

**Câu 1 (2,5 điểm).** Cho ma trận thực phụ thuộc tham số  $a$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & a+1 \\ a & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a \end{bmatrix}.$$

- (a) Tìm  $a$  để  $A$  là ma trận khả nghịch.  
(b) Tìm số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất  $Ax = 0$ .

**Câu 2 (2,5 điểm).** Với  $a, b, c$  là các số thực, đặt

$$D(a, b, c) = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}.$$

Gọi  $V$  là tập con của  $\mathbb{R}^3$  để  $D(a, b, c) = 0$  với mọi  $(a, b, c) \in V$ .

- (a) Chứng minh  $V$  là không gian vectơ con của  $\mathbb{R}^3$ , khi đó tìm số chiều và một cơ sở của  $V$ .  
(b) Liệu có tồn tại các số nguyên  $a, b, c$  để  $D(a, b, c) = 24$ ?

**Câu 3 (2,5 điểm).** Cho ma trận vuông thực cấp 3:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

- (a) Tìm ma trận  $C$  để  $C^{-1}AC$  là ma trận đường chéo.  
(b) Tìm tổng các phần tử trên đường chéo chính của ma trận  $A^{2024}$ .

**Câu 4 (2,5 điểm).** Một nhà máy sản xuất năm loại sản phẩm A, B, C, D, E. Mỗi loại phải qua năm công đoạn là cắt, gọt, đóng gói, trang trí và dán nhãn với thời gian cho mỗi công đoạn như sau:

	Sản phẩm A	Sản phẩm B	Sản phẩm C	Sản phẩm D	Sản phẩm E
Cắt	1 giờ	1 giờ	1 giờ	1 giờ	1 giờ
Gọt	1 giờ	2 giờ	3 giờ	4 giờ	5 giờ
Đóng gói	1 giờ	3 giờ	6 giờ	10 giờ	15 giờ
Trang trí	1 giờ	4 giờ	10 giờ	20 giờ	35 giờ
Dán nhãn	1 giờ	5 giờ	15 giờ	35 giờ	70 giờ

Các bộ phận cắt, gọt, đóng gói, trang trí, dán nhãn có số giờ công nhiều nhất trong một tuần lần lượt là 15, 35, 70, 126, 210 giờ. Hỏi nhà máy phải sản xuất mỗi loại sản phẩm là bao nhiêu trong tuần để sử dụng hết công suất của nhà máy?