TS. HOÀNG PHI DŨNG

ĐA THỨC MỘT BIẾN VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN

Olympic Toán Sinh viên toàn quốc

PTIT

BỘ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG
HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

———————————

Hoàng Phi Dũng

ĐA THỨC MỘT BIẾN VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN

BÀI GIẢNG OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN TOÀN QUỐC - MÔN ĐẠI SỐ

Hà Nội - 2023

MỞ ĐẦU

Nghiên cứu về đa thức là những bài toán đã có từ thời cổ đại, phát sinh từ nhu cầu giải một phương trình bậc nhất hay bậc hai, ba, ... Với sự ra đời của môn Đại số trừu tượng, lý thuyết đa thức đã trở thành một lý thuyết rộng lớn liên quan đến rất nhiều nhánh khác nhau của toán học. Trong đó, các đa thức một biến đóng vai trò rất quan trọng và là khởi điểm của lý thuyết các đa thức nhiều biến. Có thể nói rằng, đa thức một biến chính là sự khởi đầu của các lĩnh vực Đại số hiện đại, chẳng hạn như các công trình của N. H. Abel và E. Galois về tính không giải được của các đa thức bậc lớn hơn 5. Từ đó, lý thuyết Galois đã trở thành nền tảng của lý thuyết đại số và lý thuyết số hiện đại.

Chính vì nhu cầu ứng dụng rộng rãi của môn Đại số, nhất là những ngành Trí tuệ nhân tạo hay Khoa học dữ liệu, cho nên môn Đại số giờ đây được dạy và học ngày càng sôi nổi ở các trường đại học. Hàng năm, Hội Toán học Việt Nam vẫn tổ chức đều Kỳ thi Olympic Toán Sinh viên toàn quốc, một kỳ thi giàu truyền thống của Toán học Việt Nam diễn ra thường niên từ 1993 đến nay. Gần đây, vì nhu cầu phát triển trong chương trình toán Đại học của các trường kỹ thuật, chẳng hạn trong mã hoá thông tin hay các phân ngành của Viễn thông mà những bài toán về đa thức cũng đã được đưa vào các đề thi Olympic Toán học sinh viên toàn quốc. Do đó chúng tôi biên soạn tài liệu này dành cho những sinh viên yêu thích toán, thích tìm hiểu sâu hơn về đa thức hoặc có mong muốn tham gia kỳ thi Olympic Toán học học sinh, sinh viên. Tài liệu này đã được dùng để huấn luyện đội tuyển của Học viện Công nghệ Bưu chính viễn thông từ năm 2013 cho đến nay.

Ở đây, chúng tôi chỉ trình bày một số kiến thức cơ bản của đa thức một biến cùng với một số bài toán về đa thức trong các kỳ thi Olympic. Tài liệu gồm một số kiến thức cơ bản như sau: Sơ lược về Nhóm, vành, trường; đa thức; phân tích thành nhân tử, hai đa thức nguyên tố cùng nhau; nghiệm của đa thức: định lí Bezout, định lí Viete, biên của nghiệm, quy tắc dấu của Descartes; công thức Taylor.

Sau khi chúng tôi trình bày sơ lược những kiến thức cơ bản thì chúng tôi phân các bài tập theo một số phương pháp có thể giải được chúng. Việc phân dạng bài tập chỉ mang tính chất tương đối và chủ quan, bởi vì một bài toán hoàn toàn có thể liên quan đến nhiều kiến thức khác nhau. Tài liệu này gồm các phần như sau:

Chương 1: Một số kiến thức cơ bản về đa thức.

Chương 2: Sử dụng các tính chất của bậc và của nghiệm của đa thức.

Chương 3: Sử dụng các tính chất số học.

Chương 4: Sử dụng một số tính chất cơ sở của giải tích.

Chương 5: Các bài toán phương trình hàm đa thức.

Chương 6: Một số bài toán về đa thức liên quan đến đại số tuyến tính và tổ hợp.

Do thời gian có hạn, chắc chắn tài liệu không thể tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự góp ý của các đồng nghiệp và độc giả, tác giả xin chân thành cảm ơn.

Mọi góp ý xin gửi về: dunghp@ptit.edu.vn

Hà Nội, năm 2023.

TS. Hoàng Phi Dũng

MỤC LỤC

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}[x]$	vành đa thức một biến x với hệ số thực.
$f(x)$	đa thức f với biến x xác định bởi $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$.
$\deg f$	bậc của đa thức f

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ ĐẠI SỐ ĐẠI CƯƠNG VÀ ĐA THỨC

Nội dung chương này nhằm giới thiệu các khái niệm cơ bản về đa thức.

1.1 Sơ lược về nhóm, vành và trường

Phần này nhằm giới thiệu các khái niệm nhóm, vành và trường. Đây là những khái niệm cơ bản của đại số, có vai trò ý nghĩa trong việc nhìn những đối tượng quen thuộc theo quan điểm cấu trúc đại số.

1.1.1 Quan hệ hai ngôi và quan hệ tương đương

a. Khái niệm về quan hệ hai ngôi và tương đương

Các cấu trúc đại số sẽ được thể hiện ở các phép toán và mối quan hệ. Mục này chúng tôi trình bày theo [**?**].

Định nghĩa 1.1. Mỗi tập con $\mathcal{R}$ của tập hợp tích Descartes $X \times X$ được gọi là một quan hệ hai ngôi trên X. Nếu $(x, y) \in \mathcal{R}$ thì ta nói x có quan hệ $\mathcal{R}$ với y và viết $x\mathcal{R}y$.

Ví dụ 1.1. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x \text{ chia hết cho } y\}$ thì $8\mathcal{R}4$.

Định nghĩa 1.2. Quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ trên X được gọi là một quan hệ tương đương và kí hiệu $\sim$, nếu nó có ba tính chất sau đây:

- Phản xạ: $x \sim x, \forall x \in X$.

- Đối xứng: $x \sim y \Rightarrow y \sim x, \forall x, y \in X$.

- Bắc cầu: $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z, \forall x, y, z \in X$.

Giả sử $\sim$ là một quan hệ tương đương trên X. Lớp tương đương theo quan hệ này của một phần tử $x \in X$ được xác định bởi tập

$$[x] = \{y \in X | x \sim y\}.$$

Đôi khi còn ký hiệu lớp tương đương là $\overline{x}$.

Mệnh đề 1.1. *Giả sử $\sim$ là một quan hệ tương đương. Khi đó với mọi $x, y \in X$, các lớp $[x]$ và $[y]$ hoặc trùng nhau hoặc rời nhau (tức là $[x] \cap [y] = \emptyset$).*

Chứng minh. Giả sử $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, ta sẽ chứng minh $[x] = [y]$. Thật vậy, lấy $a \in [x] \cap [y]$, khi đó $a \sim x, a \sim y$.

Giả sử $b \in [x]$, khi đó $x \sim b$. Do tính bắc cầu nên từ $a \sim x, x \sim b$ nên $a \sim b$ hay $b \sim a$, mà từ $a \sim y$ cho nên tiếp tục sử dụng tính bắc cầu, ta được $b \sim y$. Từ đó $b \in [y]$. Vậy $[x] \subset [y]$.

Hoán đổi vai trò của $[x]$ và $[y]$, ta có $[y] \subset [x]$. Vậy $[x] = [y]$ (đpcm). $\square$

Khi tập X được chia thành các lớp tương đương theo quan hệ tương đương $\sim$ thì $X = \coprod_{k=1}^{n} [x_k]$ (hợp rời). Ta nói rằng X được phân hoạch thành các lớp tương đương.

Định nghĩa 1.3. Tập các lớp tương đương của X theo quan hệ $\sim$ được gọi là tập thương của X theo $\sim$ và ký hiệu là $X/\sim$.

Ví dụ 1.2. Xét trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ quan hệ tương đương sau

$$\sim = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x - y \text{ chia hết cho } n\}.$$

Ta có thể chứng minh được đây là một quan hệ tương đương. Ta có thể nhận thấy rằng tập $\mathbb{Z}$ sẽ được phân ra thành các lớp tương đương theo phần dư, tức là hai số x, y là tương đương khi và chỉ khi chúng có cùng số dư khi chia cho n. Vậy

$$\mathbb{Z}/\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}.$$

Tập này được gọi là lớp thặng dư modulo n hoặc gọi là tập các số nguyên modulo n và thường được ký hiệu là $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ta sẽ khảo sát kỹ ở mục sau.

b. Tập các lớp thặng dư modulo n

Để hiểu rõ khái niệm tập thương của một tập (theo quan hệ tương đương), chúng tôi chọn ví dụ quan trọng trong đại số cũng như số học để trình bày ở đây, đó là tập các lớp thặng dư modulo n.

Như ví dụ ở trên đã chỉ ra, tập các lớp thặng dư modulo n là một tập các lớp tương đương được xây dựng trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$, gồm các lớp

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}.$$

Hai phần tử a, b cùng một lớp thặng dư nếu $n|a-b$, nói cách khác là a và b đồng dư khi chia cho n, kí hiệu là $a \equiv b(modn)$. Một số nguyên modulo n chính là một phần tử đại diện cho lớp tương đương ấy, chẳng hạn $\overline{a}$ được mô tả như sau

$$\begin{aligned}\overline{a} &= \{a + kn | k \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{a, a \pm n, a \pm 2n, a \pm 3n, \ldots\}.\end{aligned}$$

Ta có thể hiểu rằng một lớp tương đương $\overline{k}$ (với $k < n$) là tập tất cả các số nguyên sao cho khi chia cho n thì được số dư là k.

Ta có thể xây dựng phép toán trên $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ như sau: Với $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ta xác định tổng và tích như sau

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \text{ và } \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}.$$

Tất nhiên, ta sẽ phải chứng minh các phép toán trên được định nghĩa tốt, tức là không phụ thuộc vào phần tử chọn làm đại diện. Trước hết, ta phân tích một số ví dụ sau:

Ví dụ 1.3. Với $n = 4$, ta có

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}.$$

Ta thực hiện phép toán $\overline{1} + \overline{3} = \overline{4}$, tức là một số chia cho 4 dư 1 và một số chia cho 4 dư 3, hai số này cộng với nhau sẽ được một số chia hết cho 4, do đó mà $\overline{4} = \overline{0}$. Vậy ta viết $\overline{1} + \overline{3} = \overline{0}$.

Một số mối quan hệ của các phần tử khác qua phép toán cộng này, chẳng hạn:

$$\overline{1} + \overline{1} = \overline{2},$$

$$\overline{2} + \overline{2} = \overline{0},$$

$$\overline{1} + \overline{2} = \overline{3},$$

$$\overline{2} + \overline{3} = \overline{1}, \ldots$$

Lớp tương đương $\overline{2} = \{\pm 6, 1 \pm 10, \pm 14, \ldots\}$ và $\overline{3} = \{\pm 7, \pm 11, \pm 15\}$, ta thực hiện phép cộng

$$\overline{2} + \overline{3} = \overline{14 - 19} = \overline{-5} = \overline{1}.$$

Bài tập 1.1. Chứng minh rằng, trong tập thương $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, định nghĩa hai phép toán cộng và nhân nêu trên là định nghĩa đúng đắn, tức là không phụ thuộc vào cách chọn đại biểu của các lớp tương đương.

1.1.2 Nhóm

Nhóm là khái niệm cơ bản nhất của đại số, được tạo nên từ phép toán hai ngôi, cụ thể như sau

Định nghĩa 1.4. Cho G là một tập hợp khác rỗng với một phép toán hai ngôi:

$$\circ : G \times G \to G.$$

G được gọi là một nhóm nếu nó thoả mãn những tính chất sau:

(i) Tính kết hợp: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in G$.

(ii) Tồn tại phần tử trung hoà: $\exists e \in G$ sao cho $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in G$.

(iii) Tồn tại phần tử khả nghịch: $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e, \forall x \in G$.

Khi đó, ta kí hiệu nhóm đó là $(G, \circ)$ để chỉ nhóm và phép toán tương ứng của nhóm.

Nếu nhóm G thoả mãn: $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in G$ thì ta gọi $(G, \circ)$ là một nhóm abel (hay còn gọi nhóm giao hoán).

Ví dụ 1.4. Một số ví dụ về nhóm, chẳng hạn:

- $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ là một nhóm abel.
- $(\mathbb{Q}^*, \cdot), (\mathbb{R}^*, \cdot), (\mathbb{C}^*, \cdot)$ là một nhóm abel với phép nhân, phần tử trung hoà là 1, phần tử khả nghịch là $\frac{1}{a}, \forall a \neq 0$.
- $(\mathbb{R}[x], +)$: tập tất cả các đa thức hệ số thực, với phép cộng, lập thành một nhóm.
- $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ và $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ cũng là hai nhóm đối với phép toán nhân. Tuy nhiên, $\mathbb{Z}^*$ không phải là nhóm đối với phép nhân, bởi vì tồn tại phần tử không khả nghịch, chẳng hạn 2.
- Gọi $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{R}) | \det A \neq 0\}$, tập các ma trận thực vuông cấp n, khả nghịch với phép nhân ma trận, tạo thành một nhóm. Nhóm này gọi là nhóm tuyến tính tổng quát cấp n trên $\mathbb{R}$.
- Gọi $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ là tập các lớp tương đương các số đồng dư modulo n. Ta định nghĩa phép cộng trong $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ như sau

$$\overline{x} + \overline{y} := \overline{x + y}.$$

  Có thể kiểm tra rằng phép cộng này không phụ thuộc đại biểu của lớp tương đương $\bar{x}$ và $\bar{y}$. Hơn nữa, ta có $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ là một nhóm abel.

- Mỗi song ánh từ tập hợp $\{1, 2, \ldots, n\}$ vào chính nó được gọi là một hoán vị của n phần tử. Tập S_n tất cả các hoán vị của n phần tử tạo thành một nhóm với phép toán là các phép hợp thành ánh xạ

  $$(\alpha \circ \beta)(i) = \alpha(\beta(i)), \forall 1 \leq i \leq n, \forall \alpha, \beta \in S_n.$$

  Nhóm S_n được gọi là nhóm đối xứng của n phần tử. Đây là một nhóm được sử dụng trong định nghĩa công thức tổng quát của định thức cấp n.

Để thấy được sự tương quan giữa hai nhóm với nhau, người ta đưa ra khái niệm đồng cấu nhóm

Định nghĩa 1.5. Cho hai nhóm $(G, \circ)$ và $(G', \cdot)$. Ánh xạ $\varphi : G \to G'$ được gọi là một đồng cấu nhóm nếu

$$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y), \forall x, y \in G.$$

Bài tập 1.2. Kiểm tra xem $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ có phải là một nhóm đối với phép nhân hay không. Khi nào $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ là một nhóm đối với phép nhân?

Bài tập 1.3. Chứng minh rằng với $(G, \circ)$ là một nhóm bất kỳ thì:

1. Phần tử trung hoà e là duy nhất.

2. Phần tử nghịch đảo x^{-1} là duy nhất.

3. Trong nhóm có luật giản ước, tức là $x \circ z = y \circ z$ thì $x = y$; $z \circ x = z \circ y$ thì $x = y$.

1.1.3 Vành

Để khảo sát sâu hơn các tính chất đại số của các tập hợp, người ta xây dựng khái niệm vành

Định nghĩa 1.6. Một vành là một tập hợp $R \neq \emptyset$ được trang bị hai phép toán hai ngôi, gồm phép cộng

$$+ : R \times R \to R, (x, y) \mapsto x + y,$$

và phép nhân

$$\cdot : R \times R \to R, (x, y) \mapsto xy,$$

thoả mãn ba điều kiện sau đây:

(R_1) R một nhóm abel đối với phép cộng.

(R_2) Phép nhân có tính chất kết hợp:

$$(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in R.$$

(R_3) Phép nhân phân phối với phép cộng ở cả hai phía trái và phải:

$$\begin{aligned} &z(x+y) = zx + zy, \\ &(x+y)z = xz + yz, \forall x, y, z \in R. \end{aligned}$$

Ký hiệu vành R với 2 phép toán là $(R, +, \cdot)$.

Vành R được gọi là có đơn vị nếu phép nhân của nó có phần tử đơn vị, tức là $1 \in R$ sao cho

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \forall x \in R.$$

Vành R được gọi là vành giao hoán nếu phép nhân của R có tính giao hoán: $xy = yx, \forall x, y \in R$.

Nhận xét 1.1. Ta không cần thiết phải giả sử $1 \neq 0$ bởi vì $0 \cdot x = 0$. Thật vậy, $0x + x = (0+1)x = 1 \cdot x = x$, theo luật giản ước của phép cộng thì $0x = 0$. Từ điều đó ta suy ra chỉ có vành gồm một phần tử $\{0\}$ thì mới có $1 = 0$.

Ví dụ 1.5. Một số ví dụ về vành, chẳng hạn:

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ đều là các vành giao hoán, có đơn vị. Tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ không là một vành, vì nó không phải là một nhóm đối với phép cộng.

- $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ cũng là một vành giao hoán, có đơn vị.

- $Mat(n \times n, \mathbb{R})$, tập các ma trận thực vuông cấp n, lập thành một vành có đơn vị. Tuy nhiên vành này không phải là vành giao hoán. Việc khảo sát kỹ vành này được thực hiện trong môn đại số tuyến tính.

- Tập $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ cùng với phép cộng và phép nhân trong $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ như sau

$$\overline{x} + \overline{y} := \overline{x+y} \text{ và } \overline{x}\overline{y} = \overline{xy},$$

  tạo thành một vành giao hoán và có đơn vị. Nó được gọi là vành số nguyên modulo n.

Định nghĩa 1.7. Giả sử R và R' là các vành. Ánh xạ $f : R \to R'$ được gọi là một đồng cấu vành nếu

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$
$$f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in R.$$

Đồng cấu vành được gọi là toàn cấu nếu nó là một toàn ánh, gọi là đơn cấu nếu nó là đơn ánh, gọi là một đẳng cấu nếu nó vừa là toàn cấu vừa là đơn cấu.

Ví dụ 1.6.

- Phép nhúng $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ xác định bởi công thức $i(x) = x$ là một đơn cấu vành.

- Phép chiếu $pr : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ là một toàn cấu vành.

Bài tập 1.4. Tìm ví dụ để chứng tỏ rằng vành $Mat(n \times n, \mathbb{R})$ với $n \geq 1$ không phải là một vành giao hoán.

1.1.4 Trường

Định nghĩa 1.8. Nếu vành R chứa các phần tử $a \neq 0, b \neq 0$ sao cho $ab = 0$ thì ta nói R có ước của không.

Ngược lại, nếu từ đẳng thức $ab = 0$ suy ra hoặc $a = 0$ hoặc $b = 0$ thì vành R được gọi là không có ước của không. Một vành giao hoán, có đơn vị, có nhiều hơn một phần tử và không có ước của không được gọi là một *miền nguyên*.

Ví dụ 1.7.

- Vành $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ có ước của không, chẳng hạn $\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{0}$.
- Vành các ma trận thực cấp n: $Mat(n \times n, \mathbb{R})$ là một vành có ước của không.
- Vành $\mathbb{Z}$ là một miền nguyên.

Phần tử a trong một vành có đơn vị được gọi là khả nghịch nếu tồn tại phần tử a' sao cho $aa' = a'a = 1$. Phần tử này nếu tồn tại thì duy nhất, kí hiệu là a^{-1}.

Định nghĩa 1.9. Một vành giao hoán, có đơn vị $1 \neq 0$ sao cho mọi phần tử khác 0 của nó đều khả nghịch (đối với phép nhân) được gọi là một trường.

Mối liên hệ giữa trường và miền nguyên là như sau:

Mệnh đề 1.2. **(i)** *Mỗi trường đều là một miền nguyên.*

(ii) *Mọi miền nguyên hữu hạn đều là trường.*

Ví dụ 1.8.

- Các vành $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ là một trường. Vành số nguyên $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ không là một trường bởi vì các số khác ± 1 đều không khả nghịch.
- Vành đa thức $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ cũng không phải là một trường.

Nhận xét 1.2. Trong các giáo trình đại số tuyến tính, ta hay xét các không gian vec tơ trên trường số thực $\mathbb{R}$.

Bài tập 1.5. Khi nào thì vành $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ là một trường?

Bài tập 1.6. Tìm ví dụ để chứng tỏ rằng vành $Mat(n \times n, \mathbb{R})$ là một vành có ước của không.

Bài tập 1.7. Chứng minh rằng nếu n là một hợp số thì $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ có ước của không.

Bài tập 1.8. Chứng minh rằng mỗi trường đều là một vành không có ước của không.

Bài tập 1.9. Chứng minh Mệnh đề 1.2.

1.2 Đa thức

Định nghĩa 1.10. Một đa thức (một biến) $P(x)$ là một biểu thức

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

trong đó các a_i được gọi là các hệ số và x được gọi là ẩn (hoặc biến) của đa thức. Các a_i có thể nằm trong vành số nguyên $\mathbb{Z}$ trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$. Nếu $a_n \neq 0$ thì ta gọi đa thức $P(x)$ là đa thức bậc n.

Trong tài liệu này hầu hết ta xét các đa thức có hệ số trong $\mathbb{R}$ và gọi là các đa thức hệ số thực hay các đa thức thực.

Một số ký hiệu:

- Kí hiệu bậc của đa thức $P(x)$ là $\deg P$.
- Số a_n gọi là hệ số đầu hoặc hệ số cao nhất của đa thức.
- Số a_0 gọi là hệ số tự do của đa thức.
- Nếu $a_n = a_{n-1} = ... = a_0$ thì $P(x)$ được gọi là đa thức 0 và được coi là có bậc là $-\infty$.

Định nghĩa 1.11. Hai đa thức khác 0 được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng bậc và các hệ số đều bằng nhau.

Tính chất về bậc của đa thức thể hiện qua mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.3. *Cho hai đa thức $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ với $P(x), Q(x) \neq 0$. Khi đó ta có:*

$$\deg\left(P(x) + Q(x)\right) \leq \max\left(\deg P(x), \deg Q(x)\right),$$

$$\deg\left(P(x)Q(x)\right) = \deg\, P(x) + \deg\, Q(x).$$

Mệnh đề 1.4 (Nhị thức Newton)**.** $(1+x)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i x^i$*, với C_n^k kí hiệu là tổ hợp chập k của n phần tử.*

Bài tập 1.10. Chứng minh mệnh đề 1.3.

1.2.1 Cấu trúc đại số của tập các đa thức

Tập các đa thức là một không gian vec tơ

Gọi tập hợp các đa thức ẩn x với hệ số thực là $\mathbb{R}[x]$ và tập con của nó gồm các đa thức thực với bậc không quá d là $P_d[x]$.

Tập hợp $\mathbb{R}[x]$ có hai phép toán cộng và nhân như sau:

Phép cộng hai đa thức:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (a_n x^n + ... + a_0) + (b_m x^m + ... + b_0) \\ &= a_n x^n + ... + a_{m+1} x^{m+1} + (a_m + b_m) x^m + ... + (a_0 + b_0), \end{aligned}$$

(với $m \leq n$).

Phép nhân đa thức với một số thực:

$$\lambda f(x) = \lambda (a_d x^d + ... + a_0) = \lambda a_d x^d + ... + \lambda a_0.$$

Mệnh đề 1.5. *Tập $\mathbb{R}[x]$ các đa thức thực với hai phép toán như trên tạo thành một không gian vec tơ vô hạn chiều và $P_d[x]$ là một không gian vec tơ con $d+1$ chiều.*

Nhận xét 1.3.

- Hệ vec tơ cơ sở của $P_d[x]$ là $\{1, x, x^2, \ldots, x^d\}$.
- Hệ vec tơ cơ sở của $\mathbb{R}[x]$ là $\{1, x, x^2, \ldots, x^d, \ldots\}$
- Ta có đẳng cấu các không gian vec tơ sau:

$$P_d[x] \equiv \mathbb{R}^{d+1}.$$

Bài tập 1.11. Chứng minh đẳng cấu các không gian vec tơ trên:

$$P_d[x] \equiv \mathbb{R}^{d+1}.$$

Tập các đa thức là một vành giao hoán, có đơn vị

Ngoài phép cộng hai đa thức được xác định như trên. Trong tập các đa thức, ta còn có phép nhân 2 đa thức như sau:

$(a_n x^n + ... + a_0)(b_m x^m + ... + b_0) = c_{n+m} x^{n+m} + ... + c_0$ với $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Mệnh đề 1.6. *Tập $\mathbb{R}[x]$ với hai phép toán cộng và nhân đa thức nêu trên tạo thành một vành giao hoán, có đơn vị.*

Ngoài ra, vành đa thức là một vành không có ước của không:

Mệnh đề 1.7. *Nếu $P(x)$ và $Q(x)$là đa thức thuộc $\mathbb{R}[x]$ thì $P(x).Q(x) = 0$ kéo theo $P(x) = 0$ hoặc $Q(x) = 0$.*

Bài tập 1.12. Chứng minh rằng tổng của tất cả các hệ số trong khai triển

$$(8x^9 - 11x^7 + 4x - 2)^3(2x^{10} - 3)^7$$

là bằng 1.

Bài tập 1.13. Chứng minh rằng không có một số hạng nào mang luỹ thừa lẻ của x trong đa thức

$$\begin{aligned} f(x) = (&x^{100} - x^{99} + x^{98} - x^{97} + \cdots + \\ &x^2 - x + 1)(x^{100} + x^{99} + x^{98} + x^{97} + \cdots + x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

1.2.2 Phân tích đa thức thành nhân tử. Nghiệm của đa thức

Vành đa thức là một vành trong đó các phần tử đều có thể phân tích được thành tích các đa thức với bậc nhỏ hơn.

a. Phép chia hết và phân tích đa thức thành nhân tử

Định nghĩa 1.12. Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ với $\deg f \geq \deg g$. Khi đó $f(x)$ được gọi là chia hết cho $g(x)$ nếu $f(x) = g(x).q(x)$. Đa thức $q(x)$ được gọi là thương.

Ký hiệu $g(x)|f(x)$ để chỉ g là ước của f. Một số tính chất của tính chia hết của các đa thức được thể hiện qua định lý sau:

Mệnh đề 1.8. *Cho $f(x), g(x), h(x), k(x)$ là các đa thức. Khi đó, ta có các khẳng định sau:*

(a) *Nếu* $f(x)|g(x)$ *và* $g(x)|h(x)$ *khi đó* $f(x)|h(x)$.

(b) *Nếu* $f(x)|g(x)$ *và* $h(x)|k(x)$ *khi đó* $f(x)h(x)|g(x)k(x)$.

(c) *Nếu* $f(x)|g(x)$ *và* $g(x)|f(x)$ *khi đó* $f(x) = ag(x)$ *với hằng số a khác không.*

(d) *Nếu* $f(x)|g(x)$ *khi đó* $\deg f(x) \leq \deg g(x)$.

(e) *Nếu* $f(x)|g(x)$ *và* $f(x)|h(x)$ *thì* $f(x)|(p(x)g(x) + q(x)h(x))$ *với các đa thức* $p(x)$ *và* $q(x)$ *bất kỳ.*

Vành đa thức $\mathbb{R}[x]$ có những tính chất về chia hết tương tự như vành các số nguyên $\mathbb{Z}$, chẳng hạn như với mệnh đề trên, trong $\mathbb{Z}$ cũng có mệnh đề tương tự như vậy.

Hai đa thức f, g được gọi là kết hợp nếu $f(x) = a.g(x)$ với a là hằng số khác 0. Trong số các đa thức kết hợp $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$, tồn tại một đa thức hệ số bằng 1, đó là $\dfrac{1}{a_n} f(x)$. Ta gọi đó là đa thức monic kết hợp với $f(x)$.

Tương tự với số nguyên tố trong vành các số nguyên $\mathbb{Z}$, đối với vành đa thức $\mathbb{R}[x]$, ta có khái niệm sau

Định nghĩa 1.13. Cho một đa thức $f(x)$ ($\deg f \geq 1$). f được gọi là đa thức bất khả quy nếu f không thể chia hết cho những đa thức nào khác ngoài 1 và những đa thức kết hợp được với nó.

Trong vành $\mathbb{R}[x]$, chỉ có hai dạng đa thức bất khả quy là $ax + b$ (bậc 1) và $ax^2 + bx + c$ (bậc 2 và không phân tích được tức $b^2 - 4ac < 0$).

Định lý 1.1. *Nếu* $f(x)$ *là một đa thức bất khả quy thì nó không thể phân tích thành tích của hai đa thức đều có bậc lớn hơn hay bằng* 1.

Từ định nghĩa và định lý trên có thể suy ra rằng nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức bất khả quy và $f(x)|g(x)$ thì f và g là hai đa thức kết hợp, tức là chúng sai khác nhau một hằng số.

Đối với các miền nguyên khác nhau, chẳng hạn $\mathbb{R}[x]$ và $\mathbb{C}[x]$ thì dạng của đa thức bất khả quy cũng khác nhau. Chẳng hạn ta biết rằng đối với $\mathbb{R}[x]$ thì có 2 dạng của đa thức bất khả quy, đó là $ax + b$ (bậc 1) và $ax^2 + bx + c$ (bậc 2 và không phân tích được tức $b^2 - 4ac < 0$), tuy nhiên đối với $\mathbb{C}[x]$ thì đa thức bất khả quy chỉ có một dạng, đó là đa thức bậc nhất $ax + b$. Điều này dựa trên định lý sau:

Định lý 1.2 (Định lý cơ bản của Đại số)**.** *Một đa thức khác hằng có bậc d và thuộc $\mathbb{C}[x]$ luôn có thể phân tích đầy đủ (kể cả bội) thành d nhân tử với các nhân tử là các đa thức bậc nhất.*

Định nghĩa 1.14. Số c được gọi là nghiệm của đa thức $P(x)$ nếu $P(c) = 0$.

Chú ý rằng số c có thể là số nguyên, số thực hay số phức. Khi đó ta nói $P(x)$ có nghiệm nguyên, nghiệm thực hay nghiệm phức tương ứng.

Định lý cơ bản của Đại số còn thể hiện dưới một phiên bản khác như sau

Định lý 1.3. *Mọi đa thức bậc d với hệ số phức đều có đầy đủ d nghiệm (kể cả bội).*

Nhận xét 1.4.
- Chứng minh đúng đầu tiên cho định lý cơ bản của Đại số là của K. F. Gauss năm 1799 được ông đưa ra trong luận án tiến sĩ của mình.
- Có rất nhiều chứng minh cho định lý này. Cho đến nay hơn 70 cách chứng minh.
- Đặc biệt, mọi chứng minh cho đến nay đều sử dụng một kết quả nào đó của giải tích.

Định lý sau đây được sử dụng khá phổ biến trong các bài toán về phép chia đa thức và nghiệm của đa thức.

Định lý 1.4 (Bézout)**.** *Đa thức $f(x)$ chia hết cho $x - c$ khi và chỉ khi $f(c) = 0$.*

Hệ quả 1.1 (Dạng thứ 2)**.** *Với $f(x)$ là đa thức, c là số thực bất kì thì khi đó*

$$(x - c) | (f(x) - f(c)).$$

Định lý này có một ý nghĩa rất sâu sắc, nó khẳng định một điều rằng việc đi tìm nghiệm của một đa thức đồng nghĩa với trong phân tích nhân tử của đa thức đó, luôn có nhân tử bậc nhất chứa nghiệm.

Ta có định lý sau thể hiên sự phân tích thành nhân tử bất khả quy của các đa thức:

Định lý 1.5. *Một đa thức $f(x) \in k[x]$ luôn phân tích được thành tích của các nhân tử trong đó các nhân tử là các đa thức bất khả quy (kể cả bội).*

Nhận xét 1.5. 1. Theo định lý cơ bản của đại số thì một đa thức $f(x)$ bất kỳ luôn được phân tích như sau:

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n),$$

trong đó $c_i \in \mathbb{C}$.

2. Trong $\mathbb{R}[x]$, một đa thức $f(x)$ bất kỳ luôn được phân tích như sau:

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^{k} (x - d_i)^{n_i} \prod_{j=1}^{q} (x^2 + b_j x + c_j)^{m_j},$$

trong đó $c_i, b_j, c_j \in \mathbb{R}$ và $b_j^2 - 4c_j < 0$.

Bài tập 1.14. Chứng minh rằng nếu một đa thức hệ số thực mà có một nghiệm phức z thì sẽ tồn tại một nghiệm phức liên hợp $\overline{z}$.

Bài tập 1.15. Cho $a_0, a_1, \dots, a_n$ là các số thực sao cho $a_0 \neq 0$ và $a_n \neq 0$. Chứng minh rằng nếu đa thức $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ là bất khả quy thì đa thức

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

cũng là một đa thức bất khả quy.

Bài tập 1.16. Cho $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ thoả mãn $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f(x)$ biểu diễn được thành tổng bình phương của hai đa thức một biến với hệ số thực.

b. Phép chia có dư

Tiếp theo, ta khẳng định rằng với hai đa thức bất kỳ, luôn luôn tồn tại một phép chia:

Định lý 1.6 (Phép chia Euclide)**.** *Cho hai đa thức $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Khi đó tồn tại cặp đa thức $q(x)$ và $r(x)$ duy nhất thuộc $\mathbb{R}[x]$ sao cho $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ với $\deg r(x) < \deg g(x)$.*

Để tìm ước chung lớn nhất (ƯCLN) của hai đa thức $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$. Ta dùng thuật chia Euclide bằng cách thực hiện một số hữu hạn phép chia liên tiếp như sau, với giả sử $\deg f(x) \geq \deg g(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x)q(x) + r(x), \qquad \deg r(x) < \deg g(x)\\
g(x) &= r(x)q_1(x) + r_1(x), \qquad \deg r_1(x) < \deg r(x)\\
&\dots\\
r_{k-2}(x) &= r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x), \qquad \deg r_k(x) < \deg r_{k-1}(x),\\
r_{k-1}(x) &= r_k(x)q_{k+1}(x).
\end{aligned}$$

Đa thức dư cuối cùng khác không trong dãy phép chia nói trên là $r_k(x)$ và

$$(f(x), g(x)) = \frac{r_k(x)}{\text{hệ số cao nhất của } r_k(x)}.$$

Từ thuật toán Euclide, ta thấy rằng nếu $d(x) = (f(x), g(x))$ thì ta có thể tìm được hai đa thức $u(x), v(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x).$$

Nếu trong Định lý 1.6 ta có $g(x) = x - c$, thì phần dư $r(x)$ sẽ có dạng cụ thể như trong mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 1.9 (Bezout)**.** *Cho một đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ với $\deg f(x) = d$. Khi đó phần dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $x - c$ là $f(c)$. Tức là tồn tại đa thức $g(x)$ với $\deg g(x) = d - 1$ sao cho*

$$f(x) = (x - c)g(x) + f(c).$$

Bài tập 1.17. Cho $f(x)$ là đa thức một biến. Chứng minh rằng nếu $(x-1)|f(x^n)$ thì $(x^n-1)|f(x^n)$.

Bài tập 1.18. Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Chứng minh rằng nếu $x^2+x+1|f(x^3)+xg(x^3)$ thì $x-1|f(x)$ và $x-1|g(x)$.

c. Đa thức với hệ số nguyên

Tập các đa thức với hệ số nguyên, tức $\mathbb{Z}[x]$, là một vành giao hoán, có đơn vị. Trong đó, Định lý về phép chia Euclide vẫn đúng trong vành này.

Đối với tập các đa thức lấy hệ số nguyên, ngoài những tính chất chia hết như Mệnh đề 1.8, tính chất chia hết còn được thể hiện như sau:

Mệnh đề 1.10. *Nếu $f(x)|g(x)$ và $g(x)|f(x)$ thì $f(x)=\pm g(x)$.*

Tương tự như định nghĩa của đa thức bất khả quy trong $\mathbb{C}[x], \mathbb{R}[x]$, một đa thức trong $\mathbb{Z}[x]$ là bất khả quy nếu nó không thể phân tích được thành tích hai đa thức với hệ số nguyên.

Ví dụ 1.9.

1. $2x^2+3$ là một đa thức bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$.

2. $2x^2-3$ là một đa thức khả quy trong $\mathbb{R}[x]$ nhưng lại bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$.

   Thật vậy, nếu có hai đa thức $f(x)=ax+b, g(x)=cx+d$ trong đó a,b,c,d là các số nguyên sao cho $2x^2-3=(ax+b)(cx+d)$. Khi đó, đồng nhất hệ số ta được hệ $\begin{cases} ac &= 2 \\ ad+bc &= 0 \\ bd &= -3 \end{cases}$. Do $d\neq 0$ nên $adc=2d \Leftrightarrow -bc^2=2d$, mặt khác $d=\frac{-3}{b}$ nên $-bc^2=\frac{-3}{b}.2 \Leftrightarrow b^2c^2=6$ hay $(ab)^2=6$. Do đó không tồn tại các số nguyên a,b,c,d để có phân tích trên.

Việc xác định xem một đa thức thuộc $\mathbb{Z}[x]$ có bất khả quy hay không là một bài toán rất khó. Không thể có tiêu chuẩn đặc trưng nào. Tuy vậy, ta có điều kiện đủ sau đây:

Định lý 1.7 (Tiêu chuẩn Eisenstein). *Cho $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ là một đa thức với các hệ số nguyên và p là một số nguyên tố chia hết $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, sao cho $p \not| a_n$ và $p^2 \not| a_0$. Khi đó $f(x)$ bất khả quy.*

Các đa thức với hệ số nguyên còn có tính chất liên quan đến nghiệm hữu tỉ của đa thức đó

Định lý 1.8. *Cho $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ là đa thức với các hệ số nguyên. Khi đó, nếu $f(x)$ có nghiệm hữu tỉ $x = \frac{p}{q}$ với $(p, q) = 1$ thì $p|a_0$ và $q|a_n$.*

Chứng minh. Giả sử $x = \frac{p}{q}$ là nghiệm hữu tỉ của $f(x)$. Tức là

$$a_n(\frac{p}{q})^n + a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1} + \cdots + a_1(\frac{p}{q}) + a_0 = 0.$$

Khi đó ta nhân hai vế với q^n và chuyển vế thì ta có

$$a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \cdots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = -a_n p^n.$$

Từ đây ta suy ra $p|a_0$ và $q|a_n$ (đpcm). □

d. Tổng các hệ số của đa thức

Cho đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, với cách viết này, hệ số a_k sẽ đi với luỹ thừa x^k.

Ta có

$$\begin{aligned} f(1) &= a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0 \\ f(-1) &= (-1)^n a_n + (-1)^{n-1}a_{n-1} + \cdots + (-1)a_1 + a_0, \end{aligned}$$

do đó

$$f(1) + f(-1) = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{2m} + \ldots)$$

$$f(1) - f(-1) = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2m+1} + \dots)$$

Vậy, khi khai triển đa thức:

- Tổng các hệ số chính là $f(1)$.
- Tổng các hệ số theo luỹ thừa chẵn là $\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$.
- Tổng các hệ số theo luỹ thừa lẻ là $\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$.
- $(1+x)^n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k x^k$. Vậy hệ số của x^k là C_n^k.

1.2.3 Hàm đa thức

Thực chất, cho một đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ nghĩa là cho một hàm số $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$x \mapsto P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Do đó, nếu thay $x = c$ thì giá trị của hàm tại điểm c là

$$P(c) = a_d c^d + a_{d-1}c^{d-1} + \ldots + a_1 c + a_0.$$

Ví dụ 1.10. $P(0) = a_0$, $P(1) = a_d + a_{d-1} + ... + a_0, \ldots$

Hàm đa thức là một hàm liên tục, do đó đa thức mang đầy đủ tính chất của một hàm liên tục thông thường.

a. Hàm đa thức là một hàm liên tục

Đa thức là một hàm liên tục, nghĩa là đồ thị của nó là một đường cong liền nét, với đồ thị là tập hợp sau:

$$Graph(f) = \{(x, f(x)) | x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Chú ý rằng hàm đa thức là một hàm liên tục và các đạo hàm của nó cũng là những hàm liên tục trên $\mathbb{R}$:

Định lý 1.9. *Cho $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ là một đa thức và c là một điểm bất kỳ trên đường thẳng thực $\mathbb{R}$. Khi đó với bất kỳ giá trị $\epsilon > 0$ bé tuỳ ý, tồn tại một số dương δ sao cho*

$$|f(c+h) - f(c)| < \epsilon, \forall |h| < \delta.$$

Điều hệ quả ở đây là với hàm đa thức, nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến a thì $\{f(x_n)\}$ sẽ hội tụ đến $f(a)$.

Định lý 1.10 (Định lý Bolzano-Cauchy)**.** *Nếu đa thức $P(x)$ cho trước thỏa mãn điều kiện: Tồn tại hai số $a, b (a < b)$ sao cho $P(a) \cdot P(b) < 0$ thì $P(x)$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (a, b)$.*

Bài tập 1.19. Cho $f(x) = x^2 + 4x$. Tìm $\delta > 0$ sao cho $|f(1+h) - f(1)| < \dfrac{1}{10}$ với mọi $|h| < \delta$.

Bài tập 1.20. Cho $f(x)$ là một đa thức thực.

a, Chứng minh rằng nếu $f(a) > 0$ với số thực a nào đó thì tồn tại số thực $h > 0$ sao cho

$$f(x) > 0, \forall x \in (a-h, a+h).$$

b, Mở rộng tình huống trên với giả thiết $f(a) \neq 0$.

b. Hàm đa thức là một hàm khả vi

Thực chất, đa thức bậc n là một hàm khả vi liên tục vô hạn $n+1$ lần với

$$P^{(n)}(x) = n!a_n.$$

Vì vậy đa thức có những tính chất của hàm khả vi liên tục.

Định lý 1.11 (Định lý Rolle cho đa thức)**.** *Nếu đa thức $P(x)$ có hai nghiệm thực phân biệt a, b thì đa thức $P'(x)$ sẽ có ít nhất một nghiệm thực nằm giữa a và b.*

1.2.4 Một số tính chất của nghiệm

a. Định lý Viete

Mối quan hệ đầu tiên ta muốn đề cập đến ở đây là định lý Viete. Chẳng hạn, xét đa thức bậc 2 sau:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Ta có quan hệ giữa nghiệm và các hệ số

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 &= \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Trường hợp đa thức f có bậc 3, ta phân tích

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

đồng nhất hệ số ta được

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{a_2}{a_3} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{a_1}{a_3} \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{a_0}{a_3}. \end{aligned}$$

Định lý 1.12 (Định lý Viete). *Nếu đa thức*

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

có n nghiệm (kể cả bội) là $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \\ \sum_{1\le i<j\le n} \alpha_i\alpha_j &= \frac{a_{n-2}}{a_n}; \\ &\ldots \\ \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_k} &= (-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}; \\ &\ldots \\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

b. Sự liên quan giữa nghiệm và đạo hàm của đa thức

Để giải quyết các bài toán về đẳng thức hay bất đẳng thức hoặc những tính toán về nghiệm của đa thức liên quan đến đa thức đạo hàm của nó, ta cần kết quả sau đây.

Mệnh đề 1.11. *Cho đa thức một biến $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Giả sử ta có phân tích*

$$P(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n).$$

Khi đó, với mọi $c \in \mathbb{C}$, ta có:

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{c - c_i} = \dfrac{P'(c)}{P(c)}$.
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{c_i}{c - c_i} = c\dfrac{P'(c)}{P(c)} - n$.

1.2.5 Đa thức nội suy, cận của nghiệm

a. Định lý nội suy của Lagrange

Trong một số bài toán về xác định đa thức hoặc làm việc với những đa thức nhưng không rõ hệ số mà chỉ cho giả thiết về các không điểm thì định lý nội suy tỏ ra khá hữu hiệu.

Định lý 1.13 (Công thức nội suy Lagrange)**.** *Một đa thức có bậc n sẽ được xác định từ giá trị của nó tại $n+1$ điểm. Đa thức bậc không quá n thỏa mãn $P(x_i) = y_i, i = 0, 1, ..., n$ sẽ có dạng*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{0 \le j \le n; i \ne j} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)},$$

trong đó hệ số của đơn thức x^n là $\sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{y_i}{\prod\limits_{0 \le j \le n; i \ne j} (a_i - a_j)}$.

b. Cận của nghiệm và số nghiệm của đa thức

Nếu các không điểm không thể được xác định tường minh thì một trong những cách đánh giá, đó là chú ý đến các cận của nghiệm. Ước lượng một nghiệm phức của một đa thức là việc không hề đơn giản. Công cụ chúng tôi giới thiệu ở đây là Định lý Rouché và bất đẳng thức tam giác các số phức.

Mệnh đề 1.12. *Cho $x, y \in \mathbb{C}$. Khi đó ta có:*

$$|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Định lý 1.14 (Rouché)**.** *Cho f và g là hai đa thức và γ là một đường cong đóng không tự cắt (chẳng hạn đường tròn). Nếu*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|,$$

với mọi $z \in \gamma$, thì số nghiệm của f và g nằm trong phần trong của miền giới hạn bởi γ là bằng nhau.

Hệ quả 1.2. *Cho đa thức $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$, với $a_i \in \mathbb{C}$. Khi đó, trong miền giới hạn bởi đường tròn $|z| = 1 + \max_i |a_i|$, tồn tại đầy đủ n nghiệm của đa thức P (kể cả bội).*

Giả sử đa thức f có dạng $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, với một số $M > 0$ đủ lớn, nếu $|r| > M$ thì

$$|a_n r^n| > |a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0|.$$

Do đó $|f(r)| = |a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0| \geq |a_n r^n| - |a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0| > 0$. Từ đó ta suy ra $|f(r)| \neq 0$ với $r > M$ hoặc $r < -M$, nói cách khác, mọi nghiệm của đa thức f đều nằm trong khoảng $[-M, M]$. Ta có định lý sau đây

Định lý 1.15. *Cho đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ với $a_n \neq 0$. Đặt $m = \max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_0|\}$ và $M = \frac{m}{|a_n|} + 1$. Khi đó*

$$|a_n r^n| > |a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0|$$

với mọi $|r| \geq M$.

Một số bài toán thường sử dụng kết quả sau đây để định lượng được cận trên của số nghiệm dương của một phương trình đa thức.

Định lý 1.16 (Descartes)**.** *Số nghiệm dương của một đa thức không vượt quá số lần đổi dấu của các hệ số.*

Chương 2

SỬ DỤNG CÁC TÍNH CHẤT CỦA BẬC VÀ CỦA NGHIỆM CỦA ĐA THỨC

Nắm rõ khái niệm cơ bản về bậc và nghiệm, ta có thể giải quyết được một số bài toán khó bằng những nhận xét rất đơn giản từ hai yếu tố này.

2.1 Một số bài toán về phép chia đa thức

Bài toán 2.1. Cho $P(x) = x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$. Tìm dư của phép chia $P(x)$ cho:

a, $x - 1$.

b, $x^2 - 1$.

Bài toán 2.2. Tìm dư của phép chia:

a, $x^2 + 1$ cho $x + 1$.

b, $x^6 + x^3 + 1$ cho $x^2 + x + 1$.

c, $x^{12} + x^8 + x^4 + 1$ cho $x^3 + x^2 + x + 1$.

d, $f(x^{100})$ cho $f(x)$ với $f(x) = x^{99} + x^{98} + \cdots + x + 1$.

Bài toán 2.3. Chứng minh rằng với mọi giá trị $n \in \mathbb{N}$, đa thức $(x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$.

Bài toán 2.4. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì đa thức $f(x) = x^{2n} - x^n + 1$ không chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x + 1$.

Bài toán 2.5. Với những số nguyên dương nào thì:

a, Đa thức $x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho $x^2 - x + 1$.

b, Đa thức $x^{2n} - x^n + 1$ chia hết cho $x^2 - x + 1$.

2.2 Một số bài toán sử dụng tính chất của bậc đa thức

Bài toán 2.6. Giả sử $P(x),\ Q(x)$ là hai đa thức khác nhau sao cho

$$P\left(Q(x)\right) \equiv Q\left(P(x)\right),\ \forall x.$$

Chứng minh rằng $P\left(P(x)\right) - Q\left(Q(x)\right)$ chia hết cho $P(x) - Q(x)$.

Bài toán 2.7 (USA 1975)**.** Cho đa thức $P(x)$ bậc n thỏa mãn $P(x) = \dfrac{x}{x+1}$ với $x = 0, 1, ..., n$. Tìm $P(n+1)$.

Nhận xét 2.1. Đối với những bài toán có thể sử dụng tính chất bậc đa thức thì lưu ý ta thường dùng tính chất cân bằng bậc ở hai vế. Điều đó thể hiện qua lời giải của bài toán trên hay như lời giải của bài toán sau.

Bài toán 2.8. Chứng minh rằng đa thức $P(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$ không có nghiệm bội.

Bài toán 2.9 (Việt Nam 1986)**.** Cho $P(x)$ là một đa thức bậc n sao cho $P(k) = 2^k$ với mọi $k = 1, 2, ..., n+1$. Xác định $P(n+2)$.

Bài toán 2.10 (Putnam)**.** Cho $P(x)$ là đa thức bậc n. Biết rằng $P(k) = \frac{k}{k+1}, k = 0, 1, ..., n$. Tìm $P(m)$ với $m > n$.

Bài toán 2.11 (IMO 1976)**.** Cho $P_1(x) = x^2 - 2$ và $P_{i+1}(x) = P_1(P_i(x))$ với $i \in \{1, 2, 3, ...\}$. Chứng minh rằng $P_n(x) = x$ chỉ có các nghiệm thực phân biệt với mọi n.

Bài toán 2.12 (IMC 2001). Chứng minh rằng nếu đa thức $X^n + X^{n-1} + ... + X + 1$ có thể viết thành tích của hai đa thức monic với các hệ số không âm thì các hệ số ấy chỉ gồm 0 hoặc 1.

Bài toán 2.13. Chứng minh rằng đa thức

$$f(x) = (x^2 + 1^2)(x^2 + 2^2)...(x^2 + n^2) + 1$$

không thể biểu diễn thành tích của hai đa thức có hệ số nguyên với bậc dương.

Bài toán 2.14 (Motzkin). Chứng minh rằng

$$M(X, Y) = X^4Y^2 + X^2Y^4 - 3X^2Y^2 + 1$$

là đa thức không âm nhưng không là tổng bình phương của các đa thức.

2.3 Sử dụng định lý Viete

Bài toán 2.15. Cho đa thức bậc n: $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1$ với các hệ số không âm và có n nghiệm thực. Chứng minh rằng $f(2) \geq 3^n$.

Bài toán 2.16 (Olympic Toàn quốc - 2015). Cho α, β, γ là các nghiệm của phương trình $x^3 - 2015x + 4 = 0$. Hãy tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

Bài toán 2.17 (Học viện Phòng không - Không quân). Cho các đa thức với hệ số phức:

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

$$Q(x) = x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots b_{m-1}x + b_m.$$

Biết rằng $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$ và tồn tại $k(k = 1, 2, \ldots, m)$ sao cho $|b_k| > C_m^k.2010^k$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất $a_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ sao cho $|a_i| > 2009$.

Bài toán 2.18 (ĐH Ngoại thương 2010)**.** Cho đa thức có hệ số thực $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$ với n là một số chẵn. Biết rằng $P(x)$ có đúng n nghiệm dương. Chứng minh rằng

$$|a_{n-k}a_k| \geq (C_n^k)^2|a_0|.$$

2.4 Sử dụng tính chất của nghiệm phức

Bài toán 2.19 (ĐH Nông nghiệp 2011)**.** Chứng minh rằng đa thức $P(x) = x^{2012} + x^{1006} + 1$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^2 + x + 1$.

Nhận xét 2.2. Bài toán này có thể cho đa thức $P(x)$ với các số mũ của đơn thức khác đi, chẳng hạn, bài toán đúng với $P(x) = x^{3n+2} + x^{3m+1} + 1$. Có thể cho nhiều đề toán khác nhau theo kiểu này, chẳng hạn cho $Q(x) = x^m + x^{m-1} + ... + x + 1$ đồng thời $P(x) = x^{k_m} + x^{k_{m-1}} + ... + x^{k_1} + 1$ với k_i chia $m+1$ dư i trong đó $i = 1, 2, ..., m$.

Bài toán 2.20 (ĐHSP TpHCM 2010)**.** Cho các đa thức $f(x), g(x)$ thỏa mãn $f(x^{2010} + 2009) + xg(x^{2010} + 2009)$ chia hết cho $x^2 + x + 1$. Chứng minh rằng $f(x), g(x)$ đều chia hết cho $x - 2010$.

2.5 Một số bài toán liên quan đến tính bị chặn của nghiệm

Bài toán 2.21. Cho đa thức $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ thỏa mãn $a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_1 \geq a_0 > 0$. Chứng minh rằng nếu r là nghiệm bất kỳ của $P(x) = 0$ thì $|r| \leq 1$, nói cách khác là nghiệm của $P(x)$ luôn nằm trên hoặc phần trong của đường tròn đơn vị.

Bài toán 2.22. Chứng minh rằng với đa thức $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kz^k$ thỏa mãn $\sup\limits_{|z|=1} |f(z)| = M$ thì $\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|^2 \leq M^2$.

Bài toán 2.23 (Trung Quốc - 1994)**.** Cho đa thức bậc n có dạng

$$f(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n,$$

với các hệ số của f đều là các số phức. Chứng minh rằng tồn tại một số phức z_0 sao cho $|z_0| \leq 1$ thỏa mãn $|f(z_0)| \geq |c_0| + |c_n|$.

Chương 3

SỬ DỤNG CÁC TÍNH CHẤT SỐ HỌC

Chương này chủ yếu nói đến các bài toán trong vành số nguyên $\mathbb{Z}$ và vành các đa thức với hệ số nguyên $\mathbb{Z}[x]$.

3.1 Sử dụng tính chẵn lẻ

Bài toán 3.1. Cho $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên, trong đó $f(0), f(1)$ là các số lẻ. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm nguyên.

Bài toán trên có thể tổng quát hoá thành bài toán sau đây

Bài toán 3.2. Cho $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu

$$f(0), f(1), \ldots, f(m-1)$$

đều không chia hết cho m ($m \in \mathbb{N}, m \geq 2$) thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm nguyên.

3.2 Sử dụng định lý Bezout kết hợp với tính chia hết trong tập số nguyên

Ta thường sử dụng kết quả sau đây được suy ra từ Định lý Bezout đối với trường hợp các đa thức trong vành $\mathbb{Z}[x]$.

Mệnh đề 3.1. *Nếu $P(x)$ là một đa thức có hệ số nguyên thì $a - b | P(a) - P(b)$ với mọi $a, b \in \mathbb{Z}$.*

Một số bài tập sử dụng mệnh đề trên được liệt kê sau đây:

Bài toán 3.3 (USA 1974)**.** Cho a, b, c là ba số nguyên phân biệt và cho $P(x)$ là một đa thức một biến với hệ số nguyên. Chứng tỏ rằng trong trường hợp này thì các điều kiện $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$ không thể thỏa mãn đồng thời.

Một tổng quát hóa của bài toán trên là:

Bài toán 3.4. Cho $P(x)$ là một đa thức một biến với hệ số nguyên và n là một số nguyên dương lẻ. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là một dãy các số nguyên thỏa mãn $P(x_1) = x_2, P(x_2) = x_3, \ldots, P(x_{n-1}) = x_n$. Chứng minh rằng tất cả các số $x_i (i = 1, \ldots, n)$ đều bằng nhau.

3.3 Sử dụng một số tính chất của số nguyên tố

Bài toán 3.5. Có tồn tại hay không một đa thức P khác hằng với hệ số nguyên và một số tự nhiên $k > 1$ sao cho các số $P(k^n)$ là các số nguyên tố cùng nhau từng đôi một hay không?

Bài toán 3.6 (THTT)**.** Cho số tự nhiên $n \geq 2$. Chứng minh rằng phương trình $\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{x^2}{2!} + x + 1 = 0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Bài toán 3.7 (Olympic 2002)**.** Có tồn tại hay không đa thức $P(x)$ bậc 2002, sao cho $P(x^2 - 2001)$ chia hết cho $P(x)$.

3.4 Một số bài toán về đa thức với hệ số nguyên

Bài toán 3.8. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + px + q$ trong đó p, q là các số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k để

$$f(k) = f(2015).f(2016).$$

Bài toán 3.9 (Nga 2004)**.** Đa thức $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \cdots + a_{n-1}x + a_n$ với hệ số nguyên có n nghiệm nguyên phân biệt. Chứng minh rằng nếu các nghiệm là nguyên tố cùng nhau từng đôi một thì a_{n-1} và a_n là nguyên tố cùng nhau.

Bài toán 3.10 (Ukraina, 2016)**.** Tồn tại hay không một số thực x sao cho các số $x + \sqrt{2}$ và $x^4 + \sqrt{2}$ đều là số hữu tỷ.

Chương 4

SỬ DỤNG MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ SỞ CỦA GIẢI TÍCH

Một số kiến thức được nhấn mạnh trong chương này là: Định lý giá trị trung gian, các định lý giá trị trung bình (Rolle, Lagrange), quy tắc dấu của Descartes.

4.1 Định lý giá trị trung gian (Bolzano - Cauchy)

Bài toán 4.1. Cho a, b, c, d là các số thực. Chứng minh rằng nếu phương trình $ax^2 + (b+c)x + d + e = 0$ (1) có nghiệm thực thuộc $[1; \infty)$ thì phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ cũng có nghiệm thực.

Bài toán 4.2 (Hungary for IMO 1968)**.** Cho a_i $(i = 1, 2, ..., n)$ là các số thực phân biệt. Chứng minh rằng phương trình $\dfrac{a_1}{a_1 - x} + \dfrac{a_2}{a_2 - x} ... + \dfrac{a_n}{a_n - x} = n$ có ít nhất $n - 1$ nghiệm thực.

Bài toán 4.3 (Bulgaria 1998)**.** Cho đa thức $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Tìm số các nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 0$.

4.2 Sử dụng các định lý giá trị trung bình của phép tính vi phân

Bài toán 4.4 (Đại học Bách khoa Hà Nội)**.** Cho đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm thực. Chứng minh rằng đa thức $P(x) = f(x) - f'(x)$ cũng có ít nhất hai nghiệm thực.

Bài toán 4.5. Cho đa thức với hệ số thực $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n;\ a_n \neq 0.$

a, Chứng minh rằng nếu $P(x)$ chỉ có nghiệm thực thì $P'(x)$, ... , $P^{(n-1)}(x)$ cũng chỉ có nghiệm thực.

b, Chứng minh rằng nếu $P(x)$ chỉ có nghiệm thực và a là nghiệm bội của $P'(x) = 0$ thì $P(a) = 0$.

Bài toán 4.6 (Olympic 2006)**.** Giả sử $P(x)$ là đa thức có n nghiệm thực phân biệt lớn hơn 1. Chứng minh rằng đa thức $Q(x) = (P(x))^2 + (x+1)P(x)P'(x) + x(P'(x))^2$ có ít nhất $2n - 1$ nghiệm thực phân biệt.

Bài toán 4.7 (Olympic 2003)**.** Cho đa thức với hệ số thực $P(x)$ bậc n $(n \geq 1)$ có m nghiệm thực. Chứng minh rằng đa thức $Q(x) = (x^2+1)P(x) + P'(x)$ có ít nhất m nghiệm thực.

4.3 Phương pháp nội suy Lagrange

Với phương pháp này, ta thường vận dụng kết quả sau đây, gọi là công thức nội suy

Định lý 4.1 (Công thức nội suy Lagrange)**.** *Một đa thức có bậc n sẽ được xác định từ giá trị của nó tại $n+1$ điểm. Đa thức bậc không quá n thỏa mãn $P(x_i) = y_i, i = 0, 1, ..., n$ sẽ có dạng*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{0 \leq j \leq n; i \neq j} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Với hệ số của đơn thức x^n là $\sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{y_i}{\prod\limits_{0\leq j\leq n; i\neq j} (x_i - x_j)}$.

Bài toán 4.8 (Vietnam for IMO 1977)**.** Giả sử $x_0, x_1, ..., x_n$ là các số nguyên sao cho $x_0 > x_1 > ... > x_n$. Chứng minh rằng tồn tại một số trong các số

$$|P(x_0)|, |P(x_1)|, ..., |P(x_n)|$$

không nhỏ hơn $\dfrac{n!}{2^n}$ với $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ là đa thức hệ số thực.

Bài toán 4.9 (IMO Shortlist 1981)**.** Cho P là đa thức bậc n thỏa mãn với mọi $k = 0, 1, 2, ..., n$ thì $P(k) = \dfrac{1}{C_{n+1}^{k}}$. Xác định $P(n+1)$.

Bài toán 4.10. Chứng minh rằng tồn tại một số c dương sao cho với tất cả các số nguyên dương n và bộ số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nếu

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$$

thì $\max_{x\in[0,2]} |P(x)| \leq c^n \max_{x\in[0,1]} |P(x)|$.

4.4 Quy tắc Descartes

Bài toán 4.11 (ĐH Giao thông SG 2014)**.** Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số dương. Chứng minh rằng phương trình sau có đúng một nghiệm dương: $x^n - a_1 x^{n-1} - ... - a_n = 0$.

Bài toán 4.12 (ĐHSP HN 2014)**.** Chứng minh rằng phương trình

$$x^n + x^{n-1} + ... + x - 1 = 0$$

chỉ có duy nhất một nghiệm dương.

4.5 Sử dụng đa thức đạo hàm như một công cụ trung gian

Bài toán 4.13. Chứng minh rằng với đa thức $P(x)$ tùy ý có bậc $n > 1$, có n nghiệm khác nhau $x_1, ..., x_n$, ta có đẳng thức $\dfrac{1}{P'(x_1)} + \dfrac{1}{P'(x_2)} + ... + \dfrac{1}{P'(x_n)} = 0$.

Bài toán 4.14 (IMC 1998)**.** Cho P là một đa thức bậc n với hệ số thực và P chỉ có các nghiệm thực. Chứng minh rằng $(n-1)(P'(x))^2 \geq nP(x)P''(x)$.

Bài toán 4.15. Chứng minh rằng nếu $Q(x)$ chỉ có các nghiệm thực phân biệt thì $(Q'(x))^2 - Q(x)Q''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 4.16. Cho đa thức hệ số thực $P(x) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$ chỉ có các nghiệm thực là $x_1, x_2, ..., x_n$. Chứng minh rằng với mọi số thực a lớn hơn tất cả các nghiệm thực ấy thì ta có bất đẳng thức: $(\frac{P'(a)}{n})^n \geq (P(a))^{n-1}$. Dấu bằng xảy ra khi nào?

Bài toán 4.17 (Bách khoa HN 2014)**.** Cho đa thức $f(x) = 2014x^{2014} + a_{2013}x^{2013} + ... + a_1x + a_0$ có 2014 nghiệm thực $x_1, x_2, ..., x_{2014}$ và $g(x) = 2014x^{2013} + a_{2013}x^{2012} + ... + a_2x + a_1$. Chứng minh rằng $\sum\limits_{i=1}^{2014} \frac{g(x_i)}{f'(x_i)} = 1$.

Bài toán 4.18 (ĐH Hà Tĩnh 2012)**.** Trên tập hợp các số phức $\mathbb{C}$, gọi $1, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ là $n+1$ giá trị căn bậc $n+1$ khác nhau của 1. Tính giá trị biểu thức

$$S = \frac{1}{1-\omega_1} + \frac{1}{1-\omega_2} + ... + \frac{1}{1-\omega_n}.$$

Bài toán 4.19. Cho $P(x)$ là một đa thức bậc n có n nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng với mọi $c > 0$, tập hợp các điểm x sao cho $\frac{P'(x)}{P(x)} > c$ là hợp của một số hữu hạn các khoảng không giao nhau và tổng các độ dài của chúng bằng $\frac{n}{c}$.

Bài toán 4.20. Cho đa thức $P(x) = a_0 + a_1x + \ ... \ + a_nx^n$ có n nghiệm thực phân biệt $x_1, \ ... \ , x_n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0.$$

Bài toán 4.21. Cho $P(x)$ là một đa thức bậc n thỏa mãn $P(2^k) = \frac{1}{2^k}, \forall k = 0, 1, \ldots, n$. Tìm $P(0)$.

4.6 Sử dụng Nguyên lý Rouché

Bài toán 4.22 (Romania)**.** Cho $f \in \mathbb{C}[x]$ là một đa thức monic. Chứng minh rằng ta có thể tìm được một số $z \in \mathbb{C}$ sao cho $|z| = 1$ và $|f(z)| \geq 1$.

Bài toán 4.23 (Perron's criterion)**.** Cho $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ là một đa thức với $a_0 \neq 0$ và

$$|a_{n-1}| > 1 + |a_{n-2}| + \cdots + |a_1| + |a_0|.$$

Khi đó $P(x)$ là bất khả quy.

Chương 5

CÁC BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA THỨC

Bài toán đi tìm một đa thức cho bởi một phương trình ràng buộc của nó là bài toán phương trình hàm đa thức. Loại bài toán này hầu hết là các bài toán không mẫu mực, đòi hỏi vận dụng tổng hợp nhiều kiến thức khác nhau. Ở đây chúng tôi đưa ra một số bài toán như vậy.

5.1 Định lượng tại các điểm đặc biệt và thu nhỏ bậc đa thức

Ta bắt đầu bằng ví dụ sau đây thể hiện phương pháp này:

Bài toán 5.1. Xác định các đa thức $P(x)$ thỏa mãn $16P(x^2) = P(2x)^2$.

Bài toán 5.2 (Olympic 2005)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $P(0) = 0,\ \ 0 \le P'(x) \le P(x),\ \ \forall x \in [0, 1]$.

Bài toán 5.3 (IMO, CĐSP HN 2012)**.** Xác định tất cả các đa thức với hệ số thực sao cho $[P(x)]^2 - 2 = 2P(2x^2 - 1)$.

Bài toán 5.4 (IMO)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)^2 + P\left(\frac{1}{x}\right)^2 = P(x^2)P\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Bài toán 5.5 (ĐHSP Huế 2012)**.** Tìm đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho

$$P(x^2 + 1) = P(x)P(x + 1).$$

Bài toán 5.6 (ĐH Quảng Nam 2011)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn đẳng thức

$$(P(x))^2 - (P(y))^2 = P(x - y).P(x + y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

5.2 Khảo sát hệ số của đa thức

Bài toán 5.7 (Rumani 1980)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ khác không thỏa mãn đồng nhất thức

$$P(x^2) \equiv [P(x)]^2.$$

Bài toán 5.8 (Olympic 2007)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực và thỏa mãn

$$1 + P(x) = \frac{1}{2}\left[P(x-1) + P(x+1)\right].$$

Bài toán 5.9. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thoả mãn điều kiện

$$P(x).P(y) = P^2(\frac{x+y}{2}) - P^2(\frac{x-y}{2}), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

5.3 Dùng những tính chất đặc biệt của đa thức

Khác với hàm khả vi thông thường, đa thức bậc n không thể có quá n không điểm. Do đó, trong nhiều bài toán, ta thường dùng mệnh đề sau:

Mệnh đề 5.1. *Đa thức thỏa mãn $f(x) = f(x+a), a \neq 0$ là đa thức hằng.*

Bài toán 5.10. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ sao cho

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1.$$

Bài toán 5.11. Tìm đa thức $P(x)$ hệ số thực thoả $xP(x-1) = (x-3)P(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán này có thể tổng quát hoá như sau:

Bài toán 5.12. Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thoả mãn điều kiện

$$xP(x-a) = (x-b)P(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 5.13. Cho đa thức bậc hai: $f(x) = x^2 + px + q$. Xác định đa thức bậc 4, monic thoả mãn:

$$f(g(x)) = g(f(x)).$$

5.4 Phương trình hàm có dạng P(f)P(g) = P(h)

Bài toán 5.14 (Bài toán tổng quát)**.** Giả sử các đa thức $f(x), g(x), h(x)$ cho trước thỏa mãn điều kiện $\deg f(x) + \deg g(x) = \deg h(x)$. Tìm tất cả các đa thức thỏa

$$P(f(x))P(g(x)) = P(h(x)).\ (*)$$

Lời giải bài toán này dựa trên các mệnh đề sau:

Mệnh đề 5.2. *Nếu P, Q là nghiệm của phương trình (*) thì $P.Q$ cũng là nghiệm của phương trình (*).*

Từ đó suy ra hệ quả là: nếu $P(x)$ là nghiệm của $(*)$ thì $P^n(x)$ cũng là nghiệm của $(*)$.

Bài toán 5.15. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ khác hằng sao cho

$$P(x)P(x+1) = P(x^2+x+1).$$

Bài toán 5.16. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thoả mãn điều kiện

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3+x).$$

Chương 6

MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP

Trong chương này chúng ta sẽ đến với một số bài toán liên quan đến nhiều nhánh khác nhau của toán học, chẳng hạn liên hệ với không gian vec tơ các đa thức và không gian vec tơ con của nó, một số bài toán liên quan đến tổ hợp, đồ thị,... và những phương pháp giải cần những kiến thức tổng hợp được chúng tôi tuyển chọn ở đây.

6.1 Các bài toán liên quan đến đại số tuyến tính

Bài toán 6.1. Cho $P_n[x]$ là không gian vec tơ các đa thức có bậc nhỏ hơn n. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở $\{1, x, \ldots, x^n\}$ sang cơ sở

$$\{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\}.$$

Bài toán 6.2. Gọi $\mathcal{D}$ là toán tử vi phân trên $P_n[x]$ (các đa thức với hệ số thực có bậc nhỏ hơn n) được xác định như sau: Nếu

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \in P_n[x]$$

thì

$$\mathcal{D}(p(x)) = a_1 + 2a_2x + \cdots + ia_ix^{i-1} + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2}.$$

(a) Chứng tỏ rằng $\mathcal{D}$ là một phép biến đổi tuyến tính trên $P_n[x]$.

(b) Tìm giá trị riêng của $\mathcal{D}$ và $\mathcal{I} + \mathcal{D}$.

(c) Tìm ma trận biểu diễn của $\mathcal{D}$ dưới các cơ sở

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\} \text{ và } \{1, x, \frac{x^2}{2}, \ldots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\}.$$

(d) Ma trận biểu diễn của $\mathcal{D}$ có chéo hoá được không?

Bài toán 6.3. Cho một ánh xạ trên $P_n[x]$ xác định như sau:

$$\mathcal{A}(p(x)) = xp'(x) - p(x), p(x) \in P_n[x].$$

(a) Chứng tỏ rằng $\mathcal{A}$ là một phép biến đổi tuyến tính trên $P_n[x]$.

(b) Tìm $Ker\mathcal{A}$ và $Im\mathcal{A}$.

(c) Chứng minh rằng $P_n[x] = Ker\mathcal{A} \oplus Im\mathcal{A}$.

Bài toán 6.4. Cho không gian vec tơ $P[x]$ trên $\mathbb{R}$. Đặt:

$$\mathcal{A}f(x) = f'(x), f(x) \in P[x]$$

và

$$\mathcal{B}f(x) = xf(x), f(x) \in P[x].$$

Chứng minh rằng:

(a) $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ là các phép biến đổi tuyến tính.

(b) $Im\mathcal{A} = P[x]$ và $Ker\mathcal{A} \neq \{0\}$.

(c) $Ker\mathcal{B} = \{0\}$ và $\mathcal{B}$ không có ánh xạ ngược.

(d) $\mathcal{AB} - \mathcal{BA} = \mathcal{I}$.

(e) $\mathcal{A}^k\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}^k = k\mathcal{A}^{k-1}$ với mọi số nguyên dương k.

Bài toán 6.5. Giả sử $P(x), Q(x), R(x), T(x)$ là các đa thức một biến với hệ số thực thỏa mãn đa thức

$$P(x^{2016} + 2017) + xQ(x^{2016} + 2017) + x^2R(x^{2016} + 2017) + x^3T(x^{2016} + 2017)$$

chia hết cho đa thức $x^4 + x^2 + 1$. Chứng minh rằng các đa thức $P(x), Q(x), R(x), T(x)$ đều có nghiệm $x = 2018$.

6.2 Các bài toán liên quan đến tổ hợp

Đa thức có khá nhiều ứng dụng trong việc giải một số bài toán về tổ hợp, một trong những ứng dụng đó là hàm sinh.

Bài toán 6.6. Xác định công thức của $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, trong đó $a_n = C_n^r, n \geq 0$ và r là số nguyên không âm cố định.

Bài toán 6.7. Cho dãy $\{u_n\}$ xác định bởi công thức

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, n \geq 1.$$

Hãy xác định công thức của chuỗi $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$.

Bài toán 6.8. Cho dãy Fibonacci $u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, n \geq 1$. Chứng minh rằng công thức cho hàm sinh của dãy này là $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$.

Bài toán 6.9 (China, 1996)**.** Với n là một số nguyên dương cho trước. Tính số các đa thức $P(x)$ với hệ số thuộc $\{0, 1, 2, 3\}$ thoả mãn $P(2) = n$.

Bài toán 6.10. Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng số cách phân tích n thành tổng của các số nguyên dương lẻ bằng số cách phân tích n thành tổng của các số nguyên dương đôi một khác nhau.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Hội Toán học Việt Nam, *Kỷ yếu Olympic Toán toàn quốc*, các năm 2000-2023, Hội Toán học Việt Nam.

[2] Hoàng Xuân Sính, *Đại số đại cương*, NXB Giáo dục, 1996.

[3] Nguyễn Văn Mậu, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ*, NXB Giáo dục, Hà Nội, 2002.

[4] Lê Anh Vinh (chủ biên), *Định hướng bồi dưỡng học sinh năng khiếu Toán - Đại số*, NXB Giáo dục, 2022.

[5] Nguyễn Vũ Thanh, *Một số bài toán về đa thức và áp dụng*, chuyên đề, 2011.

[6] Đàm Văn Nhỉ (chủ biên), *Đa thức - chuỗi & chuyên đề nâng cao*, NXB Thông tin và truyền thông, 2017.

[7] T. Andresscu, B. Enescu, *Mathematics Olympic Treasures*, Birkhauser, 2011.

[8] K. T. Leung, I. A. C. Mok and S. N. Suen, *Polynomials and equations*, Hongkong University Press, 1992.

[9] E. J. Barbeau, *Polynomials*, Springer, 1989.

[10] V. Prasolov, *Polynomials*, Springer, 2004.

[11] D. Djukic, *Polynomials in One variables*, The IMO Compendium Group, Olympiad Training Materials, 2007.

[12] A. Khan, *A Few Elementary Properties of Polynomials*, 2006.

[13] Y. Zhao, *Training IMO USA - polynomials*, 2008.