KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN-HỌC SINH LẦN THỨ 28

Trực tuyến, 23-24/4/2022

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐH KHOA HỌC TỰ NHIÊN ĐHQG HÀ NỘI

HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐH KHOA HỌC
TỰ NHIÊN
ĐHQG HÀ NỘI

KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC
SINH VIÊN - HỌC SINH LẦN THỨ 28

BIÊN TẬP

Ngô Quốc Anh
Trường ĐH Khoa học Tự nhiên-ĐHQG Hà Nội
Vũ Tuấn Anh
ĐH Bách khoa Paris (CH Pháp) & Viện Toán học
Đoàn Trung Cường
Hội Toán học Việt Nam & Viện Toán học
Trần Thiện Khải
Trường Đại học Trà Vinh

HÀ NỘI, 23-24/4/2022

GIỚI THIỆU

Kỳ thi Olympic Toán học lần thứ 28 dành cho sinh viên các trường đại học, cao đẳng, học viện và học sinh phổ thông các trường chuyên trong cả nước đã được tổ chức trong hai ngày 23-24/4/2022. Năm nay Ban Tổ chức đã quyết định tổ chức qua hình thức trực tuyến để tránh ảnh hưởng bất ngờ của đại dịch, dù vậy chúng ta vẫn được dự lại phần nào không khí của những kỳ thi Olympic Toán học hằng năm.

Quyển kỷ yếu này tập hợp các bài đề xuất của các trường tham dự kỳ thi với mong muốn cung cấp thêm một tài liệu tham khảo cho những người quan tâm. Chúng tôi giữ nguyên hầu hết cách viết, trình bày ban đầu khi các đoàn gửi đến, công việc biên tập chủ yếu là chỉnh sửa một số nội dung chưa chính xác, cả toán và chính tả, và phân loại tương đối các bài cũng như biên tập định dạng chung. Một số ký hiệu như ma trận, chuyển vị của ma trận, tập số thực, số tự nhiên, ... có sự khác nhau giữa các đoàn, chúng tôi cũng đã cố gắng chỉnh sửa theo những cách ký hiệu phổ biến nhất nhằm tạo thuận lợi cho người đọc, tuy nhiên do thời gian hạn chế nên việc chỉnh sửa vẫn chưa được như mong muốn.

Nhóm biên tập

Mục lục

Phần I

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN - HỌC SINH LẦN THỨ 28

Thông tin về kỳ thi

Đơn vị tổ chức

- Bộ Giáo dục và Đào tạo
- Hội Toán học Việt Nam*
- Liên hiệp các Hội Khoa học và Kỹ thuật Việt Nam
- Trung ương Hội Sinh viên Việt Nam
- Trường ĐH Khoa học Tự nhiên - ĐHQG Hà Nội*
- Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán - Chương trình trọng điểm quốc gia Phát triển Toán học giai đoạn 2021-2030

**: đơn vị tổ chức chính.*

Ban tổ chức

Trưởng ban: PGS.TSKH. Vũ Hoàng Linh - Phó Chủ tịch kiêm Tổng thư ký Hội Toán học Việt Nam.

Phó trưởng ban: Đại diện Bộ Giáo dục & Đào tạo; Đại diện Trung ương Hội sinh viên Việt Nam; GS.TSKH. Phạm Thế Long - Phó Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam.

Ủy viên: PGS. TS. Đoàn Trung Cường, Phó TTK Hội Toán học Việt Nam; TS. Lê Cường, Viện Công nghệ Thông tin - ĐHQG Hà Nội; TS. Trần Nam Dũng, Trường ĐH Khoa học Tự nhiên - ĐHQG Tp. HCM; PGS.TS. Trần Kiêm Minh, Trường Đại học Sư phạm - ĐH Huế; TS. Nguyễn Chu Gia Vượng, Viện Toán học; ThS. Phạm Đình Hiệu, Trường ĐH Khoa học Tự nhiên - ĐHQG Hà Nội.

Ban giám khảo

PGS.TSKH. Vũ Hoàng Linh (Trưởng ban), PGS.TS. Đoàn Trung Cường (Phó trưởng ban), TS. Nguyễn Chu Gia Vượng (Phó trưởng ban), PGS.TS. Ngô Quốc Anh, TS. Đào Phương Bắc.

Các tiểu ban ra đề

Tiểu ban Đại số: TS. Đào Phương Bắc (Trưởng tiểu ban), TS. Nguyễn Chu Gia Vượng.

Tiểu ban Giải tích: PGS.TS. Ngô Quốc Anh (Trưởng tiểu ban), TS. Nguyễn Duy Thái Sơn, PGS.TS. Đỗ Đức Thuận.

Tiểu ban Trung học Phổ thông: TS. Nguyễn Chu Gia Vượng (Trưởng tiểu ban), Th.S. Trần Quang Hùng.

Tổng kết

Sau 2 năm bị gián đoạn do đại dịch COVID-19, kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên – Học sinh lần thứ 28 đã được tổ chức vào hai ngày 23-24/4/2022 với hình thức trực tuyến - các đội thi tại chỗ dưới sự giám sát của Ban Tổ chức qua camera và sự giám sát chéo giữa các đoàn qua phần mềm Zoom. Kỳ thi là hoạt động thường niên do Hội Toán học Việt Nam phối hợp cùng Bộ Giáo dục và Đào tạo, Liên hiệp các Hội khoa học và kỹ thuật Việt Nam và Trung ương Hội Sinh viên Việt Nam tổ chức, năm nay là lần đầu tiên kỳ thi được tổ chức theo hình thức trực tuyến. Kỳ thi năm nay đã nhận được sự ủng hộ và tài trợ của Liên hiệp các Hội khoa học và kỹ thuật Việt Nam và Chương trình trọng điểm cấp Quốc gia về Toán học giai đoạn 2021-2030 của Bộ Giáo dục và Đào tạo (thông qua Viện Nghiên cứu Cao cấp về Toán).

Việc chuyển hình thức tổ chức kỳ thi từ trực tiếp như truyền thống sang trực tuyến để thích ứng với tình hình dịch bệnh đã được Ban Tổ chức chuẩn bị từ năm 2021 với việc xây dựng quy trình coi thi, nộp bài thi, chấm thi và ban hành các quy định, quy chế.

Ban Tổ chức kỳ thi năm nay đã nhận được đăng ký tham gia của 102 đoàn (58 trường đại học, học viện, cao đẳng và 44 trường THPT trên toàn quốc) với 767 thí sinh và trên 800 lượt thi (có gần 100 sinh viên đăng ký thi hai môn). Đây là con số kỷ lục cả về số đoàn dự thi và số thí sinh. Tương tự như những năm trước, các sinh viên tham gia thi một trong hai môn Đại số và Giải tích, các học sinh phổ thông tham gia cả hai bài thi Số học và Hình học. Môn Đại số có 249 sinh viên tham gia thi, môn Giải tích có 244 sinh viên tham gia, chia theo hai bảng A và B. Có 362 học sinh THPT tham gia kỳ thi năm nay. Số lượng thí sinh và số đoàn trường THPT tăng mạnh so với những năm trước cho thấy một lợi thế của hình thức thi trực tuyến.

Thí sinh làm bài thi (hình ảnh từ camera). Ảnh: Hội Toán học Việt Nam.

Do thi trực tuyến nên nhiều hoạt động truyền thống của kỳ thi Olympic bên cạnh hoạt động thi cử như thể thao, văn nghệ đương nhiên không tổ chức được. Bên cạnh đó, ngay trước ngày khai mạc, Ban Tổ chức đã tổ chức chuỗi

4 bài giảng dành cho học sinh THPT do những chuyên gia trong lĩnh vực bồi dưỡng học sinh giỏi toán bậc THPT đứng lớp.

Để đảm bảo sự công khai, minh bạch và công bằng, ngày 15/5/2022 Ban Tổ chức đã họp trực tuyến với các trưởng đoàn để chốt ngưỡng xét giải trên cơ sở các nguyên tắc đã được thông báo trước. Căn cứ ngưỡng xét giải được nhất trí cao, Ban Tổ chức quyết định trao giải phần đại học như sau:

— 26 giải nhất môn Đại số, 20 giải nhất môn Giải tích;
— 41 giải nhì môn Đại số, 38 giải nhì môn Giải tích;
— 70 giải ba môn Đại số, 64 giải ba môn Giải tích;
— 23 giải khuyến khích môn Đại số và 23 giải khuyến khích môn Giải tích.

Đối với các học sinh THPT, Ban tổ chức đã quyết định trao 29 giải nhất, 59 giải nhì, 82 giải ba và 32 giải khuyến khích.

Mặc dù không xếp hạng các đoàn, Ban tổ chức ghi nhận thành tích xuất sắc của các đoàn

— Trường ĐH Khoa học Tự nhiên-ĐHQG Hà Nội và Trường ĐH Khoa học Tự nhiên-ĐHQG TPHCM có thành tích dẫn đầu bảng A với 6 giải nhất, 3 giải nhì, 1 giải ba;
— Trường ĐH Mỏ-Địa chất dẫn đầu bảng B với 7 giải nhất, 2 giải nhì, 1 giải khuyến khích;
— Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội dẫn đầu các trường THPT với 6 giải nhất, 3 giải nhì.

GS. Ngô Việt Trung, Chủ tịch Hội toán học Việt Nam (ngoài cùng bên phải), khen thưởng các đoàn có nhiều thí sinh đạt thành tích tốt. Ảnh: Hội Toán học Việt Nam.

Ban Tổ chức cũng ghi nhận nỗ lực của một số trường ở các vùng miền khó khăn đã đạt kết quả tốt như Trường ĐH Quy Nhơn (bảng A), Trường ĐH Quảng Nam, Trường ĐH Đồng Tháp (bảng B), Trường THPT chuyên Chu Văn An-Bình Định, Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn-Quảng Trị, Trường THPT chuyên Lương Văn Chánh-Phú Yên, Trường THPT chuyên Võ Nguyên Giáp-Quảng Bình. Nhìn chung, Ban Tổ chức đánh giá cao sự nghiêm túc và cố gắng của tất cả 102 đoàn tham gia kỳ thi.

Về cá nhân, có 6 sinh viên đã đạt giải nhất cả hai môn Đại số và Giải tích. Đó là 5 sinh viên **Nguyễn Trường Thịnh** (Trường Đại học Công nghệ Thông tin – ĐHQG TPHCM), **Nguyễn Mạc Nam Trung** (Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – ĐHQG TPHCM), **Nguyễn Tiến Hoàng** (Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – ĐHQG TPHCM), **Trà Trần Quý Thiên** (Trường Đại học Quy Nhơn), **Lê Văn Mạnh** (Trường Đại học Sư phạm TPHCM) đạt 2 giải nhất bảng A; sinh viên **Ngô Thanh Hà** (Trường Đại học Quảng Nam) đạt 2 giải nhất bảng B. Đặc biệt, sinh viên **Nguyễn Mạc Nam Trung** (Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – ĐHQG TPHCM) có kết quả đứng đầu cả 2 môn (29,5/30 điểm môn Đại số và 30/30 điểm môn Giải tích). Ba học sinh THPT có điểm cao nhất đều đến từ Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội là **Trần Thăng Long** (52/60 điểm), **Phạm Duy Nguyên Lâm** và **Đặng Quang Thắng** (đều 51/60 điểm).

Ngày 29/5/2022, Hội Toán học Việt Nam đã tổ chức Hội nghị tổng kết và Lễ trao giải kỳ thi tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội. Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên – Học sinh năm nay tiếp tục góp phần nâng cao chất lượng dạy và học toán, thúc đẩy phong trào học toán trong sinh viên, đồng thời phát hiện, bồi dưỡng các sinh viên giỏi toán trong các trường đại học, cao đẳng và học viện. Bên cạnh đó, kỳ thi cũng thúc đẩy niềm say mê toán học trong học sinh khối THPT, phát hiện, bồi dưỡng học sinh giỏi toán cũng như tạo cơ hội giao lưu giữa các học sinh giỏi toán khối THPT với các sinh viên và giảng viên toán tại các trường đại học và học viện trên toàn quốc.

Vũ Hoàng Linh
Trưởng Ban Tổ chức

Danh sách các đoàn

Đại học

1. Đại học An Giang. Trưởng đoàn: Lê Văn Chua
2. Đại học Bách khoa - Đại học Quốc gia Tp. HCM. Trưởng đoàn: Nguyễn Tiến Dũng
3. Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội. Trưởng đoàn: Lê Phê Đô
4. Đại học Công nghệ Đông Á. Trưởng đoàn: Nguyễn Thị Thanh Hà
5. Đại học Công nghệ Thông tin - Đại học Quốc gia Tp. HCM. Trưởng đoàn: Cao Thanh Tình
6. Đại học Công nghiệp Hà Nội. Trưởng đoàn: Đỗ Thị Thanh
7. Đại học Công nghiệp Tp. HCM. Trưởng đoàn: Lê Phúc Lữ
8. Đại học Đà Lạt. Trưởng đoàn: Đặng Tuấn Hiệp
9. Đại học Dầu khí Việt Nam. Trưởng đoàn: Phạm Thị Hoài Lan
10. Đại học Đồng Nai. Trưởng đoàn: Quách Văn Chương
11. Đại học Đồng Tháp. Trưởng đoàn: Nguyễn Văn Dũng
12. Đại học Giáo dục - Đại học Quốc gia Hà Nội. Trưởng đoàn: Đào Thị Hoa Mai
13. ĐH Giao thông vận tải, phân hiệu Tp. HCM. Trưởng đoàn: Nguyễn Thị Thái Hà
14. Đại học Hải Phòng. Trưởng đoàn: Nguyễn Thị Thanh Vân
15. Đại học Hàng Hải Việt Nam. Trưởng đoàn: Nguyễn Văn Trịnh
16. Đại học Hồng Đức. Trưởng đoàn: Lê Anh Minh
17. Đại học Hùng Vương, Phú Thọ. Trưởng đoàn: Hà Ngọc Phú
18. Đại học Khoa học - Đại học Huế. Trưởng đoàn: Bùi Văn Chiến
19. Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Tp.HCM. Trưởng đoàn: Võ Đức Cẩm Hải
20. Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội. Trưởng đoàn: Trịnh Viết Dược
21. Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Trưởng đoàn: Trần Xuân Quý

22. Đại học Kiên Giang. Trưởng đoàn: Nguyễn Thanh Sang
23. Đại học Kiến trúc Hà Nội. Trưởng đoàn: Đặng Đình Hanh
24. Đại học Kinh tế Quốc dân. Trưởng đoàn: Nguyễn Hoàng Hà
25. Đại học Kỹ thuật – Hậu cần CAND. Trưởng đoàn: Phan Quang Huy
26. Đại học Mỏ - Địa chất. Trưởng đoàn: Nguyễn Thị Lan Hương
27. Đại học Ngoại thương, Cơ sở 1. Trưởng đoàn: Phùng Duy Quang
28. Đại học Nông Lâm Huế. Trưởng đoàn: Nguyễn Đức Hồng
29. Đại học Phạm Văn Đồng. Trưởng đoàn: Trần Ngọc Khuê
30. Đại học Phenikaa. Trưởng đoàn: Phan Quang Sáng
31. Đại học Quảng Nam. Trưởng đoàn: Trần Ngọc Quốc
32. Đại học Quy Nhơn. Trưởng đoàn: Nguyễn Ngọc Quốc Thương
33. Đại học Sao Đỏ. Trưởng đoàn: Nguyễn Viết Tuân
34. Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng. Trưởng đoàn: Phạm Quý Mười
35. Đại học Sư phạm - Đại học Huế. Trưởng đoàn: Võ Ngọc Cương
36. Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Trưởng đoàn: Bùi Thế Hùng
37. Đại học Sư phạm Hà Nội. Trưởng đoàn: Nguyễn Công Minh
38. Đại học Sư phạm Hà Nội 2. Trưởng đoàn: Trần Văn Bằng
39. Đại học Sư phạm Kỹ thuật Nam Định. Trưởng đoàn: Ngô Thanh Bình
40. Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long. Trưởng đoàn: Trần Hoài Ngọc Nhân
41. Đại học Sư phạm Tp. HCM. Trưởng đoàn: Trần Trí Dũng
42. Đại học Tài chính - Marketing. Trưởng đoàn: Nguyễn Tuấn Duy
43. Đại học Tài nguyên - Môi trường Tp.HCM. Trưởng đoàn: Lý Cẩm Hùng
44. Đại học Tân Trào. Trưởng đoàn: Khổng Chí Nguyện
45. Đại học Tây Nguyên. Trưởng đoàn: Nguyễn Ngọc Huề
46. Đại học Thăng Long. Trưởng đoàn: Nhâm Ngọc Tần
47. Đại học Thông tin liên lạc. Trưởng đoàn: Lê Võ Đại
48. Đại học Thủ Dầu Một. Trưởng đoàn: Trần Thanh Phong
49. Đại học Thủy Lợi. Trưởng đoàn: Nguyễn Hữu Thọ
50. Đại học Thủy lợi, Cơ sở 2. Trưởng đoàn: Huỳnh Thị Kim Loan
51. Đại học Trà Vinh. Trưởng đoàn: Nguyễn Văn Sáu
52. Đại học Trần Đại Nghĩa. Trưởng đoàn: Nguyễn Mạnh Hùng
53. Đại học Vinh. Trưởng đoàn: Trần Anh Nghĩa
54. Đại học Xây dựng Miền Trung. Trưởng đoàn: Đào Văn Dương

55. Học viện Hải quân. Trưởng đoàn: Nguyễn Cảnh Tùng
56. Học viện Kỹ thuật Mật mã, phân hiệu Tp. HCM. Trưởng đoàn: Phan Văn Trị
57. Học viện Kỹ thuật Quân sự. Trưởng đoàn: Hy Đức Mạnh
58. Học viện Phòng không - Không quân. Trưởng đoàn: Bùi Quảng Nam

Trung học Phổ thông

1. Khối THPT Chuyên Khoa học, Trường ĐH Khoa học - ĐH Huế. Trưởng đoàn: Nguyễn Văn Hùng
2. THPT Chu Văn An - Hà Nội. Trưởng đoàn: Nguyễn Bá Tuấn
3. THPT Chuyên - Đại học Sư phạm Hà Nội. Trưởng đoàn: Hà Duy Hưng
4. THPT Chuyên - Đại học Vinh. Trưởng đoàn: Lê Mạnh Linh
5. THPT Chuyên Bắc Kạn. Trưởng đoàn: Nông Thế Như
6. THPT Chuyên Bắc Ninh. Trưởng đoàn: Trần Ngọc Điệp
7. THPT Chuyên Bến Tre. Trưởng đoàn: Lê Thanh Hải
8. THPT Chuyên Chu Văn An - Bình Định. Trưởng đoàn: Huỳnh Duy Thủy
9. THPT Chuyên Chu Văn An - Lạng Sơn.
10. THPT Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh. Trưởng đoàn: Phạm Văn Ninh
11. THPT Chuyên Hà Tĩnh. Trưởng đoàn: Nguyễn Như Đức
12. THPT Chuyên Hoàng Lê Kha - Tây Ninh. Trưởng đoàn: Huỳnh Quốc Hào
13. THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình. Trưởng đoàn: Nguyễn Ngọc Xuân
14. THPT Chuyên Hùng Vương - Gia Lai. Trưởng đoàn: Huỳnh Thanh Luân
15. THPT Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ. Trưởng đoàn: Triệu Văn Dũng
16. THPT Chuyên Huỳnh Mẫn Đạt - Kiên Giang. Trưởng đoàn: Vũ Nguyên Duy
17. THPT Chuyên Khoa học Tự nhiên - ĐH KHTN - ĐHQG Hà Nội. Trưởng đoàn: Phạm Văn Quốc
18. THPT Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa. Trưởng đoàn: Bùi Văn Bình
19. THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định. Trưởng đoàn: Nguyễn Hoàng Cương
20. THPT Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi. Trưởng đoàn: Phạm Viết Huy

21. THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Bình Định. Trưởng đoàn: Võ Quốc Thành
22. THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng. Trưởng đoàn: Nguyễn Ngọc Tiến
23. THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Khánh Hòa. Trưởng đoàn: Đoàn Khánh Thành Tín
24. THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Quảng Trị. Trưởng đoàn: Trần Vinh Hợp
25. THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Bà Rịa Vũng Tàu. Trưởng đoàn: Lữ Thị Trà Giang
26. THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên. Trưởng đoàn: Trần Thị Thanh Thủy
27. THPT Chuyên Lê Thánh Tông - Quảng Nam. Trưởng đoàn: Lê Bình Long
28. THPT Chuyên Lương Văn Chánh. Trưởng đoàn: Trần Hồng Sơn
29. THPT Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình. Trưởng đoàn: Trần Văn Kiên
30. THPT Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam. Trưởng đoàn: Diệp Tình
31. THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp. Trưởng đoàn: Nguyễn Tuấn Anh
32. THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành - Yên Bái. Trưởng đoàn: Nguyễn Khánh Hòa
33. THPT Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng. Trưởng đoàn: Nguyễn Thị Thùy Phương
34. THPT Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương. Trưởng đoàn: Nguyễn Thế Sinh
35. THPT Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An. Trưởng đoàn: Ngô Sỹ Thủy
36. THPT Chuyên Quang Trung - Bình Phước. Trưởng đoàn: Trần Minh Hiền
37. THPT Chuyên Thái Bình. Trưởng đoàn: Phạm Công Sính
38. THPT Chuyên Thăng Long - Đà Lạt. Trưởng đoàn: Trần Trịnh Minh Sơn
39. THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa - Tp. HCM. Trưởng đoàn: Nguyễn Văn Phương
40. THPT Chuyên Trần Phú - Hải Phòng. Trưởng đoàn: Trần Quang Thắng
41. THPT Chuyên Vĩnh Phúc. Trưởng đoàn: Hoàng Mạnh Du
42. THPT Chuyên Võ Nguyễn Giáp - Quảng Bình. Trưởng đoàn: Lê Duy Hiền
43. THPT Hoàng Diệu - Sóc Trăng. Trưởng đoàn: Phùng Kim Phú
44. Trường Châu Á Thái Bình Dương. Trưởng đoàn: Đàm Văn Ngọc

Phần II

ĐỀ THI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

1 Đại số

1.1 Bảng A

BÀI 1. (a) Tính định thức và hạng của ma trận vuông cấp n sau đây theo n:

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

(b) Giả sử $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ là một cơ sở của không gian véctơ V. Với những giá trị nào của n thì hệ các véctơ $(e_1 + e_2, 2e_2 + 2e_3, 3e_3 + 3e_4 \dots, (n-1)e_{n-1} + (n-1)e_n, ne_n + ne_1)$ cũng lập thành một cơ sở của V?

BÀI 2. Một nhà máy sản xuất một loại sản phẩm từ ba nguyên liệu (A, B, C); biết rằng mỗi nguyên liệu là sự kết hợp của ba thành tố (N, K và S) theo một tỉ lệ khối lượng cố định và được cho như sau:

Tên thành tố / Loại nguyên liệu	N	K	S
A	0,4	0,2	0,4
B	0,2	0,3	0,5
C	0,3	0,3	0,4

Giả sử x, y, z lần lượt là tỉ lệ khối lượng của các nguyên liệu A, B, C đóng góp trong một sản phẩm được sản xuất.

(a) Tính các tỉ lệ khối lượng của các thành tố N, K, S chiếm trong một sản phẩm theo x, y, z.

(b) Tìm x, y, z biết rằng một sản phẩm có tỉ lệ khối lượng của các thành tố như sau $0,31$ là N; $0,26$ là K và còn lại là S.

(c) Gọi a, b lần lượt là tỉ lệ của các thành tố N, K trong một sản phẩm. Chứng minh rằng

$$\begin{cases} 0,2 \leq b \leq 0,3; \\ 0,5 \leq a+b \leq 0,6; \\ 0,8 \leq a+2b \leq 0,9. \end{cases}$$

BÀI 3. Giả sử $P(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên.

(a) Biết rằng $\alpha = \dfrac{2021}{2023}$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$, hỏi tổng các hệ số của $P(x)$ có thể bằng 2023 hay không? Tại sao?

(b) Trả lời câu hỏi tương tự cho $\alpha = \dfrac{2021}{2022}$, nghĩa là nếu $\alpha = \dfrac{2021}{2022}$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$ nói trên, thì tổng các hệ số của $P(x)$ có thể bằng 2023 hay không? Tại sao?

BÀI 4. (a) Cho $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ là một ma trận vuông khả nghịch, cấp 2, với hệ số phức. Chứng minh rằng A có thể khai căn bậc hai được, nghĩa là tồn tại một ma trận B vuông cấp 2 với hệ số phức sao cho $B^2 = A$.

(b) Tồn tại hay không một ma trận B vuông cấp 2 với hệ số phức sao cho

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

BÀI 5. Một *đường hoán vị* của ma trận vuông A cấp n là một bộ gồm n hệ số của A sao cho hai hệ số bất kỳ đều không nằm trên cùng một hàng, và không nằm trên cùng một cột. Một ma trận vuông cấp n được gọi là một *ma trận Olympic* nếu đó là ma trận thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

(i) Mỗi hệ số có giá trị thuộc $\{-1, 0, 1\}$.

(ii) Tổng n hệ số trên các đường hoán vị đều bằng nhau.

Chẳng hạn

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

là một ma trận Olympic.

Ký hiệu $f(n)$ là số các ma trận Olympic cấp n.

(a) Chứng minh rằng điều kiện (ii) ở trên tương đương với việc hai hàng bất kỳ của ma trận sai khác nhau một vectơ hàng với các tọa độ bằng nhau.

(b) Tính giá trị của $f(2)$.

(c) Tìm công thức của $f(n)$ dưới dạng

$$f(n) = a_1 b_1^n + a_2 b_2^n + a_3 b_3^n + a_4,$$

trong đó $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4$ là các hằng số.

1.2 Bảng B

BÀI 1. (a) Cho a, b, c là các số thực. Tính định thức của ma trận A sau đây:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix}.$$

(b) Tìm điều kiện của a, b, c để ma trận A có hạng bằng 3. Với những số a, b, c như vậy, hãy tìm ma trận nghịch đảo A^{-1}.

BÀI 2. Một nhà máy sản xuất một loại sản phẩm từ ba nguyên liệu (A, B, C); biết rằng mỗi nguyên liệu là sự kết hợp của ba thành tố (N, K và S) theo một tỉ lệ khối lượng cố định và được cho như sau:

Tên thành tố / Loại nguyên liệu	N	K	S
A	0,4	0,2	0,4
B	0,2	0,3	0,5
C	0,3	0,3	0,4

Giả sử x, y, z lần lượt là tỉ lệ khối lượng của các nguyên liệu A, B, C đóng góp trong một sản phẩm được sản xuất.

(a) Tính các tỉ lệ khối lượng của các thành tố N, K, S chiếm trong một sản phẩm theo x, y, z.

(b) Tìm x, y, z biết rằng một sản phẩm có tỉ lệ khối lượng của các thành tố như sau $0,31$ là N; $0,26$ là K và còn lại là S.

(c) Gọi a, b lần lượt là tỉ lệ của các thành tố N, K trong một sản phẩm. Chứng minh rằng

$$\begin{cases} 0,2 \leq b \leq 0,3; \\ 0,5 \leq a + b \leq 0,6; \\ 0,8 \leq a + 2b \leq 0,9. \end{cases}$$

BÀI 3. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Ma trận A có chéo hóa được hay không? Tại sao?

(b) Tìm một ma trận khả nghịch Q sao cho:

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

BÀI 4. (a) Với λ là một số phức khác 0, cho A là ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng tồn tại một ma trận B vuông cấp 2 với hệ số phức sao cho $B^2 = A$.

(b) Tồn tại hay không một ma trận B vuông cấp 2 với hệ số phức sao cho

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

BÀI 5. Một *đường hoán vị* của ma trận vuông A cấp n là một bộ gồm n hệ số của A sao cho hai hệ số bất kỳ đều không nằm trên cùng một hàng, và không nằm trên cùng một cột. Một ma trận vuông cấp n được gọi là một *ma trận Olympic* nếu đó là ma trận thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

(i) Mỗi hệ số có giá trị thuộc $\{-1, 0, 1\}$.

(ii) Tổng n hệ số trên các đường hoán vị đều bằng nhau.

Chẳng hạn

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

là một ma trận Olympic.

Ký hiệu $f(n)$ là số các ma trận Olympic cấp n.

(a) Chứng minh rằng điều kiện (ii) ở trên tương đương với việc hai hàng bất kỳ của ma trận sai khác nhau một vectơ hàng với các tọa độ bằng nhau.

(b) Hãy liệt kê tất cả các cách điền vào những vị trí $*$ còn trống của ma trận sau để thu được một ma trận Olympic:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & * \\ 0 & -1 & * & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 1 & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Giải thích tại sao.

(c) Tính giá trị của $f(2)$.

2 Giải tích

2.1 Bảng A

BÀI 1. Cho $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \forall n \geqslant 1.$$

(a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > 3/2$.

(b) Chứng minh rằng dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.

(c) Chứng minh rằng giới hạn của dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ là một số vô tỉ.

BÀI 2. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x & \text{nếu } x \in \mathbb{Q}, \\ -\sin^2 x & \text{nếu } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Chứng minh rằng hàm f liên tục tại 0.

(b) Hàm f có khả vi tại 0 không?

(c) Tìm tất cả các điểm mà ở đó hàm f khả vi.

BÀI 3. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số thuộc lớp $C^2(\mathbb{R})$ và có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(a) Chứng minh rằng tồn tại một dãy số $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dần ra $+\infty$ sao cho

$$\lim_{n \to +\infty} f'(x_n) = 0.$$

(b) Chứng minh rằng nếu f'' bị chặn trên $\mathbb{R}$ thì

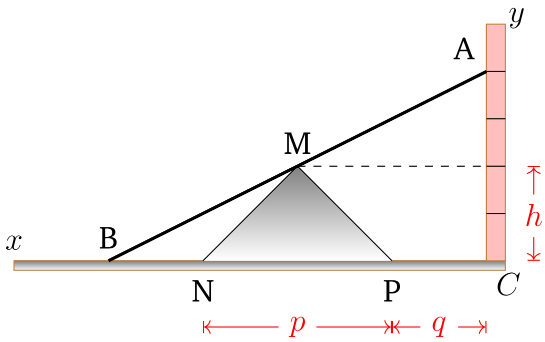
$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0.$$

(c) Nếu f' bị chặn trên $\mathbb{R}$ thì

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x)$$

có tồn tại không? (Hãy chứng minh kết luận nếu giới hạn đó tồn tại; trong trường hợp ngược lại, hãy đưa ra một phản ví dụ.)

BÀI 4.
Trong hình vẽ bên cạnh, cho bờ tường Cy và mặt đất Cx. Một giá đỡ MNP hình tam giác cân có đáy NP dài p mét và có chiều cao h mét. Giá đỡ được đặt cách bờ tường q mét.



Người ta thiết kế một cái thang AB tựa lên giá đỡ sao cho đầu A của thang tiếp xúc bờ tường còn đầu B của thang chạm mặt đất. Coi thang AB như một đoạn thẳng (độ dày không đáng kể) và các khoảng cách p, q, h là dương.

Hãy xác định chiều dài ngắn nhất có thể có của thang AB thỏa mãn tất cả các yêu cầu trên.

BÀI 5. Gọi $\mathcal{F}$ là lớp tất cả các hàm $f : [-1, 1] \to [0, +\infty)$ sao cho $f(-1) = f(1) = 1$ và

$$|f(x) - f(y)| \leq 2022|x - y|$$

với mọi $x, y \in [-1, 1]$.

(a) Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{F}$ thì f liên tục.

(b) Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{F}$ thì

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \geq \frac{1}{2022}.$$

(c) Dấu đẳng thức trong ý (b) có đạt được hay không? (Nếu câu trả lời là "không", hãy chứng minh; nếu câu trả lời là "có", hãy chỉ ra ví dụ về một hàm f làm cho đẳng thức xảy ra.)

2.2 Bảng B

Bài 1. Cho $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \forall n \geqslant 1.$$

(a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > 3/2$.

(b) Chứng minh rằng dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.

Bài 2. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x & \text{nếu } x \in \mathbb{Q}, \\ -\sin^2 x & \text{nếu } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Chứng minh rằng hàm f liên tục tại 0.

(b) Hàm f có khả vi tại 0 không?

(c) Tìm tất cả các điểm mà ở đó hàm f khả vi.

Bài 3. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số thuộc lớp $C^2(\mathbb{R})$ và có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(a) Chứng minh rằng tồn tại một dãy số $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dần ra $+\infty$ sao cho

$$\lim_{n\to+\infty} f'(x_n) = 0.$$

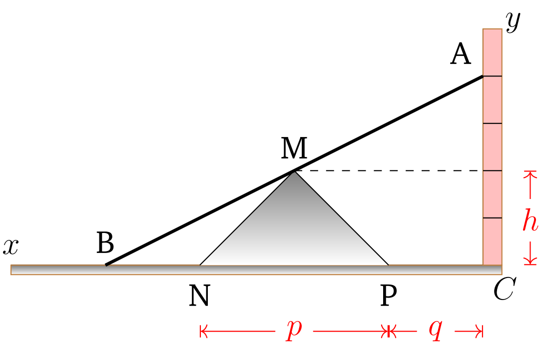
(b) Chứng minh rằng nếu f'' bị chặn trên $\mathbb{R}$ thì

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

Bài 4.

Trong hình vẽ bên cạnh, cho bờ tường Cy và mặt đất Cx. Một giá đỡ MNP hình tam giác cân có đáy NP dài p mét và có chiều cao h mét. Giá đỡ được đặt cách bờ tường q mét.

Người ta thiết kế một cái thang AB tựa lên giá đỡ sao cho đầu A của thang tiếp xúc bờ tường còn đầu B của thang chạm mặt đất. Coi thang AB như một đoạn thẳng (độ dày không đáng kể) và các khoảng cách p, q, h là dương.



Hãy xác định chiều dài ngắn nhất có thể có của thang AB thỏa mãn tất cả các yêu cầu trên.

BÀI 5. Gọi $\mathcal{F}$ là lớp tất cả các hàm $f : [-1, 1] \to [0, +\infty)$ sao cho $f(-1) = f(1) = 1$ và

$$|f(x) - f(y)| \leq 2022|x - y|$$

với mọi $x, y \in [-1, 1]$.

(a) Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{F}$ thì f liên tục.

(b) Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{F}$ thì

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \geq \frac{1}{2022}.$$

3 Trung học phổ thông

3.1 Ngày thứ nhất: Số học

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước trong chứng minh của câu sau. Nếu một câu được chứng minh không dựa vào kết quả của các câu trước thì có thể dùng để chứng minh các câu trước.

Dãy số Fibonacci modulo một số nguyên dương

Nhắc lại rằng dãy số Fibonacci là dãy số tự nhiên được định nghĩa như sau: $F_0 = 0, F_1 = 1$ và $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ với mọi số nguyên dương n. Ta cũng nhắc công thức: với mọi n thì

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

A. Một vài hệ thức cơ bản, định nghĩa và một số tính chất đầu tiên của $k(m)$

BÀI 1. a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên u, v, trong đó $u \geq 1$, thì

$$F_{u+v} = F_{u-1}F_v + F_uF_{v+1}.$$

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì

$$F_{2n} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}),$$
$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2.$$

BÀI 2. Cho số nguyên dương m.

a) Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên $0 \leq i < j \leq m^2$ sao cho $F_i \equiv F_j \pmod{m}$ và $F_{i+1} \equiv F_{j+1} \pmod{m}$.

b) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho $F_{n+k} \equiv F_n \pmod{m}$ với mọi số tự nhiên n.

Ký hiệu $k(m)$ là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $F_{n+k(m)} \equiv F_n \pmod{m}$ với mọi số tự nhiên n.

c) Chứng minh rằng $k(m)$ là số nguyên dương nhỏ nhất mà $F_{k(m)} \equiv 0 \pmod{m}$ và $F_{k(m)+1} \equiv 1 \pmod{m}$.

d) Cho số nguyên dương k. Chứng minh rằng $F_{n+k} \equiv F_n \pmod{m}$ với mọi số tự nhiên n khi và chỉ khi k chia hết cho $k(m)$.

BÀI 3. Cho số nguyên dương N. Chứng minh rằng có vô hạn số hạng của dãy Fibonacci chia hết cho N.

BÀI 4. a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m_1, m_2 thì

$$k([m_1, m_2]) = [k(m_1), k(m_2)].$$

(Trong đó $[a, b]$ ký hiệu bội số chung nhỏ nhất của a và b.)
b) Xác định $k(2), k(4), k(5), k(10)$.

B. Một số tính chất khác của $k(m)$

BÀI 5. Giả sử p là số nguyên tố lẻ sao cho $p \equiv \pm 1 \pmod 5$. Chứng minh rằng

a) $5^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$.

b) $F_{p-1} \equiv 0 \pmod p$.

c) $k(p) \mid p - 1$.

BÀI 6. Giả sử p là số nguyên tố lẻ sao cho $p \equiv \pm 2 \pmod 5$. Chứng minh rằng

a) $F_{p+1} \equiv 0 \pmod p$.

b) $k(p) \mid 2p + 2$.

c) $k(p)$ chia hết cho 4.

BÀI 7. Cho số nguyên dương s. Chứng minh rằng

a) $F_{3\cdot 2^{s-1}} \equiv 0 \pmod{2^s}$ và $F_{3\cdot 2^{s-1}+1} \equiv 1 \pmod{2^s}$.

b) $k(2^s) = 3 \cdot 2^{s-1}$.

BÀI 8. Chứng minh rằng $k(m)$ là số chẵn với mọi $m > 2$.

Chú ý: Điểm số của Bài 8 chỉ được dùng để xếp hạng các thí sinh có điểm tuyệt đối.

3.2 Ngày thứ hai: Hình học

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước trong chứng minh của câu sau. Nếu một câu được chứng minh không dựa vào kết quả của các câu trước thì có thể dùng để chứng minh các câu trước.

A. Điểm Fermat-Torricelli của tam giác

Trong suốt phần này ta luôn giả sử ABC là một tam giác có các góc nhỏ hơn 120°.

BÀI 1. [Điểm Fermat-Torricelli] Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một điểm T nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle BTC = \angle CTA = \angle ATB = 120^\circ$. Điểm T xác định như vậy được gọi là điểm Fermat-Torricelli của tam giác ABC.

BÀI 2. [Cách dựng khác cho điểm Fermat-Torricelli] Dựng ra ngoài tam giác ABC ba tam giác đều BCD, CAE, ABF. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy tại T.

BÀI 3. [Bài toán Fermat] Xét một điểm P nằm trong mặt phẳng chứa tam giác ABC. Gọi T là điểm Fermat-Torricelli của tam giác ABC. Chứng minh rằng

a)
$$\frac{\vec{TA}}{TA} + \frac{\vec{TB}}{TB} + \frac{\vec{TC}}{TC} = \vec{0}.$$

b)
$$PA + PB + PC \geq \frac{\vec{PA} \cdot \vec{TA}}{TA} + \frac{\vec{PB} \cdot \vec{TB}}{TB} + \frac{\vec{PC} \cdot \vec{TC}}{TC}.$$

c)
$$PA + PB + PC \geq TA + TB + TC$$

và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P trùng với T.

B. Một vài mở rộng bài toán Fermat

BÀI 4. Giả sử tam giác ABC nhọn. Đặt $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

a) Ký hiệu H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng
$$a \cdot \frac{\vec{HA}}{HA} + b \cdot \frac{\vec{HB}}{HB} + c \cdot \frac{\vec{HC}}{HC} = \vec{0}.$$

b) Xét một điểm P nằm trong mặt phẳng. Chứng minh rằng tổng
$$aPA + bPB + cPC$$
đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi P trùng với H.

BÀI 5. [Bài toán Steiner] Cho tứ giác lồi $MNPQ$. Giả sử tồn tại hai điểm U và V nằm trong tứ giác thỏa mãn

$$\angle MUN = \angle MUV = \angle NUV = \angle QVU = \angle PVU = \angle PVQ.$$

Xét hai điểm X và Y trong mặt phẳng. Chứng minh rằng tổng

$$XM + XN + XY + YP + YQ$$

đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $X \equiv U$, $Y \equiv V$.

C. Một số tính chất hình học của điểm Fermat-Torricelli

Trong suốt phần này ta lại giả sử ABC là một tam giác có các góc nhỏ hơn 120° và T là điểm Fermat-Torricelli của nó.

BÀI 6. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng G cách đều các đường trung trực của các đoạn thẳng TA, TB, TC.

BÀI 7. Gọi H_a, H_b, H_c tương ứng là trực tâm các tam giác TBC, TCA, TAB.

a) Chứng minh rằng T là trọng tâm của tam giác $H_aH_bH_c$.

b) Gọi D, E, F tương ứng là giao điểm của H_cH_b và cạnh BC, H_cH_a và cạnh CA, H_aH_b và cạnh AB. Chứng minh rằng tam giác DEF đều.

c) Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua D, E, F và tương ứng vuông góc với BC, CA, AB đồng quy tại một điểm. Ký hiệu điểm đó là S.

d) Chứng minh rằng TS song song với đường thẳng Euler của tam giác ABC. (Nhắc lại rằng đường thẳng Euler của một tam giác là đường thẳng đi qua trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó.)

BÀI 8. Cho tam giác ABC có điểm Fermat-Torricelli là T. Gọi (N_a) là đường tròn ngoại tiếp tam giác TBC. Lấy X trên (N_a) sao cho TX vuông góc với BC. Gọi giao điểm của đoạn thẳng BC và đường tròn ngoại tiếp tam giác TN_aX là D. Định nghĩa tương tự các điểm Y, Z, E, F. Các đường thẳng đối xứng của đường thẳng Euler của tam giác ABC qua BC, CA và AB, theo thứ tự, cắt XD, YE và ZF tại P, Q và R. Chứng minh rằng AP vuông góc với QR khi và chỉ khi $AB = AC$ hoặc $2BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Chú ý: Điểm số của Bài 8 chỉ được dùng để xếp hạng các thí sinh có điểm tuyệt đối.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: ĐẠI SỐ

1 MA TRẬN

Bài 1.1 (ĐH Bách Khoa-ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, N.H. Hiệp). Cho $A \in M_n(\mathbb{R}), n \geq 2$ khả nghịch. Chứng minh rằng, tồn tại một đa thức hệ số thực $g(x)$ thỏa $A^{-1} = g(A)$.

Bài 1.2 (ĐH Bách Khoa-ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, N.H. Hiệp). Cho $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ và $B \in M_{2\times 3}(\mathrm{R})$. Biết rằng $AB = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm tất cả các ma trận BA.

Bài 1.3 (ĐH Bách Khoa-ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, N.H. Hiệp). Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ là hai ma trận đối xứng thực. Chứng minh rằng nếu tồn tại hai ma trận $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $AX + BY$ khả nghịch thì $A^2 + B^2$ khả nghịch.

Bài 1.4 (ĐH Đà Lạt, Đ.T. Hiệp). Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tính ma trận A^{2021}.

Bài 1.5 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Phúc). Tính hạng của ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} 0982708113 & 0913922300 & 0907221538 & 0385263366 \\ 0904700224 & 0382708335 & 0382777300 & 0913112004 \\ 0985558800 & 0385210229 & 0975008761 & 0913708000 \\ 0913223202 & 0914708444 & 0382701222 & 0913444331 \end{pmatrix}.$$

Bài 1.6 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.H. Hoàng). Cho M tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp 3 với các phần tử là 1 hoặc -1. Hãy chỉ ra tập hợp M có chứa bao nhiêu phần tử là ma trận khả nghịch.

Bài 1.7 (ĐH Hàng Hải Việt Nam, N.T.Đ. Hạnh). Cho $A = [a_{ij}]$ là ma trận thực cấp 2021 không suy biến. Xét các ma trận cột

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{2021,k} \end{bmatrix}^t; \quad (k = 1, 2, \ldots, 2021)$$

Đặt $M = A_1 + 2A_2 + \cdots + 2021A_{2021}$. Tìm tất cả các ma trận X thỏa mãn:

$$\begin{array}{lcl} X(M - A_1) & = & A_1 - A_{2021} \\ X(M - A_2) & = & \dfrac{1}{2}(A_2 - A_{2020}) \\ \ldots & & \ldots \\ X(M - A_k) & = & \dfrac{1}{k}(A_k - A_{2022-k}) \\ \ldots & & \ldots \\ X(M - A_{2021}) & = & \dfrac{1}{2021}(A_{2021} - A_1). \end{array}$$

Bài 1.8 (ĐH Hàng Hải Việt Nam, N.V. Trịnh). Cho đa thức $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{2021} (-1)^i (i+1)x^i$ và ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \\ 4 & -9 & 6 \end{bmatrix}$$

Tính $f(A)$.

Bài 1.9 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ). Cho r là một số nguyên dương, $\xi = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{r}\right)$ là một căn phức bậc r của đơn vị 1. Với $\alpha \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa $\xi^\alpha = \exp\left(\dfrac{2i\pi\alpha}{r}\right)$. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \xi^\alpha & \ldots & \xi^{(r-1)\alpha} \\ 1 & \xi^{\alpha+1} & \ldots & \xi^{(r-1)(\alpha+1)} \\ & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \xi^{\alpha+k} & \ldots & \xi^{(r-1)(\alpha+k)} \\ & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \xi^{\alpha+r-1} & \ldots & \xi^{(r-1)(\alpha+r-1)} \end{bmatrix}.$$

Bài 1.10 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). **a)** Tính A^{2021}, trong đó

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

b) Cho A là một ma trận vuông cấp n và lũy linh. Chứng minh rằng hai hệ phương trình sau có cùng tập nghiệm trong $\mathbb{R}^n$

$$Ax = 0$$

$$(A + 2A^2 + \ldots + 2021A^{2021})x = 0.$$

Bài 1.11 (ĐH SPKT Vĩnh Long, T.H.N. Nhân)**.** Tìm tất cả các ma trận thực A cấp n có tất cả các phần tử không âm và ma trận nghịch đảo A^{-1} cũng có tất cả các phần tử không âm.

Bài 1.12 (ĐH SPKT Vĩnh Long, T.H.N. Nhân)**.** Giả sử A là một ma trận vuông không suy biến, mỗi dòng chỉ có một số khác 0 và bằng +1 hoặc -1. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên k sao cho $A^k = A^T$.

Bài 1.13 (ĐH Thuỷ Lợi, N.V. Đắc)**.** Tìm $A^n,\ n \in \mathbb{N}^*$ biết rằng:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2022} & -\frac{1}{2022} & -\frac{1}{2022} & -\frac{1}{2022} \\ -\frac{1}{2022} & \frac{1}{2022} & -\frac{1}{2022} & -\frac{1}{2022} \\ -\frac{1}{2022} & -\frac{1}{2022} & \frac{1}{2022} & -\frac{1}{2022} \\ -\frac{1}{2022} & -\frac{1}{2022} & -\frac{1}{2022} & \frac{1}{2022} \end{pmatrix}.$$

Bài 1.14 (ĐH Thuỷ Lợi, N.V. Đắc)**.** Cho G là tập những ma trận vuông cấp n mà mỗi hàng và mỗi cột có đúng một phần tử khác 0 là -1 hoặc 1. Với mỗi A thuộc G, chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho $A^k = I$.

Bài 1.15 (ĐH Thuỷ Lợi, N.V. Đắc)**.** Cho A là ma trận lũy linh và đa thức

$$f(x) = 2022x^{2021} + 2021x^{2020} + \ldots + 2x + 1.$$

Chứng minh rằng $f(A)$ là ma trận khả nghịch.

Bài 1.16 (ĐH Trà Vinh, T.Q. Hà)**.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Tính A^{2022} bằng 2 phép nhân ma trận.

Bài 1.17 (ĐH Trà Vinh, T.Q. Hà)**.** Cho $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $PQ = 0, Q \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại $L \in M_n(\mathbb{R})$ khác 0 thỏa mãn $PL = LP = 0$.

Bài 1.18 (HV Kỹ thuật Quân sự, H.Đ. Mạnh). Cho hai ma trận $U, V \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$, với

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{a} \\ \dfrac{1}{a^2} \\ \dfrac{1}{a^3} \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}, (a \neq 0).$$

Đặt $A = UV^T$.
a) Tính A^{2020}.
b) Đặt $B = A - E$. Chứng minh rằng ma trận B khả nghịch. Tìm B^{-1}.

Bài 1.19 (HV Kỹ thuật Quân sự, H.Đ. Mạnh). Cho $A \in M_{4\times 2}(\mathbb{R}), B \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$ sao cho

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tính BA.

Bài 1.20 (HV Phòng không Không quân, P.H. Quân). Cho ma trận A và véctơ v xác định như sau

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Tính Av, A^2v?
2. Tính $A^{2021}v$?

2 ĐỊNH THỨC

Bài 2.1 (ĐH Bách Khoa-ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, N.H. Hiệp). Cho phương trình $(*) : x^4 - 2x^2 - 4x + 1 = 0$.

1. Chứng minh rằng $(*)$ chỉ có nghiệm đơn.
2. Giả sử a, b, c, d là bốn nghiệm phân biệt của $(*)$. Hãy tính định thức

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}.$$

Bài 2.2 (ĐH Giao thông Vận tải, N.H. Hoàng). Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp 2021 với các phần tử là $a_{ij} = i^2 + j^2 + 2020ij + 2021$ với mọi $i, j = 1, 2, \dots, 2021$. Hãy tính $\det A$.

Bài 2.3 (ĐH Hàng Hải Việt Nam, L.T. Hoa). Cho a_1, a_2, a_3, a_4 và b_1, b_2, b_3, b_4 lần lượt là 4 số chẵn, 4 số lẻ liên tiếp. Tính định thức của ma trận A, biết

$$A = \begin{pmatrix} (a_1+b_1)^3 & (a_1+b_2)^3 & (a_1+b_3)^3 & (a_1+b_4)^3 \\ (a_2+b_1)^3 & (a_2+b_2)^3 & (a_2+b_3)^3 & (a_2+b_4)^3 \\ (a_3+b_1)^3 & (a_3+b_2)^3 & (a_3+b_3)^3 & (a_3+b_4)^3 \\ (a_4+b_1)^3 & (a_4+b_2)^3 & (a_4+b_3)^3 & (a_4+b_4)^3 \end{pmatrix}$$

Bài 2.4 (ĐH Hàng Hải Việt Nam, L.T. Hoa). Cho ma trận

$$A = [a_{ij}]_{6X6} \text{ với } a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i = j \\ 1 \text{ hoặc } 2021 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

Chứng minh rằng định thức của ma trận A luôn khác không.

Bài 2.5 (ĐH Kiến trúc). Cho $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ là hai ma trận thực vuông cấp n thỏa mãn $AB^2 + A = 2AB + I$.

a) Chứng minh rằng A và B là hai ma trận giao hoán.

b) Cho a_{ij}, b_{ij} là các số nguyên với mọi $i, j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Tính định thức của ma trận A.

Bài 2.6 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn). Giả sử X là ma trận thực cỡ $n \times n$ thỏa mãn $X + X^T = I_n$ (I_n là ma trận đơn vị, X^T là ma trận chuyển). Chứng minh rằng $\det X \geq \dfrac{1}{2^n}$.

Bài 2.7 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Tính

$$\lim_{n\to+\infty} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 1/n! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1/n! \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1/n! \end{vmatrix}.$$

Bài 2.8 (ĐH SPKT Vĩnh Long, T.H.N. Nhân). Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ thỏa $A.A^T = B.B^T = I$. Chứng minh rằng, nếu $\det(A) \neq \det(B)$ thì $\det(A + B) = 0$.

Bài 2.9 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh). Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$, khả nghịch và phản đối xứng. Chứng minh rằng nếu ta cộng mọi phần tử của A với một số thực bất kỳ thì định thức không đổi.

Bài 2.10 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh). Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $AB = BA$ và B lũy linh. Chứng minh $\det(A + B) = \det(A)$.

Bài 2.11 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh). Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp 2022 thỏa $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j = \overline{1; 2022}$. Đặt $B = (b_{ij})$ là ma trận vuông cùng cấp với ma trận A sao cho $b_{ij} = a_{ij} + 23$, $\forall i, j = \overline{1; 2022}$. Chứng minh rằng $\det A = \det B$.

Bài 2.12 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh). Cho A là ma trận vuông cấp n sao cho $rankA = 1$. Chứng minh rằng

$$\det(A + I_n) = tr(A) + 1$$

Bài 2.13 (ĐH Tân Trào, K.C. Nguyện). Chứng minh rằng hai định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ và } D^*(x) = \begin{vmatrix} a_{11} + x & \dots & a_{1n} + x \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix}.$$

có tổng các phần bù đại số của mỗi phần tử là bằng nhau.

Bài 2.14 (ĐH Tân Trào, K.C. Nguyện). Tính định thức của ma trận A, nếu $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp $n > 1$, và

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{nếu } i = j, \\ 1 & \text{nếu } i - j \equiv \pm 2 \pmod n, \\ 0 & \text{trong các trường hợp còn lại,} \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, ..., n.$$

Bài 2.15 (ĐH Trà Vinh, D.K. Ngọc). Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2022 & 2023 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 2021 & 2022 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 2020 & 2021 \\ \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots & \dots \\ 2023 & 2022 & 2021 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Bài 2.16 (HV Kỹ thuật Quân sự, H.Đ. Mạnh). Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_n c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -b_1 c_n \\ 0 & b_n c_2 & 0 & \dots & 0 & -b_2 c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -b_{n-2} c_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n c_{n-1} & -b_{n-1} c_n \end{bmatrix}$$

với $a_i, b_i, c_i > 0, \forall i = \overline{1; n}$.
Tính định thức của ma trận A. Từ đó chỉ ra ma trận A luôn khả nghịch.

Bài 2.17 (HV Phòng không Không quân, P.H. Quân). 1. Tính định thức của ma trận vuông cấp n sau đây

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Cho $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ là cơ sở chính tắc của không gian véctơ $\mathbb{R}^n$. Khi nào hệ các véctơ $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1)$ lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^n$?

3 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài 3.1 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Phúc). Giả sử có một mỏ cát dưới đáy sông, ở đó cát tích tụ theo tốc độ không đổi trong năm. Nếu cho một đoàn 50 máy khai thác ở đó liên tục, thì sau 60 ngày sẽ hết cát. Còn nếu cho một đoàn 80 máy khai thác ở đó, thì chỉ sau 30 ngày là hết cát. Hỏi: để cho cát không tích tụ quá nhiều và cũng không bị hết đi, thì để bao nhiêu máy khai thác cát ở đó là vừa phải? Giả thiết rằng các máy khai thác làm việc với năng suất như nhau.

Bài 3.2 (ĐH Giao thông Vận tải, N.H. Hoàng). Giải hệ tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

trong đó $n \geqslant 4$ và $a_{ij} = ij + i + j$ với mọi i, j.

Bài 3.3 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ). Giải và biện luận hệ phương trình sau theo m.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 & = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 9x_4 & = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 - 17x_3 + 23x_4 & = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 10x_3 + mx_4 & = 13 - m \end{cases}$$

Bài 3.4 (ĐH Kiến trúc). Một nhà máy sản xuất một loại sản phẩm từ ba nguyên liệu (A, B, C); biết rằng mỗi nguyên liệu là sự kết hợp của ba thành tố (N, K và S) theo một tỉ lệ khối lượng cố định và được cho như sau

Loại nguyên liệu	N	K	S
A	0,4	0,2	0,4
B	0,2	0,3	0,5
C	0,3	0,3	0,4

Giả sử x, y, z lần lượt là tỉ lệ khối lượng của các nguyên liệu A, B, C đóng góp trong một sản phẩm được sản xuất.

a) Tính các tỉ lệ khối lượng của các thành tố N, K, S chiếm trong một sản phẩm được tạo thành theo x, y, z.

b) Tìm x, y, z biết rằng một sản phẩm được sản xuất có tỉ lệ khối lượng của các thành tố như sau $31\%N$, $26\%K$ và còn lại là S.

c) Tìm điều kiện về tỉ lệ khối lượng của các thành tố N, K, S trong sản phẩm để sản phẩm có thể sản xuất được?

Bài 3.5 (Trường ĐH Sư phạm - ĐH Huế, T.Q. Hoá). Sau khi kết thúc kỳ thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc năm 2021, đội tuyển Đại số của Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế tiến hành liên hoan. Thầy đội trưởng chia 40 lít cocacola cho 5 bạn trong đội tuyển Olympic đại số. Bạn thứ nhất lấy số cocacola của mình chia đều cho 4 bạn còn lại. Tiếp theo, bạn thứ hai cũng lấy số cocacola của mình chia đều cho 4 bạn còn lại. Cứ như vậy đến khi bạn cuối cùng chia đều số cocacola của mình cho 4 bạn còn lại thì mọi người nhận ra số cocacola mình đang có bằng đúng số cocacola mà mình có ban đầu. Tìm số cocacola mà mỗi bạn được thầy đội trưởng chia ban đầu.

Bài 3.6 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Với $a_{ij} = -a_{ji}$ và n là số lẻ. Chứng minh hệ phương trình có nghiệm không tầm thường.

Bài 3.7 (ĐH Tân Trào, K.C. Nguyện). Có n quyển vở được chia cho 4 người A, B, C, D. Nếu bớt k quyển của A, thêm k quyển vào của B, gấp đôi của C và chia đôi của D thì số vở của bốn người là bằng nhau. Tìm điều kiện để của n, k để bài toán có nghiệm. Hãy tìm số vở được chia của mỗi người.

Bài 3.8 (ĐH Thuỷ Lợi, N.V. Đắc). Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a-2018}+\dfrac{y}{a-2019}+\dfrac{z}{a-2020}+\dfrac{w}{a-2021}=1 \\ \dfrac{x}{b-2018}+\dfrac{y}{b-2019}+\dfrac{z}{b-2020}+\dfrac{w}{b-2021}=1 \\ \dfrac{x}{c-2018}+\dfrac{y}{c-2019}+\dfrac{z}{c-2020}+\dfrac{w}{c-2021}=1 \\ \dfrac{x}{d-2018}+\dfrac{y}{d-2019}+\dfrac{z}{d-2020}+\dfrac{w}{d-2021}=1 \end{cases}$$

trong đó a, b, c, d là các tham số. Giả sử hệ có nghiệm là (x, y, z, w), hãy tính tổng: $S = x + y + z + w$.

Bài 3.9 (ĐH Thuỷ Lợi, N.V. Đắc). Để chọn ra đội tuyển Olympic từ 25 sinh viên trong lớp, một đề thi gồm 3 bài A, B, C được đưa ra. Biết rằng:
i) Mỗi em sinh viên đều giải được ít nhất 1 trong 3 bài đó;
ii) Trong số sinh viên không giải được bài A, thì số sinh viên giải được bài B nhiều gấp 2 lần số sinh viên giải được bài C;
iii) Số sinh viên chỉ giải được bài A nhiều hơn số sinh viên giải được bài A và thêm ít nhất 1 bài khác là 1 người;
iv) Số sinh viên chỉ giải được bài A bằng số sinh viên chỉ giải được bài B cộng với số sinh viên chỉ giải được bài C.
Hỏi có bao nhiêu sinh viên chỉ giải được bài B?

Bài 3.10 (ĐH Thuỷ Lợi, N.V. Đắc). Một chiếc ô tô có 4 bánh. Mỗi lốp ở hai bánh trước được sử dụng tối đa 3000 km, mỗi lốp ở hai bánh sau sử dụng được tối đa 4500 km. Nếu có thể thay đổi vị trí giữa lốp trước và lốp sau thì quãng đường lớn nhất xe có thể đi với một bộ 4 lốp là bao nhiêu?

Bài 3.11 (HV Kỹ thuật Quân sự, H.Đ. Mạnh). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x = by + cz + dt \\ y = cz + dt + ax \\ z = dt + ax + by \\ t = ax + by + cz \end{cases}.$$

trong đó các hệ số a, b, c, d khác -1. Chứng minh rằng hệ trên có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi các số a, b, c, d thoả mãn hệ thức:

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}=1.$$

Bài 3.12 (HV Kỹ thuật Quân sự, H.Đ. Mạnh). Ký hiệu $YEAR$ là một năm gồm 4 số tự nhiên trong khoảng từ 0 đến 9 ($Y \neq 0$). Năm đó sẽ gọi là năm đặc biệt nếu hệ phương trình

$$\begin{cases} Yx_1 + Ex_2 + Ax_3 + Rx_4 = Y \\ Rx_1 + Yx_2 + Ex_3 + Ax_4 = E \\ Ax_1 + Rx_2 + Yx_3 + Ex_4 = A \\ Ex_1 + Ax_2 + Rx_3 + Yx_4 = R \end{cases}$$

có ít nhất hai nghiệm. Tìm tất cả các năm đặc biệt trong thế kỷ 21 (bắt đầu từ năm 2001 đến 2100). Năm 2020 có phải là năm đặc biệt không?

Bài 3.13 (HV Phòng không Không quân, P.H. Quân). Một trường đại học tuyển sinh được một số lượng sinh viên nhất định và chia số sinh viên này thành 5 chuyên ngành khác nhau. Số sinh viên năm đầu phải học các môn Toán nên cần mượn sách tại thư viện nhưng sinh viên ở mỗi chuyên ngành mượn số lượng sách khác nhau. Cụ thể như sau

	Đại số	Giải tích	Hàm biến phức	PP tính	Xác suất
Chuyên ngành 1	3	1	1	0	0
Chuyên ngành 2	2	2	1	1	0
Chuyên ngành 3	2	2	1	1	1
Chuyên ngành 4	1	2	1	1	1
Chuyên ngành 5	1	1	0	0	0

Sau đó, thư viện thống kê thì thấy rằng đã có 700 cuốn Đại số, 550 cuốn Giải tích, 120 cuốn Xác suất, 200 cuốn Phương pháp tính và 300 cuốn Hàm biến phức được mượn. Hãy xác định số sinh viên của từng chuyên ngành?

4 KHÔNG GIAN VÉC TƠ VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Bài 4.1 (ĐH Bách Khoa-ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, N.H. Hiệp). Cho $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$. Tìm cơ sở và số chiều của không gian con

$$\mathcal{H} = \{f(A) | f \text{ là một đa thức hệ số thực}\}$$

Bài 4.2 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ). Cho ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$, với $V = \{ax^3 + bx^2 - ax + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ và $W = \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ xác định bởi

$$T(ax^3 + bx^2 - ax + c) = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a+b & -a & -b \end{bmatrix}.$$

a) Xác định một ma trận của ánh xạ tuyến tính T.
b) Xác định một cơ sở và số chiều của hạt nhân của T.

Bài 4.3 (ĐH Kiến trúc). Kí hiệu $P_n[x]$ là không gian véc tơ thực bao gồm các đa thức với hệ số thực có bậc không vượt quá n và đa thức 0. Cho toán tử tuyến tính $f : P_n[x] \to P_n[x]$ được xác định bởi

$$f(x^k) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k,$$

trong đó $k \in \{0; 1; 2; \cdots; n\}$.

a) Tìm ma trận M của f theo cơ sở $B = \{1; x; x^2; \cdots; x^n\}$ của $P_n[x]$.

b) Chứng minh rằng không tồn tại một cơ sở S của $P_n[x]$ để ma trận của f theo cơ sở S là một ma trận chéo.

Bài 4.4 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các vec tơ khác vec tơ 0 trong không gian vec tơ V với $\dim V \geq n$. Giả sử $f : V \to V$ là một ánh xạ tuyến tính trên không gian vec tơ V sao cho

$$f(x_1) = x_1,\ \ f(x_i) = x_i + x_{i-1} \text{ với mọi } i = 2, 3, \ldots, n.$$

Chứng minh rằng hệ vec tơ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ độc lập tuyến tính.

Bài 4.5 (Trường ĐH Sư phạm - ĐH Huế, T.Q. Hoá). Cho $\mathbb{F}$ là một trường và xét vành đa thức 3 biến $S = \mathbb{F}[x, y, z]$. Cho d là một số tự nhiên,

1. Có bao nhiêu đơn thức bậc d trong S? Có bao nhiêu đơn thức bậc không vượt quá d trong S?
2. Kí hiệu S_d là tập các đa thức thuần nhất bậc d trong S và $S_{\leq d}$ là tập các đa thức bậc không vượt quá d trong S. Chứng minh rằng S_d và $S_{\leq d}$ là không gian vectơ. Tìm cơ sở và số chiều của chúng.

Bài 4.6 (ĐH Tân Trào, K.C. Nguyện). Chứng minh rằng hệ véc tơ $e^{jx}, j = 1, ..., n$ là độc lập tuyến tính.

Bài 4.7 (HV Kỹ thuật Quân sự, H.Đ. Mạnh). Cho $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ là các đa thức hệ số thực bậc không quá 3. Trong các điều kiện sau đây, điều kiện nào là điều kiện đủ để kết luận các đa thức trên phụ thuộc tuyến tính? Vì sao?
a) $p_i(1) = 0, \forall i = \overline{1; 4}$.
b) $p_i(0) = 1, \forall i = \overline{1; 4}$.

5 GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG

Bài 5.1 (ĐH Đà Lạt, Đ.T. Hiệp). Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tìm ma trận khả nghịch P và ma trận chéo D sao cho $A = P.D.P^{-1}$.

Bài 5.2 (ĐH Đà Lạt, Đ.T. Hiệp)**.** Cho các dãy số $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ xác định bởi $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ và thoả mãn

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n - z_n \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n + z_n \\ z_{n+1} = -3x_n + y_n - z_n \end{cases}.$$

Tìm x_{2021}, y_{2021} và z_{2021}.

Bài 5.3 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Phúc)**.** Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$, được xác định bởi

$$f(P) = (2x+1)P - \left(x^2 - 1\right) P',$$

ở đó P' là đạo hàm của đa thức P. Hãy tìm các giá trị riêng và véc-tơ riêng của f đối với cơ sở $\{1, x, x^2\}$.

Bài 5.4 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Phúc)**.** Cho A và B là hai ma *trận đối xứng* cấp n, từng ma trận một đều **có đủ** n giá trị riêng khác nhau. Chứng minh rằng $BA = AB$ khi và chỉ khi A và B có chung các véc-tơ riêng.

Bài 5.5 (Trường ĐH Sư phạm - ĐH Huế, T.Q. Hoá)**.** Cho hai ma trận vuông $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $AB - BA = 3(A - B)$. Chứng minh rằng A và B có cùng tập giá trị riêng.

Bài 5.6 (Trường ĐH Sư phạm - ĐH Huế, T.Q. Hoá)**.** Cho hai ma trận vuông $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $A^2 = B^2 = I_n$.

1. Chứng minh rằng nếu A chỉ có duy nhất giá trị riêng là 1 thì $A = I_n$.
2. Chứng minh rằng A, B chéo hóa được.
3. Chứng minh rằng:

$$\text{rank}\,((A + I_n)(B - I_n)) + \text{rank}\,((A - I_n)(B + I_n)) = \text{rank}\,(A - B).$$

Bài 5.7 (ĐH SPKT Vĩnh Long, T.H.N. Nhân)**.**

1. Cho một ví dụ về ma trận thực cấp 3 với các hệ số nguyên khác không và nhận các số 2019, 2020, 2021 làm các giá trị riêng.
2. Cho một ví dụ về ma trận thực cấp 3 với các hệ số nguyên đôi một khác nhau và nhận các số 2019, 2020, 2021 làm các giá trị riêng.

Bài 5.8 (ĐH Thuỷ Lợi, N.V. Đắc)**.** Cho $A = (a_{ij})$ là một ma trận thực vuông cấp n với n là số chẵn. Biết rằng với mỗi $i \in \{1, 2, ..., n\}$ đều tồn tại $k,\ k \neq i$ sao cho $a_{ik} = n$ và $a_{ij} = 0,\ \forall j \neq k$. Chứng minh rằng A có ít nhất hai giá trị riêng thực.

Bài 5.9 (HV Phòng không Không quân, P.H. Quân). 1. Cho A là ma trận thực đối xứng cỡ $n \times n$, tức là $A = (a_{ij})_{n\times n}$ với $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \le i, j \le n$. Chứng minh rằng mọi giá trị riêng của ma trận A là số thực.

2. (a) Cho A là ma trận thực cỡ $n \times n$, đối xứng. Nếu với mọi giá véctơ $v \neq 0$ mà $v^T Av > 0$ thì ma trận A gọi là *xác định dương*. Chứng minh rằng nếu B là ma trận đối xứng, xác định dương cùng cỡ thì $A + B$ cũng là ma trận đối xứng, xác định dương?
   (b) Nếu A là ma trận thực cỡ $n \times n$, đối xứng. Nếu $a_{ij} > 0$ với mọi $1 \le i, j \le n$ thì ma trận A có xác định dương không? Nếu có hãy chứng minh, nếu không hay đưa ra phản ví dụ.

3. Cho số nguyên $n \ge 2$ và hai ma trận hệ số thực A, B cỡ $n \times n$ thỏa mãn

$$A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1}.$$

Chứng minh rằng $\det(A) = \det(B)$.

6 ĐA THỨC

Bài 6.1 (ĐH Bách Khoa-ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, N.H. Hiệp). Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ hệ số thực thỏa $f(x^2 + 1) = f(x)f(x + 1)$.

Bài 6.2 (ĐH Giao thông Vận tải, N.H. Hoàng). Cho $P(x)$ là một đa thức bậc 2021 với các hệ số thực. Chứng minh rằng đa thức $Q(x) = (1 - 2x^2)P(x) + xP'(x)$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt.

Bài 6.3 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ). Cho đa thức $P(x) = 2021x^n + 2020x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\},\ n > 0$. Tính tổng của các nghiệm của các đa thức $P, P', P'', ..., P^{(n-1)}$ trong đó $P^{(k)}$ là đạo hàm cấp k của đa thức $P,\ 0 \le k < n$.

Bài 6.4 (ĐH Kiến trúc). Cho đa thức $P(x) = (x^2 - 9x + 8)^{8084} + 17$. Chứng minh rằng $P(x)$ không thể biểu diễn được dưới dạng tích của 4043 đa thức khác hằng số với hệ số nguyên.

Bài 6.5 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Xác định các đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(x)) = \left(x^2 + x + 1\right) f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.6 (ĐH SPKT Vĩnh Long, T.H.N. Nhân). Giả sử $x = \dfrac{2019}{2021}$ là nghiệm của đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên. Hỏi tổng các hệ số của $P(x)$ có thể bằng 2021 được không?

Bài 6.7 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh)**.** Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ có $\deg P(x) = n$ và thỏa mãn điều kiện:

$$P(k) = \frac{k}{k+1}; \quad \forall k = \overline{0, n}.$$

Tính $P(n+1)$.

Bài 6.8 (ĐH Tân Trào, K.C. Nguyện)**.** Tìm số nghiệm thực của đa thức

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n}, 0 < n \in \mathbb{N}.$$

Bài 6.9 (ĐH Trà Vinh, D.K. Ngọc)**.** Cho a, b, c là 3 số phức khác 0 phân biệt với $|a| = |b| = |c|$.
a/. Chứng minh rằng nếu một nghiệm phương trình: $az^2 + bz + c = 0$ có môđun bằng 1 thì $b^2 = ac$.
b/. Nếu mỗi phương trình $az^2 + bz + c = 0$, $bz^2 + cz + a = 0$ có một nghiệm có môđun bằng 1 thì $|a - b| = |b - c| = |c - a|$.

Bài 6.10 (ĐH Trà Vinh, D.K. Ngọc)**.** Khai triển đa thức: $P(x) = (2x - 1)^{1000}$ ta được

$$P(x) = a_{1000}x^{1000} + a_{999}x^{999} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

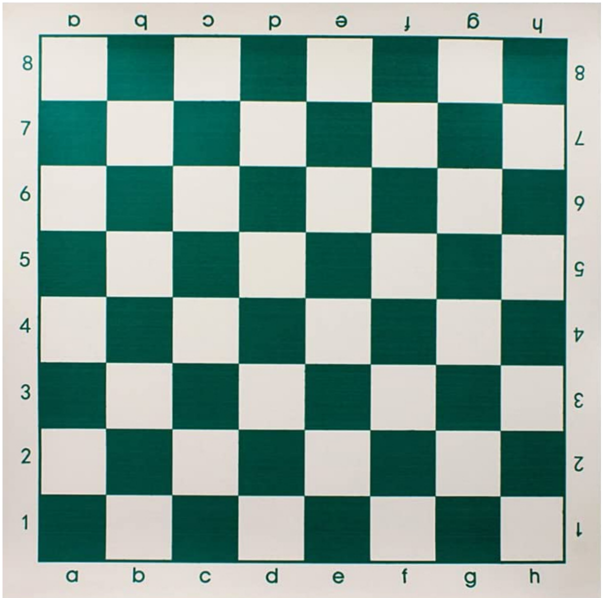
Chứng minh: $a_{1000} + a_{999} + \ldots + a_1 = 0$.

Bài 6.11 (ĐH Trà Vinh, D.K. Ngọc)**.** Giả sử a và b là 2 trong 4 nghiệm của đa thức: $x^4 + x^3 - 1$. Chứng minh tích ab là nghiệm của đa thức: $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$.

7 TỔ HỢP

Bài 7.1 (ĐH Giao thông Vận tải, N.H. Hoàng)**.** Một điểm đỗ xe của một khu dân cư có 30 chỗ đỗ xe nối liền nhau thành một hàng dọc. Người quản lý cần sắp xếp 22 xe vào các vị trí đỗ sao cho không có hai chỗ trống nào ở liền nhau (còn trống 8 chỗ). Hãy cho biết người quản lý có bao nhiêu cách xếp như vậy.

Bài 7.2 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.** Trong bàn cờ, quân vua (quân cờ) được đặt ở vị trí a_1. Trong bất kỳ bước đi nào, nhà vua có thể di chuyển đến một vị trí ô liền kề. Các chỉ đường được phép di chuyển là đi lên ô phía trên, đi sang ô bên phải hoặc đi lên ô chéo phía trên bên phải. Có bao nhiêu cách nhà vua có thể đi đến được vị trí h_8?



Bài 7.3 (ĐH Kiến trúc)**.** Trong khu vườn nhà ông An có trồng ba loại cây lâu năm, gồm có: 5 cây xà cừ, 20 cây bạch đàn và 20 cây xoan. Các cây đã đến độ tuổi thu hoạch. Giá bán mỗi cây xà cừ, bạch đàn, xoan lần lượt là: 10 triệu đồng, 5 triệu đồng và 3 triệu đồng.

a) Giả sử ông An cần chặt tổng cộng 10 cây trong hai loại: bạch đàn và xoan. Hỏi ông An có bao nhiêu cách chặt cây, biết rằng cả hai loại cây bạch đàn và xoan đều bị chặt?

b) Ông An muốn chặt 5 cây trong vườn và thu về số tiền bán cây được ít nhất 35 triệu đồng. Hỏi ông An có bao nhiêu cách chặt cây?

c) Giả sử ông An muốn chặt 20 trong tổng số 40 cây thuộc hai loại bạch đàn và xoan, đồng thời sau khi chặt xong, số cây bạch đàn còn lại nhiều hơn so với số cây xoan. Hỏi ông An có bao nhiêu cách chặt.

Bài 7.4 (ĐH Kiến trúc)**.** Chọn ra 79 số nguyên dương từ tập $E = \{1; 2; 3; ...; 100; 101\}$. Chứng minh rằng tồn tại 5 số $a; b; c; d; e$ trong 79 số được chọn sao cho $a + b + c + d = e$. Kết luận bài toán còn đúng không nếu ta thay 79 bằng 78?

Bài 7.5 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Cho bảng ô vuông kích cỡ 10×10 gồm 100 ô vuông đơn vị. Điền vào mỗi ô vuông của bảng này một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho hai số ở hai ô vuông chung cạnh hoặc chung đỉnh nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong bảng ô vuông đã cho luôn có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

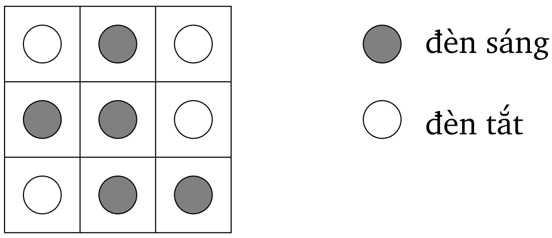
Bài 7.6 (Trường ĐH Sư phạm - ĐH Huế, T.Q. Hoá)**.** Ký hiệu $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Cho $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ là các tập con không rỗng của $[n]$. Chứng minh rằng tồn tại hai tập con khác rỗng, rời nhau $I, J \subset [n+1]$ sao cho

$$\cup_{k \in I} A_k = \cup_{k \in J} A_k.$$

Bài 7.7 (ĐH Trà Vinh, T.Q. Hà)**.** Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

$$C^1_{2n+1} + C^2_{2n+1} + \ldots + C^n_{2n+1} = 2^{20} - 1.$$

Bài 7.8 (HV Phòng không Không quân, P.H. Quân)**.** Người ta lắp 9 bóng đèn trang trí vào 9 ô vuông nằm liền nhau và trong mỗi ô lắp một công tắc có thể bật hoặc tắt. Khi bật hoặc tắt một công tắc thì các bóng đèn liền kề trên cùng hàng và các bóng đèn liền kề trên cùng cột sẽ thay đổi trạng thái, tức là các bóng đèn liền kề trên hàng và cột đó đang tắt sẽ thành bật sáng và đang bật sáng sẽ thành tắt. Cho trạng thái ban đầu của 9 bóng đèn như hình sau.



Với trạng thái ban đầu như hình vẽ trên, có thể đưa cả 9 bóng đèn về trạng thái tắt được không? Nếu có hãy đưa ra một phương án cụ thể.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: GIẢI TÍCH

1 DÃY SỐ

Bài 1.1 (ĐH Bách khoa - ĐHQG Tp. HCM, P.T. Thực). Chứng minh rằng với mọi số thực $p \in (0, 2\pi)$ và mọi $\varepsilon > 0$, ta luôn tìm được số thực $q \in (0, 2\pi)$ sao cho $|q - p| < \varepsilon$ và q có dạng $q = 2021m + 2n\pi$, với m và n là các số nguyên.

Bài 1.2 (ĐH Đà Lạt, Đ.T. Hiệp). Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi công thức

$$x_n = 1 + 2 + \cdots + n, \forall n \geq 1.$$

Tính giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1^n + \cdots + x_{2021}^n}.$$

Bài 1.3 (ĐH Đồng Tháp). Cho $a \in (0,1)$ và dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi: $u_1 = a, u_{n+1} = u_n(1 - u_n^2)$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
2. Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}u_n$.

Bài 1.4 (ĐH Hàng Hải Việt Nam, P.Q. Khải). Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 2021 \\ x_{n+1} = \sqrt{3} + \dfrac{x_n}{\sqrt{x_n^2 - 1}}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$$

Tìm giới hạn của dãy khi n tiến dần tới dương vô cùng.

Bài 1.5 (ĐH Hàng Hải Việt Nam, H.V. Hùng). Cho dãy $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ xác định như sau:

$$x_0 = 1, x_n = 2021n - 2022\sum_{k=0}^{n-1} x_k \quad (\forall n \geq 1).$$

Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+2}}{x_n}$.

Bài 1.6 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ, T.A. Tuấn)**.** Cho dãy số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ xác định bởi $a_1 = 2021$ và với mọi $n > 1$ ta có

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = n^2 a_n.$$

Tính a_{2021}.

Bài 1.7 (ĐH Kiến trúc)**.** Cho dãy số (x_n) có $x_1 = \sqrt{2021}$ và $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ với mọi $n \geq 1$.

a) Giả sử $x_1 = a + \dfrac{1}{a}$ với $a > 0$. Hãy tìm a và tính x_n theo a.

b) Chứng minh dãy số (x_n) tăng ngặt và không bị chặn trên.

c) Tính giới hạn $L = \lim \dfrac{x_{n+1}^2}{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdots x_n^2}$.

Bài 1.8 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn)**.** Giả sử $a_1 = \dfrac{1}{2}$ và $a_{n+1} = a_n - a_n^2$. Chứng minh rằng giới hạn sau là tồn tại

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n} - n - \ln n \right).$$

Bài 1.9 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Cho $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi các điều kiện

$$a_0 = 0, \quad \text{và} \quad a_{n+1}^3 = a_n^2 - 8 \quad \text{với} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Chứng minh rằng

$$-2 \leq a_n \leq -\sqrt[3]{4} \quad \text{với} \quad \forall n \geq 1.$$

b) Chứng minh rằng

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{\sqrt[3]{4}}{3} |a_{n+1} - a_n| \quad \text{với} \quad \forall n \geq 1.$$

c) Chứng minh rằng dãy số $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = v$ với v là nghiệm duy nhất của phương trình

$$x^3 - x^2 + 8 = 0.$$

Bài 1.10 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Cho dãy $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ (với $n \geq 2$) được xác định bởi

$$a_0 = 0, a_k = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+k},$$

với $k = 1, 2, \ldots, n$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{ak}}{n+k+1} + (\ln 2 - a_n)\, e^{a_n} < 1,$$

với

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Bài 1.11 (Trường ĐH Sư phạm - ĐH Huế, N.V. Hạnh). Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ được xác định bởi $x_1 = \frac{1}{2}$ và $x_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + \frac{3}{x_n})$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số đã cho hội tụ và tìm $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Bài 1.12 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ). Với $n \in \mathbb{N}$, cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{4}x_n + 3, \ \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Hãy tìm $L = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Bài 1.13 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ). Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi

$$u_n = (n^2 + 2n + 2)(n+1)!, \quad n \geq 0.$$

Tính tổng

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{2021}.$$

Bài 1.14 (ĐH Trà Vinh, P.M. Triển). Cho dãy số (x_n) xác định theo hệ thức sau:

$$x_1 = 2, \ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = n^2 x_n, \ n \geq 2$$

Tính x_{2022}.

Bài 1.15 (ĐH Trà Vinh, C.H. Hoà). Cho hai dãy số (x_n) và (y_n) xác định bởi công thức:

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, \ x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}, \ y_{n+1} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Chứng minh rằng $x_n y_n \in (2; 3)$ với $n = 2, 3, 4, \ldots$ và $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$.

Bài 1.16 (HV Phòng không Không quân, P.H. Quân). Cho các dãy số $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ và $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ được xác định bởi công thức truy hồi như sau

$$a_1 = 2021, \ b_1 = 2020, \ a_{n+1} = a_n + 2b_n, \ b_{n+1} = a_n + b_n.$$

Dãy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ được xác định bởi $x_n := \dfrac{a_n}{b_n}$.

1. Chứng minh rằng $|x_{n+1} - \sqrt{2}| < \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}|$.

2. Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2 CHUỖI SỐ

Bài 2.1 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên). Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi

$$a_1 > 0;\ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}.$$

a) Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ giảm và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

b) Tính $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Bài 2.2 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn). Chứng minh rằng

$$2021(2020!e - [2020!e]) < \pi.$$

Trong đó $[a]$ là phần nguyên của a.

Bài 2.3 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ). Tính tổng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$ với $-1 < x < 1$.

Bài 2.4 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh). Cho $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 9}{x_n^3 - x_n + 6}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Chứng minh $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy tăng ngặt.

2. Chứng minh $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy không bị chặn trên.

3. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{x_1^3+3} + \frac{1}{x_2^3+3} + \frac{1}{x_3^3+3} + \ldots + \frac{1}{x_n^3+3} \right)$.

3 HÀM SỐ

Bài 3.1 (ĐH Bách khoa - ĐHQG Tp. HCM, P.T. Thực). 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục tới cấp hai trên đoạn $[0,1]$. Biết rằng với mọi $x \in [0,1]$ thì

$$0 \leq f(x) \leq \frac{2021}{3}, \quad f'(x) \geq 0, \quad \text{và} \quad f"(x) \geq 0.$$

Chứng minh rằng với mọi số thực $a \in (0,1)$, ta luôn tìm được $t \in [0,a]$ sao cho

$$f"(t) \leq \frac{2021}{a^2}.$$

2. Hãy chỉ ra rằng tồn tại số thực $a \in (0,1)$ và một hàm số $g(x)$ có đạo hàm liên tục tới cấp hai trên đoạn $[0,1]$ sao cho với mọi $x \in [0,1]$ thì

$$0 \leq g(x) \leq \frac{2021}{3}, \quad g'(x) \geq 0, \quad g"(x) \geq 0,$$

và

$$g"(t) \geq \frac{2021}{\sqrt{a}},$$

với mọi $t \in [0,a]$.

Bài 3.2 (ĐH Bách khoa - ĐHQG Tp. HCM, P.T. Thực). Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên khoảng $(-2021, 2021)$. Biết rằng hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các tính chất sau:

— Với mọi parabol $p(x)$, nếu $f-p$ có cực đại địa phương tại một điểm x_0 nào đó thuộc $(-2021, 2021)$ thì $p''(x_0) \geq 2022$.

— Với mọi parabol $p(x)$, nếu $f-p$ có cực tiểu địa phương tại một điểm x_0 nào đó thuộc $(-2021, 2021)$ thì $p''(x_0) \leq 2022$.

Hãy chỉ ra rằng hàm số $f(x)$ phải có dạng

$$f(x) = 1011x^2 + ax + b,$$

với a, b là các hằng số nào đó.

Ghi chú: Một parabol là một đa thức bậc hai.

Bài 3.3 (ĐH Bách khoa - ĐHQG Tp. HCM, P.T. Thực). Một đoạn dây thẳng được cắt thành hai phần (có thể không đều nhau). Sau đó dùng một phần để tạo ra một hình vuông, phần còn lại tạo ra một hình tròn sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là 2022 (m^2). Hỏi tỷ lệ giữa cạnh của hình vuông và bán kính của hình tròn là bao nhiêu để độ dài của đoạn dây ban đầu (lúc chưa cắt) là lớn nhất? Hãy tìm giá trị lớn nhất đó.

Bài 3.4 (ĐH Đà Lạt, Đ.T. Hiệp)**.** Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên đoạn $[a,b]$ và thỏa mãn

$$f(a)=f(b)=0, f(x)\neq 0, \forall x\in(a,b).$$

Chứng minh rằng tồn tại dãy số $\{x_n\}, x_n\in(a,b)$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f'(x_n)}{(\sqrt[n]{e}-1)f(x_n)}=2021.$$

Bài 3.5 (ĐH Đà Lạt, Đ.T. Hiệp)**.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$, khả vi trong $(0,1)$ và thỏa mãn

$$f(0)=f(1)=0.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c\in(0,1)$ sao cho $f'(c)=f(c)$.

Bài 3.6 (ĐH Đồng Tháp)**.**

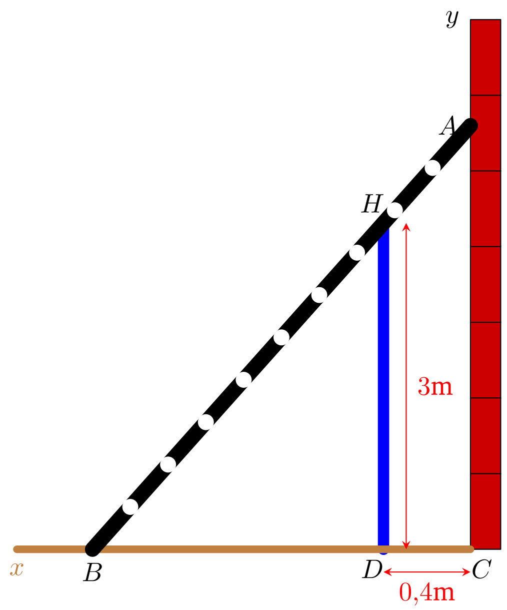
1. Cho $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ là hàm liên tục trên [a,b] và khả vi trên (a,b) với $0\leq a<b$. Chứng minh rằng tồn tại $c_1,c_2\in(a,b)$ thoả mãn

$$\frac{f(a)f'(c_2)+f(c_2)f'(c_1)}{b-c_2}=f'(c_1)f'(c_2).$$

2. Giả sử $f:[0,1]\to(0,\infty)$ là hàm khả vi cấp hai thoả mãn $f(0)=f'(0)=2$ và $f(1)=1$. Chứng minh rằng tồn tại $\xi\in(0,1)$ sao cho

$$f(\xi)f'(\xi)+f''(\xi)=0.$$

Bài 3.7 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên)**.** Trong hình vẽ, cho bờ tường Cy và mặt đất Cx. Cắm một cột đỡ DH song song với bờ tường và cách bờ tường một khoảng $0{,}4$m, chiều dài cột đỡ $DH=3$m. Người ta thiết kế một cái thang AB sao cho nó có thể dựa vào bờ tường Cy và chạm vào mặt đất Cx, dựa vào cột đỡ DH. Tính chiều dài nhỏ nhất của cái thang thỏa mãn yêu cầu trên.



Bài 3.8 (ĐH Hàng Hải Việt Nam, H.V. Hùng). Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[0, +\infty)$, khả vi trên $(0, +\infty)$ và thỏa mãn các điều kiện:

a. $f(0) = 0$;

b. $f(x) \neq f'(x)$ với mọi $x \in (0, +\infty)$.

Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty$.

Bài 3.9 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ, T.A. Tuấn). Cho f là một hàm liên tục trên $[0; +\infty)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a > 0$ và $f(0) + f(1) + \cdots + f(n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tính

$$A = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{f(0) + f(1) + \cdots + f(n)} \cdot \int\limits_0^n f(x)dx \right].$$

Bài 3.10 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ, T.A. Tuấn). Cho hàm $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho $\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 x.f(x)dx$. Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in (0; 1)$ sao cho: $2021 \int\limits_0^c f(x)dx = -c.f(c)$.

Bài 3.11 (ĐH Kiến trúc). Một công ty sản xuất và bán x ti vi mỗi tháng, với $x \leq 100$. Công ty có chi phí sản xuất hàng tháng và giá bán lần lượt là $C(x) = x^2 + 40x + 50$ và $p(x) = 100 - x$. Chúng ta lần lượt ký hiệu doanh thu hàng tháng và lợi nhuận hàng tháng của công ty bởi $D(x)$ và $R(x)$. Biết rằng $D(x) = x.p(x)$ và $R(x) = D(x) - C(x)$, hãy thực hiện các yêu cầu sau:

a) Tính $D(x)$ và $R(x)$ theo x.

b) Tìm giá trị lớn nhất của $R(x)$ khi $x \in [0, 100]$.

c) Công ty nên sản xuất bao nhiêu ti vi mỗi tháng để lợi nhuận lớn nhất?

Bài 3.12 (ĐH Kiến trúc). Cho hàm số $f(x) : [0; 1] \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục thỏa mãn $f(1) = -\dfrac{1}{8082}$ đồng thời $\displaystyle\int_0^1 x^4 [f'(x)]^2 \,\mathrm{d}x \le 4040 \int_0^1 f(x) \cdot x^{2019} \,\mathrm{d}x$. Xác định hàm số $f(x)$.

Bài 3.13 (ĐH Kiến trúc). Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 2021]$ và thỏa mãn $f(x) + f(2021 - x) = 0$ với mọi $x \in [0; 2021]$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) - \displaystyle\int_0^{2021-x} f(t) \,\mathrm{d}t = \dfrac{xf(x)}{2021}$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 2021)$.

Bài 3.14 (ĐH Mỏ - Địa chất, P. T. Cường). Giả sử $f : [0, 1] \longrightarrow R$ là hàm liên tục và $\displaystyle\int_0^1 x^k f(x) \, dx = 0$ với mọi $k = 0, \ldots, n$. Chứng minh rằng $f(x)$ có $n + 1$ nghiệm trong khoảng $(0, 1)$.

Bài 3.15 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn). Con sâu rơi xuống yên ngựa $2z = x^2 - y^2$ tại điểm $(0, 0, 0)$. Nhận thấy kỵ sĩ chuẩn bị ngồi lên yên nên nó muốn tránh va chạm với phần cơ thể của kỵ sĩ. Nó muốn bò tới điểm $(2, 0, 2)$. Thế nhưng vì hoảng sợ nên nó chỉ có thể bò theo đường thẳng. Tức là quỹ đạo của nó chỉ có thể là một số lượng hữu hạn các đoạn thẳng. Vậy nó phải di chuyển như thế nào?

Bài 3.16 (ĐH Mỏ - Địa chất, P. T. Cường). Với số tự nhiên n bất kỳ, hãy rút gọn tổng

$$\sum_{x+y+z+t=n} 2^{x+2y+3z+4t},$$

trong đó x, y, z, t là các số nguyên không âm. Đáp số cần chứa không quá bốn số hạng.

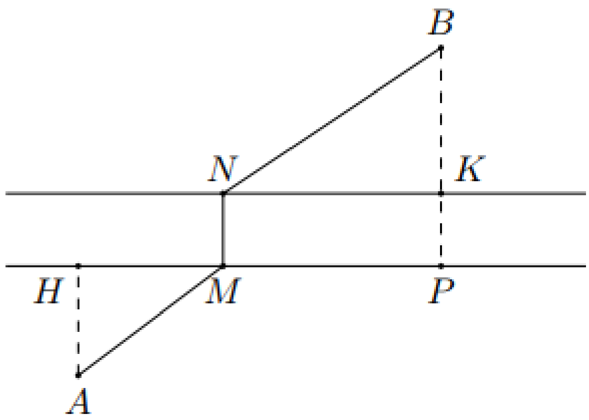
Bài 3.17 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Cho hàm số

$$f(x) = -x + \sqrt{(a + x)(b + x)}, \quad \forall x \in [0, +\infty),$$

trong đó a, b là các số thực dương khác nhau cho trước. Chứng minh rằng tồn tại duy một số thực $\alpha \in (0, +\infty)$ sao cho

$$f(\alpha) = \sqrt{ab} + \frac{1}{4}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2.$$

Bài 3.18 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Người ta muốn làm một con đường đi từ thành phố A đến thành phố B ở hai bên bờ sông như hình vẽ, thành phố A cách bờ sông $AH = 3\,\text{km}$, thành phố B cách bờ sông $BK = \sqrt{28}\,\text{km}$, $HP = 10\,\text{km}$. Con đường làm theo đường gấp khúc $AMNB$. Biết chi phí xây dựng một km đường bên bờ có điểm B nhiều gấp $\dfrac{16}{15}$ lần chi phí xây dựng một km đường bên bờ A, chi phí làm cầu ở đoạn nào cũng như nhau. Tìm vị trí của điểm M sao cho chi phí xây cầu ít tốn kém nhất.



Bài 3.19 (Trường ĐH Sư phạm - ĐH Huế, N.V. Hạnh). Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại $x = 0$ và thỏa mãn

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+2t) - f(x+t)}{t} = 3x^2$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f(x) = x^3 + f(0)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 3.20 (Trường ĐH Sư phạm - ĐH Huế, N.V. Hạnh). Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn $|f(x) - f(y)| \geq \dfrac{1}{2}|x - y|$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 100$ luôn có nghiệm.

Bài 3.21 (Trường ĐH Sư phạm - ĐH Huế, N.V. Hạnh). Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi đến cấp 2 và thỏa mãn

$$f(x)^2 + 2(f'(x))^2 \leq f(x)[f''(x) + 2f'(x)]$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng hoặc tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) \leq 0$; hoặc tồn tại $C \in (0, +\infty)$ sao cho $f(x) = Ce^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 3.22 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh)**.** Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(1+x^2\right).\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), \text{ khi } x \neq 0 \\ 0 \text{ , khi } x = 0 \end{cases}$$

1. Tìm $f'(x)$ khi $x \neq 0$.
2. Tìm $f'(0)$.
3. Xét tính liên tục của hàm số f' tại điểm $x = 0$.

Bài 3.23 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh)**.** Giả sử f liên tục trên $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ và thoả mãn

$$f(0) > 0, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx < 1.$$

Chứng minh phương trình $f(x) = \sin x$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bài 3.24 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ)**.** Cho f là hàm khả vi trên $[a;b]$, $f(a) = 0$, và tồn tại hằng số C sao cho $|f'(x)| \leq C\,|f(x)|$ với mọi $x \in [a;b]$. Hãy chứng minh rằng $f(x) \equiv 0$ trên $[a;b]$.

Bài 3.25 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ)**.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;6]$ thỏa mãn:

$$f(x) + 3f(4-x) = \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{6-x}} \;\; (1).$$

Tính tích phân

$$I = \int\limits_{-2}^{6} xf'(x)\,dx.$$

Bài 3.26 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ)**.** Một nhà máy lọc dầu đặt tại điểm A trên một đường cao tốc thẳng và một kho dầu đặt tại điểm B mà có thể đến nó từ A theo đường cao tốc 8 km tới điểm C và sau đó đi 12 km xuyên qua một cánh đồng vuông góc với đường cao tốc. Một ống dẫn dầu từ A tới B nếu xây dựng qua cánh đồng giá đất gấp 2,6 lần so với xây dựng dọc theo đường cao tốc. Tìm vị trí điểm D trên đường cao tốc sao cho giá thành xây dựng đường ống dẫn dầu là rẻ nhất.

Bài 3.27 (ĐH Trà Vinh, P.M. Triển)**.** Chứng minh rằng hàm số $f(x) = x^{x^x}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

Bài 3.28 (HV Phòng không Không quân, P.H. Quân)**.** Ký hiệu $C[0,1]$ là tập tất cả các hàm liên tục $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|, \quad 0 \leq x, y \leq 1, \quad u(0) = 0.$$

Cho hàm $\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\varphi(u) = \int_0^1 \big(u^2(x) - u(x)\big)\, dx.$$

1. Chứng minh rằng $|\varphi(u)| \leq \dfrac{5}{6}$.
2. Cho ví dụ hàm $u(x)$ sao cho $|\varphi(u)| = \dfrac{5}{6}$.

4 PHÉP TÍNH VI PHÂN

Bài 4.1 (ĐH Đồng Tháp)**.** Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a, b) thoả mãn $a^b = b^a$.

Bài 4.2 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên)**.** Cho hàm f khả vi vô hạn lần trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f^{(k)}(0) = 0, \text{ với mọi } k = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$f^{(k)}(x) \geq 0, \text{ với mọi } k = 1, 2, \ldots \text{ và } x > 0.$$

Chứng minh rằng $f(x) = 0,\ \forall x > 0$.

Bài 4.3 (ĐH Hàng Hải Việt Nam, P.Q. Khải)**.** Cho đa thức $P(x)$ với hệ số thực và $Q(x) = 2020P(x) + 2021P'(x)$. Chứng minh rằng nếu $Q(x)$ không có nghiệm thực thì $P(x)$ cũng không có nghiệm thực.

Bài 4.4 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh)**.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) + 2f'(-x) = \dfrac{2|x|}{x^6 + x^2 + 1}$ với mọi số thực x. Giả sử $f(2) = a, f(-3) = b$. Tính $T = f(3) - f(-2)$.

Bài 4.5 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ)**.** Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn $P(0) = P(1) = 0, P(2) = 2$ và $P'''(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính:

$$A = \frac{1}{P(2)} + \frac{1}{P(3)} + \ldots + \frac{1}{P(2019)} + \frac{1}{P(2021)}.$$

Bài 4.6 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ)**.** Xác định hàm số $f(x)$ thỏa mãn các tính chất sau:
i) Khả vi ít nhất đến cấp 3 trên $\mathbb{R}$,
ii) $f(0) = 2;\ f(1) = e + 2;\ f(-1) = e^{-1}$,
iii) $f'''(x) - f''(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 4.7 (HV Phòng không Không quân, P.H. Quân)**.** Một doanh nghiệp sản xuất thuần tuý hai loại sản phẩm với hàm chi phí kết hợp như sau

$$C(q_1, q_2) = 3q_1^2 + 2q_1q_2 + 2q_2^2 + 10,$$

trong đó q_1 là số lượng sản phẩm thứ nhất, q_2 là số lượng sản phẩm thứ hai. Vì là môi trường cạnh tranh nên doanh nghiệp phải chấp nhận giá thị trường của các loại sản phẩm. Với p_1, p_2 là giá thị trường của hai loại sản phẩm, hàm lợi nhuận có dạng

$$\pi := p_1q_1 + p_2q_2 - C(q_1, q_2).$$

Giả sử giá hai sản phẩm lần lượt là $p_1 = 160\$,\ p_2 = 120\$$. Hãy xác định cơ cấu hai loại sản phẩm sao cho doanh nghiệp đạt lợi nhuận lớn nhất.

Bài 4.8 (HV Phòng không Không quân, P.H. Quân)**.** Cho hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi cấp hai sao cho $f(0) = 2$, $f'(0) = -2$ và $f(1) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại $\xi \in (0, 1)$ sao cho

$$f(\xi)f'(\xi) + f''(\xi) = 0.$$

Cho một ví dụ về hàm $f(x)$ là hàm bậc hai thỏa mãn các yêu cầu và kết luận của bài toán trên.

5 PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Bài 5.1 (ĐH Bách khoa - ĐHQG Tp. HCM, P.T. Thực)**.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục tới cấp hai trên khoảng $(-\infty, 2023)$ và thỏa mãn $f''(x) \geq 0$, với mọi $x \in (-\infty, 2023)$.

a. Giả sử rằng giới hạn

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^{2022} f(t)\, e^t dt$$

tồn tại hữu hạn. Hãy chỉ ra rằng

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^{2022} f(t)\, e^t dt \geq e^{2022} f(2021).$$

b. Hãy xây dựng cụ thể một hàm số $f(x)$ không phải là hàm hằng thỏa mãn các điều kiện của bài toán sao cho

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^{2022} f(t)\, e^t dt = e^{2022} f(2021).$$

Bài 5.2 (ĐH Bách khoa - ĐHQG Tp. HCM, P.T. Thực). Cho hàm số liên tục, không giảm $f : (0, +\infty) \to (0, 1)$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(\frac{x}{2}\right) \leq f(x)\, g(x), \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

Ở đây $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ là một hàm số liên tục nào đó. Đặt

$$A(x, y) := \int_{2x}^{2y} \frac{\ln(g(t))}{t} dt.$$

a. Hãy chỉ ra rằng với mọi số thực dương x và y sao cho $x < y$, bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\ln(f(x)) \leq \frac{A(x, y)}{\ln 2}. \qquad (1)$$

b. Với mọi $\varepsilon > 0$, hãy chỉ ra rằng với các điều kiện đã nêu của hàm số f và g, nhìn chung bất đẳng thức sau là không đúng:

$$\ln(f(x)) \leq \frac{A(x, y)}{\ln 2} - \varepsilon, \quad \forall x, y \in (0, +\infty) \text{ và } x < y. \qquad (2)$$

Tức là bất đẳng thức (1) không thể làm mạnh hơn với một hằng số dương ε như (2).

Bài 5.3 (ĐH Đồng Tháp). Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là một hàm khả tích thoả mãn điều kiện

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1.$$

Chứng minh rằng $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx \geq 4.$

Bài 5.4 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên). Cho hàm $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho

$$f(c) = 2021 \int_0^c f(x)dx.$$

Bài 5.5 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên). Tính tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2} dx.$$

Bài 5.6 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên). Cho hàm f liên tục trên $[0,1]$ và $\int\limits_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2}$, $\forall x \in [0,1]$. Chứng minh rằng

$$\int\limits_0^1 f^2(x)dx \geq \int\limits_0^1 xf(x) \geq \frac{1}{3}.$$

Bài 5.7 (ĐH Hàng Hải Việt Nam, H.V. Hùng). Một hàm $f(x)$ liên tục trên $[0,+\infty)$ và thỏa mãn bất đẳng thức

$$1 + 2\int_0^x (f(t))^2 dt \leq e^{2x} \text{ với mọi } x > 0.$$

Chứng minh rằng $1 + 2\int_0^x f(t)dt \leq e^x$ với mọi $x > 0$.

Bài 5.8 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ, T.A. Tuấn). Cho các hàm liên tục $f, g : [0;1] \to [0;1]$, f là hàm tăng thực sự. Chứng minh rằng:

$$\int\limits_0^1 f(g(x))dx \leq \int\limits_0^1 [f(x) + g(x)]\, dx.$$

Bài 5.9 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn). Giả sử

$$f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

là hàm liên tục và $\int_0^1 f^{1011}(x)\, dx = 1$.
Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{2020} \int_0^1 f^i(x)dx \geq 2020.$$

Bài 5.10 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Cho f là một hàm số liên tục trên $[0,1]$ sao cho $f(x) \geq 0$ với $x \in [0,1]$ và

$$\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2}, \quad \forall x \in [0,1].$$

Chứng minh rằng

$$\int_0^1 [f(x)]^{2021} dx \geq \int_0^1 x^{2020} f(x)dx.$$

Bài 5.11 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh)**.** Lập công thức truy hồi đối với

$$\int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x}.$$

Từ đó tính

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

Bài 5.12 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ)**.** Tính tích phân sau:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x+1)^2 + \sqrt{x^4 + 6x^2 + 1}}.$$

Bài 5.13 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ)**.** Tính tích phân

$$I = \int_{2}^{3} \frac{\sqrt{\ln(7-x)}}{\sqrt{\ln(7-x)} + \sqrt{\ln(x+2)}} dx.$$

Bài 5.14 (ĐH Trà Vinh, C.H. Hoà)**.** Tính tích phân

$$I = \int_{0}^{2\pi} \ln\left(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}\right) dx.$$

Bài 5.15 (HV Phòng không Không quân, P.H. Quân)**.** Cho β và u là các hàm giá trị thực xác định trên $[a, +\infty)$, $a > 0$. Giả sử rằng u là các hàm khả vi trên $[a, +\infty)$.

1. Giả sử rằng u thỏa mãn

   $$u'(t) \leq \beta(t)u(t).$$

   Chứng minh rằng $u(t) \leq u(a)\exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right)$, trong đó

   $$\exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right) = e^{\int_a^t \beta(s)ds}.$$

2. Nếu thay đổi giả thiết rằng

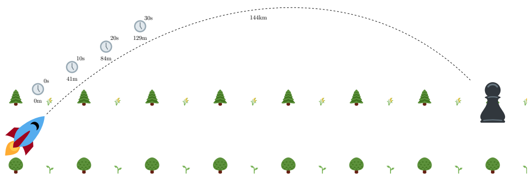
   $$u'(t) < \beta(t)u(t).$$

   Có xảy ra đẳng thức $u(t) = u(a)\exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right)$ hay không? Nếu có hay cho một ví dụ cụ thể, nếu không hãy chứng minh.

6 PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Bài 6.1 (ĐH Đồng Tháp). Một tên lửa được bắn ra từ một bệ phóng tên lửa đặt tại vị trí A đến vị trí B. Thông qua ra-đa, người ta thấy sau khi ra khỏi bệ phóng được 10 giây, 20 giây, 30 giây, quãng đường đi được của tên lửa lần lượt là 41m; 84m và 129m. Biết rằng quãng đường đi của tên lửa được biểu diễn dưới dạng một đa thức có bậc nhỏ nhất thoả mãn các điều kiện trên và khi tên lửa đến vị trí B thì quãng đường đi của tên lửa là 144km.

1. Tìm thời điểm tên lửa đến vị trí B.
2. Tìm vận tốc trung bình của tên lửa và thời điểm mà tên lửa đạt vận tốc bằng vận tốc trung bình.



Bài 6.2 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên). Tìm hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) \geq f(x)f(y) \geq 2021^{x+y}, \ \forall x, \ y \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.3 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ, T.A. Tuấn). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

$$f(f(x)+y) = f(x+y) + xf(y) - xy - x + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.4 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn). Hãy tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn phương trình

$$f(x+2020y) = f(x^2+y^2)f(\cos x \cdot \cos y)$$

với giá trị bất kỳ $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 6.5 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn). Hãy tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bị chặn, thuộc lớp C^1 và thỏa mãn phương trình $f'(x) = f(x-1)$ với mọi x.

Bài 6.6 (ĐH Trà Vinh, C.H. Hoà). Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa điều kiện sau:

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2f(x) + \frac{3}{x-1}, \ \forall x \neq 1.$$

Bài 6.7 (ĐH Trà Vinh, P.M. Triển). Xác định hàm số $f(x)$ khả vi liên tục trên đoạn $[0;1]$ mà $f(1) = ef(0)$ và $\int\limits_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \leq 1.$

Phần III

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

1 Đại số

1.1 Bảng A

BÀI 1. (a) Dùng tính chất đa tuyến tính rồi khai triển Laplace theo hàng cuối ta có

$$\begin{aligned}
|D_n| = n! &\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
=& n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + n! \cdot (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \\
=& n! \left(1 + (-1)^{n+1}\right) \\
=& \begin{cases} 2n! & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Nếu n lẻ thì $|D_n| = 2n! \neq 0$. Do đó ma trận có hạng bằng n.
Nếu n chẵn thì $|D_n| = 0$. Do đó hạng của ma trận nhỏ hơn n. Mặt khác, vì $n-1$ hàng đầu tiên là độc lập tuyến tính, nên hạng của ma trận $\geq n-1$. Kết hợp với việc hạng nhỏ hơn n, suy ra nếu n chẵn, thì hạng của ma trận bằng $n-1$.

(b) Nhận thấy ma trận chuyển từ $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ sang hệ vectơ $(e_1 + e_2, 2e_2 + 2e_3, 3e_3 + 3e_4, \dots, (n-1)e_{n-1} + (n-1)e_n, ne_n + ne_1)$ chính là ma trận chuyển vị D_n^T. Dựa theo phần (a) thì $|D_n| \neq 0$ khi n lẻ và $|D_n| = 0$ khi n chẵn. Do đó, khi n lẻ thì hệ $(e_1+e_2, 2e_2+2e_3, 3e_3+3e_4 \dots, (n-1)e_{n-1}+(n-1)e_n, ne_n+ne_1)$

lập thành một cơ sở của không gian V. Khi n chẵn, hệ này không phải là một cơ sở của không gian V.

BÀI 2. (a) Tỷ lệ của N trong sản phẩm là: $0,4x + 0,2y + 0,3z$.
Tỷ lệ của K trong sản phẩm là: $0,2x + 0,3y + 0,3z$.
Tỷ lệ của S trong sản phẩm là: $0,4x + 0,5y + 0,4z$.

(b) Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 0,4x + 0,2y + 0,3z = 0,31, \\ 0,2x + 0,3y + 0,3z = 0,26. \end{cases}$$

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận bổ sung ta có: $(x; y; z) = (0,4; 0,3; 0,3)$.

(c) Gọi a, b lần lượt là tỷ lệ của N, K trong một sản phẩm. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 0,4x + 0,2y + 0,3z = a, \\ 0,2x + 0,3y + 0,3z = b. \end{cases}$$

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận bổ sung ta có:

$$(x; y; z) = (3 - 10b; 6 - 10a - 10b; 10a + 20b - 8).$$

Điều kiện để có một sản phẩm là $0 \le x, y, z \le 1$. Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} 0,2 \le b \le 0,3 \\ 0,5 \le a + b \le 0,6 \\ 0,8 \le a + 2b \le 0,9. \end{cases}$$

BÀI 3. (a) Giả sử $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ (a_i nguyên, $a_n \neq 0$). Đặt

$$Q(x) = P(x+1) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n \ (b_i \text{ nguyên}).$$

Bởi vì $P\left(\dfrac{2021}{2023}\right) = 0$ nên $Q\left(\dfrac{-2}{2023}\right) = P\left(\dfrac{2021}{2023}\right) = 0$. Suy ra

$$b_0 + b_1\left(\frac{-2}{2023}\right) + \cdots + b_n\left(\frac{-2}{2023}\right)^n = 0,$$

tương đương

$$b_0(2023)^n + b_1(-2)(2023)^{n-1} + \cdots + b_n(-2)^n = 0.$$

Từ đó suy ra b_0 là số chẵn. Mặt khác $b_0 = Q(0) = P(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Vậy tổng các hệ số của $P(x)$ không thể bằng 2023.

(b) Có thể có một đa thức $P(x)$ như vậy. Chẳng hạn xét đa thức $P(x) = 2023(2022x - 2021)$. Thế thì $P(x)$ nhận $\alpha = \dfrac{2021}{2022}$ làm nghiệm và tổng các hệ số của nó bằng 2023.

BÀI 4. (a) Ma trận A khả nghịch, cấp 2, hệ số phức, luôn đồng dạng (bởi một ma trận Q hệ số phức) với một trong hai ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Thật vậy nếu A không chéo hóa được, thì đa thức đặc trưng có dạng

$$P_A(X) = (X - \lambda)^2.$$

Chọn α_2 tùy ý không thuộc $V_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_2)$, và $\alpha_1 = (A - \lambda I_2)(\alpha_2)$ ta có

$$\begin{cases} A\alpha_1 = \lambda\alpha_1, \\ A\alpha_2 = \alpha_1 + \lambda\alpha_2. \end{cases}$$

Do đó với Q có các cột là α_1, α_2 thì

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Trường hợp 1: A chéo hóa được, nghĩa là tồn tại một ma trận Q khả nghịch ($Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$) sao cho

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Vậy ta chỉ cần chọn

$$B = Q \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

thì $B^2 = A$.

Trường hợp 2: Tồn tại $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sao cho

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$A = Q\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Vì ma trận A khả nghịch, nên $\lambda \neq 0$. Ta sẽ tìm một ma trận

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sao cho

$$C^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ví dụ một ma trận như vậy là

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & \dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}} \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Vậy với ma trận

$$B = Q\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & \dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}} \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} Q^{-1},$$

thì ta có $B^2 = A$.

(b) Giả sử tồn tại ma trận vuông cấp hai sao cho

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sao cho

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Thế thì

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0, \\ (a+d)c = 0, \\ bc + d^2 = 0, \\ (a+d)b = 1. \end{cases}$$

Do đó $c = 0$, suy ra

$$\begin{cases} a^2 = d^2 = 0, \\ (a+d)b = 1. \end{cases}$$

Từ đây suy ra $a = d = 0$ và dẫn đến mâu thuẫn. Vậy ma trận

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

không khai căn bậc hai được.

BÀI 5. (a) Nếu hai hàng bất kỳ chỉ sai khác nhau một vectơ hàng thì tổng các số trên mỗi đường hoán vị bằng tổng các số trên một hàng cố định trước cộng với một hằng số. Do đó tổng các phần tử trên mỗi đường hoán vị là như nhau.
Đảo lại, giả sử tổng các phần tử trên mỗi đường hoán vị là như nhau. Thế thì với i, j cho trước, k, l tùy ý ta có

$$a_{ik} + a_{jl} = a_{il} + a_{jk}.$$

Do đó

$$a_{ik} - a_{jk} = a_{il} - a_{jl} \text{ với mọi } k, l.$$

Vậy hàng i trừ hàng j bằng vectơ hàng hằng $(c, c, \ldots, c)$.

(b) Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Hàng đầu tiên là vectơ hằng: $(-1, -1)$; $(0, 0)$, hoặc $(1, 1)$. Khi đó mỗi hàng đều là hằng và có 3 khả năng cho mỗi hàng

$$\begin{cases} (0,0); \\ (1,1); \\ (-1,-1). \end{cases}$$

Khi đó ta có 9 ma trận Olympic sau:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trường hợp 2: Cả 0 lẫn 1 (ngoại trừ -1) đều xuất hiện trên hàng đầu tiên. Thế thì hàng đầu tiên có 2 khả năng $(1, 0)$ hoặc $(0, 1)$. Trường hợp này có 4 ma trận Olympic sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trường hợp 3: Cả 0 lẫn -1 (ngoại trừ 1) đều xuất hiện trên hàng đầu tiên. Tương tự trường hợp 2, trường hợp này tất cả 4 ma trận Olympic sau:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Trường hợp 4: Cả $1, -1$ (0 có hay không đều được) đều xuất hiện ở hàng đầu tiên. Thế thì tất cả các hàng đều bằng nhau và hàng thứ nhất có 2 khả năng $(-1, 1)$ hoặc $(1, -1)$. Do đó trường hợp này có 2 ma trận Olympic sau:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vậy số ma trận Olympic cần tìm là

$$f(2) = 9 + 4 + 4 + 2 = 19.$$

(c) Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Hàng đầu tiên là vectơ hằng. Khi đó mỗi hàng đều là hằng và có 3 khả năng cho mỗi hàng

$$\begin{cases} (0, 0, \dots, 0); \\ (1, 1, \dots, 1); \\ (-1, -1, \dots, -1). \end{cases}$$

Vậy trường hợp này có tất cả 3^n ma trận.

Trường hợp 2: Cả 0 lẫn 1 (ngoại trừ -1) đều xuất hiện trên hàng đầu tiên. Thế thì hàng đầu tiên có $2^n - 2$ khả năng. Cố định hàng đầu tiên, các hàng sau đó sẽ đều sai khác với hàng đầu tiên $(0, 0, \dots, 0)$ hoặc $(1, 1, \dots, 1)$. Vậy có 2^{n-1} khả năng cho các hàng còn lại và trường hợp này tất cả $2^{n-1}(2^n - 2)$ ma trận.

Trường hợp 3: Cả 0 lẫn -1 (ngoại trừ 1) đều xuất hiện trên hàng đầu tiên. Tương tự trường hợp 2, trường hợp này tất cả $2^{n-1}(2^n - 2)$ ma trận.

Trường hợp 4: Cả $1, -1$ (số 0 có hay không đều được) đều xuất hiện ở hàng đầu tiên. Thế thì tất cả các hàng đều bằng nhau và hàng thứ nhất có

$$3^n - 2 \cdot 2^n + 1$$

khả năng. (Tổng cộng có 3^n khả năng cho hàng đầu rồi loại đi $3 + 2(2^n - 2)$ khả năng của trường hợp 1,2,3.) Vậy trường hợp này có tất cả $3^n - 2 \cdot 2^n + 1$ khả năng.
Vậy số ma trận cần tìm là

$$\begin{aligned} f(n) &= 3^n + 2^{n-1} \cdot (2^n - 2) \cdot 2 + 3^n - 2^{n+1} + 1, \\ &= 4^n + 2 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n + 1. \end{aligned}$$

1.2 Bảng B

BÀI 1. (a) Khai triển Laplace (chẳng hạn theo hàng đầu) suy ra định thức của A bằng $-2abc$.

(b) Ma trận A cấp 3 có hạng bằng 3 khi và chỉ khi nó là một ma trận khả nghịch, hay $abc \neq 0$.
Dùng công thức

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \overline{a_{31}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \overline{a_{32}} \\ \overline{a_{13}} & \overline{a_{23}} & \overline{a_{33}} \end{pmatrix}$$

ta suy ra khi $abc \neq 0$ thì ma trận nghịch đảo

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a} & \frac{1}{2c} & -\frac{b}{2ac} \\ \frac{1}{2b} & -\frac{a}{2bc} & \frac{1}{2c} \\ -\frac{c}{2ab} & \frac{1}{2b} & \frac{1}{2a} \end{pmatrix}.$$

BÀI 2. (a) Tỷ lệ của N trong sản phẩm là: $0,4x + 0,2y + 0,3z$.
Tỷ lệ của K trong sản phẩm là: $0,2x + 0,3y + 0,3z$.
Tỷ lệ của S trong sản phẩm là: $0,4x + 0,5y + 0,4z$.

(b) Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 0,4x + 0,2y + 0,3z = 0,31, \\ 0,2x + 0,3y + 0,3z = 0,26. \end{cases}$$

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận bổ sung ta có: $(x; y; z) = (0,4; 0,3; 0,3)$.

(c) Gọi a, b lần lượt là tỷ lệ của N, K trong một sản phẩm. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 0,4x + 0,2y + 0,3z = a, \\ 0,2x + 0,3y + 0,3z = b. \end{cases}$$

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận bổ sung ta có:

$$(x; y; z) = (3 - 10b; 6 - 10a - 10b; 10a + 20b - 8).$$

Điều kiện để có một sản phẩm là $0 \leq x, y, z \leq 1$. Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} 0,2 \leq b \leq 0,3 \\ 0,5 \leq a+b \leq 0,6 \\ 0,8 \leq a+2b \leq 0,9. \end{cases}$$

BÀI 3. (a) Đa thức đặc trưng là

$$P_A(X) = (2-X)(4-X)^2.$$

Các giá trị riêng tương ứng $\lambda = 2$, $\lambda = 4$ (số bội bằng 2). Các không gian con riêng tương ứng

$$V_2 = \text{Span}\left((1,1,1)^T\right), V_4 = \text{Span}\left((1,-1,1)^T\right).$$

Tổng các không gian con này chứa trong thực sự $\mathbb{C}^3$, nên ma trận A không chéo hóa được.

(b) Ta chọn $u_1 = (1,1,1)^T$, $u_2 = (1,-1,1)^T$ lần lượt là các vectơ riêng ứng với 2 và 4. Ta cần tìm u_3 sao cho $Au_3 = u_2 + 4u_3$. Điều đó nghĩa là $(A-4E)u_3 = u_2$. Do đó, ta có thể chọn $u_3 = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)^T$. Vậy ma trận Q cần chọn là:

$$Q = [u_1, u_2, u_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{4}{3} \\ 1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

BÀI 4. (a) Vì $\lambda \neq 0$, nên có thể chọn chẳng hạn ma trận

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix},$$

suy ra

$$B^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Vậy với

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix},$$

thì $B^2 = A$.

(b) Giả sử tồn tại ma trận vuông cấp hai sao cho

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sao cho

$$B^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Thế thì

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0, \\ (a+d)c = 0, \\ bc + d^2 = 0, \\ (a+d)b = 1. \end{cases}$$

Do đó $c = 0$, suy ra

$$\begin{cases} a^2 = d^2 = 0, \\ (a+d)b = 1. \end{cases}$$

Từ đây suy ra $a = d = 0$ và dẫn đến mâu thuẫn. Vậy ma trận

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

không khai căn bậc hai được.

BÀI 5. (a) Nếu hai hàng bất kỳ chỉ sai khác nhau một vectơ hàng thì tổng các số trên mỗi đường hoán vị bằng tổng các số trên một hàng cố định trước cộng với một hằng số. Do đó tổng các phần tử trên mỗi đường hoán vị là như nhau.

Đảo lại, giả sử tổng các phần tử trên mỗi đường hoán vị là như nhau. Thế thì với i, j cho trước, k, l tùy ý ta có

$$a_{ik} + a_{jl} = a_{il} + a_{jk}.$$

Do đó

$$a_{ik} - a_{jk} = a_{il} - a_{jl} \text{ với mọi } k, l.$$

Vậy hàng i trừ hàng j bằng vectơ hàng hằng $(c, c, \dots, c)$.

(b) Dùng câu (a) ta có $a_{14} = 1$. Từ đó lại dùng câu (a) lần lượt suy ra

$$a_{23} = 0; a_{32} = -1; a_{33} = 0; a_{34} = 0; a_{42} = 0; a_{43} = 1; a_{44} = 1.$$

Vậy ta thu được ma trận Olympic sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Hàng đầu tiên là vectơ hằng: $(-1,-1)$; $(0,0)$, hoặc $(1,1)$. Khi đó mỗi hàng đều là hằng và có 3 khả năng cho mỗi hàng

$$\begin{cases}(0,0);\\(1,1);\\(-1,-1).\end{cases}$$

Khi đó ta có 9 ma trận Olympic sau:

$$\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&0\\-1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

Trường hợp 2: Cả 0 lẫn 1 (ngoại trừ -1) đều xuất hiện trên hàng đầu tiên. Thế thì hàng đầu tiên có 2 khả năng $(1,0)$ hoặc $(0,1)$. Trường hợp này có 4 ma trận Olympic sau:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

Trường hợp 3: Cả 0 lẫn -1 (ngoại trừ 1) đều xuất hiện trên hàng đầu tiên. Tương tự trường hợp 2, trường hợp này tất cả 4 ma trận Olympic sau:

$$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Trường hợp 4: Cả $1,-1$ (0 có hay không đều được) đều xuất hiện ở hàng đầu tiên. Thế thì tất cả các hàng đều bằng nhau và hàng thứ nhất có 2 khả năng $(-1,1)$ hoặc $(1,-1)$. Do đó trường hợp này có 2 ma trận Olympic sau:

$$\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

Vậy số ma trận Olympic cần tìm là

$$f(2)=9+4+4+2=19.$$

2 Giải tích

2.1 Bảng A

BÀI 1. (a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > 3/2$
1. Khẳng định (u_n) đơn điệu tăng.
Từ định nghĩa

$$u_{n+1} = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} > \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} = u_n$$

với mọi $n \geq 1$. Vậy ta suy ra $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \geq 1$.
2. Khẳng định $u_n > 3/2$ khi và chỉ khi $n \geq 3$.
Do

$$u_2 = 1 + \frac{1}{2} = 3/2$$

nên từ tính đơn điệu của (u_n) ta suy ra $u_n > 3/2$ khi và chỉ khi $n \geq 3$.

(b) Chứng minh rằng dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.
1. Khẳng định (u_n) bị chặn trên.
Sử dụng đánh giá $n! \geq n(n-1)$ để thấy

$$u_n = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} < 2$$

với mọi $n \geq 2$.
2. Khẳng định (u_n) hội tụ.
Dãy (u_n) đơn điệu tăng và bị chặn trên nên hội tụ.

(c) Chứng minh rằng giới hạn của dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ là một số vô tỉ.
Phản chứng, giả sử giới hạn của dãy là hữu tỉ, tức là

$$\frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots = \frac{m}{n}$$

với m, n nguyên tố cùng nhau. Nhân hai vế với $n!$ ta đi đến

$$n!\left(\frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) + \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots}_{S} = (n-1)!m.$$

Vậy $S \in \mathbb{N}^*$. Từ đây suy ra $nS \geq 1$, tức là $(n+1)S - 1 \geq S$, tức là

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots \geq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots .$$

Đây là điều vô lý.

BÀI 2. (a) Chứng minh f liên tục tại 0.
1. Tính giới hạn của f tại 0.
Với mọi x ta luôn có

$$0 \leq |f(x)| = \sin^2 x \leq x^2.$$

Do đó theo nguyên lý kẹp thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
2. Khẳng định tính liên tục của f tại 0.
Ở bước trên ta đã có $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Nhưng $0 \in \mathbb{Q}$ nên $f(0) = \sin^2 0 = 0$. Vậy f liên tục tại 0.

(b) Hàm f có khả vi tại 0 không?
1. Chuyển về khảo sát giới hạn của $f(x)/x$.
Ta khảo sát giới hạn

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(0+x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

2. Tính giới hạn của $f(x)/x$
Rõ ràng với $x \neq 0$ thì $0 \leq \big|f(x)/x\big| \leq x$. Vậy

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Từ đó hàm f khả vi tại 0.

(c) Tìm tất cả các điểm mà ở đó hàm f khả vi.
1. Khẳng định f không khả vi tại $x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$
Nhận xét: nếu $x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$ thì $\sin x \neq 0$. Có 2 trường hợp xảy ra:

Nếu $x \in \mathbb{Q}$. Trong trường hợp này $f(x) = \sin^2 x$. Lấy 1 dãy các điểm $x_n \notin \mathbb{Q}$ sao cho $x_n \to x$. Từ tính liên tục của hàm $\sin$ ta thấy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (-\sin^2 x_n) = -\sin^2 x \neq \sin^2 x = f(x).$$

Nếu $x \notin \mathbb{Q}$. Trong trường hợp này $f(x) = -\sin^2 x$. Lấy 1 dãy các điểm $x_n \in \mathbb{Q}$ sao cho $x_n \to x$. Từ tính liên tục của hàm $\sin$ ta thấy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin^2 x_n = \sin^2 x \neq -\sin^2 x = f(x).$$

2. Khẳng định f khả vi tại $k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$
Cuối cùng chú ý rằng $f(k\pi) = 0$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Do

$$\left|\frac{f(k\pi + x) - f(k\pi)}{x}\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right|,$$

lý luận như ý (b) ta thấy tại các điểm $k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$ thì f khả vi với $f'(k\pi) = 0$.

Bài 3. (a) Chứng minh rằng tồn tại dãy số $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dần ra $+\infty$ sao cho $f'(x_n) \to 0$

1. Sử dụng công thức giá trị trung bình.

Sử dụng công thức giá trị trung bình trên các đoạn $[n, n+1]$ ta thu được

$$f'(x_n) = f(n+1) - f(n)$$

với $x_n \in (n, n+1)$ nào đó.

2. Chỉ ra sự tồn tại một dãy $(x_n)_n$ cần tìm.

Hiển nhiên dãy $(x_n)_n$ xác định như ở bước trên tiến ra $+\infty$. Hơn nữa do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ nên

$$\lim_{n\to+\infty} f'(x_n) = 0.$$

(b) Chứng minh rằng nếu f'' bị chặn trên $\mathbb{R}$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

1. Đánh giá f' thông qua khai triển Taylor

Từ công thức Khai triển Taylor ta có

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x+\theta h)}{2}h^2$$

với $x, h > 0$ và $\theta \in (0,1)$ phụ thuộc vào x và h. Do f'' bị chặn nên tồn tại $M > 0$ sao cho $|f''(x)| < M$ với mọi $x > 0$. Khi đó từ công thức khai triển trên

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} + \frac{Mh}{2}.$$

2. Kết luận giới hạn của f'

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ nên với mỗi $\varepsilon > 0$ tùy ý tồn tại $x_0 > 0$ sao cho

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \geq x_0.$$

Do đó

$$|f'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{h} + \frac{Mh}{2} \quad \forall x \geq x_0.$$

Đến đây ta lấy

$$h = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{M}}$$

để thu được

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2\varepsilon M} \quad \forall x \geq x_0.$$

Do $\varepsilon > 0$ tùy ý nên $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

(c) Nếu f' bị chặn trên $\mathbb{R}$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ có tồn tại không?

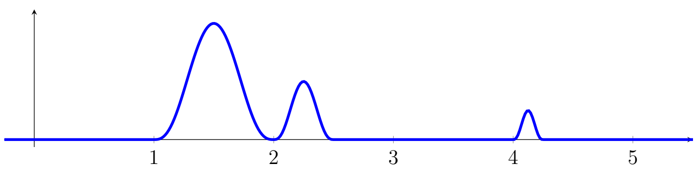
1. Xây dựng hàm f thuộc $C^2(\mathbb{R})$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Trước tiên ta xét hàm phụ $h(x) = \phi(x)\phi(1-x)$ trong đó

$$\phi(x) = \begin{cases} x^3 & \text{nếu } x \geq 0, \\ 0 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Hàm h xây dựng như trên có tính chất $h \in C^2(\mathbb{R})$, $h \equiv 0$ ngoài $[0,1]$, đối xứng qua $1/2$, và h' bị chặn. Tiếp theo ta xây dựng phản ví dụ cho bài toán như sau

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} h(2^n(x - 2^n)).$$



Dễ kiểm tra hàm f xây dựng như trên được định nghĩa tốt. Giá trị hàm f chỉ khác không trên các khoảng có dạng

$$\left(2^n, 2^n + \frac{1}{2^n}\right) \quad n \in \mathbb{N}.$$

Do hệ số 2^{-n} nên $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. Kết luận không tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

Dễ kiểm tra với f như trên thì f' bị chặn vì h' bị chặn. Với các điểm

$$x_n = 2^n + \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}$$

thì gần x_n ta có

$$f(x) = \frac{1}{2^n} h(2^n(x - 2^n))$$

và do đó

$$f'(x_n) = h'(2^n(x_n - 2^n)) = 0.$$

Tuy nhiên, với các điểm

$$y_n = 2^n + \frac{1}{4}\frac{1}{2^n}$$

thì gần y_n ta vẫn có

$$f(x) = \frac{1}{2^n} h(2^n(x - 2^n))$$

do đó

$$f'(y_n) = h'(2^n(y_n - 2^n)) = \frac{27}{512}.$$

Nhận xét 1. Không khó để thấy f'' không bị chặn. Thật vậy

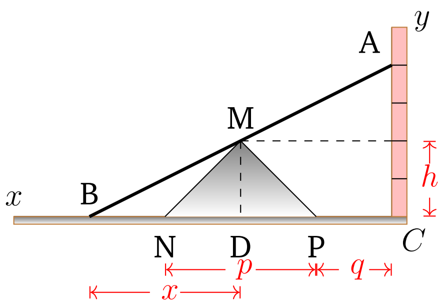
$$f''(x_n) = 2^n h''(2^n(x_n - 2^n)) = -3 \cdot 2^{n-3}.$$

Nhận xét 2. Hàm f xây dựng từ các tích phân Fresnel có dạng

$$f(x) = \int_0^x \left[\sin(t^2) - \cos(t^2)\right] dt$$

cũng là một phản ví dụ.

BÀI 4.



Xác định chiều dài ngắn nhất có thể có của thang AB.
1. Đặt bài toán
Đặt $BD = x$ mét với $x \geq p/2$. Khi đó

$$BM = \sqrt{x^2 + h^2}.$$

Vì $\Delta BDM \sim \Delta BCA$ ta suy ra

$$MA = \frac{DC}{DB} \times MB = \frac{p/2 + q}{x}\sqrt{x^2 + h^2}.$$

Vậy

$$AB = MA + MB = \sqrt{x^2 + h^2}\frac{x + p/2 + q}{x} =: f(x).$$

2. Khảo sát hàm f trên $[p/2, \infty)$
Tính toán để thu được

$$f'(x) = \frac{2x^3 - (p + 2q)h^2}{2x^2\sqrt{x^2 + h^2}}$$

Rõ ràng $f'(x) = 0$ tại duy nhất

$$x = \Big((\frac{p}{2} + q)h^2 \Big)^{1/3} =: x_0.$$

3. Kết luận độ dài ngắn nhất của thang AB
Có 2 trường hợp xảy ra:

Trường hợp $4(p+2q)h^2 \leq p^3$: Khi đó hàm f đồng biến trên $[p/2, \infty)$ và vị trí thang AB cần tìm là khi $B \equiv N$, tức là khi thang tựa trên giá đỡ. Lúc này chiều dài của thang AB là

$$\big(p+q\big)\sqrt{1 + (\frac{2h}{p})^2}.$$

Trường hợp $4(p+2q)h^2 > p^3$: Khi đó hàm f nghịch biến trên $[p/2, x_0]$ và đồng biến trên $[x_0, \infty)$ và vị trí thang AB cần tìm là khi $BN = x_0 - p/2$. Lúc này chiều dài của thang AB là

$$\Big(x_0 + \frac{p}{2} + q\Big)\sqrt{1 + (\frac{h}{x_0})^2}.$$

BÀI 5. (a) Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{F}$ thì f liên tục.
Lấy $x \in [-1, 1]$ và $\varepsilon > 0$ bất kỳ. Ta chứng minh tồn tại $\delta > 0$ (có thể phụ thuộc vào x và ε) sao cho $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ với mọi $y \in [-1, 1]$ thỏa mãn $|x - y| < \delta$. Thật vậy ta lấy

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2022}.$$

Khi đó với $y \in [-1, 1]$ bất kỳ thỏa mãn $|x - y| < \delta$ ta sẽ có

$$|f(x) - f(y)| \leq 2022|x - y| < 2022\delta = \varepsilon.$$

(b) Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{F}$ thì $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx \geq \frac{1}{2022}$
1. Chứng minh $f(x) \geq \max(1 + 2022(|x| - 1), 0)$ với mọi $x \in [-1, 1]$.
Rõ ràng

$$\max(1 + 2022(|x| - 1), 0) = 0 \quad \forall x \in [-\frac{2021}{2022}, \frac{2021}{2022}].$$

Với $-1 \leq x < -\dfrac{2021}{2022}$ ta có

$$f(x) \geq f(-1) - |f(x) - f(-1)| \geq 1 - 2022|x + 1| = 1 + 2022(|x| - 1).$$

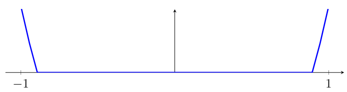
Với $\dfrac{2021}{2022} < x \le 1$ ta có

$$f(x) \ge f(1) - |f(x) - f(1)| \ge 1 - 2022|x-1| = 1 + 2022(|x|-1).$$

2. Tính tích phân $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.
Do $f \ge 0$ trên $[-1,1]$ nên

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \ge \int_{-1}^{-\frac{2021}{2022}} \big(1 - 2022(x+1)\big)dx + \int_{\frac{2021}{2022}}^{1} \big(1 + 2022(x-1)\big)dx$$
$$= \frac{1}{2022}.$$

(c) Dấu đẳng thức trong ý (b) có đạt được hay không?
Dấu đẳng thức đạt được với hàm số $f(x) = \max(1 + 2022(|x|-1), 0)$.



Rõ ràng hàm này thỏa mãn giả thiết $f(-1) = f(1) = 1$ và

$$|f(x) - f(y)| \le 2022|x-y| \quad \forall x, y \in [-1,1].$$

Cũng theo ý trên ta biết rằng $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2022}$.

2.2 Bảng B

BÀI 1. (a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > 3/2$
1. Khẳng định (u_n) đơn điệu tăng
Từ định nghĩa

$$u_{n+1} = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} > \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} = u_n$$

với mọi $n \geq 1$. Vậy ta suy ra $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \geq 1$.
2. Khẳng định $u_n > 3/2$ khi và chỉ khi $n \geq 3$
Do

$$u_2 = 1 + \frac{1}{2} = 3/2$$

nên từ tính đơn điệu của (u_n) ta suy ra $u_n > 3/2$ khi và chỉ khi $n \geq 3$.

(b) Chứng minh rằng dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.
1. Khẳng định (u_n) bị chặn trên.
Sử dụng đánh giá $n! \geq n(n-1)$ để thấy

$$u_n = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} < 2$$

với mọi $n \geq 2$.
2. Khẳng định (u_n) hội tụ
Dãy (u_n) đơn điệu tăng và bị chặn trên nên hội tụ.

BÀI 2. (a) Chứng minh f liên tục tại 0
1. Tính giới hạn của f tại 0
Với mọi x ta luôn có

$$0 \leq |f(x)| = \sin^2 x \leq x^2.$$

Do đó theo nguyên lý kẹp thì $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.
2. Khẳng định tính liên tục của f tại 0
Ở bước trên ta đã có $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Nhưng $0 \in \mathbb{Q}$ nên $f(0) = \sin^2 0 = 0$. Vậy f liên tục tại 0.

(b) Hàm f có khả vi tại 0 không?
1. Chuyển về khảo sát giới hạn của $f(x)/x$
Ta khảo sát giới hạn

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(0+x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

2. Tính giới hạn của $f(x)/x$

Rõ ràng với $x \neq 0$ thì $0 \leq \left|f(x)/x\right| \leq x$. Vậy

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Từ đó hàm f khả vi tại 0.

(c) Tìm tất cả các điểm mà ở đó hàm f khả vi
1. Khẳng định f không khả vi tại $x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$
Nhận xét: nếu $x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$ thì $\sin x \neq 0$. Có 2 trường hợp xảy ra:

Nếu $x \in \mathbb{Q}$. Trong trường hợp này $f(x) = \sin^2 x$. Lấy 1 dãy các điểm $x_n \notin \mathbb{Q}$ sao cho $x_n \to x$. Từ tính liên tục của hàm $\sin$ ta thấy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (-\sin^2 x_n) = -\sin^2 x \neq \sin^2 x = f(x).$$

Nếu $x \notin \mathbb{Q}$. Trong trường hợp này $f(x) = -\sin^2 x$. Lấy 1 dãy các điểm $x_n \in \mathbb{Q}$ sao cho $x_n \to x$. Từ tính liên tục của hàm $\sin$ ta thấy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin^2 x_n = \sin^2 x \neq -\sin^2 x = f(x).$$

2. Khẳng định f khả vi tại $k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
Cuối cùng chú ý rằng $f(k\pi) = 0$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Do

$$\left|\frac{f(k\pi + x) - f(k\pi)}{x}\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right|,$$

lý luận như ý (b) ta thấy tại các điểm $k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$ thì f khả vi với $f'(k\pi) = 0$.

BÀI 3. (a) Chứng minh rằng tồn tại dãy số $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dần ra $+\infty$ sao cho $f'(x_n) \to 0$
1. Sử dụng công thức giá trị trung bình
Sử dụng công thức giá trị trung bình trên các đoạn $[n, n+1]$ ta thu được

$$f'(x_n) = f(n+1) - f(n)$$

với $x_n \in (n, n+1)$ nào đó.
2. Chỉ ra sự tồn tại một dãy $(x_n)_n$ cần tìm
Hiển nhiên dãy $(x_n)_n$ xác định như ở bước trên tiến ra $+\infty$. Hơn nữa do $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ nên

$$\lim_{n\to+\infty} f'(x_n) = 0.$$

(b) Chứng minh rằng nếu f'' bị chặn trên $\mathbb{R}$ thì $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

1. Đánh giá f' thông qua khai triển Taylor

Từ công thức Khai triển Taylor ta có

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x+\theta h)}{2}h^2$$

với $x, h > 0$ và $\theta \in (0,1)$ phụ thuộc vào x và h. Do f'' bị chặn nên tồn tại $M > 0$ sao cho $|f''(x)| < M$ với mọi $x > 0$. Khi đó từ công thức khai triển trên

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} + \frac{Mh}{2}.$$

2. Kết luận giới hạn của f'.
Do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ nên với mỗi $\varepsilon > 0$ tùy ý tồn tại $x_0 > 0$ sao cho

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \geq x_0.$$

Do đó

$$|f'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{h} + \frac{Mh}{2} \quad \forall x \geq x_0.$$

Đến đây ta lấy

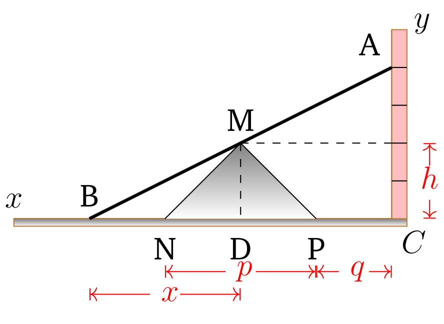
$$h = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{M}}$$

để thu được

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2\varepsilon M} \quad \forall x \geq x_0.$$

Do $\varepsilon > 0$ tùy ý nên $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

BÀI 4.



Xác định chiều dài ngắn nhất có thể có của thang AB.
1. Đặt bài toán
Đặt $BD = x$ mét với $x \geq p/2$. Khi đó

$$BM = \sqrt{x^2 + h^2}.$$

Vì $\Delta BDM \sim \Delta BCA$ ta suy ra

$$MA = \frac{DC}{DB} \times MB = \frac{p/2+q}{x}\sqrt{x^2+h^2}.$$

Vậy

$$AB = MA + MB = \sqrt{x^2+h^2}\frac{x+p/2+q}{x} =: f(x).$$

2. Khảo sát hàm f trên $[p/2,\infty)$.
Tính toán để thu được

$$f'(x) = \frac{2x^3-(p+2q)h^2}{2x^2\sqrt{x^2+h^2}}$$

Rõ ràng $f'(x)=0$ tại duy nhất

$$x = \Big(\big(\frac{p}{2}+q\big)h^2\Big)^{1/3} =: x_0.$$

3. Kết luận độ dài ngắn nhất của thang AB Có 2 trường hợp xảy ra:

Trường hợp $4(p+2q)h^2 \le p^3$: Khi đó hàm f đồng biến trên $[p/2,\infty)$ và vị trí thang AB cần tìm là khi $B \equiv N$, tức là khi thang tựa trên giá đỡ. Lúc này chiều dài của thang AB là

$$\big(p+q\big)\sqrt{1+\big(\frac{2h}{p}\big)^2}.$$

Trường hợp $4(p+2q)h^2 > p^3$: Khi đó hàm f nghịch biến trên $[p/2,x_0]$ và đồng biến trên $[x_0,\infty)$ và vị trí thang AB cần tìm là khi $BN = x_0 - p/2$. Lúc này chiều dài của thang AB là

$$\Big(x_0+\frac{p}{2}+q\Big)\sqrt{1+\big(\frac{h}{x_0}\big)^2}.$$

BÀI 5. (a) Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{F}$ thì f liên tục
Lấy $x \in [-1,1]$ và $\varepsilon > 0$ bất kỳ. Ta chứng minh tồn tại $\delta > 0$ (có thể phụ thuộc vào x và ε) sao cho $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ với mọi $y \in [-1,1]$ thỏa mãn $|x-y| < \delta$. Thật vậy ta lấy

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2022}.$$

Khi đó với $y \in [-1,1]$ bất kỳ thỏa mãn $|x-y| < \delta$ ta sẽ có

$$|f(x)-f(y)| \le 2022|x-y| < 2022\delta = \varepsilon.$$

(b) Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{F}$ thì $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx \geq \frac{1}{2022}$.

1. Chứng minh $f(x) \geq \max(1 + 2022(|x| - 1), 0)$ với mọi $x \in [-1, 1]$.
Rõ ràng

$$\max(1 + 2022(|x| - 1), 0) = 0 \quad \forall x \in [-\frac{2021}{2022}, \frac{2021}{2022}].$$

Với $-1 \leq x < -\dfrac{2021}{2022}$ ta có

$$f(x) \geq f(-1) - |f(x) - f(-1)| \geq 1 - 2022|x + 1| = 1 + 2022(|x| - 1).$$

Với $\dfrac{2021}{2022} < x \leq 1$ ta có

$$f(x) \geq f(1) - |f(x) - f(1)| \geq 1 - 2022|x - 1| = 1 + 2022(|x| - 1).$$

2. Tính tích phân $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$
Do $f \geq 0$ trên $[-1, 1]$ nên

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx &\geq \int_{-1}^{-\frac{2021}{2022}} \big(1 - 2022(x + 1)\big)dx + \int_{\frac{2021}{2022}}^{1} \big(1 + 2022(x - 1)\big)dx \\ &= \frac{1}{2022}.\end{aligned}$$

3 Trung học phổ thông

3.1 Ngày thứ nhất: Số học

Dãy số Fibonacci modulo một số nguyên dương

A. Một vài hệ thức cơ bản, định nghĩa và một số tính chất đầu tiên của $k(m)$

BÀI 1.
a) Ta dễ dàng kiểm tra công thức cần chứng minh bằng quy nạp theo v. Với $v = 0$ thì đẳng thức cần chứng minh trở thành $F_u = F_{u-1}F_0 + F_uF_1$, luôn đúng do $F_0 = 0, F_1 = 1$. Giả sử kết luận đúng với với v. Khi đó, với mọi số nguyên dương u, ta có

$$\begin{aligned} F_{u+v+1} = F_{(u+1)+v} &= F_uF_v + F_{u+1}F_{v+1} = F_uF_v + (F_{u-1} + F_u)F_{v+1} \\ &= F_{u-1}F_{v+1} + F_u(F_v + F_{v+1}) = F_{u-1}F_{v+1} + F_uF_{v+2}. \end{aligned}$$

Như vậy, đẳng thức cần chứng minh đúng với $v + 1$. Do đó, theo nguyên lý quy nạp thì kết luận đúng với mọi số nguyên dương v.
b) Ta chỉ cần áp dụng a) lần lượt cho $u = v = n$ và $u = n+1, v = n$ để có các đẳng thức cần tìm.

BÀI 2.
a) Ký hiệu $\bar{a}$ cho lớp đồng dư modulo m của số nguyên a. Xét $m^2 + 1$ bộ $(\overline{F}_k, \overline{F}_{k+1}), k = 0, 1, \ldots, m^2$. Thế nhưng, chỉ có m^2 bộ $(\bar{a}, \bar{b})$ khác nhau. Chính vì thế, theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại các chỉ số $1 \le i < j \le m^2$ sao cho $(\overline{F}_i, \overline{F}_{i+1}) = (\overline{F}_j, \overline{F}_{j+1})$. Ta có điều phải chứng minh.
b) Lấy các số i, j như trong a). Đặt $k = j - i$.Như vậy, $F_{i+k} \equiv F_i \pmod m$ và $F_{i+k+1} \equiv F_{i+1} \pmod m$. Từ đó suy ra $F_{i+k+2} = F_{i+k+1} + F_{i+k} \equiv F_{i+1} + F_i = F_{i+2} \pmod m$. Bằng quy nạp, ta dễ dàng suy ra $F_{n+k} \equiv F_n$ với mọi số nguyên $n \ge i$.
Tương tự, ta có $F_{i+k-1} = F_{i+k+1} - F_{i+k} \equiv F_{i+1} - F_i = F_{i-1} \pmod m$ và cũng bằng quy nạp, ta dễ dàng suy ra $F_{n+k} \equiv F_n \pmod m$ với mọi $n = i-1, i-2, \ldots, 0$. Như vậy, $F_{n+k} \equiv F_n \pmod m$ với mọi số tự nhiên n.
c) Một mặt, vì $F_{n+k(m)} \equiv F_n \pmod m$ với mọi số tự nhiên n nên $F_{k(m)} = F_{0+k(m)} \equiv F_0 = 0 \pmod m$ và $F_{k(m)+1} \equiv F_1 = 1 \pmod m$. Do đó tồn tại số nguyên dương k nhỏ nhất để $F_k \equiv 0 \pmod m$ và $F_{k+1} \equiv 1 \pmod m$ và hiển nhiên $k \le k(m)$.
Mặt khác, từ $F_k \equiv 0 \pmod m, F_{k+1} \equiv 1 \pmod m$, bằng quy nạp, ta dễ dàng suy ra $F_{n+k} \equiv F_n \pmod m$ với mọi số tự nhiên n. Chính vì thế, theo định nghĩa của $k(m)$ thì $k(m) \le k$. Suy ra $k(m) = k$.

d) Đây là tính chất quen biết của chu kỳ của một dãy số. Ta có thể lập luận như sau. Một mặt, nếu k chia hết cho $k(m)$ do dãy $F_n \mod m$ tuần hoàn với chu kỳ $k(m)$ nên nó cũng tuần hoàn với chu kỳ k. Đảo lại, giả sử dãy $F_n \mod m$ tuần hoàn với chu kỳ k. Đặt $k = qk(m)+r$, trong đó $0 \le r \le k(m)-1$. Nếu $r = 0$ thì k chia hết cho $k(m)$. Giả sử $r \neq 0$. Khi đó, ta có, với mọi số tự nhiên n thì

$$F_n \equiv F_{n+k} = F_{n+qk(m)+r} \equiv F_{n+r} \pmod m.$$

Chứng tỏ dãy $F_n \mod m$ tuần hoàn với chu kỳ $r < k(m)$, vô lý.

BÀI 3.
Thật vậy, với mọi số nguyên dương n chia hết cho $k(N)$, ta có$F_n \equiv F_0 = 0 \pmod N$ và do đó F_n chia hết cho N. Điều này cho thấy dãy Fibonacci có vô hạn số hạng chia hết cho N.

BÀI 4.
a) Một mặt, nhận xét rằng nếu $m \mid n$ thì $k(m) \mid k(n)$ do một dãy tuần hoàn với chu kỳ $k(n)$ theo modulo n phải tuần hoàn với chu kỳ $k(n)$ theo modulo m. Từ nhận xét trên, ta suy ra $k(m_1) \mid k([m_1, m_2]), k(m_2) \mid k([m_1, m_2])$, kéo theo $[k(m_1), k(m_2)] \mid k([m_1, m_2])$.
Mặt khác, với $i = 1, 2$, do $k(m_i) \mid [k(m_1), k(m_2)]$ nên $F_{[k(m_1),k(m_2)])} \equiv 0 \pmod{m_i}$ và $F_{[k(m_1),k(m_2)]+1} \equiv 1 \pmod{m_i}$. Suy ra $F_{[k(m_1),k(m_2)]} \equiv 0 \pmod{[m_1, m_2]}$ và $F_{[k(m_1),k(m_2)]+1} \equiv 1 \pmod{[m_1, m_2]}$. Từ đó suy ra $k([m_1, m_2]) \mid [k(m_1), k(m_2)]$ và như vậy $[k(m_1), k(m_2)] = k([m_1, m_2])$.
b) Dãy Fibonacci modulo 2 là

$$\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \ldots$$

Từ đó suy ra $k(2) = 3$.
Dãy Fibonacci modulo 4 là

$$\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \ldots$$

Từ đó suy ra $k(4) = 6$.
Dãy Fibonacci modulo 5 là

$$\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{0}, \bar{3}, \bar{3}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{0}, \bar{4}, \bar{4}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{0}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \ldots$$

Từ đó suy ra $k(5) = 20$.
Ta có $k(10) = k(2 \cdot 5) = [k(2), k(5)] = [3, 20] = 60$.

B. Một số tính chất khác của $k(m)$

BÀI 5.

a) Theo luật thuận nghịch toàn phương, nếu $p \equiv \pm 1 \pmod 5$ thì

$$\left(\frac{5}{p}\right) = (-1)^{\frac{5-1}{2}\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{5}\right) = \left(\frac{p}{5}\right) = \left(\frac{\pm 1}{5}\right) = 1.$$

Nghĩa là 5 là một số chính phương modulo p. Từ đó suy ra

$$5^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{5}{p}\right) \equiv 1 \pmod p.$$

b) Từ công thức của F_n, ta dễ dàng suy ra

$$2^{p-2}F_{p-1} = \sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} C_{p-1}^{2i+1}5^i = C_{p-1}^1 + C_{p-1}^3 5 + \cdots + C_{p-1}^{p-2}5^{\frac{p-3}{2}}.$$

Để ý rằng

$$C_{p-1}^{2i+1} = \frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-2i-1)}{1\cdot 2\cdots(2i+1)} \equiv (-1)^{2i+1} = -1 \pmod p.$$

Vì thế, theo a) thì

$$2^{p-2}F_{p-1} \equiv -\left(1+5+5^2+\cdots+5^{\frac{p-3}{2}}\right) = -\frac{5^{\frac{p-1}{2}}-1}{4} \equiv 0 \pmod p.$$

Do đó $F_{p-1} \equiv 0 \pmod p$.

c) Tương tự như b), ta có

$$2^{p-1}F_p = C_p^1 + C_p^3 5 + \cdots + C_p^p 5^{\frac{p-1}{2}}.$$

Mà $C_p^i \equiv 0 \pmod p$ với mọi $i = 1, 3, \ldots, p-2$, còn $C_p^p = 1$. Vì thế

$$2^{p-1}F_p \equiv 5^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p.$$

Cuối cùng, theo định lý Fermat nhỏ thì $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, do đó $F_p \equiv 1 \pmod p$. Như vậy, cùng với b) ta có $F_{p-1} \equiv 0 \pmod p$ và $F_p \equiv 1 \pmod p$. Từ đây, ta kết luận được rằng $k(p) \mid (p-1)$.

BÀI 6.

a) Trong trường hợp $p \equiv \pm 2 \pmod 5$, áp dụng luật thuận nghịch toàn phương, ta thấy 5 là một số không chính phương modulo p. Từ đó suy ra

$$5^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{5}{p}\right) \equiv -1 \pmod p.$$

Từ đó, tương tự như bài tập trước, ta có

$$2^p F_{p+1} = C_{p+1}^1 + C_{p+1}^3 5 + \cdots + C_{p+1}^p 5^{\frac{p-1}{2}}.$$

Nhận xét rằng, với mỗi i mà $3 \le i \le p-1$ thì

$$C_{p+1}^i = \frac{(p+1)p(p-1)\cdots(p-i+2)}{1\cdot 2\cdots i} \equiv 0 \pmod p$$

và $C_{p+1}^1 = C_{p+1}^p = p+1 \equiv 1 \pmod p$. Vì thế,

$$2^p F_{p+1} \equiv 1 + 5^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod p.$$

Từ đó $F_{p+1} \equiv 0 \pmod p$.
b) Trong trường hợp này, vì $C_p^i \equiv 0 \pmod p$ với mọi $1 \le i \le p-1$ nên ta có

$$2^{p-1} F_p = C_p^1 + C_p^3 5 + \cdots + C_p^p 5^{\frac{p-1}{2}} \equiv 5^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$$

Từ đó, do $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, ta có $F_p \equiv -1 \pmod p$. Như vậy,

$$F_p \equiv -1 \pmod p \quad \text{và} \quad F_{p+1} \equiv 0 \pmod p.$$

Từ đó,

$$\begin{aligned}
F_{2p+1} &= F_p^2 + F_{p+1}^2 \equiv 1^2 + 0^2 \equiv 1 \pmod p,\\
F_{2p+2} &= F_{(p+2)+p} = F_{p+1}(F_{p+1} + F_{p+2}) \equiv 0 \pmod p,\\
F_{2p+3} &= F_{2p+1} + F_{2p+2} \equiv 1 \pmod p
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $k(p) \mid (2p+2)$.
c) Theo các lập luận ở a) và b) ta có $F_p \equiv -1, F_{p+1} \equiv 0 \pmod p$, dẫn đến $F_{p+2} = F_p + F_{p+1} \equiv -1 \pmod p$. Chính vì thế $k(p) \nmid (p+1)$. Lại theo theo b) thì $k(p) \mid 2(p+1)$. Các quan hệ $k(p) \nmid (p+1)$, $k(p) \mid 2(p+1)$ chỉ có thể đồng thời xảy ra khi $4 \mid k(p)$.

BÀI 7.
a) Ta chứng minh bằng quy nạp theo s. Dễ thấy kết luận đúng với $s = 1$. Giả sử các đồng dư cần chứng minh đúng với số nguyên dương s, nghĩa là $F_{3\cdot 2^{s-1}} \equiv 0 \pmod{2^s}, F_{3\cdot 2^{s-1}+1} \equiv F_{3\cdot 2^{s-1}-1} \equiv 1 \pmod{2^s}$. Nói riêng, $F_{3\cdot 2^{s-1}+1} + F_{3\cdot 2^{s-1}-1} \equiv 0 \pmod 2$, $F_{3\cdot 2^{s-1}}^2 \equiv 0 \pmod{2^{2s}}$ do đó $F_{3\cdot 2^{s-1}}^2 \equiv 0 \pmod{2^{s+1}}$. Ngoài ra, $F_{3\cdot 2^{s-1}+1}^2 - 1 = (F_{3\cdot 2^{s-1}+1} - 1)(F_{3\cdot 2^{s-1}+1} + 1) \equiv 0 \pmod{2^{s+1}}$ do nhân tử thứ nhất chia hết cho 2^s còn nhân tử thứ hai chia hết cho 2, dẫn đến $F_{3\cdot 2^{s-1}+1}^2 \equiv 1 \pmod{2^{s+1}}$. Từ đó suy ra

$$F_{3\cdot 2^s} = F_{2\cdot 3\cdot 2^{s-1}} = F_{3\cdot 2^{s-1}}\left(F_{3\cdot 2^{s-1}-1} + F_{3\cdot 2^{s-1}+1}\right) \equiv 0 \pmod{2^{s+1}},$$
$$F_{3\cdot 2^s+1} = F_{2\cdot 3\cdot 2^{s-1}+1} = F^2_{3\cdot 2^{s-1}} + F^2_{3\cdot 2^{s-1}+1} \equiv 0 + 1 \equiv 1 \pmod{2^{s+1}}.$$

Nghĩa là kết luận đúng với $s+1$.
b) Ta chứng minh bằng quy nạp rằng $k(2^s) = 3\cdot 2^{s-1}$. Ta biết rằng kết luận là đúng với $s = 1, 2$. Giả sử $k(2^s) = 3\cdot 2^{s-1}$. Ta sẽ chỉ ra $k(2^{s+1}) \mid 3\cdot 2^s$. Trước hết, từ a) ta suy ra $k(2^{s+1}) \mid 3\cdot 2^s$. Mặt khác, vì $2^s \mid 2^{s+1}$ nên $3\cdot 2^{s-1} = k(2^s) \mid k(2^{s+1})$. Chính vì thế $k(2^{s+1}) = 3\cdot 2^{s-1}$ hoặc $k(2^s) = 3\cdot 2^s$. Để chỉ ra $k(2^{s+1}) \neq 3\cdot 2^{s-1}$, ta sẽ chứng minh $F_{3\cdot 2^{s-1}+1} \not\equiv 1 \pmod{2^{s+1}}$ bằng cách chứng minh bằng quy nạp rằng với mọi số nguyên dương s thì

$$F_{3\cdot 2^{s-1}+1} \equiv 2^s + 1 \pmod{2^{s+1}}. \qquad (1)$$

Dễ dàng kiểm tra được rằng đồng dư cần chứng minh đúng với $s = 1, 2$. Giả sử $F_{3\cdot 2^{s-1}+1} \equiv 2^s + 1 \pmod{2^{s+1}}$, trong đó s là một số nguyên ≥ 2.
Theo a), $F_{3\cdot 2^{s-1}} \equiv 0 \pmod{2^s}$ nên $F^2_{3\cdot 2^{s-1}} \equiv 0 \pmod{2^{2s}}$, do đó $F^2_{3\cdot 2^{s-1}} \equiv 0 \pmod{2^{s+2}}$ (do $s \geq 2$). Mặt khác, giả thiết quy nạp cho thấy $F_{3\cdot 2^{s-1}+1} - 1 \equiv 2^s \pmod{2^{s+1}}$ dẫn đến $(F_{3\cdot 2^{s-1}+1} - (2^s+1))^2 \equiv 0 \pmod{2^{s+2}}$, và do đó $F^2_{3\cdot 2^{s-1}+1} \equiv 2^{s+1} + 1) \pmod{2^{s+2}}$. Từ đó suy ra

$$F_{3\cdot 2^s+1} = F_{2\cdot 3\cdot 2^{s-1}+1} = F^2_{3\cdot 2^{s-1}} + F^2_{3\cdot 2^{s-1}+1} \equiv 2^{s+1} + 1 \pmod{2^{s+2}}.$$

Nghĩa là kết luận cũng đúng với $s+1$.

BÀI 8.
Ta mở rộng dãy Fibonacci cho các chỉ số âm bằng cách đặt $F_{-n} = -F_{-n+1} + F_{-n+2}$ với mọi số nguyên dương n. Ta dễ dàng kiểm tra được rằng $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$ với mọi số nguyên dương n.
Ngoài ra, đồng dư $F_n \equiv F_{n+k(m)} \pmod{m}$ đúng với mọi số nguyên n, ngay cả khi n âm.
Ta biết rằng $F_{k(m)} \equiv 0 \pmod{m}, F_{k(m)+1} \equiv 1 \pmod{m}$, dẫn đến $F_{k(m)-1} \equiv 1 \pmod{m}$. Suy ra

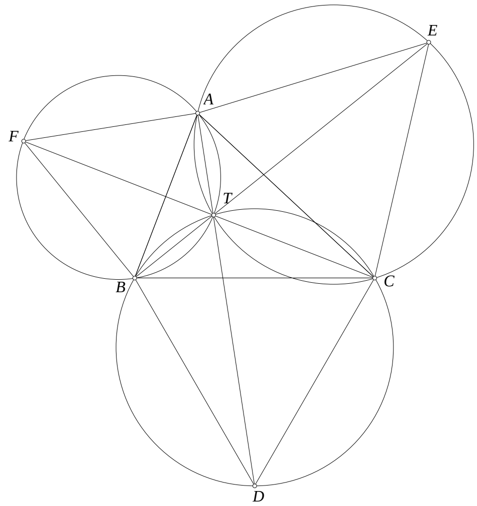
$$1 \equiv F_{k(m)-1} = (-1)^{k(m)}F_{1-k(m)} \equiv (-)^{k(m)}F_1 = (-1)^{k(m)} \pmod{m}.$$

Rõ ràng rằng nếu $m > 2$ đồng dư trên đây dẫn đến $(-1)^{k(m)} = 1$, hay $k(m)$ là số chẵn.

3.2 Ngày thứ hai: Hình học

A. Điểm Fermat-Torricelli của tam giác

BÀI 1. Dựng 2 cung chứa góc 120° trên các cạnh BC, CA nằm trong tam giác. Gọi T là giao điểm thứ 2 (khác C) của 2 cung trên. Do tính chất của tam giác ABC, dễ thấy T tồn tại và duy nhất. Mặt khác, từ cách dựng T, ta có $\angle BTC = \angle CTA = \angle ATB = 120^\circ$.



BÀI 2. Theo định nghĩa $\angle BTC = \angle CTA = \angle ATC = 120^\circ$ nên các tứ giác $ATCE$, $BTCD$, $BTAF$ nội tiếp. Từ đó $\angle ATF = \angle ABF = 60^\circ$, $\angle FTB = \angle FAB = 60^\circ$, và $\angle BTD = \angle BCD = 60^\circ$. Vậy $\angle ATD = 180^\circ$ hay A, T, D thẳng hàng. Chứng minh tương tự BE, CF đi qua T.

BÀI 3.

a) Do các vectơ $\vec{TA}$, $\vec{TB}$, $\vec{TC}$, đặt lệch nhau các góc 120° nên

$$\frac{\vec{TA}}{TA} + \frac{\vec{TB}}{TB} + \frac{\vec{TC}}{TC} = \vec{0}.$$

b) c) Sử dụng tích vô hướng, với mọi P, ta có

$$\begin{aligned}
PA + PB + PC &= \frac{PA \cdot TA}{TA} + \frac{PB \cdot TB}{TB} + \frac{PC \cdot TC}{TC} \\
&\geq \frac{\vec{PA} \cdot \vec{TA}}{TA} + \frac{\vec{PB} \cdot \vec{TB}}{TB} + \frac{\vec{PC} \cdot \vec{TC}}{TC} \\
&= \frac{\left(\vec{PT} + \vec{TA}\right) \cdot \vec{TA}}{TA} + \frac{\left(\vec{PT} + \vec{TB}\right) \cdot \vec{TB}}{TB} + \frac{\left(\vec{PT} + \vec{TC}\right) \cdot \vec{TC}}{TC} \\
&= \vec{PT}\left(\frac{\vec{TA}}{TA} + \frac{\vec{TB}}{TB} + \frac{\vec{TC}}{TC}\right) + TA + TB + TC \\
&= TA + TB + TC.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P trùng T.

B. Một vài mở rộng bài toán Fermat

BÀI 4.

a) Cách 1: Đây là hệ quả trực tiếp của định lí con nhím.

Cách 2: Đặt $\vec{u} = a\cdot\frac{\vec{HA}}{HA} + b\cdot\frac{\vec{HB}}{HB} + c\cdot\frac{\vec{HC}}{HC}$. Dễ dàng kiểm tra $\vec{u}\cdot\vec{AB} = \vec{u}\cdot\vec{BC} = 0$.

Từ đây suy ra $\vec{u} = \vec{0}$.

b) Với mọi P ta có

$$\begin{aligned}
aPA + bPB + cPC &= \frac{aPA\cdot HA}{HA} + \frac{bPB\cdot HB}{HB} + \frac{cPC\cdot HC}{HC} \\
&\geq \frac{a\vec{PA}\cdot\vec{HA}}{HA} + \frac{b\vec{PB}\cdot\vec{HB}}{HB} + \frac{c\vec{PC}\cdot\vec{HC}}{HC} \\
&= \frac{a(\vec{PH}+\vec{HA})\cdot\vec{HA}}{HA} + \frac{b(\vec{PH}+\vec{HB})\cdot\vec{HB}}{HB} + \frac{c(\vec{PH}+\vec{HC})\cdot\vec{HC}}{HC} \\
&= \vec{PH}\cdot\left(a\cdot\frac{\vec{HA}}{HA} + b\cdot\frac{\vec{HB}}{HB} + c\cdot\frac{\vec{HC}}{HC}\right) + aHA + bHB + cHC \\
&= aHA + bHB + cHC
\end{aligned}$$

Dễ thấy dấu bằng xảy ra khi $P = H$; nói cách khác tổng $aPA + bPB + cPC$ đạt giá trị bé nhất khi P là trực tâm tam giác ABC.

BÀI 5.

Do $\angle MUN = \angle MUV = \angle NUV = \angle QVU = \angle PVU = \angle PVQ$ nên

$$\frac{\vec{UM}}{UM} + \frac{\vec{UN}}{UN} + \frac{\vec{UV}}{UV} = \vec{0}$$

và

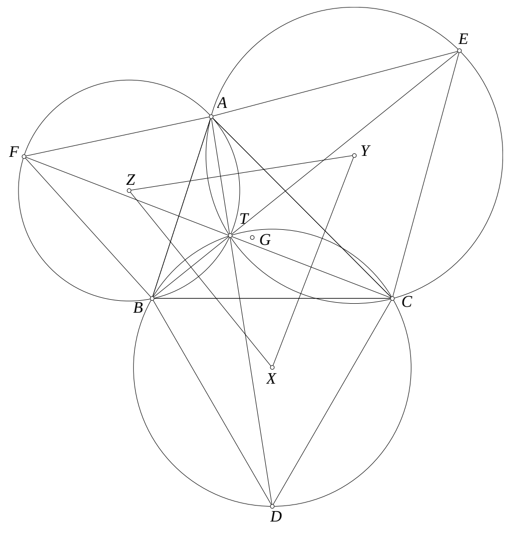
$$\frac{\vec{VP}}{VP} + \frac{\vec{VQ}}{VQ} + \frac{\vec{VU}}{VU} = \vec{0}.$$

Từ đó ta có biến đổi

$$
\begin{aligned}
&XM + XN + XY + YP + YQ \\
&= \frac{XM \cdot UM}{UM} + \frac{XM \cdot UN}{UN} + \frac{XY \cdot UV}{UV} + \frac{YP \cdot VP}{VP} + \frac{YQ \cdot VQ}{VQ} \\
&\geq \frac{\vec{XM} \cdot \vec{UM}}{UM} + \frac{\vec{XN} \cdot \vec{UN}}{UN} + \frac{\vec{XY} \cdot \vec{UV}}{UV} + \frac{\vec{YP} \cdot \vec{VP}}{VP} + \frac{\vec{YQ} \cdot \vec{VQ}}{VQ} \\
&= \frac{(\vec{XU} + \vec{UM}) \cdot \vec{UM}}{UM} + \frac{(\vec{XU} + \vec{UN}) \cdot \vec{UN}}{UN} + \frac{(\vec{XU} + \vec{UV} + \vec{VY}) \cdot \vec{UV}}{UV} + \\
&+ \frac{(\vec{YV} + \vec{VP}) \cdot \vec{VP}}{VP} + \frac{(\vec{YV} + \vec{VQ}) \cdot \vec{VQ}}{VQ} \\
&= \vec{XU} \cdot \left(\frac{\vec{UM}}{UM} + \frac{\vec{UN}}{UN} + \frac{\vec{UV}}{UV} \right) + \vec{YV} \cdot \left(\frac{\vec{VP}}{VP} + \frac{\vec{VQ}}{VQ} + \frac{\vec{VU}}{VU} \right) \\
&+ UM + UN + UV + VQ + VP \\
&= UM + UN + UV + VQ + VP
\end{aligned}
$$

Dấu bằng xảy ra khi $X = U$, $Y = V$. Vậy tổng $XM + XN + XY + YP + YQ$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $X = U$, $Y = V$.

C. Một số tính chất hình học của điểm Fermat-Torricelli



Bài 6.

Dựng ra ngoài các tam giác đều BCD, CAE, ABF có tâm lần lượt là X, Y, Z. Theo bài PT.1, các tứ giác $ATCE$, $BTCD$, $BTAF$ nội tiếp nên YZ, ZX, XY lần lượt là trung trực của TA, TB, TC. Dễ thấy do TA, TB, TC lệch nhau góc 120° nên tam giác XYZ đều. Từ đó chỉ cần chứng minh G là trọng tâm tam giác XYZ thì hiển nhiên G cách đều các đường thẳng YZ, ZX, XY (cũng chính là trung trực TA, TB, TC). Xét

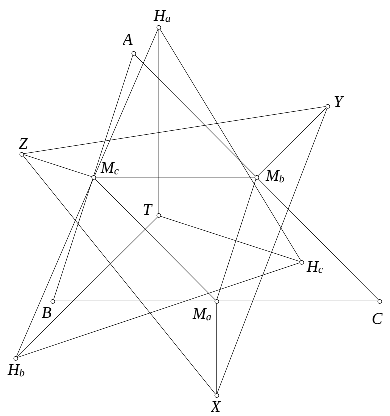
$$\vec{u} = \vec{AY} + \vec{CX} + \vec{BZ}.$$

Quay các vector $\vec{AY}$, $\vec{CX}$, $\vec{BZ}$ góc 30 cùng chiều kim đồng hồ thì các vector nhận được lần lượt là $\frac{\vec{AC}}{\sqrt{3}}$, $\frac{\vec{CB}}{\sqrt{3}}$, $\frac{\vec{BA}}{\sqrt{3}}$. Hiển nhiên tổng

$$\frac{\vec{AC}}{\sqrt{3}} + \frac{\vec{CB}}{\sqrt{3}} + \frac{\vec{BA}}{\sqrt{3}} = \vec{0},$$

ta suy ra $\vec{u} = \vec{0}$. Nói cách khác tam giác ABC và XYZ có cùng trọng tâm, do đó G là trọng tâm tam giác XYZ.

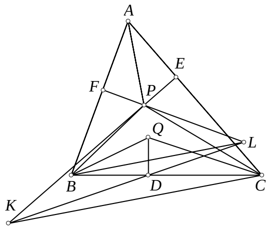
BÀI 7.
a) Gọi M_a, M_b, M_c lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Gọi X, Y, Z là tâm ngoại tiếp các tam giác TBC, TCA, TAB.



Theo PT.6, hai tam giác XYZ và ABC có cùng trọng tâm. Dễ thấy hai tam giác ABC và $M_aM_bM_c$ có cùng trọng tâm nên tam giác XYZ và $M_aM_bM_c$ có cùng trọng tâm. Vậy

$$\vec{TH_a} + \vec{TH_b} + \vec{TH_c} = 2\left(\vec{XM_a} + \vec{YM_b} + \vec{ZM_c}\right) = \vec{0}.$$

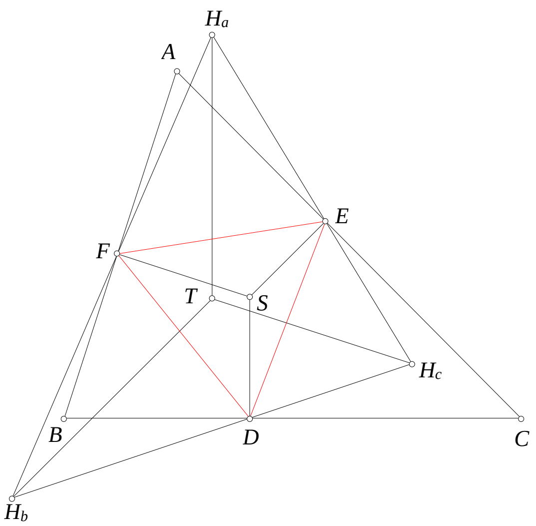
Hay T là trọng tâm tam giác $H_aH_bH_c$.
b, c) Ta có bổ đề sau
Bổ đề. Cho tam giác ABC với hai điểm P, Q (nằm trong tam giác) đẳng giác đối với tam giác. Gọi K, L lần lượt là trực tâm của các tam giác PCA, PAB. Gọi D là hình chiếu vuông góc của Q lên BC. Thì ba điểm K, D, L thẳng hàng.



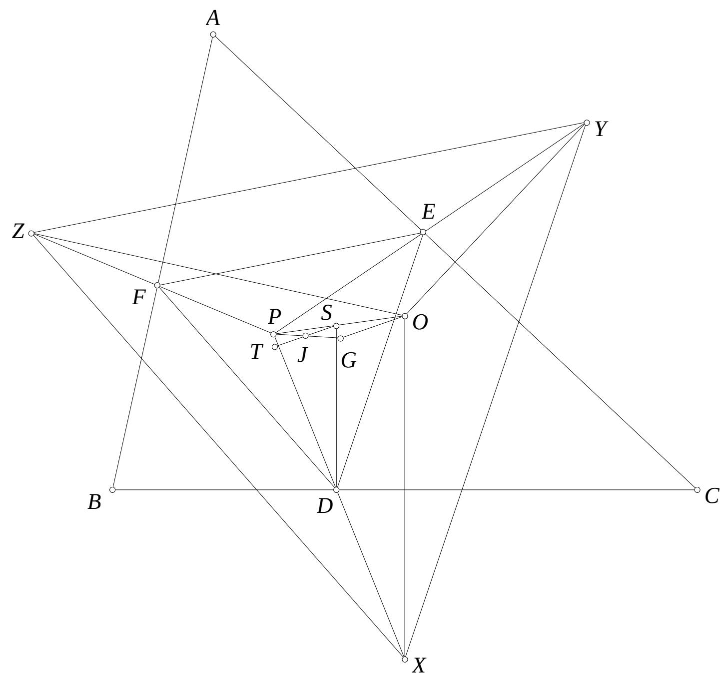
Chứng minh. Gọi giao điểm của PK, PL với CA, AB lần lượt E, F. Ta dễ thấy các cặp tam giác đồng dạng $\triangle PBF \sim \triangle QBD$ và $\triangle PCE \sim \triangle QCD$. Ta có biến đổi tỷ số như sau

$$\frac{DB}{DC} = \frac{DB}{DQ} \cdot \frac{DQ}{DC} = \frac{BF}{FP} \cdot \frac{PE}{EC} = \frac{BF}{EC} \cdot \frac{PA}{FP} \cdot \frac{PE}{PA} = \frac{BF}{EC} \cdot \frac{BL}{BF} \cdot \frac{CE}{CK} = \frac{BL}{CK}.$$

Kết hợp với $BL \parallel CK$ suy ra ba điểm K, D, L thẳng hàng. Kết thúc chứng minh.



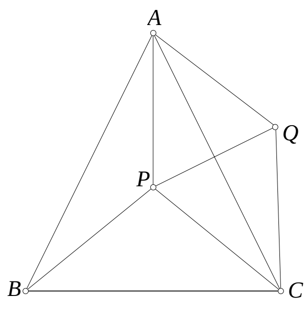
Gọi S là đẳng giác của T trong tam giác ABC. Áp dụng bổ đề thì D, E, F lần lượt là hình chiếu của S trên các cạnh BC, CA, AB. Từ đó cộng góc đơn giản dễ chỉ ra tam giác DEF đều. Hiển nhiên các đường thẳng qua D, E, F vuông góc BC, CA, AB đồng quy tại S.
d) Từ tính chất điểm đẳng giác, dễ thấy EF, FD, DE lần lượt vuông góc với TA, TB, TC. Gọi X, Y, Z lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác TBC, TCA, TAB, cũng dễ thấy YZ, ZX, XY lần lượt vuông góc với TA, TB, TC. Từ đó hai tam giác DEF và XYZ có cạnh tương ứng song song nên DX, EY, FZ đồng quy tại P. Xét phép vị tự $\mathcal{H}_P$ tâm P biến tam giác DEF thành XYZ. Tâm ngoại tiếp của DEF là trung điểm J của ST biến thành tâm ngoại tiếp tam giác XYZ cũng chính là trọng tâm G của ABC (theo PT. 4). (1)



Các đường thẳng từ Y, Z vuông góc với CA, AB, cắt nhau tại tâm ngoại tiếp O của ABC. Các đường vuông góc từ E, F với CA, AB, cắt nhau tại S. Dễ thấy phép vị tự $\mathcal{H}_P$ biến $E \mapsto Y$, $F \mapsto Z$ do đó $S \mapsto O$. (2)
Từ (1) và (2), ta thu được phép vị tự $\mathcal{H}_P$ biến JS (hay chính là TS) thành đường thẳng Euler GO của ABC, do đó $ST \parallel OG$.

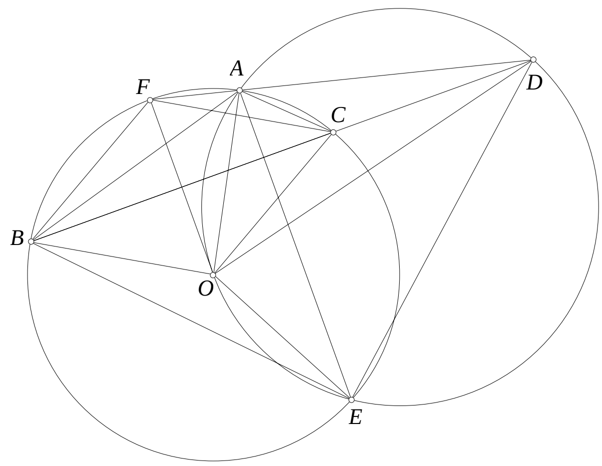
BÀI 8. Chúng ta cần một số bổ đề sau

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC cân tại A và điểm P nằm trong tam giác sao cho $\angle APB = \angle APC$. Thì $PB = PC$.



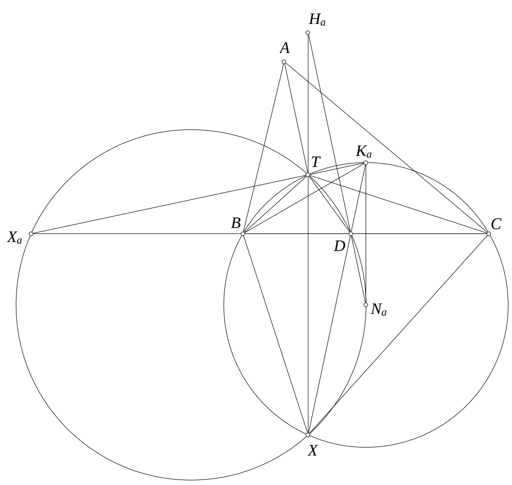
Chứng minh Bổ đề 1.: Dựng tam giác APQ cân tại A sao cho Q và P khác phía với AC và $\angle PAQ = \angle BAC$. Từ đó dễ chứng minh $\triangle APB = \triangle AQC$ $(c.g.c)$ suy ra $PB = QC$ và $\angle AQC = \angle APB = \angle APC$. Lại có tam giác APQ cân nên suy ra $\angle APQ = \angle AQP$. Từ đó $\angle CPQ = \angle CQP$. Vậy tam giác CPQ cân tại C nên $PC = CQ = PB$. ■

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với góc $\angle A = 120^\circ$ và phân giác ngoài AD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác OAD cắt (O) tại E khác A. Chứng minh rằng $AE \perp BC$.



Chứng minh Bổ đề 2.: Giả sử AD cắt lại (O) tại F. Ta có $\angle ODF = \angle OEA = \angle OAE = \angle ODE$. Lại có tam giác OEF cân tại O nên theo Bổ đề 1 $DE = DF$ suy ra $\angle EOD = \angle FOD$. Ta dễ thấy hai tam giác OBF và OCF đều từ đó $FO^2 = FC^2 = FD.FA$ vậy $\angle FAO = \angle FOD = \angle EOD = \angle EAD$ do AD là phân giác ngoài nên $\angle BAO = \angle CAE$. Vậy AO, AE đẳng giác trong $\angle BAC$ nên $AE \perp BC$. ■

Bổ đề 3. Cho tam giác ABC có điểm Fermat-Torricelli là T. Gọi (N_a) là đường tròn ngoại tiếp tam giác TBC. Lấy X trên (N_a) sao cho $TX \perp BC$. Gọi giao điểm của đoạn thẳng BC và đường tròn ngoại tiếp tam giác TN_aX là D. Thì XD và đường thẳng Euler của tam giác TBC đối xứng nhau qua BC.



Chứng minh Bổ đề 3 : Lấy X_a thuộc BC sao cho $TX_a \perp TA$. Dễ thấy đường thẳng TA là phân giác $\angle BTC$ nên TX_a là phân giác ngoài $\angle BTC$. Từ đó TX_a đi qua trung điểm K_a của cung BC chứa T của (N_a) (đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC). Ta thu được

$$K_aB^2 = K_aC^2 = K_aT \cdot K_aX_a.$$

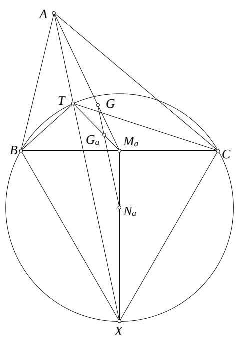
Ta suy ra $\angle TBK_a = \angle K_aX_aB = TX_aD$. (1)

Theo Bổ đề 2 và kết hợp giả thiết, năm điểm T, D, N_a, X, X_a cũng thuộc một đường tròn. Ta suy ra $\angle TXD = \angle TX_aD$. (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra $\angle TXD = \angle TBK_a = TXK_a$. Vậy X, D, K_a thẳng hàng. (3)

Gọi H_a là trực tâm tam giác TBC. Dễ thấy H_a và X đối xứng qua BC. Cũng dễ thấy K_a và N_a đối xứng qua BC. Từ đó $XD \equiv XK_a$ là đối xứng của H_aN_a (đường thẳng Euler của tam giác TBC) qua BC. Kết thúc chứng minh. ■

Bổ đề 4. Cho tam giác ABC có điểm Fermat-Torricelli là T. Thì đường thẳng Euler của tam giác TBC đi qua trọng tâm của tam giác ABC.

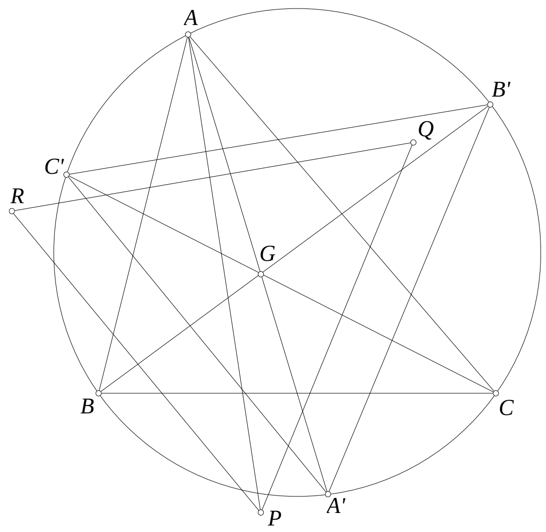


Chứng minh Bổ đề 4 : Dựng tam giác đều XBC ra ngoài tam giác ABC. Gọi (N_a) là đường tròn ngoại tiếp tam giác XBC. Theo bài 1 thì T là giao điểm của AX và (N_a). Gọi M_a, G_a, G lần lượt là trung điểm của BC, trọng tâm tam giác TBC, trọng tâm tam giác ABC. Theo tính chất trọng tâm dễ thấy

$$\frac{M_aG}{M_aA} = \frac{M_aG_a}{M_aT} = \frac{M_aN_a}{M_aX} = \frac{2}{3}.$$

Do đó $GG_a \parallel AT$ và $G_aN_a \parallel TX$. Do T, A, X thẳng hàng, ta suy ra G_aN_a đi qua G. Nói cách khác đường thẳng Euler của tam giác TBC đi qua trọng tâm tam giác ABC. ■

Bổ đề 5. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi P, Q, R lần lượt là đối xứng của G qua BC, CA, AB. Thì $AP \perp QR$ khi và chỉ khi $AB = AC$ hoặc $2BC^2 = AB^2 + AC^2$.



Chứng minh Bổ đề 5. : Gọi A', B', C' theo thứ tự là giao điểm thứ hai của GA, GB, GC với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Dễ thấy $\triangle PQR \sim \triangle A'B'C'$.
Do P, Q, R đối xứng G qua BC, CA, AB nên $AQ = AR$ do đó $AP \perp QR$ khi và chỉ khi tam giác PQR cân tại P hay tương đương tam giác $A'B'C'$ cân tại A'. (1)
Sử dụng tam giác đồng dạng, dễ thấy

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{GA'}{GB}, \frac{A'C'}{AC} = \frac{GC'}{GC}.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
&A'B' = A'C' \\
&\iff A'B'^2 = A'C'^2 \\
&\iff \frac{AB^2}{GB^2} = \frac{AC^2}{GC^2} \\
&\iff \frac{AB^2}{2(AB^2+BC^2)-AC^2} = \frac{AC^2}{2(AC^2+BC^2)-AB^2} \\
&\iff AB^2\left(2(AC^2+BC^2)-AB^2\right) = AC^2\left((AB^2+BC^2)-AC^2\right) \\
&\iff (AB^-AC^2)(AB^2+AC^2-2BC^2) = 0 \\
&\iff AB = AC \text{ hoặc } AB^2+AC^2 = 2BC^2. \quad (2)
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2), ta suy ra $AP \perp QR$ khi và chỉ khi $AB = AC$ hoặc $AB^2+AC^2 = 2BC^2$.
Kết thúc chứng minh. ■

Trở lại bài toán. Theo các Bổ đề 3 và Bổ đề 4 thì P chính là đối xứng của trọng tâm G của tam giác ABC qua BC. Tương tự Q, R là đối xứng của G qua CA, AB. Theo Bổ đề 5, $AP \perp QR$ khi và chỉ khi $AB = AC$ hoặc $AB^2 + AC^2 = 2BC^2$. Đó là điều phải chứng minh.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: ĐẠI SỐ

1 MA TRẬN

Bài 1.1 (ĐH Bách Khoa-ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, N.H. Hiệp). Đa thức đặc trưng của A là $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n, \lambda \neq 0$.
Vì A khả nghịch nên $\det(A) = a_0 \neq 0$. Ta có

$$\Rightarrow p(\lambda) = a_0 + \lambda(a_1 + a_2\lambda + a_3\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^{n-1}) = a_0 - a_0.g(\lambda) \cdot \lambda,$$

trong đó, $g(x) = \dfrac{-1}{a_0}(a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1})$. Theo định lý Caley-Hamilton,

$$P(A) = 0 \iff a_0 - a_0 g(A).A = 0 \iff Ag(A) = I \iff g(A) = A^{-1}.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 1.2 (ĐH Bách Khoa-ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, N.H. Hiệp). Có $(AB)^3 = AB \Rightarrow (BA)^4 = B(AB)^3A = B(AB)A = (BA)^2 \Rightarrow$ trị riêng của BA chỉ có thể là $0, 1, -1$.
Mặt khác $\text{trace(AB)} = \text{trace(BA)} = 0$ nên các trị riêng của BA là $0, 0$ hoặc $1, -1$.
TH1: TR của BA là $0, 0$. Điều này suy ra đa thức đặc trưng $P_{BA}(\lambda) = \lambda^2$. Áp dụng Caley- Hamilton:

$$(BA)^2 = 0 \Rightarrow (AB)^3 = A(BA)^2B = 0 \neq AB.$$

Điều này mâu thuẫn. Vậy ta loại trường hợp này.
TH2: TR của BA là $1, -1$. Điều này suy ra đa thức đặc trưng $P_{BA}(\lambda) = \lambda^2 - 1$.
Áp dụng Định lý Caley- Hamilton ta được

$$(BA)^2 - I = 0 \Rightarrow (AB)^2 = I.$$

Đặt $BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. Ta có

$$(BA)^2 = I \iff a^2 + bc = 1 \iff a = \pm\sqrt{1 - bc}.$$

Vậy $BA = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{1-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{1-bc} \end{pmatrix}, \forall b, c \in \mathbb{R}, bc \leq 1.$

Bài 1.3 (ĐH Bách Khoa-ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, N.H. Hiệp)**.** Giả sử $\det(A^2 + B^2) = 0 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 : (A^2 + B^2)x = 0$

$$\Rightarrow x^T(A^TA + B^TB)x = 0 \iff \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 = 0 \iff Ax = Bx = 0.$$

Với mọi $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$, ta có

$$(AX + BY)^T x = X^T Ax + Y^T Bx = 0.$$

Vì $x \neq 0$ nên $\det(AX + BY) = 0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 1.4 (ĐH Đà Lạt, Đ.T. Hiệp)**.** Ta viết

$$A = I + B,$$

trong đó I là ma trận đơn vị cấp 5 và

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$A^n = (I + B)^n$$

và

$$B^n = 5^{n-1}B.$$

Từ đó tính được A^n.

Bài 1.5 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Phúc)**.** Gọi A là ma trận đã cho, ta có

$$|A| \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \pmod 2.$$

Suy ra $|A| \equiv 1 \pmod 2$. Hay $|A| \neq 0$. Vậy $\operatorname{rank}(A) = 4$.

Bài 1.6 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.H. Hoàng)**.** Giả sử $A = (a_{ij})$ là một ma trận thuộc tập M. Ta xác định $B = f(A) = (b_{ij})$ là ma trận vuông cấp 3 nhận được từ A bằng 5 bước biến đổi như sau

1) Ở 3 bước biến đổi đầu tiên ta biến đổi các cột 1, 2, 3 của A. Cụ thể là nhân cột thứ k với phần tử a_{1k}. Nói cách khác ta giữ nguyên hoặc đổi dấu cột k để phần tử a_{1k} được biến đổi về 1.

2) Ở bước 4 (tương tự bước 5) ta giữ nguyên hoặc đổi dấu hàng 2 (hàng 3) sao cho phần tử đứng đầu được biến đổi về 1.

Ma trận nhận được là ma trận có dạng

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b_{22} & b_{23} \\ 1 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

trong đó $|b_{ij}| = 1$.

Ta sẽ chỉ ra các khẳng định sau:

1) $\det B \neq 0$ khi và chỉ khi $\det A \neq 0$.
2) Có tất cả 6 ma trận khả nghịch có dạng (1).
3) Mỗi ma trận dạng (1) ứng với 32 ma trận trong tập M.

Do việc đổi dấu nhiều lần các hàng và các cột của ma trận chỉ làm định thức đổi dấu nhiều lần nên $|\det A| = |\det B|$. Từ đây ta có khẳng định thứ nhất.

Nếu B là ma trận khả nghịch có dạng (1) thì ta có

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2}$$

trong đó $c_{ij} = b_{ij} - 1 \in \{0, -2\}$. Từ phương trình (2) ta thấy rằng ma trận

$$C = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \tag{3}$$

có định thức khác 0 nên mỗi hàng mỗi cột phải có ít nhất một phần tử là -2. Thêm nữa bốn phần tử của C cũng không thể cùng là -2. Như vậy C có 2 hoặc 3 phần tử là -2. Nếu C có hai phần tử là -2 thì hai phần tử này phải nằm trên một đường chéo, nghĩa là

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{hoặc} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nếu C có ba phần tử là -2 thì C là một trong 4 trường hợp sau

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

và ta kiểm tra được rằng cả 4 trường hợp này đều khả nghịch.

Như vậy có tất cả 6 ma trận dạng (3) là ma trận khả nghịch. Từ đó ta suy ra có 6 ma trận dạng (1) là ma trận khả nghịch. Đây là khẳng định thứ hai.

Nếu $B = f(A)$ là một ma trận khả nghịch dạng (1) thì từ B ta có tất cả $2^5 = 32$ cách biến đổi B về các phần tử của tập M. Cụ thể là ta biến đổi tuần tự hàng 3, hàng 2, cột 3, cột 2, cột 1. Mỗi biến đổi có 2 lựa chọn là giữ nguyên hoặc đổi dấu. Đây là khẳng định thứ ba.

Các phân tích trên cho thấy rằng số lượng phần tử khả nghịch của M là $6 \times 32 = 192$.

Bài 1.7 (ĐH Hàng Hải Việt Nam, N.T.Đ. Hạnh). Do ma trận A không suy biến nên dễ thấy họ véctơ $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_{2021}\}$ độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^{2021}$, và đó là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^{2021}$.
Ma trận X cần tìm là ma trận chính tắc của ánh xạ tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^{2021} \to \mathbb{R}^{2021}$ thỏa mãn:

$$\begin{aligned}
\varphi(M - A_1) &= (A_1 - A_{2021}) \\
\varphi(M - A_2) &= \frac{1}{2}(A_2 - A_{2020}) \\
\ldots & \\
\varphi(M - A_{2021}) &= \frac{1}{2021}(A_{2021} - A_1).
\end{aligned}$$

Nhân hệ thức thứ k với k rồi cộng tất cả lại ta có

$$\varphi(2021.1011M - M) = 0$$

suy ra $\varphi(M) = 0$. Từ đó tính được:

$$\begin{aligned}
\varphi(A_1) &= -A_1 + A_{2021} \\
\varphi(A_2) &= -\frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_{2020} \\
\ldots & \\
\varphi(A_{2021}) &= -\frac{1}{2021}A_{2021} + \frac{1}{2021}A_1.
\end{aligned}$$

Vì S là cơ sở nên ánh xạ φ hoàn toàn xác định và do đó ma trận X cần tìm là duy nhất. Ma trận của φ đối với cơ sở S là:

$$B = \begin{bmatrix}
-1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2021} \\
0 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 & \cdots & \frac{1}{2020} & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & \cdots & -\frac{1}{2020} & 0 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2021}
\end{bmatrix}$$

Ma trận đổi cơ sở từ cơ sở chính tắc E sang cơ sở S trong $\mathbb{R}^{2021}$ là:

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{2021} \end{bmatrix} = A$$

Vậy ma trận X cần tìm là:

$$X = ABA^{-1}.$$

Bài 1.8 (ĐH Hàng Hải Việt Nam, N.V. Trịnh)**.** Xét đa thức đặc trưng của A.

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^2(\lambda - 1)$$

có hai nghiệm $\lambda = 0$ (bội 2) và $\lambda = 1$
Chia đa thức $f(x) = P(x).h(x) + r(x)$ với đa thức dư $r(x) = ax^2 + bx + c$.
Các hệ số a, b, c thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(0) & = r(0) \\ f'(0) & = r'(0) \\ f(1) & = r(1) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c & = 1 \\ b & = -2 \\ a + b + c & = -1011 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a & = -1010 \\ b & = -2 \\ c & = 1 \end{cases}$$

Theo định lí Cayley-Hamilton ta có $P(A) = 0$ nên:

$$f(A) = r(A) = -1010A^2 - 2A + I = \begin{bmatrix} -5053 & 11120 & -7078 \\ -5056 & 11125 & -7080 \\ -5058 & 11128 & -7081 \end{bmatrix}$$

Bài 1.9 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.** Nhận xét $\sum\limits_{k=0}^{r-1} \xi^{k(i-j)} = r\delta_j^i$.

Xét ma trận

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \xi^{-\alpha} & \xi^{-(\alpha+1)} & \cdots & \xi^{-(\alpha+r-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \xi^{-(r-1)\alpha} & \xi^{-(r-1)(\alpha+1)} & \cdots & \xi^{-(r-1)(\alpha+r-1)} \end{bmatrix}.$$

Kiểm tra được $AB = rI_r$, do đó

$$A^{-1} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \xi^{-\alpha} & \xi^{-(\alpha+1)} & \cdots & \xi^{-(\alpha+r-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \xi^{-(r-1)\alpha} & \xi^{-(r-1)(\alpha+1)} & \cdots & \xi^{-(r-1)(\alpha+r-1)} \end{bmatrix}.$$

Bài 1.10 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). **a)** Đặt

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Khi đó $A = B - 2I_2$. Vì vậy ta suy ra $A^{2021} = (B - 2I_2)^{2021}$, trong đó I_2 là ma trận đơn vị cấp 2.
Dễ thấy B và $2I_2$ giao hoán, $B^2 = 0$. Do đó

$$\begin{aligned} A^{2021} &= (B - 2I_2)^{2021} \\ &= (-2I_2)^{2021} + 2021B.(-2I_2)^{2020} \\ &= \begin{bmatrix} -2^{2021} & 0 \\ 0 & -2^{2021} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6063.2^{2020} & 6063.2^{2020} \\ -6063.2^{2020} & -6063.2^{2020} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6061.2^{2020} & 6063.2^{2020} \\ -6063.2^{2020} & -6065.2^{2020} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) Đặt $B = A + 2A^2 + \ldots + 2021A^{2021}$. Với mọi $x \in \ker A$ thì $Ax = 0$, suy ra $A^2x = A^3x = \ldots = A^{2021}x = 0$, từ đó $Bx = 0$ hay $\ker A \subset \ker B$ (1).
Từ giả thiết A lũy linh, ta suy ra $2A, 3A^2, \ldots, 2021A^{2020}$ cũng lũy linh. Các ma trận trên giao hoán từng đôi một, suy ra $2A + 3A^2 + \ldots + 2021A^{2020}$ cũng lũy linh, do đó $I + 2A + 3A^2 + \ldots + 2021A^{2020}$ khả nghịch. Từ đó suy ra

$$\text{rank}B = \text{rank}(A(I + 2A + 3A^2 + \ldots + 2021A^{2020})) = \text{rank}A.$$

Mặt khác ta có

$$\text{rank}A + \dim(\ker A) = \text{rank}B + \dim(\ker B) = n,$$

suy ra $\dim(\ker A) = \dim(\ker B)$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $\ker A = \ker B$, hay hai hệ phương trình có cùng tập nghiệm trong $\mathbb{R}^n$.

Bài 1.11 (ĐH SPKT Vĩnh Long, T.H.N. Nhân). Ma trận A có tất cả các phần tử không âm và ma trận nghịch đảo A^{-1} cũng có tất cả các phần tử không âm khi và chỉ khi mỗi hàng và mỗi cột của ma trận A chỉ có đúng một phần tử dương.

1. Điều kiện cần: Giả sử A là ma trận thực cấp n có tất cả các phần tử không âm và ma trận nghịch đảo A^{-1} cũng có tất cả các phần tử không âm. Khi đó:
   (a) Mỗi dòng và mỗi cột của A và A^{-1} có ít nhất một phần tử dương. Nếu ngược lại, tồn tại một hàng hoặc cột bằng 0 thì $\det A = 0$ hoặc $\det A^{-1} = 0$, tức là ma trận A không khả nghịch (trái giả thiết).

(b) Mỗi dòng và mỗi cột của A và A^{-1} có đúng một phần tử dương.

Nếu ngược lại, giả sử cột j của ma trận A có hai phần tử dương là a_{i_1j} và a_{i_2j}. Vì hàng j của A^{-1} có ít nhất một phần tử $a_{jk}^{-1} > 0$ nên cột thứ k của tích $A.A^{-1} = I$ có hai phần tử dương (mâu thuẫn).

2. Điều kiện đủ: Giả sử mỗi hàng và mỗi cột của ma trận A chỉ có đúng một phần tử dương, còn lại bằng 0. Gọi $B = (b_{ij})_n$ là ma trận được xác định bởi

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad a_{ij} = 0 \\ \dfrac{1}{a_{ij}} & \text{nếu} \quad a_{ij} \neq 0 \end{cases}.$$

Khi đó, ma trận $B^T = A^{-1}$ có tất cả các phần tử không âm.

Bài 1.12 (ĐH SPKT Vĩnh Long, T.H.N. Nhân)**.** Vì A không suy biến và mỗi dòng chỉ có một số khác 0 nên mỗi cột cũng chỉ có một số khác 0 (nếu ngược lại thì A suy biến vì có hai dòng tỉ lệ). Từ giả thiết suy ra $A.A^T = I$, tức A là ma trận trực giao. Gọi $\mathcal{M}$ là tập hợp tất cả các ma trận trực giao mà mỗi dòng chỉ có một số khác 0 và bằng +1 hoặc -1. Khi đó $\mathcal{M}$ chỉ có hữu hạn phần tử và $A^n \in \mathcal{M}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$. Suy ra tồn tại hai số m, p nguyên dương và $p \geq 2$ sao cho $A^{m+p} = A^m$. Vì A khả nghịch nên $A^p = I$. Đặt $k = p - 1$ thì $A^k = A^{-1} = A^T$.

Bài 1.13 (ĐH Thuỷ Lợi, N.V. Đắc)**.** Ta có

$$A = \frac{1}{2022}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2022}B$$

Ta thấy: $B^2 = 4I \Rightarrow A^2 = \dfrac{1}{(1011)^2}I$. Từ đó:

- Nếu $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}^*$, thì

$$A^n = A^{2k} = \frac{1}{(1011)^n}I.$$

- Nếu $n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}^*$, thì

$$A^n = A^{2k+1} = \left(\frac{1}{(1011)^2}I\right)^k A = \frac{1}{(1011)^{n-1}}A.$$

Bài 1.14 (ĐH Thuỷ Lợi, N.V. Đắc)**.** Do A là một tập hữu hạn phần tử, ma trận đơn vị I thuộc G. Với mỗi A thuộc G thì lũy thừa nguyên dương của A

cũng thuộc G. Do đó tồn tại hai số nguyên dương khác nhau m, l $(m > l)$ sao cho $A^m = A^l$.
Do $AA^T = I$ nên A khả nghịch.
$A^m = A^l$ tương đương với $A^{m-l} = I$. (Đpcm)

Bài 1.15 (ĐH Thuỷ Lợi, N.V. Đắc). Ta có: $f(A) = 2022A^{2021} + 2021A^{2020} + ... + 2A + I$.
Ta đã biết: Nếu B là lũy linh, thì $I + B$ khả nghịch.
Đặt $B = 2022A^{2021} + 2021A^{2020} + ... + 2A$, ta có

$$\begin{aligned} B &= A(2022A^{2020} + 2021A^{2019} + ... + 2I) \\ &= (2022A^{2020} + 2021A^{2019} + ... + 2I)A. \end{aligned}$$

Theo giả thiết: A là ma trận lũy linh nên tồn tại số tự nhiên p sao cho $A^p = 0$.
Thế nên :

$$B^p = A^p(2022A^{2020} + 2021A^{2019} + ... + 2I)^p = 0.$$

Vậy B là ma trận lũy linh, và từ đó

$$f(A) = 2022A^{2021} + 2021A^{2020} + ... + 2A + I$$

khả nghịch.

Bài 1.16 (ĐH Trà Vinh, T.Q. Hà). Đa thức đặc trưng của A là: $f(x) = x(x + 1)(x - 2)$. Vì vậy A chéo hóa được trên $\mathbb{R}$.

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{với } P = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$A^{2022} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2022} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -12 & -4 \\ -2 & 8 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Bài 1.17 (ĐH Trà Vinh, T.Q. Hà). Nếu P khả nghịch thì $P = Q^{-1}PQ = 0$ vô lý. Do đó $\det(P) = 0$. Như vậy tồn tại $X, Y \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ khác 0 sao cho $PX = P^TY = 0$.
Xét $L = XY^T$ là ma trận cấp n khác 0 thỏa

$$\begin{aligned} PL &= PXY^T = 0.Y^T = 0 \\ LP &= XY^TP = X(P^TY)^T = 0. \end{aligned}$$

Bài 1.18 (HV Kỹ thuật Quân sự, H.Đ. Mạnh)**.** a) Dễ thấy $V^TU = 4$, do đó

$$A^{2020} = U.\underbrace{V^TU.V^T...U}_{4^{2019}}V^T = 4^{2019}A.$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}&B^2 = A^2 - 2A + E = 4A - 2A + E = 2A + E = 2B + 3E\\&\Leftrightarrow B\left(B - 2E\right) = 3E \Rightarrow \exists B^{-1} = \frac{1}{3}\left(B - 2E\right) = \frac{1}{3}\left(A - 3E\right).\end{aligned}$$

.

Bài 1.19 (HV Kỹ thuật Quân sự, H.Đ. Mạnh)**.** Đặt $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}$. Ta có

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ A_2B_1 & A_2B_2 \end{bmatrix}$$

Ta có $A_1B_1 = A_2B_2 = E, A_1B_2 = A_2B_1 = -E$, suy ra $B_1 = A_1^{-1}, B_2 = -A_1^{-1}$ và $A_2 = B_2^{-1} = -A_1$. Từ đó ta có $BA = B_1A_1 + B_2A_2 = 2E$.

Bài 1.20 (HV Phòng không Không quân, P.H. Quân)**.** 1. Ta có

$$Av = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^2v = A(Av) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Ta thấy rằng

$$\begin{aligned}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =& \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\\ =& S + R.\end{aligned}$$

Chú ý rằng $SR = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Do đó, ta có

$$\begin{aligned}A^{2021}v = (S + R)^{2021}v =& (S^{2021} + \sum_{i=1}^{2020} \binom{i}{2021} S^{2021-i}R^i + R^{2021})v\\ =& (S^{2021} + R^{2021})v.\end{aligned}$$

Lại có

$$S^{2021}v = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2021} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2021} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2021} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tính

$$R^{2021}v = \left(\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ 0 & -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} \right)^{2021} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Chú ý rằng khối $\begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix}$ chính là ma trận phép quay cùng chiều kim đồng hồ một góc $\dfrac{\pi}{4}$ tác động vào $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Do đó, ta có

$$R^{2021}v = (\sqrt{2})^{2021} \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\pi/4) \\ -\sin(\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2^{1010} \\ -2^{1010} \end{pmatrix}.$$

Vậy, $A^{2021}v = \begin{pmatrix} 2^{2021} \\ -2^{1010} \\ -2^{1010} \end{pmatrix}$.

2 ĐỊNH THỨC

Bài 2.1 (ĐH Bách Khoa-ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, N.H. Hiệp). a. Xét $f(x) = x^4 - 2x^2 - 4x + 1$. Thực hiện chia đa thức $f(x)$ cho $f'(x) = 4x^3 - 4x - 4$, ta được

$$f(x) = \frac{1}{4}(x+1)f'(x) - 3x + 1.$$

Giả sử x_0 là nghiệm bội của f:

$$f(x_0) = f'(x_0) = 0 \Rightarrow -3x_0 + 1 \iff x_0 = \frac{1}{3}.$$

Điều này mâu thuẫn với $f(1/3) \neq 0$. Vậy f chỉ có nghiệm đơn.

b. Xét $I_4 = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = \alpha_3 d + \beta_3$, trong đó

$$\beta_3 = I_4(d=0) = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = abc;$$

$$\alpha_3 = \frac{\partial I_4}{\partial d} = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = I_3$$

Tương tự, ta có

$$\begin{cases} I_4 = I_3 d + abc \\ I_3 = I_2 c + ab \\ I_2 = I_1 b + a \\ I_1 = 1 + a \end{cases} \Rightarrow I_4 = abc + abd + acd + bcd + abcd.$$

Áp dụng định lý Vi-et, suy ra

$$I_4 = 4 + 1 = 5.$$

Bài 2.2 (ĐH Giao thông Vận tải, N.H. Hoàng)**.** Ta sẽ chỉ ra $r(A) < 2021$ và hệ quả là $\det A = 0$. Thực vậy, sử dụng phép khử Gauss cho ma trận A ta lần lượt lấy hàng 2021 trừ hàng 2020, lấy hàng 2020 trừ hàng 2019, $\ldots$, hàng 2 trừ hàng 1. Thực hiện như vậy từ ma trận A ta nhận được ma trận

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & \dots & b_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix},$$

trong đó $b_{ij} = a_{ij} - a_{i-1,i} = 2i + 2020j - 1$ với mọi $i \geqslant 2$.
Ta tiếp tục biến đổi ma trận B như sau: lấy hàng 2021 trừ hàng 2020, lấy hàng 2020 trừ hàng 2019, $\ldots$, hàng 3 trừ hàng 2. Sau biến đổi như vậy từ ma trận B ta nhận được ma trận

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ c_{41} & c_{42} & b_{43} & \dots & c_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix},$$

trong đó $c_{ij} = b_{ij} - b_{i-1,i} = 2$ với mọi $i \geqslant 3$.
Trong ma trận C, ta lấy các hàng $4, 5, \ldots, 2021$ trừ đi hàng 3. Sau biến đổi

như vậy, ta nhận được ma trận

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix},$$

với các hàng $4, 5, \dots, 2021$ là 0.
Ta có $r(A) = r(D) \leqslant 3 < 2021$ nên $\det A = 0$.

Bài 2.3 (ĐH Hàng Hải Việt Nam, L.T. Hoa)**.** Ta có

$$A = \begin{pmatrix} C_3^0 & C_3^1 a_1 & C_3^2 a_1^2 & C_3^3 a_1^3 \\ C_3^0 & C_3^1 a_2 & C_3^2 a_2^2 & C_3^3 a_2^3 \\ C_3^0 & C_3^1 a_3 & C_3^2 a_3^2 & C_3^3 a_3^3 \\ C_3^0 & C_3^1 a_4 & C_3^2 a_4^2 & C_3^3 a_4^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 & b_4^3 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_4^2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Do đó

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} C_3^0 & C_3^1 a_1 & C_3^2 a_1^2 & C_3^3 a_1^3 \\ C_3^0 & C_3^1 a_2 & C_3^2 a_2^2 & C_3^3 a_2^3 \\ C_3^0 & C_3^1 a_3 & C_3^2 a_3^2 & C_3^3 a_3^3 \\ C_3^0 & C_3^1 a_4 & C_3^2 a_4^2 & C_3^3 a_4^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 & b_4^3 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_4^2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= C_3^0.C_3^1.C_3^2.C_3^3 \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_4^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 & b_4^3 \end{vmatrix} \\ &= C_3^0.C_3^1.C_3^2.C_3^3 \prod_{1 \le j < i \le 4} (a_i - a_j) \prod_{1 \le j < i \le 4} (b_i - b_j). \end{aligned}$$

Giả thiết (a_i) và (b_i) lần lượt là 4 số chẵn, 4 số lẻ liên tiếp nên

$$\prod_{1 \le j < i \le 4} (a_i - a_j) = \prod_{1 \le j < i \le 4} (b_i - b_j) = 2^3.4^2.6 = 768$$

Vậy $|A| = 5308416$.

Bài 2.4 (ĐH Hàng Hải Việt Nam, L.T. Hoa)**.**

$$|A| = \sum_{\alpha \in S_6} \text{sgn}\alpha.a_{1\alpha(1)}.a_{2\alpha(2)}...a_{6\alpha(6)}$$

với S_6 là tập tất cả các phép thế sinh ra từ 6 phần tử $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Do giải thiết

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i = j \\ 1 \text{ hoặc } 2021 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

nên

$$a_{1\alpha(1)}.a_{2\alpha(2)}...a_{6\alpha(6)} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \exists i, \alpha(i) = i \\ 1 \text{ hoặc } 2021^t & \text{nếu } \forall i, \alpha(i) \neq i \end{cases}$$

Ta sẽ tìm số lượng $a_{1\alpha(1)}.a_{2\alpha(2)}...a_{6\alpha(6)} \neq 0$. Do số lượng $a_{1\alpha(1)}.a_{2\alpha(2)}...a_{6\alpha(6)} \neq 0$ chính bằng số các phép thế α mà $\alpha(i) \neq i, i = 1, 2, ..., 6$. Gọi A_i là tập hợp các phép thế mà $\alpha(i) = i$ với $i = 1, .., 6$. Theo nguyên lý bao hàm - loại trừ, số các phép thế mà $\exists i$ để $\alpha(i) = i$ là

$$\begin{aligned} |\bigcup_{i=1}^{6} A_i| &= \sum |A_i| - \sum |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\ &\quad - \sum |A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_4}| + \sum |A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_5}| - \sum |A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_6}| \\ &= C_6^1.5! - C_6^2.4! + C_6^3.3! - C_6^4.2! + C_6^5.1! - C_6^6.0! = 455 \end{aligned}$$

Vậy số các phép thế cần tìm là $6! - 455 = 265$.
Chú ý: sgn$\alpha.a_{1\alpha(1)}.a_{2\alpha(2)}...a_{6\alpha(6)}$ là số lẻ vì chỉ nhận các giá trị -1, 1, -2021^t và 2021^t.
Ta có

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{265\alpha} \text{sgn}\alpha.a_{1\alpha(1)}.a_{2\alpha(2)}...a_{6\alpha(6)} \\ &= \text{sgn}\alpha.a_{1\alpha(1)}.a_{2\alpha(2)}...a_{6\alpha(6)} + \sum_{264\alpha} \text{sgn}\alpha.a_{1\alpha(1)}.a_{2\alpha(2)}...a_{6\alpha(6)}. \end{aligned}$$

Tổng của 264 số lẻ là một số chẵn. Định thức của ma trận A là tổng của một số lẻ và một số chẵn vậy nên định thức của ma trận A luôn khác không.

Chú ý: Bài toán vẫn đúng nếu A là ma trận cỡ n với n là một số chẵn.

Bài 2.5 (ĐH Kiến trúc). a) Ta có

$$I = AB^2 - 2AB + A = A(B^2 - 2B + I).$$

Suy ra A là ma trận khả nghịch và $A^{-1} = B^2 - 2B + I$. Do đó

$$A^{-1}.B = (B^2 - 2B + I).B = B^3 - 2B^2 + B$$

và

$$B.A^{-1} = B.(B^2 - 2B + I) = B^3 - 2B^2 + B.$$

Suy ra $A^{-1}.B = B.A^{-1}$, và do đó $BA = AB$.

b) $A.(B-I)^2 = I$, suy ra $\det(A).\ \det(B-I)^2 = 1$. Mặt khác $\det(A), \det(B-I)^2$ là số nguyên và $\det(B-I)^2 = (\det(B-I))^2 \geq 0$. Từ đó suy ra $\det(A) = 1$.

Bài 2.6 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn). Giả sử $Y = X - \frac{1}{2}I_n$. Khi đó $Y = -Y^T$. Vì Y là ma trận phản đối xứng thực nên các giá trị riêng của nó chỉ là phần ảo ia. Khi đó các giá trị riêng của X là $\frac{1}{2} + ia$. Vì ma trận là thực nên giá trị riêng chỉ có thể là $\frac{1}{2}$ hoặc là $\frac{1}{2} + ia$. Thế nhưng lúc đó nó cũng có giá trị ảo $\frac{1}{2} - ia$. Chuyển sang cơ sở gồm các véc tơ riêng (đối với ma trận đối xứng, cơ sở này là tồn tại) thì định thức của ma trận không hề thay đổi. Trong cơ sở gồm các véc tơ riêng, định thức bằng tích các giá trị riêng này. Vì

$$\left(\frac{1}{2} + ia\right)\left(\frac{1}{2} - ia\right) = \frac{1}{2^2} + a^2$$

nên $\det X \geq \frac{1}{2^n}$.

Bài 2.7 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Đặt

$$D_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 1/n! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1/n! \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1/n! \end{vmatrix}.$$

Khi đó

$$D_n = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1 \end{vmatrix}.$$

Cộng vào dòng đầu tất cả các dòng còn lại, trước đó dòng thứ i nhân với

$\dfrac{1}{(i-1)!}x^{i-1}$ $(i = 2, 3, \ldots, n+1)$, ta được

$$D_n = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & R_n(x) \\ -1 & x & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & -2 & x & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -n & 1 \end{vmatrix},$$

trong đó $R_n(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$.
Khi đó

$$D_n = \frac{1}{n!}(-1)^P n + 1 + 1.R_n(x).(-1)^n.n! = R_n(x).$$

Ta thu được

$$\lim_{n\to+\infty} D_n = \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = e^x.$$

Bài 2.8 (ĐH SPKT Vĩnh Long, T.H.N. Nhân). Vì $A.A^T = B.B^T = I$ nên $\det(A) = \pm 1$ và $\det(B) = \pm 1$.
Vì $\det(A) \neq \det(B)$ nên $\det(A) + \det(B) = 0$.
Khi đó

$$\begin{aligned} \det(B).\det(A+B) &= \det(B).\det[(A+B)^T] = \det(B).\det(A^T + B^T) \\ &= \det(BA^T + BB^T) = \det(BA^T + I) \\ &= \det(BA^T + AA^T) = \det(B+A)\det(A^T) \\ &= \det(A+B)\det(A) = -\det(A+B)\det(B). \end{aligned}.$$

Suy ra $2\det(A+B)\det(B) = 0$. Do đó $\det(A+B) = 0$.

Bài 2.9 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh). Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, ta có $\det(A + \alpha B) = \det(A(I_n + \alpha A^{-1}B)) = \det A.\det(I_n + \alpha A^{-1}B)$.
Ta chứng minh khẳng định sau: Nếu N là ma trận lũy linh thì $\det(I+N) = 1$.
Gọi λ là một giá trị riêng của N, nghĩa là tồn tại véc tơ $v \neq 0$ sao cho $Nv = \lambda v$.
Do đó $(I+N)v = Iv + Nv = v + \lambda v = (1+\lambda)v$ hay $(1+\lambda)$ là một giá trị riêng của $(I+N)$.
Suy luận tương tự ta được, nếu λ là một giá trị riêng của $(I+N)$ thì $(\lambda - 1)$ là một giá trị riêng của N.

Mặt khác, N lũy linh nên N chỉ có giá trị riêng là 0, vậy $(I + N)$ chỉ có giá trị riêng là 1. Mà định thức được tính bằng tích các giá trị riêng, và bậc của nó, nên cuối cùng ta được $\det(I + N) = 1$.
Ta chứng minh $A^{-1}B$ lũy linh: Dễ thấy A phản đối xứng thì A^{-1} phản đối xứng và B là ma trận đối xứng. Khi đó:

$$\begin{aligned} tr(A^{-1}B) &= tr((A^{-1}B)^T) = tr(B^T(A^{-1})^T) \\ &= tr(-BA^{-1}) = -tr(BA^{-1}) = -tr(A^{-1}B) \end{aligned}$$

Suy ra $tr(A^{-1}B) = 0$, và $rank(A^{-1}B) \leq rank(B) = 1$.
Vậy: $A^{-1}B$ chỉ có một giá trị riêng và bằng 0, nghĩa là $A^{-1}B$ lũy linh.
Từ các điều trên ta được $\det(I_n + \alpha A^{-1}B) = 1$ nên $\det(A + \alpha B) = \det(A)$.

Bài 2.10 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh)**.** Nếu $\det(A) = 0$: Giả sử bậc lũy linh của B là k.
Do $AB = BA$ và B lũy linh nên ta có:

$$(A + B)^n = A(C_n^0 A^{n-1} + C_n^1 A^{n-2}B + \cdots + C_n^{n-k+1} A^{n-k} B^{k-1}).$$

Suy ra $\det(A + B) = 0$, hay $\det(A + B) = \det(A)$.
Nếu $\det(A) \neq 0$: Ta có: $\det(A + B) = \det(A(I + A^{-1}B)) = \det(A).\det(I + A^{-1}B)$. Ta chứng minh mệnh đề sau: Nếu N là ma trận lũy linh thì $\det(I + N) = 1$.
Gọi $x\lambda$ là một giá trị riêng của N, nghĩa là tồn tại véc tơ $v \neq 0$ sao cho $Nv = \lambda v$. Do đó $(I + N)v = Iv + Nv = v + \lambda v = (1 + \lambda)v$ hay $(1 + \lambda)$ là một giá trị riêng của $(I + N)$. Suy luận tương tự ta được, nếu λ là một giá trị riêng của $(I + N)$ thì $(\lambda - 1)$ là một giá trị riêng của N.
Mặt khác N lũy linh nên N chỉ có giá trị riêng là 0, vậy $(I + N)$ chỉ có giá trị riêng là 1. Mà định thức được tính bằng tích các giá trị riêng và bậc của nó, nên cuối cùng ta được $\det(I + N) = 1$. Áp dụng mệnh đề trên, B lũy linh và $AB = BA$ nên $A^{-1}B$ lũy linh, suy ra $\det\left(I + A^{-1}B\right) = 1$.
Cuối cùng ta được: $\det(A + B) = \det(A)$.

Bài 2.11 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh)**.** Vì $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j = \overline{1; 2022}$ nên A là ma trận phản đối xứng cấp $n = 2022$ chẵn
Ta đã biết: mọi ma trận phản đối xứng cấp lẻ đều có định thức bằng 0 nên suy ra

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & A & \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -23 & \dots & -23 \\ 1 & & & \\ \vdots & & A & \end{vmatrix} = 0$$

Khi đó: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -23 & \dots & -23 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -23 & \dots & -23 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -23 & \dots & -23 \\ 1 & & & \\ \vdots & & A & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -23 & \dots & -23 \\ 1 & & & \\ \vdots & & A & \end{vmatrix}$$

Lấy dòng i trừ dòng đầu tiên, $i = \overline{2, n}$ ta được

$$\begin{vmatrix} 1 & -23 & \dots & -23 \\ 1 & & & \\ \vdots & & A & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -23 & \dots & -23 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & B & \end{vmatrix} = \det B.$$

Bài 2.12 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh)**.** Xét toán tử tuyến tính $T(x) = Ax$ có ma trận là A
$\Rightarrow \dim ImT = rankA = 1$
$\Rightarrow$ tồn tại véctơ e_1 là cơ sở của ImT
$\Rightarrow$ tồn tại họ véctơ $\{e_2, e_3, \dots, e_n\}$ độc lập tuyến tính sao cho $\{e_i\}_{1,n}$ là cơ sở của không gian. Khi đó, ma trận A của toán tử tuyến tính T tương ứng với cơ sở này được biểu diễn dưới dạng:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Suy ra vết của ma trận A là $trA = a_1$.

Ngoài ra $A + I_n = \begin{pmatrix} a_1 + 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ nên $\det(A + I_n) = a_1 + 1$

Vậy $\det(A + I_n) = trA + 1$.

Bài 2.13 (ĐH Tân Trào, K.C. Nguyện)**.** Ký hiệu A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij} trong D. Khai triển đa tuyến tính định thức $D^*(x)$ ta sẽ nhận được hệ thức liên hệ

$$D^*(x) = D + \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & x & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & \underset{j}{x} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D + x \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}. \qquad (1)$$

Ký hiệu B_{ij} là phần bù đại số của phần tử b_{ij} trong $D^*(x)$, $b_{ij} = a_{ij} + x$. Ta có $a_{ij} = b_{ij} + (-x)$, do đó

$$D = D^*(x) - x \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}, \overset{(1)}{\Rightarrow} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}.$$

Bài 2.14 (ĐH Tân Trào, K.C. Nguyện)**.** Theo giả thiết, ta có $|i - j| \equiv 2 \pmod n$. Do đó, tồn tại $q \in \mathbb{N}, q < n$ sao cho $|i - j| - 2 = nq$. Suy ra n là ước của $|i - j| - 2$. Tuy nhiên, $1 \le i, j \le n$, nên $|i - j| < n$. Vì vậy, $|i - j| - 2 = 0$ hay $|i - j| = 2$. Khi đó, ta nhận được định thức của ma trận A. Sử dụng khai triển Laplace, ta có:

$$D_n := |A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} - 2D_{n-3} + D_{n-4}.$$

Đặt $X_n = \begin{bmatrix} D_{n-3} \\ D_{n-2} \\ D_{n-1} \\ D_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X_n = BX_{n-1}$. Với $n \ge 4$, ta có

$$X_n = B^{n-3} X_3, \text{ trong đó } X_3 = \begin{bmatrix} D_0 & D_1 & D_2 & D_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}^T.$$

Giả sử $B^{n-3} = [a_{ij}], 1 \le i, j \le 4$ thì $D_n = a_{41} + 2a_{42} + 4a_{43} + 6a_{44}$.
Tính $B^n, 4 \le n \in \mathbb{N}$. Phương trình đặc trưng $P_B(\lambda) = |B - \lambda I| = (\lambda - 1)^3(\lambda + 1) = 0$ có hai giá trị riêng $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -1$. Ta có

$$\begin{aligned} &\lambda^n = P_B(\lambda)Q(\lambda) + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d, \\ &n\lambda^{n-1} = (\lambda - 1)F(\lambda) + 3a\lambda^2 + 2b\lambda + c, \\ &n(n-1)\lambda^{n-1} = (\lambda - 1)G(\lambda) + 6a\lambda + 2b. \end{aligned} \tag{2}$$

Thay λ_i vào (2), ta nhận được hệ phương trình tuyến tính với ẩn a, b, c, d

$$\begin{cases} a + b + c + d &= 1 \\ 3a + 2b + c &= n \\ 6a + 2b &= n(n-1) \\ -a + b - c + d &= (-1)^n \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta nhận được

$$a = \frac{2(n-1)^2 - (-1)^n - 1}{8}, b = \frac{3 + 3(-1)^n - 2(n-1)(n-3)}{8},$$
$$c = \frac{5 - 3(-1)^n - 2(n-1)^2}{8}, d = \frac{2(n-1)(n-3) + 1 + (-1)^n}{8}.$$

Theo Định lý Ceyley-Hamilton, ta có $B^n = aB^3 + bB^2 + cB + dI$, trong đó

$$B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & -3 & 6 \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Giả sử $B^n := [b_{ij}], 1 \leq i, j \leq 4$. Ta chỉ tính giá trị các phần tử của dòng 4,

$$\begin{aligned} b_{41} = 4a + 2b + c &= \frac{6(n-1)^2 - 4(n-1)(n-3) - (-1)^n + 7}{8}, \\ b_{42} = -6a - 3b - 2c &= \frac{-8(n-1)^2 + 6(n-1)(n-3) + 3(-1)^n - 13}{8}, \\ b_{43} = -3a - 2b &= \frac{-6(n-1)^2 + 4(n-1)(n-3) - 3(-1)^n - 3}{8}, \\ b_{44} = 6a + 4b + 2c + d &= \frac{8(n-1)^2 - 6(n-1)(n-3) + (-1)^n + 17}{8}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} a_{41} &= \frac{6(n-4)^2 - 4(n-4)(n-6) - (-1)^{n-3} + 7}{8}, \\ a_{42} &= \frac{-8(n-4)^2 + 6(n-4)(n-6) + 3(-1)^{n-3} - 13}{8}, \\ a_{43} &= \frac{-6(n-4)^2 + 4(n-4)(n-6) - 3(-1)^{n-3} - 3}{8,} \\ a_{44} &= \frac{8(n-4)^2 - 6(n-4)(n-6) + (-1)^{n-3} + 17}{8}. \end{aligned}$$

Do đó

$$D_n = |A| = \frac{2(n-4)(n+8) - (-1)^{n-3} + 71}{8}.$$

Bài 2.15 (ĐH Trà Vinh, D.K. Ngọc)**.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2022 & 2023 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 2021 & 2022 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 2020 & 2021 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2023 & 2022 & 2021 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_1 \to c_{2023} + c_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2022 & 2024 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 2021 & 2024 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 2020 & 2024 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2023 & 2022 & 2021 & \cdots & 2 & 2024 \end{vmatrix}$$

$$= 2024 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2022 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 2021 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 2020 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2023 & 2022 & 2021 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{array}{l} d_2 \to d_2 - d_1 \\ d_3 \to d_2 - d_2 \\ \cdots \\ d_{2023} \to d_{2023} - d_{2022} \end{array}}} 2024 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2022 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2024 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{array}{l} d_1 \to d_1 + d_{2022} \\ d_2 \to d_2 + d_{2022} \\ \cdots \\ d_{2021} \to d_{2021} + d_{2022} \end{array}}} 2024 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2024 \times 2^{2021}$$

Bài 2.16 (HV Kỹ thuật Quân sự, H.Đ. Mạnh).

$$|A| = (-b_n)^{n-2} \left[-c_n \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n-1} c_j - a_n b_n \prod_{j=1}^{n-1} c_j \right]$$

Từ đó dễ dàng thấy A khả nghịch.

Bài 2.17 (HV Phòng không Không quân, P.H. Quân). 1. Khai triển Laplace theo hàng cuối ta có

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{2n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{2n} + (-1)^{n+1} \\
&= \begin{cases} 2 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

2. Ta tính hạng của ma trận $D = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1)^T$. Dựa theo phần (1) thì $|D| \neq 0$ khi n lẻ và $|D| = 0$ khi n chẵn. Do đó, khi n lẻ thì hệ $(e_1 + e_2, \dots, e_n + e_1)$ lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Khi n chẵn, hệ này không phải là cơ sở của $\mathbb{R}^n$.

3 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài 3.1 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Phúc). Gọi x là lượng cát tích tụ thêm mỗi ngày, y là lượng cát có sẵn ở mỏ cát, a là lượng cát mỗi máy khai thác được trong một ngày.
50 máy khai thác trong 60 ngày được lượng cát là $50 \times a \times 60 = 3000a$. Trong 60 ngày, lượng cát trong mỏ là $y + 60x$. Ta được phương trình

$$y + 60x = 3000a \tag{1}$$

Tương tự, 80 máy khai thác trong 30 ngày hết mỏ cát dẫn tới phương trình

$$y + 30x = 2400a \tag{2}$$

Giải hệ (1) và (5) ta được $x = 20a$.
Vậy mỗi ngày lượng cát tích tụ thêm bằng lượng cát khai thác được của 20 máy. Suy ra, để 20 máy khai thác ở mỏ cát đó là vừa phải.

Bài 3.2 (ĐH Giao thông Vận tải, N.H. Hoàng)**.** Vì hệ được cho là hệ thuần nhất nên ta có thể thực hiện phép khử Gauss trên ma trận hệ số $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Ta lần lượt lấy hàng n trừ đi hàng $(n-1)$, lấy hàng $(n-1)$ trừ hàng $(n-2)$, $\ldots$, lấy hàng 2 trừ hàng 1. Do $a_{i+1,j} - a_{ij} = j+1$ với mọi i, j nên từ A ta nhận được ma trận

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n+1 \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n+1 \end{pmatrix}$$

Tiếp theo lấy các hàng $3, 4, \ldots, n$ trừ đi hàng 1 ta nhận được ma trận

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n+1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Trong ma trận C lấy 2 lần hàng 2 trừ hàng 1 để thay cho hàng 1, ta nhận được ma trận

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n+1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Lấy hàng 2 của D trừ đi 2 lần hàng 1 ta nhận được ma trận

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Từ ma trận E ta lập được hệ phương trình tương đương với hệ gốc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \ldots + (n-1)x_n = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 + \ldots + (n-2)x_n \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 - \ldots - (n-1)x_n \\ x_3, x_4, \ldots, x_n \ \text{ tùy ý} \end{cases}$$

Bài 3.3 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ). Xét ma trận bổ sung

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4 & 1\\ 2 & 4 & -7 & 9 & 2\\ 5 & 10 & -17 & 23 & 1\\ 3 & 6 & -1 & m & 13-m\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & m-13 & 10-m\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3m-42\end{bmatrix}$$

Do đó, nếu $m \neq 14$ thì hệ vô nghiệm.
Nếu $m = 14$ thì hệ có nghiệm là $(5-2c; c; -4; -4)$, với c là hằng số.

Bài 3.4 (ĐH Kiến trúc). a) Tỷ lệ N trong sản phẩm là: $0,4x + 0,2y + 0,3z$.
Tỷ lệ K trong sản phẩm là: $0,2x + 0,3y + 0,3z$.
Tỷ lệ S trong sản phẩm là: $0,4x + 0,5y + 0,4z$.
b) Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 1\\ 0,4x + 0,2y + 0,3z = 0,31\\ 0,2x + 0,3y + 0,3z = 0,26\end{cases}$$

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận bổ sung ta được: $(x; y; z) = (0,4; 0,3; 0,3)$.
c) Gọi a, b lần lượt là tỷ lệ của N, K trong sản phẩm. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 1\\ 0,4x + 0,2y + 0,3z = a\\ 0,2x + 0,3y + 0,3z = b\end{cases}$$

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận bổ sung ta được:

$$(x; y; z) = (3 - 10b; 6 - 10a - 10b; 10a + 20b - 8).$$

Để sản phẩm sản xuất được thì ta phải có điều kiện $0 \leq x, y, z \leq 1$. Từ đó ta được

$$\begin{cases} 0,2 \leq b \leq 0,3\\ 0,5 \leq a + b \leq 0,6\\ 0,8 \leq a + 2b \leq 0,9.\end{cases}$$

Bài 3.5 (Trường ĐH Sư phạm - ĐH Huế, T.Q. Hoá). Gọi số lít cocacola mà mỗi bạn nhận được ban đầu là $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \in \mathbb{R}^5$. Nhận xét rằng mỗi lượt chia cocacola của bạn thứ k có thể được biểu diễn dưới dạng một ánh xạ tuyến tính T_k thỏa mãn

$$(u_1', \dots, u_k', \dots, u_5') = T_k(u_1, \dots, u_k, \dots, u_5) = (u_1 + \frac{1}{4}u_k, \dots, 0, \dots, u_5 + \frac{1}{4}u_k)$$

(trong đó $(u_1', \dots, u_k', \dots, u_5')$ số cocacola mà mỗi bạn có sau khi bạn thứ k chia cocacola của mình cho các bạn còn lại, $(u_1, \dots, u_k, \dots, u_5)$ là số cocacola mà mỗi bạn có trước lượt chia đó).

(**Cách 1**): Ánh xạ tuyến tính biểu diễn cả năm lượt chia là $T = T_5 \circ T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$. Chúng ta cần tính $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ sao cho $T(v) = v$ và $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 40$. Chú ý rằng ma trận chính tắc của T_k được tạo thành từ ma trận đơn vị bằng cách thay cột thứ k bằng cột $(1/4, \dots, 1/4, 0, 1/4, \dots, 1/4)$. Từ đó ta tính được ma trận chính tắc của T là

$$A = A_5A_4A_3A_2A_1 = \begin{pmatrix} 369/1024 & 125/256 & 25/64 & 5/16 & 1/4 \\ 305/1024 & 61/256 & 25/64 & 3/16 & 1/4 \\ 225/1024 & 45/256 & 9/64 & 5/16 & 1/4 \\ 125/1024 & 25/256 & 5/64 & 1/16 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Giải hệ phương trình $Tv = v$ (có thể giải bằng cách tìm vectơ riêng) và $v_1 + \ldots + v_5 = 40$ ta được $v_1 = 16, v_2 = 12, v_3 = 8, v_4 = 4, v_5 = 0$.

(**Cách 2**): Nhận xét rằng ta có thể thực hiện 5 lượt chia cocacola như sau: bạn thứ nhất chia đều cocacola của mình, sau đó, mỗi người chuyển số cocacola của mình theo thứ tự: bạn 2 chuyển cho bạn 1, bạn 3 chuyển cho bạn 2, bạn 4 chuyển cho bạn 3, bạn 5 chuyển cho bạn 4, bạn 1 chuyển cho bạn 5. Tiếp theo, bạn 1 lại chia đều số cocacola của mình đang có cho các bạn. Sau đó các bạn lại chuyển số cocacola của mình theo thứ tự trên. Cách chia và chuyển này sau 5 lượt sẽ cho kết quả giống hệt như cách chia trong đề bài.

Bây giờ chú ý rằng cách chuyển cocacola như trên tương ứng với ánh xạ tuyến tính P thoả mãn $P(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = (u_2, u_3, u_4, u_5, u_1)$ và ánh xạ $T = (P \circ T_1)^5$. Ma trận chính tắc của $P \circ T_1$ là

$$B = \begin{pmatrix} 1/4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy T có ma trận chính tắc $A = B^5$. Trong cách giải này, ta sẽ lập luận như sau để không cần tính A. Ta sẽ chứng minh

$$\ker(A - I) = \ker(B^5 - I) = \ker(B - I).$$

Thật vậy, đặt $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Ta dễ dàng tính được $\det(B - \lambda I) = \frac{1}{4}\lambda[3\lambda^4 - p(\lambda)]$. Do đó, với mọi giá trị riêng λ của B, ta đều có $p(\lambda) \neq 0$. Điều này có nghĩa là mọi giá trị riêng của $p(B)$ đều khác không, do đó, $p(B)$ là ma trận khả nghịch.

Ta có $B^5 - I = (B - I)(B^4 + B^3 + B^2 + B + I) = (B - I)p(B)$, suy ra

$$\ker(B^5 - I) = \ker(B - I)p(B) = \ker(B - I)$$

do $p(B)$ khả nghịch. Như vậy, thay vì tìm $v \in \ker(A - I)$, ta có thể tìm $v \in \ker(B - I)$ với ma trận B đơn giản hơn nhiều.

Bài 3.6 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh).

Gọi $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_n \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, vì $a_{nj} = -a_{jp} \Rightarrow A = -A'$

$\Rightarrow \det(A) = \det\left(-A^t\right) = (-1)^n \det\left(A^t\right) = (-1)^n \det(A)$ (do $\det(A) = \det\left(A^t\right)$)

$= -\det(A)$ (do n lẻ)

$\Rightarrow \det(A) = 0$.

Vậy hệ không có nghiệm tầm thường.

Bài 3.7 (ĐH Tân Trào, K.C. Nguyện). Theo bài ra ta có $0 < n, k \in \mathbb{N}$. Gọi $x_i, i = 1, 2, 3, 4$, là số sách được chia cho bốn người, $0 < x_i \in \mathbb{N}$. Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n \\ x_1 - x_2 \qquad\qquad = 2k \\ x_1 \qquad\quad - 2x_3 = k \\ \qquad\quad 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = n \\ x_1 - x_2 \qquad = 2k \\ x_1 \qquad - 2x_3 = k \end{cases} \tag{3}$$

Giải hệ (3) ta nhận được các nghiệm

$$x_1 = \frac{2n}{9} + k, x_2 = \frac{2n}{9} - k, x_3 = \frac{n}{9}, x_4 = \frac{4n}{9}.$$

Vì $0 < x_i \in \mathbb{N}$, nên điều kiện tồn tại nghiệm của bài toán là: $n, k \in \mathbb{N}, 0 < k < n$, n chia hết cho 9, và $2n > 9k$.

Bài 3.8 (ĐH Thuỷ Lợi, N.V. Đắc). Vì (x, y, z, w) là nghiệm của phương trình nên phương trình ẩn t:

$$\frac{x}{t-2018} + \frac{y}{t-2019} + \frac{z}{t-2020} + \frac{w}{t-2021} = 1, \quad (1)$$

có các nghiệm là $t = a, b, c, d$.
Với $t \notin \{2018;\ 2019;\ 2020;\ 2021\}$ thì (1) tương đương với phương trình đa thức $P(t) = 0$, trong đó

$$\begin{aligned} P(t) &= (t-2010)(t-2011)(t-2012)(t-2013) \\ &\quad - x(t-2011)(t-2012)(t-2013) - y(t-2010)(t-2012)(t-2013) \\ &\quad - z(t-2010)(t-2011)(t-2013) - w(t-2010)(t-2011)(t-2012) \end{aligned}$$

Do $\deg P(t) = 4$ và $P(t) = 0$ tại 4 giá trị $t = a, b, c, d$ nên

$$P(t) = (t-a)(t-b)(t-c)(t-d).$$

So sánh hệ số của t^3 ở hai vế của $P(t)$ suy ra

$$2018 + 2019 + 2020 + 2021 + x + y + z + w = a + b + c + d.$$

Vậy nên: $S = x + y + z + w = a + b + c + d - 8078$.

Bài 3.9 (ĐH Thuỷ Lợi, N.V. Đắc). Gọi a là số sinh viên chỉ giải được bài A; b là số sinh viên chỉ giải được bài B; c là số sinh viên chỉ giải được bài C.
Gọi x_{bc} là số sinh viên giải được cả bài B và C nhưng không giải được bài A.
Điều kiện: a, b, c, x_{bc} là các số tự nhiên.
Số sinh viên giải được bài A và thêm ít nhất 1 bài khác là: $25 - a - b - c - x_{bc}$.
Từ đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} b + x_{bc} = 2(c + x_{bc}) \qquad (1) \\ a = (25 - a - b - c - x_{bc}) + 1 \qquad (2) \\ a = b + c \qquad (3) \end{cases}$$

Từ (1): $b - 2c = x_{bc} \geq 0$ (4). Thay (3), (4) vào (2) : $4b + c = 26$ (5)
Từ (5): c là số tự nhiên chia 4 dư 2, $b \leq 6$.
Kết hợp (4), (5): $9c \leq 26 \Rightarrow c \leq 2$ suy ra $c = 2, b = 6$.
Vậy đáp số: $b = 6$.

Bài 3.10 (ĐH Thuỷ Lợi, N.V. Đắc). Giả sử khi ô tô đi được a km thì ta thực hiện đổi hai lốp trước và 2 lốp sau cho nhau. Sau khi đổi lốp, ô tô đi thêm được b km. Ta có các nhận xét sau:
i) Tại thời điểm đổi lốp thì lốp trước bị hao mòn $\frac{a}{3000}$ lốp và lốp sau bị hao mòn $\frac{a}{4500}$.

ii) Từ thời điểm thay lốp đến thời điểm ô tô đi được quãng đường tối đa thì lốp trước bị hao mòn thêm $\frac{b}{3000}$; lốp sau bị hao mòn thêm $\frac{b}{4500}$.
iii) Để ô tô chạy được quãng đường xa nhất thì cả 4 lốp mòn tối đa cùng một lúc.
Từ các nhận xét trên ta có phương trình:

$$\frac{a}{3000}+\frac{b}{4500}=\frac{a}{4500}+\frac{b}{3000} \Leftrightarrow 3000a+4500b=4500a+3000b=1.$$

Giải phương trên ta có: $a=b=1800(km)$

$$a \;=\; b \;=\; 1 \;:\; \left[\frac{1}{3000} \;+\; \frac{1}{4500}\right]$$

Vậy quãng đường lớn nhất xe có thể đi là 3600 km.

Bài 3.11 (HV Kỹ thuật Quân sự, H.Đ. Mạnh)**.** Ma trận hệ

$$A=\begin{bmatrix} -1 & b & c & d \\ a & -1 & c & d \\ a & b & -1 & d \\ a & b & c & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & b & c & d \\ a+1 & -1-b & 0 & 0 \\ a+1 & 0 & -1-c & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & -1-d \end{bmatrix}$$

Dễ thấy định thức ma trận hệ là

$$D=(1+b)(1+c)(1+d)-b(1+a)(1+c)(1+d)-c(1+a)(1+b)(1+d)-d(1+a)(1+b)(1+c)$$

hay

$$D=\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}\left[1-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{d+1}\right].$$

Do đó ta có đpcm.

Bài 3.12 (HV Kỹ thuật Quân sự, H.Đ. Mạnh)**.** Hệ không có nghiệm duy nhất thì cần định thức ma trận hệ bằng 0. Gọi ma trận mở rộng hệ là

$$\Omega=\Lambda|b]=\begin{bmatrix} Y & E & A & R & Y \\ R & Y & E & A & E \\ A & R & Y & E & A \\ E & A & R & Y & R \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ R & Y & E & A & E \\ A & R & Y & E & A \\ E & A & R & Y & R \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & Y-R & E-R & A-R & E-R \\ 0 & R-A & Y-A & E-A & 0 \\ 0 & A-E & R-E & Y-E & R-E \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & Y-R & E-R & A-R & E-R \\ 0 & R-A & Y-A & E-A & 0 \\ 0 & A-E+Y-R & 0 & Y-E+A-R & 0 \end{bmatrix}$$

Nếu $E \neq R$ thì $2 \leq rank\Omega \leq rank\Lambda$ (vì hai phần tử ở hàng 3 và 4 cột b là 0). Nếu $E = R$ thì rõ ràng $rank\Omega \leq rank\Lambda$. Như vậy hệ luôn có ít nhất một nghiệm. Bây giờ ta cần tìm các điều kiện để Λ suy biến.
a) Xét $E \neq R$, ta có

$$\Lambda \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & Y-R & E-R & A-R \\ 0 & (R-A)(E-R)-(Y-R)(Y-A) & 0 & (E-A)(E-R)-(A-R)(Y-A) \\ 0 & A-E+Y-R & 0 & Y-E+A-R \end{bmatrix}$$

Ma trận Λ suy biến nếu hoặc
i) $A - E + Y - R = 0$ hoặc
ii) $(R-A)(E-R) - (Y-R)(Y-A) = (E-A)(E-R) - (A-R)(Y-A)$.
Trường hợp (ii) tương đương với $(E-R)^2 + (A-Y)^2 = 0$, do $E \neq R$ nên điều này không thể xảy ra.
b) Xét $E = R$. Ta có

$$\Lambda \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & Y-R & 0 & A-R \\ 0 & R-A & Y-A & R-A \\ 0 & A+Y-2R & 0 & Y+A-2R \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & Y-R & 0 & A-R \\ 0 & R-A & Y-A & R-A \\ 0 & A-R & 0 & Y-R \end{bmatrix}$$

- Nếu $Y = A$ thì ma trận Λ suy biến.
- Nếu $Y \neq A$ tính định thức

$$|\Lambda| = (Y-A)\left[(Y-R)^2 - (A-R)^2\right]$$

Khi đó, Λ không suy biến nếu $Y - R \neq \pm(A-R)$. Vì $Y \neq A$ nên $Y - R \neq -(A-R)$ hay $Y + A \neq 2R$.
Vậy năm đặc biệt khi và chỉ khi
1) $E \neq R$ và $A - E + Y - R = 0$ hoặc
2) $E = R$ và $Y = A$ hoặc
3) $E = R, Y \neq A$ và $Y + A = 2R$.
Thay $Y = 2, E = 0$ ta có các năm:
Thỏa (1): $A + 2 = R \neq 0$ gồm $2002, 2013, 2024, 2035, 2046, 2057, 2068, 2079$.
Thỏa (2): là 2020.
Không có năm thỏa (3).

Bài 3.13 (HV Phòng không Không quân, P.H. Quân)**.** Bằng cách đặt số sinh viên của từng chuyên ngành là x_1, x_2, x_3, x_4 và x_5. Bằng cách lập hệ phương trình dễ dàng tìm được số sinh viên từng chuyên ngành lần lượt là 100, 80, 70, 50, 50.

4 KHÔNG GIAN VÉC TƠ VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Bài 4.1 (ĐH Bách Khoa-ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, N.H. Hiệp)**.** Chéo hóa $A = PDP^{-1}, D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Xét $B \in \mathcal{H} \iff B = f(A)$ với f là một đa thức hệ số thực. Ta có

$$\begin{aligned} B &= P \begin{pmatrix} f(-4) & 0 & 0 \\ 0 & f(5) & 0 \\ 0 & 0 & f(5) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \left[\frac{5f(-4)+4f(5)}{9} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{f(5)-f(-4)}{9} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{5f(-4)+4f(5)}{9} I + \frac{f(5)-f(-4)}{9} \end{aligned}$$

Suy ra $\{I; A\}$ là một tập sinh độc lập tuyến tính của $\mathcal{H}$, do đó là cơ sở của $\mathcal{H}$. Vậy $\dim(\mathcal{H}) = 2$.

Bài 4.2 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.** a) Dễ thấy cơ sở của V là $\{x^3 - x, x^2, 1\}$. Ta có

$$T(x^3 - x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, T(x^2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, T(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Từ đó ma trận của T đối với cơ sở trên là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) $\mathrm{Ker}T = \{f = ax^3 + bx^2 - ax + c \in V \mid T(f) = 0\} = \{c \in \mathbb{R}\}$. Khi đó cơ sở của KerT là $\{(0; 0; 1)\}$ và $\mathrm{dimKerT} = 1$.

Bài 4.3 (ĐH Kiến trúc)**.** a) Ta có: $f(x^k) = 1 + 1.x + 1.x^2 + \cdots + 1.x^k$ Suy ra

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

b) Giả sử tồn tại cơ sở S của $P_n[x]$ để ma trận N của f theo cơ sử S có dạng chéo.

Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B sang cơ sở S. Ta có

$$N = P^{-1}MP,$$

suy ra ma trận M chéo hóa được.

Đa thức đặc trưng của ma trận M là

$$P(\lambda) = \det(M - \lambda I) = (1-\lambda)^n.$$

Do đó M chỉ có duy nhất một trị riêng là $\lambda = 1$. Từ đó ta tìm được vectơ riêng của M có dạng $(x_1; 0; 0; \cdots; 0)$. Do đó M chỉ có 1 vectơ riêng độc lập tuyến tính, và do vậy M không có đủ n vectơ riêng độc lập tuyến tính. Vậy M không chéo hóa được, ta nhận được điều mâu thuẫn.

Bài 4.4 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Ta chứng minh bằng quy nạp. Dễ thấy hệ chỉ có một vec tơ $\{x_1\}$ độc lập tuyến tính.
Giả sử ta đã có hệ $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ $(k < n)$ độc lập tuyến tính. Ta xét hệ thức

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_{k+1} x_{k+1} = 0. \quad (3)$$

Ta tác động ánh xạ tuyến tính f vào hai vế của (3), ta được

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) = 0 \quad (4)$$

Trừ hai vế của (4) cho (3), ta được

$$\begin{aligned} &\lambda_1(f(x_1) - x_1) + \lambda_2(f(x_2) - x_2) + \ldots + \lambda_{k+1}(f(x_{k+1}) - x_{k+1}) \\ =&\lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_2 + \ldots \lambda_{k+1} x_k = 0. \end{aligned}$$

Suy ra $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots \lambda_{k+1} = 0$, từ đó $\lambda_1 = 0$. Vậy hệ $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\}$ độc lập tuyến tính với mọi $0 < k < n$.
Vậy hệ vec tơ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ độc lập tuyến tính.

Bài 4.5 (Trường ĐH Sư phạm - ĐH Huế, T.Q. Hoá)**.** 1. Một đơn thức bậc d có dạng $x^a y^b z^c$ thỏa mãn $a + b + c = d$. Chú ý rằng mỗi bộ nghiệm nguyên không âm của phương trình $a + b + c = d$ tương ứng $1 - 1$ với

một đơn thức bậc d. Như vậy ta muốn đếm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $a + b + c = d$.
Đặt $a' = a + 1, b' = b + 1, c' = c + 1$, thì mỗi bộ nghiệm nguyên không âm của phương trình $a + b + c = d$ tương ứng $1 - 1$ với một bộ nghiệm nguyên dương của phương trình $a' + b' + c' = d + 3$. Số các nghiệm này là $\binom{d+2}{2}$. Vậy số đơn thức bậc d là $\binom{d+2}{2}$.

Một đơn thức bậc không vượt quá d có dạng $x^a y^b z^c$ thỏa mãn $a+b+c \leq d$. Chú ý rằng mỗi bộ nghiệm nguyên không âm của bất đẳng thức trên tương ứng $1-1$ với một bộ nghiệm nguyên không âm của phương trình $a + b + c + t = d$ (ta không cần quan tâm giá trị t là bao nhiêu). Lập luận tương tự như trên, số nghiệm nguyên không âm của phương trình này là $\binom{d+3}{3}$. Vậy số đơn thức bậc không vượt quá d là $\binom{d+3}{3}$.

2. Chứng minh trực tiếp từ định nghĩa. Một cơ sở của S_d là tập tất cả các đơn thức bậc d. Một cơ sở của $S_{\leq d}$ là tập tất cả các đơn thức bậc không vượt quá d.

Bài 4.6 (ĐH Tân Trào, K.C. Nguyện)**.** Giả sử với $k_j \in \mathbb{R}, j = 1, ..., n$

$$k_1 e^x + k_2 e^{2x} + \cdots + k_n e^{nx} = 0. \tag{1}$$

Ta sẽ chứng minh $k_j = 0, j = 1, ..., n$.
Đặt $f(x) = k_1 e^x + k_2 e^{2x} + \cdots + k_n e^{nx}, x \in [0, 1]$. Dễ thấy, $f(x)$ là hàm liên tục và khả vi vô hạn trên đoạn $[0, 1]$. Khi đó

$$\begin{aligned}
f'(x) &= k_1 e^x + 2k_2 e^{2x} + \cdots + nk_n e^{nx},\\
f''(x) &= k_1 e^x + 4k_2 e^{2x} + \cdots + n^2 k_n e^{nx},\\
&\cdots\\
f^{(n-1)}(x) &= k_1 e^x + 2^{kn-1} k_2 e^{2x} + \cdots + n^{n-1} k_n e^{nx}.
\end{aligned}$$

Chọn $x = 0$ và lấy đạo hàm hai vế của (1) đến cấp $n - 1$, ta nhận được hệ phương trình thuần nhất với các ẩn $k_1, ..., k_n$

$$\begin{cases}
k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n = 0,\\
k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots + nk_n = 0,\\
k_1 + 2^2 k_2 + 3^2 k_3 + \cdots + n^2 k_n = 0,\\
\cdots\\
k_1 + 2^{n-1} k_2 + 3^{n-1} k_3 + \cdots + n^{n-1} k_n = 0.
\end{cases} \tag{2}$$

Dễ thấy rằng, định thức của ma trận các hệ số của ẩn là định thức Vandermonde của dãy $1, ..., n, n \in \mathbb{N}$

$$|A| = V_n(1, 2, ..., n) = \prod_{1 \le j < i \le n} (i - j) \neq 0.$$

Do đó, hệ (2) có duy nhất nghiệm $k_j = 0, j = 1, ..., n$. Điều phải chứng minh.

Bài 4.7 (HV Kỹ thuật Quân sự, H.Đ. Mạnh). Ký hiệu $V = \mathbb{R}[x]_3$ là tập các đa thức hệ số thực có bậc không quá 3. Khi đó V là không gian vector 4 chiều.
a) Ký hiệu $W = \{p \in \mathbb{R}[x]_3 : p(1) = 0\}$, dễ thấy đa thức $0 \in W$ và W là không gian con của V. Hơn thế W là không gian con thực sự của V. Thật vậy $q(x) = x^2 \in V$ nhưng không thuộc W. Từ đó suy ra $dimW \le 3$. Suy ra các vector $p_i \in W, i = \overline{1;4}$ là phụ thuộc tuyến tính.
b) Dễ thấy các đa thức $\left\{1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3\right\}$ độc lập tuyến tính thỏa mãn đk nên giả thiết là không đủ.

5 GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG

Bài 5.1 (ĐH Đà Lạt, Đ.T. Hiệp). Ma trận chéo D là

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ma trận khả nghịch P là

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Bài 5.2 (ĐH Đà Lạt, Đ.T. Hiệp). Đặt

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Ta có

$$X_n = A.X_{n-1} = \cdots = A^n.X_0$$

Theo Bài 5.1, ta có

$$A^n = P.D^n.P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3^n}{5} + 2^n + \frac{(-2)^n}{5} & -3^n + 2^n & -\frac{3^n}{5} + \frac{(-2)^n}{5} \\ \frac{3^n}{5} - \frac{(-2)^n}{5} & 3^n & \frac{3^n}{5} - \frac{(-2)^n}{5} \\ \frac{3^n}{5} - 2^n + 4\frac{(-2)^n}{5} & 3^n - 2^n & \frac{3^n}{5} + 4\frac{(-2)^n}{5} \end{bmatrix}.$$

Do đó

$$X_n = \begin{bmatrix} -\frac{7}{5}3^n + 2^{n+1} + \frac{2}{5}(-2)^n \\ \frac{7}{5}3^n - \frac{2}{5}(-2)^n \\ \frac{7}{5}3^n - 2^{n+1} + \frac{8}{5}(-2)^n \end{bmatrix}.$$

Thay $n = 2021$ ta được kết quả.

Bài 5.3 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Phúc)**.** Ma trận của phép biến đổi f trong cơ sở $\{1, x, x^2\}$ là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Giá trị riêng thỏa

$$(1+\lambda)(\lambda-1)(3-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -1, \\ \lambda = 1, \\ \lambda = 3. \end{array}\right.$$

Các véc-tơ riêng tương ứng $\vec{v}_1 = (1; -2; 1)$, $\vec{v}_2 = (-1; 0; 1)$ và $\vec{v}_3 = (1; 2; 1)$.

Bài 5.4 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Phúc)**.** Nếu A, B thỏa mãn điều kiện $AB = BA$ và x là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ của ma trận B, ta có $ABx = A(\lambda x) = \lambda Ax$. Mặt khác $BAx = ABx$, nên suy ra $BAx = \lambda Ax$. Vậy Ax cũng là một véc tơ riêng B ứng với giá trị riêng λ. Vì λ là giá trị riêng đơn của B nên Ax và x phụ thuộc tuyến tính suy ra $\exists s \in \mathbb{R}$ sao cho $Ax = sx$. Vậy x cũng là véc tơ riêng của A.
Ngược lại giả sử A và B là hai ma trận đối xứng cấp n và có chung các véc-tơ riêng. Gọi $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ và $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$ lần lượt là các giá trị riêng của ma trận A và B, giả sử $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là các véc-tơ riêng chung tương ứng với các giá trị riêng của ma trận A và B suy ra $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$.
Với $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ là một véc-tơ bất kì thuộc $\mathbb{R}^n$, ta có:

$$\begin{aligned} ABx &= AB\left(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n\right) \\ &= A\left(x_1Be_1 + x_2Be_2 + \cdots + x_nBe_n\right) \\ &= A\left(x_1\mu_1e_1 + x_2\mu_2e_2 + \cdots + x_n\mu_ne_n\right) \\ &= x_1\mu_1Ae_l + x_2\mu_2Ae_2 + \cdots + x_n\mu_nAe_n \\ &= x_1\mu_1\lambda_1e_l + x_2\mu_2\lambda_2e_2 + \cdots + x_n\mu_n\lambda_ne_n \end{aligned}$$

Tương tự, $BAx = x_1\mu_1\lambda_1e_1 + x_2\mu_2\lambda_2e_2 + \ldots + x_n\mu_n\lambda_ne_n$.
Do đó, $ABx = BAx$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ hay $AB = BA$.

Bài 5.5 (Trường ĐH Sư phạm - ĐH Huế, T.Q. Hoá)**.** Ký hiệu $P_A(\lambda) = |a - \lambda I_n|$ là đa thức đặc trưng của A. Khi đó

$$AB - BA = 3(A - B) \Leftrightarrow (B - (\lambda - 3)I_n)(A - \lambda I_n) = (A - (\lambda - 3)I_n)(B - \lambda I_n)$$
$$\Leftrightarrow \frac{P_A(\lambda)}{P_B(\lambda)} = \frac{P_A(\lambda - 3)}{P_B(\lambda - 3)}.$$

Suy ra

$$\frac{P_A(\lambda)}{P_B(\lambda)} = \frac{P_A(\lambda - 3)}{P_B(\lambda - 3)} = \cdots = \frac{P_A(\lambda - 3m)}{P_B(\lambda - 3m)}.$$

Cho $m \longrightarrow +\infty$, ta được $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$. Vậy A và B có cùng tập giá trị riêng.

Bài 5.6 (Trường ĐH Sư phạm - ĐH Huế, T.Q. Hoá)**.**

1. (**Cách 1**) Suy ra trực tiếp từ dạng chuẩn Jordan của A. Nếu A có khối Jordan với cấp lớn hơn 1 thì $A^2 \neq I_n$.
   (**Cách 2**) Giả sử $A \neq I_n$, cho nên tồn tại v sao cho $Av \neq v$. Do đó,

   $$A(v - Av) = Av - A^2v = Av - Iv = Av - v = -(v - Av)$$

   hay A có giá trị riêng -1 (vô lí).

2. Nếu $A = I_n$ hoặc $A = -I_n$ thì hiển nhiên A chéo hóa được. Giả sử $A \neq \pm I_n$. Khi đó, đa thức tối tiểu của A là $p(x) = x^2 - 1$.
   (**Cách 1**) Suy ra trực tiếp từ dạng chuẩn Jordan của A. Nếu A có khối Jordan với cấp lớn hơn 1 thì $A^2 \neq I_n$.
   (**Cách 2**) Dựa vào kết quả tổng quát: nếu đa thức tối tiểu không có nghiệm lặp thì ma trận chéo hóa được. Chứng minh dựa vào định lý phân tích hạt nhân, tức là nếu đa thức tối tiểu $p_A(x) = (x - a_1)\dots(x - a_k)$ thì

   $$V = \ker(0) = \ker(P[A]) = \ker(A - a_1 I) \oplus \ker(A - a_2 I) \oplus \cdots \oplus \ker(A - a_k I)$$

3. Vì A, B chéo hóa được và có giá trị riêng ± 1, đặt

   $$A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1} \text{ và } B = Q\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_{n-s} \end{pmatrix}Q^{-1}.$$

   (trong đó r, s có thể bằng 0). Đặt $P^{-1}Q = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$ trong đó X có cấp $r \times s$. Khi đó

   $$(A + I)(B - I) = P\begin{pmatrix} 0 & -4Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1},$$
   $$(A - I)(B + I) = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4Z & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} &\operatorname{rank}\big((A+I)(B-I)\big)+\operatorname{rank}\big((A-I)(B+I)\big)\\ =\ &\operatorname{rank}\big((A+I)(B-I)-(A-I)(B+I)\big)\\ =\ &\operatorname{rank}\big(A-B\big) \end{aligned}$$

Ngoài ra, ta có thể thấy rằng:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rank}\big((A+I)(B-I)\big)+\operatorname{rank}\big((A-I)(B+I)\big)\\ =\ &\operatorname{rank}\big((A+I)(B-I)+(A-I)(B+I)\big)\\ =\ &\operatorname{rank}\big(AB\big) \end{aligned}$$

Bài 5.7 (ĐH SPKT Vĩnh Long, T.H.N. Nhân). 1. Ta phát biểu kết quả tổng quát sau đây:

Ma trận

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ a-\lambda_1 & b+\lambda_1 & c\\ a-\lambda_2 & b & c+\lambda_2 \end{pmatrix}$$

với $a, b, c, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ thỏa $a+b+c=\lambda_3$ sẽ nhận $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ làm các giá trị riêng.

<u>Chứng minh</u>:

Đa thức đặc trưng của A là $P(\lambda)=|A-\lambda I|$. Vì $P(\lambda_1)=0$ và $P(\lambda_2)=0$ (định thức có hai dòng bằng nhau) nên λ_1, λ_2 là hai giá trị riêng của ma trận A. Vì $a+b+c=\lambda_3$ nên $P(\lambda_3)=|A-\lambda_3 I|=0$ (định thức có $c_1+c_2+c_3=0$), suy ra λ_3 cũng là một giá trị riêng của ma trận A.

<u>Áp dụng</u>:

Chọn $\lambda_1=2019, \lambda_2=2020, \lambda_3=2021$ và các số thực a, b, c thích hợp. Chẳng hạn, ma trận

$$A=\begin{pmatrix} 2021 & 1 & -1\\ 2 & 2020 & -1\\ 1 & 1 & 2019 \end{pmatrix}$$

có các hệ số nguyên khác không và nhận 2019, 2020, 2021 làm các giá trị riêng.

2. Ta phát biểu kết quả tổng quát sau đây:

   Ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ và ma trận M thu được từ ma trận A bằng cách lấy dòng i cộng k lần dòng j, rồi sau đó lấy cột j trừ k lần cột i có cùng các giá trị riêng.

   <u>Chứng minh</u>:

Khi thực hiện phép biến đổi sơ cấp lấy dòng i cộng k lần dòng j, tức là nhân vào bên trái của ma trận A một ma trận sơ cấp E (thu được từ ma trận đơn vị bằng cách lấy dòng i cộng k lần dòng j); rồi sau đó lấy cột j trừ k lần cột i, tức là nhân vào bên phải của ma trận A một ma trận sơ cấp F (thu được từ ma trận đơn vị bằng cách lấy cột j trừ k lần cột i). Vì hai ma trận E, F là nghịch đảo của nhau nên A, M là hai ma trận đồng dạng. Do đó, A và B có cùng các giá trị riêng.

Áp dụng: Từ ma trận A của câu trên, ta lấy dòng 2 cộng 2 lần dòng 1, rồi sau đó lấy cột 1 trừ 2 lần cột 2 thì được ma trận

$$B = \begin{pmatrix} 2019 & 1 & -1 \\ 0 & 2022 & -3 \\ -1 & 1 & 2019 \end{pmatrix}.$$

Tiếp tục, ta lấy dòng 3 cộng dòng 1, rồi sau đó lấy cột 1 trừ cột 3 thì được ma trận

$$M = \begin{pmatrix} 2020 & 1 & -1 \\ 3 & 2022 & -3 \\ 0 & 2 & 2018 \end{pmatrix}$$

có các các hệ số nguyên đôi một khác nhau và nhận 2019, 2020, 2021 làm các giá trị riêng.

Bài 5.8 (ĐH Thuỷ Lợi, N.V. Đắc). Ma trận $(A - nI)$ là ma trận mà ở mỗi hàng thì phần tử trên đường chéo là $-n$ và một phần tử ngoài đường chéo là n , còn lại toàn là 0 nên ta có $\det(A - nI) = 0$ tức là n là một giá trị riêng của A. Do n là số chẵn nên đa thức đặc trưng là đa thức bậc chẵn. Đa thức này có một nghiệm thực nên có ít nhất hai nghiệm thực. Như vậy A có ít nhất hai giá trị riêng thực.

Bài 5.9 (HV Phòng không Không quân, P.H. Quân). 1. Giả sử λ là giá trị riêng bất kỳ của ma trận A và v là véctơ riêng tương ứng, $v \neq \overrightarrow{0}$. Khi đó, $Av = \lambda v$. Ta lấy liên hợp phức cả hai vế đẳng thức trên và nhận được

$$\overline{A}\bar{v} = A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v},$$

vì A là ma trận thực đối xứng. Sử dụng tính chất của ma trận chuyển vị ta có

$$(A\bar{v})^T = \bar{v}^T A = \bar{\lambda}\bar{v}^T$$

do $A = A^T$. Từ đây, ta có

$$\bar{v}^T A v = \bar{v}^T \lambda v = \lambda \bar{v}^T v$$
$$\bar{v}^T A v = \bar{\lambda}\bar{v}^T v.$$

Vì $\bar{v}^T v > 0$ nên trừ hai vế của hai đẳng thức trên ta nhận được $\lambda = \overline{\lambda}$. Như vậy, λ là giá trị riêng thực.

2. (a) Giả sử v là véctơ khác không. Vì tính chất xác định dương của các ma trận A, B nên ta có ngay,

$$\begin{aligned} v^T A v &> 0 \\ v^T B v &> 0. \end{aligned}$$

Suy ra $v^T(A+B)v > 0$ nên $A+B$ cũng là ma trận xác định dương.

(b) Nếu ma trận A thỏa mãn $a_{ij} > 0$ với mọi i, j chưa chắc xác định dương. Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

và $v = (1, -1)^T$ thì

$$v^T A v = -2 < 0.$$

3. Nhân vào hai vế của đẳng thức ban đầu với $(A+B)$, ta nhận được

$$\begin{aligned} I =& (A+B)(A+B)^{-1} \\ =& (A+B)(A^{-1}+B^{-1}) \\ =& AA^{-1} + AB^{-1} + BA^{-1} + B^{-1} \\ =& I + AB^{-1} + BA^{-1} + I \end{aligned}$$

nên $AB^{-1}+BA^{-1}+I = 0$. Đặt $X = AB^{-1}$ thì $A = XB$ và $BA^{-1} = X^{-1}$, nên ta có $X + X^{-1} + I = 0$. Nhân cả hai vế với $(X-I)X$, ta có

$$0 = (X-I)X(X+X^{-1}+I) = (X-I)(X^2+X+I) = X^3 - I.$$

Do đó, $X^3 = I$. Sử dụng các tính chất của định thức ta có

$$(\det X)^3 = \det(X^3) = \det I = 1,$$

vì thế $\det X = 1$ và $\det A = \det(XB) = \det X \det B = \det B$.

6 ĐA THỨC

Bài 6.1 (ĐH Bách Khoa-ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, N.H. Hiệp). Dễ thấy $f \equiv 0, 1$ thỏa yêu cầu bài toán. Ta chỉ cần xét f là đa thức bậc ≥ 1.
Đặt $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, a_n \neq 0$. Thế vào đề bài và đồng nhất hệ số bậc n:

$$a_n = a_n \cdots a_n \iff a_n = 1.$$

Giả sử x_0 là 1 nghiệm của $f(x)$. Ta suy ra

$$f(x_0^2+1) = f(x_0)f(x_0+1) = 0.$$

Do đó x_0^2+1 cũng là 1 nghiệm của $f(x)$.
Nếu $x_0 \in \mathbb{R}$ thì ta có một dãy tăng các nghiệm thực sau

$$\{x_n | n \in \mathbb{N}^*\} : \begin{cases} x_1 = x_0^2+1, \\ x_{n+1} = x_n^2+1. \end{cases}$$

Điều này chứng tỏ $f(x)$ có vô số nghiệm. Điều này là không thể xảy ra cho mọi đa thức $f(x)$. Như vậy $f(x)$ không có nghiệm thực. Điều này còn suy ra $f(x)$ là đa thức bậc chẵn: $n = 2k$.
Giả sử

$$g(x) = f(x) - (x^2-x+1)^k \neq 0.$$

Vì $f(x)$ và $(x^2-x+1)^k$ cùng số hạng bậc $n = 2k$ nên suy ra bậc của $g(x)$

$$deg(g(x)) = m < n.$$

Thế $f(x)$ vào đề bài, ta suy ra

$$\begin{aligned} &(x^4+x^2+1)^k + g(x^2+1) = \left[(x^2-x+1)^k + g(x)\right] \cdots \left[(x^2+x+1)^k + g(x+1)\right], \\ \iff\ & g(x^2+1) = (x^2-x+1)^k.g(x+1) + g(x).(x^2+x+1)^k \end{aligned}$$

Đồng nhất bậc 2 vế, ta suy ra

$$2m = 2k + m \iff m = 2k = n.$$

Điều này mâu thuẫn. Tức là $g \equiv 0$. Hay cách khác

$$f(x) = (x^2-x+1)^k, k \in \mathbb{N}^*.$$

Kết luận: $f \equiv 0, f(x) = (x^2-x+1)^k, k \in \mathbb{N}$.

Bài 6.2 (ĐH Giao thông Vận tải, N.H. Hoàng)**.** Ta xét hàm số $f(x) = xP(x)e^{-x^2}$. Ta có

$$f'(x) = Q(x)e^{-x^2}.$$

Vì $P(x)$ là đa thức bậc lẻ nên nó có ít nhất một nghiệm thực x_0. Như vậy ta có

$$f(0) = f(x_0) = f(-\infty) = f(+\infty) = 0,$$

ở đây $f(\pm\infty) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Áp dụng định lý Rolle cho hàm $f(x)$ trên các khoảng $(-\infty, x_1]$ và $[x_2, +\infty)$ với $x_1 = \min\{0, x_0\}, x_2 = \max\{0, x_0\}$. Khi đó ta suy ra rằng tồn tại $c_1 <$

$x_1, c_2 > x_2$ sao cho $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$, hay là $Q(c_1) = Q(c_2) = 0$.
Tiếp theo, nếu $x_1 < x_2$ thì áp dụng định lý Rolle cho hàm $f(x)$ trên đoạn $[x_1, x_2]$ ta suy ra tồn tại $c_3 \in (x_1, x_2)$ để $f'(c_3) = 0$, hay là $Q(c_3) = 0$. Tình huống trái lại, ta có $x_0 = 0$ và 0 là nghiệm bội của $f(x)$ nên $f'(0) = 0$. Coi $c_3 = 0$ thì ta nhận được $Q(c_3) = 0$.
Như vậy luôn tồn tại các giá trị $c_1 < c_3 < c_2$ sao cho $Q(c_1) = Q(c_2) = Q(c_3) = 0$ (đpcm).

Bài 6.3 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ). Áp dụng định lí Viet:
Tổng các nghiệm của P là $-\dfrac{2020}{2021}$.
Tính $P' = 2021nx^{n-1} + 2020(n-1)x^{n-2} + ... + a_1$. Do đó tổng các nghiệm của nó là $-\dfrac{2020(n-1)}{2021n}$.
Tương tự tổng các nghiệm của $P^{(k)}$ là $-\dfrac{2020(n-k)}{2021n}$ với $1 \leq k \leq n-1$.
Suy ra tổng các nghiệm của các đa thức $P, P', P'', ..., P^{(n-1)}$ là

$$\begin{aligned} S &= -\frac{2020}{2021}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{n} \\ &= -\frac{2020}{2021}\left(n - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k\right) \\ &= -\frac{1010(n+1)}{2021}. \end{aligned}$$

Bài 6.4 (ĐH Kiến trúc). Đặt $n = 2021$. Giả sử $P(x)$ có thể phân tích được thành tích của $2n+1$ đa thức với hệ số nguyên. Do $P(x)$ có bậc bằng $8n$ nên tồn tại một ước của $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên (khác hằng số) có bậc nhỏ hơn 4.
Mặt khác $P(x)$ không có nghiệm thực nên $f(x)$ cũng không có nghiệm thực. Từ đó suy ra $f(x)$ có bậc bằng 2. Giả sử $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
Do hệ số cao nhất của $P(x)$ bằng 1 nên ta có thể giả sử $a = 1$.
Ta có $P(1) = P(8) = 17$, suy ra 17 chia hết cho $f(1), f(8)$. Mặt khác ta có $f(8) - f(1) = 63 + 7b$ chia hết cho 7 nên ta suy ra $f(1) = f(8)$. Từ đó ta được $b = -9$. Đặt $d = 8 - c$. Ta có

$$P(x) = (f(x) + d)^{4n} + 17$$

chia hết cho $f(x)$. Suy ra $d^{4n} + 17$ chia hết cho $f(x)$. Và do đó $d^{4n} + 17 = 0$, điều này mâu thuẫn vì $d^{4n} \geq 0$.

Bài 6.5 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Dễ thấy đa thức $f(x) \equiv 0$ là một nghiệm của bài toán.

Xét đa thức $f(x) \not\equiv 0$. Ta đặt $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$. Khi đó:

$$f(f(x)) = a_n (a_n x^n)^n + ... + ...$$

Từ $f(f(x)) = \left(x^2 + x + 1\right) f(x)$ ta suy ra được $a_n (a_n x^n)^n = a_n x^{n+2}$. Từ đó suy ra $n^2 = n + 2$ và $a_n^{n+1} = a_n$. Giải ra ta được $n = 2,\ a_n = 1$ hoặc $a_n = -1$.
Khi đó $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a = 1$ hoặc $a = -1$.
Thay đa thức $f(x)$ ở trên vào $f(f(x)) = \left(x^2 + x + 1\right) f(x)$ rồi đồng nhất thức hai vế ta được:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -1 \end{array}\right. \\ 2b = b + a \\ ab^2 + 2c + ab = a + b + c \\ 2abc + b^2 = b + c \\ ac^2 + bc = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Suy ra $f(x) = x^2 + x$.
Thử lại thấy thỏa mãn.
Vậy có hai đa thức thỏa mãn đề bài là $f(x) \equiv 0$ và $f(x) = x^2 + x$.

Bài 6.6 (ĐH SPKT Vĩnh Long, T.H.N. Nhân). Giả sử $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ (a_i nguyên, $a_n \neq 0$). Đặt

$$Q(x) = P(x+1) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n \text{ } (b_i \text{ nguyên}).$$

Bởi vì $P(\frac{2019}{2021}) = 0$ nên $Q(\frac{-2}{2021}) = P(\frac{2019}{2021}) = 0$. Suy ra

$$b_0 + b_1(\frac{-2}{2021}) + \ldots + b_n(\frac{-2}{2021})^n = 0,$$

tương đương

$$b_0.(2021)^n + b_1.(-2)(2021)^{n-1} + \ldots + b_n(-2)^n = 0.$$

Từ đó suy ra b_0 là số chẵn. Mặt khác $b_0 = Q(0) = P(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.
Vậy tổng các hệ số của $P(x)$ không thể bằng 2021.

Bài 6.7 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh). Xét đa thức: $Q(x) = (x+1)P(x) - x$. Ta thấy $\deg Q(x) = n + 1$ và $Q(k) = 0; \quad \forall k = \overline{0, n}$.
Khi đó $Q(x)$ có dạng: $Q(x) = ax(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$, với a là hằng số.
Mà:

$$Q(-1) = 1 \Leftrightarrow a(-1)(-2)\ldots(-n-1) = 1 \Leftrightarrow a(-1)^{n+1}(n+1)! = 1 \Leftrightarrow a = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Từ đó:

$$Q(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)(x-2)\dots(x-n)$$

$$\Rightarrow Q(n+1) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(n+1)n(n-1)\dots(1) = (-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow P(n+1) = \frac{Q(n+1)+(n+1)}{n+2} = \frac{(-1)^{n+1}+(n+1)}{(n+2)}.$$

Bài 6.8 (ĐH Tân Trào, K.C. Nguyện). Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = P_n(x)$ trên tập số thực $\mathbb{R}$. Ta có

$$P_n'(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Trường hợp 1. Nếu $n = 2k, 0 < k \in \mathbb{N}$ thì $P_{2k}' = \dfrac{x^{2k}-1}{x-1}$. Dễ thấy $P_{2k}'(-1) = 0$ và $P_{2k}'(x) > 0$ với mọi $x \neq -1$. Do đó $P_{2k}(x)$ đạt cực tiểu toàn cục tại điểm $x = -1$. Hơn nữa

$$\begin{aligned} P_{2k}(-1) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-2} - \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{2(k-1)(2k-1)} + \frac{1}{2k} > 0. \end{aligned}$$

Suy ra, đa thức $P_{2k}(x)$ không có nghiệm thực.

Trường hợp 2. Nếu $n = 2k+1, 0 < k \in \mathbb{N}$ thì $P_{2k+1}' = \dfrac{x^{2k+1}-1}{x-1}$. Dễ thấy, $P_{2k+1}' > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm đa thức $P_{2k+1}(x)$ đồng biến trên toàn miền xác định $\mathbb{R}$. Suy ra đa thức $P_{2k+1}(x)$ có duy nhất một nghiệm thực.

Bài 6.9 (ĐH Trà Vinh, D.K. Ngọc). a/. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phương trình với $|z_1| = 1$. Từ $z_2 = \dfrac{c}{a}.\dfrac{1}{z_1}$ kéo theo $|z_2| = \left|\dfrac{c}{a}\right|.\dfrac{1}{|z_1|} = 1$.

Vì $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ và $|a| = |b|$ nên ta có $|z_1 + z_2|^2 = 1$.

Hệ thức tương đương với $(z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = 1$, tức là $(z_1 + z_2)\left(\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}\right) =$ 1

$(z_1 + z_2)^2 = z_1 z_2$ hay $\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow b^2 = ac$.

b/. Theo câu a) ta có: $b^2 = ac$, $c^2 = ab$. Nhân các hệ thức lại ta được

$$b^2c^2 = a^2bc \Rightarrow a^2 = bc.$$

Do đó $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$.
Hệ thức tương đương với $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$, Tức là $(a-b)^2+(b-c)^2+2(a-b)(b-c)+(c-a)^2=2(a-b)(b-c)$.
Kéo theo $(a-c)^2=(a-b)(b-c)$.
Lấy giá trị tuyệt đối và đặt $\alpha=|a-c|$, $\beta=|a-b|$, $\gamma=|b-c|$ ta được $\alpha^2=\beta\gamma$.
Tương tự ta được $\beta^2=\alpha\gamma$, $\gamma^2=\alpha\beta$.
Cộng các hệ thức lại ta được $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, tức là $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$.
Do đó $\alpha=\beta=\gamma$ hay $|a-c|=|a-b|=|b-c|$.

Bài 6.10 (ĐH Trà Vinh, D.K. Ngọc). Ta có $P(x)=a_{1000}x^{1000}+a_{999}x^{999}+\ldots+a_1x+a_0$.
Cho $x=1$ ta được $P(1)=a_{1000}+a_{999}+\ldots+a_1+a_0$.
Mặt khác $P(x)=(2x-1)^{1000}\Rightarrow P(1)=(2.1-1)^{1000}=1$.
Từ đó suy ra $a_{1000}+a_{999}+\ldots+a_1+a_0=1\Rightarrow a_{1000}+a_{999}+\ldots+a_1=1-a_0$.
Mà là số hạng không chứa x trong khai triển $P(x)=(2x-1)^{1000}$, nên $a_0=C_{1000}^{1000}(2x)^0(-1)^{1000}=1$.
Vậy
$$a_{1000}+a_{999}+\ldots+a_1=1-a_0=0.$$

Bài 6.11 (ĐH Trà Vinh, D.K. Ngọc). Giả sử a,b,c,d là 4 nghiệm của đa thức x^4+x^3-1.
$$P(x)=x^4+x^3-1=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\Rightarrow abcd=-1$$
Ta cần chứng minh: $Q(ab)=0$ với
$$Q(x)=x^6+x^4+x^3-x^2-1=x^3\left(x^3+x+1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)$$
$$\begin{aligned}\Rightarrow Q(ab)&=(ab)^3\left((ab)^3+(ab)+1-\frac{1}{(ab)}-\frac{1}{(ab)^3}\right)\\&=(ab)^3\left((ab)^3+(ab)+1+(cd)+(cd)^3\right)\end{aligned}$$
Do đó $Q(ab)=0\Leftrightarrow(ab)^3+(ab)+1+(cd)+(cd)^3=0$.
Thật vậy $P(a)=0\Rightarrow a^4+a^3=1\Rightarrow a^3=\dfrac{1}{a+1}$. Tương tự $b^3=\dfrac{1}{b+1}$.
Nên $a^3b^3=\dfrac{1}{(a+1)(b+1)}=-(1+c)(1+d)$. Tương tự $c^3d^3=-(1+a)(1+b)$.
Suy ra
$$\begin{aligned}(ab)^3+(ab)+1+(cd)+(cd)^3&=-(1+c)(1+d)+ab+1+cd-(1+a)(1+b)\\&=-1-a-b-c-d=0.\end{aligned}$$
Vậy $Q(ab)=0$.

7 TỔ HỢP

Bài 7.1 (ĐH Giao thông Vận tải, N.H. Hoàng)**.** Xét một cách đỗ xe theo đúng như mong muốn của người quản lý. Tính từ trái qua phải, ta ký hiệu $k_1, k_2, \ldots, k_8$ là các vị trí để trống. Đặt $x_1 = k_1 - 1, x_2 = k_2 - k_1, x_3 = k_3 - k_2, \ldots, x_8 = k_8 - k_7, x_9 = 30 - k_8$. Ta có

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_9 = 30 - 1 = 29.$$

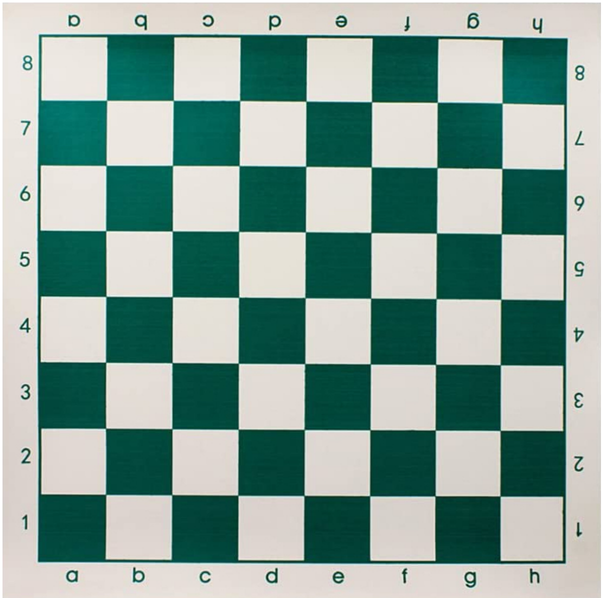
Ta thấy rằng $x_1 \geqslant 0, x_9 \geqslant 0$. Hai vị trí k_1, k_2 không nằm cạnh nhau khi và chỉ khi $x_2 = k_2 - k_1 \geqslant 2$. Tương tự ta có $x_k \geqslant 2$ với $k = 3, \ldots, 8$. Nếu đặt $y_1 = x_1 + 1, y_9 = x_9 + 1$ và $y_k = x_k - 1$ với $k = 2, \ldots, 8$ thì $(y_1, \ldots, y_9)$ là một nghiệm nguyên dương của phương trình

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_9 = 24. \tag{1}$$

Mỗi cách sắp xếp các xe theo đúng như mong muốn của người quản lý tương ứng 1-1 với một nghiệm nguyên dương của phương trình (1). Như vậy số lượng cách sắp xếp cần tìm bằng với số lượng nghiệm nguyên dương của phương trình (1) và ta sẽ chỉ ra rằng giá trị này là C_{23}^8.

Để xây dựng 1 nghiệm nguyên dương của (1), ta viết 24 số 1 thành 1 hàng dọc cách đều nhau. Khi đó giữa các số 1 đứng liền nhau, ta có 23 khoảng trống liên tiếp. Lựa chọn 8 khoảng trống trong 23 khoảng trống này để đặt 8 dấu cộng. Các dấu cộng được đặt vào chia dãy 24 số 1 thành 9 phần. Gọi y_1 là tổng của phần thứ nhất, y_2 là tổng của phần thứ hai, . . . , y_9 là tổng của phần thứ 9. Dãy $(y_1, \ldots, y_9)$ nhận được như vậy là một nghiệm nguyên dương của phương trình (1) và mọi nghiệm của (1) đều nhận được theo cách này. Như vậy số nghiệm nguyên dương của (1) bằng với số cách lựa chọn 8 vị trí từ 23 vị trí có trước và là C_{23}^8. Đây chính là kết quả mà ta đã nêu ra ở trên.

Bài 7.2 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.** Ta thấy, mỗi một đường đi của quân vua từ vị trí a_1 đến vị trí h_8 bao gồm k bước di chuyển lên trên, k bước di chuyển sang phải và $(7-k)$ bước di chuyển theo ô chéo (phía trên bên phải), trong đó $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.



Bất kì một đường đi như vậy đều được xác định duy nhất bởi sự sắp xếp $(k+7)$ các phần tử $0, 1, 2$ trong đó: phần tử 0 ứng với việc di chuyển sang phải, phần tử 1 ứng với việc di chuyển lên trên và phần tử 2 ứng với việc di chuyển tới ô chéo lên phía trên bên phải và phần tử 0 được lặp lại k lần, phần tử 1 được lặp lại k lần, phần tử 2 được lặp lại $(7-k)$ lần.
Do đó số cách quân vua có thể di chuyển từ vị trí a_1 đến vị trí h_8 là:

$$\sum_{k=0}^{7} \frac{(k+7)!}{k!.k!.(7-k)!} = 48639 \text{ (cách)}.$$

Bài 7.3 (ĐH Kiến trúc). a) $C_{40}^{10} - 2.C_{20}^{10} = 847291016$ cách chặt.

b) TH1: Chặt 2 cây xà cừ, 3 cây bạch đàn. Trong trường hợp này có: $C_5^2.C_{20}^3$ cách chặt.
TH2: Chặt 5 cây, trong đó có 3 cây xà cừ. Trong trường hợp này có: $C_5^3.C_{40}^2$ cách chặt.
TH3: Chặt 5 cây, trong đó có 4 cây xà cừ. Trong trường hợp này có: $C_5^4.C_{40}^1$ cách chặt.
TH4: Chặt 5 cây xà cừ. Trong trường hợp này có: C_5^5 cách chặt.
Vậy có tất cả: $C_5^2.C_{20}^3 + C_5^3.C_{40}^2 + C_5^4.C_{40}^1 + C_5^5 = 19401$ cách chặt.

c) Gọi x, y, z lần lượt là số cách chặt 20 trong tổng số 40 cây thuộc hai loại bạch đàn và xoan, đồng thời sau khi chặt xong, số cây bạch đàn còn lại nhiều hơn so với số cây xoan; số cây bạch đàn còn lại bằng số cây xoan; số cây bạch đàn còn lại ít hơn số cây xoan.

Do tính chất đối xứng nên ta có $x = z$, đồng thời $x + y + z = C_{40}^{20}$ và $y = (C_{20}^{10})^2$. Từ đó suy ra

$$x = \frac{C_{40}^{20} - y}{2} = \frac{C_{40}^{20} - (C_{20}^{10})^2}{2}.$$

Bài 7.4 (ĐH Kiến trúc). Giả sử 79 số đó là $a_1 < a_2 < ... < a_{79}$. Xét hai tập hợp

$$A = \{a_2+a_3+a_4; a_2+a_3+a_5; ...; a_2+a_3+a_{79}\}, \quad B = \{a_4-a_1; a_5-a_1; ...; a_{79}-a_1\}.$$

Ta có $|A| = |B| = 76$. Do $a_{79} - a_2 \geq 77$, $a_{79} - a_3 \geq 76$ nên ta suy ra

$$a_2 \leq a_{79} - 77 \leq 101 - 77 = 24, \quad a_3 \leq a_{79} - 76 \leq 101 - 76 = 25.$$

Suy ra $a_2 + a_3 + a_{79} \leq 24 + 25 + 101 = 150$. Mặt khác $a_4 - a_1 \geq 3$. Từ đó suy ra $A, B \subset \{3, 4, 5, ..., 150\} = C$. Vì $|C| = 148 < 152 = |A| + |B|$ nên ta suy ra

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \geq |A| + |B| - |C| \geq 76 + 76 - 148 = 4.$$

Do đó $A \cap B \neq \emptyset$. Suy ra tồn tại $i, j \geq 4$ sao cho $a_2 + a_3 + a_i = a_j - a_1$. Rõ ràng $i < j$ và như vậy ta có $a_1 + a_2 + a_3 + a_i = a_j$.
Dựa vào cách giải trên, có thể chỉ ra 78 số mà trong đó không tìm được 4 số thỏa mãn đề bài, đó là 78 số: 24, 25, 26, ..., 101.
Thật vậy, tổng của 4 số nhỏ nhất trong các số này đã là $24 + 25 + 26 + 27 = 102 > 101$ là số lớn nhất, do vậy không tồn tại 5 số a, b, c, d, e sao cho $a + b + c + d = e$.

Bài 7.5 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Xét hình vuông cỡ 2×2, do hình vuông này có mỗi hình vuông nhỏ luôn chung cạnh, chung đỉnh nên tồn tại nhiều nhất một số chẵn, nhiều nhất một số chia hết cho 3, do đó tồn tại ít nhất 2 số lẻ không chia hết cho 3.
Bảng 10×10 được chia thành 25 hình vuông cỡ 2×2, nên tồn tại ít nhất 50 số lẻ không chia hết cho 3. Từ 1 đến 10 có 3 số lẻ không chia hết cho 3 là $1, 5$ và 7.
Áp dụng nguyên lý Dirichlet, ta được một trong ba số xuất hiện ít nhất $\left[\frac{50}{3}\right] + 1 = 17$ lần.

Bài 7.6 (Trường ĐH Sư phạm - ĐH Huế, T.Q. Hoá). Với mỗi tập con $A_i \subset [n]$, ta xét véctơ đặc trưng $v_i = (v_{i1}, \ldots, v_{in}) \in \mathbb{F}_2^2$, trong đó

$$v_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad j \in A_i \\ 0 & \text{nếu} \quad j \notin A_i \end{cases}.$$

Khi đó, ta có hệ $n+1$ véctơ $v_1, \ldots, v_{n+1}$ trong $\mathbb{F}_2^n$ nên hệ phụ thuộc tuyến tính. Tức là có các $c_1, \ldots, c_{n+1}$ không đồng thời bằng không sao cho

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_{n+1} v_{n+1} = 0.$$

Đặt $I = \{i \mid c_i > 0\}$ và $J = \{i \mid c_i < 0\}$.

Bài 7.7 (ĐH Trà Vinh, T.Q. Hà)**.** Ta có:

$$(1+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1} \tag{1}$$

Mặt khác

$$C_{2n+1}^0 = C_{2n+1}^{2n+1};\, C_{2n+1}^1 = C_{2n+1}^{2n};\, C_{2n+1}^2 = C_{2n+1}^{2n-1};\, \ldots;\, C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \ldots + C_{2n+1}^n = \frac{2^{2n+1}}{2}$$

$$C_{2n+1}^1 + \ldots + C_{2n+1}^n = 2^{2n} - 1 \Leftrightarrow 2^{20} - 1 = 2^{2n} - 1 \Rightarrow n = 10.$$

Bài 7.8 (HV Phòng không Không quân, P.H. Quân)**.** Ta sẽ mô tả các bóng đèn được xếp vào 9 ô vuông bởi ma trận cỡ 3×3, trong đó trạng thái bóng đèn bật tắt sẽ lần lượt tương ứng với 1 và 0 (modulo 2). Khi đó, ta thấy rằng:

1. Trạng thái ban đầu là
$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Mỗi tác động thay đổi trạng thái bóng ở vị trí (i, j) tương ứng với việc thực hiện phép cộng vào ma trận $L + A_{i,j}$, trong đó $A_{i,j}$ là ma trận gồm 1 ở hàng i và hàng j, 0 ở các vị trí còn lại. Chẳng hạn, thay đổi trạng thái bóng đèn ở vị trí $(2, 1)$ tương ứng với việc cộng vào L ma trận
$$A_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Phép cộng ma trận giao hoán nên ta có thể thay đổi thứ tự tác động vào các công tắc bóng đèn.

4. Mục tiêu của ta là đưa toàn bộ bóng đèn về trạng thái tắt. Tức là
$$L + \sum_{i,j} x_{i,j} A_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   trong đó, $x_{i,j}$ biểu diễn số lần tác động vào vị trí (i, j). Do đó, $x_{i,j}$ có thể nhận các giá trị 0 và 1 (vì chẳng hạn tác động 2 lần vào vị trí (i, j) cũng có nghĩa quay về trạng thái như chưa tác động).

Từ đẳng thức trên, ta suy ra

$$\sum_{i,j} x_{i,j} A_{i,j} = L.$$

Ta sẽ viết dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Giải hệ phương trình này, ta thu được nghiệm là

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy ta có thể tắt cả 9 đèn trong bảng 3×3 với việc thay đổi trạng thái bật tắt ở các vị trí $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$ và $(3, 3)$.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: GIẢI TÍCH

1 DÃY SỐ

Bài 1.1 (ĐH Bách khoa - ĐHQG Tp. HCM, P.T. Thực)**.** Chọn tùy ý $\varepsilon' > 0$ sao cho
$$\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2\pi} \quad \text{và} \quad \left(\frac{p}{2\pi} - \varepsilon', \frac{p}{2\pi} + \varepsilon'\right) \subset (0,1)\,.$$
Ta có thể chọn được ε' như vậy bởi vì $p \in (0, 2\pi)$.
Xét dãy số $\{x_k\}$ xác định bởi:
$$x_k = \frac{2021}{2\pi}k - \left[\frac{2021}{2\pi}k\right], \quad k = 1, 2, \cdots$$
Ở đây ký hiệu $[x]$ để chỉ phần nguyên của số thực x.
Bởi vì dãy $\{x_k\}$ bị chặn trong đoạn $[0,1]$ nên tồn tại dãy con $\{x_{k_j}\}$ hội tụ. Dẫn đến tồn tại $j, j' \in \mathbb{N}$ sao cho
$$0 < x_{k_j} - x_{k_{j'}} < 2\varepsilon'. \tag{1}$$
Chú ý nếu $j \neq j'$ thì $x_{k_j} - x_{k_{j'}} \neq 0$ bởi vì $\dfrac{2021}{2\pi}$ là số vô tỷ. Từ (1) ta có
$$\frac{\frac{p}{2\pi} + \varepsilon'}{x_{k_j} - x_{k_{j'}}} - \frac{\frac{p}{2\pi} - \varepsilon'}{x_{k_j} - x_{k_{j'}}} > 1.$$
Như vậy ta luôn chọn được một số nguyên d sao cho
$$\frac{\frac{p}{2\pi} + \varepsilon'}{x_{k_j} - x_{k_{j'}}} > d > \frac{\frac{p}{2\pi} - \varepsilon'}{x_{k_j} - x_{k_{j'}}}.$$
Đặt $q = 2\pi d\left(x_{k_j} - x_{k_{j'}}\right)$, ta thấy q thoả mãn yêu cầu của bài toán.

Bài 1.2 (ĐH Đà Lạt, Đ.T. Hiệp)**.** Ta có
$$x_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
và
$$x_n < x_{n+1}, \forall n \geq 1.$$

Do đó

$$x_{2021} < \sqrt[n]{x_1^n + \cdots + x_{2021}^n} < x_{2021}\sqrt[n]{2021}.$$

Hơn nữa, ta cũng có

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2021} = 1.$$

Theo nguyên lý giới hạn kẹp, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1^n + \cdots + x_{2021}^n} = x_{2021} = 2021.1011 = 2043231.$$

Bài 1.3 (ĐH Đồng Tháp)**.** 1. Dễ dàng chứng minh $u_n \in (0,1)$ với mọi n bằng quy nạp. Ta có $u_n > 0$ và $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - u_n^2 < 1$ nên $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi 0. Do đó, $\{u_n\}$ có giới hạn hữu hạn. Chuyển hệ thức truy hồi sang giới hạn, ta tìm được $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

2. Ta có $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2} = \dfrac{1-(1-u_n^2)^2}{u_n^2(1-u_n^2)^2} = \dfrac{2-u_n^2}{(1-u_n^2)^2}$. Suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2-u_n^2}{(1-u_n^2)^2} = 2.$$

Áp dụng Định lí Stolz với hai dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ xác định bởi $x_n = \dfrac{1}{u_n^2}$, $y_n = n$, ta được $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{nu_n^2} = 2$. Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 1.4 (ĐH Hàng Hải Việt Nam, P.Q. Khải)**.** Trước tiên bằng quy nạp dễ dàng chứng minh

$$x_n > \sqrt{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Như vậy, nếu (x_n) có giới hạn thì giới hạn đó là nghiệm lớn hơn hoặc bằng $\sqrt{3}$ của phương trình $f(x) = x$.
Xét $f(x) = \sqrt{3} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, ta tiến hành giải $f(x) = x$ với $x \geq \sqrt{3}$ như sau:

$$\begin{aligned}
f(x) = x \quad &\Longleftrightarrow x = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \Longleftrightarrow (x-\sqrt{3})^2 = \frac{x^2}{x^2-1}\\
&\Longleftrightarrow (x^2-\sqrt{3}x)^2 - 2(x^2-\sqrt{3}x) - 3 = 0\\
&\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-\sqrt{3}x & = -1\\ x^2-\sqrt{3}x & = 3\end{array}\right. \Longleftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}.
\end{aligned}$$

Ngoài ra ta cũng thấy

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} \Rightarrow |f'(x)| < \frac{1}{2\sqrt{2}},\ \forall x \in (\sqrt{3}; +\infty).$$

Bây giờ đặt $a = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$. Với $n \in \mathbb{N}^*$ tùy ý ta chỉ ra

$$|x_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x_n - a|.$$

Thật vậy nếu $x_n = a$ thì x_{n+1} cũng bằng a, bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng; còn nếu $x_n \neq a$ thì theo định lý Lagrange tồn tại $c_n \in (x_n; a)$ (trong trường hợp $\sqrt{3} < x_n < a$) hoặc $(a; x_n)$ (trong trường hợp $x_n > a > \sqrt{3}$) thỏa mãn

$$|x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)| = |f'(c_n)|.|x_n - a| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x_n - a|.$$

Từ đó dễ thấy

$$|x_{n+1} - a| \leq (\frac{1}{2\sqrt{2}})^n |x_1 - a|, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

mà $\lim(\dfrac{1}{2\sqrt{2}})^n|x_1 - a| = 0$ nên $\lim x_n = a = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$.

Bài 1.5 (ĐH Hàng Hải Việt Nam, H.V. Hùng)**.** Từ giả thiết suy ra rằng

$$x_{n+1} - x_n = 2021 - 2022x_n \iff x_{n+1} + 2021x_n = 2021 \quad (\forall n \geq 1).$$

Vậy dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là nghiệm của phương trình sai phân cấp 1

$$x_{n+1} + 2021x_n = 2021, x_1 = -1 \tag{2}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân

$$x_{n+1} + 2021x_n = 2021 \tag{3}$$

có dạng

$$x_n = C.(-2021)^n + x_n^*$$

trong đó $x_n^* = a = \text{const}$ là một nghiệm riêng của phương trình (3). Thay $x_n^* = a$ vào phương trình (3) để tìm giá trị của a ta được $2022a = 2021 \iff a = \dfrac{2021}{2022}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (3) là $x_n = C(-2021)^n + \dfrac{2021}{2022}$. Dùng điều kiện ban đầu $x = -1$ ta có

$$-1 = C.(-2021) + \frac{2021}{2022} \Rightarrow C = \frac{4043}{4086462}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (2) là $x_n = -\dfrac{4043}{2022}(-2021)^{n-1} + \dfrac{2021}{2022} = \dfrac{2021}{2022}(1 + 4043(-2021)^{n-2})$. Từ đó ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+2}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2021}{2022}(1 + 4043.(-2021)^n)}{\dfrac{2021}{2022}(1 + 4043.(-2021)^{n-2})} = 2021^2 = 4084441.$$

Bài 1.6 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ, T.A. Tuấn)**.** Theo giả thiết:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = n^2 a_n. \tag{4}$$

Từ giả thiết ta có:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = n^2 a_{n-1}.$$

Kết hợp với (4) ta có:

$$\begin{aligned} &(n-1)^2 a_{n-1} + a_n = n^2 a_n \\ &\Leftrightarrow (n-1)^2 a_{n-1} = a_n(n^2 - 1) \\ &\Leftrightarrow a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1} (\forall n > 1). \end{aligned}$$

Vậy

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} . \frac{n-2}{n} . \frac{n-3}{n-1} \cdots \frac{2}{4} . \frac{1}{3} . a_1 = \frac{2a_1}{n(n+1)}.$$

Do đó

$$a_{2021} = \frac{2.2021}{2021.2022} = \frac{2}{2022} = \frac{1}{1011}.$$

Bài 1.7 (ĐH Kiến trúc)**.** a) Dùng qui nạp tính được $x_n = a^{2^{n-1}} + \dfrac{1}{a^{2^{n-1}}}$.

b) Dùng Cô-si thì $x_n > 2$ (không xảy ra dấu "=").
Khi đó $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n - 2 = (x_n + 1)(x_n - 2) > 0$. Dãy tăng ngặt.
Nếu tồn tại $\lim x_n = b$ hữu hạn thì $b > 2$ và chuyển qua giới hạn ta được $b = b^2 - 2 \Rightarrow b = -1$ hoặc $b = 2$ (vô lý). Vậy dãy không bị chặn.

c) Tính giới hạn $L = \lim \dfrac{x_{n+1}^2}{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdots x_n^2}$.
- Ta có

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 4 &= (x_n^2 - 2)^2 - 4 = x_n^2(x_n^2 - 4) = x_n^2 x_{n-1}(x_{n-1}^2 - 4) \\ &= \cdots = x_n^2 x_{n-1}^2 \ldots x_2^2 x_1^2 (x_1^2 - 4). \end{aligned}$$

- Suy ra $\dfrac{x_{n+1}^2}{x_1^2x_2^2\dots x_n^2} = x_1^2 - 4 + \dfrac{4}{x_1^2x_2^2\dots x_n^2}$.
- Mặt khác do dãy (x_n) tăng nên $0 < \dfrac{4}{x_1^2x_2^2\dots x_n^2} < \dfrac{4}{(x_1^2)^n} = \dfrac{4}{2021^n}$.

Theo giới hạn kẹp thì $\lim \dfrac{4}{x_1^2x_2^2\dots x_n^2} = 0$.

Vậy $\lim \dfrac{x_n^2}{x_1^2x_2^2\dots x_n^2} = x_1^2 - 4 = 2017$.

Bài 1.8 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn)**.** Ký hiệu $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ và $c_n = b_n - n - \ln n$.

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_n - a_n^2} = \frac{b_n^2}{b_n - 1} = b_n + 1 + \frac{1}{b_n - 1}.$$

Như vậy dãy b_n tăng ngặt. Bằng quy nạp, ta có thể chứng minh được rằng

$$n + 2 < b_n < n + \ln n + 2.$$

Khi đó

$$c_{n+1} - c_n = b_n + 1 + \frac{1}{1 - b_n} - (n+1) - \ln(n+1) - (b_n - n - \ln n) =$$

$$= \frac{1}{b_n - 1} - [\ln(n+1) - \ln n]$$

Theo định lý về các giá trị trung bình

$$\ln(n+1) - \ln n = f'(n+\theta) = \frac{1}{n+\theta}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Tức là

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

Thêm vào đó

$$\frac{1}{n + \ln n + 1} < \frac{1}{b_n - 1} < \frac{1}{n+1},$$

nên $c_{n+1} - c_n < 0$. Tức là c_n giảm dần.
Ta sẽ chứng minh c_n bị chặn dưới. Ta có

$$0 < c_k - c_{k+1} = \ln(k+1) - \ln k - \frac{1}{b_k - 1} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k + \ln k + 1}$$

$$< \frac{\ln k + 1}{k^2} < \frac{1}{k^{3/2}} + \frac{1}{k^2}.$$

Như vậy
$$0 < c_k - c_{k+1} < \frac{1}{k^{3/2}} + \frac{1}{k^2}.$$
Cộng tất cả các bất đẳng thức cho tất cả các giá trị từ k tới $n-1$, ta thu được
$$0 < c_3 - c_n < \sum_{k=3}^{n-1}\left(\frac{1}{k^{3/2}} + \frac{1}{k^2}\right).$$
Vì cả hai dãy ở vế phải của bất đẳng thức đều hội tụ nên tồn tại số S sao cho $0 < c_3 - c_n$<s. Tức là c_n chị chặn dưới.

Bài 1.9 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). a) Ta có
$$a_n = \sqrt[3]{a_{n-1}^2 - 8} \geq \sqrt[3]{-8} = -2, \quad \forall n \geq 1. \tag{5}$$
Chú ý rằng $a_1 = \sqrt[3]{-8} = -2 < 0$. Giả sử $a_k \leq 0$ với $\forall k \in \mathbb{N}^*, k > 1$. Từ kết quả trên, ta được
$$-2 \leq a_k \leq 0 < 2.$$
Từ đây, ta suy ra $a_k^2 < 4$. Do đó
$$a_{k+1}^3 = a_k^2 - 8 < 4 - 8 = -4 < 0 \Leftrightarrow a_{k+1} < 0.$$
Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta được
$$a_n \leq 0 \quad \text{với} \quad \forall n \geq 1. \tag{6}$$
Từ (1) và (2), ta được
$$-2 \leq a_n \leq 0 < 2 \quad \text{với} \quad \forall n \geq 1.$$
Vì vậy, $a_n^2 \leq 4$, $\forall n \geq 1$. Chú ý rằng $a_1 = -2 \leq -\sqrt[3]{4}$. Hơn nữa, với $\forall n \geq 2$, ta có
$$a_{n+1}^3 = a_n^2 - 8 < 4 - 8 = -4 \Leftrightarrow a_{n+1} < -\sqrt[3]{4}.$$
Vậy
$$-2 \leq a_n \leq -\sqrt[3]{4} \quad \text{với} \quad \forall n \geq 1.$$
b) Ta thấy rằng
$$\begin{aligned}\left(a_{n+2}^2 + a_{n+2}a_{n+1} + a_{n+1}^2\right) \cdot |a_{n+2} - a_{n+1}| &= \\ = \left|a_{n+2}^3 - a_{n+1}^3\right| = \left|\left(a_{n+1}^2 - 8\right) - \left(a_n^2 - 8\right)\right| &= \\ = |a_{n+1} + a_n| \cdot |a_{n+1} - a_n|&.\end{aligned}$$
với $\forall n \in \mathbb{N}$. Từ kết quả phần a), ta có
$$a_{n+2}^2 + a_{n+2}a_{n+1} + a_{n+1}^2 \geq 3 \cdot 4^{2/3},$$

và

$$|a_{n+1} + a_n| \leq 4.$$

Do đó, ta được

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{\sqrt[3]{4}}{3} |a_{n+1} - a_n| \quad \text{với} \quad \forall n \geq 1.$$

c) Sử dụng kết quả phần b, ta được

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{\sqrt[3]{4}}{3} |a_n - a_{n-1}| \leq \cdots \leq \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)^{n-1} |a_2 - a_1|.$$

Vì thế, với mọi $n, p \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &\leq \sum_{k=1}^{p} |a_{n+k} - a_{n+k-1}| \leq \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)^{n+k-2} |a_2 - a_1| \\
&= \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)^{n-1} |a_2 - a_1| \cdot \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)^{k-1} \\
&\leq \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)^{n-1} |a_2 - a_1| \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt[3]{4}}{3}} \to 0 \text{ khi } n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Vậy, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ là một dãy Cauchy nên nó hội tụ. Đặt $v = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ thì từ phần a, ta suy ra

$$-2 \leq v \leq -\sqrt[3]{4}.$$

Chuyển công thức truy hồi qua giới hạn, ta được

$$v^3 - v^2 + 8 = 0.$$

Xét hàm số

$$f(x) = x^3 - x^2 + 8$$

với $\forall x \in [-2, -\sqrt[3]{4}]$. Khi đó, ta có

$$f'(x) = 3x^2 - 2x > 0, \quad \forall x \in (-2, -\sqrt[3]{4}).$$

Do đó, $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $(-2, -\sqrt[3]{4})$. Chú ý rằng $f(-2) \cdot f(-\sqrt[3]{4}) < 0$ nên theo định lý giá trị trung gian phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên $[-2, -\sqrt[3]{4}]$. Từ hai kết quả này ta thấy rằng phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất trên $[-2, -\sqrt[3]{4}]$. Ta được điều phải chứng minh.

Bài 1.10 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Xét hàm số $f(x) = \ln x$, với $m \in \mathbb{N}^*$ bất kì. Từ định lí Lagrange tồn tại $m < b < m+1$ mà

$$f(m+1) - f(m) = f'(b) = \frac{1}{b} > \frac{1}{m+1}.$$

Từ đó, ta được

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} < \sum_{i=1}^{n} (\ln(n+i) - \ln(n+i-1)) = \ln 2n - \ln n = \ln 2. \quad (7)$$

Mặt khác, xét hàm số $g(x) = e^x$, với $x \in \mathbb{R}, x > 0$. Từ định lí Lagrange tồn tại $0 < c < x$ thỏa mãn

$$g(x) - g(0) = g'(c) \cdot (x - 0) \Rightarrow e^x - 1 = e^c \cdot x > x.$$

Từ đó, ta có

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{a_k}}{n+k+1} < \sum_{k=0}^{n-1} e^{a_k} \left(e^{\frac{1}{n+k+1}} - 1\right) = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{a_{k+1}} - e^{a_k}) = e^{a_n} - e^{a_0} = e^{a_n} - 1. \quad (8)$$

Đặt

$$h(x) = e^x - 1 + (\ln 2 - x)e^x, 0 \le x \le \ln 2.$$

Chú ý rằng

$$h'(x) = e^x - e^x + (\ln 2 - x)e^x = (\ln 2 - x)e^x > 0$$

với $\forall x \in (0; \ln 2)$. Suy ra $h(x)$ là hàm đồng biến trên $(0; \ln 2)$. Kết hợp điều này với (7) và (8), ta được điều phải chứng minh.

Bài 1.11 (Trường ĐH Sư phạm - ĐH Huế, N.V. Hạnh)**.** Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $x_n \ge \sqrt{3}/2$ với mọi $n \ge 2$. Bằng qui nạp ta chứng minh được $\sqrt{3}/2 \le x_n < \sqrt{3}$ với mọi $n \ge 2$. Ta có

$$x_{n+2} = \frac{1}{16}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right) + \frac{3}{x_n + \frac{3}{x_n}}.$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{1}{16}\left(x + \frac{3}{x}\right) + \frac{3}{x + \frac{3}{x}}$$

với $x \in [\sqrt{3}/2; \sqrt{3})$. Ta có $f'(x) > 0$ với mọi $x \in [\sqrt{3}/2; \sqrt{3})$.
Bằng tính toán trực tiếp ta có $x_5 > x_3$ và $x_4 < x_2$ nên dãy con $\{x_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ đơn điệu tăng và dãy con $\{x_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ đơn điệu giảm. Do đó các dãy con này có giới

hạn. Gọi $A = \lim_{k\to\infty} x_{2k}$ và $B = \lim_{k\to\infty} x_{2k+1}$. Khi đó ta có $\sqrt{3}/2 \le A, B \le \sqrt{3}$ và hệ phương trình

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4}(B + 3/B),\\ B &= \frac{1}{4}(A + 3/A). \end{aligned}$$

Từ hệ trên ta suy ra $A = B$. Do đó dãy số đã cho là hội tụ. Giải phương trình $A = \dfrac{1}{4}(A + 3/A)$ ta thu được $A = \pm 1$. Suy ra $\lim x_n = 1$.

Bài 1.12 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ). Đặt

$$y_{n+1} = x_{n+1} - 4 = \frac{1}{4}x_n - 1 = \frac{1}{4}(x_n - 4) = \frac{1}{4}y_n.$$

Nên y_n là một cấp số nhân với công bội

$$q = \frac{1}{4},\ y_1 = x_1 - 4 = 1$$

$$\Rightarrow y_n = y_1 q^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

Từ đó:

$$x_n = y_n + 4 = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 4$$

Vậy

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = 4.$$

Bài 1.13 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ). Ta có

$$u_n = (n^2 + 2n + 2)(n + 1)! = (n^2 + 3n + 2 - n)(n + 1)!$$

$u_n = (n + 1)(n + 2)(n + 1)! - n(n + 1)! = (n + 1)(n + 2)! - n(n + 1)!$
Do đó

$$S = 1.2! - 0.1! + 2.3! - 1.2! + ... + 2022.2023! - 2021.2022! = 2022.2023!$$

Bài 1.14 (ĐH Trà Vinh, P.M. Triển). Cho dãy số (x_n) xác định theo hệ thức sau:

$$x_1 = 2,\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = n^2 x_n,\ n \ge 2$$

Tính x_{2022}.
Từ công thức truy hồi, thay n bởi $n + 1$, ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n+1} = (n + 1)^2 x_{n+1}$$

Suy ra $n^2x_n + x_{n+1} = (n+1)^2x_{n+1} \Leftrightarrow nx_n = (n+2)x_{n+1} \Leftrightarrow x_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}x_n$.
Lấy tích 2 vế, ta có

$$\prod_{i=1}^{n} x_{i+1} = \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+2}x_i \Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{n!}{(n+2)!/(1.2)}x_1 = \frac{4}{(n+1)(n+2)}$$

Suy ra $x_n = \dfrac{4}{n(n+1)}$. Nên $x_{2022} = \dfrac{4}{2022.2023}$.

Bài 1.15 (ĐH Trà Vinh, C.H. Hoà). Cho hai dãy số (x_n) và (y_n) xác định bởi công thức:

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3},\ x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2},\ y_{n+1} = \frac{1}{1+\sqrt{1+y_n^2}},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Chứng minh rằng $x_ny_n \in (2;3)$ với $n = 2, 3, 4, \ldots$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.
Đặt $x_1 = \cot a = \sqrt{3}, a = \dfrac{\pi}{6}$, ta có

$$\begin{aligned} x_2 = \cot a + \sqrt{1+\cot^2 a} = \cot a + \frac{1}{\sin a} = \frac{\cos a + 1}{\sin a} = \frac{2\cos^2\frac{a}{2}}{2\sin\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2}} \\ = \cot\frac{a}{2} = \cot\frac{\pi}{12} = \cot\frac{\pi}{2^2 3}. \end{aligned}$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được rằng $x_n = \cot\dfrac{\pi}{2^n 3}, n \geq 1$.
Tương tự: Đặt $y_1 = \tan b = \sqrt{3}, b = \dfrac{\pi}{3}$, ta có

$$y_2 = \frac{\tan b}{1+\sqrt{1+\tan^2 b}} = \frac{\tan b}{1+\frac{1}{\cos b}} = \frac{\sin b}{1+\cos b} = \frac{2\sin\frac{b}{2}.\cos\frac{b}{2}}{2\cos^2\frac{b}{2}} = \tan\frac{b}{2} = \tan\frac{\pi}{3.2}.$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được rằng $y_n = \tan\dfrac{\pi}{2^{n-1}3}, n \geq 1$.
Từ đó suy ra

$$x_ny_n = \cot\frac{\pi}{2^n 3}\tan\frac{\pi}{2^{n-1}3} = \cot\frac{\pi}{2^n 3}.\frac{2\tan\frac{\pi}{2^n 3}}{1-\tan^2\frac{\pi}{2^n 3}} = \frac{2}{1-\tan^2\frac{\pi}{2^n 3}}, \forall n \geq 1.$$

Ta thấy $\tan^2\dfrac{\pi}{2^n 3} > 0$; $\tan^2\dfrac{\pi}{2^n 3} < \tan^2\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{3}$, nên $x_ny_n \in (2;3)$; $\forall n = 2, 3, 4, \ldots$
Và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \tan\dfrac{\pi}{2^{n-1}3} = 0$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 1.16 (HV Phòng không Không quân, P.H. Quân). 1. Trước hết, ta thấy rằng $a_n > 0$ và $b_n > 0$ với mọi n. Quan sát thấy rằng

$$x_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{a_n + b_n} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}|x_{n+1} - \sqrt{2}| =& \frac{\sqrt{2} - 1}{x_n + 1}|x_n - \sqrt{2}| \\ \leq& (\sqrt{2} - 1)|x_n - \sqrt{2}| \\ <& \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}|.\end{aligned}$$

Như vậy, ta có điều cần phải chứng minh.

2. Dựa vào phần trước, ta sử dụng công thức quy nạp ta có

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| < \frac{1}{2^n}|x_1 - \sqrt{2}|.$$

Ta suy ra ngày $|x_{n+1} - \sqrt{2}| \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó, giới hạn dãy số cần tìm là $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = \sqrt{2}$.

2 CHUỖI SỐ

Bài 2.1 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên). a) Theo đề bài, ta có $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a_n}{a_n^2 - a_n + 1} \leq 1$ (vì $a_n^2 - 2a_n + 1 \geq 0$).

Vậy $\{a_n\}$ là dãy đơn điệu giảm.

Mặt khác $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1} > 0$ nên tồn tại $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l > 0$.

— Nếu $a_1 \geq 1$ thì theo quy nạp $a_n \geq 1$, $\forall n$ nên $l \geq 1$. Cho $n \to +\infty$, ta có

$$l = \frac{l^2}{l^2 - l + 1} \Leftrightarrow l^3 - 2l^2 + l = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} l = 0 & \text{(loại)} \\ l = 1 & \end{array}\right.$$

Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1$.

— Nếu $0 < a_1 < 1$ thì theo quy nạp $a_n < 1$, $\forall n$. Dãy đơn điệu giảm nên $l < 1$. Cho $n \to +\infty$, ta có

$$l = \frac{l^2}{l^2 - l + 1} \Leftrightarrow l^3 - 2l^2 + l = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} l = 0 & \\ l = 1 & \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

b) Ta có $a_{n+1} - 1 = \dfrac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1} - 1 = \dfrac{a_n - 1}{a_n^2 - a_n + 1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a_{n+1} - 1} = \dfrac{a_n^2 - a_n + 1}{a_n - 1} = \dfrac{a_n^2 - a_n}{a_n - 1} + \dfrac{1}{a_n - 1} = a_n + \dfrac{1}{a_n - 1}$

$\Rightarrow a_n = \dfrac{1}{a_{n+1} - 1} - \dfrac{1}{a_n - 1}$.

Do đó $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \dfrac{1}{a_n - 1} - \dfrac{1}{a_1 - 1} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a_n - 1} - \dfrac{1}{a_1 - 1}$.

— Nếu $a_1 < 1$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ nên $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = -1 - \dfrac{1}{a_1 - 1} = \dfrac{a_1}{1 - a_1}$.

— Nếu $a_1 \geq 1$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ nên $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ (chuỗi phân kỳ).

Bài 2.2 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn)**.** Theo công thức Taylor

$$n!e = n! + n! + \frac{n!}{2} + \ldots + \frac{e^\theta}{n+1}.$$

Trong đó $0 < \theta < 1$. Xét vế phải, tất cả các số hạng, trừ số hạng cuối cùng, đều là số nguyên. Số hạng cuối cùng nhỏ hơn một khi $n \geq 2$ và vì $\theta \in (0, 1)$. Vì thế

$$n!e - [n!e] = \frac{e^\theta}{n+1}.$$

Tức là

$$2021(2020!e - [2020!e]) < e^\theta < e < \pi.$$

Bài 2.3 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ)**.** Sử dụng tiêu chuẩn Đa lăm be, chứng tỏ chuỗi hội tụ trong $(-1; 1)$ Gọi $S(x)$ là tổng của chuỗi trong $(-1; 1)$.
Với mọi $x \in (-1; 1)$, ta có

$$S'(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}(2x)^{2n-1}$$

$$S''(x) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n-2)!}(2x)^{2n-2}.$$

Từ đó $(1 - x^2)S''(x) - xS'(x) = 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2}S''(x) - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}S'(x) = \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1 - x^2}S'(x)\right)' = \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Do đó với $x \in (-1; 1)$,

$$S'(x) = 4\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow S(x) = 2(\arcsin x)^2 + C\arcsin x + D$$

Dễ thấy:

$$S'(x) = 4\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow S(x) = 2(\arcsin x)^2 + C\arcsin x + D.$$

Từ $S'(0) = S(0) = 0 \Rightarrow C = 0 = D$.
Vậy nên $S(x) = 2(\arcsin x)^2,\ x \in (-1; 1)$.

Bài 2.4 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh). Xét

$$x_{n+1} - 3 = \frac{x_n^4 + 9}{x_n^3 - x_n + 6} - 3 = \frac{(x_n - 3)\left(x_n^3 + 3\right)}{(x_n^3 + 3) - (x_n - 3)} \qquad (*)$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được $x_n > 3, \forall n \geq 1$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(x_n - 3)^2}{(x_n^3 + 3) - (x_n - 3)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Do đó $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tăng ngặt.
Giả sử (x_n) bị chặn trên, tức là $\exists a \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to+\infty} (x_n) = a$ với $a > 4$.

Theo đề ta có

$$x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 9}{x_n^3 - x_n + 6}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (x_{n+1}) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x_n^4 + 9}{x_n^3 - x_n + 6}\right) \Leftrightarrow a = \frac{a^4 + 9}{a^3 - a + 6} \Leftrightarrow a = 3$$

$a = 3$ mâu thuẫn (vì $a > 4$). Vậy (x_n) không bị chăn trên.

Từ $(*) \Rightarrow \dfrac{1}{x_{n+1} - 3} = \dfrac{1}{x_n - 3} - \dfrac{1}{x_n^3 + 3}$

Do đó $\dfrac{1}{x_n^3 + 3} = \dfrac{1}{x_n - 3} - \dfrac{1}{x_{n+1} - 3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{x_1^3 + 3} + \frac{1}{x_2^3 + 3} + \frac{1}{x_3^3 + 3} + \ldots + \frac{1}{x_n^3 + 3}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{x_1 - 3} - \frac{1}{x_2 - 3} + \frac{1}{x_2 - 3} - \frac{1}{x_3 - 3} + \ldots + \frac{1}{x_n - 3} - \frac{1}{x_{n+1} - 3}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{x_1 - 3} - \frac{1}{x_{n+1} - 3}\right)$$

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x_1 - 3} - \dfrac{1}{x_{n+1} - 3}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x_1 - 3}\right) = 1.$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x_1^3 + 3} + \dfrac{1}{x_2^3 + 3} + \dfrac{1}{x_3^3 + 3} + \ldots + \dfrac{1}{x_n^3 + 3}\right) = 1.$

3 HÀM SỐ

Bài 3.1 (ĐH Bách khoa - ĐHQG Tp. HCM, P.T. Thực). 1. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại $a \in (0,1)$ sao cho

$$f"(t) > \frac{2021}{a^2}, \quad \text{với mọi } t \in [0,a].$$

Dẫn đến

$$\int_0^x f"(t)\,dt \geq \int_0^x \frac{2021}{a^2}dt, \quad \forall x \in [0,a].$$

Ta được

$$f'(x) - f'(0) \geq \frac{2021}{a^2}x \quad \Rightarrow \quad f'(x) \geq \frac{2021}{a^2}x, \quad \forall x \in [0,a].$$

Bất đẳng thức cuối có được vì $f'(0) \geq 0$. Đặc biệt, từ bất đẳng thức cuối ta có

$$f'(a) \geq \frac{2021}{a}.$$

Từ $f"(x) \geq 0$ ta cũng có $f'(x) \geq f'(a)$, với mọi $x \in [a,1]$. Dẫn đến

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f'(x)\,dx &= \int_0^a f'(x)\,dx + \int_a^1 f'(x)\,dx \\
&\geq \int_0^a \frac{2021}{a^2}x\,dx + \int_a^1 f'(a)\,dx \\
&\geq \frac{2021}{2} + \int_a^1 \frac{2021}{a}dx \\
&= \frac{2021}{a} - \frac{2021}{2} \\
&\geq \frac{2021}{2}.
\end{aligned}$$

Ta nhận được mâu thuẫn vì vế trái bằng $f(1) - f(0) \leq f(1) \leq \dfrac{2021}{3}$.

2. Xét hàm số

$$g(x) = \frac{x}{1 - \ln\left(\frac{x}{2} + \varepsilon\right)},$$

với $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ khá nhỏ và sẽ xác định cụ thể sau. Rõ ràng hàm số g có đạo hàm liên tục tới cấp hai trên đoạn $[0,1]$. Thêm nữa

$$g'(x)=\frac{x}{(x+2\varepsilon)\left(1-\ln\left(\frac{x}{2}+\varepsilon\right)\right)^2}+\frac{1}{1-\ln\left(\frac{x}{2}+\varepsilon\right)}>0,\quad \forall x\in[0,1],$$

$$g"(x)=\frac{3x+4\varepsilon-(x+4\varepsilon)\ln\left(\frac{x}{2}+\varepsilon\right)}{(x+2\varepsilon)^2\left(1-\ln\left(\frac{x}{2}+\varepsilon\right)\right)^3}>0,\quad \forall x\in[0,1].$$

Ta cũng có $0\le g(x)\le 1$, với mọi $x\in[0,1]$. Từ công thức của $g"$ ta có

$$g"(t)\ge\frac{4\varepsilon}{(\varepsilon+2\varepsilon)^2(1-\ln(\varepsilon))^3},\quad \forall t\in[0,\varepsilon].$$

Cuối cùng vì

$$\frac{4}{9\varepsilon(1-\ln(\varepsilon))^3}>\frac{2021}{\sqrt{\varepsilon}}\tag{1}$$

với ε đủ nhỏ, tức là tồn tại ε_0 sao cho (1) đúng với mọi $\varepsilon\le\varepsilon_0$. Ta đi đến điều cần chứng minh bởi chọn $a=\varepsilon_0$.

Bài 3.2 (ĐH Bách khoa - ĐHQG Tp. HCM, P.T. Thực). Để khẳng định yêu cầu bài toán, rõ ràng ta chỉ cần chỉ ra trên mỗi đoạn con $[x_1,x_2]$ (với $x_1<x_2$) bất kỳ của khoảng $(-2021,2021)$, hàm số $f(x)$ phải có dạng một đa thức bậc hai $1011x^2+ax+b$.

Gọi $p(x)$ là đa thức bậc hai có dạng $1011x^2+ax+b$ sao cho $p(x_1)=f(x_1)$ và $p(x_2)=f(x_2)$. Dễ thấy tồn tại và duy nhất một đa thức như vậy bởi vì hệ phương trình

$$\begin{aligned}1011x_1^2+ax_1+b&=f(x_1)\\1011x_2^2+ax_2+b&=f(x_2)\end{aligned}$$

luôn tồn tại và duy nhất nghiệm (a,b).

Bây giờ ta chỉ cần chỉ ra $f(x)=p(x)$, với mọi $x\in[x_1,x_2]$. Điều này có thể thực hiện bằng phản chứng.

— *Trường hợp 1.* Giả sử tồn tại $t\in(x_1,x_2)$ sao cho $f(t)>p(t)$.
Chọn $\varepsilon>0$ sao cho $f(t)-p(t)+\varepsilon(t-x_1)(t-x_2)>0$. Ta luôn chọn được ε như vậy vì $f(t)-p(t)>0$. Tuy nhiên khi đó hàm số $f(x)-(p(x)-\varepsilon(x-x_1)(x-x_2))$ sẽ có cực đại địa phương tại một điểm x_0 nào đó thuộc khoảng $(-2021,2021)$. Điều này có được vì tại hai đầu mút x_1 và x_2 thì hàm số triệt tiêu, và tại $t\in(x_1,x_2)$ thì hàm số đạt giá trị dương. Do đó giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[x_1,x_2]$ xảy ra tại một điểm thuộc khoảng (x_1,x_2).
Đến đây ta có mâu thuẫn vì đạo hàm cấp hai của parabol $p(x)-\varepsilon(x-x_1)(x-x_2)$ tại x_0 nhỏ hơn 2022, trái với giả thiết bài toán.

— *Trường hợp 2.* Giả sử tồn tại $t \in (x_1, x_2)$ sao cho $f(t) < p(t)$. Ta lập luận một cách tương tự bằng việc chọn $\varepsilon > 0$ sao cho $f(t) - p(t) - \varepsilon(t - x_1)(t - x_2) < 0$. Từ đó kết luận rằng hàm số $f(x) - (p(x) + \varepsilon(x - x_1)(x - x_2))$ sẽ có cực tiểu địa phương tại một điểm x_0 nào đó thuộc khoảng $(-2021, 2021)$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Bằng việc xét hai trường hợp như trên, ta có điều phải chứng minh.

Ghi chú. Nếu bài toán cho giả thiết hàm số f là khả vi liên tục tới cấp hai thì lời giải có thể dễ dàng thấy được bằng khai triển Taylor. Tuy nhiên ở đây ta chỉ yêu cầu f là hàm liên tục.

Bài 3.3 (ĐH Bách khoa - ĐHQG Tp. HCM, P.T. Thực). Gọi x và y lần lượt là cạnh của hình vuông và bán kính của hình tròn (đơn vị mét). Theo giả thiết bài toán ta có $x^2 + \pi y^2 = 2022$. Độ dài của đoạn dây ban đầu là $4x + 2\pi y$. Do đó ta muốn tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x, y) = 4x + 2\pi y$ với ràng buộc $x^2 + \pi y^2 = 2022$. Bài toán này có thể giải quyết bằng phương pháp nhân tử Lagrange hoặc có thể sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki như sau:

$$4x + 2\pi y \leq \sqrt{4^2 + 4\pi}\sqrt{x^2 + \pi y^2} = \sqrt{4^2 + 4\pi} \cdot \sqrt{2022},$$

với dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x}{4} = \frac{y\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}}.$$

Như vậy tỷ lệ giữa cạnh của hình vuông và bán kính của hình tròn là 2 nếu ta muốn độ dài của đoạn dây ban đầu là lớn nhất.
Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn dây thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\sqrt{4^2 + 4\pi} \cdot \sqrt{2022}$ (m).

Bài 3.4 (ĐH Đà Lạt, Đ.T. Hiệp). Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, xét hàm số

$$g_n(x) = e^{\frac{-2021x}{n}} f(x).$$

Khi đó, $g_n(x)$ là khả vi trên $[a, b]$ và $g_n(a) = g_n(b) = 0$. Theo Định lý Rolle, tồn tại $x_n \in (a, b)$ sao cho $g_n'(x_n) = 0$.
Mặt khác, ta có

$$g_n'(x) = e^{\frac{-2021x}{n}} [f'(x) - \frac{2021}{n} f(x)].$$

Do đó, từ $g_n'(x_n) = 0$ ta nhận được

$$f'(x_n) - \frac{2021}{n} f(x_n) = 0,$$

tức là

$$\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} = \frac{2021}{n}.$$

Ta cũng có

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e} - 1) = 1.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(x_n)}{(\sqrt[n]{e} - 1)f(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2021}{n(\sqrt[n]{e} - 1)} = 2021.$$

Bài 3.5 (ĐH Đà Lạt, Đ.T. Hiệp)**.** Xét hàm số

$$g(x) = e^{-x}f(x).$$

Khi đó, hàm số $g(x)$ liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trong $(0, 1)$ và thỏa mãn

$$g(0) = g(1) = 0.$$

Theo Định lý Rolle, tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $g'(c) = 0$.
Ta cũng có

$$g'(x) = [f'(x) - f(x)]e^{-x}.$$

Do đó, ta nhận được

$$f'(c) = f(c).$$

Bài 3.6 (ĐH Đồng Tháp)**.**

1. Áp dụng Định lý giá trị trung bình Lagrange cho hàm $f(x)$ trên $[a, b]$, tồn tại $c_1 \in (a, b)$ sao cho

   $$f'(c_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

   Áp dụng Định lý giá trị trung bình Cauchy cho hai hàm $f(x)$ và $g(x) := (b - x)f(x)$ trên $[a, b]$, tồn tại $c_1 \in (a, b)$ sao cho

   $$\frac{f'(c_2)}{g'(c_2)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

   Điều này tương đương với

   $$\frac{f'(c_2)}{-f(c_2) + (b - c_2)f'(c_2)} = \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)f(a)} = \frac{f'(c_1)}{f(a)}.$$

   Do đó:

   $$\frac{f(a)f'(c_2) + f(c_2)f'(c_1)}{b - c_2} = f'(c_1)f'(c_2).$$

2. Đặt $g(x) = \frac{1}{2}f(x)^2 + f'(x)$. Khi đó $g(0) = 0$. Ta sẽ chứng minh tồn tại $c \in (0,1)$ để $g(c) = 0$.
   Thật vậy, vì $f(x) > 0$ với mọi $x \in [0,1]$ nên hàm $h(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{f(x)}$ xác định $[0,1]$. Khi đó $h(0) = h(1) = -\frac{1}{2}$. Áp dụng định lý Rolle cho hàm số $h(x)$ trên $[0,1]$, ta tìm thấy $c \in (0,1)$ thoả mãn $h'(c) = 0$. Do đó $g(c) = f(c)^2 h'(c) = 0$. Vậy $g(0) = g(c) = 0$.
   Do đó tồn tại $\xi \in (0,c)$ sao cho
   $$g'(\xi) = f(\xi)f'(\xi) + f''(\xi) = 0.$$

Bài 3.7 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên). Gọi khoảng cách từ chân thang đến chân cột đỡ $BD = x$ (m). Ta có $BH = \sqrt{9+x^2}$. Theo định lí Ta - lét, $\frac{BH}{AB} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow AB = \frac{BH \cdot BC}{BD} = \frac{x+0{,}4}{x} \cdot \sqrt{9+x^2}$. Bài toán trở thành tìm $x > 0$ để $f(x) = AB = \frac{x+0{,}4}{x} \cdot \sqrt{9+x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
$f'(x) = -\frac{0,4\sqrt{9+x^2}}{x^2} + \frac{x+0{,}4}{\sqrt{9+x^2}}$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}4\left(9+x^2\right) = x^2(x+0{,}4) \Leftrightarrow x^3 = 3{,}6 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3{,}6}$. Ta có bảng biến thiên

x	0		$\sqrt[3]{3{,}6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\sqrt[3]{3{,}6}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy chiều dài nhỏ nhất của cái thang thỏa mãn yêu cầu là $AB_{\min} = f\left(\sqrt[3]{3{,}6}\right) \approx 5{,}9$m.

Bài 3.8 (ĐH Hàng Hải Việt Nam, H.V. Hùng). Xét hàm $g(x) = e^{-x}.f(x)$. Hàm liên tục trên $[0,+\infty)$, khả vi trên $(0,+\infty)$ và thỏa mãn:
$$g'(x) = e^{-x}.(f'(x) - f(x)) \neq 0 \qquad \forall x \in (0,+\infty).$$
Do tính chất Darboux của đạo hàm ta suy ra $g'(x)$ phải giữ nguyên một dấu trên $(0,+\infty)$. Vậy có hai khả năng:

i. $g'(x) > 0$ với mọi $x \in (0, +\infty)$;
ii. $g'(x) < 0$ với mọi $x \in (0, +\infty)$.

Nếu xảy ra trường hợp i) thì $g(x)$ là hàm thực sự tăng trên $[0; +\infty)$, nói riêng ta có $g(1) > g(0) = f(0) = 0$ và $g(x) > g(1)$ với mọi $x \in (1, +\infty)$. Vậy $f(x) = e^x.g(x) > g(1).e^x$ với mọi $x \in (1, +\infty)$. Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} g(1).e^x = +\infty$ thì ta suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Nếu xảy ra trường hợp ii) thì ta có: $f'(x) - f(x) < 0$ với mọi $x \in (0, +\infty) \Leftrightarrow -f'(x) + f(x) > 0$ với mọi $x \in (0, +\infty)$.

Vậy hàm $h(x) = e^{-x}.(-f(x))$ có đạo hàm $h'(x) = e^{-x}(-f'(x) + f(x)) > 0$ với mọi $x \in (0; +\infty)$. Lý luận tương tự như trường hợp i) ta suy ra:

$$-f(x) = e^x.h(x) > h(1).e^x \text{ với mọi } x \in (1; +\infty) \tag{2}$$

Lại do $h(1) > h(0) = 0$ từ (2) ta nhận được $\lim\limits_{x\to+\infty}(-f(x)) = +\infty$. Tổng hợp các kết quả nhận được ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$.

Bài 3.9 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ, T.A. Tuấn)**.** Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} = a > 0$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(0) + f(1) + \cdots + f(n)}{n} = a$.

Theo định lý giá trị trung bình tồn tại $c_1 \in [0; 1]\,; c_2 \in [1; 2]\,, \ldots, c_n \in [n-1; n]$ sao cho:

$$\int\limits_0^n f(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_1^2 f(x)dx + \cdots + \int\limits_{n-1}^n f(x)dx = f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n).$$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} = a > 0$ nên

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int\limits_0^n f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)}{n} = a.$$

Do đó:

$$A = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{n}{f(0) + f(1) + \cdots + f(n)}\right] . \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n}. \int\limits_0^n f(x)dx\right] = a.\frac{1}{a} = 1.$$

Bài 3.10 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ, T.A. Tuấn)**.** Xét hàm $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$.

Ta có: $F(0) = 0; F'(x) = f(x)$. Và

$$F(1) = \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 xf(x)dx = \int\limits_0^1 xF'(x)dx$$

$$= x.F(x)\ |_0^1 - \int\limits_0^1 F(x)dx = F(1) - \int\limits_0^1 F(x)dx.$$

Do đó

$$\int\limits_0^1 F(x)dx = 0. \tag{3}$$

Mặt khác: vì hàm $F(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên nếu $F(x) > 0, \forall x \in (0;1)$ thì $\int\limits_0^1 F(x)dx > 0$, nếu $F(x) < 0, \forall x \in (0;1)$ thì $\int\limits_0^1 F(x)dx < 0$, trái với (3).

Vậy tồn tại $b \in (0;1)$ để $F(b) = 0$.

Xét hàm $g(x) = x^{2021}F(x)$. Ta có: $g'(x) = 2021.x^{2020}.F(x) + x^{2021}.f(x)$; $g(0) = g(b) = 0$; hàm $g(x)$ liên tục trên $[0;b]$ và khả vi trong $(0;b)$.

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0;b) \subset (0;1)$ sao cho $g'(c) = 0$. Từ đó ta có:

$$2021.c^{2020}.F(c) + c^{2021}.f(c) = 0 \qquad \text{hay} \qquad 2021\int\limits_0^c f(x)dx = -c.f(c).$$

Bài 3.11 (ĐH Kiến trúc). a) $D(x) = (100 - x).x$ và $R(x) = x(100 - x) - x^2 - 40x - 50$.

b) $\max\limits_{[0,100]} R(x) = 400$, xảy ra khi $x = 15$.

c) Áp dụng ý b), công ty nên sản xuất 15 ti vi mỗi tháng.

Bài 3.12 (ĐH Kiến trúc). • Từ $0 \leq \int\limits_0^1 [f'(x) + x^{2020}]^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_0^1 f'(x).x^{2020}\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{4042}$.

• Sử dụng tích phân từng phần cho tích phân thứ hai ta được

$$0 \leq \int\limits_0^1 [f'(x)+x^{2020}]^2\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x + 2f(1) - 4040\int\limits_0^1 f(x)\cdot x^{2019}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4042}.$$

- Kết hợp $f(1) = -\frac{1}{8082}$ ta được

$$0 \leq \int_0^1 [f'(x) + x^{2020}]^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 f'^2(x) \,\mathrm{d}x - 4040 \int_0^1 f(x) \cdot x^{2019} \,\mathrm{d}x \leq 0.$$

Do đó $f'(x) = -x^{2020} \Rightarrow f(x) = -\frac{x^{2021}}{2021} + \frac{6061}{2021.8082}$.

Bài 3.13 (ĐH Kiến trúc). • Xét $I = \int_0^{2021} f(x) \,\mathrm{d}x$. Đặt $t = 2021 - x$ thì $I = \int_0^{2021} f(2021 - x) \,\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I = \int_0^{2021} [f(x) + f(2021 - x)] \,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow I = 0$.

- Xét $g(x) = (2021 - x)^{2021} \cdot \int_0^{2021-x} f(t) \,\mathrm{d}t$ thỏa mãn Định lý Rolle trên $[0; 2021]$ và

$$g'(x) = -2021(2021 - x)^{2020} \cdot \int_0^{2021-x} f(t) \,\mathrm{d}t + (2021 - x)^{2021} f(2021 - x).$$

Áp dụng Định lý Rolle, kết hợp với $f(2021 - c) = -f(c)$ ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.14 (ĐH Mỏ - Địa chất, P. T. Cường). Ta sẽ chứng minh rằng f có ít nhất $n + 1$ nghiệm trong $(0, 1)$.

Với $n = 0$, $\int_0^1 f(x)dx = 0$, khi đó rõ ràng $f(x) = 0$ với giá trị x nào đó.

Bước chuyển $n \longrightarrow n+1$. Giả sử $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Rõ ràng là $g(0) = g(1) = 0$.

Lấy tích phân từng phần, ta tìm được

$$0 = \int_0^1 x^k f(x)dx = -k \int_0^1 x^{k-1} \cdot g(x)dx.$$

Theo giả thiết quy nạp, $g(x)$ có $n + 1$ nghiệm trong $(0, 1)$. Vì 0 và 1 cũng là nghiệm của $g(x)$ (tức nó có tất cả $n + 3$ nghiệm). Từ đây suy ra $f(x)$ có $n + 2$ nghiệm trong $(0, 1)$.

Bài 3.15 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn). Yên ngựa có hai đường thẳng tạo lập

$$\begin{cases} \alpha(x+y) = 2\beta z, \\ \beta(x-y) = \alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(x-y) = 2\beta z, \\ \beta(x+y) = \alpha. \end{cases}$$

Con sâu đầu tiên bò theo đường thẳng đi qua điểm $O(0,0,0)$ trong một họ tới điểm cắt của đường thẳng này với đường thẳng khác chứa điểm $(0,2,0)$ trong họ khác. Sau đó cứ theo đường thẳng này để kết thúc hành trình. Ví dụ: đầu tiên bắt đầu từ điểm $(0,0,0)$ di chuyển theo đường thẳng

$$\begin{cases} y = x, \\ z = 0 \end{cases}$$

tới điểm $(1,1,0)$. Sau đó theo đường thẳng

$$\begin{cases} x - y = z, \\ x + y = 2 \end{cases}$$

tới điểm $(2,0,2)$.

Bài 3.16 (ĐH Mỏ - Địa chất, P. T. Cường). Giả sử

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n, V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 8^n x^n, W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 16^n x^n.$$

Khi đó với $|x| < \dfrac{1}{16}$ có

$$T(x)U(x)V(x)W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{a+b+c+d=n} 2^x 4^b 8^c 16^d \right) x^n$$

Dễ dàng tìm được các tổng

$$T(x) = \frac{1}{1-2x}, U(x) = \frac{1}{1-4x}, V(x) = \frac{1}{1-8x}, W(x) = \frac{1}{1-16x}.$$

Tức

$$T(x)U(x)V(x)W(x) = \frac{1}{(1-2x)(1-4x)(1-8x)(1-16x)} =$$

$$= -\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{1-2x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-4x} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{1-8x} + \frac{64}{21} \cdot \frac{1}{1-6x} =$$

$$= -\frac{1}{12} T(x) + \frac{2}{3} U(x) - \frac{8}{3} V(x) + \frac{64}{21} W(x).$$

Từ đó có

$$\sum_{a+b+c+d=n} 2^x 4^b 8^c 16^d = -\frac{1}{12}2^n + \frac{2}{3}4^n - \frac{8}{3}8^n + \frac{64}{21}16^n$$

Bài 3.17 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Ta có

$$f'(x) = -1 + \frac{2x+a+b}{2\sqrt{(a+x)(b+x)}} = \frac{(\sqrt{a+x}-\sqrt{b+x})^2}{2\sqrt{(a+x)(b+x)}} > 0.$$

Do đó, f là hàm tăng thực sự trên $(0, +\infty)$. Mặt khác, ta có

$$f(0) = \sqrt{ab}$$

và

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2+(a+x)(b+x)}{x+\sqrt{(a+x)(b+x)}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{a+b+\frac{ab}{x}}{1+\sqrt{\left(\frac{a}{x}+1\right)\left(\frac{b}{x}+1\right)}} = \frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

Từ đây, ta được bảng biến thiên của hàm số $f(x)$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\sqrt{ab}$	$\nearrow$	$\frac{a+b}{2}$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned}\sqrt{ab} < \sqrt{ab} + \frac{1}{4}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &= \sqrt{ab} + \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{4} \\ &= \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{4} \\ &= \frac{a+b}{2} - \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{4} \\ &= \frac{a+b}{2} - \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\right)^2 < \frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

Do đó, từ bảng biến thiên của hàm số, ta thấy rằng tồn tại duy một số thực $\alpha \in (0, +\infty)$ sao cho

$$f(\alpha) = \sqrt{ab} + \frac{1}{4}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2.$$

Bài 3.18 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Đặt $HM = x$, $0 < x < 10$. Khi đó, ta có

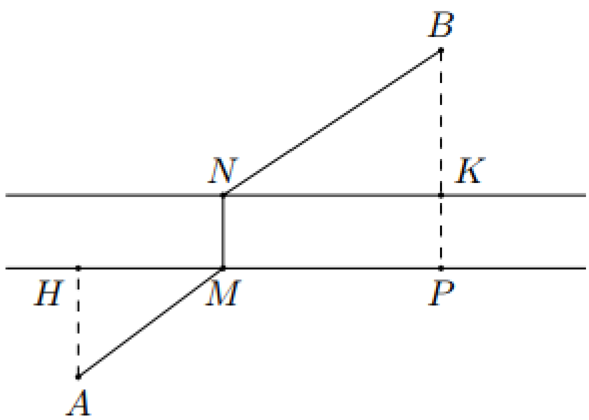
$$NK = MP = 10 - x.$$

Chú ý rằng

$$AM = \sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{x^2 + 9},$$

và

$$BN = \sqrt{BK^2 + NK^2} = \sqrt{28 + (10 - x)^2}.$$



Gọi m là giá thành xây dựng một km đường bên A, suy ra giá thành xây dựng một km bên B là $\frac{16}{15}m$. Vậy giá thành xây dựng hai đoạn đường AM và BN là

$$T = m\sqrt{x^2+9} + \frac{16}{15}m\sqrt{28 + (10-x)^2} = m\left(\sqrt{x^2+9} + \frac{16}{15}\sqrt{28+(10-x)^2}\right).$$

Để giá thành xây dựng thấp nhất thì hàm số

$$f(x) = \sqrt{x^2+9} + \frac{16}{15}\sqrt{28+(10-x)^2}$$

đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{16}{15} \cdot \frac{10-x}{\sqrt{28+(10-x)^2}}.$$

Điều này suy ra

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} &= \frac{16}{15} \cdot \frac{10-x}{\sqrt{28+(10-x)^2}} \\
&\Leftrightarrow 15x\sqrt{28+(10-x)^2} = 16(10-x)\sqrt{x^2+9} \\
&\Leftrightarrow 225x^2\left(128-20x+x^2\right) = 256\left(100-20x+x^2\right)\left(x^2+9\right) \\
&\Leftrightarrow 31x^4 - 620x^3 - 896x^2 - 46080x + 230400 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-4)\left(31x^3 - 496x^2 - 2880x - 57600\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ 31x^3 - 496x^2 - 2880x - 57600 = 0. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng, phương trình $31x^3 - 496x^2 - 2880x - 57600 = 0$ vô nghiệm trên $(0, 10)$. Vậy khi $x = 4$ thì giá thành sẽ nhỏ nhất, khi đó $AM = \sqrt{4^2+9} = 5$km. Như vậy, để chi phí xây cầu ít tốn kém nhất thì điểm M nằm trên bờ sông và cách thành phố A 5 km.

Bài 3.19 (Trường ĐH Sư phạm - ĐH Huế, N.V. Hạnh)**.** Đặt $g(x) = f(x) - x^3$. Ta cần chứng minh $g(x) = g(0)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(a+2t) - g(a+t)}{t} = 0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta cần xét trường hợp $x > 0$. Trường hợp $x < 0$ được chứng minh tương tự.
Với mọi $\varepsilon > 0$, do g liên tục tại 0 và giả thiết giới hạn của hàm g ở trên, nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|g(t) - g(0)| < \varepsilon$ và

$$\left|\frac{g(a+2t) - g(a+t)}{t}\right| < \varepsilon$$

với mọi t, $|t| < \delta$, $a \in [0, x]$. Bây giờ ta chọn $0 < h < \delta$ sao cho $n = x/h \in \mathbb{N}^*$. Đặt $a_0 = 0, a_1 = h, \ldots, a_k = kh, \ldots, a_n = nh = x$. Khi đó ta có

$$|g(x) - g(0)| \le \sum_{k=1}^{n} |g(a_k) - g(a_{k-1})| \le nh\varepsilon = x\varepsilon.$$

Cho $\varepsilon \to 0$ ta có điều cần chứng minh.

Bài 3.20 (Trường ĐH Sư phạm - ĐH Huế, N.V. Hạnh)**.** Từ giả thiết ta suy ra f là đơn ánh. Do f đơn ánh và liên tục nên đơn điệu. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử f đơn điệu tăng. Bây giờ ta cần chứng minh phương trình $f(x) = \lambda$ luôn có nghiệm với mọi λ. Điều này sẽ có được nếu ta chứng tỏ rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Thật vậy, nếu f bị chặn trên thì do f đơn điệu tăng nên tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ hữu hạn. Từ giả thiết ta có

$$|f(x) - f(f(x))| \geq \frac{1}{2}|x - f(x)|.$$

Cho $x \to +\infty$ ta có điều mâu thuẫn. Vậy f không bị chặn trên. Tương tự ta cũng chứng minh được f không bị chặn dưới.

Bài 3.21 (Trường ĐH Sư phạm - ĐH Huế, N.V. Hạnh). Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:
Bổ đề: Cho g là một hàm khả vi đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$ sao cho $g''(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nếu hàm số $g(x)$ bị chặn dưới thì tồn tại $C \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) = C$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Chứng minh bổ đề: Do $g''(x) \leq 0$ với mọi x nên $g'(x)$ là một hàm đơn điệu giảm. Với mọi $a < b < c < d$, Định lý Lagrange suy ra tồn tại $a < \xi_1 < b < \xi_2 < c < \xi_3 < d$ sao cho

$$\frac{g(a) - g(b)}{a - b} = g'(\xi_1) \geq \frac{g(b) - g(c)}{b - c} = g'(\xi_2) \geq \frac{g(c) - g(d)}{c - d} = g'(\xi_3).$$

Giả sử g bị chặn dưới, tức là tồn tại M sao cho $g(x) \geq M$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Lấy bất kỳ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$. Khi đó với mọi $x > |\alpha| + |\beta|$ ta có $-x < \alpha < \beta < x$. Từ nhận xét trên ta thấy

$$\frac{g(-x) - f(\alpha)}{-x - \alpha} \geq \frac{g(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} \geq \frac{g(\beta) - f(x)}{\beta - x}$$

với mọi $x > |\alpha| + |b|$. Kết hợp với giả thiết $g(x) > M$ và $g(-x) > M$ ta có

$$\frac{f(\alpha) - M}{x + \alpha} \geq \frac{g(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} \geq \frac{M - g(\beta)}{x - \beta}.$$

Cho $x \to +\infty$ ta có được $g(\alpha) = g(\beta)$. Do vậy g là hàm hằng.
Chúng ta quay lại bài toán ban đầu, giả sử $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó đặt $g(x) = e^x/f(x)$ với $x \in \mathbb{R}$. Ta có hàm g xác định, bị chặn dưới bởi 0 và khả vi đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$. Hơn nữa

$$g''(x) = \frac{e^x[f(x)^2 - f(x)f''(x) - 2f(x)f'(x) + 2(f'(x))^2]}{f(x)^3} \leq 0$$

mới mọi $x \in \mathbb{R}$. Áp dụng bổ đề trên, ta suy ra $g(x)$ là hàm hằng. Do đó tồn tại C sao cho $f(x) = Ce^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 3.22 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh)**.** Khi $x \neq 0$, ta có

$$f(x) = \ln(1+x^2)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

và

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Xét

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(1+x^2\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Vì $x \to 0$ và $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ bị chặn (bởi 1) nên $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$ và

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}\right) = 1.$$

Do đó

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1.0 = 0.$$

Vậy $f'(0) = 0$.
Xét

$$\lim_{x\to 0}\left(f'(x)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{1+x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\ln\left(1+x^2\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Chọn dãy

$x_n = \dfrac{1}{2n\pi} \to 0$ khi $n \to +\infty$. Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f'\left(x_n\right)\right) = -1 \quad (1)$

$y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0$ khi $n \to +\infty$.Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f'\left(y_n\right)\right) = 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\lim\limits_{x\to 0}\left(f'(x)\right)$ không tồn tại. Do đó hàm số f' không liên tục tại $x = 0$.

Bài 3.23 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh). Xét hàm số $F(x) = f(x) - \sin x$.
Hàm $F(x)$ liên tục trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx - 1 < 0 \to \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) - \sin x]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)dx < 0$$

Do đó, tồn tại $c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ để $F(c) = 0$.
Mà $F(0) = f(0) > 0$ nên tồn tại $c_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ đề $F(c_0) = 0$.
Tức là $F(x) = 0$ có nghiệm.
Vậy $f(x) = \sin x$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 3.24 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ). Giả sử tồn tại $x_1 \in (a; b] : f(x_1) \neq 0$. Từ tính liên tục của hàm f suy ra $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in (\alpha; \beta) \subseteq (a; b]$.
Không mất tính tổng quát giả sử $f(x) > 0$ với

$$x \in (\alpha; \beta); \; f(\alpha) = 0, \; \alpha \geq a; \; f(\beta) > 0.$$

Áp dụng ĐL giá trị trung bình của hàm khả vi $F(x) = \ln(f(x))$ trong $[\alpha + \varepsilon; \beta]$:

$$|\ln(f(\beta)) - \ln(f(\alpha + \varepsilon))| = \left|\frac{f'(\gamma)}{f(\gamma)}\right| (\beta - \alpha - \varepsilon) \leq C(\beta - \alpha - \varepsilon)$$

với $\gamma \in (\alpha + \varepsilon; \beta)$. Cho $\varepsilon \to 0^+$ ta có:$+\infty < C(\beta - \alpha)$, từ đó dẫn tới điều vô lý. Vậy ta được ĐPCM.

Bài 3.25 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ). Từ giả thiết (1) ta có:

$$\begin{cases} f(-2) + 3f(6) = 0 \\ 3f(-2) + f(6) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-2) = \dfrac{3}{8} \\ f(6) = -\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Từ (1) ta cũng có:

$$\int\limits_{-2}^{6} f(x)\,dx + 3\int\limits_{-2}^{6} f(4 - x)\,dx = \int\limits_{-2}^{6} \frac{\sqrt{2 + x}}{\sqrt{2 + x} + \sqrt{6 - x}} dx \quad (2)$$

Đặt $t = 4 - x \Rightarrow \int\limits_{-2}^{6} f(4 - x)\,dx = \int\limits_{-2}^{6} f(t)\,dt = \int\limits_{-2}^{6} f(x)\,dx.$

Xét $A = \int\limits_{-2}^{6} \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{6-x}}dx$

Đặt

$$t = 4 - x \Rightarrow A = \int\limits_{-2}^{6} \frac{\sqrt{6-t}}{\sqrt{6-t}+\sqrt{2+t}}dt = \int\limits_{-2}^{6} \frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{6-x}+\sqrt{2+x}}dx$$

$$\Rightarrow 2A = \int\limits_{-2}^{6} dx = 8 \Rightarrow A = 4.$$

Khi đó (2) trở thành: $\int\limits_{-2}^{6} f(x)\,dx + 3\int\limits_{-2}^{6} f(x)\,dx = 4 \Rightarrow \int\limits_{-2}^{6} f(x)\,dx = 1.$

Vậy

$$I = \int\limits_{-2}^{6} xf'(x)\,dx = xf(x)\,|_{-2}^{6} - \int\limits_{-2}^{6} f(x)\,dx$$

$$I = 6f(6) + 2f(-2) - \int\limits_{-2}^{6} f(x)\,dx = -1.$$

Bài 3.26 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ)**.** Gọi $x \in (0,8)$ là khoảng cách từ D đến C. Ta có

$$BD = \sqrt{144+x^2}, \quad DA = 8 - x.$$

Khi đó giá thành xây dựng đường ống là

$$y = 8 - x + 2,6\sqrt{144+x^2}$$

$$\Rightarrow y' = -1 + \frac{2,6x}{\sqrt{144+x^2}} = \frac{2,6x - \sqrt{144+x^2}}{\sqrt{144+x^2}} = \frac{5,76x^2 - 144}{(2,6x+\sqrt{144+x^2})\sqrt{144+x^2}}$$

Từ đó : $y' = 0 \Rightarrow x = 5$ và đổi dấu - sang + nên y đạt cực tiểu.
Vậy điểm D cách A là 3 km.

Bài 3.27 (ĐH Trà Vinh, P.M. Triển)**.** Chứng minh rằng hàm số $f(x) = x^{x^x}$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0.$

Ta có

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (e^{x^x \ln x})' \\
&= x^{x^x}\left(x^x \ln x\right)' \\
&= x^{x^x}\left((e^{x\ln x})' \ln x + x^{x-1}\right) \\
&= x^{x^x}\left(x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}\right) \\
&= x^{x^x + x}\left((\ln x + 1)\ln x + \frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Nếu $x \geq 1$ thì $\ln x \geq 0$ nên $f'(x) > 0$.

Nếu $0 < x < 1$ thì $(\ln x + 1)\ln x = \left(\ln x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$ và $\frac{1}{x} > 1$ nên $f'(x) > 0$.

Do đó $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = 1$ vì

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

Bài 3.28 (HV Phòng không Không quân, P.H. Quân)**.** 1. Từ giả thiết bài toán, ta thấy rằng

$$|u(x)| = |u(x) - 0| = |u(x) - u(0)| \leq |x|$$

và

$$\begin{aligned}
|u^2(x) - u(x)| =& |u(x)(u(x) - 1)| \\
\leq& |u(x)||u(x) - 1| \\
\leq& |u(x)|(|u(x)| + 1) \\
\leq& |x|(|x| + 1).
\end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$|\varphi(u)| \leq \int_0^1 |u^2(x) - u(x)| \leq \int_0^1 x(x+1)dx = \frac{5}{6}.$$

2. Ta thấy rằng để $|\varphi(u)| = \frac{5}{6}$ thì $|u(x)| = x$ và $|u(x) - 1| = x + 1$ với $x \in [0, 1]$. Điều này xảy ra khi $u(x) = -x$.

4 PHÉP TÍNH VI PHÂN

Bài 4.1 (ĐH Đồng Tháp). Ta có thể thấy rằng tất cả các bộ số nguyên dương (a, b) với $a = b$ thoả mãn điều kiện của bài toán.

Bây giờ ta sẽ xét trường hợp $a \neq b$. Giả sử $a < b$. Khi đó ta đặt $f(x) := \dfrac{\ln x}{x}$ với $x > 0$. Khi đó $a^b = b^a$ khi và chỉ khi $f(a) = f(b)$. Hơn nữa ta có $f'(x) = \dfrac{(1-\ln x)}{x^2}$ với mọi $x > 0$ nên $f(x)$ tăng (chặt) trên $(0, e)$ và giảm (chặt) trên (e, ∞). Do đó ta có $a \in (0, e]$ và $b \in [e, \infty)$. Điều này suy ra $a \in \{1, 2\}$. Với $a = 1$ thì không tồn tại b trong khi $a = 2$ ta có $b = 4$.
Vậy ta có thêm các bộ $(2, 4)$ và $(4, 2)$ cũng thoả mãn bài toán.

Bài 4.2 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên). Với $x > 0$ tùy ý, $\forall k \in \mathbb{N}$, theo công thức Maclaurin, ta có

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}x^{k-1} + \frac{f^{(k)}(\theta)}{k!}x^k, \text{ với } 0 < \theta < x.$$

Suy ra, $f(x) = \dfrac{f^{(k)}(\theta)}{k!}x^k$. Do $f^{(k+1)}(t) \geq 0, \forall t > 0$ nên $f^k(t)$ tăng trên $[0, +\infty)$, từ đó $f^{(k)}(\theta) \leq f^{(k)}(x)$. Suy ra $f(x) \leq \dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}x^k$.
Với $x > 0$ và $\forall n \in \mathbb{N}$, khai triển Taylor hàm $f(2x)$ tại x, ta được

$$f(2x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}x + \frac{f''(x)}{2!}x^2 + \cdots \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\beta)}{n!}x^n,$$

trong đó $0 < x < \beta < 2x$.
Nên $f(2x) \geq nf(x)$ với mọi $x > 0$ và $\forall n \in \mathbb{N}$. Vậy $f(x) = 0, \forall x > 0$.

Bài 4.3 (ĐH Hàng Hải Việt Nam, P.Q. Khải). Ta có $\deg P(x) = \deg Q(x)$
Vì $Q(x)$ vô nghiệm nên $\deg Q(x)$ chẵn, giả sử $P(x)$ có nghiệm, vì $\deg P(x)$ chẵn nên $P(x)$ có ít nhất 2 nghiệm.

Khi $P(x)$ có nghiệm kép $x = x_0$ ta có x_0 cũng là một nghiệm của $P'(x)$ suy ra $Q(x)$ có nghiệm $x = x_0$ mâu thuẫn với giả thiết.

Khi $P(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$.

Xét $f(x) = e^{\frac{2020}{2021}x}P(x)$ ta có: $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2020}{2021}e^{\frac{2020}{2021}x}P(x) + e^{\frac{2020}{2021}x}P'(x) \\ &= \frac{1}{2021}e^{\frac{2020}{2021}x}(2020P(x) + 2021P'(x)) = \frac{1}{2021}e^{\frac{2020}{2021}x}Q(x) \end{aligned}$$

Vì $f(x)$ có hai nghiệm nên theo định lý Rolle suy ra $f'(x)$ có ít nhất 1 nghiệm hay $Q(x)$ có nghiệm mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy $P(x)$ vô nghiệm.

Bài 4.4 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh). Với mọi số thực x, thay x bởi $-x$ vào biểu thức $f'(x)+2f'(-x)=\dfrac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ (1), ta được

$$f'(-x)+2f'(x)=\frac{2|-x|}{(-x)^6+(-x)^2+1}$$

hay $2f'(x)+f'(-x)=\dfrac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ (2).
Nhân hai vế của (2) với 2, sau đó trừ theo vế cho (1), rút gọn suy ra

$$f'(x)=\frac{2}{3}.\frac{|x|}{x^6+x^2+1}$$

với mọi số thực x. Xét

$$I=\int_{-3}^{2}f'(x)dx=\int_{-3}^{2}\frac{2}{3}.\frac{|x|}{x^6+x^2+1}dx.$$

Đặt $u=-x$, khi đó ta được $du=-dx$.
Đổi cận: Khi $x=-3\Rightarrow u=3$ và $x=2\Rightarrow u=-2$. Ta được

$$I=\int_{3}^{-2}\frac{2}{3}.\frac{|-u|}{(-u)^6+(-u)^2+1}(-du)=\int_{-2}^{3}\frac{2}{3}.\frac{|u|}{u^6+u^2+1}du$$

$$=\int_{-2}^{3}\frac{2}{3}.\frac{|x|}{x^6+x^2+1}dx=\int_{-2}^{3}f'(x)dx.$$

Mà $I=\displaystyle\int_{-3}^{2}f'(x)dx=f(2)-f(-3)$ (3)
và

$$I=\int_{-2}^{3}f'(x)dx=f(3)-f(-2)$$

Từ (3) và (4), ta được: $f(2)-f(-3)=f(3)-f(-2)$ suy ra

$$T=f(-2)-f(3)=f(-3)-f(2)=b-a$$

Bài 4.5 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ). Do $P^{(3)}(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ suy ra $P(x)$ là đa thức bậc 2;
Lại có $P(0)=P(1)=0$ nên $P(x)=kx(x-1)$,
Kết hợp với $P(2)=2\Rightarrow k=1$, tức là $P(x)=x(x-1)$.
Từ đó:

$$A=\frac{1}{P(2)}+...+\frac{1}{P(2019)}=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{2020\times 2021}=1-\frac{1}{2021}=\frac{2020}{2021}.$$

Bài 4.6 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ)**.** Xét hàm số $g(x) = (f''(x))^2 e^{-2x}$: hàm này khả vi trên $\mathbb{R}$.
Khi đó $g'(x) = 2f''(x)\left[f'''(x) - f''(x)\right]e^{-2x} = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Từ đó $g(x)$ là hàm hằng, do đó

$$f''(x) = ce^x \to f'(x) = ce^x + a \to f(x) = ce^x + ax + b.$$

Kết hợp với giả thiết ta nhận được $a = b = c = 1$,
Vậy

$$f(x) = e^x + x + 1.$$

Bài 4.7 (HV Phòng không Không quân, P.H. Quân)**.** Bài toán quy về tìm cực trị của hàm hai biến đối với hàm $\pi(q_1, q_2)$. Bằng phương pháp nhân tử Lagrange, dễ dàng tìm được cực trị hàm lợi nhuận đạt được khi $q_1 = q_2 = 20$ và $\pi(20, 20) = 2790\$$.

Bài 4.8 (HV Phòng không Không quân, P.H. Quân)**.** Đặt $g(x) := \dfrac{1}{2}f^2(x) + f'(x)$. Ta thấy rằng $g(0) = \dfrac{1}{2}f^2(0) + f'(0) = 0$ và $g'(x) = f(x)f'(x) + f''(x)$.
Như vậy, ta cần chứng minh tồn tại số thực $\eta \in (0, 1)$ sao cho $g(\eta) = 0$.
Trước hết, ta giả thiết rằng $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó, đặt

$$h(x) := \frac{x}{2} - \frac{1}{f(x)}.$$

Dễ thấy rằng $h(0) = h(1) = -\dfrac{1}{2}$, nên tồn tại số thực $\eta \in (0, 1)$ sao cho $h'(\eta) = 0$. Mặt khác, $g = f^2 h'$. Do đó, tồn tại $\eta \in (0, 1)$ để $g(\eta) = 0$.
Tiếp theo, ta giả thiết rằng $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thực. Vì tập $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ là tập đóng nên ta có thể giả thiết rằng z_1 là số thực nhỏ nhất trong $(0, 1)$ và z_2 là số thực lớn nhất trong $(0, 1)$ sao cho $f(z_1) = f(z_2) = 0$. Suy ra $0 < z_1 \leq z_2 < 1$. Từ giả thiết về giá trị của hàm số f tại 0 và 1 ta có $f > 0$ trên $[0, z_1)$ và $(z_2, 1]$. Do đó, $f'(z_1) \leq 0$ và $f'(z_2) \geq 0$. Khi đó, $g'(z_1) = f'(z_1) \leq 0$ và $g(z_2) = f'(z_2) \geq 0$. Sử dụng định lý giá trị trung bình cho hàm liên tục, suy ra tồn tại $\eta \in [z_1, z_2]$ sao cho $g(\eta) = 0$.
Để cho một ví dụ về hàm bậc hai, ta giả sử $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sử dụng các điều kiện của bài toán dễ dàng kiểm tra được $f(x) = x^2 - 2x + 2$ là một hàm thỏa mãn yêu cầu.

5 PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Bài 5.1 (ĐH Bách khoa - ĐHQG Tp. HCM, P.T. Thực)**.** a. Áp dụng khai triển Taylor ta được

$$f(x) = f(2021) + f'(2021)(x - 2021) + \frac{1}{2}f''(\alpha_x)(x - 2021)^2.$$

Kết hợp với giả thiết bài toán ta thu được

$$f(x) \geq f(2021) + f'(2021)(x - 2021), \forall x \in (-\infty, 2023).$$

Dẫn đến

$$\int_x^{2022} f(t)\, e^t dt \geq \int_x^{2022} \left(f(2021) + f'(2021)(t - 2021)\right) e^t dt, \forall x \in (-\infty, 2022).$$

Tích phân ở vế phải bằng

$$f(2021)\, e^{2022} - e^x \left(f(2021) + f'(2021)(x - 2022)\right),$$

biểu thức này tiến đến $f(2021)\, e^{2022}$ khi $x \to -\infty$.
Từ đó ta kết luận được rằng

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^{2022} f(t)\, e^t dt \geq e^{2022} f(2021).$$

b. Dựa vào lập luận trên ta thấy để dấu đẳng thức xảy ra có thể đơn giản chọn hàm tuyến tính $f(x) = ax + b$, với a, b là các hằng số tùy ý và $a \neq 0$ (điều này đảm bảo f không là hàm hằng).
Kiểm tra lại ta thấy

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^{2022} f(t) e^t dt = e^{2022}(2021a + b) = e^{2022} f(2021),$$

thỏa yêu cầu.

Bài 5.2 (ĐH Bách khoa - ĐHQG Tp. HCM, P.T. Thực). a. Từ giả thiết bài toán ta có

$$g(x) \geq \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{f(x)}, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

Dẫn đến

$$A(x, y) = \int_{2x}^{2y} \frac{\ln(g(t))}{t} dt \geq \int_{2x}^{2y} \frac{\ln\left(\frac{f\left(\frac{t}{2}\right)}{f(t)}\right)}{t} dt.$$

Tích phân ở vế phải có thể viết lại thành

$$\begin{aligned}\int_{2x}^{2y} \frac{\ln\left(\frac{f\left(\frac{t}{2}\right)}{f(t)}\right)}{t} dt &= \int_{2x}^{2y} \frac{\ln\left(f\left(\frac{t}{2}\right)\right)}{t} dt - \int_{2x}^{2y} \frac{\ln\left(f\left(t\right)\right)}{t} dt \\ &= \int_{2x}^{2y} \frac{\ln\left(f\left(\frac{t}{2}\right)\right)}{\frac{t}{2}} d\frac{t}{2} - \int_{2x}^{2y} \frac{\ln\left(f\left(t\right)\right)}{t} dt \\ &= \int_{x}^{y} \frac{\ln\left(f\left(t\right)\right)}{t} dt - \int_{2x}^{2y} \frac{\ln\left(f\left(t\right)\right)}{t} dt \\ &= \int_{x}^{2x} \frac{\ln\left(f\left(t\right)\right)}{t} dt - \int_{y}^{2y} \frac{\ln\left(f\left(t\right)\right)}{t} dt.\end{aligned}$$

Vì f là hàm số không giảm ta có

$$\int_{x}^{2x} \frac{\ln\left(f\left(t\right)\right)}{t} dt \geq \int_{x}^{2x} \frac{\ln\left(f\left(x\right)\right)}{t} dt = \ln\left(f\left(x\right)\right) \int_{x}^{2x} \frac{1}{t} dt = \left(\ln 2\right) \ln\left(f\left(x\right)\right).$$

Từ $f(t) < 1$, với mọi $t \in (0, +\infty)$ nên $\ln\left(f\left(t\right)\right)/t < 0$. Dẫn đến

$$\int_{y}^{2y} \frac{\ln\left(f\left(t\right)\right)}{t} dt \leq 0.$$

Ta thu được

$$A\left(x, y\right) \geq \int_{2x}^{2y} \frac{\ln\left(\frac{f\left(\frac{t}{2}\right)}{f(t)}\right)}{t} dt \geq \left(\ln 2\right) \ln\left(f\left(x\right)\right),$$

điều phải chứng minh.

b. Với mọi $\varepsilon > 0$ cố định, xét hàm số f và g là các hàm số hằng như sau: $f(x) = e^{-\frac{\varepsilon}{2}}$ và $g(x) = 1$, với mọi $x \in (0, +\infty)$.
Rõ ràng các hàm số này thỏa mãn điều kiện của bài toán. Tuy nhiên bất đẳng thức

$$\ln\left(f\left(x\right)\right) \leq \frac{A\left(x, y\right)}{\ln 2} - \varepsilon$$

là không đúng vì vế trái bằng $-\varepsilon/2$, trong khi vế phải là $-\varepsilon$.

Ghi chú. Các kết luận của bài toán vẫn đúng nếu ta thay giả thiết hàm số f không giảm thành không tăng. Tuy nhiên trong tình huống này bài toán trở nên khá đơn giản vì nếu f không tăng thì ta dễ dàng suy ra $g \geq 1$. Do đó $A(x, y) \geq 0$, trong khi $\ln\left(f\left(x\right)\right) \leq 0$.

Bài 5.3 (ĐH Đồng Tháp)**.** Với mọi số thực a, b ta có

$$\int_0^1 (f(x) + ax + b)^2 \, dx \geq 0.$$

Do đó ta có

$$\int_0^1 f^2(x)dx \geq -\frac{a^3}{3} - b^2 - ab - 2(a+b).$$

Đặt $P(a,b) := -\dfrac{a^3}{3} - b^2 - ab - 2(a+b)$ và $\varphi(a) := \dfrac{a^3}{3} - (b+2)a - 2b - b^2$. Khi đó giá trị lớn nhất của φ đạt tại $a_0 = \dfrac{-3(b+2)}{2}$. Do đó $\varphi(a_0) = 4 - \dfrac{(b-2)^2}{4}$. Vậy giá trị lớn nhất của $P(a,b)$ là 4 tại $a_0 = -6$ và $b_0 = 2$.

Bài 5.4 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên)**.** Đặt $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in (0,1)$.

Theo giả thiết, $\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 xf(x)dx = \int\limits_0^1 xdF(x)$

$$= xF(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 F(x)dx$$

$$= F(1) - \int\limits_0^1 F(x)dx$$

$$= \int\limits_0^1 f(t)dt - \int\limits_0^1 F(x)dx$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^1 F(x)dx = 0.$$

Xét $g(x) = e^{-2021x} \int\limits_0^x F(t)dt, \forall x \in [0,1]$. Nhận thấy, $g(x)$ thỏa mãn các điều kiện của định lý Rolle trên $[0,1]$ nên tồn tại $x_0 \in (0,1)$ sao cho $g'(x_0) = 0$. Mà $g'(x) = e^{-2021x}\left[F(x) - 2021\int\limits_0^x F(t)dt\right] \Rightarrow F(x_0) - 2021\int\limits_0^{x_0} F(t)dt = 0$.

Xét hàm $h(x) = F(x) - 2021\int\limits_0^x F(t)dt$, $h(x)$ thỏa mãn định lý Rolle trên $[0, x_0]$

nên tồn tại $c \in (0, x_0)$ sao cho $h'(c) = 0$.

Lại có $h'(x) = F'(x) - 2021F(x)$ nên $h'(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - 2021\int\limits_0^c f(t)dt = 0$.

Vậy tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $f(c) = 2021\int\limits_0^c f(x)dx$.

Bài 5.5 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên). Đặt $x = \tan t \Rightarrow \dfrac{dx}{1+x^2} = dt$.

Khi đó $I = \int\limits_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \int\limits_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)dt$.

Đặt $t = \dfrac{\pi}{4} - u \Rightarrow dt = -du,\ \tan t = \dfrac{1-\tan u}{1+\tan u}$.

$I = \int\limits_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)dt = \int\limits_{\pi/4}^0 \ln\left(\dfrac{2}{1+\tan u}\right)(-du) = \int\limits_0^{\pi/4} \ln 2du - \int\limits_0^{\pi/4} \ln(1+$
$\tan u)du$

$\Rightarrow I = \dfrac{\pi}{4}\ln 2 - I \Rightarrow I = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$.

Bài 5.6 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên). Ta có: $0 \le (f(x) - x)^2 = f^2(x) - 2xf(x) + x^2$.

Lấy tích phân hai vế: $0 \le \int\limits_0^1 (f(x) - x)^2 dx = \int\limits_0^1 f^2(x)dx - 2\int\limits_0^1 xf(x)dx + \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 f^2(x)dx \ge 2\int\limits_0^1 xf(x)dx - \dfrac{1}{3}$.

Theo công thức tích phân từng phần, ta có:

$$\int\limits_0^1 xf(x)dx = \int\limits_0^1 xd\left[\int\limits_0^x f(t)dt\right] = \left[x\int\limits_0^x f(t)dt\right]\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^x f(t)dt\right]dx \qquad .$$

$$= \int\limits_0^1 f(t)dt - \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^x f(t)dt\right]dx = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^1 f(t)dt\right]dx - \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^x f(t)dt\right]dx$$

$$= \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^1 f(t)dt - \int\limits_0^x f(t)dt\right]dx = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_x^1 f(t)dt\right]dx$$

Theo giả thiết, $\int\limits_x^1 f(t)dt \ge \dfrac{1-x^2}{2}, \forall x \in [0,1]$ nên $\int\limits_0^1 xf(x)dx \ge \int\limits_0^1 \dfrac{1-x^2}{2}dx =$

$\frac{1}{3}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f^2(x)dx \geq 2\int\limits_0^1 xf(x)dx - \frac{1}{3} = \int\limits_0^1 xf(x)dx + \left[\int\limits_0^1 xf(x)dx - \frac{1}{3}\right] \geq \int\limits_0^1 xf(x)dx \geq \frac{1}{3}$.

Bài 5.7 (ĐH Hàng Hải Việt Nam, H.V. Hùng). Ta có $1 + 2\int_0^x (f(t))^2dt \leq e^{2x} \iff \int_0^x (f(t))^2dt \leq \int_0^x e^{2t}dt$. Vậy từ giả thiết và bất đẳng thức Cauchy-Schwartz ta suy ra:

$$\Big(\int_0^x e^t.f(t)dt\Big)^2 \leq \int_0^x (f(t))^2dt.\int_0^x e^{2t}dt \leq \Big(\int_0^x e^{2t}dt\Big)^2 \text{ với mọi } x > 0 \qquad (1)$$

Bất đẳng thức (1) kéo theo bất đẳng thức:

$$\int_0^x e^t.f(t)dt \leq \int_0^x e^{2t}dt \text{ với mọi } x > 0.$$

Từ đó ta có $\int_0^x e^t.(e^t - f(t))dt \geq 0$ với mọi $x > 0$. Đặt $G(x) = \int_0^x e^t.(e^t - f(t))dt$. Khi đó:

$$G'(x) = e^x(e^x - f(x)) \text{ và } G(x) \geq 0 \text{ với mọi } x > 0.$$

Vậy:

$$\begin{aligned}\int_0^x (e^t - f(t))dt &= \int_0^x e^{-t}.G'(t)dt = e^{-t}G(t)\Big|_0^x + \int_0^x e^{-t}.G(t)dt \\ &= e^{-x}G(x) + \int_0^x e^{-t}.G(t)dt \geq 0\end{aligned}$$

với mọi $x > 0$. Suy ra:

$$\int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x e^tdt \iff 1 + \int_0^x f(t)dt \leq e^x \text{ với mọi } x > 0.$$

Bài 5.8 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ, T.A. Tuấn). Đặt $h(x) = f(x) - x$ thì $h(x)$ liên tục trên $[0;1]$, do đó $\max\limits_{x\in[0;1]} h(x) = c$. Khi đó:

$$\int\limits_0^1 [f(g(x)) - g(x)]\,dx \leq \int\limits_0^1 cdx = c \qquad \text{hay} \qquad \int\limits_0^1 f(g(x))dx \leq c + \int\limits_0^1 g(x)dx.$$

Mặt khác ta có:

+) Nếu $c \leq 0$ thì do $f(x) \neq 0, \forall x \in [0;1]$, ta có

$$\int_0^1 f(x)dx \geq 0 \geq c. \tag{2}$$

+) Nếu $c > 0$, giả sử $\exists x_0 \in [0;1]$ để:

$$h(x_0) = f(x_0) - x_0 = c \qquad \text{hay} \qquad f(x_0) = x_0 + c.$$

Vì $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in [0;1]$ và $f(x)$ tăng thực sự nên ta có: $1 \geq f(x_0) = x_0 + c$ và

$$\int_0^1 f(x)dx \geq \int_{x_0}^1 f(x)dx \geq \int_{x_0}^1 f(x_0)dx = (c + x_0)(1 - x_0).$$

$$= c + x_0 - cx_0 - x_0^2 = c + x_0(1 - c - x_0) \geq c. \tag{3}$$

Từ (2) và (3) ta luôn có: $c \leq \int_0^1 f(x)dx$. Do đó:

$$\int_0^1 f(g(x))dx \leq c + \int_0^1 g(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 [f(x) + g(x)]\,dx.$$

Bài 5.9 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn)**.**

$$\sum_{i=1}^{2020} \int_0^1 f^i(x)dx = \int_0^1 \sum_{i=1}^{2020} f^i(x)dx \geq \int_0^1 2020 \sqrt[2020]{f^{\frac{2020\cdot 2021}{2}}}dx$$

$$= 2020 \int_0^1 f^{\frac{2021}{2}}dx \underset{0 \leq f \leq 1}{\geq} 2020 \int_0^1 f^{1011}dx = 2020.$$

Lời giải thứ hai

Vì hàm số nhận các giá trị từ 0 tới 1 và tích phân $\int_0^1 f^{1011}(x)dx = 1$, nên $f(x) \equiv 1$. Vì vậy

$$\sum_{i=1}^{2020} \int_0^1 f^i(x)dx = \sum_{i=1}^{2020} 1 = 2020.$$

Bài 5.10 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Với $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n \left(\int_x^1 f(t)dt\right) dx &= \frac{1}{n+1}\int_0^1 \left(\int_x^1 f(t)dt\right) d\left(x^{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} x^{n+1}\int_x^1 f(t)dt\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1} f(x)dx.\end{aligned}$$

Điều này suy ra

$$\int_0^1 x^{n+1} f(x)dx = (n+1)\int_0^1 x^n \left(\int_x^1 f(t)dt\right) dx.$$

Mặt khác, sử dụng giả thiết ta được

$$\int_0^1 x^n \left(\int_x^1 f(t)dt\right) dx \geq \int_0^1 x^n \frac{1-x^2}{2} dx.$$

Do đó

$$\int_0^1 x^{n+1} f(x)dx \geq (n+1)\int_0^1 x^n \frac{1-x^2}{2} dx = \frac{1}{n+3}. \tag{4}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta suy ra

$$f^{n+1}(x) + nx^{n+1} \geq (n+1)x^n f(x).$$

Vì vậy, ta được

$$\int_0^1 f^{n+1}(x)dx + n\int_0^1 x^{n+1}dx \geq (n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx. \tag{5}$$

Sử dụng (4), ta có

$$\begin{aligned}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx &= n\int_0^1 x^n f(x)dx + \int_0^1 x^n f(x)dx \\ &\geq \frac{n}{n+2} + \int_0^1 x^n f(x)dx. \qquad (6)\end{aligned}$$

Từ (5) và (6), ta được

$$\int_0^1 f^{n+1}(x)dx + \frac{n}{n+2} \geq \frac{n}{n+2} + \int_0^1 x^n f(x)dx.$$

Điều này chứng tỏ

$$\int_0^1 f^{n+1}(x)dx \geq \int_0^1 x^n f(x)dx.$$

Với $n = 2020$, ta được kết quả của bài toán.

Bài 5.11 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh)**.** Ta có

$$\begin{aligned} I_{2x+1} = \int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^{2k+1} x} dx \\ &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^{2k+1} x} dx + \int \frac{1}{\cos^{2k-1} x} \\ &= \int \sin x \frac{\sin x}{\cos^{2k+1} x} dx + I_{2k-1}. \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{aligned} I_{2k+1} &= \frac{\sin x}{2k \cos^{2k} x} - \frac{1}{2k} \int \frac{1}{\cos^{2k-1} x} dx + I_{2k-1} \\ &= \frac{\sin x}{2k \cos^{2k} x} - \left(\frac{1}{2k} - 1 \right) I_{2k-1}. \end{aligned}$$

Ta suy ra công thức truy hồi.
Với $k = 1$ ta có:

$$I_3 = \int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos x} dx.$$

Đặt $t = \tan \dfrac{x}{2}$, thì $\dfrac{1}{2} \dfrac{dt}{1+t^2} = dx$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Ta được

$$I_3 = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| + C.$$

Bài 5.12 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ)**.** Xét $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1 + \sqrt{x^4 + 6x^2 + 1}}$ với $x \in [-1; 1]$.
Ta nhận thấy:

$$g(0) = \frac{1}{2}\ ; \quad g(x) + g(-x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$g(x) = \frac{(x^2 + 2x + 1) - \sqrt{x^4 + 6x^2 + 1}}{4(x^3 + x)}.$$

Do đó $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} g(x)\, dx + \int_{0}^{1} g(x)\, dx.$

Xét $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{0} g(x)\, dx$ thông qua phép đổi biến $x = -t$ ta sẽ nhận được

$$I_1 = \int_{0}^{1} g(-x)\, dx.$$

Suy ra $I = \int\limits_0^1 (g(-x) + g(x))\, dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}$.

Bài 5.13 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ)**.** Đặt

$$x = 5 - t \Rightarrow \begin{cases} 7 - x = t + 2 \\ d\text{x} = -dt \end{cases} .$$

Đổi cận

$$x = 2 \Rightarrow t = 3; x = 3 \Rightarrow t = 2$$

Khi đó: $I = -\int\limits_3^2 \frac{\sqrt{\ln(t+2)}}{\sqrt{\ln(7-t)} + \sqrt{\ln(t+2)}} dt = \int\limits_2^3 \frac{\sqrt{\ln(x+2)}}{\sqrt{\ln(7-x)} + \sqrt{\ln(x+2)}} dx$

Và :

$$\Rightarrow 2I = I + I = \int\limits_2^3 dx = 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}$$

Bài 5.14 (ĐH Trà Vinh, C.H. Hoà)**.** Tính tích phân

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \ln\left(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}\right) dx.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^{2\pi} \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right) dx \\
&= \int\limits_0^{\pi} \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right) dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right) dx \\
&= \int\limits_0^{\pi} \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right) dx \\
&\quad + \int\limits_0^{\pi} \ln\left(\sin(2\pi - x) + \sqrt{1+\sin^2(2\pi - x)}\right) d(2\pi - x) \\
&= \int\limits_0^{\pi} \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right) dx + \int\limits_0^{\pi} \ln\left(-\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right) dx \\
&= \int\limits_0^{\pi} \ln 1 dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Bài 5.15 (HV Phòng không Không quân, P.H. Quân). 1. Đặt

$$v(t) = \exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right), t \in [a, +\infty).$$

Ta thấy rằng hàm v thỏa mãn $v'(t) = \beta(t)\, v(t), t \in [a, +\infty)$, với $v(a) = 1$ và $v(t) > 0$ với mọi $t \in [a, +\infty)$. Sử dụng công thức đạo hàm của thương, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{u(t)}{v(t)} &= \frac{u'(t)\, v(t) - v'(t)\, u(t)}{v^2(t)} \\
&= \frac{u'(t)\, v(t) - \beta(t)\, v(t)\, u(t)}{v^2(t)} \leq 0, \quad t \in [a, +\infty).
\end{aligned}$$

Do đó, đạo hàm của hàm số $u(t)/v(t)$ không dương và giá trị hàm số bị chặn trên bởi

$$\frac{u(t)}{v(t)} \leq \frac{u(a)}{v(a)} = u(a), \quad t \in [a, +\infty),$$

hay $u(t) \leq u(a) \exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right)$, ta kết thúc chứng minh.

2. Ta thấy rằng khi $u'(t) < \beta(t)u(t)$ thì

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{u(t)}{v(t)} &= \frac{u'(t)\,v(t) - v'(t)\,u(t)}{v^2(t)} \\ &= \frac{u'(t)\,v(t) - \beta(t)\,v(t)\,u(t)}{v^2(t)} < 0, \quad t \in [a, +\infty).\end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là hàm $\dfrac{u(t)}{v(t)}$ là hàm đơn điệu giảm thực sự, tức là

$$\frac{u(t)}{v(t)} < \frac{u(a)}{v(a)} = u(a), \quad t \in [a, +\infty),$$

hay $u(t) < u(a)\exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right)$. Như vậy, dấu đẳng thức không thể xảy ra.

6 PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Bài 6.1 (ĐH Đồng Tháp). 1. Gọi $s(t)$ là phương trình quãng đường đi của tên lửa theo thời gian. Ta có: $s_0 := s(0) = 0$, $s_1 := s(10) = 41$, $s_2 := s(20) = 84$, $s_3 := s(30) = 129$. Do đó

Δ_0	0		41		84		129
Δ_1		41		43		45	
Δ_2			2		2		

Giả sử phương trình hàm quãng đường tên lửa đi là: $s(t) = at^2 + bt + c$. Lần lượt thay $s(0) = 0, s(10) = 41, s(20) = 84$ vào phương trình trên ta được $a = \dfrac{1}{100}, b = 4, c = 0$. Vậy

$$s(t) = \frac{t^2}{100} + 4t\ (m)$$

với $t \geq 0$. Gọi T là thời điểm tên lửa đến vị trí B. Khi đó $s(T) = 144000$. Do đó ta có $T = 3600$ giây. Vậy tên lửa đến B sau một giờ đồng hồ.

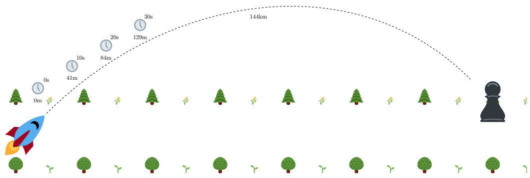
2. Áp dụng định lý Lagrange cho hàm $s(t)$ trên $[0, 3600]$, tồn tại $c \in (0, 3600)$ thoả mãn

$$s'(c) = v_{tb} := \frac{s(3600) - s(0)}{3600} = \frac{144000}{3600} = 40m/s,$$

trong đó v_{tb} là vận tốc trung bình của tên lửa trên quãng đường đi được. Do đó

$$\frac{c}{50} + 4 = 40.$$

Điều này tương đương với $c = 1800$. Vậy sau 30 phút tên lửa sẽ đạt vận tốc bằng vận tốc trung bình trên quãng đường đi được.



Bài 6.2 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên)**.** Đặt $f(x) = 2021^x g(x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Theo giả thiết, $f(x+0) \geq 2021^{x+0}$ nên

$$g(x) \geq 1,\ \forall x.$$

Vì $f(x+y) \geq f(x)f(y)$ nên $2021^{x+y}g(x+y) \geq 2021^x g(x) 2021^y g(y)$, suy ra

$$g(x+y) \geq g(x)g(y),\ \forall x,\ \forall y.$$

Với $x = y = 0$, ta được

$$g(0) \geq g(0) \cdot g(0) \geq 1 \Rightarrow g(0) = 1.$$

Với $x = -y$, ta có $\begin{cases} g(x) \geq 1 \\ g(-x) \geq 1 \end{cases}$

$$1 = g(0) = g(x + (-x)) \geq g(x)g(-x) \geq g(x).$$

nên $g(x) = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Vậy $f(x) = 2021^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 6.3 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ, T.A. Tuấn)**.** Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

$$f(f(x) + y) = f(x+y) + xf(y) - xy - x + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Từ (1) cho $y = 0$ ta được:

$$f(f(x)) = f(x) + x.f(0) - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Trong (2) cho $x = 0$ ta được:

$$f(f(0)) = f(0) + 1. \qquad (3)$$

Từ (1) thay y bởi $f(y)$ ta được:

$$f(f(x)+f(y)) = f(x+f(y)) + xf(f(y)) - xf(y) - x + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Thay (1), (2) vào (4) ta được:

$$\begin{aligned} f(f(x)+f(y)) =& f(x+y) + yf(x) - xy - y + 1 \\ &+ x\left[f(y) + yf(0) - y + 1\right] - xf(y) - x + 1. \\ =& f(x+y) + yf(x) + xyf(0) - 2xy - y + 2. \end{aligned}$$

Vậy

$$f(f(x)+f(y)) = f(x+y) + yf(x) + xyf(0) - 2xy - y + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Trong (5) hoán vị x và y ta được:

$$f(f(x)+f(y)) = f(x+y) + xf(y) + xyf(0) - 2xy - x + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra:

$$yf(x) - xf(y) - y + x = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Trong (7) lấy $(x;y) = (0;1)$ ta được: $f(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1$.
Từ (3) suy ra $f(f(0)) = 2$. Từ (7) thay $y = f(0)$ và sử dụng $f(0) = 1; f(f(0)) = 2$ ta được:

$$f(x) - 2x - 1 + x = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy thoả mãn bài toán. Vậy $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 6.4 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn)**.** Vế phải đối xứng với x và y. Từ đó suy ra vế trái cũng đối xứng với x và y hay

$$f(x + 2020y) = f(y + 2020x).$$

Đặt $y = -2020x$, ta có $f(0) = f((1 - 2020^2)x)$ với mọi x. Điều đó có nghĩa là $f(x) = C = const$. Thế vào phương trình đầu, ta thu được $C = C^2$. Tức là $C = 0$ hoặc $C = 1$.
Đáp án $f(x) \equiv 0$ hay $f(x) \equiv 1$.

Bài 6.5 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn)**.** Rõ ràng f f là hàm khả vi liên tục cấp 2 vì từ phương trình suy ra f' là hàm khả vi liên tục. Giả sử $M = \sup\limits_{R} |f|$.
Ta sẽ chứng minh là $M = 0$ bằng phản chứng. Giả sử $M > 0$. Xét giá trị x thỏa mãn $|f(x)| > 3M/4$.

Theo công thức Taylor, tồn tại $c \in (x, x+1)$ sao cho

$$f(x) = f(x+1) + f'(x+1)[x-(x+1)] + \frac{f''(c)}{2}[x-(x+1)]^2.$$

Tức là $f''(c) = 4f(x) - 2f(x+1)$. Thế nhưng $f''(c) = f'(c-1) = f(c-2)$. Vì vậy $f(c-2) = 4f(x) - 2f(x+1)$.
Từ đây, ta thu được

$$|f(c-2)| = |4f(x) - 2f(x+1)| \geq 4|f(x)| - 2|f(x+1)| > 3M - 2M = M.$$

Mâu thuẫn. Điều đó có nghĩa $M = 0$.

Bài 6.6 (ĐH Trà Vinh, C.H. Hoà). Đặt $y = \dfrac{x+1}{x-1} \Rightarrow x = \dfrac{y+1}{y-1},\ y \neq 1$.
Thay vào phương trình đã cho ta có

$$f(y) = 2f\left(\frac{y+1}{y-1}\right) + \frac{3}{\frac{y+1}{y-1} - 1}$$

hay

$$f(y) = 2f\left(\frac{y+1}{y-1}\right) + \frac{3(y-1)}{2}.$$

Thay y bởi x, ta có $f(x) = 2f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) + \dfrac{3(x-1)}{2}$.
Nhân đẳng thức đã cho với 2 rồi cộng với đẳng thức này, ta được:

$$2f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + f(x) = 4f(x) + \frac{6}{x-1} + 2f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \frac{3(x-1)}{2}.$$

Suy ra

$$3f(x) + \frac{3(x-1)}{2} + \frac{6}{x-1} = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1-x}{2} + \frac{2}{1-x}.$$

Thử lại ta thấy thoả mãn điều kiện.
Vậy các hàm số cần tìm là: $f(x) = \dfrac{1-x}{2} + \dfrac{2}{1-x},\ x \neq 1$ và $f(1)$ là một số tùy ý.

Bài 6.7 (ĐH Trà Vinh, C.H. Hoà). Ta có

$$\begin{aligned}
0 \le \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - 1\right)^2 dx &= \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx - 2\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx + 1 \\
&= \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx - 2\ln f(x)|_0^1 + 1 \\
&= \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx - 2\ln\frac{f(1)}{f(0)} + 1 \\
&= \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx - 1.
\end{aligned}$$

Suy ra $\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \ge 1$. Mà theo giả thuyết thì $\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) dx \le 1$. Nên ta có $\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - 1\right)^2 dx = 0$.

Do $f(x)$ khả vi, liên tục trên $[0;1]$, nên ta được $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1,\ \forall x \in [0;1]$.

Suy ra $f'(x) = f(x)$, $\forall x \in [0;1]$, $f(x) = ce^x$, $\forall x \in [0;1]$, $c > 0$. Thử lại ta thấy hàm số thỏa đề bài.