$A^4 - 7A^3 + 12A^2 = 0$

Bài 3. Cho A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^4 = 7A^3 - 12A^2$. Chứng minh rằng

$$\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{N} \text{ và } \mathrm{tr}(A) \le 4n.$$

Bài 3:

Gọi λ là 1 GTR của A $\Rightarrow$ $\lambda^4 - 7\lambda^3 + 12\lambda^2$ là 1 GTR của $A^4 - 7A^3 + 12A^2$ $\Rightarrow$. Mà $A^4 - 7A^3 + 12A^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda^4 - 7\lambda^3 + 12\lambda^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda \in \{0; 3; 4\}$ ~~nguyên không âm~~

Như vậy A có n GTR ~~thực~~ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_i \in \{0; 3; 4\}$).

$\Rightarrow \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ $\cancel{\geq 0 \Rightarrow \mathrm{tr}(A) \in \mathbb{N}}$ $\in \mathbb{N}$

Hơn nữa, dễ thấy $\lambda_i \le 4 \ \forall i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow \mathrm{tr}(A) \le \sum_{i=1}^{n} 4 = 4n.$

Bài 4. Có tồn tại ma trận vuông cấp ba A sao cho $\mathrm{tr}(A) = 0$ và $A^2 + A^t = I$ không?

Bài 4: Giả sử tồn tại ma trận A thỏa mãn bài toán.

Có $A^2 + A^T = I \Leftrightarrow A^T = I - A^2$

lấy chuyển vị 2 vế: $A = I - (A^T)^2$

$\rightarrow A = I - (I - A^2)^2 = I - I + 2A^2 - A^4$

$\Leftrightarrow A^4 - 2A^2 + A = 0$ (1)

Gọi λ là 1 GTR của A ~~thì $\lambda^4 - 2\lambda^2 + \lambda$ là 1 GTR của~~ ta có ~~$A^4 - 2A^2 + A = 0$~~ $\Rightarrow \lambda^4 - 2\lambda^2 + \lambda = 0.$

$\Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda \in \left\{0; 1; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$

Do $\mathrm{tr}(A) = 0 \in \mathbb{Q}$ là tổng 3 GTR của A nên nếu $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ là 1 GTR của A thì giá trị còn lại cũng là 1 GTR của A. ~~Ta xét đa thức của A: $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.~~

~~TH1: $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ không là GTR của A $\Rightarrow \lambda \in \{0, 1\}$. Do $\mathrm{tr}(A) = 0 \Rightarrow$ A nhận $\lambda = 0$ là GTR duy nhất bội 3.~~

mà $A^T = I - A^2 \Rightarrow A^2 = I - A^T$

$\Rightarrow \mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(I - A^T)$

$$= tr(I) - tr(A^T)$$

$$= tr(I) - tr(A)$$

$$= 3 - 0 = 3$$

Coi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ là các giá trị riêng của A, ta có

$$\begin{cases} tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad (1) \\ tr(A^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 3 \quad (2) \end{cases}$$

TH1: $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ không là GTR của $A \Rightarrow \lambda \in \{0, 1\}$. Do $tr(A) = 0 \Rightarrow A$ nhận $\lambda = 0$ là GTR duy nhất bội 3.

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (mâu thuẫn với (2))

TH2: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ là GTR của A mà $tr(A) = 0$ nên A có tập GTR là $\{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}; 1\}$.

$$\Rightarrow \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1$$

$$= \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1 + 5 + 2\sqrt{5} + 1}{4} + 1 = 4$$

(mâu thuẫn với (2))

Vậy không tồn tại ma trận A thoả mãn BT.

Bài 5. Cho A, B là các ma trận vuông cấp n. Đặt $C = AB - BA$. Giả sử C giao hoán với cả hai ma trận A và B. Chứng minh rằng:

a) $\mathrm{tr}(C^m) = 0, \forall m \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{tr(AB) = tr(BA), \forall A, B \in M_n}$$

a) . Có $tr(C^m) = tr(C^{m-1}(AB-BA)) = tr(C^{m-1}AB - C^{m-1}BA)$

~~$= tr(C^{m-1}AB) - tr(C^{m-1}BA) = tr(C^{m-1}AB) - tr(C^{m-1}AB) = 0$~~

mà $C^{m-1}AB = C^{m-2}(CA)B = C^{m-2}(AC)B = C^{m-3}(CA)CB$

$= C^{m-3}(AC)CB = C^{m-3}AC^2B$

$= \dots = AC^{m-1}B$

$\Rightarrow tr(C^m) = tr(AC^{m-1}B - C^{m-1}BA)$

$= tr(AC^{m-1}B) - tr(C^{m-1}BA)$

$= 0$

b) tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho $C^m = 0$.

2) Gọi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là n GTR phức của C

$\Rightarrow \lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, \lambda_n^m$ là n GTR phức của C^m

Từ 1) : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m = tr(C^m) = 0 \ \forall \ m \in \mathbb{N}^*$.

~~Gọi~~

Đặt $P(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - \lambda_k) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, $a_k \in \mathbb{C} \ \forall k = \overline{1,n}$.

$\Rightarrow P(\lambda_k) = 0 \ \forall \ k = \overline{1,n}$

$\Rightarrow 0 = \sum_{k=1}^{m} P(\lambda_k) = \sum_{k=1}^{m} \cancel{\sum \lambda_k^l} (\lambda_k^n + a_1 \lambda_k^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda_k + a_n)$

$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n + a_1 \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{n-1} + \dots + a_{n-1} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k + n a_n$.

$= n a_n$

$\Rightarrow a_n = 0$

$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$ (Viete)

$\Rightarrow \exists \ k \in \{1, \dots, n\} : \lambda_k = 0$. KMTTQ, giả sử $\lambda_n = 0$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^m = 0 \ \forall \ m \in \mathbb{N}^*$.

Lập luận tương tự như trên thu được $\lambda_k = 0 \ \forall \ k = \overline{1,n}$.

Khi đó đtđt của C là $P(\lambda) = (-\lambda)^n$.

Theo đl Cayley - Hamilton, $P(C) = 0 \Rightarrow$ ~~đpcm~~. $(-C)^n = 0$

$\Rightarrow C^n = 0$ (đpcm)

Bài 6. Giả sử A, B là các ma trận vuông cùng cỡ và $r(AB - BA) = 1$. Chứng minh rằng $(AB - BA)^2 = 0$.

Bài 7. Cho A là ma trận vuông cấp 3 có $\text{tr}(A) = 8$, tổng các phần tử trên mỗi hàng của A bằng 4 và $\det A = 16$. Xác định các giá trị riêng của A.

Bài 7: Gọi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ là các giá trị riêng của ma trận A vuông cấp 3.

$$\rightarrow \begin{cases} tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ det(A) = \lambda_1 . \lambda_2 . \lambda_3 \end{cases}$$

Do $tr(A) = 8$; $det(A) = 16$

$$\rightarrow \begin{cases} \cancel{tr(A)} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 8 \\ \lambda_1 . \lambda_2 . \lambda_3 = 16 \end{cases}$$

Giả sử $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ta có

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

→ 4 là 1 giá trị riêng của A.

Không mất tính tổng quát, giả sử $\lambda_1 = 4$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 4 \\ \lambda_2 . \lambda_3 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

→ các giá trị riêng của A là $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$ (bội 2).

Bài 8. Cho A là ma trận vuông cấp n khả nghịch. Mọi phần tử của các ma trận A, A^{-1} là số nguyên. Chứng minh rằng nếu A có n giá trị riêng đều là các số thực thì

$$|\det(A + A^{-1})| \geq 2^n.$$

Vì các phần tử của A, A^{-1} đều là số nguyên nên $\det A$, $\det A^{-1}$ cũng là số nguyên

Dễ thấy $A \cdot A^{-1} = I$

$\Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1$

$\Rightarrow |\det A||\det A^{-1}| = 1$

$\Rightarrow |\det A| = |\det A^{-1}| = 1$

Giả sử $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các gtrị riêng thực của A

Khi đó: $1 = |\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_n|$

Mặt khác ta cũng có $1 + \lambda_i^2$ cũng là các gtrị riêng thực của $I + A^2$.

Khi đó ta có:

$$|\det(A + A^{-1})| = |\det A^{-1}(A^2 + I)|$$

$$= |\det A^{-1}||\det(A^2 + I)|$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i^2)$$

$$\overset{\text{cosi}}{\geq} \prod_{i=1}^{n} 2|\lambda_i| = 2^n$$

Bài 9. Cho $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}$. Tìm các giá trị riêng của $A^t A$.

Có $A = [a_1 \quad a_2 \ldots a_n]$.

$$A^t = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix} \Rightarrow A^t A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [a_1 \quad a_2 \ldots a_n]$$

$$= \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \ldots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \ldots & a_2 a_n \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \Rightarrow r(A^t A) \leq 1$$

Đa thức đặc trưng của A^tA là

$$P(\lambda) = \det(A^tA - \lambda I)$$

$$= (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + c_2(-\lambda)^{n-2} + \dots + c_n$$

mà $r(A^tA) \le 1 \Rightarrow c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$

$$\Rightarrow P(\lambda) = (-\lambda)^n + tr(A^tA)(-\lambda)^{n-1}$$

$$= (-\lambda)^{n-1}\left[tr(A^tA) - \lambda\right]$$

$$= (-\lambda)^{n-1}(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - \lambda)$$

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ các giá trị riêng của A^tA là $\lambda_1 = 0$ và $\lambda_2 = a_1^2 + \dots + a_n^2$

(bội $n-1$)

Bài 10. Một ma trận thực có các phần tử chỉ gồm các số 0 và 1 được gọi là ma trận 0-1.

a) Ký hiệu α và β là các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của định thức các ma trận 0-1 vuông cỡ 3×3. Tính α và β.

Giả sử $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ là một ma trận 0-1

$$\Rightarrow a_{ij} \in \{0; 1\} \quad \forall i, j = 1, 2, 3$$

Ta có $\det A = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underbrace{a_{12}a_{23}a_{31}} + a_{13}a_{21}a_{32}$

$$\underbrace{- a_{13}a_{22}a_{31}} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$\Rightarrow$ $\det A$ là tổng của 6 số hạng, trong đó 3 số hạng đầu $\in \{0; 1\}$, 3 số hạng sau $\in \{-1; 0\}$.

$\Rightarrow$ $\det A \in \mathbb{Z}$ và $-3 \le \det A \le 3$

Nếu $\det A = 3$ thì $\begin{cases} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} = 3 & (1) \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = 0 & (2) \end{cases}$

vô lý vì từ (1) $\Rightarrow a_{ij} = 1 \ \forall i, j = 1, 2, 3$

$\Rightarrow$ vế trái của (2) bằng -3

$\Rightarrow \det A \ne 3$

Nếu đổi chỗ 2 hàng của ma trận A cho nhau ta được ma trận 0 - 1 có định thức bằng $-\det A$

$\Rightarrow -\det A \ne 3 \Rightarrow \det A \ne -3. \Rightarrow -2 \le \det A \le 2$

mà $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = -2 \end{cases}$

b) Cho A là một ma trận 0-1 cỡ 3×3. Giả sử A có ba giá trị riêng là các số thực dương. Chứng minh rằng các giá trị riêng của A đều bằng 1.

Giả sử A có 3 giá trị riêng là $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$

ta có $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0 \Rightarrow \det A \in \{1; 2\}$

mà $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33} \le 3$

$3 \ge \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \ge 3\sqrt[3]{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = 3\sqrt[3]{\det A}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{\det A} \leq 1 \Rightarrow \det A \leq 1 \Rightarrow \det A = 1$

điều này xảy ra $\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

mà $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ nên $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.