàng nên $\operatorname{rank} C = r$.

Câu 9 ☆☆☆☆☆**:** Cho ma trận $A_{m\times n}$ hạng n. Chứng minh rằng tồn tại ma trận X sao cho $XA = I_n$.

Chứng minh

Nếu $m = n$ thì A là ma trận vuông khả nghịch nên $X = A^{-1}$.

Dễ thấy, $A_{m\times n}$ hạng n không thể xảy ra khi $m < n$.

Xét $m > n$, khi đó n cột của A lập thành một họ vector độc lập tuyến tính trong $\mathbb{K}^m$, do đó ta có thể bổ sung thêm $m-n$ cột để được một cơ sở trong $\mathbb{K}^m$. Khi đó ta được một ma trận vuông cấp m khả nghịch có dạng $[\,A \quad B\,]$ với $B_{m\times(m-n)}$ là ma trận gồm $m-n$ vector cột bổ sung đó. Biểu diễn nghịch đảo của ma trận này dưới dạng ma trận khối

$$[\,A \quad B\,]^{-1} = \begin{bmatrix} X \\ C \end{bmatrix} \text{ trong đó } X_{n\times m}\,, C_{(m-n)\times m}$$

Khi đó

$$\begin{bmatrix} X \\ C \end{bmatrix}[\,A \quad B\,] = I_m$$

Cụ thể như sau

$$\begin{bmatrix} X_{n\times m} \\ C_{(m-n)\times m} \end{bmatrix}[\,A_{m\times n} \quad B_{m\times(m-n)}\,] = \begin{bmatrix} (XA)_n & (XB)_{n\times(m-n)} \\ (CA)_{(m-n)\times n} & (CB)_{(m-n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times(m-n)} \\ 0_{(m-n)\times n} & I_{(m-n)} \end{bmatrix} = I_m$$

=> $XA = I_n$

Câu 10 ☆☆☆☆☆**:** Cho ma trận $A_{m\times n}$ hạng n. Chứng minh rằng tồn tại ma trận Y khả nghịch sao cho

$$YA = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

Chứng minh

Làm như chứng minh trên thì $Y = [\,A \quad B\,]^{-1} = \begin{bmatrix} X \\ C \end{bmatrix}$ là ma trận cần tìm. Thật vậy

$$YA = \begin{bmatrix} X_{n\times m} \\ C_{(m-n)\times m} \end{bmatrix}[A_{m\times n}] = \begin{bmatrix} (XA)_{n\times n} \\ (CA)_{(m-n)\times n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}$$

Câu 11 ☆☆☆☆☆**:** Cho ma trận $A_{m\times n}$ hạng m. Chứng minh rằng tồn tại ma trận X sao cho $AX = I_m$.

Chứng minh

Nếu $m = n$ thì A là ma trận vuông khả nghịch nên $X = A^{-1}$.

Dễ thấy, $A_{m\times n}$ hạng n không thể xảy ra khi $m > n$.

Xét $m < n$, khi đó m hàng của A lập thành một họ vector độc lập tuyến tính trong $\mathbb{K}^m$, do đó ta có thể bổ sung thêm $n-m$ hàng để được một cơ sở trong $\mathbb{K}^m$. Khi đó ta được một ma trận vuông cấp n khả nghịch có dạng $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ với $B_{(n-m)\times n}$ là ma trận gồm $n-m$ hàng bổ sung đó. Biểu diễn nghịch đảo của ma trận này dưới dạng ma trận khối

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}^{-1} = [\,X \quad C\,] \text{ trong đó } X_{n\times m}\,, C_{n\times(n-m)}$$

Khi đó

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} [\, X \quad C \,] = I_n$$

Cụ thể như sau

$$\begin{bmatrix} A_{m\times n} \\ B_{(n-m)\times n} \end{bmatrix} [X_{n\times m} \quad C_{n\times(n-m)}] = \begin{bmatrix} (AX)_m & (AC)_{m\times(n-m)} \\ (BX)_{(n-m)\times m} & (BC)_{(n-m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0_{m\times(n-m)} \\ 0_{(n-m)\times m} & I_{n-m} \end{bmatrix} = I_m$$

=> $AX = I_m$.

Câu ☆☆☆☆☆: Cho ma trận $A_{m\times n}$ hạng m. Chứng minh rằng tồn tại ma trận Y khả nghịch sao cho

$$AY = [I_m \quad 0]$$

Chứng minh

Làm như chứng minh trên thì $Y = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}^{-1} = [\, X \quad C \,]$ là ma trận cần tìm. Thật vậy

$$AY = [A_{m\times n}][X_{n\times m} \quad C_{n\times(n-m)}] = [\,(AX)_m \quad (AC)_{m\times(n-m)}\,] = [\,I_m \quad 0_{m\times(n-m)}\,]$$

Câu 13 ☆☆☆☆: Cho ma trận $A_{m\times n}$ có hạng r. Chứng minh rằng tồn tại các ma trận khả nghịch P, Q sao cho $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Chứng minh

Theo chứng minh của các câu trước, ta có:

- Thứ nhất, do ma trận $A_{m\times n}$ hạng là r nên có sự phân tích $A = BC$ với $B_{m\times r}$, $C_{r\times n}$ cùng hạng r.
- Thứ hai, tồn tại các ma trận khả nghịch P, Q sao cho $PB = \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}$ và $CQ = [I_r \quad 0]$.

Vậy $PAQ = P(BC)Q = (PB)(CQ) = \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} [I_r \quad 0] = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Câu 14 ☆☆☆☆: Giả sử A là ma trận cấp n hạng r. Tìm số nghiệm độc lập tuyến tính của hệ phương trình $AX = 0$ với X là ma trận cấp n.

Giải:

Do A là ma trận cấp n hạng r nên tồn tại các ma trận P, Q khả nghịch sao cho $A = PI_{r,n}Q$ với

$$I_{r,n} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Khi đó hệ $AX = 0$ tương đương $I_{r,n}QX = 0$, khi đó QX phải có dạng sau

$$QX = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_1 & Y_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Suy ra số nghiệm độc lập tuyến tính của hệ $I_{r,n}QX = 0$ cũng như $AX = 0$ là $n(n-r)$.

PHẦN IV: MA TRẬN LUỸ LINH
(Nilpotent Matrix)

A. CƠ SỞ LÍ THUYẾT

Định nghĩa: Cho A là ma trận vuông cấp n, A được gọi là ma trận luỹ linh nếu tồn tại số nguyên dương q sao cho $A^q = 0$.

Nếu $A^q = 0$ thì ta cũng có $A^m = 0$ với mọi số tự nhiên m thoả $m \geq q$.

Số nguyên dương k được gọi là cấp luỹ linh của ma trận A nếu $A^k = 0$, và $A^{k-1} \neq 0$.

Ma trận A được gọi là ma trận luỹ linh đơn nếu ma trận $A - I$ luỹ linh.

Một số tính chất đặc trưng

Cho $A \in M_n(\mathbb{K})$, các mệnh đề sau là tương đương:

1. A lũy linh.
2. Đa thức tối tiểu của A là λ^k với số nguyên dương $k \leq n$.
3. Đa thức đặc trưng của A là λ^n.
4. A có giá trị riêng duy nhất là 0.
5. $\operatorname{tr}(A^m) = 0$ với mọi $m \geq 0$.

Hệ quả

- Bậc của một ma trận lũy linh luôn luôn nhỏ hơn hoặc bằng cấp của nó. Ví dụ mọi ma trận lũy linh cấp 2 đều bình phương bằng 0.
- Ma trận luỹ linh thì có định thức và vết luôn bằng 0 (điều ngược lại không đúng).
- Một ma trận cấp hai lũy linh khi và chỉ khi cả định thức và vết của nó bằng 0 (hai chiều).
- Ma trận đường chéo lũy linh duy nhất là ma trận không.

Các tính chất khác

a) Nếu $A - \alpha I$ là ma trận luỹ linh thì mọi giá trị riêng của A đều bằng α.

Giả sử $(A - \alpha I)^k = 0, k \leq n$, khi đó $(A - \alpha I)^n = 0$, vậy $(\lambda - \alpha)^n$ là đa thức đặc trưng của A và chỉ có giá trị riêng là α (bội n).

b) Nếu A là ma trận luỹ linh thì các ma trận $I - A$ và $I + A$ khả nghịch.

Giả sử $A^k = 0$ $(k \geq 1)$, ta có $I = I - A^k = (I - A)\left(I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}\right)$

Như vậy $I - A$ khả nghịch và $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.

Tương tự ta cũng có $I + A$ khả nghịch vì $I = I + A^{2k+1} = (I + A)\left(I - A + A^2 - \ldots + A^{2k}\right)$

c) Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp và $AB = BA$. Khi đó nếu A và B là các ma trận luỹ linh thì $A + B$ cũng là ma trận luỹ linh.

Do A và B là các ma trận luỹ linh nên tồn tại các số nguyên dương p, q sao cho

$A^p = 0, B^q = 0$, giả sử $p \geq q$.

Theo giả thiết $AB = BA$ nên ta có khai triển nhị thức Newton và dễ thấy

$$(A+B)^{2p}=\sum_{i=0}^{2p} C_{2p}^{i} A^{i} B^{2p-i}=0$$

Vậy $A+B$ luỹ linh.

d) Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp và $AB=BA$. Khi đó nếu A và B là các ma trận luỹ linh đơn thì ma trận tích AB cũng là ma trận luỹ linh đơn.

Vì $A-I, B-I$ là các ma trận luỹ linh, nên tồn tại các số nguyên dương p và q sao cho

$$(A–I)^{p}=0,(B–I)^{q}=0$$

Ta có $AB-I=(A-I)B+(B-I)$, giả sử $p\geq q$ khi đó do $AB=BA$ nên ta cũng có tính chất giao hoán $(A-I)B(B-I)=(B-I)(A-I)B$. Sử dụng khai triển nhị thức Newton, ta thu được:

$$(AB-I)^{2p}=[(A-I)B+(B-I)]^{2p}=\sum_{i=0}^{2p} C_{2p}^{i}(A-I)^{i}B^{i}(B-I)^{2p-i}$$

Trong 2 số i và $2p-i$ phải có một số không nhỏ hơn p nên $(A-I)^{i}B^{i}(B-I)^{2p-i}=0$. Vậy tồn tại số nguyên dương $2p$ sao cho $(AB-I)^{2p}=0$, tức $AB–I$ là ma trận luỹ linh.

<u>**Chú ý**</u>: Tương tự như khái niệm ma trận luỹ linh người ta cũng xét khái niệm tự đồng cấu luỹ linh như sau:

Tự đồng cấu f của $\mathbb{K}$–không gian vector V trên trường $\mathbb{K}$ gọi là luỹ linh nếu có số nguyên dương q để $f^{q}=0$.

Thêm vào đó nếu $f^{q-1}\neq 0$ thì q gọi là bậc luỹ linh của f.

Tự đồng cấu f của $\mathbb{K}$–không gian vector V trên trường $\mathbb{K}$ gọi luỹ linh đơn nếu $f–Id_{V}$ là luỹ linh (Id_{V} là tự đẳng cấu đồng nhất trên V).

Chứng minh tương tự như ma trận luỹ linh, ta cũng có một số tính chất của đồng cấu luỹ linh như sau:

1. Nếu f và g là hai tự đồng cấu luỹ linh giao hoán được của $\mathbb{K}$–không gian vector V trên trường $\mathbb{K}$ thì $f+g$ cũng luỹ linh.
2. Nếu f và g là hai tự đồng cấu luỹ linh đơn giao hoán được của $\mathbb{K}$–không gian vector V trên trường $\mathbb{K}$ thì $f.g$ cũng luỹ linh đơn.
3. Nếu f là tự đồng cấu luỹ linh của $\mathbb{R}$–không gian vector $V-n$ chiều trên trường $\mathbb{R}$ các số thực thì mọi giá trị riêng của f đều bằng 0.
4. Nếu f là tự đồng cấu luỹ linh đơn của $\mathbb{R}$–không gian vector $V-n$ chiều trên trường $\mathbb{R}$ các số thực thì mọi giá trị riêng của f đều bằng 1.

B. BÀI TẬP

Câu 1 (từ math.vn) : Cho A là ma trận vuông cấp n và một số nguyên $m>n$. Chứng minh rằng $A^{m}=0$ nếu và chỉ nếu $A^{n}=0$.

Chứng minh

<u>Cách 1</u>:

Với $m > n$ nếu $A^n = 0$ thì hiển nhiên $A^m = 0$.

Nếu $A^m = 0$ thì theo định nghĩa, A luỹ linh và theo tính chất, bậc luỹ linh của nó không vượt quá n là cấp của A, tức là tồn tại $1 \leq k \leq n$ sao cho $A^{k-1} \neq 0, A^k = 0$, và từ đó suy ra $A^n = 0$.

Cách 2:

Với $m > n$ nếu $A^n = 0$ thì hiển nhiên $A^m = 0$.

Giả sử ta có $A^m = 0$, ta chứng minh $A^n = 0$ với $m > n$.

Kí hiệu $f(x)$ là đa thức khác 0, chuẩn tắc, bậc nhỏ nhất nhận A làm nghiệm, tức là $f(A) = 0$, ta luôn tìm được đa thức $f(x)$ như thế, hoặc nó chính là đa thức đặc trưng của A hoặc nó là một đa thức nào đó.

Vì đa thức đặc trưng của A có bậc n nên $1 \leq \deg f \leq n$.

Thực hiện phép chia x^m cho $f(x)$, ta có

$$x^m = f(x)q(x) + r(x) \ (\deg r < \deg f)$$

Thay A vào, ta được $r(A) = 0$ nhưng vì cách chọn $f(x)$ nên $r(x) \equiv 0$. Vì vậy x^m chia hết cho $f(x)$, do đó $f(x)$ có dạng $f(x) = ax^k$ với a là hằng số khác 0 và $1 \leq k \leq n$.

Khi đó từ $f(A) = 0$, ta có $A^k = 0 \ (1 \leq k \leq n)$ suy ra $A^n = 0$.

Câu 2 (Từ câu A5 Putnam 1990) ⭐⭐⭐⭐:

a) Cho A và B là các ma trận cấp 2 thỏa mãn $ABAB = 0$. Chứng minh $BABA = 0$.

b) Lấy ví dụ về 2 ma trận A và B cấp 3 thỏa mãn $ABAB = 0$ nhưng $BABA \neq 0$.

Giải:

a) Ta có $ABAB = 0$ suy ra $B(ABAB)A = 0$ hay $(BA)^3 = 0$. Vậy BA luỹ linh, do đó $(BA)^2 = BABA = 0$.

b) Lấy $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó $ABAB = 0$ nhưng $BABA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

Câu 3 (Tính chất ma trận luỹ linh – Từ Wikipedia) ⭐⭐⭐⭐⭐:

Nếu A là ma trận cấp n lũy linh thì, thì ma trận $I + A$ khả nghịch, đồng thời $\det(I + A) = 1$.

Chứng minh

$I + A$ khả nghịch thì đơn giản, ta chứng minh $\det(I + A) = 1$:

Vì A luỹ linh nên tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ nhỏ nhất để $A^m = 0$, hiển nhiên $m \leq n$. Xét đa thức $p(x) = (1 - x)^m$, ta có $p(I + A) = (-1)^m A^m = 0$ điều đó có nghĩa là đa thức tối tiểu của $I + A$ là ước của $p(x)$. Do mọi giá trị riêng của một ma trận là nghiệm của đa thức tối tiểu của nó nên các giá trị riêng của $I + A$ chỉ là 1. Vì đa thức tối tiểu và đa thức đặc trưng có cùng nhân tử chung nên

$$|I + A - xI| = (1 - x)^n$$

Do đó $\det(I + A) = 1$.

Câu 4 (Tính chất ma trận luỹ linh – Từ Wikipedia) ⭐⭐⭐⭐⭐:

Nếu A là một ma trận cấp n thỏa mãn $\det(I + tA) = 1$ với mọi t, thì A lũy linh.

Chứng minh

Với $t = 0$ thì $\det(I + tA) = \det I = 1$

Xét $t \neq 0$, ta có

$$\det(I+tA)=\det\left[t\left(\frac{1}{t}I+A\right)\right]=t^n\det\left(A+\frac{1}{t}I\right)$$

Đặt $\lambda=\frac{1}{t}$, ta có

$$\frac{1}{\lambda^n}\det(A+\lambda I)=1\ \forall\lambda\neq 0$$

Suy ra $\det(A+\lambda I)\equiv\lambda^n$ hay $\det(A-\lambda I)=(-\lambda)^n$. Mặt khác, đó chính là đa thức đặc trưng của A. Vậy $A^n=0$, tức A luỹ linh.

Câu 5 (Từ forum.mathscope.org) ☆☆☆☆☆: Cho A,B là hai ma trận vuông cấp n và giao hoán nhau, B luỹ linh. Chứng minh rằng

$$\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}A \text{ và } \det(A+B)=\det A.$$

Chứng minh

*Theo tính chất, B luỹ linh nên $\operatorname{tr}B=0$ suy ra $\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}A+\operatorname{tr}B=\operatorname{tr}A$.

*Nếu $\det A=0$, do B luỹ linh nên $B^n=0$, từ $AB=BA$ ta có $(A+B)^n=AC$ suy ra $\overset{n}{\det}(A+B)=\det A\det C=0$ => $\det(A+B)=0=\det B$.

Nếu $\det A\neq 0$ tức A khả nghịch, cũng từ $AB=BA$, ta có $BA^{-1}=A^{-1}B$ => $(BA^{-1})^n=0$ tức BA^{-1} luỹ linh và lại theo chứng minh trên thì

$$\det(I+BA^{-1})=1 \iff \det(A+B)\det A^{-1}=1 \iff \det(A+B)=\det A.$$

<u>Nhận xét</u>: Từ $det(A+B)=det\ A$ có thể suy trực tiếp ra $tr(A+B)=tr\ A$.

Thật vậy vì $AB=BA$ và $det(A+B)=det\ A$, ta cũng có $det(A-\lambda I+B)=det(A-\lambda I)$ (thay vai trò của A bởi $A-\lambda I$ cũng giao hoán với B với mọi λ), tức là $A+B$ và A có cùng đa thức đặc trưng nên cũng cùng tập giá trị riêng và do đó cũng cùng vết.

Câu 6 (Olympic XI): Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp và $AB=BA$. Khi đó nếu A và B là các ma trận luỹ linh thì các ma trận $I+(A+B)$, $I-(A+B)$ là các ma trận khả nghịch.

Chứng minh

Câu 7 ☆☆☆☆☆: Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp thoả mãn các điều kiện:

i. $AB=BA$

ii. Tồn tại các số nguyên dương p,q sao cho $(A-I)^p=(B-I)^q=0$.

Chứng minh rằng ma trận tích AB có các giá trị riêng đều bằng 1.

Chứng minh

Theo tính chất d đã chứng minh trên thì AB luỹ linh đơn, do đó đa thức đặc trưng của AB là

$$P_{AB}(\lambda)=(1-\lambda)^n$$

và nó chỉ có nghiệm là 1 (bội n).

Câu 8 ⭐⭐⭐⭐⭐**:** Cho T là tự đồng cấu của không gian vector V. Giả sử $x \in V$ mà $T^m x = 0, T^{m-1}x \neq 0, m \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $x, Tx, T^2x, \dots, T^{m-1}x$ độc lập tuyến tính.

Chứng minh

Giả sử $a_0 x + a_1 Tx + \ldots + a_{m-1}T^{m-1}x = 0$.

Nhân T^{m-1} vào hai vế, ta được $a_0 T^{m-1}x = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ nên $a_1 Tx + a_2 T^2 x + \ldots + a_{m-1}T^{m-1}x = 0$.

Nhân T^{m-2} vào hai vế, ta được $a_1 T^{m-1}x = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ nên $a_2 T^2 x + a_3 T^3 x + \ldots + a_{m-1}T^{m-1}x = 0$.

Cứ tiếp tục như thế, cuối cùng ta có $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$.

Vậy $x, Tx, T^2x, \dots, T^{m-1}x$ độc lập tuyến tính.

Câu 9 (Từ forum.mathscope.org) ⭐⭐⭐⭐**:** Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, A khả nghịch, $AB = BA$, $B^r = 0$ $(r \geq 1)$. Chứng minh $A + B^s$ $(s \geq 1)$ khả nghịch

Chứng minh

Ta có

$$A^{2r} = A^{2r} - B^{2sr} = (A^2)^r - (B^{2s})^r = (A^2 - B^{2s})\left(A^{2(r-1)} + A^{2(r-2)}B^{2s} + \ldots + B^{2s(r-1)}\right)$$
$$= (A + B^s)(A - B^s)\left(A^{2(r-1)} + A^{2(r-2)}B^{2s} + \ldots + B^{2s(r-1)}\right)$$

Do A khả nghịch nên lấy định thức hai vế, ta có điều phải chứng minh.

Câu 10 (Câu Olympic 2011) ⭐⭐⭐⭐⭐**:** Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ và $C = AB - BA$. Chứng minh rằng nếu ma trận C giao hoán với cả hai ma trận A và B thì tồn tại số nguyên dương m sao cho $C^m = O$.

Chứng minh

*Áp dụng giả thiết $AB - BA = C$ và tính giao hoán của C với A, B, ta có

$AB^k - BAB^{k-1} = CB^{k-1}$

$\Leftrightarrow AB^k - B(C + BA)B^{k-2} = CB^{k-1}$

$\Leftrightarrow AB^k - B^2AB^{k-2} = 2CB^{k-1}$

$\Leftrightarrow AB^k - B^2(C + BA)B^{k-3} = 2CB^{k-1}$

$\Leftrightarrow AB^k - B^3AB^{k-3} = 3CB^{k-1}$……

Lặp lại quá trình như thế k lần, cuối cùng ta được

$$AB^k - B^kA = kB^{k-1}C \quad \forall k \in \mathbb{N} \; (*)$$

*Chọn $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ là đa thức bậc n bất kì.

Ta có $f'(x) = a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}2x + a_{n-1}$

Từ $(*)$ suy ra $Af(B) - f(B)A = f'(B)C$ $(**)$

Xét đa thức đặc trưng của B: $p(x) = \det(B - xI_n)$, ta có $p(B) = O$

Theo $(**)$ ta có $Ap(B) - p(B)A = p'(B)C$ hay $O = p'(B)C$

Lại chọn $q(x) = p'(x)$ và nhờ vào tính giao hoán của C, ta có $Ap'(B)C - p'(B)CA = p''(B)C^2 = O$

Tiếp tục quá trình này ta được: $O = (-1)^n n!\, C^n$.

Câu 11 ☆☆☆☆☆**:** Cho $A \in M_2(\mathbb{R})$. Không dùng định nghĩa ma trận luỹ linh và công cụ đa thức, chứng minh rằng $\forall k \in \mathbb{N}, k > 2: A^k = 0 <=> A^2 = 0$.

Chứng minh

Cách 1:

- Nếu $A^2 = 0$ thì $A^k = 0$ $(k > 2)$.

- Nếu $A^k = 0$ thì $|A| = 0$, tức là nếu kí hiệu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thì $ad - bc = 0$.

Vì $|A - \lambda E| = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$ nên theo định lý Cayley – Hamilton, ta có

$$A^2 - (a+d)A + ad - bc = 0 => A^2 = (a+d)A => A^3 = (a+d)A^2 = (a+d)^2 A$$
$$=> \cdots => A^k = (a+d)^{k-1}A \Rightarrow (a+d)^{k-1}A = 0$$

Lúc này, nếu $a + d \neq 0$ thì $A = 0 => A^2 = 0$. Còn nếu $a + d = 0$ thì do $A^2 = (a+d)A$ nên $A^2 = 0$.

Điều phải chứng minh.

Cách 2:

• Phần đảo: $A^2 = 0$ thì $A^k = 0$ $\forall k > 2$

• Phần thuận:

- Nếu $A = 0$ thì hiển nhiên.

- Nếu $A \neq 0$ thì do $A^k = 0$ $(k > 2)$ nên $\det A = 0$ hay A có dạng $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}^*, a_1^2 + a_2^2 \neq 0$.

Ta có

$$A^2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1(a_1 + \lambda a_2) & a_2(a_1 + \lambda a_2) \\ \lambda a_1(a_1 + \lambda a_2) & \lambda a_2(a_1 + \lambda a_2) \end{bmatrix} = (a_1 + \lambda a_2)A$$

Suy ra $A^k = (a_1 + \lambda a_2)^{k-1}A$.

Do $A^k = 0,\ A \neq 0$ nên $(a_1 + \lambda a_2)^{k-1} = 0$ hay $a_1 + \lambda a_2 = 0$. Vậy $A^2 = 0$.

PHẦN V: VẾT CỦA MA TRẬN
(Trace of the Matrix)

A. CƠ SỞ LÍ THUYẾT

Định nghĩa: Vết của một ma trận vuông A là tổng tất cả các phần tử trên đường chéo chính của nó. Kí hiệu: trace A, tr A, $\mathrm{V}(A)$, thường dùng tr A.

Tính chất:

- $\operatorname{tr} I = n$
- $\operatorname{tr}(kA) = k \operatorname{tr} A$
- $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$
- $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(A^T)$
- $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ (A, B vuông cùng cấp).
- Vết A bằng tổng các giá trị riêng của A. Từ đó, hai ma trận đồng dạng vì có cùng tập giá trị riêng nên cũng cùng vết.

B. BÀI TẬP

Câu 1: Cho A, B là hai ma trận vuông thực cấp n thoả $A^2B + BA^2 = 2ABA$. Tính

$$\operatorname{tr}[(AB - BA)^k], k \in \mathbb{N}^*$$

Giải

Đặt $X = AB - BA$ thì

$$XA = (AB - BA)A = ABA - BA^2 = A^2B - ABA = A(AB - BA) = AX$$

Do đó, ta có $X^kA = AX^k$ $\forall k$ và

$$\begin{aligned} X^k = X^{k-1}X = X^{k-1}(AB - BA) &= X^{k-1}AB - X^{k-1}BA = AX^{k-1}B - X^{k-1}BA \\ &= A\left(X^{k-1}B\right) - \left(X^{k-1}B\right)A \end{aligned}$$

Suy ra $\operatorname{tr}\left(X^k\right) = \operatorname{tr}[(AB - BA)^k] = 0$.

Câu 2 (Câu 2 đề chọn đội tuyển vòng 2 ĐH An Giang 2010):

a) Cho A là ma trận vuông cấp n sao cho $AA^T = A^2$. Chứng minh rằng $\operatorname{tr}[(A - A^T)^T(A - A^T)] = 0$.

b) Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp n, C khả nghịch. Giả sử D là ma trận nghiệm đúng phương trình $AX + B = C$ và $BC^{-1} + C^{-1}B = 0$. Chứng minh rằng $\operatorname{tr}(ADC^{-1}) + \operatorname{tr}(C^{-1}AD) = 2n$.

Chứng minh

a) $$\begin{aligned} \operatorname{tr}[(A - A^T)^T(A - A^T)] &= \operatorname{tr}[(A^T - A)(A - A^T)] = \operatorname{tr}[A^TA - (A^T)^2 - A^2 + AA^T] \\ &= \operatorname{tr}(A^TA) - \operatorname{tr}[(A^2)^T] - \operatorname{tr}(A^2) + \operatorname{tr}(AA^T) = 0 \end{aligned}$$

b) Theo giả thiết, ta có $AD + B = C$ suy ra $ADC^{-1} + BC^{-1} = I$ và $C^{-1}AD + C^{-1}B = I$ từ đó ta có $ADC^{-1} + C^{-1}AD = 2I$. Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 3 (Từ forum.mathscope.org) ⭐⭐⭐⭐: Cho A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng không tồn tại ma trận $I + B$ khả nghịch sao cho $AB - BA = I + B$.

Chứng minh

Từ giả thiết, ta có

$$AB - BA = A(I + B) - (I + B)A = I + B$$

Đặt $C = I + B$, giả sử C khả nghịch, khi đó

$$A - CAC^{-1} = I$$

Mặt khác, do A đồng dạng với ma trận CAC^{-1} nên $\operatorname{tr}(A - CAC^{-1}) = 0 \neq 1 = \operatorname{tr} I$, mâu thuẫn.

Vậy không tồn tại ma trận $C = I + B$ khả nghịch sao cho $AB - BA = I + B$.

Câu 4 (Câu ??? đề chọn đội tuyển vòng 2 ĐH Kinh tế Quốc dân 2012) ⭐⭐⭐⭐:

Cho P, Q là 2 ma trận vuông cấp n. Gọi U, V là 2 ma trận khác nhau là nghiệm của phương trình $X^2 - PX + Q = 0$. Chứng minh rằng $\operatorname{tr}(U + V) = \operatorname{tr} P$ và $\det(UV) = \det Q$ là đúng nếu $U - V$ khả nghịch. Cho phản ví dụ với $n = 2$ nếu $U - V$ suy biến.

Giải:

*Chứng minh $\operatorname{tr}(U + V) = \operatorname{tr} P$

Theo giả thiết, ta có $U^2 - PU + Q = 0$ và $V^2 - PV + Q = 0$

Trừ từng vế, ta có $U^2 - V^2 = P(U - V) \Leftrightarrow (U + V)(U - V) - (VU - UV) = P(U - V)$

Đặt $T = U - V$

Nếu T khả nghịch thì $(U + V) - (VU - UV)T^{-1} = P \quad (1)$

Mặt khác $(VU - UV) = V(U - V) - (U - V)V = VT - TV \Rightarrow (VU - UV)T^{-1} = V - TVT^{-1}$

Vì V đồng dạng với TVT^{-1} nên $\operatorname{tr}[(VU - UV)T^{-1}] = \operatorname{tr}(V - TVT^{-1}) = 0$

Kết hợp với (1), ta có điều phải chứng minh.

*Chứng minh $\det(UV) = \det Q$

Ta có $Q = PU - U^2 = (P - U)U$ nên $\det Q = \det[(P - U)U] = \det(P - U)\det U$.

Ta chứng minh $\det(P - U) = \det V$, tiếp tục sử dụng tính đồng dạng, ta có

$$(P - U)(U - V) = PT - U^2 + UV = U^2 - V^2 - U^2 + UV = UV - V^2 = TV$$

Suy ra $(P - U) = TVT^{-1}$

Tức là $(P - U)$ đồng dạng với V nên $\det(P - U) = \det V$, ta có điều phải chứng minh.

*Phản ví dụ, chọn

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

thì khi đó U, V khác nhau là nghiệm của phương trình $X^2 - PX + Q = 0$, $(U - V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ suy biến nhưng $\det(UV) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 0 = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \det Q$.

PHẦN VI: HẠNG CỦA MA TRẬN
(Rank of the matrix)

A. CƠ SỞ LÍ THUYẾT

Định nghĩa: Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của định thức con khác 0 của A, kí hiệu rank A.

Định lí: Cho A là ma trận cỡ $m\times n$. Các số sau đây là bằng nhau và bằng rank A:

1. Số tối đại các cột độc lập tuyến tính của A, nói cách khác, số chiều của không gian sinh bởi các vector cột của A (trong $\mathbb{R}^n$).

2. Số tối đại các hàng độc lập tuyến tính của A, nói cách khác, số chiều của không gian sinh bởi các vector hàng của A (trong $\mathbb{R}^m$).

3. Số chiều của không gian ảnh của ánh xạ tuyến tính nhận A làm ma trận biểu diễn.

Dễ thấy, $\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}(A^T)$ và $\operatorname{rank}A \le \min\{m,n\}$. Đôi khi để nghiên cứu tính chất của hạng ma trận, người ta thường dùng ánh xạ tuyến tính nhận nó làm ma trận biểu diễn.

Một số tính chất và bất đẳng thức quan trọng

Với mọi ma trận A

$$\operatorname{rank} A = \dim(\operatorname{Im} A)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^n: Ax \in \operatorname{Im} A\,;\, Ax = 0 \to x \in \operatorname{Ker} A$$

Nói riêng, $A^2 = 0$ thì $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} A$ (do $A^2x = A(Ax) = 0$)

Với A_n , B_n thì

$$\dim(\operatorname{Im}A) + \dim(\operatorname{Ker}A) = n$$

$\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank} A$ $(\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank} B)$, dấu "=" xảy ra khi B (A) khả nghịch

$$\operatorname{rank}(A + B) \le \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

Với $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$ thì ta có bất đẳng thức Sylvester

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - n \le \operatorname{rank}(AB) \le \min\{\operatorname{rank} A , \operatorname{rank} B\}$$

B. BÀI TẬP

Câu 1 ⭐⭐⭐⭐: Cho các ma trận $A_{m\times n}$, B_m , C_n trong đó B, C khả nghịch. Chứng minh rằng

$$\operatorname{rank}(BA) = \operatorname{rank}(AC) = \operatorname{rank} A.$$

Chứng minh

Xem A, B tương ứng là các ánh xạ tuyến tính $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, B: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Do B khả nghịch nên toán tử B là một đẳng cấu của $\mathbb{R}^m$. Do đó

$$\operatorname{rank}(BA) = \dim\big(BA(\mathbb{R}^m)\big) = \dim\Big(B\big(A(\mathbb{R}^m)\big)\Big) = \dim\big(A(\mathbb{R}^m)\big) = \operatorname{rank} A$$

Tương tự $\operatorname{rank}(AC) = \operatorname{rank} A$.

Câu 2 ⭐⭐⭐⭐: Chứng minh rằng mọi ma trận $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$, ta có

$$\operatorname{rank}(A \pm B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$
$$|\operatorname{rank} A - \operatorname{rank} B| \leq \operatorname{rank}(A \pm B)$$

Chứng minh

*Xem A, B là các ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$, khi đó ta có

$$\operatorname{rank}(A + B) = \dim(\operatorname{Im}(A + B))$$

Do $\forall x \in \mathbb{R}^n$ thì $(A \pm B)x = (Ax \pm Bx) \in (\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B)$ nên $\operatorname{Im}(A + B) \subset (\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B)$.

Bởi vậy mà

$$\operatorname{rank}(A + B) = \dim(\operatorname{Im}(A + B)) \leq \dim(\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B) \leq \dim(\operatorname{Im} A) + \dim(\operatorname{Im} B) = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

Từ đó

$$\operatorname{rank}(A \pm B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(\pm B) = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

*Giả sử $\operatorname{rank} A \geq \operatorname{rank} B$, ta có

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A - B + B) \leq \operatorname{rank}(A - B) + \operatorname{rank} B \Rightarrow \operatorname{rank} A - \operatorname{rank} B \leq \operatorname{rank}(A - B)$$

Tương tự nếu $\operatorname{rank} B \geq \operatorname{rank} A$, ta có

$$\operatorname{rank} B - \operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank}(B - A) = \operatorname{rank}(A - B)$$

Suy ra $|\operatorname{rank} A - \operatorname{rank} B| \leq \operatorname{rank}(A - B)$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $|\operatorname{rank} A - \operatorname{rank} B| \leq \operatorname{rank}(A + B)$.

Câu 3 (Câu 4 đề dự tuyển ĐH Thuỷ Lợi 2009) ☆☆☆☆☆: Cho A là ma trận thực hạng r. Chứng minh rằng các ma trận $A^T A$ và AA^T cũng có hạng bằng r.

Chứng minh

Giả sử A là ma trận cỡ $m \times n$ (m có thể bằng n). Khi ấy $A^T A$ có cỡ $n \times n$. Ta xét hai hệ phương trình đại số tuyến tính n ẩn

$$Ax = \theta \ (1) \text{ và } A^T Ax = \theta \ (2)$$

$$\text{với } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};\ \theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

Ta chứng minh hai hệ này có chung tập nghiệm.

Rõ ràng tập nghiệm của (1) là con tập nghiệm của hệ (2).

Ngược lại, nếu x_0 là nghiệm của (2) tức là $A^T A x_0 = \theta$ thì $x_0^T A^T A x_0 = 0$ nên $(Ax_0)^T(Ax_0) = 0 \Rightarrow Ax_0 = \theta$ tức x_0 cũng là nghiệm của (1).

Chứng minh tương tự với AA^T.

Câu 4 ☆☆☆☆: Cho P, Q, R là các ma trận vuông cùng cấp. Chứng minh rằng

$$\operatorname{rank}(PQ) + \operatorname{rank}(QR) \leq \operatorname{rank} Q + \operatorname{rank}(PQR)$$

Chứng minh

$$\operatorname{rank}(PQ) + \operatorname{rank}(QR) \le \operatorname{rank}\begin{pmatrix} PQ & 0 \\ Q & QR \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} PQ & -PQR \\ Q & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & -PQR \\ Q & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \operatorname{rank} Q + \operatorname{rank}(PQR)$$

Câu 5 (Câu 6 đề chọn đội tuyển vòng 2 ĐH Kinh tế Quốc dân 2010 – Câu 3 đề chọn đội tuyển ĐHKHTN-ĐHQGHN 2010) ☆☆☆☆☆:

Cho A, B là các ma trận vuông cùng cấp sao cho $A^T B = AB^T = 0$. Chứng minh rằng

$$\operatorname{rank}(A + B) = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

Nếu chỉ có $A^T B = 0$ thì bài Toán còn đúng không? Cho một ví dụ chứng tỏ.

Chứng minh

Áp dụng $(XY)^T = Y^T X^T$, từ giả thiết dễ dàng ta có $B^T A = BA^T = 0$, kết hợp hai chứng minh trên, từ đó

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B = \operatorname{rank}(AA^T) + \operatorname{rank}(B^T B) = \operatorname{rank}(AA^T + BA^T) + \operatorname{rank}(B^T B + B^T A)$$
$$= \operatorname{rank}[(A+B)A^T] + \operatorname{rank}[B^T(B+A)] = \operatorname{rank}[B^T(A+B)] + \operatorname{rank}[(A+B)A^T]$$
$$\le \operatorname{rank}(A+B) + \operatorname{rank}[B^T(A+B)A^T] = \operatorname{rank}(A+B) + \operatorname{rank}(B^T AA^T + B^T BA^T) = \operatorname{rank}(A+B)$$

Mặt khác $\operatorname{rank}(A + B) \le \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.

Ta có điều phải chứng minh.

* Nếu chỉ có $A^T B = 0$ thì bài Toán không còn đúng. Ví dụ, chọn

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

thoả mãn

$$A^T B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nhưng

$$\operatorname{rank}(A + B) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \ne \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B = 1 + 1 = 2$$

Câu 6 (Tổng quát câu 5 Olympic 2003) ☆☆☆☆☆: Cho A là một ma trận vuông luỹ linh. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A + A^2 + \ldots A^n)$$

Chứng minh

Cách 1:

Giả sử $A^k = 0, k \in \mathbb{N}^*$. Đặt $B = A + A^2 + \ldots A^n$. Để chứng minh A, B cùng hạng, ta chứng minh hai hệ $Ax = 0$ và $Bx = 0$ có cùng tập nghiệm, với $x \in \mathbb{R}^n$.

Giả sử x_0 là nghiệm của hệ $Ax = 0$, khi đó

$$Bx_0 = (A + A^2 + \ldots A^n)x_0 = Ax_0 + A(Ax_0) + \ldots + A^{n-1}(Ax_0) = 0$$

tức là x_0 cũng là nghiệm của hệ $Bx = 0$.

Bây giờ, giả sử x_0 là nghiệm của hệ $Bx = 0$

$$Bx_0 = (A + A^2 + \ldots A^n)x_0 = 0 \Rightarrow Ax_0 = -A^2(I + A + \ldots + A^{n-2})x_0\ \forall n \ge 2$$

Đặt $C = -(I + A + \ldots + A^{n-2})$, ta có $AC = CA$ và

$$Ax_0 = A^2Cx_0 = CA(Ax_0) = CA(A^2Cx_0) = C^2A^2(Ax_0) = \ldots = C^lA^l(Ax_0) = 0 \; \forall \, l \geq k$$

điều đó chứng tỏ x_0 cũng là nghiệm của hệ $Ax = 0$.

Cách 2:

Do A luỹ linh nên giả sử $A^n = 0$, khi đó

$$I = I - A^n = (I - A)(I + A + \ldots + A^{n-1})$$

Suy ra $I - A$ khả nghịch và $(I - A)^{-1} = (I + A + \ldots + A^{n-1})$.

Áp dụng đẳng thức $\forall X \in M_n(\mathbb{K})$: $\operatorname{rank} X = \operatorname{rank} XY$ với mọi Y khả nghịch, ta có

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A(I - A)^{-1}] = \operatorname{rank}(A + A^2 + \ldots A^n)$$

Điều phải chứng minh.

Câu 7 (Câu 3 Olympic 1997) ☆☆☆☆☆ **:** Chứng minh rằng với $A \in M_n(\mathbb{R})$, ta đều tìm được số nguyên dương n sao cho $\operatorname{rank}(A^k) = \operatorname{rank}(A^{k+1}) \; \forall \, k \geq n$.

Chứng minh

Từ bất đẳng thức $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A \; \left(B \in M_n(\mathbb{R})\right)$, dấu "=" xảy ra khi B khả nghịch, ta có

$$n \geq \operatorname{rank} A \geq \operatorname{rank}(A^2) \geq \ldots \geq \operatorname{rank}(A^n) \geq \ldots \geq 0$$

Vì $\operatorname{rank}(A^k) \in \mathbb{N}$ nên kể từ một số k nào đó trở đi, ta sẽ có các đẳng thức

$$\operatorname{rank}(A^k) = \operatorname{rank}(A^{k+1}) = \operatorname{rank}(A^{k+2}) = \ldots$$

Câu 8 (Câu 3b đề chọn đội tuyển ĐH Giao thông vận tải 2011) ☆☆☆☆**:** Cho p là số nguyên dương, A là ma trận vuông cấp n sao cho $A^{p+1} = A$. Chứng minh rằng

a) $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(I - A^p) = n$.

b) Nếu p nguyên tố thì

$$\operatorname{rank}(I - A) = \operatorname{rank}(I - A^2) = \cdots = \operatorname{rank}(I - A^{p-1})$$

Chứng minh

a) Theo giả thiết $A(I - A^p) = 0$ nên $\operatorname{Im}(I - A^p) \subset \operatorname{Ker} A$.

Ngoài ra, nếu $x \in \operatorname{Ker} A$ thì $(I - A^p)x = x$, tức $x \in \operatorname{Im}(I - A^p)$ do đó $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Im}(I - A^p)$.

Vậy $\operatorname{Im}(I - A^p) = \operatorname{Ker} A$, suy ra

$$\operatorname{rank}(I - A^p) = \dim[\operatorname{Im}(I - A^p)] = \dim[\operatorname{Ker} A] = n - \operatorname{rank} A$$
$$\text{hay } \operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(I - A^p) = n$$

b) Xét hệ thặng dư đầy đủ modun k với $1 \leq k \leq p - 1$ sau $\{1,2, \ldots, k - 1, k\}$. Khi đó

$$S = \{p + 1, 2p + 1, \ldots, (k - 1)p + 1, kp + 1\}$$

cũng là một hệ thặng dư đầy đủ modun k. Do vậy tồn tại $q \in S$ sao cho $qp + 1$ chia hết cho k. Vì vậy

$$\operatorname{rank}(I - A) \geq \operatorname{rank}(I - A^k) \geq \operatorname{rank}(I - A^{qp+1}) = \operatorname{rank}(I - A)$$

$$q \in S \to q = ap + 1 (1 \leq a \leq k) \to qp + 1 = (ap + 1)p + 1 = ap^2 + p + 1 \;\vdots\; k \;???$$

Câu 9 (Câu 5 Olympic 1995) ☆☆☆☆☆: Tìm hạng của ma trận phụ hợp của ma trận A cấp n theo $\operatorname{rank} A$.

Giải:

Gọi $C = (c_{ij})$ là ma trận phụ hợp của A, trong đó $c_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ trong đó M_{ij} là ma trận con bù cấp $n-1$ của phần tử a_{ij}. Xét các trường hợp sau:

- Nếu A khả nghịch thì $A^{-1} = \frac{1}{|A|}C^T$ nên $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} C^T = \operatorname{rank}\left(\frac{1}{|A|}C^T\right) = \operatorname{rank}(A^{-1}) = n$.

- Nếu $\operatorname{rank} A \le n-2$ thì mọi định thức con cấp $n-1$ của nó đều bằng 0, nghĩa là $C = 0$ nên $\operatorname{rank} C = 0$.

- Nếu $\operatorname{rank} A = n-1$ thì $|A| = 0$ và trong C có ít nhất một phần tử khác 0 nên $\operatorname{rank} C \neq 0$.

Ta có $AC^T = |A|I = 0$. Xem A, C^T như là các toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^n$, ta có

$$AC^Tx = A(C^Tx) = 0 => C^Tx \in \operatorname{Ker} A \text{ hay } \operatorname{Im}(C^T) \subset \operatorname{Ker} A$$
$$=> \dim[\operatorname{Im}(C^T)] \le \dim(\operatorname{Ker} A) = n - \dim(\operatorname{Im} A) = n - \operatorname{rank} A = 1$$

Ta có $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} C^T = \dim[\operatorname{Im}(C^T)] \le 1$. Nếu $\operatorname{rank} C = 0$ thì $C = 0$, mâu thuẫn. Vậy $\operatorname{rank} C = 1$.

Câu 10 ☆☆☆☆: Cho A là một ma trận vuông cấp n thoả $A^2 = 0$ và tồn tại ma trận B sao cho $AB + BA = I$. Chứng minh rằng n là một số chẵn.

Chứng minh

Ta có $2\operatorname{rank} A \le \operatorname{rank}(A^2) + n$ hay $\operatorname{rank} A \le \frac{n}{2}$. Mặt khác

$$n = \operatorname{rank} I = \operatorname{rank}(AB + BA) \le \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BA) \le 2\min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\} \le 2\operatorname{rank} A \le n$$

Như vậy, ta phải có $\operatorname{rank} A = \frac{n}{2}$ nên n phải là số chẵn.

Câu 11 ☆☆☆☆☆: Cho A, B là các ma trận cấp n thoả $I - AB$ khả nghịch. Chứng minh rằng $I - BA$ cũng khả nghịch.

Chứng minh

Cách 1: Phản chứng

Giả sử ngược lại, $|I - BA| = 0$ khi đó hệ $(I - BA)x = 0$ có nghiệm không tầm thường, tức là nghiệm $x \neq 0$. Ta có $BAx = x$, đặt $y = Ax$ thì $y \neq 0$. Từ đó

$$(I - AB)y = y - ABy = y - ABAx = y - Ax = y - y = 0$$

Điều đó chứng tỏ $y \neq 0$ là nghiệm không tầm thường của hệ $(I - AB)x = 0$, tức $I - AB$ suy biến, mâu thuẫn giả thiết.

Cách 2: Chứng minh $|I - AB| = |I - BA|$

Cách 2a:

$$|I - AB| = \begin{vmatrix} I - AB & 0 \\ B & I \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I & A \\ B & I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & A \\ B & I \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} I & A \\ B & I \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} I & 0 \\ B & I - BA \end{vmatrix} = |I - BA|$$

Cách 2b:

• Nếu B khả nghịch thì

$$\det(I - AB) = \det(B^{-1}B - B^{-1}BAB) = \det B^{-1}.\det(I - BA).\det B = \det(I - BA)$$

• Nếu B không khả nghịch, ta xét ma trận $B_x = xI + B, x \in \mathbb{R}$.

Rõ ràng $\det B_x$ là một đa thức bậc n của x và chỉ có nhiều nhất là n nghiệm thực, do vậy mà có vô số $x \in \mathbb{R}$ để $\det B_x \neq 0$, tức là B_x khả nghịch.

Lúc đó theo chứng minh trên thì

$$\det(I - AB_x) = \det(I - B_xA) \ \ (x \in \mathbb{R}:\ \det B_x \neq 0)$$

Ta có $\det(I - AB_x)$ và $\det(I - B_xA)$ là hai đa thức bậc nhỏ thua n của x, mà giá trị của chúng bằng nhau tại vô số những điểm x nói trên mà $\det B_x \neq 0$. Bởi vậy hai đa thức này phải trùng nhau (tức là các hệ số tương ứng phải bằng nhau).

Vậy $\det(I - AB_x) \equiv \det(I - B_xA)$.

Nói riêng, với $x = 0$ thì $B_x = B_0 = B$, ta có $\det(I - AB) = \det(I - BA)$.

Câu 12 (Câu 1b Olympic Quốc tế 1994) : Cho ma trận vuông A cấp n khả nghịch sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Hỏi có bao nhiêu phần tử 0 của ma trận A^{-1}.

<u>Giải</u>:

Ta tìm $A^{-1} = (b_{ij})$, giả sử $Ax = y$ với $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, ta tìm ma trận B sao cho $x = By$, khi đó $B = A^{-1}$

$$Ax = y <=> \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \dots + x_{n-1} + x_n = y_1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + \dots + 2x_{n-1} + 2x_n = y_2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \dots + x_{n-1} + x_n = y_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + \dots + 2x_{n-1} + 2x_n = y_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + \dots + x_{n-1} + x_n = y_5 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + \dots + x_{n-1} + x_n = y_{n-2} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + \dots + x_{n-1} + x_n = y_{n-1} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + \dots + x_{n-1} + x_n = y_n \end{cases}$$

Lấy dòng 2 trừ dòng 1, ta được $x_1 = 2y_1 - y_2$

Lấy dòng 3 trừ dòng 1, ta được $x_2 = -y_1 + y_3$

Lấy dòng 4 trừ dòng 2, ta được $x_3 = y_2 - y_4$

Lấy dòng 5 trừ dòng 3, ta được $x_4 = -y_3 + y_5$

Lấy dòng k trừ dòng $k - 2$, ta được $x_k = (-1)^k y_{k-1} + (-1)^{k-1} y_{k+1}$

Từ đó

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{n-2} & 0 & (-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{n-1} & (-1)^n \end{pmatrix}$$

A^{-1} có phần tử $b_{11} = 2, b_{nn} = (-1)^n, b_{i,i+1} = b_{i+1,i} = (-1)^i$, các phần tử còn lại bằng 0. Vậy số các phần tử bằng 0 là $n^2 - 2 - 2(n-1) = n^2 - 2n$.

Câu 13 (Câu 6 Olympic 2002) **:** Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ có hạng 1. Chứng minh tồn tại duy nhất số thực k sao cho $A^2 = kA$.

Chứng minh

Vì $\operatorname{rank} A = 1$ nên A có dạng

$$A = \begin{pmatrix} k_1a_1 & k_1a_2 & \dots & k_1a_{n-1} & k_1a_n \\ k_2a_1 & k_2a_2 & \dots & k_2a_{n-1} & k_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_{n-1}a_1 & k_{n-1}a_2 & \dots & k_{n-1}a_{n-1} & k_{n-1}a_n \\ k_na_1 & k_na_2 & \dots & k_na_{n-1} & k_na_n \end{pmatrix} \neq 0$$

không mất tính tổng quát, giả sử hàng 1 khác 0 và $k_i \neq 0$ $(i = \overline{1,n})$.

Đặt $V = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \neq 0$ và $U = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n) \neq 0$, khi đó

$$VU = A\,, UV = \operatorname{tr} A$$

Từ đó suy ra

$$A^2 = (VU)(VU) = V(UV)U = (\operatorname{tr} A)VU = (\operatorname{tr} A)A = kA$$

Nếu tồn tại k' thoả mãn $A^2 = k'A$ thì từ

$$0 = A^2 - A^2 = (k - k')A \text{ và } A \neq 0$$

Suy ra $k = k'$.

Vậy tồn tại số thực k duy nhất và hoàn toàn xác định (chính là vết A) thoả mãn $A^2 = kA$.

Câu 14 (Câu 3a đề chọn đội tuyển ĐH GTVT 2011): Chứng minh rằng với mọi ma trận vuông cấp 2 A, B, ta luôn có

$$\operatorname{rank}(AB) - \operatorname{rank}(BA) \leq 1$$

Lấy ví dụ chứng tỏ đẳng thức xảy ra.

Chứng minh

- Nếu $A = B = 0$ thì $\operatorname{rank}(AB) - \operatorname{rank}(BA) = 0 \leq 1$.

- Nếu A, B cùng khả nghịch thì $\operatorname{rank}(AB) - \operatorname{rank}(BA) = 2 - 2 = 0 \leq 1$.

- Nếu một trong hai ma trận A, B khả nghịch, giả sử đó là A thì

$$\operatorname{rank}(AB) - \operatorname{rank}(BA) = \operatorname{rank} B - \operatorname{rank} B = 0 \leq 1.$$

- Nếu cả $A, B \neq 0$ và cùng suy biến, tức là $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 1$ thì khi đó $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A = 1, \operatorname{rank} BA \leq \operatorname{rank} B = 1$ (do A, B suy biến). Vậy trong trường hợp này:

+) Nếu AB, BA cùng hạng (0 hoặc 1) thì $\operatorname{rank}(AB) - \operatorname{rank}(BA) = 0 \leq 1$.

+) Nếu $\operatorname{rank} AB = 1, \operatorname{rank} BA = 0$ hay ngược lại, ta có $\operatorname{rank}(AB) - \operatorname{rank}(BA) = \pm 1 \leq 1$.

Điều phải chứng minh.

Ví dụ chứng tỏ đẳng thức xảy ra:

Chọn $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ thì $AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ta có

$$\operatorname{rank} AB - \operatorname{rank} BA = 1 - 0 = 1.$$

Câu 15 (Câu 1 Olympic Quốc tế 1995) ⭐⭐⭐⭐: Cho X là một ma trận cấp n không suy biến có dạng $X = (X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n)$, Y là ma trận có dạng $Y = (X_2 \ X_3 \ \dots \ X_n \ 0)$. Chứng minh rằng ma trận $A = YX^{-1}$ và $B = X^{-1}Y$ có hạng là $n-1$ và tìm giá trị riêng của A và B.

Chứng minh

*Chứng minh $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = n - 1$:

Cách 1:

Đặt $J = (a_{ij})$ là ma trận cấp n trong đó $a_{ij} = 1$ nếu $i = j + 1$, các phần tử còn lại bằng 0:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rõ ràng $\operatorname{rank} J = n - 1$. Hơn nữa $Y = XJ$ nên $A = YX^{-1} = XJX^{-1}$ và $B = X^{-1}Y = X^{-1}XJ = J$.

Suy ra $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(XJX^{-1}) = \operatorname{rank}(XBX^{-1}) = \operatorname{rank}(XB) = \operatorname{rank} B = \operatorname{rank} J = n - 1$.

Cách 2:

Do X không suy biến nên $\operatorname{rank} Y = \operatorname{rank}(YX^{-1}) = \operatorname{rank}(X^{-1}Y)$ hay $\operatorname{rank} Y = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$.

Cũng do X không suy biến nên các vector $X_1, \dots, X_n$ độc lập tuyến tính suy ra Y có các cột $X_2, \dots, X_n$ độc lập tuyến tính nên $\operatorname{rank} Y = n - 1$.

*Tìm giá trị riêng của A và B:

Do $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = n - 1$ nên số chiều không gian nghiệm của hai hệ $Ax = 0$ và $Bx = 0$ (ứng với giá trị riêng 0) là 1. Do đó A, B chỉ có giá trị riêng là 0 và 1 (giá trị riêng 1 có bội $n - 1$).

Câu 16 (Từ forum.mathscope.org) ⭐⭐⭐⭐⭐: Cho $A = (a_{ij}) = (\sin(i + j)) \in M_n(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}^*$. Tìm $\operatorname{rank} A$.

Giải

$$A = \begin{pmatrix} \sin 2 & \sin 3 & \sin 4 & \dots & \sin(n+1) \\ \sin 3 & \sin 4 & \sin 5 & \dots & \sin(n+2) \\ \sin 4 & \sin 5 & \sin 6 & \dots & \sin(n+3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sin(n+1) & \sin(n+2) & \sin(n+3) & \dots & \sin(n+n) \end{pmatrix}$$

Nếu $n = 1$ thì $\operatorname{rank} A = 1$.

Nếu $n \geq 2$, kí hiệu d_i là dòng thứ i của A.

Chú ý kĩ rằng $d_i + d_{i+2} = 2\cos 1\, d_{i+1}$ hay $d_i = 2\cos 1\, d_{i+1} - d_{i+2}$, tức là từ dòng thứ 3 trở đi, mỗi dòng biểu thị tuyến tính được qua hai dòng ngay trước nó.

Mặt khác, xét định thức con cấp 2 nằm ở góc trái trên cùng của A

$$\begin{vmatrix} \sin 2 & \sin 3 \\ \sin 3 & \sin 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

Vậy $\operatorname{rank} A = 2$.

Câu 17 (Từ forum.mathscope.org) ☆☆☆☆: Tìm hạng của ma trận $A = (a_{ij})$ cấp n xác định bởi $a_{ij} = i - 2010j$.

Giải:

Nếu $n = 1$ thì $\operatorname{rank} A = 1$.

Nếu $n \geq 2$, tách $A = B + C$, trong đó $B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$, được xác định bởi $b_{ij} = i, c_{ij} = -2010j$. Khi đó

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(B + C) \leq \operatorname{rank} B + \operatorname{rank} C = 1 + 1 = 2$$

Mặt khác, xét định thức con cấp 2 góc trên bên trái của A

$$\begin{vmatrix} 1 - 1.2010 & 1 - 2.2010 \\ 2 - 1.2010 & 2 - 2.2010 \end{vmatrix} = 2010 \neq 0$$

Vậy $\operatorname{rank} A = 2$.

Một số bài Toán về tính giao hoán và phản giao hoán

Cho $A, B \in M_n(\mathbb{K}), AB = BA$. Khi đó dễ dàng chứng minh được

-) $A(B - kI)^n = (B - kI)^n A \ \forall k \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}$.

-) $(A - kI)^n B = B(A - kI)^n \ \forall k \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}$.

-) Nếu A khả nghịch thì $A^{-1}B = BA^{-1}$.

-) Nếu B khả nghịch thì $AB^{-1} = B^{-1}A$.

Câu 18 (Từ forum.mathscope.org) ☆☆☆☆: Cho A, B là ma trận vuông cấp n, luỹ đẳng *(idempotent)*. Chứng minh nếu $A + B$ luỹ đẳng thì $AB = BA = 0$.

Chứng minh

Nếu $A + B$ luỹ đẳng

$$A + B = (A + B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA = A + B + AB + BA$$

thì $AB + BA = 0$ suy ra $0 = AAB + ABA = AB + ABA$ (1)

Mặt khác $0 = AABB + ABAB = AB + ABAB$ và vì $AB = -BA$ nên

$$0 = AB + ABAB = AB - ABBA = AB - ABA \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AB = 0 = BA$.

Câu 19 (Câu 5b Olympic 2010) ☆☆☆☆☆:

Cho A, B, C là các ma trận thực, vuông cấp n, trong đó A khả nghịch và đồng thời giao hoán B, C. Giả sử $C(A + B) = B$. Chứng minh B, C giao hoán với nhau.

Chứng minh

Từ giả thiết, suy ra $A + C(A + B) = A + B$ hay $A = (I - C)(A + B)$

Do A khả nghịch và đồng thời giao hoán cả B, C nên $I = (I - C)(A + B)A^{-1} = (I - C)A^{-1}(A + B)$

Suy ra $(I - C)$ và $A^{-1}(A + B)$ là nghịch đảo của nhau nên

$$I = (I - C)A^{-1}(A + B) = A^{-1}(A + B)(I - C)$$

$$\Leftrightarrow A = (A + B)(I - C)$$

$$\Leftrightarrow B = (A + B)C$$

Vậy $(A + B)C = C(A + B)$ tức $BC = CB$.

Câu 20 ☆☆☆☆☆: Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp thoả mãn $aAB + bA + cB = dI$ $(abcd \neq 0)$. Chứng minh $AB = BA$.

Chứng minh

Ta có $aAB + bA + cB = dI$

$\Leftrightarrow A(aB + bI) + cB = dI \Leftrightarrow aA(aB + bI) + acB = adI$

$\Leftrightarrow aA(aB + bI) + acB + bcI = (ad + bc)I \Leftrightarrow aA(aB + bI) + c(aB + bI) = (ad + bc)I$

$\Leftrightarrow (aA + cI)(aB + bI) = (ad + bc)I \Leftrightarrow \frac{1}{ad+bc}(aA + cI)(aB + bI) = I$

Suy ra $\frac{1}{ad+bc}(aA + cI), (aB + bI)$ khả nghịch và là nghịch đảo của nhau nên

$$\frac{1}{ad + bc}(aB + bI)(aA + cI) = I \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow aBA + bA + cB = dI$$

Vậy $AB = BA$.

Câu 21 ☆☆☆☆☆: Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp thoả $aAB + bA + cB = 0$ $(abc \neq 0)$. Chứng minh rằng

a) $AB = BA$.

b) $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$.

Chứng minh

a) Ta có $aAB + bA + cB = 0$

<=> $A(aB + bI) + cB = 0$ <=> $aA(aB + bI) + acB = 0$

<=> $aA(aB + bI) + acB + bcI = bcI$ <=> $aA(aB + bI) + c(aB + bI) = bcI$

<=> $(aA + cI)(aB + bI) = bcI$ <=> $\left(\frac{a}{c}A + I\right)\left(\frac{a}{b}B + I\right) = I$

Suy ra $\left(\frac{a}{c}A + I\right)$, $\left(\frac{a}{b}B + I\right)$ khả nghịch và là nghịch đảo của nhau nên

$$\left(\frac{a}{b}B + I\right)\left(\frac{a}{c}A + I\right) = I <=> \ldots <=> aBA + bA + cB = 0$$

Vậy $AB = BA$.

b) Ta có

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(-bA) = \operatorname{rank}(aAB + cB) = \operatorname{rank}[(aA + cI)B] = \operatorname{rank}\left[\left(\frac{a}{c}A + I\right)B\right] = \operatorname{rank} B$$

Câu 22 (Câu 3 Olympic 2009) : Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp n sao cho C giao hoán với A và B, $C^2 = I$ và $AB = 2(A + B)C$.

a) Chứng minh rằng $AB = BA$

b) Nếu có thêm điều kiện $A + B + C = 0$ hãy chứng tỏ $\operatorname{rank}(A - C) + \operatorname{rank}(B - C) = n$

Chứng minh

a) Từ giả thiết, ta có:

$AB - 2AC - 2BC = 0$ <=> $A(B - 2C) - 2BC = 0$ <=> $A(B - 2C) - 2BC + 4C^2 = 4C^2$

<=> $A(B - 2C) - 2C(B - 2C) = 4I$ <=> $(A - 2C)(B - 2C) = 4I$ <=> $\left[\frac{1}{2}(A - 2C)\right]\left[\frac{1}{2}(B - 2C)\right] = I$

Suy ra $\left[\frac{1}{2}(A - 2C)\right]$ và $\left[\frac{1}{2}(B - 2C)\right]$ là nghịch đảo của nhau nên chúng giao hoán

$$\left[\frac{1}{2}(A - 2C)\right]\left[\frac{1}{2}(B - 2C)\right] = \left[\frac{1}{2}(B - 2C)\right]\left[\frac{1}{2}(A - 2C)\right] = I$$

Nhân phân phối lại, ta được $AB = BA$.

b) Nếu có thêm điều kiện $A + B + C = 0$ thì ta có

$$AC + BC + C^2 = 0$$

Do đó

$$\begin{aligned}(A - C)(B - C) &= AB - AC - CB + C^2 = AB - (A + B)C + C^2 = 2(A + B)C - (A + B)C + C^2 \\ &= (A + B)C + C^2 = AC + BC + C^2 = 0\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}n = n + \operatorname{rank}[(A - C)(B - C)] &\geq \operatorname{rank}(A - C) + \operatorname{rank}(B - C) \geq \operatorname{rank}[(A - C) + (B - C)] \\ &= \operatorname{rank}(A + B - 2C) = \operatorname{rank}(-3C) = \operatorname{rank} C = n.\end{aligned}$$

Câu 23 (Câu 2 Olympic Quốc tế ngày thứ nhất 2009): Cho A, B, C là các ma trận vuông cùng cấp, A khả nghịch. Chứng minh rằng nếu $(A - B)C = BA^{-1}$ thì $C(A - B) = A^{-1}B$.

Chứng minh

Từ $(A - B)C = BA^{-1}$, ta có $(A - B)C - BA^{-1} + AA^{-1} = I$ hay $(A - B)(C + A^{-1}) = I$.

Suy ra $(A-B)$ và $(C+A^{-1})$ là nghịch đảo của nhau nên ta có $(C+A^{-1})(A-B)=I$.
Vậy $C(A-B)=A^{-1}B$.

PHẦN VII: GIÁ TRỊ RIÊNG, VECTOR RIÊNG
(Eigenvalue, Eigenvector)

A. CƠ SỞ LÍ THUYẾT

Số khuyết của một ma trận $A \in M_n(\mathbb{K})$ là $n - \text{rank}\, A$. Nói cách khác, số khuyết của A chính là số chiều không gian nghiệm của hệ $Ax = 0$ trong $\mathbb{K}^n$.

Giả sử $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ là m giá trị riêng phân biệt của A và λ_i là nghiệm bội s_i, s_i còn gọi là *bội đại số (Algebraic Multiplicity)* của λ_i, còn số khuyết k_i của ma trận $(A - \lambda_i I)$ gọi là *bội hình học (Geometric Multiplicity)* của λ_i, cũng chính là số chiều của không gian con riêng của A ứng với trị riêng λ_i (hay số chiều không gian nghiệm của hệ $(A - \lambda_i I)x = 0$).

Ta luôn có $\forall\ \lambda_i$ thì $k_i \le s_i$ tức là với mỗi trị riêng của A thì bội hình học của nó không lớn hơn bội đại số và hiển nhiên $s_1 + \dots s_n = n$.

Định lí: Điều kiện cần và đủ để A chéo hoá *(diagonalize, diagonalization)* được là $\forall\ i = 1, \dots, m$ thì $s_i = k_i$ nghĩa là mọi trị riêng của nó có bội hình học bằng bội đại số. Nói cách khác, A chéo hoá được nếu và chỉ nếu nó có đủ n (bằng cấp của A) vector riêng độc lập tuyến tính.

Hệ quả: A có đủ n giá trị riêng phân biệt thì A chéo hoá được.

Định lí: Giá trị riêng của một phép biến đổi tuyến tính của không gian vector n chiều V trên trường $\mathbb{K}$ không phụ thuộc vào cơ sở.

Chứng minh:

Giả sử A là ma trận của phép biến đổi tuyến tính f đối với cơ sở $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (1) và với cơ sở mới $\beta_1, \dots, \beta_n$ (2), f có ma trận là B. Khi đó $B = S^{-1}AS$ trong đó S là ma trận chuyển từ cơ sở (1) sang cơ sở (2). Ta có

$$|B - \lambda I| = |S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S| = |S^{-1}(A - \lambda I)S| = |S^{-1}||A - \lambda I||S| = |A - \lambda I| \text{ (đpcm)}$$

Hệ quả: Nếu hai ma trận A và B đồng dạng thì chúng có cùng đa thức đặc trưng.

Nhận xét: Điều ngược lại không đúng ($n \ge 2$).

<u>Ví dụ</u>: Hai ma trận $A = 0, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ không đồng dạng nhưng đa thức đặc trưng của chúng trùng nhau

$$|A - \lambda I| = |B - \lambda I| = \lambda^2$$

Dạng toàn phương (*Quadratic form*)

1. Định nghĩa: *Dạng toàn phương* n biến $x_1, \dots, x_n$ là một hàm có dạng

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + \dots + a_{2n}x_2x_n + a_{22}x_2^2 \dots + a_{n1}x_nx_1 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

trong đó $a_{ij} = a_{ji}$, vậy $f(x) = (x_1 \quad \dots \quad x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x^T A x\ (A = A^T)$

Dạng chính tắc: là dạng không chứa các tích chéo $x_i x_j$ $(i \ne j)$, chỉ chứa x_i^2.

Dạng chuẩn: là dạng chính tắc mà hệ số của x_i^2 là $-1,0,1$.

2. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc (*Canonic form, canonical form*):

Phương pháp Lagrange:

- Nếu dạng toàn phương vừa có tích chéo vừa có bình phương.

Ví dụ:

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$$
$$= x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2^2 - 7x_3^2 = (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2x_2^2 - 23x_3^2 + 16x_2x_3$$
$$= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - (2x_2^2 + 23x_3^2 - 16x_2x_3) = (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - [2(x_2 - 4x_3)^2 - 9x_3^2]$$
$$= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2(x_2 - 4x_3)^2 + 9x_3^2 = y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2 = f(y)$$

- Nếu dạng toàn phương chỉ chứa tích chéo, chẳng hạn a_{12} thì ta đổi biến

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}, y_3 = x_3, \dots, y_n = x_n$$

Ví dụ:

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

Đổi biến

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}, y_3 = x_3 \Rightarrow x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2$$
$$f(y) = f(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + y_3(y_1 - y_2) + y_3(y_1 + y_2)$$
$$= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2 = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 = f(z)$$

Phương pháp chéo hoá trực giao (*Orthogonal Diagonalization*):

Đổi biến $x = Uy$, trong đó U là ma trận Unita làm chéo hoá A, khi đó

$$f(x) = x^TAx = (Uy)^TA(Uy) = y^TU^TAUy = y^TBy$$

trong đó $B = U^TAU$ là ma trận chéo.

Ví dụ:

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ có đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = (4 - \lambda)(1 - \lambda)^2$

*Cơ sở của không gian riêng E_4 ứng với trị riêng $\lambda = 4$ là $B = \{X_1 = (1,1,1)\}$

Cơ sở của không gian riêng E_1 ứng với trị riêng $\lambda = 1$ là $C = \{X_2 = (-1,1,0), X_3 = (-1,0,1)\}$

Đặt $A = B \cup C$ là một cơ sở của $\mathbb{R}$.

*Trực giao A:

$$C = \{X_2 = (-1,1,0), X_3 = (-1,0,1)\}$$
$$Y_2 = X_2 = (-1,1,0) \Rightarrow ||Y_2|| = \sqrt{2}$$
$$Y_3 = X_3 - \frac{X_3Y_2}{Y_2^2}Y_2 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 1\right) \Rightarrow ||Y_3|| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

*Trực chuẩn A:

$$Z_1 = \frac{Y_1}{||Y_1||} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$Z_2 = \frac{Y_2}{||Y_2||} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$Z_3 = \frac{Y_3}{||Y_3||} = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Ma trận trực giao Unita U làm chéo hoá A: $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

$$x = Uy \Rightarrow f(y) = f(y_1, y_2, y_3) = y^T B y = y^T \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y = 4y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

3. Dạng toàn phương xác định dấu

Luật quán tính: Trong 2 dạng chính tắc bất kì của cùng một dạng toàn phương, số các hệ số dương bằng nhau, số các hệ số âm bằng nhau.

Xác định dấu của dạng toàn phương $f(x)$:

Ta xét sau khi đã đưa dạng toàn phương $f(x)$ về dạng chính tắc $f(y)$:

- *Xác định dương* nếu $f(y) > 0\ \forall y \neq 0$.
- *Xác định âm (negative definite)* nếu $f(y) < 0\ \forall y \neq 0$.
- *Bán xác định dương (semi positive definite)* nếu $f(y) \geq 0\ \forall y \neq 0, \exists y_0 \neq 0: f(y_0) = 0$.
- *Bán xác định âm (semi negative definite)* nếu $f(y) \leq 0\ \forall y \neq 0, \exists y_0 \neq 0: f(y_0) = 0$.
- *Không xác định dấu (indefinite)* nếu $\exists y_1, y_2: f(y_1) > 0, f(y_2) < 0$.

<u>Ví dụ</u>:

Xét các dạng toàn phương sau:

$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 > 0\ \forall x \neq 0 \Rightarrow f(x)$ xác định dương.

$g(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2 < 0\ \forall x \neq 0 \Rightarrow g(x)$ xác định âm.

$h(x) = x_1^2 + 4x_3^2$, ta thấy $f(x) \geq 0\ \forall x \neq 0$ và $\exists x = (0,1,0) \neq 0$, $f(0,1,0) = 0 \Rightarrow h(x)$ bán xác định dương.

$k(x) = -x_1^2 - 4x_3^2$, ta thấy $f(x) \leq 0\ \forall x \neq 0$ và $\exists x = (0,1,0) \neq 0$, $f(0,1,0) = 0 \Rightarrow k(x)$ bán xác định âm.

$l(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_3^2$, ta có

$$(1,0,0) \neq 0, (0,1,0) \neq 0, f(1,0,0) = 1 > 0, f(0,1,0) = -2 < 0$$

=> $l(x)$ không xác định dấu.

Định lí:

Ngôn ngữ ánh xạ: Mọi dạng toàn phương hệ số thực, xác định dương đều có các giá trị riêng λ_i $(i = 1, \dots, n)$ là số thực dương.

Ngôn ngữ ma trận: Mọi ma trận A thực, đối xứng, xác định dương đều có các giá trị riêng λ_i ($i = 1, \dots, n$) là số thực dương. Khi đó hiển nhiên $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$.

Định lí Sylvester: A là ma trận đối xứng, xác định dương nếu và chỉ nếu mọi định thức con chính của A đều dương, xác định âm nếu các định thức con chính của nó đan dấu.

Ví dụ:

1. $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -5 \\ 6 & 6 & -1 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ có các định thức con chính

$$\Delta_1 = 9 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 18 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 9 & 6 & -5 \\ 6 & 6 & -1 \\ -5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 9 > 0$$

Vậy A xác định dương.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ có các định thức con chính

$$\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -9 < 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 19 > 0$$

Vậy A xác định âm.

Một số bài Toán cơ sở

Câu 1: Chứng minh rằng nếu λ là một giá trị riêng của A thì

a) λ^k là giá trị riêng của A^k.

b) λ^{-1} là giá trị riêng của A^{-1} (nếu A khả nghịch).

c) Nếu $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ thì mọi giá trị riêng của $f(A)$ đều có dạng $f(\lambda)$ với λ là giá trị riêng của A. Hệ quả: Nếu $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ và $f(A) = 0$ thì các trị riêng của A đều là nghiệm của $f(x)$.

Câu 2: Cho A là ma trận vuông cấp n

a) $|A|$ là tích tất cả các giá trị riêng của nó.

b) Nếu $A \in M_n(\mathbb{Z})$ có trị riêng $\lambda \in \mathbb{Z}$ thì λ là ước của $|A|$.

c) $\operatorname{tr}(A)$ là tổng các trị riêng của A.

Chứng minh

Giả sử đa thức đặc trưng của A có dạng

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots - c_1 \lambda + c_0$$

a) Các giá trị riêng là nghiệm của đa thức đặc trưng nên theo định lí Viete, ta có

$$\lambda_1 \dots \lambda_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n} c_0 = c_0 = P_A(0) = |A|$$

b) Nếu $A \in M_n(\mathbb{Z})$ có trị riêng $\lambda \in \mathbb{Z}$ và theo trên, ta có

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots - c_1 \lambda + \det A = 0$$

Suy ra $\lambda |\det A$.

c) Theo định lí Viete, ta có

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = -\frac{(-1)^{n-1} c_{n-1}}{(-1)^n} = c_{n-1}$$

Mặt khác, trong khai triển $|A - \lambda I|$ có chứa số hạng $(a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$, nhân phân phối ra thì hệ số của λ^{n-1} là

$$(-1)^{n-1} c_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + \dots + a_{nn}) = (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$$

Từ đó $c_{n-1} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr} A$

Câu 3 (Định lí Hadamard) ☆☆☆☆☆: Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Chứng minh A khả nghịch nếu một trong hai điều sau xảy ra:

$a)$ $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i = 1, \dots, n.$ Ta nói ma trận A có các phần tử chéo là trội trong cùng một hàng.

$b)$ $|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall j = 1, \dots, n.$ Ta nói ma trận A có các phần tử chéo là trội trong cùng một cột.

Chứng minh

Giả sử A suy biến, tức là các cột của A, kí hiệu là $C_1, \dots, C_n$, phụ thuộc tuyến tính, hay là tồn tại một tổ hợp tuyến tính không tầm thường thoả mãn

$$k_1 C_1 + \dots + k_n C_n = 0 \ (k_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n)$$

Đặt $|k_s| = \max\{|k_1|, \dots, |k_n|\}$, hiển nhiên $|k_s| > 0$. Xét dòng s của ma trận A:

$$|k_s||a_{ss}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{n} k_j a_{sj} \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{n} |k_j||a_{sj}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{n} |k_s||a_{sj}|$$

Suy ra

$$|a_{ss}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{n} |a_{sj}|$$

Mâu thuẫn giả thiết, do đó A khả nghịch.

Chứng minh b) hoàn toàn tương tự với giả sử các hàng của A phụ thuộc tuyến tính (hoặc lập luận tương tự như trên cho ma trận A^T).

Câu 4 (Từ forum.mathscope.org) ☆☆☆☆☆: Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ và λ là giá trị riêng bất kì của A. Chứng minh rằng luôn tồn tại một hàng s (hoặc một cột m) $(1 \leq s, m \leq n)$ thoả mãn

$$|a_{ss} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{n} |a_{sj}| \quad \left(\text{hay } |a_{mm} - \lambda| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{n} |a_{im}| \right)$$

Chứng minh

Gọi $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$ là một vector riêng ứng với giá trị riêng λ của A.

Đặt $|x_s| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$, hiển nhiên $|x_s| > 0$. Ta có $Ax = \lambda x$, so sánh hàng s hai vế

$$a_{s1}x_1 + \dots + a_{s,s-1}x_{s-1} + a_{ss}x_s + a_{s,s+1}x_{s+1} \dots + a_{sn}x_n = \lambda x_s$$

Suy ra

$$|a_{ss} - \lambda||x_s| = \left|\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} a_{sj}x_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} |a_{sj}||x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} |a_{sj}||x_s|$$

Do đó

$$|a_{ss} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} |a_{sj}||x_s|$$

Trên đây là cách chứng minh trực tiếp cho bài Toán hoặc có thể áp dụng ngay định lí Hadamard cho ma trận $A - \lambda I$ suy biến, khi đó tồn tại một hàng s (hoặc một cột m) thoả mãn điều phải chứng minh.

<u>CHÚ Ý: $|k|$ ở đây chỉ giá trị tuyệt đối khi $k \in \mathbb{R}$, và là modun của k khi $k \in \mathbb{C}$.</u>

Ta phát biểu lại định lí Hadamard bằng lời như sau:

Cho A là ma trận vuông cấp n, nếu modun của mỗi phần tử ở đường chéo chính lớn hơn tổng modun các phần tử còn lại trên cùng một dòng (hay cùng một cột) với phần tử chéo đó thì A khả nghịch.

Ngược lại, nếu A suy biến thì tồn tại một hàng (hay một cột) của A sao cho modun của phần tử chéo trên đó không lớn hơn tổng modun các phần tử còn lại trên cùng một dòng (hay cùng một cột) đó.

B. BÀI TẬP

Câu 1 (Câu 4 Olympic 2006) ☆☆☆☆☆: Cho A là ma trận vuông cấp n sao cho mỗi dòng của nó chứa đúng hai phần tử khác 0, trong đó phần tử nằm ở đường chéo chính bằng 2006, phần tử còn lại bằng 1. Chứng minh $\det A > 0$.

Chứng minh

(Nếu chỉ chứng minh A khả nghịch, tham khảo bài tập phần <u>Một số kiến thức cơ bản về ma trận</u>).

Giả sử λ là một giá trị riêng bất kì của A, khi đó $A - \lambda I$ suy biến và theo định lí Hadamard, tồn tại một hàng s của A sao cho

$$|a_{ss} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} |a_{sj}| \text{ hay } |\lambda - 2006| \leq 1$$

Suy ra $2005 \leq \lambda \leq 2007$. Vậy mọi giá trị riêng của A đều dương nên $\det A > 0$.

Câu 2 (Từ forum.mathscope.org) ☆☆☆☆☆: Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ có các phần tử không âm thoả mãn

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \; \forall i = 1, \dots, n$$

Chứng minh mọi giá trị riêng của A đều có giá trị tuyệt đối không lớn hơn 1.

Chứng minh

Giả sử λ là một giá trị riêng bất kì của A, khi đó $A - \lambda I$ suy biến và theo định lí Hadamard, tồn tại một hàng s của A sao cho

$$|a_{ss} - \lambda| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne s}}^{n} |a_{sj}|$$

Do đó

$$|\lambda| = |\lambda - a_{ss} + a_{ss}| \le |\lambda - a_{ss}| + |a_{ss}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne s}}^{n} |a_{sj}| + |a_{ss}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{sj}| = 1$$

Điều phải chứng minh.

Câu 3 ⭐⭐⭐⭐: Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng giá trị tuyệt đối của một giá trị riêng bất kì của A không vượt quá tổng các giá trị tuyệt đối của các phần tử của A.

Chứng minh

Giả sử λ là một giá trị riêng của A, vì $|A - \lambda I| = 0$ nên tồn tại $c = (c_1 \;\dots\; c_n)^T \in \mathbb{R}^n, c \ne 0$ sao cho $(A - \lambda I)c = 0$. Giả sử $|c_k| = \max\{|c_1|, \dots, |c_n|\}$, hiển nhiên $|c_k| > 0$, ta có

$$c_1 a_{k1} + \dots + c_{k-1} a_{k,k-1} + c_k(a_{kk} - \lambda) + c_{k+1} a_{k,k+1} + \dots + c_n a_{kn} = 0$$

$$=> \frac{c_1}{c_k} a_{k1} + \dots + \frac{c_{k-1}}{c_k} a_{k,k-1} + (a_{kk} - \lambda) + \frac{c_{k+1}}{c_k} a_{k,k+1} + \dots + \frac{c_n}{c_k} a_{kn} = 0$$

Suy ra

$$\lambda = a_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} \frac{c_j}{c_k} a_{kj}$$

Từ đó

$$|\lambda| = \left| a_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} \frac{c_j}{c_k} a_{kj} \right| \le |a_{kk}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} \left| \frac{c_j}{c_k} \right| |a_{kj}| \le |a_{kk}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} |a_{kj}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$$

Câu 4 ⭐⭐⭐⭐⭐: Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ với các phần tử đều dương sao cho tổng các phần tử trên cùng một hàng bất kì của nó đều bằng 1. Chứng minh rằng A không có bất kì giá trị riêng nào có trị tuyệt đối lớn hơn 1.

Chứng minh

Giả sử λ là một giá trị riêng của A và $x = (x_1 \;\dots\; x_n)^T$ là một vector riêng tương ứng.

Gọi x_i là phần tử của x có trị tuyệt đối lớn nhất, ta có

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Do đó

$$|\lambda||x_i| \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j| \le |x_i| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = |x_i|$$

Suy ra $|\lambda| \le 1$.

Câu 5 (Câu ??? đề chọn đội tuyển ĐH Ngân hàng 2012) ★★★★★: Cho A là ma trận vuông cấp n có tổng các phần tử của cùng một cột bằng 1, $x = (x_1 \ \dots \ x_n)^T$ là vector riêng của A có tổng các phần tử khác 0. Chứng minh rằng giá trị riêng của A ứng với x bằng 1.

Chứng minh

Giả sử λ là giá trị riêng của A ứng với vector x, tức là $Ax = \lambda x$ hay $(A - \lambda I)x = 0$, ta có

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 <=> \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{n2}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

Cộng theo vế tất cả các phương trình, ta được

$$(1 - \lambda)(x_{11} + \dots + x_{1n}) = 0$$

Do $x_{11} + \dots + x_{1n} \ne 0$ nên $\lambda = 1$.

Câu 6 ★★★★: Cho ma trận A cấp $n \ge 1$ sau

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Chứng minh mọi giá trị riêng của A đều là các số thực dương.

Chứng minh

<u>Cách 1</u>:

Do A là ma trận đối xứng nên A có các giá trị riêng đều là số thực.

Giả sử λ là một giá trị riêng của A và $x = (x_1 \ \dots \ x_n)$ là một vector riêng của A ứng với λ. Do $x \ne 0$ nên $(|x_1| \ \dots \ |x_n|) > 0$. Gọi $1 \le k \le n \in$ là chỉ số nhỏ nhất sao cho $|x_k|$ đạt cực đại, nghĩa là $k = \min\{1, \dots, n \,|\, |x_k| \ge |x_j| \ \forall j = 1, \dots, n\}$. Để ý rằng có thể giả thiết $x_k > 0$ vì nếu ngược lại, ta thay x bởi $-x$. Xét phần tử ở hàng thứ k của Ax, ta có

$$a_{k,k-1}x_{k-1} + a_{kk}x_k + a_{k,k+1}x_{k+1} = -x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1} = \lambda x_k$$

Theo cách đã đặt ở trên thì $x_{k-1} < x_k$ và $x_{k+1} \le x_k$ nên $\lambda x_k > 0$ và do đó $\lambda > 0$.

<u>Cách 2</u>:

A là ma trận đối xứng, để chứng minh mọi giá trị riêng của A đều là các số thực dương, ta chứng minh A xác định dương, tức là $\forall x \neq 0: x^T A x > 0$. Thật vậy

$$x^T A x = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{n-1} \quad x_n)\begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (2x_1 - x_2 \quad -x_1 + 2x_2 - x_3 \quad \dots \quad -x_{n-2} + 2x_{n-1} - x_n \quad -x_{n-1} + 2x_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (2x_1 - x_2)x_1 + (-x_1 + 2x_2 - x_3)x_2 + \dots + (-x_{n-2} + 2x_{n-1} - x_n)x_{n-1} + (-x_{n-1} + 2x_n)x_n$$
$$= 2(x_1^2 + \dots + x_n^2) - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n) = (x_1^2 + \dots + x_n^2) + (x_1 - \dots - x_n)^2 + 2x_nx_1$$
$$= (x_1 + x_n)^2 + (x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2) + (x_1 - \dots - x_n)^2 > 0 \ \forall x \neq 0$$

Câu 7 ☆☆☆☆: Cho $A \in M_n(\mathbb{C})$ và $f(x)$ là một đa thức bậc m. Chứng minh rằng nếu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của A thì

a) $|f(A)| = f(\lambda_1) \dots f(\lambda_n)$

b) $f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)$ là các giá trị riêng của $f(A)$.

Chứng minh

a) Gọi $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$ là đa thức đặc trưng của A và $f(x)$ là đa thức bậc m có các nghiệm $x_1, \dots, x_m$ (thực, phức kể cả bội). Ta có

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = (-1)^n(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$$
$$f(x) = c(x - x_1) \dots (x - x_m)$$

Do đó

$$f(A) = c(A - x_1 I) \dots (A - x_m I)$$
$$\Rightarrow |f(A)| = c^n |A - x_1 I| \dots |A - x_m I| = c^n \prod_{i=1}^{m} p_A(x_i)$$

Mặt khác

$$p_A(x_i) = (-1)^n(x_i - \lambda_1) \dots (x_i - \lambda_n) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j - x_i)$$

Vì vậy

$$|f(A)| = c^n \prod_{i=1}^{m} p_A(x_i) = c^n \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j - x_i) = \prod_{j=1}^{n} c \prod_{i=1}^{m} (\lambda_j - x_i) = \prod_{j=1}^{n} f(\lambda_j) = f(\lambda_1) \dots f(\lambda_n)$$

b) Đặt $q(x) = f(x) - \lambda$ và áp dụng kết quả trên, ta có

$$|q(A)| = |f(A) - \lambda I| = \prod_{j=1}^{n} [f(\lambda_j) - \lambda I] = [f(\lambda_1) - \lambda] \dots [f(\lambda_n) - \lambda] = q(\lambda_1) \dots q(\lambda_n)$$

hay

$$|f(A) - \lambda I| = (-1)^n[\lambda - f(\lambda_1)] \dots [\lambda - f(\lambda_n)]$$

Vậy các giá trị riêng của $f(A)$ là $f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)$.

Câu 8 ☆☆☆☆☆: Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Các khẳng định sau đúng hay sai, giải thích

a) Nếu n lẻ thì A luôn có vector riêng.

b) Mọi giá trị riêng của A đều là của A^T, tuy nhiên, các vector riêng thì không nhất thiết như vậy.

c) (Câu 2a Olympic 1999) Mọi giá trị riêng của AB cũng là giá trị riêng của BA.

d) Mọi vector riêng của AB cũng là vector riêng của BA.

Chứng minh

a) Đúng. Do $|A - \lambda I|$ là đa thức bậc lẻ nên có ít nhất một nghiệm thực nên A luôn có vector riêng.

b) Đúng. Do $|A^T - \lambda I| = |(A^T - \lambda I)^T| = |A - \lambda I|$, có thể lấy $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Đúng. Giả sử $x \neq 0$ là vector riêng của AB ứng với giá trị riêng λ. Khi đó nếu $Bx \neq 0$ thì

$$BA(Bx) = B(ABx) = B(\lambda x) = \lambda(Bx)$$

nghĩa là λ cũng là giá trị riêng của BA (ứng với vector riêng Bx).

Còn nếu $Bx = 0$ thì từ $ABx = \lambda x$ suy ra $\lambda = 0$ (vì $x \neq 0$). Do đó $|AB| = 0 = |BA|$ tức là BA cũng nhận $\lambda = 0$ làm giá trị riêng.

d) Sai. Chẳng hạn lấy $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ thì $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ và $BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dễ thấy $AB\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nhưng $BA\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Câu 9 ☆☆☆☆☆: Cho ma trận A thoả $A^2 = I$. Chứng minh rằng

a) $\operatorname{rank}(A + I) + \operatorname{rank}(A - I) = n$

b) A đồng dạng với một ma trận đường chéo gồm các phần tử là 1 hoặc -1.

Chứng minh

a) $n = \operatorname{rank}(2I) = \operatorname{rank}[(A + I) - (A - I)] \le \operatorname{rank}(A + I) + \operatorname{rank}(A - I) \le \operatorname{rank}(A^2 - I^2) + n = n$

b) Do $\operatorname{rank}([\,I + A \quad I - A\,]) = \operatorname{rank}([\,I \quad I - A\,]) = \operatorname{rank} I = n$ nên ta có thể lấy trong ma trận $[\,I + A \quad I - A\,]$ n cột độc lập tuyến tính lập thành một ma trận không suy biến, ta đặt là P. Giả sử P có r cột đầu thuộc $I + A$ và $n - r$ cột sau thuộc $I - A$. Do $(I + A)(I - A) = 0$ nên $(I + A)P$ có $n - r$ cột sau bằng 0 và $(I - A)P$ có r cột đầu bằng 0.

$$(I + A)P = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nr} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ và } (I - A)P = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_{n,r+1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Cộng theo vế, ta được

$$2P = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nr} & c_{n,r+1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Trừ theo vế, ta được

$$2AP=\begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} & -c_{1,r+1} & \dots & -c_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & \dots & c_{nr} & -c_{n,r+1} & \dots & -c_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & \dots & c_{nr} & c_{n,r+1} & \dots & c_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1\end{bmatrix}=2P\begin{bmatrix} I_r & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{bmatrix}$$

Từ đó ta có $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} I_r & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{bmatrix}$.

Câu 10: Cho V là không gian vector hữu hạn chiều trên trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, M là một tự đồng cấu của V, $M(x)\neq x\ \forall x\in V\backslash\{0\}$. Giả sử $M^p=Id_V$, với p là số nguyên tố. Chứng minh rằng số chiều của V chia hết cho $p-1$.

Chứng minh

Do $M^p=I$ nên nên đa thức tối tiểu $q(x)$ của M phải là ước của

$$x^p-1=(x-1)(x^{p-1}+\ldots+x+1)$$

Do $M(x)\neq x\ \forall x\in V\backslash\{0\}$ nên 1 không là giá trị riêng của M suy ra $q(x)$ là ước của $(x^{p-1}+\ldots+x+1)$. Nhưng $(x^{p-1}+\ldots+x+1)$ là đa thức khả quy trên $\mathbb{Q}$ nên $q(x)=x^{p-1}+\ldots+x+1$.

Mặt khác, đa thức đặc trưng $p(x)$ và đa thức tối tiểu $q(x)$ có chung nhân tử bất khả quy. Do đó $p(x)=\left(q(x)\right)^k, k\geq 1$. Vậy $\dim V=\operatorname{rank} M=\deg p(x)=k(p-1)$.

Câu 11: Chứng minh rằng ma trận

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1+m & 1\\ 1+m & 1 & 1+m\\ 1 & 1+m & 1\end{pmatrix}\ (m>0)$$

có một giá trị riêng dương và một giá trị riêng âm.

Chứng minh

$$P_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1+m & 1\\ 1+m & 1-\lambda & 1+m\\ 1 & 1+m & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \lambda\\ m & -\lambda-m & m+\lambda\\ 1 & 1+m & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1\\ m & -\lambda-m & m+\lambda\\ 1 & 1+m & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1\\ 2m+\lambda & -\lambda-m & m+\lambda\\ 2-\lambda & 1+m & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} 2m+\lambda & -\lambda-m\\ 2-\lambda & 1+m\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} 2(m+1) & 1-\lambda\\ 2-\lambda & 1+m\end{vmatrix}$$

$$=\lambda[2(m+1)^2-(\lambda-1)(\lambda-2)=-\lambda[\lambda^2-3\lambda-2m(m+2)]$$

Tam thức bậc hai $\lambda^2-3\lambda-2m(m+2)$ có biệt thức $\Delta=9+8m(m+2)>0$ do $m>0$ nên nó có 2 nghiệm phân biệt λ_1,λ_2.

Mặt khác, theo định lí Viete, ta có

$$\lambda_1\lambda_2=-2m(m+2)<0\ (\text{do } m>0)$$

Vậy A có một giá trị riêng dương và một giá trị riêng âm.

Câu 12 ☆☆☆☆: Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ là một ma trận thực với $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng A có một vector riêng $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ với $x, y > 0$.

Chứng minh

Đa thức đặc trưng của A: $P_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$ có nghiệm

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right)$$

Giả sử $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$ là một vector riêng ứng với giá trị riêng λ_1.

- Trường hợp $x > 0$, từ $Av = \lambda_1 v$, ta có

$$ax + by = \frac{1}{2}\left(a + d + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right)x$$

$$<=> 2by = \left[(d-a) + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right]x$$

Do $b > 0, x > 0, (d-a) + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc} > 0$ nên $y > 0$.

- Trường hợp $x < 0$ thì $(-v)$ là cũng vector riêng ứng với giá trị riêng $(-\lambda_1)$, từ $A(-v) = (-\lambda_1)v$, làm tương tự như trên, ta suy ra $y < 0$. Vậy A có vector riêng $u = -v = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ với $x_1, y_1 > 0$.

- Dễ thấy, trường hợp $x = 0$ dẫn đến $y = 0$, điều này không thể xảy ra vì $v \neq 0$.

Điều phải chứng minh.

Câu 13 ☆☆☆☆☆: Cho A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng $A = kI$ với k là số nào đó nếu và chỉ nếu mọi vector $x \neq 0$ đều là vector riêng của A.

Chứng minh

Điều kiện cần: $Ax = kIx = kx \ \forall\, x \neq 0$.

Điều kiện đủ: Lần lượt chọn $x = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0)$ là các phần tử trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Từ $Ae_i = \lambda_i e_i$ suy ra A có phải dạng $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Hơn nữa $\lambda_i e_i + \lambda_j e_j = A(e_i + e_j) = \lambda'(e_i + e_j)$ nên $\lambda_i = \lambda_j = \lambda' \forall i \neq j$. Vậy $A = \lambda I$.

Câu 14 ☆☆☆☆ : Cho ma trận A cấp n có dạng $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 & 1 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm các giá trị riêng của A.

<u>Giải</u>:

Đa thức đặc trưng của A

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & -\lambda & 1 \\ a & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Khai triển định thức theo cột thứ nhất, ta có

$$-\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = (-\lambda)^n + (-1)^{n+1}a$$
$$= (-1)^n[\lambda^n - a]$$

Suy ra $|A - \lambda E| = 0 <=> \lambda^n = a.$

*) Nếu n lẻ thì A có giá trị riêng duy nhất là $\lambda = \sqrt[n]{a}$

*) Nếu n chẵn và $a = 0$ thì A có giá trị riêng duy nhất là $\lambda = 0$

*) Nếu n chẵn và $a > 0$ thì A có 2 giá trị riêng thực là $\lambda = \pm\sqrt[n]{a}.$

*) Nếu n chẵn và $a < 0$ thì A có các giá trị riêng phức là $\lambda = \sqrt[n]{a}.$

Câu 15 : Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

là ma trận có các phần tử trên đường chéo phụ bằng 1, các phần tử khác bằng 0.

Chứng minh rằng A chéo hoá được và tìm ma trận khả nghịch P thoả $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo.

Chứng minh

Ta có $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$

Khai triển Laplace theo cột đầu và cột cuối, ta được

$$|A - \lambda I| = \begin{cases} (\lambda-1)^k.(\lambda+1)^k & n = 2k \\ -(\lambda-1)^{k+1}(\lambda+1)^k & n = 2k+1 \end{cases}$$

Như vậy A chỉ có hai giá trị riêng là 1 và -1.

Với $\lambda = 1$, ta có hệ $(A - I)x = 0$

- Nếu $n = 2k$ thì

$$(A - I)x = 0 <=> \begin{cases} -x_1 + x_n & = 0 \\ -x_2 + x_{n-1} & = 0 \\ \vdots & \\ -x_k + x_{n-k+1} & = 0 \end{cases} <=> (x_1, x_2, \dots, x_k, x_k, \dots, x_2, x_1)$$

Ta được k vector riêng tương ứng là

$$(1,0,\dots,0,1), \dots, (0,\dots 1,1,\dots,0)$$

- Nếu $n = 2k + 1$ thì

$$(A-I)x=0 <=> \begin{cases} -x_1+x_n &= 0 \\ -x_2+x_{n-1} &= 0 \\ \vdots \\ -x_k+x_{n-k+1} &= 0 \\ 0x_{k+1} &= 0 \end{cases} <=> (x_1,x_2,\dots,x_k,x_{k+1},x_k,\dots,x_2,x_1)$$

Ta được $k+1$ vector riêng tương ứng là

$$(1,0,\dots,0,1),\dots,(0,\dots 1,0,1,\dots,0),(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$$

Với $\lambda=-1$, ta có hệ $(A+I)x=0$

- Nếu $n=2k$ thì

$$(A+I)x=0 <=> \begin{cases} x_1+x_n &= 0 \\ x_2+x_{n-1} &= 0 \\ \vdots \\ x_k+x_{n-k+1} &= 0 \end{cases} <=> (x_1,x_2,\dots,x_k,-x_k,\dots,-x_2,-x_1)$$

Ta được k vector riêng tương ứng là

$$(1,0,\dots,0,-1),\dots,(0,\dots 1,-1,\dots,0)$$

- Nếu $n=2k+1$ thì

$$(A+I)x=0 <=> \begin{cases} x_1+x_n &= 0 \\ x_2+x_{n-1} &= 0 \\ \vdots \\ x_k+x_{n-k+1} &= 0 \\ 2x_{k+1} &= 0 \end{cases} <=> (x_1,x_2,\dots,x_k,0,-x_k,\dots,-x_2,-x_1)$$

Ta được k vector riêng tương ứng là

$$(1,0,\dots,0,-1),\dots,(0,\dots 1,0,-1,\dots,0)$$

Vậy là $\forall n$, ta đều tìm được đủ n vector riêng độc lập tuyến tính ứng với 2 giá trị riêng là 1 và -1. Theo tính Toán trên, A sẽ đồng dạng với ma trận đường chéo gồm k số -1 ở phía trên, còn lại là 1. Ma trận P cần tìm là

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

với chỉ k số -1.

Câu 16: Tìm điều kiện cần và đủ để ma trận A có các phần tử trên đường chéo phụ là $a_1,\dots,a_n$, các phần tử còn lại là 0 chéo hoá được.

Giải:

Ta có $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -\lambda & \dots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & -\lambda & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$

Khai triển Laplace theo cột đầu và cột cuối, ta được

$$|A-\lambda I| = \begin{cases} \prod_{i=1}^{k}(\lambda^2 - a_i a_{2k+1-i}) \text{ với } n = 2k \\ -(\lambda - a_{k+1})\prod_{i=1}^{k}(\lambda^2 - a_i a_{2k+2-i}) \text{ với } n = 2k+1 \end{cases}$$

Câu 17 ☆☆☆☆☆**:** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Chứng minh rằng mọi ma trận B thực, giao hoán với A đều có dạng

$$B = aI + bA + cA^2$$

Chứng minh

Đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(x) = (2-x)\left(2+\sqrt{2}-x\right)\left(2-\sqrt{2}-x\right)$$

A có 3 giá trị riêng phân biệt nên A chéo hoá được. Giả sử P là ma trận khả nghịch sao cho $A = PDP^{-1}$ với $D = \operatorname{diag}\left(2,2+\sqrt{2},2-\sqrt{2}\right)$. Lại do B giao hoán với A nên B cũng chéo hoá được với cùng cơ sở, thật vậy

$$BA = AB <=> BPDP^{-1} = PDP^{-1}B <=> (P^{-1}BP)D = D(P^{-1}BP)$$

Đặt $P^{-1}BP = \operatorname{diag}(\alpha,\beta,\gamma) = F$ là ma trận đường chéo.

Cách 1:

Xét hệ phương trình tuyến tính

$$aI + bD + cD^2 = F <=> \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 2+\sqrt{2} & \left(2+\sqrt{2}\right)^2 \\ 1 & 2-\sqrt{2} & \left(2-\sqrt{2}\right)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Đây là hệ Crammer với ma trận hệ số là ma trận Vandermonde có định thức khác 0 nên hệ luôn có nghiệm.

Nhân P vào bên trái, P^{-1} vào bên phải hai vế của hệ, ta có điều phải chứng minh.

Cách 2:

Xét đa thức bậc hai $f(x) = a + bx + cx^2$, đặt $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2+\sqrt{2}, \lambda_3 = 2-\sqrt{2}$, ta có

$$f(A) = aI + bA + cA^2 = P(aI + bD + cD^2)P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} a+b\lambda_1+c\lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & a+b\lambda_2+c\lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+b\lambda_3+c\lambda_3^2 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & f(\lambda_3) \end{pmatrix}P^{-1}$$

Như vậy, ta cần phải tìm $f(x)$ thoả mãn $f(\lambda_1) = \alpha, f(\lambda_2) = \beta, f(\lambda_3) = \gamma$, chẳng hạn chọn đa thức nội suy Lagrange bậc hai $L_2(x)$:

$$f(x) = L_2(x) = \alpha \frac{(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} + \beta \frac{(x-\lambda_1)(x-\lambda_3)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} + \gamma \frac{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}$$

Khi đó

$$aI + bA + cA^2 = f(A) = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1} = PFP^{-1} = B$$

<u>Cách 3</u>:

Đặt $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \epsilon & \xi \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix}$

Từ $AB = BA$ ta thu được hệ 9 phương trình 9 ẩn, giải ra ta có

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \alpha+\gamma & \beta \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Tiếp tục giải hệ $B = aI + bA + cA^2$, ta có

$$\begin{cases} a = \alpha + 2\beta + 3\gamma \\ b = \quad -\beta - 4\gamma \\ c = \qquad\quad \gamma \end{cases}$$

Vậy $B = (\alpha + 2\beta + 3\gamma)I + (-\beta - 4\gamma)A + \gamma A^2$.

Câu 18 ☆☆☆☆☆: Cho $A \in M_2(\mathbb{C})$. Với mọi số nguyên dương n, kí hiệu $x_n = \det(A^n + I)$. Chứng minh rằng nếu $x_1 = x_2 = 1$ thì x_n hoặc bằng 1 hoặc bằng 4 $\forall n$.

Chứng minh

Đặt $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - a\lambda + b$ là đa thức đặc trưng của A, trong đó $a = \mathrm{tr}(A), b = \det A$. Ta biết rằng $P_A(A) = O$.

Theo giả thiết, ta có $x_1 = \det(A + I) = P_A(-1) = 1$ hay $a + b = 0$ và

$$\begin{aligned} 1 = x_2 = \det(A^2 + I) = \det(A + iI)\det(A - iI) = P(-i)P(i) = (-1 + ai + b)(-1 - ai + b) \\ = (b-1)^2 + a^2 \end{aligned}$$

Hệ quả là $\begin{cases} a = -b \\ a^2 + b^2 - 2b = 0 \end{cases}$.

Trường hợp $a = b = 0$ dẫn đến $A^2 = 0$ nên $A^n = 0\ \forall n \geq 2$ và do đó $x_n = 1\ \forall n$.

Còn nếu $a = -1, b = 1$ thì khi đó $P_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$ dẫn đến $A^2 + A + I = 0$ nên $A^3 = I$. Theo quy nạp, ta có

+) $A^{3k} = I$ và $x_{3k} = \det(2I) = 4$.

+) $A^{3k+1} = A^{3k}A = A$ và $x_{3k+1} = \det(A + I) = x_1 = 1$.

+) $A^{3k+2} = A^{3k}A^2 = A^2$ và $x_{3k+2} = \det(A^2 + I) = x_2 = 1$.

Tóm lại, $x_n \in \{1,4\}\ \forall n$.

Câu 19 ☆☆☆☆: Với $x \in \mathbb{R}$, đặt

$$A_x = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{bmatrix}$$

a) Chứng minh $\det A_x = (x-1)^3(x+3)$.

b) Chứng minh nếu $x \neq 1, 3$ thì $A_x^{-1} = -(x-1)^{-1}(x+3)^{-1}A_{-x-2}$.

Chứng minh

a) Tính toán trực tiếp cho ra kết quả.

b) Theo trên thì $\det(A_x - \lambda I) = \det A_{x-\lambda} = (x-\lambda-1)^3(x-\lambda+3)$.

Suy ra đa thức tối tiểu của A_x là $(x-\lambda-1)(x-\lambda+3)$

Nếu $x \neq 1, 3$ thì A_x khả nghịch và $(x-1)(x+3) \neq 0$, do đó

$$0 = [(x-1)I - A_x][(x+3)I - A_x] = (x-1)(x+3)I - 2(x+1)A_x + A_x^2$$

<=> $(x-1)(x+3)A_x^{-1} - 2(x+1)I + A_x = 0$

<=> $(x-1)(x+3)A_x^{-1} + [A_x - 2(x+1)I] = 0$

<=> $(x-1)(x+3)A_x^{-1} + A_{-x-2} = 0$

<=> $A_x^{-1} = -(x-1)^{-1}(x+3)^{-1}A_{-x-2}$.

Câu 20 ⭐⭐⭐: Trong tất cả các ma trận đối xứng cấp hai $A = (a_{ij})$ có các giá trị riêng là λ_1, λ_2, tìm ma trận có phần tử a_{12} lớn nhất (nhỏ nhất).

Giải:

Từ giả thiết, A có thể chéo hoá trực giao được bởi ma trận trực giao $P = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$, ta có

$$A = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Từ đó suy ra $a_{12} = (\lambda_2 - \lambda_1)\cos t \sin t = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)\sin 2t$, vì vậy giá trị lớn nhất và nhỏ nhất mà nó đạt được là

$$(a_{12})_{max} = \frac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{2} \;\; ; \;\; (a_{12})_{min} = \frac{-|\lambda_2 - \lambda_1|}{2}$$

Câu 21: Cho A là một ma trận phức và k là số tự nhiên. Chứng minh rằng tồn tại ma trận X sao cho $X^k = A$.

Chứng minh

Ta đã biết rằng mọi ma trận luôn chéo hoá được trên trường số phức. Chéo hoá A trên $\mathbb{C}$, ta được $A = PBP^{-1}$, trong đó B là ma trận đường chéo có các phần tử chéo là các giá trị riêng phức của A.

Chọn ma trận $X = PCP^{-1}$, trong đó C là ma trận đường chéo có các phần tử chéo tương ứng là một căn bậc k của các phần tử chéo của ma trận B. Hiển nhiên khi đó $PC^kP^{-1} = PBP^{-1} = A$.

Câu 22 (Câu 6 Olympic 1995) ☆☆☆☆: Cho B là ma trận vuông cấp n và λ là giá trị riêng thực của B. Chứng minh rằng với mọi $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, ta đều có

$$\det\left(\sum_{k=0}^{n} a_k B^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k E\right) = 0$$

Chứng minh

Ta có

$$\sum_{k=0}^{n} a_k B^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k E = \sum_{k=0}^{n} a_k\left(B^k - \lambda^k E\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k (B - \lambda I)\left(B^{k-1} + \lambda B^{k-2} + \ldots + \lambda^{k-2} B + \lambda^{k-1} I\right)$$

$$= (B - \lambda I) \sum_{k=0}^{n} a_k\left(B^{k-1} + \lambda B^{k-2} + \ldots + \lambda^{k-2} B + \lambda^{k-1} I\right) = (B - \lambda I) M$$

Suy ra

$$\det\left(\sum_{k=0}^{n} a_k B^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k E\right) = \det(B - \lambda I) \det M = 0$$

Câu 23(Câu 5 Olympic 2001) ☆☆☆☆: Cho A là ma trận vuông cấp n có các phần tử là những số nguyên chẵn. Chứng minh A không có giá trị riêng là số nguyên lẻ.

Chứng minh

Giả sử A có giá trị riêng λ là số nguyên lẻ, khi đó $|A - \lambda I|$ là một định thức mà các phần tử trên đường chéo chính là các số nguyên lẻ, các phần tử còn lại là số nguyên chẵn. Khi đó $|A - \lambda I| \equiv 1 \pmod 2$ nên $|A - \lambda I| \neq 0$, tức λ không phải là giá trị riêng của A, mâu thuẫn.

Vậy A không có giá trị riêng là số nguyên lẻ.

Câu 24 (Câu 2 đề chọn đội tuyển vòng 1 ĐH An Giang 2009) ☆☆☆☆:

a) Cho $A \in M_n(\mathbb{K})$. Chứng minh rằng có không quá n phần tử α khác nhau trong $\mathbb{K}$ sao cho $\det(\alpha I - A) = 0$.

b) Cho $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Chứng minh rằng nếu A khả nghịch thì có không quá n phần tử α khác nhau trong $\mathbb{K}$ sao cho ma trận $\alpha A + B$ suy biến.

Chứng minh

a) Do đa thức $\det(xI - A)$ khác 0 bậc không quá n nên nó có không quá n nghiệm trong $\mathbb{K}$. Suy ra điều phải chứng minh.

b) Do A khả nghịch nên ta có

$\det(xA + B) = 0 \iff \det(xI + BA^{-1}) \det A = 0 \iff \det(xI + BA^{-1}) = 0 \iff \det[xI - (-BA^{-1})] = 0$

Áp dụng câu a), suy ra điều phải chứng minh.

Câu 25 (Câu 3 Olympic 2008) ☆☆☆☆: Cho $A \in M_2(\mathbb{R})$ thoả $\det A < 0$. Chứng minh tồn tại hai số thực phân biệt λ_1, λ_2 và hai ma trận A_1, A_2 sao cho

$$A^n = \lambda_1^n A_1 + \lambda_2^n A_2 \ \forall n = 1,2,\dots$$

Chứng minh

Đa thức đặc trưng của A có dạng

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A$$

Cách 1:

Do $\det A < 0$ nên $P_A(\lambda)$ có biệt thức $\Delta = (\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A > 0$ suy ra $P_A(\lambda)$ có hai nghiệm phân biệt λ_1, λ_2, tức là A chéo hoá được, và tồn tại ma trận P khả nghịch sao cho

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Suy ra

$$A^n = P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1} = P\left[\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\right] P^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$
$$= \lambda_1^n P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + \lambda_2^n P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Đặt $A_1 = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, A_2 = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$, ta có điều phải chứng minh.

Cách 2:

Do $\det A < 0$ nên $\Delta > 0$ suy ra phương trình có hai nghiệm thực phân biệt λ_1, λ_2. Khi đó, đặt

$$B_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_2 I), \ \ B_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(A - \lambda_1 I)$$

thì ta có $B_1 + B_2 = I, \quad \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 = A, \ \ B_1 B_2 = B_2 B_1 = 0$

Vậy $A^n = \lambda_1^n B_1^n + \lambda_2^n B_2^n = \lambda_1^n A_1 + \lambda_2^n A_2, \ \ \forall n = 1,2,\dots$

Nhận xét:

Thực ra, nếu đặt ngay

$$A_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_2 I), \ \ A_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(A - \lambda_1 I)$$

thì ta có $A_1^n = A_1, A_2^n = A_2$

Thật vậy

$$\begin{cases} \det A_1 = 0 \\ \operatorname{tr} A_1 = \dfrac{a - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + \dfrac{d - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \dfrac{a + d - 2\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = 1 \end{cases}$$

Áp dụng định lý Cayley – Hamilton cho ma trận A_1, ta có $A_1^2 = A_1$, suy ra $A_1^n = A_1$.

Cách khác: $A_1^2 - A_1 = A_1(A_1 - I) = A_1(-A_2) = 0$, suy ra $A_1^n = A_1$

Cách khác:

$$A_1^n - A_1 = A_1(A_1^{n-1} - I) = (I - A_2)(A_1^{n-1} - I) = A_1^{n-1} - I - A_2 A_1^{n-1} + A_2 = A_1^{n-1} - (I - A_2)$$
$$= A_1^{n-1} - A_1 = \dots = A_1^2 - A_1 = A_1(A_1 - I) = A_1(-A_2) = 0$$

Lý luận tương tự ta được $A_2^n = A_2$.

Vậy $A^n = \lambda_1^n A_1 + \lambda_2^n A_2 \ \ \forall n = 1,2,\dots$

Câu 26 (Từ forum.mathscope.org) ⭐⭐⭐⭐⭐: Cho ma trận A có n giá trị riêng dương phân biệt $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Chứng minh rằng $\det(A + A^{-1}) \geq 2^n$.

Chứng minh

A có n giá trị riêng dương phân biệt, đặt là $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, nên A chéo hoá được, tức là tồn tại ma trận T khả nghịch sao cho

$$A = T \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) T^{-1}$$

Dễ dàng suy ra

$$A^{-1} = T \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right) T^{-1}$$

Từ đó và áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được

$$\begin{aligned}\det(A + A^{-1}) &= \det\left[T \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) T^{-1} + T\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right) T^{-1}\right] \\ &= \det T \det\left[\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)\right] \det(T^{-1}) \\ &= \det\left[\operatorname{diag}\left(\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \lambda_n + \frac{1}{\lambda_n}\right)\right] = \prod_{i=1}^{n}\left(\lambda_i + \frac{1}{\lambda_i}\right) \geq 2^n\end{aligned}$$

Câu 27 (Câu 5 Olympic 2008) ⭐⭐⭐⭐⭐: Cho A là ma trận vuông cấp n khả nghịch. Mọi phần tử của các ma trận A, A^{-1} là số nguyên. Chứng minh rằng nếu A có n giá trị riêng đều là các số thực thì

$$|\det(A + A^{-1})| \geq 2^n$$

Chứng minh

Do các phần tử của A, A^{-1} đều là số nguyên nên $\det A$, $\det A^{-1}$ cũng là số nguyên. Mặt khác

$$|\det A||\det A^{-1}| = |\det A \det A^{-1}| = 1$$

Suy ra $|\det A| = |\det A^{-1}| = 1$

Với mỗi giá trị riêng λ của A, ứng với vector riêng $v \neq 0$, tức là $Av = \lambda v$ thì $1 + \lambda^2$ là giá trị riêng của $I + A^2$, thật vậy

$$(I + A^2)v = Iv + A^2 v = Iv + AAv = Iv + \lambda Av = (1 + \lambda^2)v$$

Gọi $a_1, a_2, \dots, a_n$ là tất cả các giá trị riêng thực của A, khi đó A chéo hoá được, tức là tồn tại ma trận P khả nghịch sao cho

$$A = P \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n) P^{-1} => I + A^2 = P \operatorname{diag}(1 + a_1^2, \dots, 1 + a_n^2) P^{-1}$$

Từ đó và áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được

$$\begin{aligned}|\det(A + A^{-1})| &= |\det[A^{-1}(I + A^2)]| = |\det A^{-1}||\det(I + A^2)| \\ &= 1.\left|\det P \det[\operatorname{diag}(1 + a_1^2, \dots, 1 + a_n^2)] \det(P^{-1})\right| \\ &= 1.(1 + a_1^2)(1 + a_2^2)\dots(1 + a_n^2) \geq 2^n|a_1 a_2 \dots a_n| = 2^n|\det A| = 2^n.\end{aligned}$$

Câu 28 (Từ forum.mathscope.org) ⭐⭐⭐⭐⭐: Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ thoả $\operatorname{tr}[(A - A^T)^{2n}] = 0$. Chứng minh $A = A^T$.

Chứng minh

Cách 1:

Kí hiệu $A = (a_{ij})$, dễ thấy ngay $A - A^T$ là một ma trận phản đối xứng nên $i(A - A^T)$ là ma trận Hermite. Do đó có thể chéo hoá nó bởi ma trận Unita, tức là tồn tại ma trận Unita U sao cho

$$i(A - A^T) = U\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)\, U^{-1}$$

trong đó $a_i, i = \overline{1, n}$ là các giá trị riêng thực của $i(A - A^T)$. Từ đó và kết hợp với giả thiết, ta có

$$\operatorname{tr}\left[\left(i(A - A^T)\right)^{2n}\right] = -\operatorname{tr}[(A - A^T)^{2n}] = -(a_1^{2n} + \dots + a_n^{2n}) = 0$$

suy ra $a_1 = \dots = a_n = 0$, từ đó $i(A - A^T) = 0$.

Vậy $A = A^T$.

Cách 2:

Đặt $B = (b_{ij}) = A - A^T$, dễ thấy B là ma trận phản đối xứng nên $B = -B^T$, suy ra $B^2 = (B^T)^2 = (B^2)^T$ tức B^2 là ma trận đối xứng, do đó nó chéo hoá được và các giá trị riêng, đặt là $b_1, \dots, b_n$, đều là các số thực

$$B^2 = P\operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n)P^{-1}$$

Ngoài ra $\forall x \neq 0$, ta có

$$x^T B^2 x = -x^T B^T B x = -(Bx)^T(Bx) \leq 0 \text{ (Bx có thể bằng 0)}$$

Suy ra B^2 là bán xác định âm nên các giá trị riêng của nó không dương. Mặt khác, $b_1^n, \dots, b_n^n$ là giá trị riêng của B^{2n}, từ giả thiết, ta có

$$\operatorname{tr}(B^{2n}) = b_1^n + \dots + b_n^n = 0$$

Nếu n chẵn thì $b_1 = \dots = b_n = 0$, nếu n lẻ thì do $b_1^n, \dots, b_n^n$ là những số thực không dương, ta cũng có $b_1 = \dots = b_n = 0$. Như vậy B^2 chỉ có giá trị riêng là 0, nên $B^2 = P\operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n)P^{-1} = 0$.

Mặt khác $0 = B^2 = -BB^T$, so sánh đường chéo hai bên

$$-\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 0 \;\forall\, i = 1, \dots, n$$

Vậy $0 = B = A - A^T$ hay $A = A^T$.

Nhận xét: hai cách làm khá tương tự nhau, từ giả thiết suy ra ma trận chéo đều là ma trận 0 suy ra điều phải chứng minh. Tuy nhiên, cách 1 ngắn gọn, các bước đi đến kết quả ít hơn.

Câu 29 ⭐⭐⭐⭐: Cho $A, M \in M_n(\mathbb{R})$, M chéo hoá được. Chứng minh nếu $M^k A = 0$ khi và chỉ khi $MA = 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh

Vì M chéo hoá được nên tồn tại ma trận P khả nghịch và ma trận chéo D sao cho $M = PDP^{-1}$, ta có

$$M^k A = 0 \Leftrightarrow PD^kP^{-1}A = 0 \Leftrightarrow D^kP^{-1}A = 0$$

Đặt $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_1 \end{pmatrix}$ và $P^{-1}A = (a_{ij})$, khi đó

$$D^k P^{-1} A = \begin{pmatrix} \lambda_1^k a_{11} & \dots & \lambda_1^k a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n^k a_{n1} & \dots & \lambda_n^k a_{nn} \end{pmatrix} = 0 <=> \lambda_i^k a_{ij} = 0 <=> \lambda_i a_{ij} = 0 <=> DP^{-1}A = 0$$

$$<=> PDP^{-1}A = MA = 0$$

Điều phải chứng minh.

PHẦN VIII: ĐA THỨC ĐẶC TRƯNG, ĐA THỨC TỐI TIỂU

A. CƠ SỞ LÍ THUYẾT

Giả sử $A \in M_n(\mathbb{K})$, ta có định nghĩa, định lí và một số tính chất sau:

Đa thức đặc trưng:

$$\det(A - xI) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(\operatorname{tr} A)x^{n-1} + \ldots - (A_{11} + \ldots + A_{nn})x + \det A$$

Đa thức đặc trưng thường được kí hiệu là $P_A(x)$, $p_A(x)$, $\chi_A(x)$.

Định lí Cayley – Hamilton: $P_A(A) = 0$ tức là đa thức đặc trưng nhận A làm nghiệm.

Đa thức tối tiểu: là đa thức khác 0, chuẩn tắc, bậc nhỏ nhất nhận A làm nghiệm. Đa thức tối tiểu thường được kí hiệu là $\Pi_A(x)$

Tính chất:

- Đa thức tối tiểu tồn tại và duy nhất.

- Một đa thức bất kì nhận A làm nghiệm khi và chỉ khi nó chia hết cho đa thức tối tiểu.

- Mọi giá trị riêng của A đều là nghiệm của đa thức tối tiểu. Như vậy, nếu A có n giá trị riêng phân biệt thì đa thức tối tiểu của nó trùng với đa thức đặc trưng. Nói cách khác, A chéo hoá được khi và chỉ khi đa thức tối tiểu của nó không có nghiệm bội.

- Nghiệm của đa thức tối tiểu là nghiệm của đa thức đặc trưng và ngược lại.

B. BÀI TẬP

Câu 1: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ và đa thức

$f(x) = -x^8 + 6x^7 - 12x^6 + 8x^5 - x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 10x + 1$. Tính $f(A)$

Giải:

Đa thức đặc trưng của ma trận A là $P_A(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$

Chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $P_A(x)$ được thương $q(x) = x^5 + x$ và dư $r(x) = 2x + 1$. Do đó

$$f(A) = r(A) = 2A + E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -8 & 9 & 0 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Câu 2: Cho M là ma trận vuông thực cấp 3 thoả $M^3 = I, M \neq I$

a) Tìm các giá trị riêng của M.

b) Tìm một ma trận có tính chất như thế

Giải:

a) Do M là nghiệm của đa thức $x^3 - 1$ nên đa thức tối tiểu của M phải là ước của $x^3 - 1$. Mặt khác, M có ít nhất một giá trị riêng thực nên đa thức tối tiểu của nó có chứa nhân tử $x - 1$. Nhưng vì $M \neq I$ nên

$x-1$ không thể là đa thức tối tiểu của M được. Do đó x^3-1 cũng là đa thức tối tiểu của M. Vậy M chỉ có giá trị riêng thực là 1.

b) $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Câu 3 ★★★★: Cho đa thức bậc hai $p(x)=ax^2+bx+c$ không có nghiệm thực. Chứng minh rằng tồn tại ma trận vuông A cấp n thoả mãn phương trình $p(A)=0$ nếu và chỉ nếu n chẵn.

Chứng minh

Nếu A tồn tại thì nó có đa thức tối tiểu là ước của $p(x)$. Do đa thức này không có nghiệm thực nên $p(x)$ cũng chính là đa thức tối tiểu của A, vì vậy đa thức đặc trưng của A phải có dạng $(ax^2+bx+c)^k$. Vậy n phải chẵn. (Cách khác: do $p(x)$ không có nghiệm thực nên ta phân tích $aA^2+bA+cI=(\alpha A+\beta I)^2+\gamma I=0$ suy ra $|(\alpha A+\beta I)^2|=|-\gamma I|=(-1)^n\gamma^n$. Vậy n chẵn).

Ngược lại, ta chọn một ma trận cấp hai A_0 sao cho đa thức đặc trưng của nó là $p(x)$. Lập ma trận khối chéo A gồm $\frac{n}{2}$ khối A_0 trên đường chéo chính, đây chính là ma trận cấp n cần tìm (chẳng hạn với $p(x)=x^2+2x+5$, ta chọn $A_0=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ -1 & 0\end{bmatrix}$).

Câu 4 ★★★★★: Cho A là ma trận vuông cấp n thoả $A^2=A$. Tìm đa thức đặc trưng của A.

<u>Giải</u>:

Từ điều kiện $A^2=A$ chứng tỏ đa thức tối tiểu của A là $x^2-x=x(x-1)$, do đó đa thức đặc trưng của A phải có dạng $(-1)^n x^{n-r}(x-1)^r$.

Không gian con riêng của A ứng với $x=0$ là $N_A(0)=\{x|Ax=0\}$ có số chiều $n-\operatorname{rank}A$. Do đó $r=\operatorname{rank}A$.

Câu 5 (Câu 2 Olympic 1997) ★★★★: Cho $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{rank}A=r\le n$, $A^2=A$. Tính các giá trị có thể có của $\operatorname{tr}A$.

<u>Giải</u>:

<u>Cách 1</u>:

Theo trên, đa thức đặc trưng của A có dạng $(-1)^n x^{n-r}(x-1)^r$, trong đó $r=\operatorname{rank}A$. Vậy A chỉ có giá trị riêng là 0 và 1 mà vết A lại là tổng các giá trị riêng của nó, và vì 1 là nghiệm bội r của đa thức đặc trưng nên $\operatorname{tr}A=r$.

<u>Cách 2</u>:

Xét phép biến đổi tuyến tính f trong $\mathbb{R}^n$ nhận A làm ma trận biểu diễn trong hệ cơ sở $e_1,\dots,e_n$. Ta đã biết giá trị của $\operatorname{tr}A$ không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở trong $\mathbb{R}^n$.

Giả sử $u\in\operatorname{Ker}f\cap\operatorname{Im}f$ thì ta có $Au=0$ do $u\in\operatorname{Ker}f$, mặt khác, $u\in\operatorname{Im}f$ và $A^2=A$ nên $u=Ax$ => $Au=A^2x=Ax=0$, tức là $x\in\operatorname{Ker}f$, do vậy mà $u=Ax=0$.

Suy ra $\mathbb{R}^n$ là tổng trực tiếp của hai không gian con $\operatorname{Ker} f$ và $\operatorname{Im} f$

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$$

theo giả thết, hai không gian này lần lượt có số chiều là $n-r$ và r.

Chọn trong $\operatorname{Ker} f$ một cơ sở $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n-r}$ và trong $\operatorname{Im} f$ một cơ sở $\bar{e}_{n-r+1}, \dots, \bar{e}_n$ thì khi đó $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ là một cơ sở trong $\mathbb{R}^n$, ta có

$$f(\bar{e}_k) = \begin{cases} 0\ , & k = \overline{1, n-r} \\ \bar{e}_k\ , & k = \overline{n-r+1, n} \end{cases}$$

Như vậy, trong cơ sở mới, ta có ma trận

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix}$$

Suy ra $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} \bar{A} = r$.

Câu 6 (Từ math.vn) ⭐⭐⭐⭐⭐: Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp, luỹ đẳng. Chứng minh A, B đồng dạng khi và chỉ khi chúng cùng hạng.

Chứng minh

Điều kiện cần là hiển nhiên, ta chứng minh điều kiện đủ.

Theo trên, đa thức đặc trưng của A và B lần lượt là

$$(-1)^n x^{n-r_1}(x-1)^{r_1} \text{ và } (-1)^n x^{n-r_2}(x-1)^{r_2}$$

trong đó $r_1 = \operatorname{rank} A, r_2 = \operatorname{rank} B$.

Khi đó nếu $r_1 = r_2 = r$ thì cả A và B đều đồng dạng với ma trận chéo với r số 1 và $n-r$ số 0 trên đường chéo và do đó chúng đồng dạng nhau.

Câu 7 (Câu 5a Olympic 2010) ⭐⭐⭐⭐⭐:

Cho $A \in M_n(\mathbb{R}), n \geq 2$, $\operatorname{tr} A = 10$ và $\operatorname{rank} A = 1$. Tìm đa thức đặc trưng và đa thức tối tiểu của A.

Giải:

Cách 1: Tính trực tiếp

Vì $\operatorname{rank} A = 1$ nên tồn tại vector dòng khác 0 trong A và các vector dòng còn lại đều biểu diễn tuyến tính được qua dòng này. Do đó ma trận A có dạng sau:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_1 x_2 & \dots & \lambda_1 x_n \\ \lambda_2 x_1 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_n x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_i x_1 & \lambda_i x_2 & \dots & \lambda_i x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n x_1 & \lambda_n x_2 & \dots & \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

Đặt $U = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_i \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \neq 0,\ V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0.$

Khi đó $A = U^T V$ và $VU^T = \lambda_1 x_1 + \lambda_2\, x_2 + \ldots + \lambda_i x_i + \ldots + \lambda_n x_n = \operatorname{tr} A = 10$

Ta có $A^2 = (U^T V)(U^T V) = U^T (VU^T) V = U^T (\operatorname{tr} A) V = (\operatorname{tr} A) U^T V = (\operatorname{tr} A) A = 10A$

Vậy đa thức tối tiểu của A là $P(t) = t^2 - 10t$.

Tính định thức $D_n = \det(A + tI)$

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 x_1 + t & \lambda_1 x_2 & \ldots & \lambda_1 x_n \\ \lambda_2 x_1 & \lambda_2 x_2 + t & \ldots & \lambda_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \lambda_i x_1 & \lambda_i x_2 & \ldots & \lambda_i x_n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \lambda_n x_1 & \lambda_n x_2 & \ldots & \lambda_n x_n + t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1 x_1 + t & \lambda_1 x_2 & \ldots & \lambda_1 x_n \\ \lambda_2 x_1 & \lambda_2 x_2 + t & \ldots & \lambda_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \lambda_i x_1 & \lambda_i x_2 & \ldots & \lambda_i x_n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \lambda_n x_1 & \lambda_n x_2 & \ldots & \lambda_n x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 x_1 + t & \lambda_1 x_2 & \ldots & \lambda_1 x_n \\ \lambda_2 x_1 & \lambda_2 x_2 + t & \ldots & \lambda_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \lambda_i x_1 & \lambda_i x_2 & \ldots & \lambda_i x_n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & t \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_n x_n \begin{vmatrix} \lambda_1 x_1 + t & \lambda_1 x_2 & \ldots & \lambda_1 \\ \lambda_2 x_1 & \lambda_2 x_2 + t & \ldots & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \lambda_i x_1 & \lambda_i x_2 & \ldots & \lambda_i \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \ldots & 1 \end{vmatrix} + tD_{n-1} = \lambda_n x_n \begin{vmatrix} t & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \ldots & 1 \end{vmatrix} + tD_{n-1}$$

$$= \lambda_n x_n t^{n-1} + tD_{n-1} = \lambda_n x_n t^{n-1} + t(\lambda_{n-1} x_{n-1} t^{n-2} + tD_{n-2})$$

$$= (\lambda_n x_n + \lambda_{n-1} x_{n-1}) t^{n-1} + t^2 D_{n-2}$$

$$= (\lambda_n x_n + \lambda_{n-1} x_{n-1}) t^{n-1} + t^2 (\lambda_{n-2} x_{n-2} t^{n-3} + tD_{n-3})$$

$$= (\lambda_n x_n + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_{n-2} x_{n-2}) t^{n-1} + t^3 D_{n-3} = \ldots$$

$$= t^{n-1} (\lambda_n x_n + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \ldots + \lambda_2 x_2 + D_1)$$

$$= t^{n-1} (\operatorname{tr} A + t) = t^{n-1}(t + 10)$$

(có thể sử dụng tính đa tuyến tính tính định thức này)

Vậy đa thức đặc trưng của A là $(-1)^n t^{n-1}(t - 10)$.

Cách 2:

Vì $\operatorname{rank} A = 1$ hay $\dim \operatorname{Ker} A = n - 1$ nên A có đúng $n - 1$ vector riêng ứng với 0. Bởi vậy mà một giá trị riêng còn lại là số thực. Từ đó A chéo hóa được và trên đường chéo chỉ có một phần tử khác 0 chính là 10. Suy ra ngay đa thức đặc trưng là $(-1)^n t^{n-1}(t - 10)$ và đa thức tối tiểu.

Câu 8 ⭐⭐⭐⭐⭐: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$. Tìm đa thức tối tiểu của A.

Giải:

Đa thức đặc trưng của A

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + c\lambda^2 + b\lambda + a$$

Ta sẽ chứng tỏ đây cũng là đa thức tối tiểu của A. Thật vậy, với $x_0 = (1,0,0)$ khi đó

$$x_0 = (1,0,0)\ ;\ Ax_0 = (0,1,0)\ ;\ A^2x_0 = (0,0,1)$$

là 3 vector độc lập tuyến tính.

Giả sử A là nghiệm của một đa thức bậc hai, tức là $k_1A^2 + k_2A + k_3I = 0\ (k_1 \neq 0)$ suy ra

$$k_1A^2x_0 + k_2Ax_0 + k_3x_0 = 0$$

từ đây cho ta $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, mâu thuẫn.

Tương tự, giả sử A là nghiệm của một đa thức bậc nhất, tức là $m_1A + m_2I = 0\ (m_1 \neq 0)$ suy ra

$$m_1Ax_0 + m_2x_0 = 0$$

từ đây cho ta $m_1 = m_2 = 0$, mâu thuẫn.

Vậy đa thức tối tiểu phải có bậc 3 và đó cũng chính là đa thức đặc trưng.

Câu 9 (Câu 1 Olympic Quốc tế 1999) ☆☆☆☆☆:

a) Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên $n \neq 0$, luôn tồn tại ma trận A thực cấp n thoả mãn $A^3 = A + I$.

b) Chứng minh với mỗi ma trận A thực cấp n thoả mãn $A^3 = A + I$ thì $\det A > 0$.

Chứng minh

a) Xét ma trận $A = xI$. Khi đó $A^3 = A + I$ xảy ra khi và chỉ khi $x^3 = x + 1$ vì $A^3 - A - I = (x^3 - x - 1)I$. Do đa thức $x^3 - x - 1$ bậc lẻ nên nó luôn có nghiệm thực. Điều này chứng tỏ luôn có một ma trận A thực, cấp n thoả mãn $A^3 = A + I$, đó chính là xI.

b) Dễ dàng kiểm tra đa thức $x^3 - x - 1$ có một nghiệm thực dương x_1 và hai nghiệm phức liên hợp x_2, x_3. Nếu ma trận A thoả mãn $A^3 = A + I$ thì giá trị riêng của nó chỉ có thể là x_1, x_2, x_3 trên. Do đó, đa thức đặc trưng của A là $(-1)^n(x^3 - x - 1)^n = (-1)^n(x - x_1)^\alpha(x^2 + ax + b)^\beta\ (\alpha + 2\beta = n)$ với x_2, x_3 là hai nghiệm phức liên hợp của phương trình $x^2 + ax + b = 0$.

Mặt khác, định thức của A bằng tích các nghiệm (kể cả bội) của phương trình đặc trưng

$$\det A = x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\beta = x_1^\alpha (x_2x_3)^\beta$$

Vì $x_1, x_2x_3 = |x_2|^2$ là các số thực dương nên $\det A > 0$.

Câu 10 ☆☆☆☆☆: Cho $A \in M_n(\mathbb{K}), B \in M_m(\mathbb{K}), A, B$ không có giá trị riêng chung. Chứng minh rằng

a) Nếu ma trận X cỡ $n{\times}m$ thoả $AX - XB = 0$ thì $X = 0$.

b) Phương trình $AX - XB = C$ với ma trận C cỡ $m{\times}n$ có không quá một nghiệm là ma trận X cỡ $m{\times}n$

Chứng minh

a) Gọi $q(x)$ là đa thức tối tiểu của B. Giả sử

$$q(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - \lambda_i)^{\mu_i} => q(B) = \prod_{i=1}^{k}(B - \lambda_i I_m)^{\mu_i} = 0$$

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được $(A - \lambda I_n)^k X = X(B - \lambda I_m)^k\ \forall\ k \in \mathbb{N}, \forall \lambda$.

Từ đó suy ra

$$\prod_{i=1}^{k}(A-\lambda_i I_n)^{\mu_i} X = X\prod_{i=1}^{k}(B-\lambda_i I_m)^{\mu_i} = 0$$

Vì các giá tị riêng của B không là giá trị riêng của A nên các ma trận $(A-\lambda_i I_n)$ đều khả nghịch.

Vậy $X = 0$.

b) Suy ra từ a), cụ thể:

- Nếu $C = 0$ thì phương trình chỉ có một nghiệm $X = 0$.

- Nếu $C \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

PHẦN IX: ĐỊNH THỨC
(Determinant)

A. CƠ SỞ LÍ THUYẾT

I. TÍNH ĐỊNH THỨC

***Phương pháp 1**: Khai triển Laplace*

Giả sử $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ và $k \in \mathbb{N}$ thoả $1 \leq k < n$. Xét hai bộ chỉ số

$$1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n \text{ và } 1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$$

Ma trận cấp k gồm các phần tử nằm trên giao của k hàng $i_1, \ldots, i_k$ và k cột $j_1, \ldots, j_k$ của ma trận A gọi là một *ma trận con cấp k*, kí hiệu $A_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$ hay $A(i_1, \ldots, i_k; j_1, \ldots, j_k)$, định thức của ma trận này gọi là *định thức con cấp k*. Phần ma trận còn lại (cấp $n-k$) gọi là *ma trận con bù* của $A(i_1, \ldots, i_k; j_1, \ldots, j_k)$ và được kí hiệu là $\bar{A}(i_1, \ldots, i_k; j_1, \ldots, j_k)$, định thức của nó gọi là *định thức con bù* của $|A(i_1, \ldots, i_k; j_1, \ldots, j_k)|$ trong A, còn

$$(-1)^{s(I,J)}|\bar{A}(i_1, \ldots, i_k; j_1, \ldots, j_k)|$$

được gọi là *phần bù đại số* của $A(i_1, \ldots, i_k; j_1, \ldots, j_k)$, trong đó $s(I,J) = i_1 + \ldots + i_k + j_1 + \ldots + j_k$.

Định lí (Khai triển Laplace): Giả sử ta chọn k dòng (tương ứng cột) trong một định thức cấp n ($1 \leq k < n$). Khi đó định thức đã cho bằng tổng của các tích của định thức con cấp k lấy ra từ k dòng (tương ứng cột) với phần bù đại số của chúng

$$|A| = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n} A(i_1, \ldots, i_k; j_1, \ldots, j_k)(-1)^{s(I,J)}|\bar{A}(i_1, \ldots, i_k; j_1, \ldots, j_k)|$$

Hệ quả: Kí hiệu $c_{ij} = (-1)^{i+j}|\bar{A}(i,j)|$ là phần bù đại số của phần tử a_{ij}. Khi đó

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij}$$

Hệ quả: Cho M là ma trận khối chéo gồm các ma trận vuông $A_1, \ldots A_k$, khi đó

$$|M| = \begin{vmatrix} A_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & A_k \end{vmatrix} = |A_1| \ldots |A_k|$$

Công thức cũng đúng trong trường hợp các phần tử bên trên hay dưới đường chéo chính khác 0.

<u>Ví dụ 1</u>: Tính

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$$

<u>Giải</u>:

Khai triển Laplace theo hai dòng đầu, ta được

$$D = (-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\b & c & d\\b^2 & c^2 & d^2\end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\a & c & d\\a^2 & c^2 & d^2\end{vmatrix}$$
$$= (c-b)(d-b)(d-c) - 2(c-a)(d-a)(d-c)$$

<u>Ví dụ 2</u> ☆☆☆☆☆: Tính định thức cấp $2n$ có các phần tử trên đường chéo chính là a, các phần tử trên đường chéo phụ là b, các phần tử còn lại là 0.

<u>Giải</u>:

Khai triển Laplace theo cột đầu và cột cuối, ta được

$$D_{2n} = \begin{vmatrix}a & 0 & \dots & 0 & b\\0 & a & \dots & b & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\0 & b & \dots & a & 0\\b & 0 & \dots & 0 & a\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a & b\\b & a\end{vmatrix} D_{2n-2} = (a^2-b^2)D_{2n-2} = (a^2-b^2)^2 D_{2n-4} = \ldots = (a^2-b^2)^n$$

<u>Ví dụ 3</u> ☆☆☆☆☆: Tính

$$D_{2n} = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,2n-2} & a_{1,2n-1} & a_{1,2n}\\0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,2n-2} & a_{2,2n-1} & 0\\0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0\\0 & a_{2n-1,2} & a_{2n-1,3} & \cdots & a_{2n-1,2n-2} & a_{2n-1,2n-1} & 0\\a_{2n,1} & a_{2n,2} & a_{2n,3} & \cdots & a_{2n,2n-2} & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n}\end{vmatrix}$$

<u>Giải</u>:

Làm tương tự ví dụ trên

$$D_{2n} = \left(a_{11}a_{2n,2n} - a_{1,2n}a_{2n,1}\right)D_{2n-2} = \ldots = \prod_{i=1}^{n}\left(a_{ii}a_{2n-i+1,2n-i+1} - a_{i,2n-i+1}a_{2n-i+1,i}\right)$$

<u>Phương pháp 2</u>: Biến đổi sơ cấp - Gauss

Tính chất:

Trong một định thức:

1. Nếu đổi chỗ hai hàng thì định thức đổi dấu.
2. Nếu mỗi phần tử của một hàng có nhân tử chung thì có thể đưa nhân tử chung đó ra ngoài định thức.
3. Nếu cộng vào một hàng một bội của một hàng khác thì định thức không đổi.

Hệ quả:

1. Nếu định thức có một hàng 0 thì định thức bằng 0.
2. Nếu hai hàng tỉ lệ thì định thức bằng 0.
3. Nếu một hàng là một tổ hợp tuyến tính của các hàng khác thì định thức bằng 0.

4. Nếu thêm vào một hàng một tổ hợp tuyến tính của các hàng khác thì định thức không đổi.

(Tính chất và hệ quả trên vẫn đúng nếu ta thay *"hàng"* bởi *"cột"*).

Sử dụng các tính chất và hệ quả trên, ta có thể đưa định thức về dạng tam giác, khi đó định thức sẽ bằng tích các phần tử trên đường chéo chính. Phương pháp này gọi là phương pháp Gauss, nó giải quyết được khá nhiều bài Toán tính định thức.

Ví dụ ☆☆☆☆☆: Cho A là ma trận vuông cấp n có dạng $A = (a_{ij})$, trong đó $a_{ij} = \min\{i, j\}$. Tính $\det A$.

Giải:

Ta có $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}$

Nhân cột thứ nhất với $-i$ rồi cộng vào cột thứ i, ta được $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & \dots & -(n-1) \\ 1 & 0 & -1 & \dots & -(n-2) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -(n-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

Khai triển theo dòng thứ n, ta có $(-1)^{n+1}.(-1)^{n-1} = 1$

Ví dụ 1 ☆☆☆☆: Tính

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}$$

Giải:

Lần lượt nhân dòng i với -1 rồi cộng và dòng $i+1$ với $i = n-1, \dots, 1$, ta được

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}(-1)^n \dots (-1)^3 n = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3} n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n$$

Ví dụ ☆☆☆☆☆: Tính

$$D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

Giải:

Cộng mọi cột vào cột 1, ta được

$$\begin{vmatrix} 1+a_1+\ldots+a_n & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ 1+a_1+\ldots+a_n & 1+a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ 1+a_1+\ldots+a_n & a_2 & 1+a_3 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+a_1+\ldots+a_n & a_2 & a_3 & \ldots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

Lấy hàng 1 nhân -1 rồi cộng vào mọi hàng khác, ta được

$$\begin{vmatrix} 1+a_1+\ldots+a_n & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1+a_1+\ldots+a_n$$

Ví dụ (Câu I.2 đề chọn đội tuyển CĐ SP BR-VT 2012) ☆☆☆☆☆: Tính

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 5 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n+1 \end{vmatrix}$$

Giải:

Lấy dòng 1 nhân -1 rồi cộng vào mọi dòng khác, ta có

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -2 & 3 & 0 & \ldots & 0 \\ -2 & 0 & 4 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2 & 0 & 0 & \ldots & n \end{vmatrix}$$

Với $i = 2, \ldots, n-1$, ta nhân cột i với $\frac{2}{i+1}$ rồi cộng vào cột đầu tiên

$$D = \begin{vmatrix} 3+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{2}{n} & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{vmatrix} = \left(3+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{2}{n}\right)\frac{n!}{2} = n!\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$$

$$= n!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n}\right) = n!\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

Ví dụ 2 ☆☆☆☆: Tính

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \ldots & a_1 & a_1-b_1 & a_1 \\ a_2 & \ldots & a_2-b_2 & a_2 & a_2 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n-b_n & \ldots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$$

Giải:

Lấy cột cuối nhân -1 rồi lần lượt cộng vào tất cả các cột khác, ta có

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -b_1 & a_1 \\ 0 & \dots & -b_2 & 0 & a_2 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b_n & \dots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{n+2}(-b_n)(-1)^{n+1}(-b_{n-1})\dots(-1)^4(-b_2)(-1)^3(-b_1)$$

$$=(-1)^{\frac{(n+2)(n+3)}{2}-3}(-1)^n b_n\dots b_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}b_1\dots b_n$$

Ví dụ 3 ☆☆☆☆☆**:** Tính

$$D=\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a \end{vmatrix}$$

<u>Giải</u>:

Cộng các cột vào cột đầu rồi rút nhân tử chung $(a+a_1+\dots+a_n)$ ra ngoài

$$D=(a+a_1+\dots+a_n)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_2 & a & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \dots & a \end{vmatrix}$$

Lấy hàng đầu nhân -1 rồi lần lượt cộng vào các dòng khác rồi khai triển theo cột đầu, ta được

$$D=(a+a_1+\dots+a_n)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & a-a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2-a_1 & a-a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \dots & a-a_n \end{vmatrix}$$

$$=(a+a_1+\dots+a_n)(a-a_1)(a-a_2)\dots(a-a_n)$$

Ví dụ 4 ☆☆☆☆☆**:** Tính định thức Vandermonde

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

<u>Giải</u>:

Lần lượt nhân dòng i với $-x_1$ rồi cộng và dòng $i+1$ với $i=n-1,\dots,1$, ta được

$$D=D(x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & \dots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & \dots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)\dots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)\dots(x_n - x_1)D(x_2, \dots, x_n)$$

Cứ tiếp tục tương tự, ta được

$$D = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

Ví dụ 5 ⭐⭐⭐⭐: Tính định thức của ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp 2010 với

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}2010, & i \neq j \\ 2009, & i = j \end{cases}$$

Giải:

Ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 2009 & -2010 & 2010 & \dots & -2010 & 2010 \\ -2010 & 2009 & -2010 & \dots & 2010 & -2010 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 2010 & -2010 & 2010 & \dots & 2009 & -2010 \\ -2010 & 2010 & -2010 & \dots & -2010 & 2009 \end{vmatrix}$$

Cộng hàng thứ i vào hàng thứ $i-1$ với $i = 2, \dots, 2010$, ta được

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 \\ -2010 & 2010 & -2010 & \dots & -2010 & 2009 \end{vmatrix}$$

Lấy cột i nhân -1 rồi cộng vào cột $i+1$ với $i = 1, \dots, 2009$, ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ -2010 & 2.2010 & 3.(-2010) & \dots & 2009.(-2010) & 2009.2011 \end{vmatrix}$$

Vậy $|A| = -2009.2011$.

Ví dụ 5 ⭐⭐⭐⭐: Tính định thức của ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp n với

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|} & i \neq j \\ 2 & i = j \end{cases}$$

Giải:

Ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & +1 & \dots & \mp 1 & \pm 1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \pm 1 & \mp 1 \\ +1 & -1 & 2 & \dots & \mp 1 & \pm 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \dots & 2 & -1 \\ \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Cộng dòng 2 vào dòng 1, dòng 3 vào dòng 2,…, dòng n vào dòng $n-1$, ta được

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Nhân cột 1 với -1 rồi cộng vào cột 2, nhân cột 2 với -1 rồi cộng vào cột 3,… ta được

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \pm 1 & \mp 2 & \pm 3 & \dots & -n+1 & n+1 \end{vmatrix} = n+1$$

Ví dụ 6 (Câu 1 Olympic Quốc tế 1996 – Câu 1 Olympic Việt Nam 2008) ☆☆☆☆☆:

Cho $a_0, d \in \mathbb{R}$, đặt $a_j = a_0 + jd$ với $j = 1, \dots, n$. Tính $|A|$ biết A là ma trận cấp $n+1$ cho bởi

$$|A| = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}$$

Giải:

Cộng cột đầu vào cột cuối, ta được

$$|A| = (a_0 + a_n)\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & 1 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{n-3} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \end{vmatrix}$$

Lấy dòng i nhân -1 rồi cộng vào dòng $i+1$ với $i = n-1, \dots, 1$, ta được

$$|A| = (a_0 + a_n)\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ d & -d & -d & \dots & -d & 0 \\ d & d & -d & \dots & -d & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d & d & d & \dots & -d & 0 \\ d & d & d & \dots & d & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+2}(a_0 + a_n)\begin{vmatrix} d & -d & -d & \dots & -d & -d \\ d & d & -d & \dots & -d & -d \\ d & d & d & \dots & -d & -d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d & d & d & \dots & d & -d \\ d & d & d & \dots & d & d \end{vmatrix}$$

Cộng dòng cuối vào tất cả các dòng còn lại

$$|A| = (-1)^{n+2}(a_0 + a_n)\begin{vmatrix} 2d & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2d & 2d & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2d & 2d & 2d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2d & 2d & 2d & \dots & 2d & 0 \\ d & d & d & \dots & d & d \end{vmatrix} = (-1)^n 2^{n-1}(2a_0 + nd)d^n$$

<u>Phương pháp 3</u>: Sử dụng tính đa tuyến tính (Tách thành tổng các định thức)

Tính chất: Kí hiệu c_i (tương ứng h_i) là cột (tương ứng hàng) thứ i của ma trận A, khi đó

$$|A| = |c_1 \quad \dots \quad \lambda c_i \quad \dots \quad c_n| = \lambda |c_1 \quad \dots \quad c_i \quad \dots \quad c_n|\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$$

$$|A| = |c_1 \quad \dots \quad c_k + c'_k \quad \dots \quad c_n| = |c_1 \quad \dots \quad c_k \quad \dots \quad c_n| + |c_1 \quad \dots \quad c'_k \quad \dots \quad c_n|$$

Ví dụ 1 (Câu 1b Olympic 1993) ☆☆☆☆☆: Tính

$$D = \begin{vmatrix} 1 + a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & 1 + a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & 1 + a_n b_n \end{vmatrix}$$

<u>Giải</u>:

Ta viết mỗi phần tử không nằm trên đường chéo chính dưới dạng $0 + a_i b_i, i = 1, \dots, n$ để mỗi cột của định thức là tổng của hai loại cột sau: cột loại (1) là các cột của ma trận đơn vị I_n, cột loại (2) có dạng $b_j . [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]^T, j = 1, \dots, n$.

Sử dụng tính đa tuyến tính để tách D thành tổng các định thức có các cột là một trong hai loại trên, có 3 loại định thức sau

- Loại 1: chỉ gồm các cột loại (1), đó chính là $|I_n| = 1$ và chỉ có nó là định thức loại này.

- Loại 2: chỉ có đúng một cột loại (2), các cột còn lại loại 1, có n định thức loại này. Dễ thấy định thức có cột loại 2 ở vị trí cột j bằng $a_j b_j$. Do đó, tổng n định thức loại này là $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$.

- Loại 3: là loại có từ 2 cột loại 2 trở lên, do chúng tỉ lệ nên định thức loại này bằng 0.

Vậy $D = 1 + a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$.

Ví dụ 2 ☆☆☆☆☆: Tính

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + a_1 b_1 & 1 + a_1 b_2 & \dots & 1 + a_1 b_n \\ 1 + a_2 b_1 & 1 + a_2 b_2 & \dots & 1 + a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + a_n b_1 & 1 + a_n b_2 & \dots & 1 + a_n b_n \end{vmatrix}$$

<u>Giải</u>:

Thực hiện tương tự ví dụ trên, dễ dàng tính được $D_n = 0$.

Ví dụ 3* ☆☆☆☆: Tính

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & 1+a_n+b_n \end{vmatrix}$$

Giải:

Tách D thành tổng các định thức mà mỗi cột của chúng là một trong ba loại: cột loại (1) của ma trận đơn vị, cột loại (2) $[a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]^T$, cột loại (3) $[b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n]^T$. Có các định thức loại sau:

- Loại 1: chỉ gồm các cột loại (1), đó chính là $|I_n| = 1$ và chỉ có nó là định thức loại này.

- Loại 2: có từ 2 cột loại (2) hay (3) trở lên, chúng đều bằng 0.

- Loại 3: chỉ có một cột loại (2), còn lại là cột loại (1), có n định thức loại này, tổng của chúng là $a_1 + \ldots + a_n$.

- Loại 4: chỉ có một cột loại (3), còn lại là cột loại (1), có n định thức loại này, tổng của chúng là $b_1 + \ldots + b_n$.

- Loại 5: có đúng 1 cột loại (2), một cột loại (3), còn lại là cột loại (1). Đối với một cặp chỉ số $i > j$, ta có

+ Nếu cột loại (2) ở vị trí i, cột loại (3) ở vị trí j thì định thức bằng $a_i b_j - a_j b_j$.

+ Nếu cột loại (3) ở vị trí i, cột loại (2) ở vị trí j thì định thức bằng $b_i a_j - a_i b_i$.

Từ đó

$$D = 1 + \sum_{1 \le i \le n} (a_i + b_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$$

Ví dụ 4 (Câu 6 đề dự tuyển ĐH Khoa học Huế 2010): ⭐⭐⭐⭐⭐

1) Tìm mối liên hệ giữa hai định thức sau

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ và } D^*(x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & \dots & a_{1n}+x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

2) Chứng minh rằng tổng các phần bù đại số của các phần tử trong một định thức không đổi, nếu ta cộng thêm vào tất cả các phần tử cùng một số.

Giải:

1) Ta tách $D^*(x)$ thành tổng của các định thức: định thức nào chứa hai cột toàn x trở lên bằng 0, chỉ có một định thức không chứa x, chính là D. Ngoài ra, còn có n định thức mới có đúng một cột toàn x, các cột còn lại tương ứng là các cột của D. Khai triển theo cột toàn x đó, ta được:

$$D^*(x) = D + x \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$$

trong đó, A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij}.

2) Kí hiệu S_A, S_B là tổng các phần bù đại số của các phần tử trong ma trận $A = (a_{ij})$ và $B = (a_{ij} + c) = (b_{ij})$. Theo trên, ta được:

$$\det A = \det(b_{ij} - c) = \det B - cS_B = \det(a_{ij} + c) - cS_B = \det A + cS_A - cS_B$$

Suy ra $S_A = S_B$.

Ví dụ (Câu I.2 đề chọn đội tuyển CĐ SP BR-VT 2012) ⭐⭐⭐⭐**:** Tính

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 5 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n+1 \end{vmatrix}$$

Giải:

Kí hiệu

$$D^* = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$$

và $D^*(x)$ là định thức mà các phần tử của nó tương ứng là các phần tử của D^* được cộng thêm một số x, S_{D^*} là tổng tất cả các phần bù đại số ứng với mọi phần tử của D^*. Theo trên, ta có

$$D = D^*(1) = D^* + S_{D^*} = n! + \left(\frac{n!}{2} + \dots + \frac{n!}{n}\right) = n!\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

Ví dụ 5 ⭐⭐⭐⭐⭐**:** Tính

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x \\ x & a_2 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}, \qquad x \notin \{0, a_1, \dots, a_n\}$$

Giải:

Kí hiệu

$$D_n^* = \begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 - x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{vmatrix}$$

và $D_n^*(c)$ là định thức mà các phần tử của nó tương ứng là các phần tử của D_n^* được cộng thêm một số c, $S_{D_n^*}$ là tổng tất cả các phần bù đại số ứng với mọi phần tử của D_n^*. Theo trên, ta có

$$D_n = D_n^*(x) + xS_{D_n^*} = (a_1 - x)\dots(a_n - x) + x\sum_{i=1}^{n}(a_1 - x)\dots(a_{i-1} - x)(a_{i+1} - x)\dots(a_n - x)$$

$$= x(a_1 - x)\dots(a_n - x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \dots + \frac{1}{a_n - x}\right)$$

Ví dụ 6 ⭐⭐⭐⭐⭐**:** Tính

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ y & a_2 & x & \dots & x \\ y & y & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & y & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} x & x & x & x & a_1 \\ x & x & x & a_2 & y \\ x & x & a_3 & y & y \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & y & y & y & y \end{vmatrix}$$

Giải:

Gọi S_D là tổng tất cả các phần bù đại số ứng với mọi phần tử của D và $D^*(c)$ là định thức mà mọi phần tử của nó tương ứng là phần tử của D được cộng thêm một số c. Khi đó, ta có

$$\begin{cases} D - xS_D = D^*(-x) = (a_1 - x)\dots(a_n - x) \\ D - yS_D = D^*(-y) = (a_1 - y)\dots(a_n - y) \end{cases} => \begin{cases} yD - xyS_D = y(a_1 - x)\dots(a_n - x) \\ xD - xyS_D = x(a_1 - y)\dots(a_n - y) \end{cases}$$

Suy ra

$$D = \frac{x(a_1 - y)\dots(a_n - y) - y(a_1 - x)\dots(a_n - x)}{x - y}$$

Ví dụ 7* (Tổng quát câu 6a Olympic 2011) ☆☆☆☆☆: Tính

$$D = \begin{vmatrix} x_1 + 1 & x_2 + 1 & \dots & x_n + 1 \\ x_1^2 + 1 & x_2^2 + +1 & \dots & x_n^2 + 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n + 1 & x_2^n + 1 & \dots & x_n^n + 1 \end{vmatrix}$$

Giải:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 + 1 & x_2 + 1 & \dots & x_n + 1 \\ x_1^2 + 1 & x_2^2 + +1 & \dots & x_n^2 + 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n + 1 & x_2^n + 1 & \dots & x_n^n + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 + 1 & x_2 + 1 & \dots & x_n + 1 \\ 1 & x_1^2 + 1 & x_2^2 + 1 & \dots & x_n^2 + 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^n + 1 & x_2^n + 1 & \dots & x_n^n + 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0+1 & -1+1 & -1+1 & \dots & -1+1 \\ 0+1 & x_1 + 1 & x_2 + 1 & \dots & x_n + 1 \\ 0+1 & x_1^2 + 1 & x_2^2 + 1 & \dots & x_n^2 + 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0+1 & x_1^n + 1 & x_2^n + 1 & \dots & x_n^n + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= 2\prod_{i=1}^{n} x_i \prod_{1\le j<i\le n} (x_i - x_j) + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & x_1 - 1 & x_2 - 1 & \dots & x_n - 1 \\ 0 & x_1^2 - 1 & x_2^2 - 1 & \dots & x_n^2 - 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1^n - 1 & x_2^n - 1 & \dots & x_n^n - 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\prod_{i=1}^{n} x_i \prod_{1\le j<i\le n}\left(x_i - x_j\right) - \prod_{i=1}^{n}(x_i - 1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 + 1 & x_2 + 1 & \dots & x_n + 1 \\ x_1^2 + x_1 + 1 & x_2^2 + x_2 + 1 & \dots & x_n^2 + x + n + 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} + \dots + x_1 + 1 & x_2^{n-1} + \dots + x_2 + 1 & \dots & x_n^{n-1} + \dots + x_n + 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\prod_{i=1}^{n} x_i \prod_{1\le j<i\le n}\left(x_i - x_j\right) - \prod_{i=1}^{n}(x_i - 1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \left[2\prod_{i=1}^{n} x_i - \prod_{i=1}^{n}(x_i - 1)\right]\prod_{1\le j<i\le n}\left(x_i - x_j\right)$$

<u>Phương pháp 4</u>: Tách thành tích các định thức

Ví dụ 1 **:** Tính

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ a_3 + b_1 & a_3 + b_2 & \dots & a_3 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ a_3 + b_1 & a_3 + b_2 & \dots & a_3 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\right|$$

Từ đó, ta có kết luận

$$D = \begin{cases} a_1 + b_1 & \text{nếu } n = 1 \\ (a_1 - a_2)(b_2 - b_1) & \text{nếu } n = 2 \\ 0 & \text{nếu } n > 2 \end{cases}$$

Ví dụ 2 **:** Tính

$$D = \begin{vmatrix} \cos(x_1 - y_1) & \cos(x_1 - y_2) & \dots & \cos(x_1 - y_n) \\ \cos(x_2 - y_1) & \cos(x_2 - y_2) & \dots & \cos(x_2 - y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(x_n - y_1) & \cos(x_n - y_2) & \dots & \cos(x_n - y_n) \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} \cos(x_1 - y_1) & \cos(x_1 - y_2) & \dots & \cos(x_1 - y_n) \\ \cos(x_2 - y_1) & \cos(x_2 - y_2) & \dots & \cos(x_2 - y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(x_n - y_1) & \cos(x_n - y_2) & \dots & \cos(x_n - y_n) \end{vmatrix}$$

$$= \left|\begin{pmatrix} \cos x_1 & \sin x_1 & 0 & \dots & 0 \\ \cos x_2 & \sin x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cos x_3 & \sin x_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos x_n & \sin x_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos y_1 & \cos y_2 & \cos y_3 & \dots & \cos y_n \\ \sin y_1 & \sin y_2 & \sin y_3 & \dots & \sin y_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\right|$$

Từ đó, ta có kết luận

$$D=\begin{cases}\cos(x_1-y_1) & \text{nếu } n=1\\ \sin(x_1-x_2)\sin(y_1-y_2) & \text{nếu } n=2\\ 0 & \text{nếu } n>2\end{cases}$$

Ví dụ ☆☆☆☆☆: Cho A là ma trận vuông cấp n có dạng $A=(a_{ij})$, trong đó $a_{ij}=\min\{i,j\}$. Tính $\det A$.

Giải:

Ta có

$$\det A=\begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1\\1&2&2&\dots&2\\1&2&3&\dots&3\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&2&3&\dots&n\end{vmatrix}=\left|\begin{pmatrix}1&0&0&\dots&0\\1&1&0&\dots&0\\1&1&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\dots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&\dots&1\\0&1&1&\dots&1\\0&0&1&\dots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&1\end{pmatrix}\right|=1$$

Ví dụ 3 (Câu 2 đề dự tuyển <Không rõ 1> 2009) ☆☆☆☆☆:

Cho 2009 đa thức $f_j(x)=a_{0,j}+a_{1,j}x+\ldots+a_{2007,j}x^{2007}$ với $j\in\{1,2,\dots,2009\}$ và ma trận vuông cấp 2009 như sau

$$A=\begin{pmatrix}f_1(1)&f_1(2)&\dots&f_1(2009)\\f_2(1)&f_2(2)&\dots&f_2(2009)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\f_{2009}(1)&f_{2009}(2)&\dots&f_{2009}(2009)\end{pmatrix}$$

Tính $\det A$.

Giải:

Cách 1:

Ta tách ma trận A thành tích 2 ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix}a_{0,1}&a_{1,1}&a_{2,1}&\dots&a_{2007,1}&0\\a_{0,2}&a_{1,2}&a_{2,2}&\dots&a_{2007,2}&0\\a_{0,3}&a_{1,3}&a_{2,3}&\dots&a_{2007,3}&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\a_{0,2008}&a_{1,2008}&a_{2,2008}&\dots&a_{2007,2008}&0\\a_{0,2009}&a_{1,2009}&a_{2,2009}&\dots&a_{2007,2009}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&\dots&1&1\\1&2&3&\dots&2008&2009\\1&2^2&3^2&\dots&2008^2&2009^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&2^{2007}&3^{2007}&\dots&2008^{2007}&2009^{2007}\\0&0&0&\dots&0&0\end{pmatrix}$$

Suy ra $\det A=0$.

Cách 2:

Xét không gian vector $\mathbb{R}_{2007}[x]$ gồm các đa thức với hệ số thực và có bậc không quá 2007. Ta có $\dim\mathbb{R}_{2007}[x]=2008$. Do đó các vector $f_1(x),f_2(x),\dots,f_{2009}(x)$ là phụ thuộc tuyến tính, tức là tồn tại các số thực $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{2009}$ không đồng thời bằng không sao cho

$$\lambda_1f_1(x)+\lambda_2f_2(x)+\ldots+\lambda_{2009}f_{2009}(x)=0$$

từ đó suy ra $\det A=0$.

***Phương pháp 5*: Truy hồi**

Giả sử ta đang tính định thức cấp $n \geq 2$ là D_n, sau các phép biến đổi sơ cấp và khai triển, ta nhận được dãy truy hồi tuyến tính cấp 2:

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$$

Nếu $q = 0$ thì $D_n = p^{n-1}D_1$ (dễ thấy)

Nếu $q \neq 0$ thì D_n có dạng $D_n = ax_1^n + bx_2^n$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px - q = 0$.

*Nếu $x_1 \neq x_2$ thì

$$D_n = \frac{D_2 - x_2D_1}{x_1(x_1 - x_2)}x_1^n - \frac{D_2 - x_1D_1}{x_2(x_1 - x_2)}x_2^n$$

Chứng minh

x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2 - px - q = 0$, áp dụng định lí Viete, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = p \\ x_1\, x_2 = -q \end{cases}$$

nên $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2} = (x_1 + x_2)D_{n-1} - x_1x_2D_{n-2}$, ta được

$$\begin{cases} D_n - x_2D_{n-1} = x_1(D_{n-1} - x_2D_{n-2}) = \ldots = x_1^{n-2}(D_2 - x_2D_1) \\ D_n - x_1D_{n-1} = x_2(D_{n-1} - x_1D_{n-2}) = \ldots = x_2^{n-2}(D_2 - x_1D_1) \end{cases}$$

Nhân x_1 vào hai vế đẳng thức đầu, nhân x_2 vào hai vế đẳng thức sau, rồi trừ theo vế, ta được đẳng thức cần chứng minh.

Nhận xét: trong trường hợp này, công thức tính D_n khá phức tạp, khó nhớ, vì thế trong thực hành, ta nên lặp lại các bước như trong phần chứng minh.

Một cách khác, nếu D_n có dạng $D_n = ax_1^n + bx_2^n$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px - q = 0$ thì ta có thể coi $D_0 = 1$ để công thức truy hồi đúng với $n \geq 2$, khi đó a, b được xác định bởi hệ:

$$\begin{cases} D_0 = 1 = ax_1^0 + bx_2^0 = a + b \\ D_1 = ax_1^1 + bx_2^1 = ax_1 + bx_2 \end{cases}$$

*Nếu $x_1 = x_2$ thì

$$D_n = (n-1)x_1^{n-2}D_2 - (n-2)x_1^{n-1}D_1$$

Chứng minh

Nếu $x_1 = x_2$ thì từ trên, ta có $D_n - x_1D_{n-1} = x_1(D_{n-1} - x_1D_{n-2}) = \ldots = x_1^{n-2}(D_2 - x_1D_1)$

Đặt $A = D_2 - x_1D_1$ và thay n bởi $n-1$ trong đẳng thức trên, ta được

$$D_n = x_1D_{n-1} + x_1^{n-2}A \ (1)$$

$$D_{n-1} = x_1D_{n-2} + x_1^{n-3}A \ (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $D_n = x_1^2D_{n-2} + 2x_1^{n-2}A$.

Tiếp tục quá trình này, cuối cùng ta có

$$D_n = x_1^{n-1}D_1 + (n-1)x_1^{n-2}A = x_1^{n-1}D_1 + (n-1)x_1^{n-2}(D_2 - x_1D_1)$$
$$= (n-1)x_1^{n-2}D_2 - (n-2)x_1^{n-1}D_1$$

Ví dụ 1 ☆☆☆☆: Tính

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

<u>Giải</u>:

<u>Cách 1</u>:

Khai triển theo dòng đầu, ta được: $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$.

Ta có $D_1 = 1, D_2 = 2$. (D_n chính là số Fibonacci thứ n)

Phương trình $x^2 - x - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Áp dụng chứng minh hoặc công thức, tính toán, ta được:

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

<u>Cách 2</u>:

Vì phương trình $x^2 - x - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trên nên $D_n = ax_1^n + bx_2^n$

Coi $D_0 = 1$ để công thức truy hồi đúng với $n \geq 2$, khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} D_0 = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 1 \\ D_1 = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \end{cases}$$

Giải hệ tìm a, b, ta được kết quả trên.

Ví dụ 2 ☆☆☆☆☆: Tính

$$a)\ D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \dots & 0 \\ 0 & c & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix} \qquad b)\ D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \dots & 0 \\ a & a+b & b & \dots & 0 \\ 0 & a & a+b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b \end{vmatrix}$$

$$c)\ D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b \end{vmatrix} \qquad d)\ D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\varphi & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\varphi & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\varphi & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos\varphi \end{vmatrix}$$

e) Chứng minh rằng

$$D=\begin{vmatrix}\cos\varphi & 1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 2\cos\varphi & 1 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\varphi & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos\varphi\end{vmatrix}=\cos(n\alpha)$$

Giải:

a) Khai triển theo cột đầu, ta được

$$D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}$$

*Nếu phương trình $x^2-ax+bc=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2

Coi $D_0=1$ để công thức này đúng $\forall n\geq 2$. Khi đó tồn tại hai số α,β sao cho $D_n=\alpha x_1^n+\beta x_2^n$.

Từ $D_0=\alpha x_1^0+\beta x_2^0=1, D_1=\alpha x_1^1+\beta x_2^1=a$, ta có

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{x_1}{x_1-x_2}\\ \beta=\dfrac{x_2}{x_2-x_1}\end{cases}$$

Do đó

$$D_n=\frac{1}{x_1-x_2}(x_1^{n+1}-x_2^{n+1})=\sum_{k=1}^{n}x_1^kx_2^{n-k}$$

Tìm x_1,x_2 rồi thay vào (nghiệm xấu).

* Nếu phương trình $x^2-ax+bc=0$ có nghiệm kép

Áp dụng chứng minh hay công thức $D_n=(n-1)x_1^{n-2}D_2-(n-2)x_1^{n-1}D_1$

b) * Nếu $a\neq b$

Cách 1: Dùng lí luận trên

Cách 2: Áp dụng công thức

Ta có $D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$

$D_1=a+b, D_2=(a+b)^2-ab=a^2+b^2+ab$

Phương trình $x^2-(a+b)+ab=0$ có 2 nghiệm phân biệt a,b

Áp dụng công thức, tính toán, ta được:

$$D_n=\frac{1}{a-b}(a^{n+1}-b^{n+1})$$

Cách 3: Áp dụng chứng minh

$$\begin{cases}D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})=\ldots=b^{n-2}(D_2-aD_1)=b^n\\ D_n-bD_{n-1}=a(D_{n-1}-bD_{n-2})=\ldots=a^{n-2}(D_2-bD_1)=a^n\end{cases}\Rightarrow D_n=\frac{1}{a-b}(a^{n+1}-b^{n+1})$$

(Chú ý: công thức tính D_n đúng với mọi $n\in\mathbb{N}$)

*Nếu $a=b$

Theo trên, ta có $D_n - aD_{n-1} = a^{n-2}(D_2 - aD_1)$ hay $D_n = aD_{n-1} + a^{n-2}(D_2 - aD_1)$

Suy ra $D_{n-1} = aD_{n-2} + a^{n-3}(D_2 - aD_1)$

Thay ngược lại $D_n = a[aD_{n-2} + a^{n-3}(D_2 - aD_1)] + a^{n-2}(D_2 - aD_1) = a^2D_{n-2} + 2a^{n-2}(D_2 - aD_1)$

Lặp lại quá trình trên, cuối cùng ta được

$$\begin{aligned} D_n &= a^{n-1}D_1 + (n-1)a^{n-2}(D_2 - aD_1) = (n-1)a^{n-2}D_2 - (n-2)a^{n-1}D_1 \\ &= (n-1)a^{n-2}\begin{vmatrix} a+b & b \\ a & a+b \end{vmatrix} - (n-2)a^{n-1}(a+b) \\ &= (n-1)a^{n-2}(a^2 + b^2 + ab) - (n-2)a^{n-1}(a+b) \\ &= a^n + a^{n-1}b + (n-1)a^{n-2}b^2 \end{aligned}$$

c) $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$, chính là định thức câu b.

d) Đặt $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\bar{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ thì $z + \bar{z} = 2\cos\varphi$, $z\bar{z} = 1$, theo trên, ta có

$$D_n = \frac{1}{z - \bar{z}}(z^{n+1} - \bar{z}^{n+1}) = \frac{2i\sin[(n+1)\varphi]}{2i\sin\varphi} = \frac{\sin[(n+1)\varphi]}{\sin\varphi}$$

e) Ta có $D = \cos\varphi\, D_{n-1} - D_{n-2}$, với D_n được xác định từ câu d, ta được

$$D = \frac{\cos\varphi\sin(n\varphi) - \sin[(n-1)\varphi]}{\sin\varphi} = \frac{\frac{1}{2}\left[[\sin[(n+1)\varphi] + \sin[(n-1)\varphi]] - \sin[(n-1)\varphi]\right]}{\sin\varphi}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}[\sin[(n+1)\varphi] - \sin[(n-1)\varphi]]}{\sin\varphi} = \frac{\frac{1}{2}.2.\frac{\cos 2n\varphi}{2}.\sin\frac{2\varphi}{2}}{\sin\varphi} = \cos(n\varphi)$$

Ví dụ 3 ☆☆☆☆☆: Tính

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & b_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_n \end{vmatrix}$$

Giải:

Sử dụng tính đa tuyến tính, tách định thức theo cột đầu rồi khai triển

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & b_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_n \end{vmatrix} - b_1D_{n-1}$$

Lấy hàng 1 cộng vào hàng 2, lấy hàng 2 mới cộng vào hàng 3,…, lấy hàng $n-1$ mới cộng vào hàng n, ta được

$$D_n = 1 - b_1 D_{n-1} = 1 - b_1\,(1 - b_2 D_{n-2}) = \ldots = 1 - b_1 + b_1 b_2 - b_1 b_2 b_3 + \ldots + (-1)^n b_1 b_2 \ldots b_n$$

Ví dụ 4* ⭐⭐⭐⭐⭐**:** Tính

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & x & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x \end{vmatrix}$$

<u>Giải</u>:

Lấy $n - i$ dòng sau cộng vào dòng i với $i = 1, \ldots, n-1$

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x+n-1 & x+n-1 & x+n-1 & x+n-1 & \ldots & x+n-1 & x+n-1 \\ n-1 & x+n-2 & x+n-1 & x+n-1 & \ldots & x+n-1 & x+n-1 \\ 0 & n-2 & x+n-3 & x+n-1 & \ldots & x+n-1 & x+n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & x+1 & x+n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x \end{vmatrix}$$

Lấy cột i nhân -1 rồi cộng vào cột $i+1$ với $i = n-1, \ldots, 1$

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x+n-1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ n-1 & x-1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x-1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & x-1 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+n-1)D_{n-1}(x-1) = (x+n-1)(x-1+n-2)D_{n-2}(x-2) = \ldots = \sum_{i=0}^{n-1}(x+n-1-2i)$$

Ví dụ 5* ⭐⭐⭐⭐⭐**:** Tính

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_n \\ a_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & 0 & b_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \ldots & b_n \end{vmatrix}$$

<u>Giải</u>:

Khai triển theo hàng cuối, ta được

$$D_n = b_n D_{n-1} + (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} & -a_n \\ b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= b_n D_{n-1} + (-1)^{n+1} a_n (-1)^n (-a_n) b_1 b_2 \ldots b_{n-1} = b_n D_{n-1} + b_1 b_2 \ldots b_{n-1} a_n^2$$

Vì vậy ta có

$D_n \quad = b_n D_{n-1} \quad + b_1 b_2 \ldots b_{n-1} a_n^2$

$D_{n-1} = b_{n-1}D_{n-2} + b_1b_2 \dots b_{n-2}a_{n-1}^2$ (nhân hai vế cho b_n)

$D_{n-2} = b_{n-2}D_{n-3} + b_1b_2 \dots b_{n-3}a_{n-2}^2$ (nhân hai vế cho $b_{n-1}b_n$)

....

$D_2 \quad = b_2D_1 \qquad + b_1a_2^2$ (nhân hai vế cho $b_3 \dots b_n$)

$D_1 \quad = b_1 \qquad + a_1^2$ (nhân hai vế cho $b_2 \dots b_n$)

Cộng theo vế các đẳng thức sau khi nhân theo vế một lượng đã chỉ ra, ta được

$$D_n = b_1b_2 \dots b_n + \sum_{i=1}^{n} a_n^2(b_1 \dots b_{i-1}b_{i+1} \dots b_n)$$

Ví dụ 7 ⭐⭐⭐⭐⭐**:** Tính

$$D_n = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & z & 0 & \dots & 0 \\ y & 0 & z & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}$$

Giải:

Đây là trường hợp đặc biệt của ví dụ trên. Khai triển tương tự, ta có

$$D_n = zD_{n-1} + (-1)^{n+1}y(-1)^n xz^{n-2} = zD_{n-1} - xyz^{n-2} => D_{n-1} = zD_{n-2} - xyz^{n-3}$$
$$=> D_n = zD_{n-1} - xyz^{n-2} = z^2D_{n-2} - 2xyz^{n-2} = \dots = z^{n-1}D_1 - (n-1)xyz^{n-2}$$
$$= z^{n-1}a - (n-1)xyz^{n-2}$$

***Phương pháp 6**: Rút nhân tử tuyến tính*

Nếu mỗi phần tử của ma trận vuông A cấp n là một đa thức bậc nhất theo biến x nào đó thì $|A|$ là một đa thức bậc không quá n với biến đó. Do vậy, nếu ta tìm được n đa thức bậc nhất $f_1(x), \dots, f_n(x)$ độc lập tuyến tính sao cho mỗi $f_i(x)$ là một ước của $|A|$ thì ta kết luận $|A|$ là tích $f_1(x) \dots f_n(x)$ sai khác nhau một nhân tử hằng số.

Ví dụ 1 ⭐⭐⭐⭐⭐**:** Tính

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$$

Giải:

Đối với bài này, ta có thể đưa định thức về dạng bậc thang một cách đơn giản bằng các phép biến đổi sơ cấp (lần lượt nhân cột đầu cho $-2, \dots, -n$ rồi cộng vào cột $2, \dots, n$).

Tuy nhiên, dễ thấy định thức là một đa thức biến x bậc tối đa là $n-1$, đó chính là luỹ thừa của x trong tích các phần tử trên đường chéo chính (ứng với phép thế đồng nhất) và hệ số của x^{n-1} là 1. Mặt khác, nếu ta lần lượt cho $x = 1, \dots, n$ thì định thức bằng 0 do có 2 hàng tỉ lệ. Do đó $D(x)$ chia hết cho $n-1$ đa thức bậc nhất và độc lập tuyến tính $x-1, \dots, x-n+1$.

Vậy $D(x) = (x-1)\dots(x-n+1)$.

Ví dụ 2 ☆☆☆☆: Tính

$$D = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

<u>Giải</u>:

Cộng tất cả các cột vào cột đầu, ta thấy $D \vdots (x+y+z)$.

Nhân cột 2 cho -1, cột 3 cho -1, cột 4 cho 1 rồi cộng vào cột đầu, ta được $D \vdots (x+y-z)$

Nhân cột 2 cho -1, cột 3 cho 1, cột 4 cho -1 rồi cộng vào cột đầu, ta được $D \vdots (x-y+z)$

Nhân cột 2 cho 1, cột 3 cho -1, cột 4 cho -1 rồi cộng vào cột đầu, ta được $D \vdots (-x+y+z)$

Từ đây, ta kết luận định thức sai khác tích của 4 biểu thức trên là một hằng số. Mặt khác, hệ số của z^4 trong khai triển là 1, trong khi của tích 4 biểu thức là -1.

Vậy $D = -(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)$.

Ví dụ 3 ☆☆☆☆: Tính

$$D = \begin{vmatrix} -x & 4 & 20 & 10 \\ 4 & -x & 10 & 20 \\ 20 & 10 & -x & 4 \\ 10 & 20 & 4 & -x \end{vmatrix}$$

<u>Giải</u>:

Làm tương tự trên, 34, 26, 6, 14 là nghiệm của D, hệ số của x^4 trong khai triển là 1 nên

$$D = (x-34)(x-26)(x-6)(x-14)$$

<u>Phương pháp 7</u>: Quy nạp

Cách làm của phương pháp này là ban đầu tính định thức cấp thấp (2, 3) sau đó dự đoán rồi chứng minh công thức bằng quy nạp, điều quan trọng ở đây là biết phán đoán chính xác.

Ví dụ (Tổng quát câu 3 đề chọn đội tuyển ĐH Kinh tế Quốc dân 2012) ☆☆☆☆☆**:**

Tính định thức

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}$$

Ta có

$$D_1 = |1| = 1 = \frac{1.2}{2}x^0 \ ; \ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -x & x \end{vmatrix} = 3x = \frac{2.3}{2}x \ ; \ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -x & x & 0 \\ 0 & -x & x \end{vmatrix} = 6x^2 = \frac{3.4}{2}x^2$$

Dự đoán

$$D_k = \frac{k(k+1)}{2}x^{k-1} \ \forall k \geq 1$$

Ta chứng minh công thức cũng đúng với $k+1$, thật vậy, khai triển định thức D_{k+1} theo cột cuối, ta có

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k-1 & k & k+1 \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x & x \end{vmatrix} = xD_k + (-1)^{k+2}(k+1)(-x)^k$$

$$= \frac{k(k+1)}{2}x^k + (k+1)x^k = \left(\frac{k}{2}+1\right)(k+1)x^k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}x^k$$

Vậy $D_n = \dfrac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$.

Trên đây là một số phương pháp tính định thức, trong một số trường hợp, ta có thể sử dụng một hay nhiều phương pháp tính đối với một định thức.

Ví dụ (Câu 3 đề chọn đội tuyển ĐH Kinh tế Quốc dân 2005) ⭐⭐⭐⭐: Tính định thức cấp n sau

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ x & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ x & x & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ x & x & x & 1 & \dots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & x & \dots & 2 & 3 \\ x & x & x & x & \dots & 1 & 2 \\ x & x & x & x & \dots & x & 1 \end{vmatrix}$$

Giải: (Sử dụng tính đa tuyến tính và biến đổi sơ cấp Gauss)

Nhân cột i với -1 rồi cộng vào cột $i+1, i = n-1, .., 1$, ta được

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x & 1-x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x & 0 & 1-x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x & 0 & 0 & 1-x & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ x & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-x & 1 \\ x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

Sử dụng tính đa tuyến tính, ta tách định thức theo cột đầu như sau

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x & 1-x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x & 0 & 1-x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x & 0 & 0 & 1-x & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ x & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-x & 1 \\ x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

Định thức đầu bằng $(1-x)^n$ và ở định thức sau, ta đưa x ở cột đầu ra ngoài

$$(1-x)^n + x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1-x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1-x & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

Ở định thức sau, nhân hàng i với -1 rồi cộng vào hàng $i+1, i = n-1, \dots, 1$, sau đó khai triển nó theo cột đầu, ta được

$$(1-x)^n + x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & -x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & -x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x-1 & -x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)^n + x(-x)^{n-1} = (-1)^n(x-1)^n + (-1)^{n-1}x^n = (-1)^n[(x-1)^n - x^n]$$

Ví dụ 5 (Câu 1b Olympic 1993): Tính

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_2b_2 & \dots & a_nb_n \\ a_1b_1 & 1+a_2b_2 & \dots & a_nb_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_1 & a_2b_2 & \dots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}$$

Giải: (Sử dụng tính đa tuyến tính và truy hồi)

Dùng tính chất đa tuyến tính, tách định thức theo cột cuối, ta có

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_2b_2 & \dots & 0 \\ a_1b_1 & 1+a_2b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_1 & a_2b_2 & \dots & 1 \end{vmatrix} + b_n\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_2b_2 & \dots & a_1 \\ a_1b_1 & 1+a_2b_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_1 & a_2b_2 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Ở định thức sau, nhân cột cuối cho $-b_j$ rồi cộng vào cột j với $j = 1, \dots, n-1$ thì ta được

$$D_n = D_{n-1} + a_nb_n = D_{n-2} + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n = \dots = D_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = 1 + a_1b_1 + \dots + a_nb_n.$$

II. SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA ĐỊNH THỨC GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Định nghĩa *phép thế*: Một *hoán vị* (hay *phép thế*) của tập $X = \{1, \dots, n\}$ là một song ánh từ tập này vào chính nó. Tập tất cả các hoán vị của X kí hiệu là S_n.

Như vậy, một hoán vị của X chính là một cách sắp xếp có thứ tự của $\{1, \dots, n\}$. Thông thường ta kí hiệu một hoán vị $\pi \in S_n$ như sau

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Nếu ta xem tích của 2 phép thế $\sigma, \pi \in S_n$ là hợp thành của 2 ánh xạ σ, π thì khi đó S_n là một nhóm (phép Toán kết hợp, có phần tử đơn vị là phép thế đồng nhất, phần tử nghịch đảo của π là ánh xạ ngược π^{-1}).

Cho $1 \le i < j \le n$. Phép thế

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Đổi chỗ 2 phần tử $i < j$ cho nhau đồng thời giữ nguyên các phần tử còn lại được gọi là một *chyển vị* (hay *chuyển trí* hay *phép thế sơ cấp*). Kí hiệu là (i, j).

Cho $a_1, \dots, a_k$ là các phần tử khác nhau của $\{1, \dots, n\}$. Hoán vị π giữ nguyên các phần tử khác $a_1, \dots, a_k$ và thoả mãn $\pi(a_1) = a_2, \pi(a_2) = a_3, \dots, \pi(a_n) = a_1$ được gọi là một *xích độ dài* k, kí hiệu $(a_1, \dots, a_k)$. Rõ ràng ta có

$$(a_1, \dots, a_k) = (a_1, \dots, a_{k-1}) \circ (a_{k-1}, a_k)$$

Do đó:

Tính chất: Một hoán vị của $a_1, \dots, a_n$ đều là tích các chuyển vị (của tập hợp này).

Định nghĩa *nghịch thế*: Ta gọi cặp $\{i, j\} \subseteq \{1, .., n\}$ là một *nghịch thế* của hoán vị π nếu $i - j$ trái dấu với $\pi(i) - \pi(j)$. Một hoán vị với số các nghịch thế là số chẵn (lẻ) được gọi là một *hoán vị chẵn (lẻ)*. Dấu của π, kí hiệu $\mathrm{sign}(\pi)$, nhận giá trị 1 (-1) nếu π là hoán vị chẵn (lẻ). Như vậy, nếu gọi $N(\pi)$ là số các nghịch thế của π thì $\mathrm{sign}(\pi) = (-1)^{N(\pi)}$.

Ví dụ:

1. Số các nghịch thế của chuyển vị $(i-1, i)$ chỉ có 1, đó là $\{(i, i-1)\}$.

2. Số các chuyển vị $(1,3)$ là 3: $\{3,1\}, \{3,2\}, \{2,1\}$.

3. Tổng quát, số các nghịch thé của chuyển vị (i, j) là $2(j-i) - 1$.

Bổ đề (*Dấu của phép thế*):

$$\forall \pi \in S_n:\ \ \mathrm{sign}(\pi) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}$$

Định lí: $\forall\ \sigma, \pi \in S_n$: $\mathrm{sign}(\sigma\pi) = \mathrm{sign}(\sigma)\mathrm{sign}(\pi)$

Hệ quả: $\forall\ \pi \in S_n$: $\mathrm{sign}(\pi) = \mathrm{sign}(\pi^{-1})$

Định nghĩa: *Định thức* của ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp n, kí hiệu $\det A$ hoặc $|A|$, là tổng

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{sign}(\pi_i) a_{1\pi_i(1)} \dots a_{n\pi_i(n)} \text{ trong đó } \pi_i \in S_n \text{ với } i = 1, \dots, n$$

Như vậy, định thức của ma trận $A = (a_{ij})$ là tổng của $|S_n| = n!$ số hạng, mỗi số hạng là tích của n phần tử của A nằm trên các hàng khác nhau và trên các cột khác nhau ứng với dấu của phép thế các chỉ số của phần tử này (trong mỗi tích không có hai thành phần nào cùng dòng hoặc cùng cột). Tuy nhiên, việc tính định thức theo định nghĩa là quá phức tạp vì khi n lớn thì $n!$ số hạng của $|A|$ là rất lớn, chưa kể đến việc phải đi tìm dấu của phép thế tương ứng. Trên thực tế, người ta chỉ áp dụng định nghĩa định thức để chứng minh các tính chất của định thức hay khi A có dạng đặc biệt.

Ví dụ: Sử dụng định nghĩa định thức, chứng minh rằng nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ thì $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Ta có $S_n = \{\pi_1, \pi_2\}$, trong đó

$$\pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \pi_1(1) & \pi_1(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \pi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \pi_2(1) & \pi_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{sign}(\pi_1) = \frac{\pi_1(1) - \pi_1(2)}{1 - 2} = 1\,, \operatorname{sign}(\pi_2) = \frac{\pi_1(1) - \pi_1(2)}{1 - 2} = -1$$

Áp dụng định nghĩa định thức, ta có

$$|A| = \operatorname{sign}(\pi_1) a_{1\pi_1(1)} a_{2\pi_1(2)} + \operatorname{sign}(\pi_2) a_{1\pi_2(1)} a_{2\pi_2(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

B. BÀI TẬP

Câu 1 (Câu 4 Olympic 2004): Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp n thoả mãn

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } i = j \\ \pm 1 \text{ nếu } i \neq j \end{cases}$$

Chứng minh rằng

a) Nếu $n = 3$ thì tồn tại ma trận A sao cho $\det A = 0$.

b) Với $n = 4$ ta luôn có $\det A \neq 0$.

Chứng minh

a) Chọn $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ thì $\det A = 0$

b) Xét ma trận $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ thì $\det B = -3$.

Theo định nghĩa định thức thì

$$\det B = \sum_{\pi \in S_4} \operatorname{sign}(\pi) b_{1\pi(1)} b_{2\pi(2)} b_{3\pi(3)} b_{4\pi(4)} = -3$$

Xét một ma trận A vuông cấp 4 thoả mãn điều kiện bài Toán, ta có

$$\det A = \sum_{\pi \in S_4} \operatorname{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} a_{3\pi(3)} a_{4\pi(4)}$$

Để ý rằng số hạng ứng với $\pi \in S_4$ trong khai triển $\det A$ khác 0 nếu và chỉ nếu nó cũng khác 0 trong khai triển của $\det B$. Vì các số hạng này bằng ± 1 và $\det B = -3$ nên số các số hạng khác 0 trong khai triển của $\det B$, cũng như $\det A$ là một số lẻ. Suy ra $\det A \neq 0$.

Câu 2 ⭐⭐⭐⭐: Tìm giá trị lớn nhất của định thức cấp 3 có các phần tử là 1 hoặc -1.

Giải:

Khai triển định thức bằng định nghĩa thì rõ ràng cả 6 số hạng của nó khác 0. Mặt khác

$$(a_{11}a_{22}a_{33})(a_{12}a_{23}a_{31})(a_{13}a_{21}a_{32}) = -(-a_{11}a_{23}a_{32})(-a_{13}a_{22}a_{31})(-a_{12}a_{21}a_{33})$$

nên ít nhất trong 6 số hạng này phải có ít nhất 2 số hạng đối nhau. Do đó định thức có trị tuyệt đối lớn nhất là 4. Thực tế, đó là định thức có các phần tử trên đường chéo chính là -1, các phần tử còn lại là 1.

Câu 3 ⭐⭐⭐⭐⭐: Chứng minh ma trận sau không suy biến

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2008 & 2009 \\ 2^2 & 3^2 & \dots & 2009^2 & 2010^2 \\ 3^3 & 4^3 & \dots & 2010^3 & 2010^3 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 2009^{2009} & 2010^{2009} & \dots & 2010^{2009} & 2010^{2009} \end{pmatrix}$$

Chứng minh

Trong khai triển $|A|$ chỉ có một số hạng là lẻ, đó là tích các phần tử trên đường chéo phụ (ứng với phép thế có số nghịch thế lớn nhất), các số hạng còn lại đều chẵn do có chứa nhân tử là luỹ thừa của 2010. Như vậy $|A|$ là một số lẻ, nghĩa là $|A| \neq 0$.

(Cách khác: xét trên modun 2, $|A|$ đồng dư với định thức mà các phần tử trên đường chéo phụ bằng 1, các phần tử phía dưới đường chéo phụ bằng 0, do đó $|A| \equiv 1 \ (mod\ 2)$ => $|A| \neq 0$)

MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỨNG MINH

Câu 4 (Tổng quát câu 2 Olympic 2001) ⭐⭐⭐⭐⭐: Cho các ma trận vuông thực A, B thoả mãn $A^n = 0, AB = A + B$. Chứng minh $\det B = 0$.

Chứng minh

Cách 1:

Từ giả thiết $A^n = 0$, suy ra $\det A = 0$. Từ giả thiết $AB = A + B$, ta có

$$\det B = \det(AB - A) = \det A \det(B - I) = 0.$$

Cách 2:

Giả sử $\det B \neq 0$ tức là B khả nghịch. Từ giả thiết, ta có

$$0 = A^n = A^n B = A^{n-1}(AB) = A^{n-1}(A + B) = A^n + A^{n-1}B = A^{n-1}B$$

Do đó $0 = 0B^{-1} = A^{n-1}$.

Lặp lại quá trình trên, cuối cùng ta thu được $A = 0$ kết hợp giả thiết $AB = A + B$ suy ra $B = 0$, mâu thuẫn . Vậy $\det B = 0$.

Cách 3:

Từ giả thiết $A^n = 0$, suy ra $A^n - I^n = (A - I)(A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I) = -I$. Do đó $A - I$ khả nghịch.

Mặt khác $AB = A + B$ hay $(A - I)B = A$. Vì $A - I$ khả nghịch nên $\operatorname{rank}[(A - I)B] = \operatorname{rank} B = \operatorname{rank} A \leq n - 1$ do $\det A = 0$. Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 5 ⭐⭐⭐⭐⭐: Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng định thức

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix} = f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)\dots f(\epsilon_n)$$

trong đó ϵ_i $(i = 1, \dots, n)$ là các căn bậc n của đơn vị, $f(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}$.

Chứng minh

Giả sử $\epsilon_1 = 1$. Ta có

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \epsilon_2^{n-1} & \dots & \epsilon_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(1) & f(\epsilon_2) & \dots & f(\epsilon_n) \\ f(1) & \epsilon_2 f(\epsilon_2) & \dots & \epsilon_n f(\epsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(1) & \epsilon_2^{n-1} f(\epsilon_2) & \dots & \epsilon_n^{n-1} f(\epsilon_n) \end{vmatrix}$$

$$= f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)\dots f(\epsilon_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \epsilon_2^{n-1} & \dots & \epsilon_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Do các ϵ_i $(i = 1, \dots, n)$ đôi một khác nhau nên định thức Vandermonde $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \epsilon_2^{n-1} & \dots & \epsilon_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$, suy ra điều phải chứng minh.

Câu 6 (Câu 4 ngày thứ hai Olympic Quốc tế 2007)* ⭐⭐⭐⭐**:**

Cho n là số nguyên dương lẻ lớn hơn 1. Xét ma trận $A = (a_{ij})$ vuông cấp n thoả:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{nếu } i = j \\ 1 & \text{nếu } i - j \equiv 2 \pmod{n} \\ 0 & \text{với các phần tử còn lại} \end{cases}$$

Chứng minh $|A| = 4$.

Chứng minh

Để ý rằng $A = B^2$, trong đó $B = (b_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i - j \equiv \pm 1 \pmod{n} \\ 0 & \text{với các phần tử còn lại} \end{cases}$

Ta tính

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Khai triển theo dòng đầu

$$|B| = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 0 & 1 & \\ & & & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & & & & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \\ 1 & & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Khai triển theo cột đầu cả hai định thức

$$= -\left(\begin{vmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & 1 & \\ & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & 1 & 0 & 1 & \\ & & & & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & 1 & \\ & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = -(0-1)+(1-0)$$

Ma trận thứ hai, thứ ba là ma trận tam giác trên, dưới với các phần tử trên đường chéo là 1, còn với ma trận thứ nhất, thứ tư ta lấy $d_1 - d_3 + d_5 - \ldots + d_{n-2}$ thì được dòng 0.

Vậy $\det B = 2$ suy ra $\det A = 4$.

Ví dụ minh hoạ cho $n = 3, 5$: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$; $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$

Câu 7 ⭐⭐⭐ **:** Cho A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng $\det(AA^T + I) > 0$.

Chứng minh

$AA^T + I$ là ma trận đối xứng nên nó là ma trận của một dạng toàn phương, hơn nữa dạng toàn phương này xác định dương. Thật vậy, với mọi $x \neq 0$, sử dụng tích vô hướng trên $\mathbb{C}$, ta có

$$\langle (AA^T + I)x, x\rangle = \langle AA^T x, x\rangle + \langle x, x\rangle = \langle A^T x, A^T x\rangle + \langle x, x\rangle > 0$$

Do đó mà các giá trị riêng của $AA^T + I$ đều dương vì vậy tích các giá trị riêng dương đó bằng định thức của $AA^T + I$ cũng dương.

<u>Nhận xét</u>:

Trên đây là cách giải tổng quát, đúng với cả trường $\mathbb{C}, \mathbb{R}$. Tuy nhiên, đối với trường $\mathbb{R}$, ta còn có thể giải bằng tích vô hướng thông thường:

Với mọi $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, ta có: $x^T(AA^T + I)x = x^T AA^T x + x^T x = (A^T x)^T A^T x + x^T x > 0$

Câu 8 ⭐⭐⭐ **:** Cho A, B là hai ma trận vuông, thực, cấp n. Chứng minh rằng $\det(AA^T + BB^T) \geq 0$.

Chứng minh

Hoàn toàn tương tự như trên.

$$x^T(AA^T + BB^T)x = x^T AA^T x + x^T BB^T x = (A^T x)^T A^T x + (B^T x)^T B^T x \geq 0$$

đẳng thức xảy ra khi $A^T x = B^T x = 0$.

Câu 9 (Từ forum.mathscope.org) ⭐⭐⭐⭐**:** Cho ma trận A thoả mãn $A + A^T = 0$.

Chứng minh $I + A$ khả nghịch.

Chứng minh

Cách 1:

Ma trận $I + A^T A$ xác định dương, thật vậy $\forall x \neq 0$, ta có

$$\langle (I + A^T A)x, x\rangle = \langle x, x\rangle + \langle A^T Ax, x\rangle = \langle x, x\rangle + \langle Ax, Ax\rangle > 0$$

Do đó $\det(I + A^T A) > 0$. Mặt khác, từ giả thiết, ta có $A = -A^T$ nên A, A^T giao hoán

$$(I + A^T A) = (I + A)(I + A^T)$$

Suy ra

$$\det(I + A^T A) = \det(I + A)\det(I + A^T) > 0$$

Vậy $\det(I + A) \neq 0$ hay $I + A$ khả nghịch.

Cách 2:

Từ giả thiết, ta có $A = -A^T$ nên A, A^T giao hoán.

Nếu $I + A$ suy biến thì tồn tại $x \neq 0$ sao cho $(I + A)x = 0$ hay $Ax = -x$ hay $A^T x = x$,vậy $A^T Ax = -x$. Suy ra

$$\langle x, A^T Ax\rangle = -\langle x, x\rangle$$

Mặt khác $\forall x \neq 0$, ta có $\langle x, A^T Ax\rangle = \langle Ax, Ax\rangle \geq 0$ nhưng $-\langle x, x\rangle < 0$, mâu thuẫn.

Vậy $I + A$ khả nghịch.

Câu 10 (Câu 1 Olympic 2010) ⭐⭐⭐⭐**:** Tìm tất cả các ma trận vuông A cấp $n \geq 2$ sao cho với mọi ma trận B vuông cấp n, ta đều có $\det(A + B) = \det A + \det B$.

Giải:

Chọn $B = A$ thì từ giả thiết, ta có $\det(2A) = 2\det A$, mặt khác $\det(2A) = 2^n \det A$. Suy ra $\det A = 0$.

Giả sử $A \neq 0$, khi đó tồn tại cột $A_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq n)$.

Chọn ma trận B có các cột $B_1, \dots, B_{i-1}, -A_i, B_{i+1}, \dots, B_n$ sao cho $\det B \neq 0$ khi đó

$$\det(A + B) = \det A + \det B = \det B$$

Mặt khác, cột thứ i của ma trận $A + B$ là 0 nên $\det(A + B) = \det B = 0$, mâu thuẫn.

Vậy $A = 0$.

Câu 11 (Câu 1 Olympic 2010) ☆☆☆☆☆ : Cho A, B là các ma trận vuông cấp 2010 với hệ số thực sao cho

$$\det A = \det(A+B) = \det(A+2B) = \ldots = \det(A+2010B) = 0.$$

a) Chứng minh rằng $\det(xA+yB) = 0\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Tìm ví dụ chứng tỏ kết luận trên không còn đúng nếu chỉ có

$$\det A = \det(A+B) = \det(A+2B) = \ldots = \det(A+2009B) = 0.$$

Chứng minh

a) Nhận xét rằng định thức $P(t) = \det(A+tB)$ là một đa thức bậc 2010 của t có 2011 nghiệm $0, 1, \ldots, 2010$nên $P(t) \equiv 0$. Định thức $Q(t) = \det(tA+B)$ cũng là đa thức bậc 2010 của t. Mà $Q(t) = t^{2010}\det\left(A+\frac{1}{t}B\right) = P(t^{-1}), t \neq 0$. Do đó ta cũng có $Q(t) \equiv 0$.

- Với $x = 0, y \neq 0$ thì $\det(A+0B) = \det(A) = P(0) = 0$
- Với $x \neq 0, y = 0$ thì $\det(0A+yB) = \det(yB) = Q(0) = 0$
- Với $x \neq 0, y \neq 0$ thì ta có $\det(xA+yB) = x^{2010}\det\left(A+\frac{y}{x}B\right) = P\left(\frac{y}{x}\right) = 0$

Vậy $\det(xA+yB) = 0\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Chọn $A = \mathrm{diag}(0,1,2,\ldots,2009) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2009 \end{pmatrix}$ và $B = -I$

Khi đó $\det A = \det(A+B) = \det(A+2B) = \ldots = \det(A+2009B) = 0$ nhưng $\det(A+2010B) \neq 0$.

Câu 12 ☆☆☆☆: Cho ma trận cấp 10 có các phần tử nguyên, trong đó ít nhất 92 phần tử lẻ. Chứng minh $\det A \ \vdots\ 2$.

Chứng minh

Ma trận có ít nhất 92 phần tử lẻ nên nó có ít nhất hai dòng mà tất cả các phần tử đều lẻ, trừ dòng này cho dòng kia, ta được một dòng mới mà tất cả các phần tử đều chẵn. Từ đó $\det A \ \vdots\ 2$.

PHẦN X: LUỸ THỪA MA TRẬN
(Power of the Matrix)

Bài Toán tính luỹ thừa ma trận A vuông (cấp 2, 3) cho trước có 2 dạng: một là tính A^n $\forall n \in \mathbb{N}^*$, hai là tính A^m với $m \in \mathbb{N}^*$ cho trước. Bài Toán tính A^m có thể đưa về tính A^n sau đó thay $n = m$. Sau đây là một số phương pháp cho bài Toán này:

I. LUỸ THỪA MA TRẬN CẤP 3

Phương pháp 1: $\exists k \in \mathbb{N}^*$ (không quá lớn) sao cho $A^k = \pm I$ hoặc $A^k = 0$.

Nếu $A^{k+1} = A^k$ thì $A^n = A^k$ $\forall n \geq k$.

Ví dụ 1 ☆☆☆ **:** Tính $A^n = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$

Giải:

Ta có $A^3 = 0$.

Kết luận (luôn nhớ phải kết luận đầy đủ):

$$A^1 = \ldots, \qquad A^2 = \ldots, \qquad A^n = 0 \ \forall n \geq 3$$

Ví dụ 2 ☆☆☆☆☆ **:** Tính $A^{2002} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{2002}$

Giải:

Ta có $A^2 = \ldots, A^3 = \ldots, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^8 = I$

Suy ra $A^{2002} = (A^8)^{250}.A^2 = A^2 = \ldots$

Ví dụ 3 ☆☆☆ **:** Tính $A^{2009} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{2009}$

Giải:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^3 \Rightarrow A^{2009} = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Phương pháp 2: Tách $A^n = (B + aI)^n$, trong đó luỹ thừa B dễ tính

Ví dụ 1 ☆☆☆☆ **:** Tính $A^n = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$

Giải:

Tách $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B + I$ thì $B^k = 0\ \forall k \geq 3$. Do đó

$$A^n = (B+I)^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2 = \cdots$$

Phương pháp 3: Tách $A^n = (B+C)^n$ với $BC = CB$, luỹ thừa B, C dễ tính

Phương pháp này rất ít khi dùng.

Ví dụ 1 ⭐⭐⭐⭐ : Tính $A^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n$

Giải:

Tách $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B + C$

Ta có $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}, C^2 = 0$

Suy ra $A^n = (B+C)^n = C_n^{n-1}B^{n-1}C + C_n^n B^n = \cdots$

Phương pháp 4: Quy nạp

Đầu tiên ta tính một số luỹ thừa bậc thấp (2,3) của A, sau đó dự đoán công thức tổng quát rồi chứng minh bằng quy nạp.

Ví dụ 1 ⭐⭐⭐: Tính $A^n = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n$

Giải:

Ta có $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ ab & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ từ đó dự đoán và chứng minh quy nạp rằng $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ a^{n-1}b & 0 & a^n \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \forall n \geq 2$

Ví dụ 2 ⭐⭐⭐: Tính $A^n = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}^n$

Giải:

$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ na^{n-1}b & 0 & a^n \end{pmatrix}$.

Phương pháp 5: Chéo hoá

Phương pháp này rất hay dùng, tức là ta có $A = PBP^{-1}$ trong đó B là ma trận đường chéo. Khi đó $A^n = PB^nP^{-1}$, luỹ thừa B chỉ cần luỹ thừa các phần tử trên đường chéo chính, từ đó tính được A^n dễ dàng.

Ví dụ 1 ☆☆☆☆ : Tính $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}^n$

Giải:

Đa thức đặc trưng của A:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 6 & -11 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

=> A có 3 giá trị riêng phân biệt $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3$ nên A chéo hoá được.

- Với $\lambda = 1$, ta được một vector riêng $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Với $\lambda = 2$, ta được một vector riêng $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

- Với $\lambda = 3$, ta được một vector riêng $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

Kí hiệu

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} => C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{-5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

thì $A = CBC^{-1}$, suy ra

$$A^n = CB^nC^{-1} = \begin{pmatrix} 3 - 3.2^n + 3^n & \frac{-5}{2} + 4.2^n - \frac{3}{2}.3^n & \frac{1}{2} - 2^n + \frac{1}{2}.3^n \\ 3 - 3.2^{n+1} + 3^{n+1} & \frac{-5}{2} + 4.2^{n+1} - \frac{3}{2}.3^{n+1} & \frac{1}{2} - 2^{n+1} + \frac{1}{2}.3^{n+1} \\ 3 - 3.2^{n+2} + 3^{n+2} & \frac{-5}{2} + 4.2^{n+2} - \frac{3}{2}.3^{n+2} & \frac{1}{2} - 2^{n+2} + \frac{1}{2}.3^{n+2} \end{pmatrix}$$

Phương pháp 6: Tam giác hoá

1. Thuật Toán tam giác hoá

Không phải ma trận $A \in M_3(\mathbb{R})$ nào cũng chéo hoá được, tuy nhiên, luôn có thể tam giác hoá A, tức là tìm được ma trận P khả nghịch sao cho $A = PBP^{-1}$, trong đó, B là ma trận tam giác trên. Khi A không chéo hoá được thì thường xảy ra hai trường hợp sau:

- A có một giá trị riêng kép, một giá trị riêng đơn (giá trị riêng kép chỉ cho một vector riêng).

- A có một giá trị riêng bội ba (chỉ cho 2 hoặc 1 vector riêng).

Sau đây là một số ví dụ minh hoạ:

<u>Ví dụ 1</u>: A có một giá trị riêng kép, một giá trị riêng đơn (giá trị riêng kép chỉ cho một vector riêng)

Tam giác hoá $A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}$

Đa thức đặc trưng của A:

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$

A có một giá trị riêng kép $\lambda_1 = 2$ và một giá trị riêng đơn $\lambda_2 = 1$.

Với $\lambda_1 = 2$, ta được một vector riêng tương ứng $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Với $\lambda_2 = 1$, ta được một vector riêng tương ứng $v_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ta cần tìm v_2 sao cho $Av_2 = \lambda_1 v_2 + v_1$ chẳng hạn $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Kí hiệu $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Khi đó

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

là ma trận tam giác trên.

<u>Ví dụ 2</u>: A có một giá trị riêng bội ba chỉ cho 2 vector riêng.

Tam giác hoá $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Đa thức đặc trưng của A:

$$P_A(\lambda) = -(\lambda + 1)^3$$

A có một giá trị riêng bội ba $\lambda_1 = -1$.

Với $\lambda_1 = -1$, ta được hai vector riêng tương ứng $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ và $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ta cần tìm v_3 sao cho v_1, v_2, v_3 độc lập tuyến tính, chẳng hạn $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Kí hiệu $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Khi đó

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

là ma trận tam giác trên.

Ví dụ 3: A có một giá trị riêng bội ba chỉ cho 1 vector riêng.

Tam giác hoá $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Đa thức đặc trưng của A:

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda)^3$$

A có một giá trị riêng bội ba $\lambda = 2$ và chỉ được một vector riêng tương ứng $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ta cần tìm v_2 sao cho $Av_2 = \lambda v_2 + v_1$ rồi chọn v_3 sao cho v_1, v_2, v_3 độc lập tuyến tính.

Chẳng hạn $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Kí hiệu $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Khi đó

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

là ma trận tam giác trên.

2. Áp dụng tính luỹ thừa ma trận:

Ví dụ 1 : Tính $A^n = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}^n$

Giải:

Đa thức đặc trưng của A: $P_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$

Với $\lambda = 1$, hệ $(A - \lambda I)x = 0$ cho ta 2 vector riêng $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ và $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, chọn $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Đặt $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $P = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to P^{-1} = \ldots$ thì ta có $B = P^{-1}AP$

Dễ dàng tính được $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, từ đó $A^n = PB^nP^{-1} = \ldots$

Phương pháp 7: Sử dụng đa thức đặc trưng, đa thức tối tiểu của A

Ví dụ 1 (Câu 10 đề dự tuyển ĐH KH Huế 2010) : Tính $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}^{2010}$.

Giải:

Kí hiệu $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Đa thức đặc trưng và đa thức tối tiểu của A là

$$P_A(x) = (1-x)^3 \; ; \; \Pi_A(x) = (x-1)^2$$

Chia x^{2010} cho $\Pi_A(x) = (x-1)^2$, ta được:

$$x^{2010} = (x-1)^2 Q(x) + (ax+b)$$

Đạo hàm

$$2010x^{2009} = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + a$$

Thay $x = 1$ vào hai đẳng thức trên, ta được $a + b = 1, a = 2010$. Từ đó

$$A^{2010} = 2010A - 2009I = \begin{pmatrix} 6031 & 12060 & -30150 \\ 2010 & 4021 & -10050 \\ 2010 & 4020 & -10049 \end{pmatrix}$$

<u>Phương pháp 8</u>: Luỹ thừa của một ma trận đối xứng là một ma trận đối xứng.

Ví dụ 1 ☆☆☆☆☆ **:** Tính $A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n$

Do A là ma trận đối xứng nên A^n cũng là ma trận đối xứng, nó có dạng như sau

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Xét đẳng thức $A^{n+1} = A^n A$ ta được $a_{n+1} = 2a_n + 2b_n$ và $b_{n+1} = a_n + 3b_n$. Do đó ta có

$$\begin{cases} a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n = \cdots = a_1 - b_1 = 1 \\ a_{n+1} + 2b_{n+1} = 4(a_n + 2b_n) = \cdots = 4^n(a_1 + 2b_1) = 4^{n+1} \end{cases}$$

Giải hệ trên, tìm được $a_{n+1} = \frac{4^{n+1}+2}{3}, b_{n+1} = \frac{4^{n+1}-1}{3}$. Vậy

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$$

II. LUỸ THỪA MA TRẬN CẤP 2

1. Tính luỹ thừa ma trận cấp 2 tổng quát

Giả sử ta cần tính $A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n$

Xét đa thức đặc trưng và biệt thức Δ

$$P_A(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$$
$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc$$

+) Nếu $\Delta > 0$, đa thức đặc trưng có 2 nghiệm phân biệt hay A có 2 giá trị riêng phân biệt nên A chéo hoá được trên $\mathbb{R}$ và việc tính luỹ thừa A là đơn giản.

+) Nếu $\Delta = 0$ thì $ad - bc = \frac{(a+d)^2}{4}$, ta có

$$P_A(A) = A^2 - (a+d)A + \frac{(a+d)^2}{4}I = \left(A - \frac{a+d}{2}I\right)^2 = 0$$

Do đó

$$\left(A - \frac{a+d}{2}I\right)^k = 0\ \forall\, k \geq 2$$

Vậy nên

$$A^n = \left[\left(A - \frac{a+d}{2}I\right) + \frac{a+d}{2}I\right]^n$$
$$= C_n^0\left(A - \frac{a+d}{2}I\right)^0\left(\frac{a+d}{2}I\right)^n + C_n^1\left(A - \frac{a+d}{2}I\right)^1\left(\frac{a+d}{2}I\right)^{n-1}$$
$$= \left(\frac{a+d}{2}I\right)^n + n\left(A - \frac{a+d}{2}I\right)\left(\frac{a+d}{2}I\right)^{n-1}$$

Tóm lại trong trường hợp này

$$A^n = \left(\frac{a+d}{2}I\right)^n + n\left(A - \frac{a+d}{2}I\right)\left(\frac{a+d}{2}I\right)^{n-1}$$

+) Nếu $\Delta < 0$ thì $P_A(x)$ có hai nghiệm phức liên hợp

$$x_{1,2} = \frac{(a+d) \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

A chéo hoá được trên $\mathbb{C}$ và $A = PBP^{-1} = P\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}P^{-1}$.

Biểu diễn $x_{1,2}$ dưới dạng lượng giác:

$$x_{1,2} = \sqrt{r}(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$$

Khi đó

$$B^n = \begin{pmatrix} \sqrt{r}(\cos\varphi + i\sin\varphi) & 0 \\ 0 & \sqrt{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi) \end{pmatrix}^n = \sqrt{r}^n\begin{pmatrix} \cos n\varphi + i\sin n\varphi & 0 \\ 0 & \cos n\varphi - i\sin n\varphi \end{pmatrix}$$

Vậy trong trường hợp này

$$A^n = \sqrt{r}^n P\begin{pmatrix} \cos n\varphi + i\sin n\varphi & 0 \\ 0 & \cos n\varphi - i\sin n\varphi \end{pmatrix}P^{-1}$$

Trên đây là cách tính luỹ thừa ma trận cấp 2, mọi ma trận cấp 2 luôn có thể áp dụng cách làm này. Tuy nhiên, có những khi quá trình tính toán khá là phức tạp (trường hợp nghiệm của phương trình đặc trưng "xấu" hay chéo hoá ma trận trên $\mathbb{C}$). Sau đây là một phương pháp khác:

2. Đưa ma trận về dạng lượng giác

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \pm\sin\alpha \\ \mp\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \pm\sin n\alpha \\ \mp\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$$

Riêng với ma trận cấp 2, một phương pháp nữa để tính luỹ thừa đó là đưa ma trận về dạng lượng giác trên (nếu có thể). Phương pháp này cũng khá phổ biến, nó làm cho quá trình tính toán đơn giản hơn nhiều so với dạng đại số.

Ví dụ (Câu 2 Olympic 2002) ☆☆☆☆: Cho ma trận

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}+1 & -\frac{5}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}-1\end{pmatrix}$$

Tính A^{2002}.

<u>Giải</u>:

Để ý rằng có thể đưa ma trận sau đây về dạng lượng giác:

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2} & -2.\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6} & -2\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được là

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6} & -2\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{6}+\sin\frac{n\pi}{6} & -2\sin\frac{n\pi}{6}\\ \sin\frac{n\pi}{6} & \cos\frac{n\pi}{6}-\sin\frac{n\pi}{6}\end{pmatrix}$$

Một mặt, ta biến đổi ma trận này như sau

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2} & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{d_2\to d_1}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}+1 & \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{-c_1\to c_2}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}+1 & \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}-1\end{pmatrix}$$

Từ cách biến đổi đó, nếu đặt

$$S=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2} & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

thì ta có $A=SBS^{-1}$, do đó $A^n=SB^nS^{-1}$, thay $n=2002$:

$$A^{2002}=SB^{2002}S^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{2002\pi}{6}+\sin\frac{2002\pi}{6} & -2\sin\frac{2002\pi}{6}\\ \sin\frac{2002\pi}{6} & \cos\frac{2002\pi}{6}-\sin\frac{2002\pi}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\sqrt{3} & \frac{5\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}+\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Ví dụ : Cho $A = \begin{bmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}$. Tính A^n.

Giải:

Đặt $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ thì

$$A^n = \begin{bmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$$

3. Ngoài ra, các phương pháp tính luỹ thừa ma trận cấp 3 nêu trên vẫn có thể áp dụng được cho ma trận cấp 2.

Ví dụ (Từ forum.mathscope.org): Tính A^{2010} với $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Cách 1: (Quy nạp)

Ta có

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}, A^4 = -4I$$

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh rằng

$$A^n = \begin{cases} (-4)^k I & \text{nếu } n = 4k \\ (-4)^k A & \text{nếu } n = 4k+1 \\ (-4)^k A^2 & \text{nếu } n = 4k+2 \\ (-4)^k A^3 & \text{nếu } n = 4k+3 \end{cases}$$

Suy ra $A^{2010} = A^{4.502+2} = (-4)^{502}A^2 = 2^{1005}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Cách 2: (Chéo hoá)

Đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1$$

A chéo hoá được trên $\mathbb{C}$, $P_A(\lambda)$ có hai nghiệm phức liên hợp $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ và hai vector riêng liên hợp.

Với $x = \lambda_1$, ta có hệ

$$\begin{cases} (2-i)x_1 - 5x_2 = 0 \\ x_1 - (2+i)x_2 = 0 \end{cases} <=> x_1 = (2+i)x_2$$

Chọn $x_2 = 1$, ta được 1 vector riêng tương ứng $(2+i, 1)$

Suy ra với $x = \lambda_2$, ta được 1 vector riêng tương ứng $(2-i, 1)$

Đặt $B = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ thì $P^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & -2+i \\ -1 & 2+i \end{pmatrix}$ và

$$A = PBP^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2+i \\ -1 & 2+i \end{pmatrix}$$

$$A^{2010} = PB^{2010}P^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1+i)^{2010} & 0 \\ 0 & (1-i)^{2010} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2+i \\ -1 & 2+i \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{2}^{2010}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}2+i & 2-i\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{2010\pi}{4}+i\sin\frac{2010\pi}{4} & 0\\ 0 & \cos\frac{7.2010\pi}{4}+i\sin\frac{7.2010\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2+i\\ -1 & 2+i\end{pmatrix}$$

$$= 2^{1005}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}2+i & 2-i\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2+i\\ -1 & 2+i\end{pmatrix}$$

$$= 2^{1005}\frac{-i}{2}\begin{pmatrix}-1+2i & -1-2i\\ i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2+i\\ -1 & 2+i\end{pmatrix}$$

$$= 2^{1005}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}4i & -10i\\ 2i & -4i\end{pmatrix} = 2^{1005}\begin{pmatrix}2 & -5\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

Ví dụ **:** Tính $A^n = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^n$

Giải:

Tách $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = B + 2I$ thì $B^k = I\ \forall k \geq 2$. Do đó

$$A^n = (B+2I)^n = 2^nI + n2^{n-1}A + (3^n - 2^n - n2^{n-1})I = \cdots$$

Ví dụ (Câu 2 đề dự tuyển CĐSP BR-VT 2010) **:** Tính $A^{2010} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}^{2010}$.

Giải:

Thực hiện phép chia x^{2010} cho đa thức đặc trưng của A là $(x-2)^2$, ta có:

$$x^{2010} = (x-2)^2Q(x) + (ax+b)$$

Đạo hàm, ta được: $2010x^{2009} = 2(x-2)Q(x) + (x-2)^2Q'(x) + a$

Thay $x = 2$ vào hai đẳng thức trên, ta có: $\begin{cases}2^{2010} = 2a+b\\ 2010.2^{2009} = a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 2010.2^{2009}\\ b = -2009.2^{2010}\end{cases}$

Vậy $A^{2010} = 2010.2^{2009}A - 2009.2^{2010}I = 2^{2010}(1005A - 2009I) = 2^{2010}\begin{pmatrix}-1004 & 1005\\ -1005 & 1006\end{pmatrix}$

III. LUỸ THỪA MA TRẬN CẤP CAO ($n \geq 4$)

Câu **:** Cho $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Tính A^{2012}.

Giải:

Tính toán cho ta $A^2 = 4I \Rightarrow A^3 = 4A \Rightarrow A^4 = 4A^2 = 16I \Rightarrow A^5 = 16A \Rightarrow A^6 = 16A^2 = 64I$.

Dễ dàng chứng minh được bằng quy nạp rằng

$$A^k = \begin{cases}2^k\,I & \text{nếu } k = 2m\\ 2^{k-1}I & \text{nếu } k = 2m+1\end{cases}$$

Do đó $A^{2012} = 2^{2012}I$.

Câu ⭐⭐⭐⭐ : Cho ma trận:

$$B=\begin{pmatrix}-1&0&1&1&0&0\\1&-1&-3&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\\0&0&0&-1&0&1\\0&0&0&1&-1&-3\\0&0&0&0&1&2\end{pmatrix}.\text{ Tính } B^{2012}.$$

<u>Giải</u>:

$$B^2=\begin{pmatrix}A&I\\0&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&I\\0&A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^2&2A\\0&A^2\end{pmatrix}=>B^3=B^2B=\begin{pmatrix}A^2&2A\\0&A^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&I\\0&A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^3&A^2\\0&A^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&A^2\\0&0\end{pmatrix}$$

$$=>B^4=B^3B=\begin{pmatrix}0&A^2\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&I\\0&A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&A^3\\0&0\end{pmatrix}=0=>B^{2012}=0$$

Câu (Câu 1b Olympic 1999) ⭐⭐⭐⭐⭐ : Cho $f(x)=x^{1999}+x^2-1$, và ma trận $C=\begin{pmatrix}4&3&0&0\\2&3&0&0\\4&9&-1&0\\1&2&5&2\end{pmatrix}$.

Tính $\det[f(C)]$.

<u>Cách 1</u>:

Đặt $C=\begin{pmatrix}A&0\\B&D\end{pmatrix}$, ta có

$$C^2=\begin{pmatrix}A^2&0\\BA+DB&D^2\end{pmatrix}=>C^3=\begin{pmatrix}A^3&0\\BA^2+DBA+D^2B&D^3\end{pmatrix}=>C^4=\begin{pmatrix}A^4&0\\BA^3+DBA^2+D^2BA+D^3B&D^4\end{pmatrix}$$

$$\ldots=>C^n=\begin{pmatrix}A^n&0\\\sum_{i=0}^{n-1}D^iBA^{n-1-i}&D^n\end{pmatrix}$$

Suy ra

$$f(C)=C^{1999}+C^2-I_4=\begin{pmatrix}A^{1999}+A^2-I_2&0\\\sum_{i=0}^{1998}D^iBA^{1998-i}+BA+DB&D^{1999}+D^2-I_2\end{pmatrix}$$

Từ đó

$$\det[f(C)]=\det(A^{1999}+A^2-I_2)\det(D^{1999}+D^2-I_2)$$

Mặt khác

$$|A-\lambda I|=(\lambda-1)(\lambda-6)\,;|D-\lambda I|=(\lambda+1)(\lambda-2)$$

tức là A,D đều chéo hoá được:

$$A=PA'P^{-1}=P\begin{pmatrix}1&0\\0&6\end{pmatrix}P^{-1}\ \ ;\ \ D=TD'T^{-1}=T\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}T^{-1}$$

Vậy

$$\det[f(C)]=\det(A'^{1999}+A'^2-I_2)\det\left(D'^{1999}+D'^2-I_2\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1+1-1 & 0 \\ 0 & 6^{1999}+6^2-1 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} -1+1-1 & 0 \\ 0 & 2^{1999}+2^2-1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6^{1999}+6^2-1 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{1999}+2^2-1 \end{pmatrix} = -(6^{1999}+35)(2^{1999}+3)$$

Cách 2:

Như đã chứng minh nếu λ là một giá trị riêng của C thì $f(\lambda)$ sẽ là giá trị riêng của $f(C)$ và định thức của một ma trận bằng tích các giá trị riêng của nó. Từ đó

$$\det(C-\lambda I) = (2-\lambda)(-1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda)(6-\lambda)$$

C có 4 giá trị riêng 2, -1, 1, 6 suy ra các giá trị riêng của $f(C)$ là

$$f(2) = 2^{1999}+3\,, f(-1) = -1\,, f(1) = 1\,, f(6) = 6^{1999}+35$$

Vậy $\det[f(C)] = -(6^{1999}+35)(2^{1999}+3)$.

Câu (Câu 4 Olympic 2009) ⭐⭐⭐⭐ : Tính A^{2009}, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Giải:

Ta biến đổi ma trận A về dạng tam giác khối như sau

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[V_1]{d_1 \leftrightarrow d_4} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[V_2]{c_1 \leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} 4 & -9 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[V_3]{d_1 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & -9 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[V_4]{c_1 \leftrightarrow c_3} B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Từ phép biến đổi đó, ta có

$$A \to V_1A \to V_1AV_2 \to V_3V_1AV_2 \to V_3V_1AV_2V_4 = B$$

trong đó

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_3=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix};\ V_4=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Kí hiệu

$$P=V_2V_4=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\to P^{-1}=V_3V_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Suy ra

$$A=PBP^{-1}=P\,\mathrm{diag}(C,D)P^{-1}$$

trong đó

$$C=\begin{pmatrix}4&-5&2\\5&-7&3\\6&-9&4\end{pmatrix}\ \text{và}\ D=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

Ta có

$$C^3=C^2=\begin{pmatrix}3&-3&1\\3&-3&1\\3&-3&1\end{pmatrix}=>C^{2009}=C^2$$

$$D^2=-I=>D^3=-D=>D^4=I=>D^n=\begin{cases}I&\text{nếu } n=4k\\D&\text{nếu } n=4k+1\\-I&\text{nếu } n=4k+2\\-D&\text{nếu } n=4k+3\end{cases}=>D^{2009}=D^{4.502+1}=D$$

Từ đó

$$A^{2009}=P\,\mathrm{diag}(C^{2009},D^{2009})P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-3&1&0&0\\3&-3&1&0&0\\3&-3&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&-3&3&1&0\\0&-3&3&1&0\\0&-3&3&1&0\\-1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

IV. LUỸ THỪA MA TRẬN QUA CÁC BÀI TOÁN VỀ DÃY TRUY HỒI TUYẾN TÍNH

1. Các dãy truy hồi tuyến tính đồng thời cấp 1 với hệ số không đổi

Ví dụ 1 : Giả sử $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là các dãy số thực được xác định bởi

$$\begin{cases} u_0 = 0, v_0 = 22, w_0 = 22 \\ \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + v_n + w_n) \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n) \end{cases} \end{cases}$$

Tính u_n, v_n, w_n và nghiên cứu sự hội tụ của ba dãy này.

Giải:

Kí hiệu $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ và $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ thì ta có $X_{n+1} = AX_n$ suy ra $X_n = A^n X_0$.

Đa thức đặc trưng của A là $P_A(x) = (1-x)\left(\frac{1}{12} - x\right)\left(\frac{1}{4} - x\right)$

A có 3 giá trị riêng phân biệt nên chéo hoá được, ta có

$$A = PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 11 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Từ đó, ta có

$$X_n = A^n X_0 = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 12^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 11 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 22 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Vậy

$$\forall n \in \mathbb{N}: \begin{cases} u_n = 14 - 11.4^{-n} - 3.12^{-n} \\ v_n = 14 + 8.12^{-n} \\ w_n = 14 + 11.4^{-n} - 3.12^{-n} \end{cases}$$

Rõ ràng $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ về 14.

Ví dụ 2 (Câu 1 Olympic 1997) ☆☆☆☆☆: Giả sử x_0, y_0, z_0 là các số thực cho trước. Hãy xác định tất cả các số thực x_n, y_n, z_n $(n = 0,1,\dots)$ thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases} \quad (n = 0,1,\dots)$$

Giải:

Kí hiệu $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ và $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ thì ta có $X_{n+1} = AX_n$ suy ra $X_n = A^n X_0$.

*Ta tính A^n như sau.

<u>Cách 1</u>:

Tách $A = B - 2I$, trong đó $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, khi đó $B^n = 3^{n-1}B$ suy ra

$$\begin{aligned} A^n = (B-2I)^n &= C_n^0 B^n(-2I)^0 + C_n^1 B^{n-1}(-2I)^1 + \ldots + C_n^{n-1}B(-2I)^{n-1} + C_n^n B^0(-2I)^n \\ &= C_n^0 3^{n-1}(-2)^0 B + C_n^1 3^{n-2}.(-2)^1 B + \ldots + C_n^{n-1}3^0(-2)^{n-1}B + C_n^n(-2)^n I \\ &= \frac{1}{3}[C_n^0 3^n(-2)^0 B + C_n^1 3^{n-1}.(-2)^1 B + \ldots + C_n^{n-1}3^1(-2)^{n-1}B + C_n^n 3(-2)^n I] \\ &= \frac{1}{3}[((3-2)^n - C_n^n 3^0(-2)^n)B + C_n^n 3(-2)^n I] = \frac{1}{3}[(1-(-2)^n)B + 3(-2)^n I] \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(-2)^n & 1-(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1+2(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^n & 1+2(-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

<u>Cách 2</u>:

Do A là ma trận đối xứng nên A^n cũng là ma trận đối xứng, nó có dạng như sau

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Xét đẳng thức $A^{n+1} = A^n A$ ta được $a_{n+1} = -a_n + 2b_n$ và $b_{n+1} = a_n$. Do đó ta có

$$\begin{cases} a_{n+1} - \ \ b_{n+1} = (-2)(a_n - b_n) = \ldots = (-2)^n(a_1 - b_1) = (-2)^{n+1} \\ a_{n+1} + 2b_{n+1} = a_n + 2b_n = \cdots = a_1 + 2b_1 = 1 \end{cases}$$

Giải hệ trên, tìm được $a_{n+1} = \frac{1+2(-2)^{n+1}}{3}$, $b_{n+1} = \frac{1-(-2)^{n+1}}{3}$, từ đó

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(-2)^n & 1-(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1+2(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^n & 1+2(-2)^n \end{pmatrix}$$

Vậy $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} x_n = \dfrac{x_0+y_0+z_0}{3} + (-2)^n\left(\dfrac{2x_0-y_0-z_0}{3}\right) \\ y_n = \dfrac{x_0+y_0+z_0}{3} + (-2)^n\left(\dfrac{2y_0-z_0-z_0}{3}\right) \\ z_n = \dfrac{x_0+y_0+z_0}{3} + (-2)^n\left(\dfrac{2z_0-x_0-y_0}{3}\right) \end{cases}$

Ví dụ 3 (Câu 2 Olympic 2011): Cho 3 dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ xác định như sau:

$$x_0 = y_0 = z_0 \text{ và } \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - y_n - 5z_n \\ y_{n+1} = 2x_n \qquad\ - 2z_n \\ z_{n+1} = \ \ x_n \qquad\ - 2z_n \end{cases}$$

Tính x_{2011}.

<u>Giải</u>:

Kí hiệu $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ và $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ thì ta có $X_{n+1} = AX_n$ suy ra $X_n = A^n X_0$.

Đa thức đặc trưng của A là $p(x) = -(x-2)(x-1)(x+1)$

Ta tính A^{2011} như sau

Thực hiện phép chia x^{2011} cho $p(x)$, ta được

$$x^{2011} = p(x)q(x) + (ax^2 + bx + c)$$

Từ đó, lần lượt chọn $x = 2, 1, -1$ ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 2^{2011} \\ a + \ \ b + c = \ \ 1 \\ a - \ \ b + c = -1 \end{cases} <=> \begin{cases} a = \dfrac{2^{2011} - 2}{3} \\ b = 1 \\ c = \dfrac{2 - 2^{2011}}{3} \end{cases}$$

Mặt khác, do $p(A) = 0$ nên

$$A^{2011} = aA^2 + bA + cI = \frac{2^{2011} - 2}{3}\begin{pmatrix} 9 & -4 & -8 \\ 6 & -2 & -6 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \frac{2 - 2^{2011}}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8.2^{2011} - 4 & -4.2^{2011} + 5 & -8.2^{2011} + 1 \\ 6.2^{2011} - 6 & -3.2^{2011} + 2 & -6.2^{2011} + 6 \\ 2.2^{2011} - 1 & -2^{2011} + 2 & -2.2^{2011} - 2 \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$X_{2011} = A^{2011}X_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8.2^{2011} - 4 & -4.2^{2011} + 5 & -8.2^{2011} + 1 \\ 6.2^{2011} - 6 & -3.2^{2011} + 2 & -6.2^{2011} + 6 \\ 2.2^{2011} - 1 & -2^{2011} + 2 & -2.2^{2011} - 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

Vậy $x_{2011} = \dfrac{2}{3}(1 - 2^{2012})x_0$.

2. Các dãy truy hồi tuyến tính với hệ số không đổi

Ví dụ ★★★★★: Tính $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biết $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}: u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2} \end{cases}$

Giải:

Kí hiệu $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ và $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 45 & -39 & 11 \end{pmatrix}$ thì ta có $X_{n+1} = AX_n$ suy ra $X_n = A^nX_0$.

Đa thức đặc trưng của A là $P_A(x) = -(x-3)^2(x-5)$

Với $x_1 = 3$ ta được 1 vector riêng tương ứng $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

Với $x_2 = 5$ ta được 1 vector riêng tương ứng $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}$

A không chéo hoá được nhưng ta sẽ tam giác hoá A bằng cách chọn v_2 thoả $Av_2 = x_1v_2 + v_1$, chẳng hạn $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$. Khi đó ta có

$$B = P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 & -1 \\ -30 & 16 & -2 \\ 9 & -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 45 & -39 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 9 & 6 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

là ma trận tam giác trên.

Dễ dàng tính được

$$B^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Suy ra

$$X_n = A^nX_0 = PB^nP^{-1}X_0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 9 & 6 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 6 & -1 \\ -30 & 16 & -2 \\ 9 & -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vậy $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = -4n3^{n-1} + 5^n$.

Ví dụ ☆☆☆☆☆: Cho $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được xác định bởi $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*: \begin{cases} u_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n-1} \\ u_{2n} = u_{2n-1} + 2u_{2n-2} \end{cases} \end{cases}$

Giải:

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*: \begin{cases} u_{2n} = 2u_{2n-2} + u_{2n-1} \\ u_{2n+1} = 2u_{2n-2} + 2u_{2n-1} \end{cases} \end{cases}$

Kí hiệu $X_n = \begin{bmatrix} u_{2n-2} \\ u_{2n-1} \end{bmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ thì ta có $X_{n+1} = AX_n$ suy ra $X_n = A^{n-1}X_1$.

Đa thức đặc trưng của A là $P_A(x) = \left[x - (2+\sqrt{2})\right]\left[x - (2-\sqrt{2})\right]$

A có 2 giá trị riêng phân biệt nên chéo hoá được, ta có

$$A = PBP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} \end{bmatrix}.\frac{-\sqrt{2}}{4}\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Từ đó, ta có

$$X_n = A^{n-1}X_1 = \frac{-\sqrt{2}}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \left(2+\sqrt{2}\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & \left(2-\sqrt{2}\right)^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{4}\begin{bmatrix} \left(2+\sqrt{2}\right)^{n-1} & \left(2-\sqrt{2}\right)^{n-1} \\ \sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)^{n-1} & -\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2-\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{-\sqrt{2}}{4}\begin{bmatrix} \left(2-\sqrt{2}\right)^n - \left(2+\sqrt{2}\right)^n \\ -\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)^n - \sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)^n \end{bmatrix}$$

Vậy $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{cases} u_{2n-2} = \dfrac{-\sqrt{2}}{4}\left[\left(2-\sqrt{2}\right)^n - \left(2+\sqrt{2}\right)^n\right] \\ u_{2n-1} = \dfrac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{2}\right)^n + \left(2-\sqrt{2}\right)^n\right] \end{cases}$.

PHẦN XI: BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH MA TRẬN

DẠNG 1: TÌM MỌI MA TRẬN X GIAO HOÁN HOẶC PHẢN GIAO HOÁN VỚI MỘT MA TRẬN A CHO TRƯỚC.

Phương pháp 1: Đưa bài Toán về tìm mọi ma trận X giao hoán với ma trận $A - kI$ đơn giản hơn.

$$AX \pm XA = 0 <=> (A - kI)X \pm X(A - kI) = 0$$

Ví dụ 1 ⭐⭐⭐: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2009 & -1 & 0 \\ 0 & 2009 & -1 \\ 0 & 0 & 2009 \end{pmatrix}$. Tìm tất cả các ma trận B cấp 3 giao hoán được với ma trận A.

Giải:

$AB = BA <=> (A - 2009I)B = B(A - 2009I) <=> \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B = B \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Kí hiệu $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, ta có

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$<=> \begin{pmatrix} -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{11} & -a_{12} \\ 0 & -a_{21} & -a_{22} \\ 0 & -a_{31} & -a_{32} \end{pmatrix} <=> \begin{cases} a_{21} = a_{32} = 0 \\ a_{31} = 0 \\ a_{22} = a_{33} = a_{11} \\ a_{12} = a_{23} \end{cases}$$

Vậy $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Ngược lại, mọi ma trận có dạng này đều giao hoán được với A.

Ví dụ 2 (Câu 3 đề dự tuyển ĐH Quy Nhơn 2009) ⭐⭐⭐⭐⭐:

Xác định tất cả các ma trận vuông cấp 3 giao hoán với ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Giải:

Gọi ma trận cần tìm là $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$. Khi đó $AX = XA <=> (I - A)X = X(I - A)$

Ta có

$$X(I - A) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 & x_1 + x_2 - x_3 & x_1 + x_2 - x_3 \\ x_4 + x_5 - x_6 & x_4 + x_5 - x_6 & x_4 + x_5 - x_6 \\ x_7 + x_8 - x_9 & x_7 + x_8 - x_9 & x_7 + x_8 - x_9 \end{pmatrix}$$

$$(I-A)X=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}x_1+x_4+x_7&x_2+x_5+x_8&x_3+x_6+x_9\\x_1+x_4+x_7&x_2+x_5+x_8&x_3+x_6+x_9\\-(x_1+x_4+x_7)&-(x_2+x_5+x_8)&-(x_3+x_6+x_9)\end{pmatrix}$$

Suy ra $x_1+x_2-x_3=x_1+x_4+x_7=x_2+x_5+x_8=x_3+x_6+x_9=x_4+x_5-x_6=-x_7-x_8+x_9$

hay $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=x_3+x_6+x_9\\x_3+x_6+x_9=-x_7-x_8+x_9\\-x_7-x_8+x_9=x_2+x_5+x_8\\x_2+x_5+x_8=x_4+x_5-x_6\\x_4+x_5-x_6=x_1+x_4+x_7\end{cases} <=> \begin{cases}x_1+x_2-2x_3=x_6+x_9\\x_3=-x_6-x_7-x_8\\x_2+x_5=-x_7-2x_8+x_9\\x_2-x_4=-x_6-x_8\\x_1-x_5=-x_6-x_7\end{cases}$

$$<=>\begin{cases}x_3=-x_6-x_7-x_8\\x_1+x_2=-x_6-2x_7-2x_8+x_9\\x_2+x_5=-x_7-2x_8+x_9\\x_2-x_4=-x_6-x_8\\x_1-x_5=-x_6-x_7\end{cases}<=>\begin{cases}x_3=-x_6-x_7-x_8\\x_1+x_2=-x_6-2x_7-2x_8+x_9\\x_1+x_2=-x_6-2x_7-2x_8+x_9\\x_2-x_4=-x_6-x_8\\x_1-x_5=-x_6-x_7\end{cases}$$

Dễ thấy x_3 độc lập với các phương trình còn lại, hệ có 2 phương trình giống nhau, chuyển x_5 làm số hạng tự do, cuối cùng ta được nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x_1=x_5-x_6-x_7\\x_2=-x_5-x_7-2x_8+x_9\\x_3=-x_6-x_7-x_8\\x_4=-x_5+x_6-x_7-x_8+x_9\\x_i\in\mathbb{R}, i=5,6,7,8,9\end{cases}$$

Ma trận cần tìm có dạng

$$X=\begin{pmatrix}a-b-c&-a-c-2d+e&-b-c-d\\-a+b-c-d+e&a&b\\c&d&e\end{pmatrix}$$

Ngược lại, mọi ma trận có dạng trên đều giao hoán được với A.

Ví dụ 3 (Câu 5 Olympic 2007) ⭐⭐⭐⭐: Cho ma trận

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\0&2&-1&0\\0&0&2&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

Tìm tất cả các ma trận vuông X cấp 4 sao cho $AX=XA$.

Giải:

Ta có $AX=XA <=> (A-2I)X=X(A-2I)$

$$\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}X=X\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad(1)$$

Kí hiệu:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (b_{ij}); \quad C = BX = (c_{ij}); \quad D = XB = (d_{ij})$$

Khi đó (1) tương đương $C = D$ hay $c_{ij} = d_{ij},\ 1 \le i, j \le 4$. Ta thấy $c_{ij} = 0\ \forall j$ và $d_{ij} = 0\ \forall i$. Mặt khác với $i \le 3$ và $j \ge 2$ ta có: $c_{ij} = d_{ij}$. Do đó

$$\sum_{k=1}^{4} b_{ik}x_{kj} = \sum_{k=1}^{4} x_{ik}b_{kj} \text{ hay } x_{(i+1)j} = x_{i(j-1)}$$

Tóm lại, ta thu được $x_{ij} = x_{i+1,j+1},\ 1 \le i, j \le 3$. Vậy ma trận X có dạng

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Ngược lại, mọi ma trận có dạng trên đều giao hoán được với A.

<u>Phương pháp 2</u>: Ứng dụng chéo hoá (hoặc tam giác hoá) ma trận $A = PBP^{-1}$.

$$AX = XA <=> PBP^{-1}X = XPBP^{-1} <=> B(P^{-1}XP) = (P^{-1}XP)B$$

Bài Toán đã cho quy về bài Toán đơn giản hơn đó là tìm mọi ma trận $Q = P^{-1}XP$ giao hoán với ma trận B (ma trận đường chéo hoặc ma trận tam giác). Tìm được Q => $X = PQP^{-1}$.

<u>Chú ý</u>:

- Dễ dàng thấy rằng mọi ma trận giao hoán với ma trận chéo là một ma trận chéo.

- Trong trường hợp trên, nếu B là ma trận chéo với các phần tử chéo khác nhau thì Q cũng là ma trận chéo và với $X = PQP^{-1}$ thì X cũng đã được chéo hoá với cùng cơ sở đã chéo hoá A. Như vậy, ta có kết luận: nếu một ma trận X giao hoán với một ma trận A có các giá trị riêng đôi một phân biệt thì X cũng chéo hoá được với cùng cơ sở đó, nói khác đi thì X có cùng vector riêng với A.

Ví dụ 1 (Câu 3 đề dự tuyển ĐH Quy Nhơn 2009) ⭐⭐⭐⭐⭐:

Xác định tất cả các ma trận vuông cấp 3 giao hoán với ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Giải</u>:

Chéo hoá A, ta được:

$$A = CPC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Khi đó nếu X giao hoán được với A

$$XA = AX <=> XCPC^{-1} = CPC^{-1}X <=> (C^{-1}XC)P = P(C^{-1}XC)$$

tương đương $Q = C^{-1}XC$ giao hoán được với P.

Thử trực tiếp thì Q có dạng

$$Q = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & d \\ 0 & e & c \end{pmatrix}$$

Vậy ma trận X cần tìm có dạng $X = CQC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & d \\ 0 & e & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a-b+c+d-e & a-b-e & a-2b+c+d-2e \\ a-c+e & a+e & a-c+2e \\ -a+b-d & -a+b & -a+2b-d \end{pmatrix}$$

Ngược lại, mọi ma trận có dạng trên đều giao hoán được với A.

<u>**Phương pháp 3**</u>: Đưa bài Toán về tìm mọi ma trận X giao hoán với ma trận B tự khả nghịch (nếu có thể).

Ví dụ 1 (Câu 1 Olympic 2001) ☆☆☆☆☆ : Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tìm tất cả các ma trận X vuông cấp 3 sao cho $AX + XA = 0$.

<u>Giải</u>:

Ta có $A^2 = I$. Giả sử X là ma trận thoả mãn $AX + XA = 0$, suy ra $X = -AXA$, từ đó

$$X = \frac{1}{2}(X + X) = \frac{1}{2}(A^2X - AXA) = A\left(\frac{1}{2}AX\right) - \left(\frac{1}{2}AX\right)A = AB - BA$$

trong đó $B = \frac{1}{2}AX$. Ngược lại mọi ma trận X có dạng

$$X = AB - BA$$

đều thoả mãn $AX + XA = 0$, thật vậy

$$AX + XA = A(AB - BA) - (AB - BA)A = A^2B - ABA + ABA - BA^2 = B - B = 0$$

Vậy ma trận X cần tìm là $AB - BA$ với B là ma trận tuỳ ý.

Dựa vào cách làm này, quay trở lại ví dụ trước, ta còn có thể làm như sau:

Ví dụ 2 (Câu 3 đề dự tuyển ĐH Quy Nhơn 2009) ☆☆☆☆☆:

Xác định tất cả các ma trận vuông cấp 3 giao hoán với ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Giải</u>:

Dễ thấy $A^2 = A$ hay $A(A - I) = 0$.

Đặt $A = \frac{1}{2}(B + I)$ thì ta có $A(A - I) = \frac{1}{2}(B + I)\frac{1}{2}(B - I) = 0$, suy ra $B^2 = I$.

Mặt khác, ma trận X giao hoán với A nếu và chỉ nếu X giao hoán với B, thật vậy

$$AX = XA <=> \frac{1}{2}(B + I)X = \frac{1}{2}X(B + I) <=> BX = XB$$

Ta có $X = BXB$, từ đó

$$X = \frac{1}{2}(X + X) = \frac{1}{2}(B^2X + BXB) = B\left(\frac{1}{2}BX\right) + \left(\frac{1}{2}BX\right)B = BZ + ZB$$

trong đó $Z = \frac{1}{2}BX$.

Ngược lại mọi ma trận X có dạng $X = BZ + ZB$ đều giao hoán với B, thật vậy

$$BZ - ZB = B(BZ + ZB) - (BZ + ZB)B = B^2Z + BZB - BZB - ZB^2 = Z - Z = 0$$

Vậy ma trận X cần tìm là $BZ + ZB$, trong đó

$$B = 2A - I = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, Z \in M_3(\mathbb{R}).$$

DẠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH MA TRẬN

Câu (Câu 2 đề chọn đội tuyển ĐH Kinh tế Quốc dân 2005) ☆☆☆ :

Tìm ma trận X thoả mãn

$$X\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -7 \\ 15 & 2 & -13 \end{pmatrix}$$

Giải:

Ma trận thoả mãn đẳng thức là $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Câu ☆☆☆☆: Giải phương trình $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ trong đó X là ma trận vuông cấp 2.

Giải:

Ta có $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. Đặt $X - I = Y$ và $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Suy ra $Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} <=> \begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 6 \\ bc + d^2 = 4 \end{cases} <=> \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ cd = 6 \\ d^2 = 4 \end{cases}$.

Vậy $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ hoặc $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Câu ☆☆☆☆: Giải hệ $\begin{cases} (\operatorname{tr} X)Y + (\operatorname{tr} Y)X = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \\ XY = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \end{cases}$, trong đó X, Y là các ma trận vuông cấp 2.

Giải:

Từ hệ đã cho ta có

$$\operatorname{tr}[(\operatorname{tr} X)Y + (\operatorname{tr} Y)X] = 2\operatorname{tr} X \operatorname{tr} Y = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = 0 => \left[\begin{array}{l} \operatorname{tr} X = 0 \\ \operatorname{tr} Y = 0 \end{array}\right.$$

+) Nếu $\operatorname{tr} X = 0 = 0$ thì $\begin{cases} (\operatorname{tr} Y)X = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \\ XY = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \end{cases}$

Đặt $\operatorname{tr} Y = \frac{1}{\lambda}, \lambda \neq 0$ thì $X = \lambda \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$, ta được

$$\begin{cases} \operatorname{tr} Y = \dfrac{1}{\lambda} \\ 4\lambda \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \end{cases} <=> \begin{cases} \operatorname{tr} Y = \dfrac{1}{\lambda} \\ Y = \dfrac{1}{4\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \end{cases} => Y = \frac{1}{4\lambda} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vậy nghiệm của hệ là: $\begin{cases} X = \lambda \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \\ Y = \frac{1}{4\lambda} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$

+) Nếu $\operatorname{tr} Y = 0$ thì $\begin{cases} (\operatorname{tr} X)Y = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \\ XY = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \end{cases}$

Đặt $V(X) = \frac{1}{\mu}, \mu \neq 0$ thì $Y = \mu \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$, ta được

$$\begin{cases} \operatorname{tr} X = \dfrac{1}{\mu} \\ 4\mu X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \end{cases} <=> \begin{cases} \operatorname{tr} X = \dfrac{1}{\mu} \\ X = \dfrac{1}{4\mu} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \end{cases} => X = \frac{1}{12\mu} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Vậy nghiệm của hệ là: $\begin{cases} X = \frac{1}{12\mu} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \\ Y = \mu \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}^*$

Câu: Cho X, Y, Z là các ma trận vuông cấp 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} XY = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ YZ = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ ZX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$.

Giải:

Đặt $\begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} => \begin{cases} XY = A \\ YZ = B \\ ZX = C \end{cases} => AC = XYZX = XBX.$

Đặt $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ thì từ $XYZX = XBX$ ta có

$$\begin{cases} (2x+y)(x+z) = 2 \\ (2x+y)(y+t) = 0 \\ (2z+t)(x+z) = 6 \\ (2z+t)(y+t) = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} y+t = 0 \\ (2x+y)(x+z) = 2 \\ (2z+t)(x+z) = 6 \end{cases}$$

$$<=>\begin{cases} y+t=0 \\ (2x+y)(x+z)=2 \\ 2(x+z)^2=8 \end{cases} <=> \begin{cases} t=-y \\ (2x+y)=\pm 1 \\ (x+z)=\pm 2 \end{cases}$$

Vậy $X=\begin{pmatrix} x & \pm 1-2x \\ \pm 2-x & \mp 1+2x \end{pmatrix}$

Ta chứng minh được rằng X khả nghịch khi và chỉ khi $\pm 4x-2\neq 0$. Khi đó

$$X^{-1}=\frac{1}{\pm 4x-2}\begin{pmatrix} \mp 1+2x & \mp 1+2x \\ \mp 2+x & x \end{pmatrix}$$

Vậy nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} X=\begin{pmatrix} x & \pm 1-2x \\ \pm 2-x & \mp 1+2x \end{pmatrix} \\ Y=\dfrac{1}{\pm 2x-1}\begin{pmatrix} \mp 1+2x & \mp 1+2x \\ \mp 1+x & x \end{pmatrix} \\ Z=\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

CÁC DẠNG KHÁC

Câu (Câu 6 Olympic 1994) ☆☆☆☆ : Cho A là ma trận vuông cấp hai luỹ đẳng. Chứng minh rằng để ma trận X giao hoán với A, điều kiện cần và đủ là tồn tại ma trận X_0 sao cho $X=AX_0+X_0A-X_0$.

Giải:

Giả sử ta có ma trận X giao hoán với ma trận A luỹ đẳng. Xét $X_0=2AX-X$, ta có

$$AX_0+X_0A-X_0=A(2AX-X)+(2AX-X)A-X_0=X$$

Ngược lại mọi ma trận X có dạng $X=AX_0+X_0A-X_0$ đều giao hoán được với A luỹ đẳng.

Câu (Câu 3 đề dự tuyển ĐH Thuỷ Lợi 2009) ☆☆☆☆☆ :

Tìm tất cả các số thực a,b sao cho $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^4=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

Giải:

Đặt $a=x\sqrt[4]{2}, b=y\sqrt[4]{2}$, phương trình đã cho được đưa về dạng

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}^4=\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{bmatrix}$$

Định thức vế trái cho ta $x^2+y^2=1$ nên đặt $x=\cos\alpha, y=\sin\alpha$, ta có

$$\begin{bmatrix} \cos 4\alpha & -\sin 4\alpha \\ \sin 4\alpha & \cos 4\alpha \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có $\alpha=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$ với $k=0,1,2,3$

Vậy $a = \sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}\right), b = \sqrt[4]{2}\sin\left(\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}\right)$ với $k = 0,1,2,3$.

Câu (Câu 3b đề chọn đội tuyển vòng 1 ĐH An Giang 2009) ⭐⭐⭐⭐ : Tìm tất cả các ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ có mọi phần tử không âm và ma trận khả nghịch của nó cũng có mọi phần tử không âm.

Giải:

Kí hiệu $A = (a_{ij}), A^{-1} = (b_{ij}), i, j = \overline{1,n};\ a_{ij} \geq 0, b_{ij} \geq 0\ \forall i, j$. Khi đó, ta có

$$AA^{-1} = (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right) = I$$

Suy ra $\forall i, j$, ta có

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0 \text{ nếu } i \neq j \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = 1 \text{ nếu } i \neq j \end{cases} => \begin{cases} a_{ik}b_{kj} = 0 \text{ nếu } i \neq j \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = 1 \text{ nếu } i \neq j \end{cases} => \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a_{ik} = 0 \\ b_{kj} = 0 \end{array}\right. \text{ nếu } i \neq j \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = 1 \text{ nếu } i \neq j \end{cases}$$

Suy ra $a_{ii}b_{ii} = 1, i = \overline{1,n}$. Vậy chỉ có ma trận đường chéo với các phần tử chéo không âm là thoả mãn yêu cầu đề bài

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, a_{ii} > 0, i = \overline{1,n}$$

PHẦN XII: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Câu 1 (Câu 6a Olympic 2009) ☆☆☆☆ **:** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

Giải:

Từ hai phương trình đầu, ta có: $3x_1 - x_2 = 3x_3 - x_4$.

Từ phương trình 3, 4, ta có: $3x_1 - x_2 = x_4 - 3x_3$

=> $3x_1 - x_2 = 0$

Từ phương trình 1, 3, ta có: $x_1 + 3x_2 = 3x_3 - x_4$.

Từ phương trình 2, 4, ta có: $x_1 + 3x_2 = x_4 - 3x_3$

=> $x_1 + 3x_2 = 0$

Vậy ta có $x_1 = x_2 = 0$ => $x_4 = x_6 = 1,\ x_3 = x_5 = \frac{1}{3}$

Câu 2 (Câu 4 Olympic 1999) ☆☆☆☆☆ **:** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \ldots + nx_1 = 2 \\ \vdots \\ x_n + 2x_1 + 3x_2 + \ldots + nx_{n-1} = n \end{cases}$$

Giải:

Cộng theo vế tất cả phương trình, ta được

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$$

Lấy phương trình thứ k trừ theo vế phương trình thứ $k+1$ $(k < n)$

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - nx_k = k - (k+1)$$

$$=> x_k = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}\ (k = 1, \ldots, n-1)$$

Lấy phương trình thứ n trừ theo vế phương trình thứ nhất, ta được

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - nx_n = n - 1$$

$$=> x_n = -\frac{n-2}{n}$$

Câu 3 (Câu 3 Olympic 1996) ☆☆☆☆☆ **:** Cho hệ phương trình tuyến tính gồm 10 phương trình và 11 ẩn số. Biết rằng:

1) (1992, 1993, …, 2002) là một nghiệm của hệ.

2) Khi xoá cột thứ j trong ma trận hệ số thì ta được một ma trận vuông cấp 10 có định thức đúng bằng j $(j = 1, \dots, 11)$.

Hãy tìm nghiệm tổng quát của hệ đã cho.

Giải:

Kí hiệu $A = \left(a_{ij}\right)_{10\times 11}$ là ma trận hệ số của hệ phương trình.

Từ giả thiết 2), thấy ngay $\operatorname{rank} A = 10$ nên hệ phương trình thuần nhất tương ứng $Ax = 0$ chỉ có một nghiệm độc lập tuyến tính.

Từ giả thiết 1), $(1992, 1993, \dots, 2002)$ là một nghiệm riêng của hệ, do đó, nghiệm tổng quát của nó có dạng sau

$$(x_1, x_2, \dots, x_{11}) = (1992, 1993, \dots, 2002) + (a_1, a_2, \dots, a_{11})t \quad ,\forall\, t \in \mathbb{R}$$

trong đó $(a_1, a_2, \dots, a_{11})$ là một nghiệm riêng của hệ thuần nhất tương ứng $Ax = 0$ và vấn đề đặt ra là ta cần tìm một nghiệm riêng này.

Với mỗi $j = 1, \dots, 11$, kí hiệu B_j là ma trận vuông cấp 11 có dòng đầu là dòng thứ j của ma trận A, 10 dòng còn lại tương ứng vẫn là các dòng của A, nghĩa là

$$B_j = \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{j10} & a_{j11} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,10} & a_{1,11} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{j10} & a_{j11} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{91} & a_{92} & \dots & a_{9,10} & a_{9,11} \\ a_{10,1} & a_{10,2} & \dots & a_{10,10} & a_{10,11} \end{pmatrix}$$

Như vậy $|B_j| = 0$ do có 2 dòng giống nhau. Mặt khác, khai triển $|B_j|$ theo dòng đầu và áp dụng giả thiết 2), ta có

$$a_{j1}.1 + a_{j2}.(-2) + a_{j3}.3 + \dots + a_{j10}.(-10) + a_{j11}.11 = 0 \ \ \forall\, j = 1, \dots, 11$$

Suy ra $(1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, 9, -10, 11)$ là một nghiệm riêng của hệ thuần nhất $Ax = 0$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm tổng quát

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \dots, x_{11}) &= (1992, 1993, \dots, 2002) + (1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, 9, -10, 11)t \\ &= (1992 + t, 1993 - 2t, \dots, 2002 + 11t) \forall\, t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Câu 4 ⭐⭐⭐⭐: Giả sử $a \in \mathbb{R}^*$. Chứng minh rằng hệ phương trình sau luôn có nghiệm với mọi $b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax + (1-b)y + cz + (1-d)t = a \\ (b-1)x + ay + (d-1)z + ct = b \\ -cx + (1-d)y + az + (b-1)t = c \\ (d-1)x - cy + (1-b)z + at = d \end{cases}$$

Chứng minh

Gọi A là ma trận các hệ số của hệ phương trình, A^T là ma trận chuyển vị của ma trận A, ta có

$$AA^T = [a^2 + (1-b)^2 + c^2 + (1-d)^2]I$$

Do đó:

$$\det A = [a^2 + (1-b)^2 + c^2 + (1-d)^2] \neq 0 \ \forall a \in \mathbb{R}^*, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Vậy hệ luôn có nghiệm với mọi $b, c, d \in \mathbb{R}$.

PHẦN XIII: MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

Câu 1 (Câu 3 Olympic 1996) ⭐⭐⭐⭐:

Cho $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & a_{13}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & a_{23}(n) \\ a_{31}(n) & a_{32}(n) & a_{33}(n) \end{pmatrix}$. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)}$

<u>Giải</u>:

Ta có

$$\begin{pmatrix} a_{11}(n+1) & a_{12}(n+1) & a_{13}(n+1) \\ a_{21}(n+1) & a_{22}(n+1) & a_{23}(n+1) \\ a_{31}(n+1) & a_{32}(n+1) & a_{33}(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & a_{13}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & a_{23}(n) \\ a_{31}(n) & a_{32}(n) & a_{33}(n) \end{pmatrix}$$

Đồng nhất, ta thu được

$$\begin{cases} a_{22}(n+1) = 3a_{22}(n) \\ a_{32}(n+1) = a_{22}(n) + 2a_{32}(n) \end{cases}$$

Đặt $u_n = \dfrac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)} \Rightarrow u_1 = 3, u_{n+1} = \dfrac{a_{22}(n+1)}{a_{32}(n+1)} = \dfrac{3a_{22}(n)}{a_{22}(n) + 2a_{32}(n)} = \dfrac{3.\dfrac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)}}{\dfrac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)} + 2} = \dfrac{3u_n}{u_n + 2}$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng dãy $\{u_n\}$ đơn điệu giảm và $u_n \geq 1$. Suy ra tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \geq 1$, chuyển qua giới hạn đẳng thức cuối cùng, ta được $a = \frac{3a}{a+2}$, tức $a = 1$.

Câu 2 (Câu 4 Olympic Quốc tế 1997) ⭐⭐⭐⭐⭐: Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ thoả $A^2 + B^2 = AB$. Chứng minh rằng nếu $BA - AB$ khả nghịch thì n chia hết cho 3.

Chứng minh

Đặt $S = A + zB$, trong đó $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ta có

$$S\bar{S} = (A + zB)(\overline{A + zB}) = (A + zB)(A + \bar{z}B) = A^2 + zBA + \bar{z}AB + B^2$$
$$= AB + zBA + \bar{z}AB = zBA + (1 + \bar{z})AB = z(BA - AB)$$

Ta có $\det(S\bar{S}) = \det S \det \bar{S} = \det S\, \overline{\det S} = |\det S|^2$ là một số thực.

Mặt khác, nếu $BA - AB$ khả nghịch thì $\det(S\bar{S}) = \det[z(BA - AB)] = z^n \det(BA - AB) \neq 0$. $\det(S\bar{S})$, $\det(BA - AB)$ là số thực nên z^n cũng phải là số thực, tức là phần ảo của nó phải bằng 0, mà

$$z^n = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n = \cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}$$

Suy ra phần ảo của z^n bằng 0 khi và chỉ khi n chia hết cho 3.

Câu 3 (Tính chất ma trận luỹ linh – Từ Wikipedia):
Mọi ma trận suy biến đều có thể viết thành tích của các ma trận lũy linh.

Câu 4 (Câu 5 đề chọn đội tuyển ĐH Kinh tế Quốc dân 2005): Cho A, B là các ma trận vuông cấp $n \geq 2$ thoả mãn $AB = A + B$ và $A^{2005} = 0$. Khi đó hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn số $x_1, \dots, x_n$ nhận B làm ma trận hệ số có bao nhiêu nghiệm? Giải thích.

Giải:

Những thứ rút ra được:

Từ giả thiết $AB = A + B$ dễ dàng suy ra $AB = BA$ và $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$.

Giả sử x_0 là nghiệm của hệ $Bx = 0$, khi đó $0 = Bx_0 = (AB - A)x_0 = ABx_0 - Ax_0 = -Ax_0$ tức là x_0 cũng là nghiệm của hệ $Ax = 0$.

Ngược lại, giả sử x_0 là nghiệm của hệ $Ax = 0$, khi đó $Bx_0 = (AB - A)x_0 = ABx_0 - Ax_0 = B(Ax_0) = 0$.

Từ đó suy ra hai hệ $Ax = 0$ và $Bx = 0$ có cùng tập nghiệm.

$A^{2005} = 0$ nên $\det A = 0$ và $I - A$ khả nghịch $(I - A)^{-1} = (I + A + \dots + A^{2004})$

Từ $A = AB - B = -(I - A)B \Rightarrow -A - A^2 - \dots - A^{2004} - A^{2005} = B$

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = \operatorname{rank}(A + A^2 + \dots + A^{2005})$$

Câu 6 (Câu 2b đề chọn đội tuyển ĐH Giao thông vận tải 2011):

Cho $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$, $AB = BA$, $\det B = 1$. Chứng minh rằng nếu $\det(A^3 + B^3) = 1$ thì $A^2 = I$.

Chứng minh

Nếu $1 = \det(A^3 + B^3) = \det(A + B)\det(A^2 - AB + B^2)$

$\Rightarrow \det(A + B) = \det(A^2 - AB + B^2) = \pm 1$

$$1 = \det(A^3 + B^3)\det B = \det(A + B)\det(A^2 - AB + B^2)\det B$$

$$1 = \det(A^3 + B^3)\det B = \det(A + B)\det\big(A^2 - B(A + B)\big)\det B$$

Câu 7: *Cho hệ phương trình tuyến tính tổng quát dưới dạng $AX = B$, trong đó $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$, $X = (x_1 \dots x_n)^T$ và $B = (b_1 \dots b_m)^T$. Giả sử X_0 là một nghiệm riêng của hệ $AX = B$. Chứng minh rằng X là nghiệm của hệ $AX = B$ nếu và chỉ nếu nó có dạng $X = X_0 + X'$ với X' là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $AX = 0$.

*Với $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ như câu trên, hãy biểu diễn mọi nghiệm của hệ $AX = B$ dưới dạng tổng của một nghiệm riêng của nó với nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng.

Trong *Đại số tuyến tính (Linear Algebra)* có hai ngôn ngữ biểu đạt vấn đề, đó là ngôn ngữ *ma trận (Matrix)* và ngôn ngữ *ánh xạ tuyến tính (Linear Mapping, Linear Transformation)*. Đôi khi việc đưa ngôn ngữ này sang ngôn ngữ khác để giải quyết vấn đề sẽ trở nên đơn giản hơn và thường có những vấn đề phải giải quyết bằng cả hai ngôn ngữ đan xen, do đó người làm Toán phải nắm vững cả hai cách biểu đạt. Trong kì thi Olympic Toán Sinh viên toàn quốc, ta thường dùng nhiều đến ngôn ngữ ma trận hơn nhưng nếu sử dụng đến ngôn ngữ ánh xạ tuyến tính, có những vấn đề trở nên đơn giản cực kì.

8	ma trận không	zero matrix
9	ma trận đơn vị	identity matrix
10	ma trận dạng bậc thang	echelon form, rref = row reduced echelon form
11	ma trận chéo	diagonal matrix
12	ma trận vuông	square matrix
13	ma trận tam giác trên	upper triangular matrix
14	ma trận tam giác dưới	lower triangular matrix
23	ma trận hệ số của hệ AX =b	coefficient matrix
24	ma trận mở rộng (A|b)	augmented matrix
25	hệ phương trình tuyến tính	system of linear equations, linear system
26	hệ thuần nhất	homogenuous system
27	hệ cramer	cramer's system
28	phương pháp khử Gauss	Gaussian elimination
	the Gram – Schmidt process	
29	không gian vector	vector space
30	độc lập tuyến tính	linear independent set
31	phụ thuộc tuyến tính	linear dependent set
32	tổ hợp tuyến tính	linear combination
33	tập sinh của không gian vector	spanning set for a vector space
34	cơ sở của không gian vector	basis for a vector space
35	số chiều của không gian vector	dimension of a vector space
36	không gian con	subspace
37	không gian nghiệm của hệ AX=b	null space of A
38	tọa độ của vector trong cơ sở E	coordinates of a vector with respect to the basis

39	ma trận chuyển cơ sở từ E sang F	the change of bases from E to F
40	giao của hai không gian con	intersection of two subspaces
41	Tổng của hai không gian con	sum of two subspaces
43	không gian Euclide	Euclidean space
44	độ dài của vector	norm of a vector
45	khoảng cách giữa hai vector	distance of two vectors
46	góc giữa hai vector	angle between two vectors
47	bù vuông góc của không gian con	orthogonal complement of a subspace
48	hình chiếu vuông góc của vector xuống không gian con	orthogonal projection of a vector onto subspace
49	khoảng cách từ vector đến không gian con	distance from the vecto v to the subspace
51	phân tích LU của ma trận A	LU factorization
52	phân tích QR của ma trận AQ	R factorization
54	nhân của ánh xạ tuyến tính	kernel of a linear mapping
55	ảnh của ánh xạ tuyến tính	image of a linear mapping
56	ma trận của ánh xạ t/tính trong cơ sở E, F	matrix of a linear mapping with respect to two bases E and F
59	không gian con riêng	eigenspace