KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN-HỌC SINH LẦN THỨ 27

KHÁNH HOÀ, 1-7/4/2019

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC NHA TRANG

HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
NHA TRANG

KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC
SINH VIÊN-HỌC SINH LẦN THỨ 27

BIÊN TẬP

Đoàn Trung Cường
Hội Toán học Việt Nam & Viện Toán học
Trần Lê Nam
Trường Đại học Đồng Tháp
Dương Việt Thông
Trường Đại học Kinh tế Quốc dân
Vũ Tiến Việt
Học viện An ninh Nhân dân

NHA TRANG, 1-7/4/2019

GIỚI THIỆU

Kỳ thi Olympic Toán học lần thứ 27 dành cho sinh viên các trường đại học, cao đẳng, học viện và học sinh phổ thông các trường chuyên trong cả nước đã diễn ra tại Trường Đại học Nha Trang từ 1-7/4/2019. Quyển kỷ yếu này chủ yếu dành để tập hợp lại một số bài đề xuất của các trường tham dự kỳ thi với mong muốn cung cấp thêm một tài liệu tham khảo cho những người quan tâm. Do thời gian biên tập khá ngắn nên ngoài một số bài được biên tập tương đối kỹ càng, có một số bài chúng tôi giữ nguyên cách trình bày như đề xuất, công tác biên tập trong trường hợp đó là đánh máy lại, kiểm tra tính chính xác về nội dung và chính tả.

Nhóm biên tập

THÔNG TIN VỀ KỲ THI

Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên - Học sinh lần thứ 27 đã được Hội Toán học Việt Nam và Trường Đại học Nha Trang phối hợp tổ chức trong các ngày 1-7/4/2019 tại Trường Đại học Nha Trang, Khánh Hoà. Có 2 bảng A-B dành cho 77 đoàn sinh viên đại học và một bảng dành cho 12 trường phổ thông chuyên. Tổng cộng đã có 797 lượt thí sinh dự thi. Ban tổ chức đã quyết định trao số lượng giải thưởng như sau:

Khối sinh viên: Môn đại số có 33 giải nhất, 51 giải nhì, 81 giải ba. Môn Giải tích có 30 giải nhất, 52 giải nhì, 75 giải ba. Có 06 giải đặc biệt cho các sinh viên đạt thủ khoa một môn hoặc giải nhất cả hai môn. đặc biệt năm nay bạn Vương Đình Ân (Đại học Bách Khoa Hà Nội) đạt thủ khoa cả hai môn.

Khối học sinh: Có 6 huy chương vàng, 13 huy chương bạc và 17 huy chương đồng. Ban tổ chức phối hợp với Quỹ Lê Văn Thiêm trao phần thưởng của quỹ cho 9 học sinh có thành tích tốt nhất hoặc đã vượt khó đạt thành tích tốt.

Ngoài ra, 108 nữ sinh (sinh viên và học sinh) đạt giải đã được nhận phần thưởng của GS. TSKH. Phạm Thị Trân Châu, chủ tịch Hội Phụ nữ trí thức Việt Nam.

Mục lục

Phần I

ĐỀ THI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

1 Đại số

1.1 Bảng A

BÀI 1. Cho các số thực a, b thoả mãn $a+b>2$ và ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Biện luận theo a, b hạng của ma trận A.

BÀI 2. Một nhà máy sản xuất năm loại sản phẩm A, B, C, D, E. Mỗi loại phải qua năm công đoạn cắt, gọt, đóng gói, trang trí và dán nhãn với thời gian cho mỗi công đoạn như trong bảng sau:

	Cắt	Gọt	Đóng gói	Trang trí	Dán nhãn
Sản phẩm A	1 giờ	1 giờ	1 giờ	1 giờ	1 giờ
Sản phẩm B	4 giờ	3 giờ	3 giờ	2 giờ	1 giờ
Sản phẩm C	8 giờ	12 giờ	6 giờ	3 giờ	1 giờ
Sản phẩm D	12 giờ	15 giờ	10 giờ	4 giờ	1 giờ
Sản phẩm E	20 giờ	24 giờ	10 giờ	5 giờ	1 giờ

Các bộ phận cắt, gọt, đóng gói, trang trí, dán nhãn có *số giờ công tối đa* trong một tuần lần lượt là 180, 220, 120, 60, 20 giờ. Trong thiết kế ban đầu của nhà máy có phương án về số lượng mỗi loại sản phẩm nhà máy phải sản xuất trong một tuần để sử dụng hết công suất các bộ phận. Tính số lượng mỗi loại sản phẩm được sản xuất trong một tuần theo phương án đó.

BÀI 3. Trong không gian véc tơ V gồm các đa thức hệ số thực có bậc nhỏ hơn 7, cho các đa thức

$$B_i = x^i(1-x)^{6-i}, i = 0, 1, \ldots, 6.$$

Chứng minh rằng

(a) Các đa thức $B_0, B_1, \ldots, B_6$ là độc lập tuyến tính trong V;
(b) Có thể bỏ đi một đa thức B_i nào đó sao cho các đạo hàm $B'_0, \ldots, B'_{i-1}, B'_{i+1}, \ldots, B'_6$ là độc lập tuyến tính.

BÀI 4. Một dãy số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ được gọi là *răng cưa* nếu $a_1 < a_2$, $a_2 > a_3$, $a_3 < a_4, \ldots$, hay nói cách khác, $a_{2k-1} < a_{2k}$ với mọi $0 < 2k \leq n$ và $a_{2k} > a_{2k+1}$ với mọi $1 < 2k+1 \leq n$.
(a) Có bao nhiêu dãy răng cưa a_1, a_2, a_3 sao cho $1 \leq a_i \leq 5$ với mọi $i = 1, 2, 3$?
(b) Có bao nhiêu dãy răng cưa a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sao cho $1 \leq a_i \leq 5$ với mọi $i = 1, \ldots, 5$?

BÀI 5. Cho các ma trận thực A, B cỡ $n \times n$ thoả mãn $A = A^2B$. Giả sử A, B có cùng hạng. Chứng minh rằng
(a) Các hệ phương trình $AX = 0$ và $BX = 0$ có cùng tập nghiệm trong $\mathbb{R}^n$;
(b) $AB = (AB)^2$;
(c) $B = B^2A$.

1.2 Bảng B

BÀI 1. Tính hạng của ma trận

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 8 & 11 & 14 \\ 7 & 11 & 15 & 19 \\ 9 & 14 & 19 & 24 \end{pmatrix}$$

BÀI 2. Một nhà máy sản xuất năm loại sản phẩm A, B, C, D, E. Mỗi loại phải qua năm công đoạn cắt, gọt, đóng gói, trang trí và dán nhãn với thời gian cho mỗi công đoạn như trong bảng sau:

	Cắt	Gọt	Đóng gói	Trang trí	Dán nhãn
Sản phẩm A	1 giờ	1 giờ	1 giờ	1 giờ	1 giờ
Sản phẩm B	4 giờ	3 giờ	3 giờ	2 giờ	1 giờ
Sản phẩm C	8 giờ	12 giờ	6 giờ	3 giờ	1 giờ
Sản phẩm D	12 giờ	15 giờ	10 giờ	4 giờ	1 giờ
Sản phẩm E	20 giờ	24 giờ	10 giờ	5 giờ	1 giờ

Các bộ phận cắt, gọt, đóng gói, trang trí, dán nhãn có *số giờ công tối đa* trong một tuần lần lượt là 180, 220, 120, 60, 20 giờ. Trong thiết kế ban đầu của nhà máy có phương án về số lượng mỗi loại sản phẩm nhà máy phải sản xuất trong một tuần để sử dụng hết công suất các bộ phận. Tính số lượng mỗi loại sản phẩm được sản xuất trong một tuần theo phương án đó.

BÀI 3. Trong không gian véc tơ V gồm các đa thức hệ số thực có bậc nhỏ hơn 7, cho các đa thức

$$B_i = x^i(1-x)^{6-i}, i = 0, 1, \dots, 6.$$

Chứng minh rằng

(a) Các đa thức $B_0, B_1, \dots, B_6$ là độc lập tuyến tính trong V;

(b) Có thể bỏ đi một đa thức B_i nào đó sao cho các đạo hàm $B'_0, \dots, B'_{i-1}, B'_{i+1}, \dots, B'_6$ là độc lập tuyến tính.

BÀI 4. Một dãy số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_n$ được gọi là *răng cưa* nếu $a_1 < a_2$, $a_2 > a_3$, $a_3 < a_4, \dots$, hay nói cách khác, $a_{2k-1} < a_{2k}$ với mọi $0 < 2k \leq n$ và $a_{2k} > a_{2k+1}$ với mọi $1 < 2k+1 \leq n$.

(a) Có bao nhiêu dãy răng cưa a_1, a_2, a_3 sao cho $1 \leq a_i \leq 5$ với mọi $i = 1, 2, 3$?

(b) Có bao nhiêu dãy răng cưa a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sao cho $1 \leq a_i \leq 5$ với mọi $i = 1, \dots, 5$?

BÀI 5. Một ma trận thực có các phần tử chỉ gồm các số 0 và 1 được gọi là ma trận $0-1$.

(a) Ký hiệu α và β là các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của định thức các ma trận $0-1$ vuông cỡ 3×3. Tính α và β.

(b) Cho A là một ma trận $0-1$ cỡ 3×3. Giả sử A có ba giá trị riêng là các số thực dương. Chứng minh rằng các giá trị riêng của A đều bằng 1.

2 Giải tích

2.1 Bảng A

BÀI 1. Cho $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi các điều kiện

$$x_1 = 2019, \quad x_{n+1} = \ln(1+x_n) - \frac{2x_n}{2+x_n} \quad \forall n \geq 1.$$

1. Chứng minh rằng $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số không âm.
2. Chứng minh rằng tồn tại số thực $c \in (0,1)$ sao cho

$$|x_{n+1} - x_n| \leq c|x_n - x_{n-1}| \quad \forall n \geq 2.$$

3. Chứng minh rằng dãy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

BÀI 2. Gọi D là tập hợp tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Với x_0, y_0 là hai số thực đã được cho trước, hãy tìm

$$\max_{f \in D} |f(x_0) - f(y_0)|.$$

BÀI 3. Một doanh nghiệp sản xuất ô-tô có hàm sản xuất là hàm Cobb-Douglas:

$$Q = K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}};$$

trong đó, K và L lần lượt ký hiệu số đơn vị vốn tư bản và số đơn vị lao động mà doanh nghiệp thuê được, còn Q ký hiệu số ô-tô sản xuất ra được.
Giả sử giá thuê một đơn vị vốn tư bản là w_k, giá thuê một đơn vị lao động là w_l và, ngoài chi phí thuê lao động và vốn tư bản, doanh nghiệp còn phải chịu một chi phí cố định là C_0. Khi đó, hàm số

$$C = w_k K + w_l L + C_0$$

mô tả tổng chi phí mà doanh nghiệp phải bỏ ra, thường được gọi là *hàm chi phí sản xuất*.
Năm 2019 doanh nghiệp dự định sản xuất 2000 chiếc ô-tô. Nếu bạn là chủ doanh nghiệp, để chi phí sản xuất là thấp nhất, bạn sẽ thuê bao nhiêu đơn vị vốn tư bản và bao nhiêu đơn vị lao động trong năm 2019 biết rằng $C_0 = 100$, $w_l = 4$ và $w_k = 8$?

BÀI 4. Cho f là một hàm số khả vi liên tục trên $[0, 1]$ và có $f(1) = 0$.

1. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x \leq \int_0^1 x|f'(x)| \mathrm{d}x.$$

2. Tìm ví dụ về một hàm số f khả vi liên tục trên $[0, 1]$, với $f(1) = 0$, sao cho

$$\int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x < \int_0^1 x|f'(x)| \mathrm{d}x.$$

BÀI 5. Cho $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ là một hàm số liên tục và đơn điệu không tăng.

1. Giả sử tồn tại giới hạn:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)<+\infty.$$

   Chứng minh rằng

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0.$$

2. Tìm ví dụ về một hàm số $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ liên tục, đơn điệu không tăng, sao cho

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)=+\infty \quad \text{và} \quad \lim_{x\to+\infty} xf(x)=0.$$

2.2 Bảng B

BÀI 1. Cho $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi các điều kiện

$$x_1=2019, \quad x_{n+1}=\ln(1+x_n)-\frac{2x_n}{2+x_n} \quad \forall n\geq 1.$$

1. Chứng minh rằng $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số không âm.
2. Chứng minh rằng tồn tại số thực $c\in(0,1)$ sao cho

$$|x_{n+1}-x_n|\leq c|x_n-x_{n-1}| \quad \forall n\geq 2.$$

3. Chứng minh rằng dãy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

BÀI 2. Hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ được cho bởi công thức

$$f(x)=\begin{cases}\ln(1+x^2)\cos\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x\neq 0,\\ 0 & \text{nếu } x=0.\end{cases}$$

1. Tìm $f'(x)$ khi $x\neq 0$.
2. Tìm $f'(0)$.
3. Xét tính liên tục của hàm số f' tại điểm $x=0$.

BÀI 3. Một doanh nghiệp sản xuất ô-tô có hàm sản xuất là hàm Cobb-Douglas:

$$Q=K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}};$$

trong đó, K và L lần lượt ký hiệu số đơn vị vốn tư bản và số đơn vị lao động mà doanh nghiệp thuê được, còn Q ký hiệu số ô-tô sản xuất ra được.

Giả sử giá thuê một đơn vị vốn tư bản là w_k, giá thuê một đơn vị lao động là w_l và, ngoài chi phí thuê lao động và vốn tư bản, doanh nghiệp còn phải chịu một chi phí cố định là C_0. Khi đó, hàm số

$$C = w_k K + w_l L + C_0$$

mô tả tổng chi phí mà doanh nghiệp phải bỏ ra, thường được gọi là *hàm chi phí sản xuất*.
Năm 2019 doanh nghiệp dự định sản xuất 2000 chiếc ô-tô. Nếu bạn là chủ doanh nghiệp, để chi phí sản xuất là thấp nhất, bạn sẽ thuê bao nhiêu đơn vị vốn tư bản và bao nhiêu đơn vị lao động trong năm 2019 biết rằng $C_0 = 100$, $w_l = 4$ và $w_k = 8$?

BÀI 4. Cho f là một hàm số khả vi liên tục trên $[0,1]$ và có $f(1) = 0$.

1. Chứng minh rằng
$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

2. Tìm ví dụ về một hàm số f khả vi liên tục trên $[0,1]$, với $f(1) = 0$, sao cho
$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x < \int_0^1 x|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

BÀI 5. Cho $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ là một hàm số liên tục và đơn điệu không tăng.

1. Giả sử tồn tại giới hạn:
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right) < +\infty.$$
Chứng minh rằng
$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0.$$

2. Tìm ví dụ về một hàm số $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ liên tục, đơn điệu không tăng, sao cho
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right) = +\infty \quad \text{và} \quad \lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0.$$

3 Phổ thông

3.1 Đại số

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước trong chứng minh của câu sau. Nếu một câu được chứng minh không dựa vào kết quả của các câu trước thì có thể dùng để chứng minh các câu trước.

Quy tắc dấu Descartes và một số ứng dụng

A. Quy tắc dấu Descartes

Cho
$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \tag{1}$$
là một đa thức hệ số thực. Số thực r được gọi là một **nghiệm bội** m của $P(x)$ nếu $P(x) = (x-r)^mQ(x)$, trong đó $Q(x)$ là một đa thức mà $Q(r) \neq 0$ và m là một số nguyên dương (được gọi là **số bội** của nghiệm r). Giả sử tất cả các nghiệm dương (đôi một khác nhau) của đa thức $P(x)$ bao gồm $x_1, x_2, \dots, x_k$ ($k \geq 0$), với số bội tương ứng là $m_1, m_2, \dots, m_k$. Khi đó, ta gọi đại lượng $N(P) = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ là **số nghiệm dương, tính cả bội** của $P(x)$ (dĩ nhiên, $N(P) = 0$ khi $k = 0$). Số nghiệm dương, tính cả bội của đa thức không (đa thức $P(x) \equiv 0$) được quy ước là $N(0) = 0$.
Ta định nghĩa **số lần đổi dấu** của dãy số thực $a_0, a_1, \dots, a_n$ là số bộ (i, j) với $0 \leq i < j \leq n$ sao cho $a_ia_j < 0$ và $a_k = 0$ khi $i < k < j$. Số lần đổi dấu của dãy số thực $a_0, a_1, \dots, a_n$ sẽ được kí hiệu là $W(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Với $P(x)$ là đa thức được cho ở (1), ta đặt $W(P) = W(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Nói cách khác, $W(P)$ là số lần đổi dấu của dãy các hệ số của đa thức $P(x)$.
Các kí hiệu và định nghĩa trên được sử dụng cho toàn bộ các bài toán sau.

BÀI 1. Chứng minh rằng

a) $W(a_0, a_1, \dots, a_n) = W(-a_n, -a_{n-1}, \dots, -a_0)$.

b) $W(a_0, a_1, \dots, a_n) = W(p_0a_0, p_1a_1, \dots, p_na_n)$ nếu $p_0, p_1, \dots, p_n$ là các số dương.

BÀI 2. Chứng minh rằng

a) $W(P) \geq W(P')$, trong đó $P'(x)$ kí hiệu đạo hàm của đa thức $P(x)$.

b) $N(P)$ là một số chẵn nếu $a_0a_n > 0$; $N(P)$ là một số lẻ nếu $a_0a_n < 0$.

BÀI 3. Chứng minh rằng nếu $W(P') \equiv N(P') \pmod 2$ thì $W(P) \equiv N(P) \pmod 2$.

BÀI 4. (Quy tắc dấu Descartes) Chứng minh rằng

a) $W(P) \geq N(P)$;

b) $W(P) - N(P)$ là một số chẵn.

B. Ứng dụng vào việc tính số nghiệm của một đa thức

Bài 5. Đa thức $x^{10} - x^2 - x - 1$ có bao nhiêu nghiệm dương?

Bài 6. Chứng minh rằng đa thức

$$Q(x) = 30x^7 - 4x^6 - 1975x^4 - 30x^2 - 4x - 2019$$

có đúng một nghiệm thực.

Bài 7. Cho số nguyên dương $n \geq 4$. Đặt

$$P_n(x) = x^{5n^3+1} - 2x^{n^3+n} - 3x^{n^3-3n^2} - 4x^{n^2+n} - 5x^{n^2-1} + 6x^{n-1} + 7.$$

Chứng minh rằng $P_n(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$.

Bài 8. Cho đa thức hệ số thực $R(x) = c_0 + c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2} + \cdots + c_nx^{m_n}$, trong đó $0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_n$ thỏa mãn $m_i \equiv i \pmod 2$ với mọi $1 \leq i \leq n$. Giả sử $c_0 \neq 0$. Chứng minh rằng $R(x)$ có không quá n nghiệm thực.

Bài 9. Cho các số nguyên dương $m_1 < m_2 < \ldots < m_n$. Chứng minh rằng tồn tại các số thực $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ sao cho đa thức $c_0 + c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2} + \cdots + c_nx^{m_n}$ có đúng n nghiệm dương.

3.2 Số học

A. Bảng Stern

Bảng Stern:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
1 & & & & & & & & 2 & & & & & & & & 1 \\
1 & & & & 3 & & & & 2 & & & & 3 & & & & 1 \\
1 & & 4 & & 3 & & 5 & & 2 & & 5 & & 3 & & 4 & & 1 \\
1 & 5 & 4 & 7 & 3 & 8 & 5 & 7 & 2 & 7 & 5 & 8 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

là bảng vô hạn dòng được xây dựng theo cách như sau:

— Viết tại dòng thứ nhất hai số 1; và sau khi đã xây dựng được dòng thứ n ($n \geq 1$),

— Viết lại dòng thứ n tại dòng thứ $n+1$; đồng thời chèn vào giữa hai số hạng liên tiếp bất kì một số mới, bằng tổng của hai số hạng đó...

BÀI 1. Chứng minh rằng dòng thứ n của bảng có $2^{n-1}+1$ số.

BÀI 2. Trung bình cộng của các số trên dòng thứ n bằng bao nhiêu?

BÀI 3. Chứng minh rằng

a) Số thứ k và số thứ $2^{n-1}+2-k$ $(1 \leq k \leq 2^{n-1}+1)$ trên dòng thứ n là bằng nhau;

b) Hai số liên tiếp trên mỗi dòng là nguyên tố cùng nhau;

c) Nếu a, b, c là 3 số liên tiếp, theo thứ tự đó, trên một dòng nào đó của bảng thì $b \mid a+c$.

B. Dãy Stern

Trong bảng Stern ở trên, ta xóa đi cột ngoài cùng bên phải (gồm các số 1), rồi liệt kê các số còn lại của bảng tuần tự từ trái sang phải, từ trên xuống dưới:

$$1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1, 5, \ldots$$

Người ta gọi dãy $(s_n)_{n\geq 1}$ thu được ở trên là dãy Stern.

BÀI 4. Chứng minh rằng dãy Stern (s_n) được xác định bởi các điều kiện: $s_1 = 1$ và

$$s_n = \begin{cases} s_{n/2} & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ s_{(n-1)/2} + s_{(n+1)/2} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

với mọi $n \geq 2$.

BÀI 5. Giá trị của số thứ 304 trên dòng thứ 2019 của bảng Stern bằng bao nhiêu?

BÀI 6. Chứng minh rằng s_{n+1} bằng số cách biểu diễn n thành tổng của các lũy thừa với số mũ nguyên và không âm của 2, mà mỗi luỹ thừa có mặt không quá hai lần trong tổng (không kể thứ tự giữa các hạng tử trong tổng; chẳng hạn, $4 = 2^2 = 2^1 + 2^1 = 2^1 + 2^0 + 2^0$ và $s_5 = 3$).

C. Một số tính chất của bảng và dãy Stern

BÀI 7. Chứng minh rằng

a) $s_{j(n)} = F_n$, trong đó $j(n) = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$;

b) Giá trị lớn nhất của các số trên dòng thứ n của bảng Stern bằng F_{n+1}.

Ở đây, (F_n) là dãy Fibonacci quen biết, được cho bởi $F_1 = F_2 = 1$ và quan hệ truy hồi:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \forall n \geq 3.$$

BÀI 8. Chứng minh rằng mọi số hữu tỷ dương đều xuất hiện một và chỉ một lần trong dãy vô hạn các phân số:

$$\frac{s_1}{s_2}, \frac{s_2}{s_3}, \frac{s_3}{s_4}, \ldots, \frac{s_n}{s_{n+1}}, \ldots$$

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: ĐẠI SỐ

1 MA TRẬN

Bài 1.1 (ĐH Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh). Cho X là ma trận vuông cấp n thỏa $X^{2019} = 0$. Chứng minh rằng

$$\operatorname{rank}(X) = \operatorname{rank}(X + X^2 + X^3 + \ldots + X^k)$$

với mọi số nguyên dương k.

Bài 1.2 (ĐH Đại Nam). Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là một ma trận vuông thực cấp n khác ma trận không, thoả mãn điều kiện $a_{ik}a_{jk} = a_{kk}a_{ij} \quad \forall i, j, k = 1, \ldots,\ n$. Chứng minh rằng:

(a) $tr\,(A) \neq 0$, biết $tr\,(X)$ là vết của ma trận X, nó bằng tổng các phần tử đường chéo chính của ma trận đó.

(b) $A = A^T$, biết X^T là ma trận chuyển vị của ma trận X.

(c) $\operatorname{rank}(A) = 1$, biết $\operatorname{rank}(X)$ là hạng của ma trận X.

Bài 1.3 (ĐH Đại Nam). Chứng minh rằng: nếu $AB - BA = A$ thì $det(A) = 0$.

Bài 1.4 (ĐH Đồng Tháp). ho A là ma trận vuông. Tổng các phần tử trên đường chéo chính của A được gọi là *vết* của A, kí hiệu là $tr(A)$. Chứng minh rằng với hai ma trận vuông A, B bất kỳ ta có $tr(AB) = tr(BA)$. Ứng dụng kết quả trên để tính $tr\left(A^{2019}\right)$ với

$$A = \begin{pmatrix} 3a & 0 & -a \\ 0 & 6a & 0 \\ -a & 0 & 3a \end{pmatrix}$$

trong đó a là số thực khác 0 cho trước.

Bài 1.5 (ĐH Giao thông Vận Tải). Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Tìm a, b để hai ma trận A và B đồng dạng. (Hai ma trận đồng dạng nếu tồn tại ma trận T không suy biến thỏa mãn $B = T^{-1}AT$).
b) Với a, b tìm được, tìm một ma trận T sao cho $B = T^{-1}AT$.

Bài 1.6 (ĐH Giao thông Vận Tải)**.** Cho A là ma trận vuông cấp 3 khả nghịch thỏa mãn điều kiện: tổng các phần tử của mỗi hàng, tổng các phần tử của mỗi cột, và tổng các phần tử trên các đường chéo bằng nhau. Chứng minh rằng ma trận A^{-1} cũng thỏa mãn điều kiện trên.

Bài 1.7 (ĐH Hùng Vương)**.** Giả sử A, B là hai ma trận vuông thực cấp n và $C = AB - BA$ là ma trận giao hoán được với cả A và B Tồn tại hay không một số $s \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $C^s = 0$.

Bài 1.8 (ĐH Hùng Vương)**.** Giả sử A, B là hai ma trận vuông thực cấp n và $C = AB - BA$ là ma trận giao hoán được với cả A và B Tồn tại hay không một số $s \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $C^s = 0$.

Bài 1.9 (ĐH Kinh tế Quốc dân)**.** Giả sử là các ma trận thực cấp thỏa mãn các điều kiện AB^T và CD^T là hai ma trận đối xứng và $AD^T - BC^T = I$, trong đó I là ma trận đơn vị cấp n, kí hiệu M^T là ma trận chuyển vị của ma trận M. Chứng minh rằng: $A^TD - C^TB = I$.

Bài 1.10 (ĐH Kinh tế Quốc dân)**.** Cho A là một ma trận vuông thực "kỳ diệu" cấp 3, nghĩa là tồn tại một số thực S khác 0 sao cho tổng các phần tử trên mỗi dòng, tổng các phần tử trên mỗi cột, tổng các phần tử trên mỗi đường chéo của A đều bằng S.
a) Chứng minh rằng nếu A khả nghịch thì A^{-1} cũng là ma trận "kỳ diệu".
b) Chứng minh rằng

$$A = \begin{bmatrix} \frac{S}{3} + u & \frac{S}{3} - u + v & \frac{S}{3} - v \\ \frac{S}{3} - u - v & \frac{S}{3} & \frac{S}{3} + u + v \\ \frac{S}{3} + v & \frac{S}{3} + u - v & \frac{S}{3} - u \end{bmatrix}$$

trong đó, u và v là các số thực bất kì. Hơn nữa, A khả nghịch khi và chỉ khi $u^2 \neq v^2$.

Bài 1.11 (ĐH Kinh tế Quốc dân)**.** Cho ma trận thực A cấp 6×3 và ma trận thực B cấp 3×6 sao cho

$$AB = \begin{bmatrix} 2019 & 0 & 0 & -2019 & 0 & 0 \\ 0 & 2019 & 0 & 0 & -2019 & 0 \\ 0 & 0 & 2019 & 0 & 0 & -2019 \\ -2019 & 0 & 0 & 2019 & 0 & 0 \\ 0 & -2019 & 0 & 0 & 2019 & 0 \\ 0 & 0 & -2019 & 0 & 0 & 2019 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm ma trận BA.

Bài 1.12 (ĐH Nha Trang). Tìm tất cả các ma trận giao hoán với ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Bài 1.13 (ĐH Nha Trang). Cho A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^2 - 2A + \mathbb{I}_3 = 0$. Chứng minh $A^3 = 3A - 2\mathbb{I}_3$, $A^4 = 4A - 3\mathbb{I}_3$.

Bài 1.14 (ĐH Phạm Văn Đồng). Cho các ma trận $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Với mỗi số thực a, tìm ma trận X sao cho $X = (aI + J)^{2019} + (aI + K)^{2019}$.

Bài 1.15 (ĐH Quy Nhơn). Cho các ma trận $A \in Mat_{3\times 2}(\mathbb{R})$, $B \in Mat_{2\times 3}(\mathbb{R})$ và

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Chứng tỏ rằng $BA = 9I_2$.

Bài 1.16 (ĐH Quy Nhơn). Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tính A^{2019}.

Bài 1.17 (ĐH SPKT Vĩnh Long). Cho hai ma trận A, B vuông cấp n. Chứng minh rằng: Nếu $A + \lambda B$ là ma trận lũy linh với $n+1$ giá trị λ khác nhau, thì A và B là các ma trận lũy linh.

2 ĐỊNH THỨC

Bài 2.1 (ĐH Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh). Cho A là ma trận cấp n có các phần tử bằng 1. $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$. Tính $\det(A + B)$.

$n > 2$ $n < 2$

Bài 2.2 (ĐH Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh). (a) Cho X là ma trận vuông cấp 2019. Chứng minh rằng $\det(X - X^T) = 0$.

(b) Tính chất trên còn đúng không nếu X là ma trận vuông cấp 2020?

Bài 2.3 (ĐH Đồng Tháp). Chứng minh rằng với các số thực a, b, c, d tùy ý ta có:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Bài 2.4 (ĐH Giao thông Vận tải). Cho A là ma trận vuông cấp 2 với các phần tử thực. Xét ma trận khối $B = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh $\det(B) = (ad - cd)^2 \overset{2}{\det}(A)$. $=[\det(ad-bc)\det(A)]^2$
b) Giả sử A khả nghịch và $ad \neq bc$. Chứng minh rằng

$$B^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} dA^{-1} & -bA^{-1} \\ -cA^{-1} & aA^{-1} \end{pmatrix}.$$

Bài 2.5 (ĐH Mỏ - Địa chất). Tìm độ dài của khoảng lớn nhất giữa các nghiệm thực của phương trình

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & \dots & 2018 \\ 1 & x & 2 & \dots & 2018 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x \end{vmatrix} = 0.$$

Bài 2.6 (ĐH Nha Trang). Cho dãy số $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ được xác định với: $x_1 = 5, x_2 = 19$, và x_n $(n \geq 3)$ là định thức cấp n cho bởi

$$x_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

. a) Tính x_5.
b) Chứng minh $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$ với mọi $n \geq 3$.
c) Chứng minh $x_n - 1$ chia hết cho 4 với n lẻ.

Bài 2.7 (ĐH Nha Trang). Cho A, B là các ma trận vuông cùng cấp và là nghiệm của đa thức $f(x) = x^2 - x$.
a) Tính $(I + A)^n$ với và I là ma trận đơn vị cùng cấp với A.
b) Giả sử $AB + BA = 0$. Tính $\det(A - B)$, $\det(A + B)$.

Bài 2.8 (ĐH Phạm Văn Đồng). Cho $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ là các đa thức bậc không quá $n - 2$ và $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Tính định thức

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}.$$

Bài 2.9 (ĐH SPKT Vĩnh Long). a) Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng tỏ rằng $\det\left(I_n + A^2\right) \geq 0$.
b) Cho các ma trận $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $AB = O_n$. Chứng minh rằng

$$\det\left(I_n + A^{2p} + B^{2q}\right) \geq 0,$$

với mọi $p, q \in \mathbb{N}$.

Bài 2.10 (Học viện KTQS). Giả sử A là ma trận thực vuông cấp n thỏa mãn $2A^{-1} = A$. Tính $det(A^{2019} - A)$.
b) Tính định thức ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & 2 \\ -\sqrt{2} & 1 & 2 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -2 & 1 & \sqrt{2} \\ -2 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Bài 2.11 (Học viện KTQS). Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ gọi là lũy linh cấp $k \in \mathbb{N}^*$ nếu $A^{k-1} \neq O$, $A^k = O$. Giả sử $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, A lũy linh và giao hoán với B. Chứng minh rằng $\det(A + B) = \det(B)$.

3 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài 3.1 (ĐH Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ \cdots \\ x_{n-1} + x_n = n - 1 \\ x_n + x_1 = n \end{cases}.$$

Bài 3.2 (ĐH Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh)**.** Giả sử có 1000 người sử dụng mạng điện thoại Viettel(V), Mobi(M), Vina(N). Biết rằng sau mỗi tháng, trong số những người dùng V có 10% chuyển sang dùng M và 20% chuyển sang dùng N; trong số những người dùng M có 15% chuyển sang dùng V và 10% chuyển sang dùng N; trong số những người dùng N có 20% chuyển sang dùng V và 5% chuyển sang dùng M.

(a) Giả sử ban đầu cả 1000 người này đều dùng V. Hỏi sau 3 tháng, số lượng khách hàng dùng mỗi loại mạng điện thoại là bao nhiêu?

(b) Hỏi thời điểm ban đầu, số người dùng mỗi loại mạng di động là bao nhiêu để cho qua mỗi tháng, số lượng khách hàng ở mỗi nhà mạng là không đổi? Biết rằng, tổng số khách hàng dùng 3 loại mạng luôn là 1000 và không có khách hàng mới nào và không có khách hàng nào bỏ dùng. Kết quả được làm tròn đến số nguyên.

Bài 3.3 (ĐH Đại Nam)**.** Cho $A = (a_{ij})$ là một ma trận vuông thực cấp n xác định bởi:

$$a_{ij} = \begin{cases} 5 & \text{nếu } i = j \\ 2 & \text{nếu } i = j + 1 \\ 3 & \text{nêu } i = j - 1 \\ 0 & \text{nếu } i \notin \{j, j+1, j-1\} \end{cases}$$

(a) Tính định thức ma trận A khi $n = 1, 2, 3$.

(b) Tính định thức A cấp n.

(c) Giải hệ phương trình: $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 10 \\ \vdots \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$

Bài 3.4 (ĐH Đại Nam)**.** Hãy cho biết những mệnh đề sau là đúng hay sai? Nếu mệnh đề đúng hãy chứng minh, nếu mệnh đề sai hay đưa ra phản ví dụ.

(a) Hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất vô nghiệm thì hệ phương trình tuyến tính thuần nhất liên kết chỉ có nghiệm tầm thường.

(b) Nếu hệ phương trình tuyến tính n ẩn số có ma trận mở rộng là một ma trận vuông không suy biến thì hạng của ma trận hệ số của hệ phương trình đó bằng n.

(c) Cho phương trình ma trận $AX = B$, với B là ma trận khả nghịch cấp n. Nếu A là ma trận vuông có $det\,(A) = 0$ thì phương trình trên vô nghiệm.

Bài 3.5 (ĐH Đồng Tháp)**.** Một nhà máy sản xuất năm loại sản phẩm A, B, C, D, E. Mỗi loại phải qua năm công đoạn là cắt, gọt, đóng gói, trang trí và dán nhãn với thời gian cho mỗi công đoạn như sau:

	Sản phẩm A	Sản phẩm B	Sản Phẩm C	Sản phẩm D	Sản phẩm E
Cắt	1 giờ	1 giờ	1 giờ	1 giờ	1 giờ
Gọt	1 giờ	2 giờ	3 giờ	4 giờ	5 giờ
Đóng gói	1 giờ	3 giờ	6 giờ	10 giờ	15 giờ
Trang trí	1 giờ	4 giờ	10 giờ	20 giờ	35 giờ
Dán nhãn	1 giờ	5 giờ	15 giờ	35 giờ	70 giờ

Các bộ phận cắt, gọt, đóng gói, trang trì, dán nhãn có *số giờ công nhiều nhất* trong một tuần lần lượt là 15, 35, 70, 126, 210 giờ. Hỏi nhà máy phải sản xuất mỗi loại sản phẩm là bao nhiêu trong tuần để sử dụng hết công suất của nhà máy?

Bài 3.6 (ĐH Hùng Vương). Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2x_{2018} - 3x_{2019} + x_{2020} = 1 \end{cases}$$

Bài 3.7 (ĐH Khánh Hòa). Cho hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1(2019)}x_{2019} & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2(2019)}x_{2019} & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{2019(1)}x_1 + a_{2019(2)}x_2 + \cdots + a_{2019(2019)}x_{2019} & = 0, \end{cases}$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbb{C},\ i,\ j = 1, 2, \dots, 2019$ và thỏa mãn

$$|a_{ii}| > \sum_{1 \leqslant j \leqslant 2019,\ j \neq i} |a_{ij}|,\ i = 1, 2, \dots, 2019.$$

Chứng minh rằng hệ phương trình đã cho có duy nhất nghiệm tầm thường.

Bài 3.8 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Cho a là một số nguyên chẵn; $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ là các số nguyên lẻ. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} ax_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6 = 9 \\ b_1x_1 + ax_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6 = 9 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + ax_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6 = 9 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + ax_4 + b_5x_5 + b_6x_6 = 9 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + ax_5 + b_6x_6 = 10 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + ax_6 = 10. \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình trên khi $a = 2; b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 1$.

b) Chứng minh rằng hệ đã cho có nghiệm.

Bài 3.9 (ĐH Kinh tế Quốc dân). Cho $3n$ số nguyên $a_1, a_2, ..., a_n; b_1, \quad b_2, ..., b_n; \quad c_1, c_2, ..., c_n$ thỏa mãn $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = 0$. Chứng minh rằng hệ phương trình sau luôn có nghiệm nguyên:

$$\begin{cases} a_1b_1x_1 + a_1b_2x_2 + \cdots + a_1b_nx_n = c_1 - x_1 \\ a_2b_1x_1 + a_2b_2x_2 + \cdots + a_2b_nx_n = c_2 - x_2 \\ \quad\quad\quad \cdots\cdots \quad\quad \cdots\cdots \\ a_nb_1x_1 + a_nb_2x_2 + \cdots + a_nb_nx_n = c_n - x_n \end{cases}$$

Bài 3.10 (ĐH Nha Trang). Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 6 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 7 \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 - 5x_5 = 8. \end{cases}$$

Bài 3.11 (ĐH Phạm Văn Đồng). Cho các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ đôi một khác nhau. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1^{2019}x_1 + a_1^{2018}x_2 + \ldots + x_{2020} + a_1^{2020} = 0 \\ a_2^{2019}x_1 + a_2^{2018}x_2 + \ldots + x_{2020} + a_2^{2020} = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad\quad \ldots \\ a_{2020}^{2019}x_1 + a_{2020}^{2018}x_2 + \ldots + x_{2020} + a_{2020}^{2020} = 0 \end{cases}$$

Bài 3.12 (ĐH SPKT Vĩnh Long). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} \lambda x_1 + ax_2 + bx_3 + cx_4 = 0 \\ -ax_1 + \lambda x_2 + dx_3 - ex_4 = 0 \\ -bx_1 - dx_2 + \lambda x_3 + fx_4 = 0 \\ -cx_1 + ex_2 - fx_3 + \lambda x_4 = 0 \end{cases}$$

Hãy tìm điều kiện cần và đủ đối với các hệ số thực $\lambda, a, b, c, d, e, f$ để hệ phương trình có nghiệm không tầm thường.

Bài 3.13 (Học viện KTQS). Giả sử $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng nếu hệ phương trình $Ax = 0$ chỉ có nghiệm tầm thường thì A^TA khả nghịch.

4 KHÔNG GIAN VÉC TƠ VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Bài 4.1 (ĐH Hùng Vương). Cho f, g là hai tự đồng cấu của không gian véc tơ hữu hạn chiều V thỏa mãn $fg = gf = 0$ và $\mathrm{Im}\,(f) \cap Ker\,(f) = \{0\}$, $\mathrm{Im}\,(g) \cap Ker\,(g) = \{0\}$. Chứng minh rằng:

$$rank\,(f) + rank\,(g) = rank\,(f+g)\,.$$

Bài 4.2 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Trong không gian vectơ $V = P_3[x]$ các đa thức với hệ số thực không với quá 3 và đa thức 0, xét hệ

$$S = \{p_1(x) = 1; p_2(x) = x-1; p_3(x) = (x-1)(x-2); p_4(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\}.$$

a) Chứng minh rằng S là một cơ sở của V.

b) Cho đa thức $p(x) = ax^3 + bx^2 + bx + 2019$, trong đó a, b là hai số nguyên. Gọi $(m_1; m_2; m_3; m_4)$ là tọa độ của vectơ $p(x)$ theo cơ sở S. Chứng minh rằng $m_2 + 2m_3 + 2m_4$ là một số nguyên chia hết cho 3.

Bài 4.3 (ĐH Kinh tế Quốc dân). Kí hiệu $M_3(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận thực vuông cấp 3. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Xét phép biến đổi tuyến tính $L : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ xác định bởi

$$L(X) = \frac{1}{2}(AX + XA)\,.$$

Hãy tính định thức ma trận của L.

Bài 4.4 (ĐH Quy Nhơn). Giả sử $V = \mathbb{C}[x]$ là một $\mathbb{C}$-không gian véc tơ và $f(x) \in V$ là một đa thức cho trước bậc $r \geq 1$, V_{n+1} là không gian con của V gồm các đa thức có bậc $\leq n$. Xét ánh xạ tuyến tính $\varphi : V \mapsto V$ xác định bởi

$$\varphi(g) = fg' - f'g$$

với mọi $g \in V$, trong đó f', g' là đạo hàm của f và g tương ứng.

1. Tìm $\ker\varphi$.
2. Chứng tỏ rằng $\varphi(V_{r+1}) = \varphi(V_r)$.

Bài 4.5 (ĐH SPKT Vĩnh Long). Trong không gian $\mathbb{R}^n$ xét hệ vectơ $v_1 = (v_{11}, \ldots, v_{1n}), \ldots, v_p = (v_{p1}, \ldots, v_{pn}), p \leq n$, có tính chất

$$|\, v_{ii} \,| > \sum_{j \neq i} |\, v_{ij} \,|\,.$$

Chứng tỏ rằng hệ này độc lập tuyến tính.

5 GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG

Bài 5.1 (ĐH Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh). Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ và X thỏa $AX + mX = B$. Tìm tất cả các giá trị thực m sao cho X có trị riêng bằng 1.

Bài 5.2 (ĐH Giao thông Vận tải). Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Giả sử véc-tơ $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ là một véc-tơ riêng của ma trận A. Tính giá trị x theo các số a, b, c, d.

Bài 5.3 (ĐH Hùng Vương). Cho ma trận

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận có các giá trị riêng dương sao cho $B^2 = A$.

Bài 5.4 (ĐH Quy Nhơn). Cho dãy số x_n xác định bởi

$$x_{n+3} + 2x_{n+2} - 5x_{n+1} - 6x_n = 0$$

và $x_0 = 1, x_1 = -1, x_2 = 11$. Tính x_{2019}.

Bài 5.5 (Học viện KTQS). Xác định tất cả các số phức λ sao cho tồn tại số nguyên dương n và ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A^2 = A^T$, trong đó λ là trị riêng của A.

6 ĐA THỨC

Bài 6.1 (ĐH Hùng Vương). Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P(P(x)) + 1 = \left[P^2(x) + \left(x^2 + x + 1\right)^2\right]^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.2 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Cho $P(x), Q(x)$ là hai đa thức với hệ số thực và có bậc dương sao cho đa thức $P(x^4) + xQ(x^4)$ chia hết cho đa thức $x^2 + 1$.

a) Hãy chỉ ra hai đa thức $P(x), Q(x)$ có cùng bậc nhất thỏa mãn đề bài.

b) Tìm số dư trong phép chia của đa thức $P(x)Q(x)$ cho đa thức $x^2 - 2x + 1$.

Bài 6.3 (ĐH Kinh tế Quốc dân). Tìm tất cả các đa thức

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

thỏa mãn các điều kiện sau:
i) $(a_0, a_1, ..., a_n)$ là hoán vị của các số $(0, 1, 2, \ldots, n)$.
ii) Tất cả các nghiệm của $P(x)$ là số hữu tỉ.

Bài 6.4 (ĐH Nha Trang). Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn đồng nhất thức

$$xP(x-1) = (x-26)\,P(x).$$

Bài 6.5 (ĐH Phạm Văn Đồng). a) Tồn tại hay không một đa thức có hệ số nguyên $P(x)$ thỏa mãn $P(10) = 400$, $P(14) = 440$, $P(8) = 520$?
b) Cho đa thức $P(x) = x^{2018} - ax^{2016} + a$ trong đó a là số thực khác 0. Biết rằng $P(x)$ có 2018 nghiệm thực. Chứng minh rằng tồn tại một nghiệm x_0 của $P(x)$ sao cho $|x_0| \leq \sqrt{2}$.

Bài 6.6 (Học viện KTQS). Cho đa thức $P(x)$ bậc n không có nghiệm thực. Chứng minh rằng $Q(x) = P(x) + aP'(x) + ... + a^n P^{(n)}(x)$ không có nghiệm thực.

7 TỔ HỢP

Bài 7.1 (ĐH Đồng Tháp). Trong một câu lạc bộ có 2019 thành viên, mỗi thành viên ban đầu có một chiếc mũ. Sau đó mỗi thành viên gửi mũ của mình cho một thành viên khác (mỗi thành viên có thể nhận được hơn một chiếc mũ). Chứng minh rằng sau khi gửi mũ sẽ tồn tại một nhóm 673 thành viên sao cho không có ai trong nhóm đó nhận được mũ từ các thành viên khác trong nhóm.

Bài 7.2 (ĐH Giao thông Vận tải). a) Mặt phẳng được chia thành n miền bởi hai họ đường thẳng song song. Xác định số đường thẳng tối thiểu để số miền $n \geq 2019$.
b) Mặt phẳng được chia thành n miền bởi ba họ đường thẳng song song. Xác định số đường thẳng tối thiểu để số miền $n \geq 2020$.

Bài 7.3 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Trên đoạn đường từ một trường đại học về kí túc xá, có 11 cột điện, các cột điện thẳng hàng và khoảng cách giữa hai cột điện liên tiếp đều cách nhau $50m$. Ở hai cột điện ở hai đầu đã được lắp bóng đèn. Nhà trường lắp đặt một số bóng đèn chiếu sáng (giống nhau) cho 9 cột điện còn lại, mỗi cột điện lắp không quá 1 bóng đèn.

a) Có bao nhiêu cách lắp 6 bóng đèn vào 9 cột điện đã cho?

b) Một cách lắp đèn được gọi là "đủ sáng" nếu có ít nhất 7 bóng đèn được lắp và khoảng cách giữa 2 bóng đèn liên tiếp (bao gồm cả hai bóng đèn ở hai cột điện ở hai đầu) không quá $100m$. Hỏi có bao nhiêu cách lắp đèn đủ sáng?

Bài 7.4 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội)**.** Cho H là tập hợp gồm 7 điểm phân biệt $A_1, A_2, ..., A_7$ bất kì thuộc hình tròn tâm O, bán kính $R = 1$. Với mỗi $i, j \in \{1, 2, ..., 7\}$, kí hiệu $d(A_i, A_j)$ là khoảng cách giữa hai điểm A_i, A_j. Gọi

$$e(H) = \min\{d(A_i, A_j) \mid 1 \le i < j \le 7\}.$$

a) Chứng minh rằng $e(H) \le 1$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của $e(H)$.

Bài 7.5 (ĐH Phạm Văn Đồng)**.** Cho đa giác đều 30 cạnh nội tiếp trong một đường tròn (O). Hỏi có tất cả bao nhiêu tứ giác mà 4 đỉnh của tứ giác là các đỉnh của đa giác và 4 cạnh của tứ giác là 4 đường chéo của đa giác?

Bài 7.6 (ĐH Quy Nhơn)**.** Có 9 người tham gia một bữa tiệc và ngồi chung một bàn. Chứng tỏ rằng luôn có 4 người quen biết nhau hoặc 3 người không quen biết nhau.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: GIẢI TÍCH

1 DÃY SỐ

Bài 1.1 (ĐH Tây Bắc). Cho hàm số $f_n(x) = x^n - x - 2019, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.
1. Với mỗi $n \geq 2$, chứng minh rằng phương trình $f_n(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $u_n \in [1; 2019]$.
2. Chứng minh tính đơn điệu của dãy $\{u_n\}$.
3. Xét tính hội tụ hay phân kỳ và tìm giới hạn nếu có của $\{u_n\}$.

Bài 1.2 (ĐH Tây Bắc). Cho $u_0 = 0, u_n = \dfrac{u_{n-1}}{2019} + (-1)^n, \forall n \geq 1$.
1. Xét sự hội tụ của $\{u_n\}$.
2. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^2$.

Bài 1.3 (ĐH Đồng Tháp). Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n^{2020} + 2018u_n^{2019} + u_n$ với mọi $n \geq 1$.

(a) Chứng minh rằng rằng $\{u_n\}$ không bị chặn trên.

(b) Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{u_1^{2019}}{u_2 + 2018} + \dfrac{u_2^{2019}}{u_3 + 2018} + \cdots + \dfrac{u_n^{2019}}{u_{n+1} + 2018} \right)$.

Bài 1.4 (CĐ Sư phạm Nam Định). Cho $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + (2n+1)u_n} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng: nếu $a > 0$ thì dãy (u_n) giảm và bị chặn dưới.

b) Tính u_{2019} biết $a = -\dfrac{1}{2019}$.

c) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$ biết $a = \dfrac{4}{3}$.

Bài 1.5 (ĐH Phạm Văn Đồng). Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n thì phương trình
$$2019^x(x^2 - n^2) = 1$$
có một nghiệm dương duy nhất.
Kí hiệu nghiệm của phương trình là x_n. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_{n+1} - x_n)$.

Bài 1.6 (ĐH Thủy lợi Hà Nội). Cho $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ và $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ là hai dãy số xác định bởi

$$\begin{cases} a_0 > 0,\ b_0 > 0 \\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2b_n},\ n = 0, 1, 2, ... \\ b_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{2a_n},\ n = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

Chứng minh rằng max$(a_{2019}, b_{2019}) > \dfrac{89}{2}$.

Bài 1.7 (ĐH SPKT Vĩnh Long). Cho dãy số $u_1, u_2, ...,$, xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{u_{n-1}}\ , \quad n = 2, 3... \end{cases}$$

Chứng minh rằng $63 < u_{2019} < 78$.

Bài 1.8 (ĐH Nha Trang). Cho $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi các điều kiện $x_1 = 1, x_{n+1} = \dfrac{\sqrt{x_n^2 + 2019x_n} + x_n}{2}, \forall n \geq 1$.

a) Đặt $y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}$. Tính $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_n$.

b) Tính $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n}$.

Bài 1.9 (ĐH Nha Trang). Cho $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi các điều kiện

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_{n+1} = x_n^2 - \frac{1}{2}\, \forall n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng: $-\dfrac{1}{2} < x_n < 0,\ \forall n \geq 2$.

b) Chứng minh $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và tìm giới hạn đó.

Bài 1.10 (ĐH GTVT). Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_1 = \dfrac{1}{2}, \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(1 + u_n + u_{n-1}^3\right),\ \text{ với } n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ có giới hạn và tìm $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n$.

Bài 1.11 (ĐH Hàng Hải)**.** Cho $f : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ là hàm số liên tục có tính chất:

$$f(f(x)) > x \ \ (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Đặt $x_1 = f(0), x_{n+1} = f(x_n) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.
a) Chứng minh rằng $x_n > 0 \ \ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$;
b) Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x_{k+2} - x_k}{x_k x_{k+1} x_{k+2}}$.

Bài 1.12 (ĐH Hàng Hải)**.** Cho $f : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ là hàm số bị chặn dưới. Chứng minh rằng tìm được một dãy số thực $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn:

$$f(x_n + 2019) - f(x_n) < \frac{1}{n} \ \ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

Bài 1.13 (ĐH KT Hà Nội)**.** Cho dãy số thực $\{x_n\}$ được xác định như sau:

$$x_1 = a, \ 2019x_n = 2019x_{n+1} + (x_n - 2019)^2 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Chứng minh dãy số $\{x_n\}$ là một dãy đơn điệu.
b) Khi $a < 2019$, chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ không bị chặn dưới và tính giới hạn

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_n - 2019}{x_{n+1} - 2019}.$$

c) Tìm điều kiện của a để dãy số có giới hạn hữu hạn. Trong trường hợp này, hãy tìm giới hạn sau $\lim\limits_{n\to+\infty} n(x_n - 2019)$.

Bài 1.14 (ĐH HV Phú Thọ)**.** Cho dãy số (u_n) có $u_1 = 2, u_2 = 20, u_3 = 56$ và $u_{n+3} = 7u_{n+2} - 11u_{n+1} + 5u_n - 3.2^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số dư khi chia u_{2011} cho 2011.

2 CHUỖI SỐ

Bài 2.1 (ĐH Thủy lợi Hà Nội)**.** Cho f là hàm số xác định bởi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có: $f''(x) + f'(x) = e^x - f(x)$.

3 HÀM SỐ

Bài 3.1 (ĐH Tây Bắc). Cho f là hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $|f(x)| < |x|,\ \forall x \neq 0$. Chứng minh rằng:
1. Phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm trên $\mathbb{R}$.
2. Nếu $0 < a < b$ thì tồn tại số $K \in [0, 1)$ sao cho $|f(x)| \leq K|x|, \forall x \in [a, b]$.

Bài 3.2 (ĐH Tây Bắc). Cho hàm số $f : (-a, a) \setminus \{0\} \to (0, +\infty), a > 0$ thỏa mãn

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) = 2.$$

Hãy tìm $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Bài 3.3 (ĐH Đồng Tháp). Cho f là hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) - 2019(1 + f(x)) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2017$. Chứng minh rằng $f(1) \geq 2018e^{2019} - 1$.

Bài 3.4 (ĐH Đồng Tháp). Tìm các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$f(9x) - \frac{5}{6}f(6x) + \frac{1}{6}f(4x) = 6x \tag{2}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 3.5 (CĐ Sư phạm Nam Định). Giả sử $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ sao cho $3f(x) \geq 2f(f(x)) + x$ với mọi $x > 0$. Chứng minh rằng: $f(x) \geq \frac{1}{2}x$ với mọi $x > 0$.

Bài 3.6 (ĐH Phạm Văn Đồng). Cho $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{(t-1)^2}dt,$$

với mọi $x \in (1, +\infty)$. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

Bài 3.7 (ĐH SPKT Vĩnh Long). Cho hàm f khả vi trong khoảng $(0, +\infty)$, thỏa

$$\lim_{x\to+\infty} ((\ln 2019)f(x) + f'(x)) = 2019.$$

Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Bài 3.8 (ĐH Nha Trang)**.** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^{k-2019}\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

a) Tìm điều kiện của k để $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.
b) Tìm điều kiện của k để $f(x)$ khả vi tại $x = 0$.
c) Với $k = 2021$, $f(x)$ có khả vi tại $x = \dfrac{2}{2019}$ không?

Bài 3.9 (ĐH BK Tp HCM)**.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[1, +\infty)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

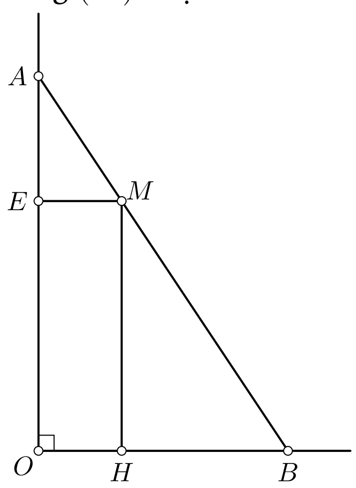
i) $f(1) = a > 0$

ii) $f(x+1) = 2019(f(x))^2 + f(x), \forall x \in [1, +\infty)$.

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(1)}{f(2)} + \dfrac{f(2)}{f(3)} + \ldots + \dfrac{f(n)}{f(n+1)}\right]$.

4 PHÉP TÍNH VI PHÂN

Bài 4.1 (ĐH Tây Bắc)**.** Trung tâm của thị xã X nằm ở vị trí giao nhau của hai con đường vuông góc với nhau tại O (như hình vẽ). Một địa danh lịch sử có vị trí đặt tại M, vị trí M cách vị trí đường (I) đoạn $ME = 125m$ và cách đường (II) đoạn $MH = 1km$.



1. Vì lý do thực tiễn, người ta muốn làm một đoạn đường thẳng AB đi qua vị trí M. Hãy xác định độ dài ngắn nhất của đoạn đường cần làm.
2. Từ O người ta cũng muốn làm một con đường hiện đại tới M. Họ chọn một điểm K trên OE và làm con đường mới từ M đến K sau đó nâng cấp con đường từ K đến O. Hỏi vị trí của K cách O bao nhiêu để để chi phí làm con đường này thấp nhất. Biết trên mỗi km đường chi phí làm đường mới bằng $\dfrac{5}{4}$ lần chi phí nâng cấp đường cũ.

Bài 4.2 (ĐH Tây Bắc)**.** Cho f là hàm số thực liên tục trên $[a, +\infty)$ thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:
1. Hàm f bị chặn trên $[a, +\infty)$.
2. Hàm f liên tục đều trên $[a, +\infty)$.
3. Nếu $c > f(a)$ thì tồn tại một điểm $x_0 \in [a, +\infty)$ sao cho $f(x_0) = \inf\limits_{x\in[a,+\infty)} f(x)$.

Bài 4.3 (ĐH Tây Bắc). Gia đình ông A muốn xây một cái bể hình hộp với đáy là hình vuông có cạnh là $x, x \geq 1$ (đơn vị mét).
1. Giả sử ông A cần chiếc bể có thể tích là $10m^3$, cho biết giá thành khi xây mỗi m^2 các mặt đáy và các mặt bên tương ứng của mặt trong của bể lần lượt là 700.000đ và 500.000đ.
a) Hãy tính tổng chi phí ông A bỏ ra để xây chiếc bể theo chiều dài cạnh x.
b) Tìm kích thước của chiếc bể để chi phí xây dựng mà ông A bỏ ra để xây bể là nhỏ nhất.
2. Sau khi xây xong bể, ông A đo thấy tổng diện tích xung quanh bên trong của bể là $150m^2$.
a) Hãy tính thể tích V của bể thông qua chiều dài cạnh x.
b) Tìm miền biến thiên của thể tích V và thể tích lớn nhất mà bể có thể chứa được.

Bài 4.4 (ĐH Tây Bắc). Cho f là hàm số khả vi trên một khoảng mở $I \subset \mathbb{R}$ chứa đoạn $[0, 1]$ sao cho $f(0) = f(1) = 0, f'(0) = f'(1) = 1$. Chứng minh rằng:
1. Phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm khác 0 và 1 trên I.
2. Phương trình $f'(x) = 0$ luôn có ít nhất 2 nghiệm phân biệt trên I.

Bài 4.5 (ĐH Đồng Tháp). Có hai ôtô xuất phát cùng một lúc, chạy ngược chiều nhau trên đoạn đường AB. Biết rằng cả hai xe đến đích cùng thời điểm. Chứng minh rằng trong quá trình chạy, có thời điểm hai xe có cùng vận tốc nhưng ngược chiều nhau.

Bài 4.6 (CĐ Sư phạm Nam Định). Từ cảng A dọc theo được sắt AB, có một cảng D cách cảng A một khoảng L, khoảng cách từ cảng D đến đường sắt AB bằng h ($h < L$). Người ta cần xây dựng một trạm trung chuyển C nằm trên đường sắt và 1 con đường bộ đi từ C tới D. Gọi α là góc tạo bởi CD và AB.

a) Tính tổng quãng đường di chuyển hàng từ A đến D theo L, h, α.

b) Tìm α sao cho thời gian di chuyển hàng từ A đến D là ngắn nhất (biết vận tốc trên đường sắt là v_1, vận tốc trên đường bộ là v_2, $v_1 > v_2$).

Bài 4.7 (ĐH Phạm Văn Đồng). Cho hàm số f liên tục trên $[0; 1]$, có đạo hàm trên khoảng $(0; 1)$ và thỏa mãn $f(0) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0; 1)$ sao cho
$$f'(c) = \frac{c}{c+1} f(c).$$

Bài 4.8 (ĐH Thủy lợi Hà Nội). Cho hàm số $f : [0; 1] \to [2019; +\infty)$ có đạo hàm đến cấp 3 trong $(0; 1)$. Giả sử phương trình $f(x) = 2019$ có ít nhất 2 nghiệm trong $(0; 1)$, khi đó hãy chứng minh rằng: luôn tồn tại số thực $c \in (0; 1)$ sao cho $f'''(c) = 0$.

Bài 4.9 (ĐH SPKT Vĩnh Long)**.** Cho hàm f liên tục trên $[1, 2019]$, khả vi trong khoảng $(1, 2019)$ và $f(2019) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (1, 2019)$ sao cho

$$f'(c) = \left(\frac{2019c - 2020}{c - 1}\right) f(c).$$

Bài 4.10 (ĐH Nha Trang)**.** Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi liên tục, thỏa $f(0) = 0,\ f(1) = 1$. Chứng minh rằng, tồn tại c_1, c_2, c_3, với $0 < c_1 < c_2 < c_3 < 1$, sao cho

$$\frac{1}{f'(c_1)} + \frac{4}{f'(c_2)} + \frac{2014}{f'(c_3)} = 2019.$$

Bài 4.11 (ĐH BK Tp HCM)**.** Cho $f : (0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục thỏa tính chất: $\forall a \in (0, +\infty), \forall n, m \in \mathbb{N}$ và $n, m \geqslant 1 : n < m \Rightarrow f(na) \leqslant f(ma)$. Chứng minh f là hàm không giảm trên $(0, +\infty)$, tức $\forall x, y \in (0, +\infty), x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Bài 4.12 (ĐH GTVT)**.** Cho f khả vi đến cấp 2 trong (a, b) và $f'(a) = f'(b) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

Bài 4.13 (ĐH Hàng Hải)**.** Giả sử hàm f khả vi hai lần trên $\mathbb{R}$. Đặt $g(x) = f(x) + f''(x)$. Chứng minh rằng nếu phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm thì $g(x)$ không đổi dấu trên $\mathbb{R}$.

Bài 4.14 (ĐH KT Hà Nội)**.** Cho hàm số $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[0; 1]$, khả vi trên $(0; 1)$ và cho 2019 số dương $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$. Chứng minh rằng tồn tại 2020 số thực $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{2019}$ thuộc $(0; 1)$ trong đó các số $c_1, c_2, \ldots, c_{2019}$ đôi một phân biệt và thỏa mãn $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2019}).f'(c_0) = \sum_{k=1}^{2019} a_k f'(c_k)$.

Bài 4.15 (ĐH KT Hà Nội)**.** Một nhà địa chất đang ở tại ví trí A trong sa mạc, anh ta muốn đến vị trí B (bằng ô tô), với $AB = 100$ km. Nhưng trong sa mạc thì xe chỉ có thể di chuyển với vận tốc là 30 km/h. Cách vị trí A về phía Bắc 20 km có một con đường nhựa $A'B'$ chạy song song với đường thẳng nối từ A đến B. Trên đường nhựa thì xe có thể di chuyển với vận tốc 50 km/h. Do vậy nhà địa chất dự kiến đi theo đường gấp khúc $ACDB$ (với C và D là các vị trí trên con đường nhựa, tham khảo hình vẽ).

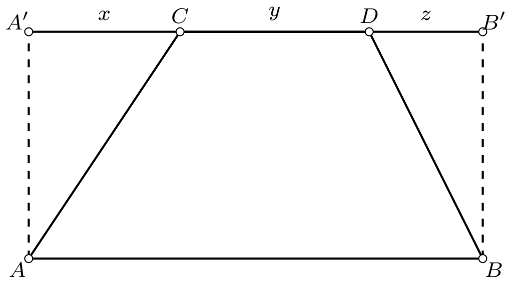
a) Tính thời gian nhà địa chất cần đi trong trường hợp $A'C = 30$ km và $DB' = 20$ km.

b) Đặt $A'C = x$, $CD = y$, $DB' = z$. Tính thời gian $T(x, y, z)$ nhà địa chất đó cần bỏ ra để đi từ A tới B theo x, y, z.

c) Chứng minh rằng $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và

$$T(x,y,z) \geq \frac{\sqrt{(100-y)^2+1600}}{30} + \frac{y}{50}.$$

Từ đó tìm thời gian ít nhất để nhà địa chất đó cần bỏ ra để đến được B.



5 PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Bài 5.1 (ĐH Tây Bắc). Cho hàm số $f(x) = 2x - [x], x \in \mathbb{R}$, ở đó $[x]$ là phần nguyên của x.
1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ với $x \in \mathbb{R}$.
2. Chứng minh hàm số $f(x)$ khả tích trên đoạn $[0, 3]$. Từ đó tính tích phân $\int\limits_0^3 f(x)dx$.

Bài 5.2 (ĐH Tây Bắc). Cho $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ là hàm khả vi liên tục. Chứng minh rằng

$$\left| \int\limits_0^1 f^3(x)dx - f^2(0)\int\limits_0^1 f(x)dx \right| \leq \max_{0\leq x\leq 1} |f'(x)| \left(\int\limits_0^1 f(x)dx \right)^2.$$

Bài 5.3 (ĐH Đồng Tháp). Cho f là hàm số liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trên $(0, 1)$ và thỏa mãn

$$f(1) = 3\int\limits_0^{1/3} e^{1-x^2} f(x)dx.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $f'(c) = 2cf(c)$.

Bài 5.4 (CĐ Sư phạm Nam Định). Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục trên đoạn $[0, 1]$, $f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho:

$$2019f'(c).\int\limits_0^c f(x)dx = -f(c).\tan(2019f(c))$$

Bài 5.5 (CĐ Sư phạm Nam Định). Cho $f : [0,1] \to [0;+\infty)$ khả vi liên tục trên $[0,1]$, $f(0) = 0$, $\max\limits_{[0,1]} f'(x) = 6$, $\int\limits_0^1 f(x)dx = \dfrac{1}{3}$.

a) Chứng minh rằng: $0 \leq f(1) \leq 2$.

b) Chứng minh rằng: $\int\limits_0^1 [f(x)]^3 dx \leq \dfrac{2}{3}$.

Bài 5.6 (ĐH Phạm Văn Đồng). Cho hai hàm số φ và f được xác định trên $\mathbb{R}$ bởi

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0, \end{cases} \quad \text{và} \quad f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}} \displaystyle\int_0^x \varphi(t)dt & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Biết rằng φ liên tục và khả vi trên $\mathbb{R}$, và f là hàm lẻ trên $\mathbb{R}$.

1. Chứng minh rằng f khả vi tại mọi $x \neq 0$ và tính đạo hàm $f'(x)$ của nó.
2. Chứng minh rằng với mọi $x \geq 0$, ta có đẳng thức
$$\int_0^x \varphi(t)dt = \frac{x^3}{2}\varphi(x) - \frac{3}{2}\int_0^x t^2\varphi(t)dt.$$
Từ đó chứng minh rằng f khả vi tại 0 và $f'(0) = 0$.
3. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^3}$.

Bài 5.7 (ĐH Phạm Văn Đồng). Giả sử f là hàm số khả vi liên tục trên đoạn $[a,b]$. Tính giới hạn sau

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)dx.$$

Bài 5.8 (ĐH Thủy lợi Hà Nội). Cho $f \in C[0;1]$, $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{(1+x^2)^3} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hãy chứng minh rằng:

$$\int_0^1 (1+x^2)^2 f^2(x)dx > \frac{1}{2\pi}.$$

Bài 5.9 (ĐH Thủy lợi Hà Nội). Liệu có hay không một hàm số f khả vi trên $[0;2]$ và thỏa mãn các tính chất sau: $f(0) = f(2) = 1$, $|f'(x)| \leqslant 1$ với mọi $x \in [0;2]$, $|\displaystyle\int_0^2 f(x)dx| \leqslant 1$.

Bài 5.10 (ĐH Thủy lợi Hà Nội). Cho f là hàm số dương và liên tục trên $[0;1]$. Hãy tính tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}dx.$$

Bài 5.11 (ĐH SPKT Vĩnh Long). Cho hàm f liên tục trên đoạn $[0,1]$, khả vi trong khoảng $(0,1)$; thỏa mãn:

$$f(1)=0,\ \int\limits_0^1 (f'(x))^2dx = \frac{2}{3} \text{ và } \int\limits_0^1 (x+f'(x))^2dx = 3.$$

Tính $\int\limits_0^1 f(x)dx.$

Bài 5.12 (ĐH Nha Trang). Cho hàm số $f(x)]$ khả vi liên tục trên $[0;\ 2019]$, $f(0)=0$. Chứng minh $\int\limits_0^{2019} |f(x).f'(x)|dx \le \frac{2019}{2}\int\limits_0^{2019} (f'(x))^2dx.$

Bài 5.13 (ĐH GTVT). a) Cho hàm f liên tục và chẵn trên $\mathbb{R}$, $a>0$. Chứng minh rằng

$$\int\limits_{-x}^{x} \frac{f(t)}{1+a^t}dt = \int\limits_0^x f(t)dt, \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Tính tích phân

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+2019^x)\sin x}dx.$$

Bài 5.14 (ĐH GTVT). Cho f liên tục trên $[0,1]$. Tìm

$$\lim_{u\to+\infty}\left(\int\limits_0^1 |f(x)|^u dx\right)^{\frac{1}{u}}.$$

Bài 5.15 (ĐH Hàng Hải). Cho$f(x), g(x)$ là các hàm thực liên tục trên khoảng đóng $[a,b], (a<b)$, thỏa mãn các điều kiện sau:

a) $g(x)>0\ \ (\forall x\in[a,b])$;

b) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx.$

Chứng minh bất đẳng thức:

$$\int_a^b \frac{(f(x))^{2020}}{(g(x))^{2019}}dx \geq \int_a^b \frac{(f(x))^{2019}}{(g(x))^{2018}}dx.$$

Bài 5.16 (ĐH KT Hà Nội)**.** a) Chứng minh rằng với mỗi cặp số thực c, d bất kỳ thỏa mãn $0 < c < d < 1$, tồn tại ít nhất một đa thức bậc hai $P(x)$ thỏa mãn $\min\limits_{x\in[c;d]} P(x) \geq 1 > P(x) \geq 0$ với mọi $x \in [0; c) \cup (d; 1]$.

b) Cho $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ là một hàm sô khả vi liên tục thỏa mãn các điều kiện $f(1) = 0$ và $\int\limits_0^1 f'(x)x^n dx = 0$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$. Hãy chứng minh rằng

1) $\int_0^1 f(x).[Q(x)]^m dx = 0$ với $Q(x)$ là một đa thức bậc 2 bất kỳ và m là số tự nhiên bất kỳ.

2) $f(x) = 0$ với mọi $x \in [0; 1]$.

6 PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Bài 6.1 (ĐH SPKT Vĩnh Long)**.** Tìm tất cả hàm khả vi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, thỏa mãn

$$f(2019x + 2018) = 2019f(x) + 2018,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.2 (ĐH SPKT Vĩnh Long)**.** Tìm tất cả hàm f khả vi trên $[0, 1]$ thỏa

$$\begin{cases} f(0) = 0,\ f(1) = -2\ln 2, \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{(f'(x))^2}{e^{f(x)}} dx \le 4. \end{cases}$$

Bài 6.3 (ĐH GTVT)**.** Tìm tất cả các hàm f liên tục thỏa mãn

$$\begin{cases} f(0) = 2019, \\ f(2019x) - f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bài 6.4 (ĐH KT Hà Nội)**.** Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ khả vi liên tục đến cấp hai trên $[0; 1]$ và thỏa mãn các điều kiện:

a) $f(0) = \dfrac{2019}{4}$, $f'(0) = \dfrac{2019}{2}$;

b) $f''(x) \le 6057$ với mọi $x \in (0; 1)$;

c) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \ge 2019.$

Phần II

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHÍNH THỨC

1 Đại số

1.1 Bảng A

BÀI 1.

Cách 1: Tính định thức của ma trận A ta được

$$\det(A) = (a-b)^2((a+b)^2-4).$$

Vì $a+b>2$ nên $\det(A)=0$ khi và chỉ khi $a=b$.

TH 1: Nếu $a \neq b$ thì A khả nghịch. Do đó $\operatorname{rank}(A)=4$.

TH 2: Nếu $a=b$ thì bằng cách cộng dồn các cột lại cột 1 ta có

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2+2a & a & 1 & a \\ 2+2a & 1 & a & 1 \\ 2+2a & a & 1 & a \\ 2+2a & 1 & a & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 0 & a-1 \\ 1 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 & a-1 \\ 1 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Cách 2: Trừ cột 2 cho a.cột 1, cột 3 cho cột 1, cột 4 cho b.cột 1, ta suy ra

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1-a^2 & b-a & 1-ab \\ 1 & b-a & 0 & a-b \\ b & 1-ab & a-b & 1-b^2 \end{pmatrix} = 1+\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1-a^2 & b-a & 1-ab \\ b-a & 0 & a-b \\ 1-ab & a-b & 1-b^2 \end{pmatrix}$$

TH 1: Nếu $a=b$ thì

$$\operatorname{rank}(A) = 1+\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Vì $a+b>2$ nên $a>1$. Do đó $\operatorname{rank}(A)=2$.

TH 2: Nếu $a \neq b$ thì

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(A) =& 1+\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1-a^2 & 1-ab \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1-ab & 1-b^2 \end{pmatrix} \\ =& 1+\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2-a^2-ab & 2-b^2-ab \end{pmatrix} \\ =& 1+\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2-a^2-ab & (2-a-b)(2+a+b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vì $a+b>2$ nên $\mathrm{rank}(A)=4$.
Kết luận

$$\mathrm{rank}(A)=\begin{cases}4 & \text{nếu } a\neq b,\\ 2 & \text{nếu } a=b.\end{cases}$$

BÀI 2.
Gọi số sản phẩm của từng loại A, B, C, D, E lần lượt là x_1,x_2,x_3,x_4,x_5. Để sử dụng hết công suất của nhà máy thì

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & + & 12x_4 & + & 20x_5 & = & 180\\ x_1 & + & 3x_2 & + & 12x_3 & + & 15x_4 & + & 24x_5 & = & 220\\ x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 10x_4 & + & 10x_5 & = & 120\\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 60\\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 20\end{array}\right.$$

Sử dụng phép thế đưa ma trận hệ phương trình về dạng bậc thang. Giải hệ ta được

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=4.$$

BÀI 3.

(a) Các đa thức B_i được gọi là đa thức Bernstein.

Cách b1: Xét một quan hệ

$$b_0B_0+b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3+b_4B_4+b_5B5+b_6B6=0.$$

với $b_0,\dots,b_6\in\mathbb{R}$. Thay $x=0$ ta suy ra $b_0=0$. Chia hai vế cho x, sau đó tiếp tục thay $x=0$ ta được $b_1=0$. Tương tự suy ra $b_2=\dots=b_6=0$.

Cách b2: Ma trận của hệ các đa thức $B_0,B_1,\dots,B_6$ đối với cơ sở chính tắc $1,x,\dots,x^6$ của V là ma trận tam giác dưới với các phần tử trên đường chéo bằng 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\binom{6}{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \binom{6}{2} & -\binom{5}{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\binom{6}{3} & \binom{5}{2} & -\binom{4}{1} & 1 & 0 & 0 & 0\\ \binom{6}{4} & -\binom{5}{3} & \binom{4}{2} & -\binom{3}{1} & 1 & 0 & 0\\ -\binom{6}{5} & \binom{5}{4} & -\binom{4}{3} & \binom{3}{2} & -\binom{2}{1} & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Vì vậy hạng của ma trận này bằng 7 và hệ đa thức là độc lập tuyến tính.

(b) Có thể lập luận theo hai cách

Cách b1: Tính toán trực tiếp ta có

$$\begin{cases} B_0' = -6(1-x)^5, \\ B_1' = (1-x)^4(1-6x), \\ B_2' = x(1-x)^3(2-6x), \\ B_3' = x^2(1-x)^2(3-6x), \\ B_4' = x^3(1-x)(4-6x), \\ B_5' = x^4(5-6x), \\ B_6' = 6x^5. \end{cases}$$

Ta chỉ ra sau khi bỏ đi B_0' các đa thức còn lại là độc lập tuyến tính. Thật vậy giả sử có một ràng buộc tuyến tính

$$\begin{aligned} a_0(1-x)^4(1-6x) + a_1x(1-x)^3(2-6x) + a_2x^2(1-x)^2(3-6x) \\ + a_3x^3(1-x)(4-6x) + a_4x^4(5-6x) + 6a_5x^5 = 0. \quad (3) \end{aligned}$$

Thay $x = 0$ suy ra $a_0 = 0$. Thay vào đẳng thức trên rồi chia hai vế cho x. Tiếp tục thay $x = 0$ suy ra $a_1 = 0$. Bằng cách tương tự suy ra $a_0 = a_1 = \ldots = a_5 = 0$.

Cách b2: Ta chỉ ra sau khi bỏ đi B_0' các đa thức còn lại là độc lập tuyến tính.

Ma trận của hệ các đa thức $B_1', \ldots, B_6'$ đối với cơ sở chính tắc $1, x, \ldots, x^5$ của V là ma trận tam giác dưới với các phần tử trên đường chéo bằng $1, 2, 3, 4, 5, 6$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\binom{5}{1} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\binom{5}{2} & -3\binom{4}{1} & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -4\binom{5}{3} & 4\binom{4}{2} & -4\binom{3}{1} & 4 & 0 & 0 \\ 5\binom{5}{4} & -5\binom{4}{3} & 5\binom{3}{2} & -5\binom{2}{1} & 5 & 0 \\ -6 & 6 & -6 & 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Do đó hệ là độc lập tuyến tính.

Cách b3: Gọi k là số lớn nhất các hàm độc lập tuyến tính trong số các đạo hàm $B_0', \ldots, B_9'$ và giả sử $k \leq 8$. Bằng cách ký hiệu lại các hàm là $f_1, \ldots, f_{10}$, ta giả sử $f_1', \ldots, f_k'$ là độc lập tuyến tính. Như vậy, f_9', f_{10}' có các biểu diễn tuyến tính:

$$f_9' = a_1 f_1' + \ldots + a_k f_k', f_{10}' = b_1 f_1' + \ldots + b_k f_k',$$

với $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, hay

$$(f_9 - a_1 f_1 - \ldots - a_k f_k)' = (f_{10} - b_1 f_1 - \ldots - b_k f_k)' = 0.$$

Như vậy, $f_9 - a_1 f_1 - \ldots - a_k f_k = c_1, f_{10} - b_1 f_1 - \ldots - b_k f_k = c_2$, với c_1, c_2 là các hằng số nào đó. Rõ ràng $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ do tính độc lập của $f_1, \ldots, f_{10}$. Nhưng khi đó

$$c_1 (f_{10} - b_1 f_1 - \ldots - b_k f_k) - c_2 (f_9 - a_1 f_1 - \ldots - a_k f_k) = 0$$

là một quan hệ phụ thuộc giữa $f_1, \ldots, f_{10}$, mâu thuẫn.

BÀI 4.

(a) Có hai cách trình bày.

Cách 1: Với mỗi $a_2 = k$ $(1 \leq k \leq 5)$, số bộ (a_1, a_3) sao cho $a_1 < k, a_3 < k$ bằng $(k-1)^2$. Do đó, số dãy răng cưa a_1, a_2, a_3 bằng

$$\sum_{k=1}^{5} (k-1)^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30.$$

Cách 2: Gọi s_k là số các dãy răng cưa a_1, a_2, a_3 mà $a_3 = k$ và $1 \leq a_1, a_2 \leq 5$. Như vậy, $a_2 = i$, với $i = k+1, \ldots, 5$ và với mỗi $a_2 = i$ thì a_1 có thể được chọn trong tập $\{1, 2 \ldots i-1\}$. Suy ra

$$s_k = \sum_{i=k+1}^{5} (i-1) = 10 - \frac{k(k-1)}{2}.$$

Như vậy, $s_1 = 10, s_2 = 9, s_3 = 7, s_4 = 4, s_5 = 0$. Vì thế tổng số các dãy răng cưa cần tìm là $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} s_k = 10 + 9 + 7 + 4 = 30.$

(b) Mỗi dãy răng cưa a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 có thể được hiểu như được tạo ra từ các dãy răng cưa a_1, a_2, a_3 và a_3, a_4, a_5, nói cách khác, được tạo thành từ 2 dãy răng cưa a_1, a_2, a_3 và a_1', a_2', a_3' mà $a_3 = a_1'$. Do tính đối xứng, số các dãy răng cưa a_1, a_2, a_3 với $a_3 = k$ cũng rõ ràng bằng số các dãy răng cưa a_1', a_2', a_3' với $a_1' = k$. Theo cách giải thứ 2, chúng bằng s_k, trong đó $s_1 = 10, s_2 = 9, s_3 = 7, s_4 = 4, s_5 = 0$. Vì thế tổng số dãy răng cưa a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 cần tìm là

$$\sum_{k=1}^{5} s_k \cdot s_k = 10^2 + 9^2 + 7^2 + 4^2 = 264.$$

BÀI 5.

(a) Giả sử $X \in \mathbb{R}^n$ là nghiệm của phương trình $BX = 0$. Khi đó $AX = A^2BX = 0$ nên X cũng là nghiệm của phương trình $AX = 0$. Vì A và B có cùng hạng nên hai không gian nghiệm có cùng số chiều. Dẫn đến hai không gian phải bằng nhau, ký hiệu là W.

(b) Có hai cách trình bày:

Cách b1: Với mọi $u \in \mathbb{R}^n$ ta có $A(u - ABu) = Au - A^2Bu = 0$. Theo câu (a), ta có $B(u - ABu) = 0$. Dẫn đến $Bu = BABu$ với mọi $u \in \mathbb{R}^n$. Vậy $B = BAB$ và do đó $AB = (AB)^2$.

Cách b2: Để thuận tiện ta ký hiệu $\Im(A) = \{Au : \text{ với mọi } u \in \mathbb{R}^n\}$. Với $u \in \mathbb{R}^n$, đặt $v = ABu$ ta có $Av = A^2Bu = Au$ nên $u - v \in W$. Do đó $\mathbb{R}^n = \Im(AB) + W$. Dễ thấy $(AB)^2 = AB$ hay AB là phép chiếu.

(c) Từ lập luận b1/b2, ta cũng có $\mathbb{R}^n = \Im(AB) + W$ (ví dụ, từ (b2) thì với mọi $u \in \mathbb{R}^n$, $u - ABu \in W$). Do đó

$$\dim \Im(AB) \geq n - \dim(W) = \operatorname{rank}(A) = \dim(\Im(A)).$$

Mà $\Im(AB) \subseteq \Im(A)$ nên suy ra $\Im(AB) = \Im(A)$.

Tiếp theo ta chứng minh $A = ABA$: Với $u \in \mathbb{R}^n$ bất kỳ, vì $\Im(A) = \Im(AB)$ nên $Au = ABv$ với $v \in \mathbb{R}^n$ nào đó. Khi đó

$$(ABA)u = (AB)(Au) = (AB)(ABv) = (AB)^2v = (AB)v = Au.$$

nên $ABA = A$.

Từ đó suy ra $A(I_n - BA) = 0$, hay $\Im(I_n - BA) \subseteq W$. Dẫn đến $B(I_n - BA) = 0$. Vậy $B = B^2A$.

1.2 Bảng B

BÀI 1.

Lần lượt lấy cột 4 trừ cột 3, cột 3 trừ cột 2, cột 2 trừ cột 1 ta được

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 8 & 11 & 14 \\ 7 & 11 & 15 & 19 \\ 9 & 14 & 19 & 24 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 4 & 4 \\ 9 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \\ 7 & 4 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} = 2$$

BÀI 2.

Gọi số sản phẩm của từng loại A, B, C, D, E lần lượt là x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Để sử dụng hết công suất của nhà máy thì

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 + 20x_5 = 180 \\ x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 15x_4 + 24x_5 = 220 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 10x_5 = 120 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 60 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20 \end{cases}$$

Sử dụng phép thế đưa ma trận hệ phương trình về dạng bậc thang. Giải hệ ta được

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 4.$$

BÀI 3.

(a) Các đa thức B_i được gọi là đa thức Bernstein.

Cách b1: Xét một quan hệ

$$b_0B_0 + b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 + b_4B_4 + b_5B5 + b_6B6 = 0.$$

với $b_0, \ldots, b_6 \in \mathbb{R}$. Thay $x = 0$ ta suy ra $b_0 = 0$. Chia hai vế cho x, sau đó tiếp tục thay $x = 0$ ta được $b_1 = 0$. Tương tự suy ra $b_2 = \ldots = b_6 = 0$.

Cách b2: Ma trận của hệ các đa thức $B_0, B_1, \ldots, B_6$ đối với cơ sở chính tắc $1, x, \ldots, x^6$ của V là ma trận tam giác dưới với các phần tử trên đường chéo bằng 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\binom{6}{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{6}{2} & -\binom{5}{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\binom{6}{3} & \binom{5}{2} & -\binom{4}{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{6}{4} & -\binom{5}{3} & \binom{4}{2} & -\binom{3}{1} & 1 & 0 & 0 \\ -\binom{6}{5} & \binom{5}{4} & -\binom{4}{3} & \binom{3}{2} & -\binom{2}{1} & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vì vậy hạng của ma trận này bằng 7 và hệ đa thức là độc lập tuyến tính.

(b) Có thể lập luận theo hai cách

Cách b1: Tính toán trực tiếp ta có

$$\begin{cases} B_0' = -6(1-x)^5, \\ B_1' = (1-x)^4(1-6x), \\ B_2' = x(1-x)^3(2-6x), \\ B_3' = x^2(1-x)^2(3-6x), \\ B_4' = x^3(1-x)(4-6x), \\ B_5' = x^4(5-6x), \\ B_6' = 6x^5. \end{cases}$$

Ta chỉ ra sau khi bỏ đi B_0' các đa thức còn lại là độc lập tuyến tính. Thật vậy giả sử có một ràng buộc tuyến tính

$$\begin{aligned} a_0(1-x)^4(1-6x) + a_1 x(1-x)^3(2-6x) + a_2 x^2(1-x)^2(3-6x) \\ + a_3 x^3(1-x)(4-6x) + a_4 x^4(5-6x) + 6a_5 x^5 = 0. \quad (4) \end{aligned}$$

Thay $x = 0$ suy ra $a_0 = 0$. Thay vào đẳng thức trên rồi chia hai vế cho x. Tiếp tục thay $x = 0$ suy ra $a_1 = 0$. Bằng cách tương tự suy ra $a_0 = a_1 = \ldots = a_5 = 0$.

Cách b2: Ta chỉ ra sau khi bỏ đi B_0' các đa thức còn lại là độc lập tuyến tính.

Ma trận của hệ các đa thức $B_1', \ldots, B_6'$ đối với cơ sở chính tắc $1, x, \ldots, x^5$ của V là ma trận tam giác dưới với các phần tử trên đường chéo bằng $1, 2, 3, 4, 5, 6$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\binom{5}{1} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\binom{5}{2} & -3\binom{4}{1} & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -4\binom{5}{3} & 4\binom{4}{2} & -4\binom{3}{1} & 4 & 0 & 0 \\ 5\binom{5}{4} & -5\binom{4}{3} & 5\binom{3}{2} & -5\binom{2}{1} & 5 & 0 \\ -6 & 6 & -6 & 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Do đó hệ là độc lập tuyến tính.

Cách b3: Gọi k là số lớn nhất các hàm độc lập tuyến tính trong số các đạo hàm $B_0', \ldots, B_9'$ và giả sử $k \le 8$. Bằng cách ký hiệu lại các hàm là $f_1, \ldots, f_{10}$, ta giả sử $f_1', \ldots, f_k'$ là độc lập tuyến tính. Như vậy, f_9', f_{10}' có các biểu diễn tuyến tính:

$$f_9' = a_1 f_1' + \ldots + a_k f_k', f_{10}' = b_1 f_1' + \ldots + b_k f_k',$$

với $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, hay

$$(f_9 - a_1 f_1 - \ldots - a_k f_k)' = (f_{10} - b_1 f_1 - \ldots - b_k f_k)' = 0.$$

Như vậy, $f_9 - a_1 f_1 - \ldots - a_k f_k = c_1, f_{10} - b_1 f_1 - \ldots - b_k f_k = c_2$, với c_1, c_2 là các hằng số nào đó. Rõ ràng $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ do tính độc lập của $f_1, \ldots, f_{10}$. Nhưng khi đó

$$c_1 (f_{10} - b_1 f_1 - \ldots - b_k f_k) - c_2 (f_9 - a_1 f_1 - \ldots - a_k f_k) = 0$$

là một quan hệ phụ thuộc giữa $f_1, \ldots, f_{10}$, mâu thuẫn.

BÀI 4.

(a) Có hai cách trình bày.

Cách 1: Với mỗi $a_2 = k$ $(1 \leq k \leq 5)$, số bộ (a_1, a_3) sao cho $a_1 < k, a_3 < k$ bằng $(k-1)^2$. Do đó, số dãy răng cưa a_1, a_2, a_3 bằng

$$\sum_{k=1}^{5} (k-1)^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30.$$

Cách 2: Gọi s_k là số các dãy răng cưa a_1, a_2, a_3 mà $a_3 = k$ và $1 \leq a_1, a_2 \leq 5$. Như vậy, $a_2 = i$, với $i = k+1, \ldots, 5$ và với mỗi $a_2 = i$ thì a_1 có thể được chọn trong tập $\{1, 2 \ldots i-1\}$. Suy ra

$$s_k = \sum_{i=k+1}^{5} (i-1) = 10 - \frac{k(k-1)}{2}.$$

Như vậy, $s_1 = 10, s_2 = 9, s_3 = 7, s_4 = 4, s_5 = 0$. Vì thế tổng số các dãy răng cưa cần tìm là $\sum\limits_{k=1}^{5} s_k = 10 + 9 + 7 + 4 = 30$.

(b) Mỗi dãy răng cưa a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 có thể được hiểu như được tạo ra từ các dãy răng cưa a_1, a_2, a_3 và a_3, a_4, a_5, nói cách khác, được tạo thành từ 2 dãy răng cưa a_1, a_2, a_3 và a_1', a_2', a_3' mà $a_3 = a_1'$. Do tính đối xứng, số các dãy răng cưa a_1, a_2, a_3 với $a_3 = k$ cũng rõ ràng bằng số các dãy răng cưa a_1', a_2', a_3' với $a_1' = k$. Theo cách giải thứ 2, chúng bằng s_k, trong đó $s_1 = 10, s_2 = 9, s_3 = 7, s_4 = 4, s_5 = 0$. Vì thế tổng số dãy răng cưa a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 cần tìm là

$$\sum_{k=1}^{5} s_k \cdot s_k = 10^2 + 9^2 + 7^2 + 4^2 = 264.$$

BÀI 5.

(a) Cách 1: Đặt

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$\det(A) = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 - a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1.$$

Do đó $-3 \leq \det(A) \leq 3$. Cụ thể hơn $\det(A) \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
Nếu $\det(A) = 3$ thì suy ra

$$a_1b_2c_3 = a_2b_1c_3 = a_3b_1c_2 = 1,$$

$$a_1b_3c_2 = a_2b_3c_1 = a_3b_2c_1 = 0.$$

Từ các đẳng thức phía trên suy ra $a_i, b_i, c_i \neq 0$ với $i = 1, 2, 3$. Do đó đẳng thức phía dưới không xảy ra.
Từ đó suy ra $\det(A) \leq 2$. Ta có thể kiểm tra

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Vậy $\beta = 2$.
Từ một ma trận $0 - 1$ bất kỳ A, bằng cách đổi chỗ hai cột của ma trận đó ta được một ma trận mới, ký hiệu là B. Khi đó $\det(A) + \det(B) = 0$. Vậy $\alpha = -\beta = -2$.

Cách 2: Ký hiệu $\mathcal{M}$ là tập tất cả các ma trận $0 - 1$ cỡ 3×3. Bằng cách đổi hai cột của một ma trận trong $\mathcal{M}$ ta nhận được một ma trận trong $\mathcal{M}$. Hai ma trận này có định thức ngược dấu nhau. Vì vậy $\beta = -\alpha$. Câu hỏi được quy về tìm giá trị lớn nhất của định thức các ma trận trong $\mathcal{M}$.
Xét một ma trận trong M,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Ta có $\det(A) = a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1$, trong đó A_1, B_1, C_1 là phần bù đại số của a_1, b_1, c_1 tương ứng. Dễ thấy $-1 \leq A_1, B_1, C_1 \leq 1$. Do đó $\det(A) \leq 3$.
Nếu $\det(A) = 3$ thì $a_1 = b_1 = c_1 = 1$ và $A_1 = C_1 = 1, B_1 = -1$. Các ma trận ứng với A_1, C_1 là ma trận 2×2 gồm các phần tử 0 và

1 nên có định thức bằng 1 khi và chỉ khi các phần tử trên đường chéo chính bằng 1 và có ít nhất một phần tử còn lại trong ma trận bằng 0. Dẫn đến $a_2 = b_3 = 1$, $b_2 = c_3 = 1$ và $a_3 = c_2 = 0$. Nhưng khi đó $B_1 = 1$ và $\det(A) = 1$. Vậy $\det(A) \le 2$.
Dễ thấy ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

có định thức bằng 2. Vậy $\beta = 2$ và $\alpha = -2$.

(b) Giả sử các giá trị riêng của A là $a, b, c > 0$. Ta có $\det(A) = abc > 0$, do đó $\det(A) \in \{1, 2\}$.
Mặt khác vết của A thoả mãn $\operatorname{trace}(A) = a+b+c \le 3$. Từ bất đẳng thức Cauchy ta có $\operatorname{trace}(A) = a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc} \ge 3$. Dẫn đến $\operatorname{trace}(A) = 3$ và $\det(A) = 1$. Do đó $a + b + c = 3\sqrt[3]{abc}$.
Vậy $a = b = c = 1$.

2 Giải tích

Lời giải các bài $\boxed{\text{A.1}}$ $\boxed{\text{B.1}}$

— 1. Đặt $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{2x}{2+x}$,
ta có $f'(x) = \dfrac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} \ge 0 \ \ \forall x \ge 0$.

— Vậy, f đơn điệu không giảm trên $[0, +\infty)$. Do đó, $f(x) \ge f(0) = 0 \ \ \forall x \ge 0$. Mà $x_1 \ge 0$ nên (bằng quy nạp) $x_{n+1} = f(x_n)$ xác định và không âm với mọi $n \ge 1$.

— 2. Ta có $(1+x)\cdot(2+x)^2 > x \cdot 4x = 4x^2$ nên $f'(x) = \dfrac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} < \dfrac{1}{4} \ \ \forall x \ge 0$. Vì thế, áp dụng định lý số gia giới nội (định lý giá trị trung bình) của Lagrange, ta có

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)| \cdot |b - a| \le \frac{1}{4}|b - a| \qquad (1)$$

với mọi $a, b \in [0, +\infty)$ (c ở giữa và phụ thuộc vào a và b).

— Từ (1), suy ra

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \le \frac{1}{4}|x_n - x_{n-1}| \quad \forall n \ge 2$$

(điều phải chứng minh).

— 3. **Cách 1:** Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo $n \geq 1$ rằng

$$|x_n| \leq \frac{2019}{4^{n-1}}. \tag{2}$$

Hiển nhiên, (2) đúng khi $n = 1$.

— Giả sử $n \geq 2$ và (2) đã đúng đến $n - 1$. Khi đó, theo (1) và giả thiết quy nạp,

$$|x_n - 0| = |f(x_{n-1}) - f(0)| \leq \frac{1}{4}|x_{n-1} - 0| \leq \frac{2019}{4^{n-1}};$$

vậy, (2) đúng với mọi $n \geq 1$.

— Từ (2), ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

— 3. **Cách 2:** Từ ý 2., ta thấy

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{4}|x_n - x_{n-1}| \leq \cdots \leq \frac{1}{4^{n-1}}|x_2 - x_1|.$$

Vì thế, với mọi $n, p \in \mathbb{N}^*$ ta có:

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &\leq \sum_{k=1}^{p} |x_{n+k} - x_{n+k-1}| \leq \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{4^{n+k-2}}|x_2 - x_1| \\
&= \frac{1}{4^{n-1}}|x_2 - x_1| \cdot \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{4^{k-1}} \\
&\leq \frac{1}{4^{n-1}}|x_2 - x_1| \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \to 0 \text{ khi } n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Vậy, (x_n) là một dãy Cauchy nên nó hội tụ.

— Đặt $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \geq 0$. Chuyển công thức truy hồi qua giới hạn ta được

$$\alpha = \ln(1+\alpha) - \frac{2\alpha}{2+\alpha} \Leftrightarrow g(\alpha) = 0; \tag{3}$$

trong đó, $g(x) = x - \ln(1+x) + \dfrac{2x}{2+x} = x - f(x)$ với mọi $x \geq 0$. Dễ thấy $\alpha = 0$ thỏa (3). Mặt khác,

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} > 0 \quad \forall x \geq 0.$$

Từ đó, g tăng ngặt trên $[0, +\infty)$. Vậy, $\alpha = 0$ là nghiệm (không âm) duy nhất của (3); suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Lời giải bài $\boxed{\text{A.2}}$

— Theo định nghĩa của D, ta có $|f(x_0)-f(y_0)| \leq |x_0-y_0|$ với mọi $f \in D$.

— Suy ra

$$\sup_{f\in D}|f(x_0)-f(y_0)| \leq |x_0-y_0|. \qquad (1)$$

— **Cách 1:** Đặt $g(x) = |x-x_0| \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

— Theo bất đẳng thức tam giác, ta có

$$g(x)-g(y) = |x-x_0| - |y-x_0| \leq |(x-x_0)-(y-x_0)| = |x-y|$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

— Bằng cách hoán đổi vị trí của x và y, ta thấy $|g(x)-g(y)| \leq |x-y|$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Do đó, $g \in D$.

— Suy ra $\sup\limits_{f\in D}|f(x_0)-f(y_0)| \geq |g(x_0)-g(y_0)| = |x_0-y_0|$. Kết hợp với (1) ta có

$$\max_{f\in D}|f(x_0)-f(y_0)| = |x_0-y_0|.$$

— **Cách 2:** Đặt $g(x) = \max\{x-y_0, 0\} \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

— Xét tùy ý $x, y \in \mathbb{R}$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$|g(x)-g(y)| \leq |x-y|. \qquad (2)$$

Thật vậy, nếu x và y cùng lớn hơn y_0 thì (2) trở thành đẳng thức. Nếu x và y cùng bé hơn y_0 thì vế trái bằng 0 nên (2) hiển nhiên đúng.

— Trong trường hợp còn lại, không mất tính tổng quát, xem $x \leq y_0 \leq y$. Khi đó, $|g(x)-g(y)| = |0-(y-y_0)| = |y_0-y| \leq |x-y|$ nên (2) luôn đúng. Do đó, $g \in D$.

— Tương tự, nếu đặt $h(x) = \max\{x-x_0, 0\}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta cũng có $h \in D$.

— Suy ra

$$\begin{aligned}\sup_{f\in D}|f(x_0)-f(y_0)| &\geq \max\{g(x_0)-g(y_0), h(y_0)-h(x_0)\} = \max\{g(x_0), h(y_0)\}\\ &\geq \max\{x_0-y_0, y_0-x_0\} = |x_0-y_0|.\end{aligned}$$

Kết hợp với (1) ta có

$$\max_{f\in D}|f(x_0)-f(y_0)| = |x_0-y_0|.$$

Lời giải bài $\boxed{\text{B.2}}$

— 1. Khi $x \neq 0$, ta có $f(x) = \ln(1+x^2)\cos\dfrac{1}{x}$ và

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}\cdot\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\cdot\ln(1+x^2)\cdot\sin\frac{1}{x}.$$

— 2. Xét giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot x\cos\dfrac{1}{x}$.

— Vì $x\to 0$ và $\cos\dfrac{1}{x}$ bị chặn (bởi 1) nên $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\dfrac{1}{x}\right)=0$.

— Do $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}=1$, nên giới hạn ở trên bằng $f'(0)=1\cdot 0=0$.

— 3. Xét giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\cdot\cos\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

— Chọn dãy $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}\to 0$ khi $n\to+\infty$. Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}f'(x_n)=0$.

— Chọn dãy $y_n=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2\pi n}\to 0$ khi $n\to+\infty$. Ta lại có $\lim\limits_{n\to+\infty}f'(y_n)=1\neq 0$, nên $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ không tồn tại. Vậy, hàm số f' không liên tục tại $x=0$.

Lời giải các bài A.3 B.3

— Theo đề bài, ta có hàm chi phí sản xuất: $C=8K+4L+100$. Và ta cần tìm K,L sao cho C đạt cực tiểu với điều kiện ràng buộc

$$K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}=2000.$$

— **Cách 1:** Theo điều kiện ràng buộc, $L=\dfrac{(2000)^3}{K^2}$, nên ta biểu diễn được

$$C=8K+4\cdot\frac{(2000)^3}{K^2}+100$$

như là hàm của một biến số $K\in(0,+\infty)$.

— Ta có: $C'(K)=8-8\cdot\dfrac{(2000)^3}{K^3}$, $C''(K)=24\cdot\dfrac{(2000)^3}{K^4}$ với mọi $K\in(0,+\infty)$.

— Phương trình $C'=0$ có nghiệm duy nhất $K=2000$. Để ý: $C''(K)>0$ với mọi K. Do đó, C đạt cực tiểu (tuyệt đối) tại $K=2000$.

— Vậy, để chi phí sản xuất là thấp nhất, năm 2019 doanh nghiệp cần thuê $K=2000$ đơn vị vốn tư bản và $L=2000$ đơn vị lao động.

— **Cách 2:** Áp dụng bất đẳng thức TBC-TBN cho 3 số dương và sử dụng điều kiện ràng buộc ta có

$$C=8K+4L+100=4\cdot(2K+L)+100\geq 4\cdot 3K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}+100=24100;$$

— dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $K=L=2000$.

— Vậy, để chi phí sản xuất là thấp nhất, năm 2019 doanh nghiệp cần thuê $K=2000$ đơn vị vốn tư bản và $L=2000$ đơn vị lao động.

Lời giải các bài A.4 B.4

— 1. Đặt $F(x) = \int_x^1 |f'(t)|\mathrm{d}t$, ta có $F(1) = 0$ và $F'(x) = -|f'(x)|$ $(\forall x \in [0,1])$.

— Hơn nữa,

$$F(x) = \int_x^1 |f'(t)|\mathrm{d}t \geq \left|\int_x^1 f'(t)\mathrm{d}t\right| = |f(1)-f(x)| = |f(x)| \quad (\forall x \in [0,1]). \tag{1}$$

— Lại có

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x = xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xF'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x|f'(x)|\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Từ (1) and (2) suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

— 2. Đặt $f(x) = x(1-x)$, ta có một hàm f khả vi liên tục trên $[0,1]$, với $f(1) = 0$ và

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{6}, \quad \int_0^1 x|f'(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

Vậy, f thỏa yêu cầu đề bài.

Lời giải các bài $\boxed{\text{A.5}}$ $\boxed{\text{B.5}}$

— 1. Hàm f liên tục, đơn điệu không tăng và bị chặn dưới bởi 0 nên tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

— Từ giả thiết suy ra sự hội tụ của tích phân suy rộng

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

— Với $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. Do đó, $\lim\limits_{x\to+\infty}(F(2x) - F(x)) = 0$.

— Từ tính đơn điệu không tăng của $f \geq 0$, ta có

$$F(2x) - F(x) = \int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t \geq xf(2x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$

nên $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(2x) = 0$. Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ (điều phải chứng minh).

— 2. **Cách 1:** Đặt $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)\ln(x+2)}$ với mọi $x \geq 0$. Dễ thấy f là một hàm dương, liên tục và giảm trên $[0,+\infty)$, với $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$. Hơn nữa:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+2)\ln(x+2)}\mathrm{d}x = \ln\ln(x+2)\Big|_{x=0}^{x=+\infty} = +\infty.$$

— **Cách 2:** Đặt $f(x) = \dfrac{2(x+1)}{[(x+1)^2+1]\ln[(x+1)^2+1]}$ với mọi $x \geq 0$. Dễ thấy f là một hàm dương, liên tục trên $[0, +\infty)$, và $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Hơn nữa:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \frac{2(x+1)}{[(x+1)^2+1]\ln[(x+1)^2+1]}\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{u}\mathrm{d}u \\ &= \ln u\Big|_{u=\ln 2}^{u=+\infty} = +\infty;\end{aligned}$$

trong đó, $u = \ln[(x+1)^2+1]$. Vậy, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) + \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right) = +\infty$.

— Cuối cùng, trên $[0, +\infty)$, các hàm $g(x) = \dfrac{x+1}{(x+1)^2+1}$, $h(x) = \dfrac{2}{\ln[(x+1)^2+1]}$ dương và giảm nên $f(x) = g(x)h(x)$ cũng giảm.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: ĐẠI SỐ

1 MA TRẬN

Bài 1.1 (ĐH Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh). Gọi λ là trị riêng của ma trận X và x là vectơ riêng tương ứng. Ta có: $Xx = \lambda x$
$\Rightarrow X^{2019}x = \lambda^{2019}x = 0 \Rightarrow \lambda^{2019} = 0 \Rightarrow \lambda = 0.$
Vậy X chỉ có trị riêng $\lambda = 0$, do đó đa thức $f(X) = I + X + \cdots + X^{k-1}$ chỉ có trị riêng $\lambda' = 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 = 1.$
$\Rightarrow f(X)$ khả nghịch.
$\Rightarrow r(X) = r(Xf(X)) = r(X + X^2 + \cdots + X^k).$

Bài 1.2 (ĐH Đại Nam). (a) Đặt $AA^T = (c_{ij})_{nxn}$. Ta có $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}a_{ij} = tr\,(A)\,a_{ij}\forall i, j.$

Do đó: $AA^T = tr\,(A)\,.A$

Vậy nếu $tr\,(A) = 0$ thì $AA^T = 0$. Suy ra $c_j = 0, \forall i, j \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left\{a_{ik}^2\right\} = 0, \forall i \Rightarrow tr(A) \neq 0.$

(b) Do: $tr(A) \neq 0 \Rightarrow A = 1/tr(A).A.A^T = (1/tr(A).A.A^T)^T = A^T$ (đpcm).

(c) Do: $tr\,(A) \neq 0 => \exists k$sao cho: $a_{kk} \neq 0 => a_{ij=}\frac{a_{ik}}{a_{kk}}a_{jk}\forall i, j.$ Nghĩa là các dòng của ma trận A đều được biểu diễn tuyến tính qua vecto $(a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk})$.
Vậy $r(A) = 1$ (đpcm).

Bài 1.3 (ĐH Đại Nam). Theo giả thuyết, ta có:
$A = AB - BA = AB - ABA + ABA - BA = AB\,(I - A) + (A - I)\,BA$
$\Rightarrow A = (AB - BA)\,(I - A) \Rightarrow A = A.\,(I - A) \Rightarrow A^2 = 0 \Rightarrow \det\,(A) = 0.$

Bài 1.4 (ĐH Đồng Tháp). + Gọi n là cấp của A và B ta có $tr(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A)_{ij}(B)_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(B)_{ji}(A)_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(BA)_{jj} = tr(BA).$

+ Tính được $2a, 4a, 6a$ là các giá trị riêng của A. Vậy tồn tại ma trận P vuông cấp 3 không suy biến để $A = PCP^{-1}$ trong đó

$$C = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 4a & 0 \\ 0 & 0 & 6a \end{pmatrix}.$$

+ Theo kết quả trên ta có

$$tr\left(A^{2019}\right) = tr\left(PC^{2019}P^{-1}\right) = tr\left(P^{-1}PC^{2019}\right) = tr\left(C^{2019}\right) = \left(2^{2019} + 4^{2019} + 6^{2019}\right)a^{2019}.$$

Bài 1.5 (ĐH Giao thông Vận tải). a) Ta có $B = T^{-1}AT$ suy ra $\det(A) = \det(B)$. Từ đó ta có $-(a-b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$.
Ta lại có $B - I = T^{-1}(A - I)T$ suy ra $\det(A - I) = \det(B - I)$. Từ đó ta có $2ab = 0$.
Kết luận: $a = b = 0$.
b) Khi $a = b = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Đa thức đặc trưng $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$.
Các giá trị riêng và véc-tơ riêng tìm được là

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0,\ a_1 = (-1, 0, 1) \\ \lambda_2 &= 1,\ a_2 = (0, 1, 0) \\ \lambda_3 &= 2,\ a_3 = (1, 0, 1) \end{aligned}$$

Ma trận $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 1.6 (ĐH Giao thông Vận tải). a) Ta có $B = T^{-1}AT$ suy ra $\det(A) = \det(B)$. Từ đó ta có $-(a-b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$.
Ta lại có $B - I = T^{-1}(A - I)T$ suy ra $\det(A - I) = \det(B - I)$. Từ đó ta có $2ab = 0$.
Kết luận: $a = b = 0$.
b) Khi $a = b = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Đa thức đặc trưng $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$.
Các giá trị riêng và véc-tơ riêng tìm được là

$$\lambda_1 = 0,\, a_1 = (-1, 0, 1)$$
$$\lambda_2 = 1,\, a_2 = (0, 1, 0)$$
$$\lambda_3 = 2,\, a_3 = (1, 0, 1)$$

Ma trận $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 1.7 (ĐH Giao thông Vận tải). Giả sử tổng chung của mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo bằng s. Đặt $e = (1, 1, 1)^T$, khi đó $Ae = s.e$, nên s là giá trị riêng. Do ma trận A khả nghịch nên $s \neq 0$. Đặt $r = \frac{1}{s}$, ta có $A^{-1}e = re$. Nên tổng các phần tử theo mỗi hàng của A^{-1} bằng $r = \frac{1}{s}$.
Thay ma trận A bởi ma trận A^T ta có tổng các phần tử trên mỗi cột bằng nhau và bằng $\frac{1}{s}$.
Gọi các giá trị riêng khác của A là λ và $-\lambda$ (do $Tr(A) = s$), với $\lambda \neq 0$. Các giá trị riêng của A^{-1} là $\frac{1}{s}, \frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda}$. Do đó tổng các phần tử trên đường chéo chính bằng $\frac{1}{s}$.
Đặt $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ và $B = AP$. Hai ma trận A và B có cùng tổng theo mỗi hàng, cột, đường chéo. Đường chéo phụ của A là đường chéo chính của B và $B^{-1} = PA^{-1}$. Từ đó ta có tổng các phần tử trên đường chéo phụ bằng $\frac{1}{s}$.

Bài 1.8 (ĐH Kinh tế Quốc dân). Cho các ma trận: Từ giả thiết $AD^T - BC^T = I$ ta suy ra $DA^T - CB^T = I$ và $AB^T = BA^T, CD^T = DC^T$. Do đó,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

suy ra ma trận $\begin{bmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{bmatrix}$ là ma trận nghịch đảo của ma trận $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ và ta có $C^TB + A^TD = I \implies D^TA - B^TC = I$, lấy chuyển vị hai vế ta được $A^TD - C^TB = I$.

Bài 1.9 (ĐH Kinh tế Quốc dân). Đặt

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Theo giả thiết ta có

$$\begin{array}{ll} a_{22} = S - a_{11} - a_{33} & (1) \\ a_{22} = S - a_{13} - a_{31} & (2) \\ a_{22} = S - a_{12} - a_{32} & (3) \\ a_{22} = S - a_{21} - a_{23} & (4) \end{array}$$

Từ $(1), (2)$ và (3) ta suy ra $a_{22} = \dfrac{S}{3}$. Kết hợp với (1) suy ra $a_{11} = \dfrac{S}{3} + u$, $a_{33} = \dfrac{S}{3} - u$. Từ (2) suy ra $a_{13} = \dfrac{S}{3} - v$ và $a_{31} = \dfrac{S}{3} + v$. Mặt khác, $a_{11} + a_{12} + a_{13} = S \implies a_{12} = \dfrac{S}{3} - u + v$.

$a_{11} + a_{21} + a_{31} = S \implies a_{21} = \dfrac{S}{3} - u - v$

Từ (3) và (4) suy ra $a_{32} = \dfrac{S}{3} + u - v$ và $a_{23} = \dfrac{S}{3} + u + v$.

Vậy, ta được ma trận

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{S}{3} + u & \dfrac{S}{3} - u + v & \dfrac{S}{3} - v \\ \dfrac{S}{3} - u - v & \dfrac{S}{3} & \dfrac{S}{3} + u + v \\ \dfrac{S}{3} + v & \dfrac{S}{3} + u - v & \dfrac{S}{3} - u \end{bmatrix}$$

Ta tính được $|A| = 3S(v^2 - u^2)$ suy ra A khả nghịch khi và chỉ khi $u^2 \neq v^2$.
Ta tìm được ma trận nghịch đảo của A là

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{uS - v^2 + u^2}{(3v^2 - 3u^2)S} & -\dfrac{S - u - v}{S(3u + 3v} & \dfrac{vS + v^2 - u^2}{(3v^2 - 3u^2)S} \\ \dfrac{S + v - u}{(3v - 3u)S} & \dfrac{1}{S3} & -\dfrac{S - v + u}{(3v - 3u)S} \\ -\dfrac{vS - v^2 + u^2}{(3v^2 - 3u^2)S} & \dfrac{S + u + v}{(3v + 3u)S} & \dfrac{uS + v^2 - u^2}{(3v^2 - 3u^2)S} \end{bmatrix}$$

Dễ dàng kiểm tra được A^{-1} cũng là ma trận "kỳ diệu".

Bài 1.10 (ĐH Kinh tế Quốc dân)**.** Đặt

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}.$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}.$$

trong đó $A_i, B_i, (i = 1, 2)$ là những ma trận vuông cấp 3. Theo giả thiết ta có:

$$\begin{gathered} A_1B_1 = 2019I \\ A_1B_2 = -2019I \\ A_2B_1 = -2019I \\ A_2B_2 = 2019I \end{gathered}$$

Suy ra $B_1 = 2019A_1^{-1}, B_2 = -2019A_1^{-1}, A_2 = -2019B_1^{-1} = -A_1^{-1}$
Do đó,

$$BA = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = B_1A_1 + B_2A_2 = 2019I.$$

Bài 1.11 (ĐH Nha Trang). Ta có $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2I - B.$

Gọi $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix}$ là ma trận giao hoán với A. Ta có $AX = XA \Leftrightarrow BX = XB$.

Ta thấy $BX = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a+x & b+y & c+z \\ d & e & f \end{pmatrix}$,

$$XB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a+c & b \\ e & d+f & e \\ y & x+z & y \end{pmatrix}$$

. Cho hai vế trên bằng nhau ta được $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

Bài 1.12 (ĐH Nha Trang).

- Chứng minh $A^3 = 3A - 2E$: Từ giả thuyết $A^2 - 2A + E = 0$ ta suy ra $A^2 = 2A - E$, $A = A^2 - A - E$. Nhân tương ứng 2 vế trên, ta được $A^3 = (2A - E)\left(A^2 - A - E\right) = 2A^3 - 3A^2 + 3A - E \Rightarrow A^3 = 3A^2 - 3A + E = 3(2A - E) - 3A + E = 3A - 2E$.
- Chứng minh $A^4 = 4A - 3E$: Áp dụng câu trên, ta được $A^4 = A^3.A = (3A - 2E)A = 3A^2 - 2A = 3(2A - E) - 2A = 4A - 3E$.

Bài 1.13 (ĐH Quy Nhơn). Cho các ma trận $A \in Mat_{3\times 2}(\mathbb{R})$, $B \in Mat_{2\times 3}(\mathbb{R})$ và

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Chứng tỏ rằng $BA = 9I_2$.

— Tính $(AB)^2 = 9AB$ và $rank(AB) = 2$. Suy ra

$$rank((AB)^2) = 2.$$

— Vì $BA \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ nên $rank(BA) \leq 2$.
— Hơn nữa,

$$2 = rank((AB)^2) = rank(ABAB) \leq rank(ABA) \leq rank(BA).$$

Do đó $rank(BA) = 2$. Vậy ma trận BA là khả nghịch. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}(AB)^2 = 9AB &\implies A(BA - 9I_2)B = 0_3\\ &\implies BA(BA - 9I_2)BA = B0_3A = 0_2\\ &\implies (BA)^{-1}BA(BA - 9I_2)BA(BA)^{-1} = 0_2\\ &\implies BA - 9I_2 = 0_2\\ &\implies BA = 9I_2\end{aligned}$$

Bài 1.14 (ĐH Quy Nhơn). — Đa thức đặc trưng của A là

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (2 - \lambda)^3.$$

— Ta có $p(A) = 0$, tức là $(A - 2I_3)^3 = 0$.
— Khai triển Taylor của hàm số $f(x) = x^n$ tại $x = 2$:

$$x^n = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f^{(2)}(2)}{2!}(x-2)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-2)^n + \cdots$$

— Từ đó suy ra

$$f(A) = A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}(A - 2I_3) + \frac{n(n-1)2^{n-2}}{2}(A - 2I_3)^2.$$

Do đó $A^{2019} = 2^{2019}I_3 + 2019\cdot 2^{2018}(A - 2I_3) + \dfrac{2019\cdot 2018\cdot 2^{2017}}{2}(A - 2I_3)^2$.

Bài 1.15 **(ĐH SPKT Vĩnh Long).** Ma trận lũy linh $A + \lambda B$ cấp n nên $(A + \lambda B)^n = 0$. Ma trận $(A + \lambda B)^n$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$(A + \lambda B)^n = A^n + \lambda C_1 + \ldots + \lambda^{n-1}C_{n-1} + \lambda^n B^n,$$

trong đó $C_1, \ldots, C_{n-1}$ không phụ thuộc vào λ. Gọi $a, c_1, \ldots, c_{n-1}, b$ là những phần tử tương ứng của các ma trận $A^n, C_1, \ldots, C_{n-1}, B^n$ ở vị trí (i, j). Khi đó,

$$a + \lambda c_1 + \ldots + \lambda^{n-1}c_{n-1} + \lambda^n b = 0$$

với $n + 1$ giá trị λ khác nhau. Chúng ta thu được một hệ $n + 1$ phương trình với $n+1$ biến $a, c_1, \ldots, c_{n-1}, b$. Định thức của hệ là định thức Vandermonde và khác 0. Do đó, hệ thu được chỉ có nghiệm tầm thường. Nói riêng, $a = b = 0$. Từ đó, $A^n = B^n = 0$.

2 ĐỊNH THỨC

Bài 2.1 (ĐH Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh)**.** Ta có: $r(A) = 1$,

$B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} = X.Y,$

$\Rightarrow r(B) \leq r(X) = 1,$

$\Rightarrow r(A+B) \leq r(A) + r(B) \leq 1 + 1 = 2.$

Trường hợp 1: $n > 2 \Rightarrow det(A+B) = 0.$

Trường hợp 2: $n = 2$

$\Rightarrow |A+B| = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1(y_2-y_1) \\ 1+x_2y_1 & x_2(y_2-y_1) \end{vmatrix}$

$= (y_2 - y_1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = (y_2 - y_1)(x_2 - x_1).$

Bài 2.2 (ĐH Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh)**.** (a) Ta có: $det(X - X^T) = det(X - X^T)^T = det(X^T - X) = (-1)^{2019} det(X - X^T) \Rightarrow det(X - X^T) = 0.$

(b) Chọn $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$: là ma trận phản đối xứng.

$\Rightarrow X - X^T = 2X$

$\Rightarrow det(X - X^T) = det(2X) \neq 0.$

Bài 2.3 (ĐH Đồng Tháp)**.** Xét đa thức theo biến x như sau:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{vmatrix} = u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + u_4x^4.$$

Dễ thấy a, b, c, d là các nghiệm của $f(x)$.

Theo Định lí Viét ta có $a + b + c + d = \frac{-u_3}{u_4}$.

Mặt khác, khai triển định thức $f(x)$ theo dòng cuối ta có

$$u_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}, u_4 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2.4 (ĐH Giao thông Vận tải). a) Ta có

$$B = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aI & bI \\ cI & dI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$$

Ta có $\det(B) = \det \begin{pmatrix} aI & bI \\ cI & dI \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} = (ad - bc)^2 \overset{2}{\det}(A)$.
b) Kiểm tra trực tiếp ta có $BB^{-1} = B^{-1}B = I$.

Bài 2.5 (ĐH Mỏ - Địa chất). Định thức của ma trận đã cho là đa thức bậc 2019. Với $x = 1, 2, \ldots, 2018$ định thức có các dòng bằng nhau, nên bằng không. Như vậy các số đã cho chính là nghiệm của phương trình. Để tìm nghiệm thứ 2019, ta cộng tất vào cột đầu tiên tất cả các cột còn lại và thu được nhân tử chung (là các phần tử của cột đầu) là $(x + 1 + 2 + \ldots + 2018)$. Tức là nghiệm thứ 2019 của phương trình là

$$x = -(1 + 2 + \ldots + 2018) = -\frac{2018 \times 2019}{2} = -2037171.$$

So với nghiệm gần nhất là $x = 1$, thì khoảng dài nhất giữa hai nghiệm có độ dài là 2037172.

Bài 2.6 (ĐH Nha Trang). 1.1. a) Tính được

$$x_5 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 665$$

. b) Khai triển định thức theo dòng 1, ta được kết quả $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2},\ \ n \geq 3$ c) Từ công thức $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$, $(n \geq 3)$, ta có $x_n - 2x_{n-1} = 3x_{n-1} - 6x_{n-2} = 3\left(x_{n-1} - 2x_{n-2}\right) = 3^2\left(x_{n-2} - 2x_{n-3}\right) = \ldots. = 3^{n-2}\left(x_2 - 2x_1\right) = 3^{n-2}.9 = 3^n$ (1) $x_n - 3x_{n-1} = 2x_{n-1} - 6x_{n-2} = 2\left(x_{n-1} - 3x_{n-2}\right) = 2^2\left(x_{n-2} - 3x_{n-3}\right) = \ldots. = 2^{n-2}\left(x_2 - 3x_1\right) = 2^{n-2}.4 = 2^n$ (2) Giải hệ (1) và (2), ta được $x_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Trường hợp n lẻ suy ra $n+1$ chẵn, đặt . Ta có $x_n - 1 = (4-1)^{2k} - 2^{2k} - 1 = \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^i 4^i (-1)^{2k-i} - 4^k - 1 = \left(1 - C_{2k}^1 4 + C_{2k}^2 4^2 - C_{2k}^3 4^3 + \ldots + 4^{2k}\right) - 4^k - 1 = -C_{2k}^1 4 + C_{2k}^2 4^2 - C_{2k}^3 4^3 + \ldots + 4^{2k} - 4^k$ Vậy với n lẻ thì $x_n - 1$ chia hết cho 4.

Bài 2.7 (ĐH Nha Trang). Tính $(I + A)^n$ với và I là ma trận đơn vị cùng cấp với A. Ta có $A^2 = A,\ A^3 = A^2.A = A, ...,$ Dùng phương pháp quy nạp, ta được $A^n = A,\ n \geq 2$. Ta có $(I + A)^n = I + C_n^1 A + C_n^2 A^2 + C_n^3 A^3 + ... + C_n^n A^n$ $= I + \left(C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^n\right) A = I + (2^n - 1) A$. b) Giả sử $AB + BA = 0$. Tính $\det (A + B)\,,\ \det (A - B)\,.$ Ta có

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + B^2 = A + B,$$
$$(A - B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 = A^2 + B^2 = A + B.$$

Đặt $\det (A + B) = a,\ \det (A - B) = b$, ta có hệ $\begin{cases} a^2 = a \\ b^2 = a \end{cases}$. Suy ra $(a, b) = (0,\ 0)\,,\ (a, b) = (1,\ 1)\,,\ (a, b) = (1,\ -1)$.

Bài 2.8 (ĐH Phạm Văn Đồng). Giả sử $f_i(x) = b_{i,0} + b_{i,1} + \ldots + b_{i,n-2}x^{n-2}$. Khi đó

$$\begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} b_{1,0} & b_{1,1} & \cdots & b_{1,n-2} & 0 \\ b_{2,0} & b_{2,1} & \cdots & b_{2,n-2} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_{n,0} & b_{n,1} & \cdots & b_{n,n-2} & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Cho nên

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Bài 2.9 (ĐH SPKT Vĩnh Long). a) Ta có $I_n + A^2 = (A - iI_n)(A + iI_n)$, với $i^2 = -1$. Khi đó

$$\begin{aligned} \det\left(I_n + A^2\right) &= \det\left[(A - iI_n)(A + iI_n)\right] = \det (A - iI_n) \det (A + iI_n) \\ &= \det\left(\overline{A + iI_n}\right) \det (A + iI_n) = \overline{\det (A + iI_n)} \det (A + iI_n) \\ &= \left|\det (A + iI_n)\right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

b) Đặt $C = A^p, D = B^q$ thì $C^2 = A^{2p}, D^2 = B^{2q}$. Ta có

$$CD = A^p B^q = \underbrace{A.A...A}_{p} . \underbrace{B.B...B}_{q} = A.A...(AB)\, B...B = O_n.$$

Dẫn tới $C^2D^2 = C.C.D.D = C\,(CD)\,D = O_n$.
Theo kết quả trên thì $\det\left(I_n + C^2\right) \geq 0, \det\left(I_n + D^2\right) \geq 0$.
Do đó

$$\begin{aligned} 0 &\leq \det\left(I_n + C^2\right) \det\left(I_n + D^2\right) = \det\left[\left(I_n + C^2\right)\left(I_n + D^2\right)\right] \\ &= \det\left(I_n + C^2 + D^2 + C^2D^2\right) = \det\left(I_n + C^2 + D^2\right) \\ &= \det\left(I_n + A^{2p} + B^{2q}\right). \end{aligned}$$

Bài 2.10 (Học viện KTQS). a) Ta có $A^2 = 2E$ do đó $det(A) = \pm\sqrt{2^n}$. Mặt khác $A^{2019} - A = A(2^{1009} - 1)E$, do đó $det(A) = \pm\sqrt{2^n}(2^{1009} - 1)^n$.
b) Ta có $det(AA^T) = 10E$ từ đó $det(A) = 100$.

Bài 2.11 (Học viện KTQS). Bổ đề: a) Nếu A lũy linh cấp k thì chỉ có trị riêng 0.
b) A có trị riêng λ thì $\mathbb{I}_n + A$ có trị riêng $1 + \lambda$.
Chứng minh bài toán.
Nếu $\det(B) = 0$.

$$\begin{aligned}
&(B+A)^k = B^k + C_k^1 BA^{k-1} + \cdots + C_k^{k-1} B^{k-1} A + A^k \\
&= B^k + C_k^1 BA^{k-1} + \cdots + C_k^{k-1} B^{k-1} A = B\left(B^{k-1} + \cdots\right) \\
&\Rightarrow \det (B+A)^k = \left(\det(B+A)\right)^k = \det(B)\det\left(B^{k-1} + \cdots\right) = 0 \\
&\Rightarrow \det(B+A) = 0 = \det(B).
\end{aligned}$$

Nếu $\det(B) \neq 0$, khi đó dễ thấy $AB^{-1} = B^{-1}A$ và $B^{-1}A$ cũng lũy linh. Ta có

$$\det(\mathbb{I}_n + B^{-1}A) = 1 \Rightarrow \det(B+A) = \det(B)\det(\mathbb{I}_n + B^{-1}A) = \det(B).$$

3 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài 3.1 (ĐH Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh). Hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ \ldots \\ x_{n-1} + x_n = n-1 \\ x_n + x_1 = n \end{cases}$.

Trường hợp 1: n chẵn
Cộng vế theo vế các phương trình chẵn và phương trình lẻ:
$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (n-1) \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2 + 4 + 6 + \cdots + n \end{cases} \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm.
Trường hợp 2: n lẻ: $n = 2k+1$.
Lấy phương trình thứ $(i+1)$ trừ phương trình thứ i, ta có:
$\begin{cases} x_{2k+1} - x_{2k-1} = x_{2k-1} - x_{2k-3} = \cdots = x_3 - x_1 = 1 \\ x_{2k} - x_{2k-2} = x_{2k-2} - x_{2k-4} = \cdots = x_4 - x_2 = 1 \end{cases}$
$\Rightarrow \{x_{2k}\}_k$ và $\{x_{2k+1}\}_k$ là cấp số cộng có công sai $d = 1$.
Từ phương trình (1) và (n):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_1 + k = 2k+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{k+1}{2} \Rightarrow x_{2i+1} = \dfrac{k+1}{2} + i, & i = \overline{0,k}, \\ x_2 = \dfrac{1-k}{2} \Rightarrow x_{2j} = \dfrac{1-k}{2} + j - 1, & j = \overline{1,k}. \end{cases}$$

Bài 3.2 (ĐH Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh)**.** Gọi $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ là số người dùng $\begin{pmatrix} V \\ M \\ N \end{pmatrix}$ sau n tháng khảo sát.

Ta có $\begin{cases} x_{n+1} = 0.7x_n + 0.15y_n + 0.2z_n \\ y_{n+1} = 0.1x_n + 0.75y_n + 0.05z_n \\ z_{n+1} = 0.2x_n + 0.1y_n + 0.75z_n \end{cases} \Leftrightarrow X_{n+1} = AX_n$, với
$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.15 & 0.2 \\ 0.1 & 0.75 & 0.05 \\ 0.2 & 0.1 & 0.75 \end{pmatrix}$.

(a) Sau 3 tháng: $X_3 = A^3 \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 464.75 \\ 185.75 \\ 349.5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 465 \\ 186 \\ 349 \end{pmatrix}$.

(b) Giả sử $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ thoả yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 1000 \\ AX = X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A-I)X = 0 \\ x+y+z = 1000 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -0.3 & 0.15 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & -0.25 & 0.05 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & -0.25 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1000 \end{array}\right]$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 377 \\ y = 230 \\ z = 393 \end{cases}.$$

Bài 3.3 (ĐH Đại Nam)**.** (a) Tính định thức ma trận A khi $n = 1, 2, 3$
Đặt $D_n = det(A)$. Khi đó ta dễ có: $D_1 = 5,\ D_2 = 19,\ D_3 = 65$.

(b) Tính định thức A cấp n
Khai triển Laplace theo cột đầu tiên, ta được: $D_n = 5D_{n-1} - 6\ D_{n-2}$.
Từ đó dễ tìm được số hạng tổng quát của dãy hồi quy tuyến tính cấp 2 này là: $D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$

(c) Giải hệ phương trình: Vì $D_n = \det(A) \neq 0$ nên hệ đã cho là 1 hệ Crammer, tức là chỉ có một nghiệm duy nhất. Hơn nữa, dễ thấy $x = (1, 1, \ldots, 1)$ là nghiệm nên đây là nghiệm duy nhất của hệ đã cho

Bài 3.4 (ĐH Đại Nam)**.** (a) Sai. Thật vậy, xét hệ phương trình $\begin{cases} x+y = 1 \\ 2x+2y = 3 \end{cases}$

Hệ phương trình này vô nghiệm nhưng hệ phương trình tuyến tính thuần nhất liên kết $\begin{cases} x+y = 0 \\ 2x+2y = 0 \end{cases}$ có vô số nghiệm.

(b) Đúng. Giả thiết ta có ma trận hệ số mở rộng $\bar{A} = (A|B)$ của hệ phương trình $AX = B$. Do $\det(\overline{A}) \neq 0$ => r($\bar{A}$)= $n+1$. Vì $\bar{A} = (A|B)$ => r($\bar{A}$) $\leq$ $r(A)+1$. Nếu $r(A) < n$ thì $r(\bar{A}) < n+1$ mẫu thuẫn. Vậy $r(A) = n$.

(c) Đúng. Thật vậy giả sử tồn tại ma trận X thoả mãn $AX = B$ vì B và A là ma trận vuông cấp n nên X là ma trận vuông cấp n. Ta có $n = r(B) = r(AX) \leq r(A) < n$ mâu thuẫn. Vậy không tồn tại ma trận X thoả mãn yêu cầu đề bài.

Bài 3.5 (ĐH Đồng Tháp). Gọi số sản phẩm của từng loại A, B, C, D, E lần lượt là x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Để sử dụng hết công suất của nhà máy thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 35 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 15x_5 = 70 \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 35x_5 = 126 \\ x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 35x_4 + 70x_5 = 210 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $x_1 = 5, x_2 = 4, x_3 = 3, x_4 = 2, x_5 = 1$.

Bài 3.6 (ĐH Hùng Vương). Nhận xét rằng hệ đã cho có 2018 phương trình và 2020 ẩn và hạng của ma trận các hệ số bằng 2018. Do đó số chiều của không gian nghiệm của hệ thuần nhất bằng 2. Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2x_2 - x_3 \\ 2x_2 - x_3 = 2x_3 - x_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2x_{2018} - x_{2019} = 2x_{2019} - x_{2020} \end{cases}$$

Đặt $2x_1 - x_2 = u$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} &x_2 = 2x_1 - u = 2(x_1 - u) + u \\ &x_3 = 2x_2 - u = 2^2(x_1 - u) + u \\ &\dots\dots\dots \\ &x_{2020} = 2^{2019}(x_1 - u) + u \end{aligned}$$

Do đó hệ nghiệm cơ bản của hệ đã cho là $\left\{(1; 1; ....; 1), \ \left(1;\ 2;\ 2^2; ....; 2^{2019}\right)\right\}$.
Nghiệm riêng của hệ đã cho là $(-2;\ -3;\ -4;\ ...;\ -2020;\ -2021)$.
Do đó nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$a(1;\ 1;\ ...;\ 1) + b\left(1;\ 2;\ 2^2;\ ...;\ 2^{2019}\right) + (-2;\ -3;\ ...;\ -2021), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Bài 3.7 (ĐH Khánh Hòa). Giả sử phản chứng hệ đã cho có nghiệm không tầm thường $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2019}) \neq 0$.
Đặt $|x_i| = \max\limits_{1 \leqslant s \leqslant 2019}\{|x_s|\}$. Thế thì $|x_i| \neq 0$. Xét phương trình thứ i trong hệ đã cho:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}x_i + \cdots + a_{i(2019)}x_{2019} = 0.$$

Khi đó
$$a_{ii}x_i = -\sum_{1\leqslant j\leqslant 2019,\ j\neq i} a_{ij}x_j.$$
Suy ra
$$|a_{ii}x_i| = |\sum_{1\leqslant j\leqslant 2019,\ j\neq i} a_{ij}x_j| \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant 2019,\ j\neq i} |a_{ij}x_j|$$
Suy ra
$$|a_{ii}| \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant 2019,\ j\neq i} |a_{ij}| \left|\frac{x_j}{x_i}\right| \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant 2019,\ j\neq i} |a_{ij}| \quad \left(\text{do } \left|\frac{x_j}{x_i}\right| \leqslant 1\right).$$
Điều này là mâu thuẫn với giả thiết $|a_{ii}| > \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant 2019,\ j\neq i} |a_{ij}|,\ i = 1, 2, \ldots, 2019.$

Như vậy, hệ đã cho có có duy nhất nghiệm tầm thường.

Bài 3.8 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội)**.** a) Sử dụng phương pháp biến đổi Gauss trên ma trận mở rộng các hệ số của hệ phương trình để đưa về ma trận tam giác trên:
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & |\ 9 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & |\ 9 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & |\ 9 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & |\ 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & |\ 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & |\ 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & |\ 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & |\ 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & |\ 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & |\ 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & |\ 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & |\ 2 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 2 \\ x_6 = 2. \end{cases}$$
b) Gọi A là ma trận các hệ số của vế trái của ma trận đã cho.
Áp dụng tính chất của định thức: Nếu cộng (trừ) mỗi số hạng a_{ij} cho một số chẵn thì tính chẵn, lẻ của định thức không thay đổi ($a_{ij} \in \mathbb{Z}$).

Do đó: $\det(A) \equiv \det(B) (\bmod\ 2)$ với $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

Ta có

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 5.(-1)^5 = -5.$$

Suy ra $\det(A)$ là một số lẻ, do đó $\det(A) \neq 0$. Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất.

Bài 3.9 (ĐH Kinh tế Quốc dân). Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} (a_1b_1+1)x_1 + a_1b_2x_2 + \cdots + a_1b_nx_n = c_1 \\ a_2b_1x_1 + (a_2b_2+1)x_2 + \cdots + a_2b_nx_n = c_2 \\ \quad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ a_nb_1x_1 + a_nb_2x_2 + \cdots + (a_nb_n+1)x_n = c_n \end{cases}$$

xét định thức

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1b_1+1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2+1 & \cdots & a_2b_n \\ & \cdots & & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n+1 \end{vmatrix} = D_{n-1} + a_nb_n$$

$D_n = 1 + a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = 1$. Do đó, hệ đã cho là hệ Cramer. Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

D_n^i là định thức có được từ định thức D_n bằng cách thay cột thứ i bằng cột $(c_1, c_2, \ldots c_n)^T$. Ta có D_n^i là các số nguyên với mọi $i = \overline{1,n}$ nên hệ đã cho có duy nhất nghiệm nguyên $x_i = \dfrac{D_n^i}{D_n}$.

Bài 3.10 (ĐH Nha Trang). a) Xét hệ $AX = 0$, ta có

$$\det A = 3abc - a^3 - b^3 - c^3 = -(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right).$$

Vì a, b, c là nghiệm của phương trình $x^3 - 2019x + 5 = 0$ nên $a + b + c = 0$, vì vậy, $\det A = 0$.

Suy ra hệ có vô số nghiệm nên tồn tại ít nhất 1 nghiệm khác 0.

b) Ta có $\det A = 0 \Rightarrow r(A) < 3$.Ta lại có $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$. Vì a, b, c là nghiệm của phương trình $x^3 - 2019x + 5 = 0$ nên a, b, c khác 0 và $abc = -5$. Xét $b\left(ac - b^2\right) = abc - b^3 = -5 - b^3 = -2019b \neq 0$. Suy ra $ac - b^2 \neq 0$ nên $r(A) = 2$.

Bài 3.11 (ĐH Nha Trang)**.** Lập ma trận $(A|B)$, dùng phép biến đổi sơ cấp dòng đưa về ma trận tam giác trên, ta được nghiệm $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = -1, x_5 = 0$.

Bài 3.12 (ĐH Phạm Văn Đồng)**.** Xét $f(u) = u^{2020} + x_1 u^{2019} + \ldots + x_{2019} u + x_{2020}$.
Khi đó $f(a_i) = 0$ với mọi $i = 1, 2 \ldots, 2020$. Đặt $g(u) = (u - a_1).(u - a_2).\ldots.(u - a_{2020}) = u^{2020} + b_1 u^{2019} + \ldots + b_{2019} u + b_{2020}$.
Khi đó g có 2020 nghiệm $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ và có hệ số cao nhất bằng 1 nên theo định lý Vi-et thì

$$\begin{cases} b_1 & = -(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2020}) \\ b_2 & = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_{2019}.a_{2020} \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ b_{2020} & = a_1.a_2.\ldots.a_{2020} \end{cases}$$

Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$ thì $h(x)$ có bậc 2019 có 2020 nghiệm nên $h = 0$.
Vì vậy

$$\begin{cases} x_1 = b_1 & = -(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2020}) \\ x_2 = b_2 & = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_{2019}.a_{2020} \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{2020} = b_{2020} & = a_1.a_2.\ldots.a_{2020} \end{cases}$$

Bài 3.13 (ĐH SPKT Vĩnh Long)**.** Giả sử hệ đã cho có nghiệm $(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq 0$.
Nhân phương trình thứ nhất với λx_1, phương trình thứ hai với λx_2, phương trình thứ ba với λx_3, phương trình thứ tư với λx_4 rồi cộng các phương trình lại ta được $\lambda x_1 (\lambda x_1 - a x_2 - b x_3 - c x_4) + \lambda x_2 (a x_1 + \lambda x_2 - d x_3 + e x_4) + \lambda x_3 (b x_1 + d x_2 + \lambda x_3 - f x_4) + \lambda x_4 (c x_2 - e x_2 + f x_3 + \lambda x_4) = 0$, hay $2\lambda^2 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right) = 0$. Suy ra $\lambda = 0$.
Khi đó hệ phương trình thuần nhất đã cho có ma trận hệ số là

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & -e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & e & -f & 0 \end{bmatrix}.$$

Điều kiện cần và đủ để hệ phương trình thuần nhất $Ax = 0$ có nghiệm không tầm thường $x \neq 0$ là $\det A = 0$.
Bằng khai triển Laplace ta được $\det A = (af + be + cd)^2$.
Vậy điều kiện cần và đủ để hệ phương trình đã cho có nghiệm không tầm thường $(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq 0$ là $af + be + cd = 0$.

Bài 3.14 (Học viện KTQS). $B = A^T A \in M_n(\mathbb{R})$, ta cần chứng minh $\ker B = \{0\}$. Ký hiệu A_i là cột thứ i của A, theo giả thiết các cột này độc lập tuyến tính. Khi đó

$$\begin{aligned}
&A = [A_1, ..., A_n] \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} {A_1}^T \\ ... \\ {A_n}^T \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow A^T A x = \begin{bmatrix} {A_1}^T A_1 & ... & {A_1}^T A_n \\ ... & ... & ... \\ {A_n}^T A_1 & ... & {A_n}^T A_n n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} {A_1}^T (x_1 A_1 + ... + x_n A_n) \\ ... \\ {A_n}^T (x_1 A_1 + ... + x_n A_n) \end{bmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow {A_i}^T (x_1 A_1 + ... + x_n A_n) = 0 \forall i \\
&\Leftrightarrow \langle A_i, Ax \rangle = 0 \forall i \Rightarrow A_i \perp Ax
\end{aligned}$$

nếu $Ax \neq 0$ suy ra

$$\{A_1, ..., A_n, Ax\}$$

độc lập tuyến tính. Mặt khác $Ax = x_1 A_1 + ... + x_n A_n$, tức Ax lại biểu diễn tuyến tính qua $A_1, ..., A_n$. Suy ra mâu thuẫn. Vậy $KerB = \{0\}$.

4 KHÔNG GIAN VÉC TƠ VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Bài 4.1 (ĐH Hùng Vương). Dễ thấy $rank\,(f) + rank\,(g) \geq rank\,(f + g)$. Giả sử $e_1, e_2, ..., e_k$ và $u_1, u_2, ..., u_s$ là hai cơ sở tương ứng của Imf và Img. Khi đó $e_1, e_2, ..., e_k, u_1, u_2, ..., u_s$ sẽ là cơ sở của $\mathrm{Im}\,(f + g)$. Do đó $rank\,(f) + rank\,(g) \leq rank\,(f + g)$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 4.2 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). a) Giả sử $a_1.1 + a_2 p_2(x) + a_3.p_3(x) + a_4.p_4(x) = 0 \quad (*)$, trong đó a_1, a_2, a_3, a_4 là những hằng số.
Lần lượt thay $x = 1, x = 2, x = 3$ vào đẳng thức $(*)$ ta lần lượt suy ra $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$. Từ đó suy ra $a_4 = 0$. Vậy hệ S độc lập tuyến tính.
Mặt khác hệ S có 4 phần tử, bằng với số chiều của không gian vectơ V nên ta suy ra S là một cơ sở của V.

b) Theo giả thiết ta có

$$p(x) = m_1 p_1(x) + m_2 p_2(x) + m_3 p_3(x) + m_4 p_4(x).$$

Suy ra: $p(4) - p(1) = (m_1 + 3m_2 + 6m_3 + 6m_4) - m_1$, từ đó ta được:

$$m_2 + 2m_3 + 2m_4 = 21a + 6b$$

là một số nguyên chia hết cho 3.

Bài 4.3 (ĐH Kinh tế Quốc dân). $\forall X = (x_{ij} \in M_3(\mathbb{R})$ ta có

$$L(X) = \begin{bmatrix} x_{11} & \frac{3}{2}x_{12} & x_{13} \\ \frac{3}{2}x_{21} & 2x_{22} & \frac{3}{2}x_{23} \\ x_{31} & \frac{3}{2}x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

Dễ thấy E_{ij} (Các ma trận vuông cấp 3 chỉ có phần tử thuộc dòng i cột j bằng 1 còn tất cả các phần tử còn lại bằng 0) là các véc tơ riêng của L.
$L(E_{11} = 1E_{11}), L(E_{13} = 1E_{13}), L(E_{31} = 1E_{31}), L(E_{33} = 1E_{33})$ suy ra các véc tơ riêng $E_{11}, E_{13}, E_{31}, E_{33}$ ứng với giá trị riêng bằng 1.
$E_{21}, E_{12}, E_{32}, E_{23}$ là các véc tơ riêng ứng với giá trị riêng bằng $\frac{3}{2}$.
E_{22} là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng bằng 2.
Vậy $det(L) = 2 \times (\frac{3}{2})^4 = \frac{81}{8}$.

Bài 4.4 (ĐH Quy Nhơn). 1.

— Ta có $\varphi(f) = ff' - f'f = 0$.
— Vì $V_r \subset V_{r+1}$ nên $\varphi(V_r) \subset \varphi(V_{r+1})$.
— Áp dụng phép chia với dư, với mọi $g \in V_{r+1}$ ta có

$$g = af + g_1$$

với $a \in \mathbb{C}$ và $g_1 \in V_r$.
— Suy ra $\varphi(g) = a\varphi(f) + \varphi(g_1) = \varphi(g_1) \in \varphi(V_r)$.
— Vậy $\varphi(V_{r+1}) = \varphi(V_r)$.

2.

— $\ker\varphi = \{g \in V \mid \varphi(g) = 0\}$.
— Vì $\varphi(f) = 0$ nên $f \in \ker\ \varphi$ và $< f >= \{af \mid a \in \mathbb{C}\} \subset \ker\ \varphi$.
— Với mọi $g \in \ker\varphi$, giả sử $g \neq 0$ và

$$g = c_0x^k + c_1x^{k-1} + \cdots + c_k, \quad \text{với } c_0 \neq 0$$

$$f = d_0x^r + d_1x^{r-1} + \cdots + d_r, \quad \text{với } d_0 \neq 0.$$

Từ $0 = fg' - f'g = c_0d_0(k-r)x^{r+k-1} +$các số hạng bậc thấp hơn, ta suy ra $k = r$, do đó $g \in V_{r+1}$. Sử dụng phép chia đa thức ta được $g = af + g_1$ với $g_1 = 0$ hoặc $\deg g_1 < r$. Vì $\varphi(g_1) = \varphi(g - af) = \varphi(g) - a\varphi(f) = 0$ nên $g_1 \in \ker\varphi$. Điều này chứng tỏ $g_1 = 0$. Vậy $\ker\varphi =< f >$.

Bài 4.5 (ĐH SPKT Vĩnh Long)**.** Bằng cách bổ sung các vectơ đơn vị thứ $p+1, \ldots, n$, ta có thể giả thiết $p = n$. Xét ma trận vuông A cấp n với các cột là các vectơ đã cho. Ta sẽ chứng minh ma trận này có các vectơ dòng độc lập tuyến tính. Thật vậy, gọi các vectơ dòng là $u_1, \ldots, u_n$. Giả sử $c_1u_1 + \ldots + c_nu_n = 0$, trong đó c_i không đồng thời bằng 0. Gọi c_i có giá trị tuyệt đối lớn nhất trong số $c_1, \ldots, c_n$. Khi đó,

$$| \, c_i v_{ii} \, |=| \sum_{j\neq i} c_j v_{ij} \, |\leq \max\nolimits_{j\neq i} | \, c_j \, | \, . \sum_{j\neq i} | \, v_{ij} \, |<| \, c_i v_{ii} \, | \, .$$

Vô lí. Vậy $| \, A \, |\neq 0$. Từ đó suy ra các vectơ cột cũng độc lập tuyến tính.

5 GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG

Bài 5.1 (ĐH Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh)**.** Ta có: $AX + mX = B \Leftrightarrow A(X - I) + m(X - I) = B - A - mI$.

$$\Leftrightarrow (A + mI)(X - I) = B - A - mI.$$

Vì X có trị riêng 1 nên $det(X - I) = 0 \Rightarrow det(B - A - mI) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-m & 6 \\ 3 & -6-m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow m^2 + 5m - 24 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \vee m = -8$. Thử lại nhận $m = 3 \vee m = -8$.

Bài 5.2 (ĐH Giao thông Vận tải)**.** Đặt $u = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$. Do u là véc-tơ riêng nên $\{Au, u\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính.

$\det([Au, u]) = \det \begin{pmatrix} ax+b & x \\ cx+d & 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow cx^2 - (a-d)x - b = 0.$

Trường hợp $c = 0, a = d$. Khi đó $b = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp $c = 0, a \neq d$. Khi đó $x = -b/(a-d)$.

Trường hợp $c \neq 0$. Khi đó $x = \dfrac{(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}$

Bài 5.3 (ĐH Hùng Vương)**.** Cho ma trận

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận có các giá trị riêng dương sao cho $B^2 = A$.

Bài 5.4 (ĐH Quy Nhơn)**.** — Xét phương trình đặc trưng

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0,$$

có 3 nghiệm là $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -3$.

— Số hạng tổng quát của dãy $\{x_n\}$ có dạng

$$x_n = c_1(-1)^n + c_2 2^n + c_3(-3)^n$$

với c_1, c_2, c_3 là các hằng số.

— Vì $x_0 = 1, x_1 = -1, x_2 = 11$ nên ta suy ra

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ -c_1 + 2c_2 - 3c_3 = -1 \\ c_1 + 4c_2 + 9c_3 = 11. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $c_1 = -\dfrac{2}{3}, c_2 = \dfrac{2}{3}, c_3 = 1.$

— Vậy $x_n = -\dfrac{2}{3}(-1)^n + \dfrac{2}{3}2^n + (-3)^n$. Từ đó suy ra $x_{2019} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3}2^{2019} + (-3)^{2019}$.

Bài 5.5 (Học viện KTQS). Ta có

$$A^4 = \left(A^T\right)^2 = \left(A^2\right)^T = \left(A^T\right)^T = A$$

Do đó $A^4 - A = O$. Từ đây trị riêng thỏa mãn $\lambda^4 - \lambda = 0$. Phương trình có các nghiệm $0, 1, \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, có thể chỉ ra các ma trận nhận các trị riêng này thỏa mãn giả thiết:

$$A_0 = [0]\,, A_1 = [1]\,, A_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \dfrac{-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

6 ĐA THỨC

Bài 6.1 (ĐH Hùng Vương). Với $P\left(x\right) = a_0$ không thỏa mãn điều kiện. Do đó $P(x)$ có dạng:

$$P\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Khai triển điều kiện đã cho thì số hạng có bậc lớn nhất của vế trái là $a_n(a_n x^n)^n = a_n^{n+1}x^{n^2}$ Số hạng có bậc lớn nhất của vế phải là

$$\begin{cases} x^8 & \textit{nếu } \; n < 2 \\ \left(a_n^2 + 1\right) x^8 & \textit{nếu } \; n = 2 \\ a_n^4 x^{4n} & \textit{nếu } \; n \geq 2 \end{cases}$$

Nếu $n \leq 2$ thì ta có

$$x^{n^2} = x^8 \Leftrightarrow n^2 = 8.$$

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên điều trên không xảy ra. Vậy $n > 2$ và $a_n^{n+1} x^{n^2} = a_n^4 x^{4n}$.
Suy ra $\begin{cases} a_n^{n+1} = a_n^4 \\ n^2 = 4n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 4 \\ a_n = 1 \end{cases}$
Do vậy ta cần tìm đa thức có dạng $P(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.
Ta đặt $G(x) = P(x) - \left(x^2 + x + 1\right)^2 + 1$. Khi đó điều kiện đã cho tương đương với

$$P(P(x)) + 1 = \left[P^2(x) + P(x) + 1 - G(x)\right]^2.$$

Khi đó

$$P(P(x)) - \left(P^2(x) + P(x) + 1\right)^2 + 1 = G(x)\left[G(x) - 2\left(P^2(x) + P(x) + 1\right)\right]$$

Nếu $G(x) \neq 0$ thì ta đặt $k = \deg G(x),\ k \leq 3$. Ta có $4k = k + 8$, vô lý vì k là số tự nhiên. Vậy $G(x) = 0, \forall x$. Từ đó ta có

$$P(x) = \left(x^2 + x + 1\right)^2 - 1 = \left(x^2 + x\right)\left(x^2 + x + 2\right).$$

Bài 6.2 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội)**.** Trước hết chúng ta dễ chỉ ra được rằng với hai đa thức $P(x), Q(x)$ ta có: $P(x^4) - P(1), Q(x^4) - Q(1)$ chia hết cho $x^4 - 1$, và do đó chúng cùng chia hết cho đa thức $x^2 + 1$. Mặt khác ta có:

$$P(1) + xQ(1) = P(x^4) + xQ(x^4) - [P(x^4) - P(1) + x(Q(x^4) - Q(1))]$$

Do đó $P(x^4) + xQ(x^4)$ chia hết cho $x^2 + 1$ khi và chỉ khi $P(1) + xQ(1)$ chia hết cho $x^2 + 1$. Điều này tương đương với $P(1) = Q(1) = 0$.

a) Ta có thể chọn $P(x) = a(x - 1)$, $Q(x) = b(x - 1)$, trong đó a, b là những hằng số khác 0.

b) Do $P(1) = Q(1) = 0$ nên ta suy ra $P(x), Q(x)$ cùng chia hết cho $x - 1$, do đó số dư trong phép chia đa thức $P(x)Q(x)$ cho $x^2 - 2x + 1$ bằng 0.

Bài 6.3 (ĐH Kinh tế Quốc dân)**.** Do tất cả các nghiệm của P là hữu tỉ nên P có thể được viết như là tích của n đa thức tuyến tính hệ số hữu tỉ. Do đó, P có thể viết dưới dạng

$$P(x) = \prod_{k=1}^{n}(b_kx + c_k), \quad b_k, c_k \in \mathbb{Z}$$

Hệ số bậc cao nhất của P là số dương nên ta có thể giả sử $b_k > 0, \forall k$. Các hệ số của P là không âm, vì vậy P không thể có nghiệm dương. Từ đó suy ra $c_k \geq 0 \forall k$. Nhưng không thể xảy ra đồng thời hai giá trị $c_k = c_l = 0 (k \neq l)$ vì nếu $c_k = c_l = 0$ thì $a_0 = a_1 = 0 \implies c_k > 0$ ít nhất với $n-1$ số. Bây giờ thế $x = 1$ ta suy ra

$$P(1) = a_n + \cdots + a_0 = 0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \prod_{k=1}^{n}(b_k + c_k) \geq 2^{n-1} \quad (*)$$

$\implies \dfrac{n(n+1)}{2} \geq 2^{n-1} \implies n \leq 4$. Jown nữa, từ $(*)$ suy ra $\dfrac{n(n+1)}{2}$ phân tích được thành ít nhất tích của $n-1$ số nguyên tố lớn hơn 1.
Trường hợp 1: Nếu $n = 1$ thì ta có đa thức $P(x) = 1x + 0$.
Trường hợp 2: Nếu $n = 2$ ta có $P(1) = 3 = 1 \cdot 3$. Do đó, nhân tử của $P(x)$ là x và $x + 2$ hoặc $2x + 1$.
Vậy $P(x)$ là các đa thức $x(x+2) = x^2 + 2x$; $x(2x+1) = 2x^2 + x$.
Trường hợp 3: Nếu $n = 3$ thì $P(1) = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$. Vậy một nhân tử của $P(x)$ là x, nhân tử thứ hai là $x + 1$, nhân tử thứ ba là $x + 2$ hoặc $2x + 1$. Trường hợp này đa thức $P(x)$ là $x^3 + 3x^2 + 2x$ hoặc $2x^3 + 3x^2 + x$
Trường hợp 4: Nếu $n = 4$ thì $\dfrac{n(n+1)}{2} = 10$ không phân tích được thành tích của 3 số nguyên lớn hơn 1.
Vậy có 5 đa thức thỏa mãn đề bài.

Bài 6.4 (ĐH Nha Trang). Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn đồng nhất thức $xP(x-1) = (x-26)P(x)$. Thay $x = 0$ vào đồng nhất thức $xP(x-1) = (x-26)P(x) \quad (1)$ ta được $P(0) = 0$. Suy ra $P(x) \vdots x$ nên $P(x) = xP_1(x)$, vì vậy $P(x-1) = (x-1)P_1(x-1)$. Thay vào (1), ta được $x(x-1)P(x-1) = (x-26)xP_1(x) \quad \Rightarrow (x-1)P(x-1) = (x-26)P_1(x) \qquad (2)$
Thay $x = 1$ vào (2), ta được $P_1(1) = 0 \Rightarrow P_1(x) = (x-1)P_2(x)$. Tiếp tục lý luận như trên ta được

$$P(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-25)Q(x) \quad (3)$$

Thay x bằng $x-1$ vào (3), ta được

$$P(x-1) = (x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-26)Q(x-1)$$

$$\Rightarrow xP(x-1) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-26)Q(x-1)$$

$$\Rightarrow (x-26)P(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.(x-26)Q(x-1)$$

$\Rightarrow Q(x-1) = Q(x)$. Ta lại có $Q(1) = Q(0)$, $Q(2) = Q(1)$, $Q(3) = Q(2)$, ... Đặt $Q(0) = a$, ta có $Q(x) = a$, với $x = 1, 2, 3, \ldots$Suy ra $Q(x) = a, \ \forall x$. Vậy

$$P(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-25)a.$$

Bài 6.5 (ĐH Phạm Văn Đồng). a) Đặt $P(x) = (x-8)(x-10)(x-14)Q(x) + ax^2 + bx + c$. Sử dụng giả thiết $P(8), P(10), P(14)$ thì
$\begin{cases} a &= \dfrac{7}{4} \notin \mathbb{Z} \\ b &= -20 \\ c &= 475 \end{cases}$ Vậy không tồn tại $P(x)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Từ giả thiết suy ra $P(1) = 1$, $P(-1) = 1$. Giả sử $c_1, c_2, \ldots, c_{2018}$ là các nghiệm của đa thức. Khi đó

$$\begin{cases} 1 = P(1) &= (1-c_1).(1-c_2)\ldots(1-c_{2018}) \\ 1 = P(-1) &= (-1-c_1).(-1-c_2)\ldots(-1-c_{2018}) \end{cases}$$

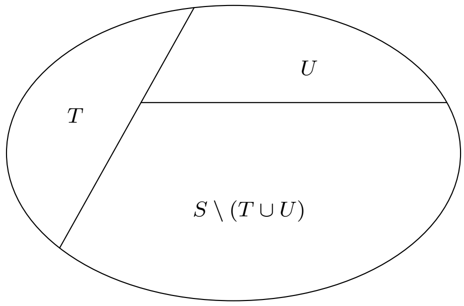
Cho nên tồn tại $k \in \{1, 2, \ldots, 2018\}$ sao cho $c_k^2 - 1 \leq 1$. Hay $|c_k| \leq 2$.

Bài 6.6 (Học viện KTQS).

— Dễ thấy $P(x)$ bậc chẵn, và $Q(x)$ cũng có bậc chẵn. Ta có $Q'(x) = P'(x) + aP''(x) + \ldots + a^{n-1}P^{(n)}(x)$ và $aQ'(x) = aP'(x) + a^2P''(x) + \ldots + a^nP^{(n)}(x)$. Từ đó $P(x) = Q(x) - aQ'(x)$. Vì $P(x)$ không có nghiệm thực, nên $P(x) > 0, \forall x$ hoặc $P(x) < 0, \forall x$.
— Nếu $P(x) = Q(x) - aQ'(x) > 0, \forall x$, khi đó hệ số cao nhất của $Q(x)$ là số dương. Vì $Q(x)$ bậc chẵn, có hệ số cao nhất dương nên tồn tại x_0 thỏa mãn $\min Q(x) = Q(x_0)$ và $Q'(x_0) = 0$. Khi đó $Q(x_0) = P(x_0) + aQ'(x_0) > 0$, do đó $Q(x) > 0, \forall x$.
— Nếu $P(x) = Q(x) - aQ'(x) < 0, \forall x$, chứng minh tương tự.

7 TỔ HỢP

Bài 7.1 (ĐH Đồng Tháp). Gọi S là tập hợp 2019 thành viên nêu trong bài toán. Ta xét các tập con $A \subset S$ mà không có thành viên nào trong A nhận được mũ của thành viên khác trong A. Vì tập S là hữu hạn, nên tập A có hữu hạn tập con.
Trong số các tập con A như vậy, ta gọi T là tập con có số phần tử lớn nhất. Ta sẽ chứng minh rằng $|T| \geq 673$.



Gọi $U \subset S$ là tập hợp gồm tất cả những người nhận được mũ của những người thuộc T, khi đó $U \cap T = \emptyset$.

Bây giờ ta xét phần tử bất kỳ $x \in S \setminus (T \cup U)$. Từ $x \notin U$, suy ra không có thành viên nào của T gửi mũ của mình cho x. Do đó không có thành viên nào của T gửi mũ của mình cho cho các thanh viên trong tập $T \cup \{x\}$. Nếu x không gửi mũ của mình cho một thành viên nào đó của T, thì tập $T \cup \{x\}$ có số phần tử nhiều hơn tập T, điều này trái với giả thiết về tập T.
Do đó x phải gửi mũ của mình cho một thành viên nào đó của T. Như vậy tất cả các thành viên của $S \setminus (T \cup U)$ phải gửi mũ của mình cho thành viên nào đó của T.
Do đó các thành viên trong tập $S \setminus (T \cup U)$ sẽ không nhận được mũ của nhau. Suy ra $|S \setminus (T \cup U)| \leq |T|$, mà $|U| \leq |T|$ suy ra

$$|T| \geq |S \setminus (T \cup U)| = |S| - |T| - |U| \geq |S| - |T| - |T| \Rightarrow |T| \geq \frac{1}{3}|S| \Rightarrow |T| \geq 673.$$

Vậy, sau khi gửi mũ tồn tại một nhóm 673 thành viên sao cho không có ai trong nhóm đó nhận được mũ từ các thành viên khác trong nhóm.

Bài 7.2 (ĐH Giao thông Vận tải). a) Giả sử có hai họ đường song song khác nhau có x và y đường. Khi đó số miền của mặt phẳng được chia thành $(x+1)(y+1)$ miền.
Ta tìm x, y sao cho $\min(x+y)$ để $(x+1)(y+1) \geq 2019$.
Từ đó ta tính được $x = y = 44$.
b) Giả sử có ba họ đường song song khác nhau có x, y và z đường. Khi đó số miền của mặt phẳng được chia thành

$$(x+1)(y+1) + z(x+y+1) = (x+y+z) + (xy+yz+zx) + 1$$

miền.
Ta tìm x, y, z sao cho $\min(x+y+z)$ để $(x+y+z) + (xy+yz+zx) \geq 2019$.
Đặt $a = x+y+z$, $a^2 \geq 3(xy+yz+zx)$ nên $a + \dfrac{a^2}{3} \geq 2019$. Ta có $a \geq 76.34$.
Vậy giá trị a nhỏ nhất là 77 với $x = 26, y = 26, z = 25$.

Bài 7.3 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). Ta gọi 9 cột điện lần lượt là $C1, C2, ..., C9$.
a) C_9^6.
b) Có ba trường hợp:
Trường hợp 1. Lắp 9 bóng vào 9 cột điện, trong trường hợp này có 1 cách lắp.
Trường hợp 2. Lắp 8 bóng vào 9 cột điện, trong trường hợp này hiển nhiên khoảng cách giữa hai bóng đèn liên tiếp không vượt quá 100 m. Trong trường hợp này có $C_9^8 = 9$ cách lắp.
Trường hợp 3. Lắp 7 bóng đèn vào 9 cột. Có C_9^7 cách lắp 7 bóng đèn bất kỳ. Có 2 cột điện không được lắp bóng, do đó khoảng cách giữa 2 bóng điện (liên tiếp) đều không quá 150m. Ta xét tình huống có hai bóng đèn liên tiếp

cách nhau 150 m. Điều này xảy ra khi và chỉ khi ta không lắp các bóng đèn vào các cột $C1$ và C_2; $C2$ và C_3; $C3$ và C_4; $C4$ và C_5; $C5$ và C_6; $C6$ và C_7; $C7$ và $C8$; $C8$ và $C9$. Vậy trong trường hợp 3 có $C_9^7 - 8 = 28$ (cách).
Vậy có tất cả: $1 + 9 + 28 = 38$ cách lắp bóng đèn đủ sáng.

Bài 7.4 (ĐH Kiến Trúc Hà Nội). a) Lấy $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ là lục giác đều nội tiếp đường tâm O, bán kính $R = 1$. Ta có bảy điểm $A_1, A_2, ..., A_7$ thuộc sáu hình quạt B_1OB_2 , B_2OB_3, B_3OB_4, B_4OB_5, B_5OB_6, B_6OB_1, do đó tồn tại hai điểm A_i, A_j trong bảy điểm đó cùng thuộc một hình quạt nào đó, chẳng hạn là quạt B_1OB_2.
Ta có $\widehat{A_iOA_j} \leq \widehat{B_1OB_2} = 60^0$. Do đó trong hai góc còn lại của tam giác OA_iA_j có một góc lớn hơn hoặc bằng 60^0. Suy ra $A_iA_j \leq \max(OA_i, OA_j) \leq 1$. Do đó $e(H) \leq 1$.

b) Khi A_i trùng với B_i $(i \in \{1, 2..., 6\})$ và A_7 trùng với O ta có $e(H) = 1$. Kết hợp với phần $a)$ ta suy ra giá trị lớn nhất của $e(H)$ bằng 1.

Bài 7.5 (ĐH Phạm Văn Đồng). Gọi x, y, z, t là số cạnh của đa giác mà cạnh của tứ giác chứa. Vậy $x, y, z, t \geq 2$ và $x + y + z + t = 30$.
Đặt $a = x-1, b = y-1, c = z-1, d = t-1$ thì $a, b, c, d \geq 1$ và $a+b+c+d = 26$.
Số tứ giác tại 1 đỉnh của đa giác là C_{25}^3.
Vậy số tứ giác thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\dfrac{30}{4}C_{25}^3 = 17250.$

Bài 7.6 (ĐH Quy Nhơn). Xét một đồ thị đầy đủ có 9 đỉnh trong đó mỗi đỉnh được nối với tất cả các đỉnh còn lại bằng một cạnh. Mỗi đỉnh ký hiệu cho một người tham dự tiệc. Tô màu các cạnh của đồ thị với hai màu xanh và đỏ sao cho hai người quen biết nhau ứng với cạnh tô màu xanh và hai người không quen biết nhau ứng với cạnh tô màu đỏ. Ta chứng minh rằng hoặc có một tứ giác đầy đủ màu xanh (4 đỉnh với tất cả được nối với nhau bằng màu xanh) hoặc có một tam giác màu đỏ.
Ký hiệu $B_x = \{y \mid (x, y)$ tô màu xanh$\}$, $R_x = \{y \mid (x, y)$ tô màu đỏ$\}$.
Khẳng định 1: Nếu $|B_x| \geq 6$ thì đồ thị có một tam giác màu đỏ hoặc một tứ giác màu xanh.
Vì B_x là một đồ thị đầy đủ với ít nhất 6 đỉnh và mỗi cạnh được tô màu xanh hoặc đỏ nên nó chứa một tam giác màu đỏ hoặc một tam giác màu xanh (số Ramsey $R(3, 3) = 6$). Nếu nó có một tam giác màu đỏ thì coi như ta đã chứng minh xong. Nếu nó có một tam giác màu xanh thì 3 đỉnh của tam giác đó cùng với đỉnh x lập thành tứ giác đầy đủ với tất cả các cạnh màu xanh.
Khẳng định 2: Nếu $|R_x| \geq 4$ thì đồ thị có một tam giác màu đỏ hoặc một tứ giác màu xanh.
Vì R_x là một đồ thị đầy đủ với ít nhất 4 đỉnh và mỗi cạnh được tô màu xanh hoặc đỏ. Nếu có một cạnh tô màu đỏ thì cạnh đó cùng với hai cạnh nối từ

đỉnh x tạo thành một tam giác đỏ. Trái lại ta có một hình 4 đỉnh đầy đủ với tất cả các cạnh màu xanh.
Khẳng định 3: Trong một đồ thị đầy đủ với 9 đỉnh ta luôn có hoặc $|B_x| \geq 6$ hoặc $|R_x| \geq 4$. Nói cách khác, không tồn tại một đồ thị đầy đủ 9 đỉnh mà mọi đỉnh đều có đúng 5 cạnh màu xanh và 3 cạnh màu đỏ đi ra từ đỉnh đó.
Thật vậy, giả sử tồn tại một đồ thị đầy đủ với 9 đỉnh mà mọi đỉnh đều có đúng 5 cạnh màu xanh và 3 cạnh màu đỏ đi ra từ đỉnh đó. Khi đó số các cạnh màu xanh là $\dfrac{9.5}{2} = 22,5$. Điều này không xảy ra.
Kết luận: các khẳng định 1,2,3 chứng tỏ kết luận của bài toán.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: GIẢI TÍCH

1 DÃY SỐ

Bài 1.1 (ĐH Tây Bắc). 1. Chứng minh phương trình $f_n(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $u_n \in [1; 2019]$.
Xét $f_n(x) = x^n - x - 2019$ trên $(1; 2019)$. Ta có ${f_n}'(x) = nx^{n-1} - 1 > 0$ với $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$.
Vậy $f_n(x)$ là hàm đơn điệu tăng.
Hơn nữa ta có $f_n(1).f_n(2019) = -2019.(2019^n - 2.2019) < 0$ và $f_n(x)$ là hàm liên tục nên $f_n(x)$ có nghiệm duy trên $[1; 2019]$.
2. Chứng minh tính đơn điệu của dãy $\{u_n\}$.
Xét dãy $\{u_n\}$ là nghiệm của $f_n(x)$ ta có

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} - u_n - 2019 > u_n^n - u_n - 2019 = 0 = f_{n+1}(u_{n+1}) \text{ (do } u_n > 1 \text{ với } \forall n)$$

Mặt khác theo ý 1, $f_n(x)$ là hàm đơn điệu tăng do đó $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1}) \Leftrightarrow u_n > u_{n+1} \Rightarrow \{u_n\}$ là dãy đơn điệu giảm.
3. Xét tính hội tụ hay phân kỳ và tìm giới hạn nếu có của $\{u_n\}$.
Do $u_n > 1$ với $\forall n \Rightarrow \{u_n\}$ bị chặn dưới và đơn điệu giảm nên $\{u_n\}$ hội tụ.
Ta có

$$\begin{aligned} & f_{n+1}(u_{n+1}) = f_n(u_n) = 0 \\ & \Rightarrow u_n^{n+1} - u_{n+1} - 2019 = u_n^n - u_n - 2019 \\ & \Leftrightarrow u_n^{n+1} - u_{n+1} = u_n^n - u_n \end{aligned}$$

Cho $n \to \infty$ thì $u_n \to l \geq 1$. Do đó $l^{n+1} = l^n$, dẫn đến $l = 1$. Vậy $\{u_n\}$ hội tụ về 1.

Bài 1.2 (ĐH Tây Bắc). 1. Xét sự hội tụ của $\{u_n\}$.
Nhân hai vế với 2019^n ta được $2019^n u_n = 2019^{n-1} u_{n-1} + (-1)^n 2019^n$.
Đặt $v_n = 2019^n u_n$ thì $v_n - v_{n-1} = (-1)^n 2019^n$

Suy ra $v_n = (v_n - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_{n-2}) + \cdots + (v_1 - v_0) + v_0 = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i 2019^i$

Vậy $u_n = \dfrac{v_n}{2019^n} = \dfrac{-1 + (-1)^n 2019^n}{2019^{n-1} 2020}$.

Ta thấy

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} u_{2n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{-1+(-1)^{2n}2019^{2n}}{2019^{2n-1}2020}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{2019^{2n}}+1}{\frac{2020}{2019}}\\ &= \frac{2019}{2020}\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} u_{2n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{-1+(-1)^{2n+1}2019^{2n+1}}{2019^{2n}2020}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{2019^{2n+1}}-2019}{2020}\\ &= -\frac{2019}{2020}\end{aligned}$$

Chứng tỏ không tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài 1.3 (ĐH Đồng Tháp). (a) Bằng qui nạp, ta chứng minh được $u_n \geq 1$ với mọi $n \geq 1$. Hơn nữa, ta có $u_{n+1} - u_n = u_n^{2020} + 2018u_n^{2019} > 0$ hay $\{u_n\}$ là dãy tăng. Giả sử $\{u_n\}$ bị chặn trên. Khi đó, dãy $\{u_n\}$ có giới hạn hữu hạn. Đặt $L = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Vì $u_n \geq 1$ với mọi $n \geq 1$ nên $L \geq 1$. Khi đó, từ hệ thức $u_{n+1} = u_n^{2020} + 2018u_n^{2019} + u_n$, ta được $L = L^{2020} + 2018L^{2019} + L$. Suy ra $L = 0$ hoặc $L = -2018$. Điều này mâu thuẫn với $L \geq 1$. Vì vậy dãy $\{u_n\}$ không bị chặn trên.

(b) Theo Câu (a), ta có $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$. Từ giả thiết, ta có

$$\begin{aligned}\frac{u_k^{2019}}{u_{k+1}+2018} &= \frac{u_k^{2019}(u_k+2018)}{(u_{k+1}+2018)(u_k+2018)}\\ &= \frac{u_{k+1}-u_k}{(u_{k+1}+2018)(u_k+2018)}\\ &= \frac{1}{u_k+2018} - \frac{1}{u_{k+1}+2018}.\end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_1^{2019}}{u_2+2018} + \frac{u_2^{2019}}{u_3+2018} + \cdots + \frac{u_n^{2019}}{u_{n+1}+2018}\right)\\ = &\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{u_1+2018} - \frac{1}{u_{n+1}+2018}\right)\\ = &\frac{1}{u_1+2018} = \frac{1}{2019}.\end{aligned}$$

Bài 1.4 (CĐ Sư phạm Nam Định). a) +) Vì $a > 0$, bằng phương pháp quy nạp ta có thể chứng minh $u_n > 0$ với mọi $n \geq 1$.

+) Do đó $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{1+(2n+1)u_n} - u_n = \dfrac{-(2n+1)u_n^2}{1+(2n+1)u_n} < 0$ với mọi $n \geq 1$.

Vậy u_n là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0.

b) $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = 2n+1$.

Do đó $\dfrac{1}{u_n} = \left(\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n-1}}\right) + \left(\dfrac{1}{u_{n-1}} - \dfrac{1}{u_{n-2}}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{u_2} - \dfrac{1}{u_1}\right) + \dfrac{1}{u_1}$

$= (2n-1) + (2n-3) + \cdots + 3 + \dfrac{1}{u_1} = n^2 - 1 + \dfrac{1}{a}$.

Vậy $u_n = \dfrac{1}{n^2 - 1 + \dfrac{1}{a}}$.

Vậy $u_{2019} = \dfrac{1}{2019^2 - 1 - 2019} = \dfrac{1}{4074341}$.

c) $a = \dfrac{4}{3}$ do đó $u_n = \dfrac{1}{n^2 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{n-1/2} - \dfrac{1}{n+1/2}$.

Vậy $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \dfrac{1}{1/2} - \dfrac{1}{3/2} + \dfrac{1}{3/2} - \dfrac{1}{5/2} + \cdots + \dfrac{1}{n-3/2} - \dfrac{1}{n-1/2} + \dfrac{1}{n-1/2} - \dfrac{1}{n+1/2}$

$= 2 - \dfrac{1}{n+1/2}$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = 2$.

Bài 1.5 (ĐH Phạm Văn Đồng). Viết phương trình về dạng

$$\frac{1}{2019^x} - x^2 + n^2 = 0.$$

Xét hàm số $f_n(x) = \dfrac{1}{2019^x} - x^2 + n^2$ trên $(0; +\infty)$. Khi đó

$$f_n'(x) = -\frac{\ln 2019}{2019^x} - 2x < 0, \quad \forall x > 0.$$

Do đó $f_n(x)$ là hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$. Hơn nữa,

$$\begin{cases} f_n(n) &= \dfrac{1}{2019^n} > 0 \\ f_n(n+1) &= \dfrac{1}{2019^{n+1}} - 2n - 1 < 0 \end{cases}$$

Vì vậy, phương trình có nghiệm $x_n \in (n; n+1)$. Do đó, phương trình có một nghiệm dương duy nhất.
Từ chứng minh trên thì $n < x_n$ và $x_n^2 - n^2 = \dfrac{1}{2019^{x_n}}$ với mọi n nguyên dương.
Suy ra

$$0 < x_n - n = \frac{1}{(x_n + n)2019^{x_n}} < \frac{1}{2n.2019^{x_n}}.$$

Do đó $\lim(x_n - n) = 0$. Cho nên

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n) &= \lim_{n\to+\infty}([x_{n+1} - (n+1)] - (x_n - n) + 1) \\ &= \lim_{n\to+\infty}((x_{n+1} - (n+1)) - \lim_{n\to+\infty}(x_n - n) + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Bài 1.6 (ĐH Thủy lợi Hà Nội)**.** + Đặt $f(a_n, b_n) = \dfrac{a_n}{b_n}$. Khi đó

$$f(a_{n+1}, b_{n+1}) = \frac{a_n + \frac{1}{2b_n}}{b_n + \frac{1}{2a_n}} = \frac{a_n}{b_n} = f(a_n, b_n), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

+ Từ đó suy ra $\dfrac{a_n}{b_n} = f(a_n, b_n) = f(a_0, b_0) = \dfrac{a_0}{b_0}$, và ta có

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n}\frac{a_0}{b_0}, \quad b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2b_n}\frac{b_0}{a_0}.$$

+ Ta có, với $n = 0, 1, 2, ...$

$$a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 = a_n^2 + b_n^2 + \left(\frac{a_0}{b_0} + \frac{b_0}{a_0}\right) + \left(\frac{1}{4a_n^2}\frac{a_0^2}{b_0^2} + \frac{1}{4b_n^2}\frac{b_0^2}{a_0^2}\right) \geqslant a_n^2 + b_n^2 + 2,$$

nên $a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 \geqslant 2(n+1) + a_0^2 + b_0^2 > 2(n+1), \quad n = 0, 1, 2, ...$
+ Mặt khác, đây là hai dãy dương nên:

$$\max(a_{2019}, b_{2019}) \geqslant \sqrt{\frac{a_{2019}^2 + b_{2019}^2}{2}} \geqslant \sqrt{2019} > 44,9 > \frac{89}{2}.$$

Bài 1.7 (ĐH SPKT Vĩnh Long)**.** Từ giả thiết ta được:

$$u_n^2 = u_{n-1}^2 + \frac{1}{u_{n-1}^2} + 2 \qquad (2)$$

Từ đó suy ra

$$u_n^2 > u_{n-1}^2 + 2 \tag{3}$$

Mặt khác, từ (2) ta có

$$u_n^2 - 3 = u_{n-1}^2 + \frac{1}{u_{n-1}^2} - 1$$

Lại có $u_1 = 1 \Rightarrow u_{n-1} \geq 1,\ \forall n = 2, 3...$
Suy ra

$$u_n^2 - 3 = u_{n-1}^2 + \frac{1}{u_{n-1}^2} - 1 < u_{n-1}^2$$

Do đó

$$u_{n-1}^2 + 3 \geq u_n^2 > u_{n-1}^2 + 2 \tag{4}$$

Lần lượt thay $n = 2, 3, ..., k$ vào (4), ta được

$$\begin{cases} u_1^2 + 3 \geq u_2^2 \geq u_1^2 + 2 \\ u_2^2 + 3 \geq u_3^2 \geq u_2^2 + 2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{k-1}^2 + 3 \geq u_k^2 \geq u_{k-1}^2 + 2 \end{cases}$$

Cộng từng vế $k-1$ bất đẳng thức trên ta có bất đẳng thức mới

$$u_1^2 + 3(k-1) \geq u_k^2 > u_1^2 + 2(k-1) \tag{5}$$

Thay $u_1 = 1$ vào bất đẳng thức (5) ta được:

$$\begin{gathered} 3k - 2 \geq u_k^2 > 2k - 1 \\ \Rightarrow \sqrt{3k-2} \geq u_k > \sqrt{2k-1},\quad \forall k \geq 2 \end{gathered}$$

Với $k = 2019$ ta được

$$78 > \sqrt{3.2019 - 2} \geq u_{2019} > \sqrt{2.2019 - 1} > 63$$

Vậy $63 < u_{2019} < 78$.

Bài 1.8 (ĐH Nha Trang). a) $\dfrac{1}{x_{n+1}^2} = \dfrac{4}{2019}\left(\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n}\right)\ \forall n \geq 1$.
$y_n = 1 + \dfrac{4}{2019}\left(\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_n}\right)$.
$(x_n)_1^\infty$ tăng không bị chặn trên, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \dfrac{2023}{2019}$.
b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x_n^2 + 2019x_n} - x_n}{2} = \dfrac{2019}{4}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n} = \dfrac{2019}{4}$.

Bài 1.9 (ĐH Nha Trang). a) Chứng minh bằng phương pháp qui nạp.
b) Đặt $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$, ta có: $\alpha = \alpha^2 - \dfrac{1}{2}$.
$|x_{n+1} - \alpha| = \left|x_n^2 - \alpha^2\right| = |x_n + \alpha|\,|x_n - \alpha| < \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,|x_n - \alpha|$
$0 \le |x_n - \alpha| < \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} |x_1 - \alpha|$, suy ra $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Bài 1.10 (ĐH GTVT). Theo giả thiết, $u_0 = 0 \le u_1 = \dfrac{1}{2} \le u_2 = \dfrac{13}{24}$ và

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}\left(u_n - u_{n-1}\right) + \frac{1}{3}\left(u_{n-1}^3 - u_{n-2}^3\right).$$

Dùng phương pháp chứng minh quy nạp, ta được $u_{n+1} \ge u_n, \forall n = 0, 1, 2, \cdots$.
Mặt khác, dễ thấy $u_0, u_1, u_2 \in [0, 1)$ nên theo quy nạp ta cũng chứng minh được

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(1 + u_n + u_{n-1}^3\right) \in [0, 1), \forall n = 1, 2, 3, \cdots$$

Vậy dãy số $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn.
Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$. Từ $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(1 + u_n + u_{n-1}^3\right)$, cho $n \to +\infty$, ta được

$$a = \frac{1}{3}\left(1 + a + a^3\right) \Rightarrow a = 1, a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ a = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Đến đây, dùng phương pháp quy nạp ta lại chứng minh được $u_n \le \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \forall n = 0, 1, 2, \cdots$ Vậy $0 \le a \le \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, nên $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 1.11 (ĐH Hàng Hải). a) Ta khẳng định rằng phương trình $f(x) = x$ vô nghiệm. Thực vậy, giả sử trái lại, tồn tại số thực a sao cho $f(a) = a$. Nếu vậy ta có:

$$a < f(f(a)) = f(a) = a.$$

Mâu thuẫn.Vậy phương trình $f(x) = x$ vô nghiệm. Do $f(x) - x$ là hàm liên tục trên $(-\infty, +\infty)$ nên chỉ một trong hai khả năng sau có thể xảy ra:
i) $f(x) - x < 0 \ \ (\forall x \in (-\infty, +\infty))$;
ii) $f(x) - x > 0 \ \ (\forall x \in (-\infty, +\infty))$.
Nếu xảy ra khả năng thứ nhất, ta sẽ có $f(x) < x \ \ (\forall x \in (-\infty, +\infty))$. Từ đó suy ra:

$$f(f(x)) < f(x) < x \ \ (\forall x \in (-\infty, +\infty)).$$

Trái với giả thiết $f(f(x)) > x \ \ (\forall x \in (-\infty, +\infty))$. Vậy chỉ có thể xảy ra khả năng thứ hai $f(x) - x > 0 \ \ (\forall x \in (-\infty, +\infty))$. Nói cách khác:

$$f(x) > x \ \ (\forall x \in (-\infty, +\infty)). \tag{3}$$

Từ bất đẳng thức (3) ta suy ra $0 < f(0) = x_1$. Giả sử đã có $0 < x_n \ \ (n \geq 1)$. Khi đó từ (3) ta có $x_{n+1} = f(x_n) > x_n > 0$. Vậy bằng quy nạp ta đã chứng minh rằng $x_n > 0 \ \ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

b) Từ bất đẳng thức (3) ta có $x_{n+1} = f(x_n) > x_n \ \ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$. Vậy dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ thực sự tăng. Ta khẳng định rằng dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ không bị chặn trên. Thực vậy, nếu trái lại ta suy ra tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. Suy ra:

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x^*).$$

Mâu thuẫn với (3). Vậy dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ không bị chặn trên, do đó ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Tiếp theo ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+2} - x_k}{x_k x_{k+1} x_{k+2}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x_k x_{k+1}} - \frac{1}{x_{k+1} x_{k+2}}\right) = \frac{1}{x_1 x_2} - \frac{1}{x_{n+1} x_{n+2}}.$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+2} - x_k}{x_k x_{k+1} x_{k+2}} = \frac{1}{x_1 x_2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_{n+1} x_{n+2}} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{f(0).f(f(0))}$$

Bài 1.12 (ĐH Hàng Hải). Giả sử trái lại rằng khẳng định của bài toán không đúng. Khi đó tồn tại một số nguyên dương n_0 sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $x \in (-\infty, +\infty)$:

$$f(x + 2019) - f(x) \geq \frac{1}{n_0}. \tag{4}$$

Đặt $m = \inf\{f(x) : x \in (-\infty, +\infty)\}$.Vì hàm f bị chặn dưới nên m là một số thực. Từ (4) ta suy ra:

$$f(x + 2019) \geq f(x) + \frac{1}{n_0} \ \ (\forall x \in (-\infty, +\infty)). \tag{5}$$

Lấy infimum hai vế của bất đẳng thức (5) ta được:

$$\inf\{f(x+2019) : x \in (-\infty, +\infty)\} \geq \inf\{f(x) : x \in (-\infty, +\infty)\} + \frac{1}{n_0} \Rightarrow m \geq m + \frac{1}{n_0}.$$

Mâu thuẫn. Vậy khẳng định của bài toán là đúng.

Bài 1.13 (ĐH KT Hà Nội). a) Ta có $x_{n+1} - x_n \leq 0$ với mọi $n \geq 1$. Suy ra dãy đơn điệu giảm.
b) Chứng minh $x_n < 2019$ với mọi $n \geq 1$. Suy ra $\lim x_n = -\infty$ và do đó dãy không bị chặn dưới.
Tính được $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x_n - 2019}{x_{n+1} - 2019} = \dfrac{2019}{x_{n+1} - 2019} - \dfrac{2019}{x_1 - 2019}$. Suy ra giới hạn là $\dfrac{2019}{2019 - a}$.
c)
+) $a < 2019$, theo câu b, ta có dãy không có giới hạn hữu hạn.
+) $a > 4038$, ta chỉ ra $x_2 < 2019$, do đó dãy số không có giới hạn hữu hạn.
+) $a = 2019$, ta có $x_n = 2019$ với mọi $n \geq 1$. Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} n(x_n - 2019) = 0$.
+) $a = 4038$, ta tính được $x_n = 2019$ với mọi $n \geq 2$. Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} n(x_n - 2019) = 0$.
+) $a \in (2019; 4038)$, ta chứng minh được $x_n \in (2019; 4038)$ với mọi $n \geq 1$. Do đó dãy có giới hạn hữu hạn và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2019$.
Mặt khác, ta có $x_n - 2019 > 0$ và $4038 - x_n > 0$ với mọi $n \geq 1$, do đó

$$\frac{1}{x_{n+1} - 2019} - \frac{1}{x_n - 2019} = \frac{1}{4038 - x_n}, \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x_{n+1} - 2019} - \dfrac{1}{x_n - 2019} \right) = \dfrac{1}{2019}$.
Áp dụng định lý Stolz, ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n(x_n - 2019)} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{x_{n+1} - 2019} - \frac{1}{x_n - 2019} \right) = \frac{1}{2019}.$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} n(x_n - 2019) = 2019$.

Bài 1.14 (ĐH HV Phú Thọ). Đặt $u_n - 2^n = v_n$ ta thu được dãy mới $v_1 = 0, v_2 = 16, v_3 = 48$ và $v_{n+3} = 7v_{n+2} - 11v_{n+1} + 5v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Đặt $v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = x_n$ thu được $x_1 = 16$ và $x_{n+1} = 5x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Nên (x_n) là cấp số nhân và $x_n = 16.5^{n-1}$.
Suy ra $v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = 16.5^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Đặt $v_n - 5^{n-1} = y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta thu được $y_1 = -1, y_2 = 11$ và $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
$\Leftrightarrow y_{n+2} - y_{n+1} = y_{n+1} - y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$
$\Leftrightarrow y_{n+1} - y_n = 12, \forall n \in \mathbb{N}^*$
$y_n = -1 + 12(\text{n} - 1) = 12\text{n} - 13, \forall n \in \text{N}^*$
Do đó,
$v_n = 5^{n-1} + y_n = 5^{n-1} + 12n - 13, \forall n \in \mathbb{N}^*$,
$u_n = 2^n + 5^{n-1} + 12n - 13, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Áp dụng định lý Fermat với số nguyên tố $p = 2011$ ta thu được $2^{2010} = 2^{2011-1} \equiv 1(\mathrm{mod} 2011)$ và $5^{2010} = 5^{2011-1} \equiv 1(\mathrm{mod} 2011)$. Từ đó suy ra $u_{2011} = 2^{2011} + 5^{2010} + 12.2011 - 13 \equiv -10(\mathrm{mod} 2011) \equiv 2001(\mathrm{mod} 2011)$.
Vậy số dư khi chia u_{2011} cho 2011 là 2001.

2 CHUỖI SỐ

Bài 2.1 (ĐH Thủy lợi Hà Nội). + Trước hết ta chứng minh rằng: Miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ là $\mathbb{R}$.
+ Đặt $u_n(x) = \frac{x^{3n}}{(3n)!}$. Với $x_0 \in \mathbb{R}$, xét

$$\left|\frac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)}\right| = \frac{|x_0^3|}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}.$$

+ Ta thấy: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)}\right| = 0 < 1$ với mỗi $x_0 \in \mathbb{R}$, do đó miền hội tụ của chuỗi hàm đã cho là $\mathbb{R}$, hay là miền xác định của $f(x)$ là $\mathbb{R}$.
+ Khi đó, với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!},$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}.$$

+ Do vậy với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có:

$$f''(x)+f'(x)+f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

3 HÀM SỐ

Bài 3.1 (ĐH Tây Bắc). 1. Phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm trên $\mathbb{R}$.
Chọn một dãy bất kì $\{u_n\}$ sao cho $\lim u_n = 0$.
Khi đó từ bất đẳng thức của f ta được $f(u_n) \to 0$.
Mặt khác do tính liên tục của f tại 0 nên ta được $\lim f(u_n) = f(0)$.
Ngoài ra cũng từ bất đẳng thức đã cho và tính liên tục tại 0 ta được $f(0) = 0$ và ta được 0 luôn là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

2. Nếu $0 < a < b$ thì tồn tại số $K \in [0, 1)$ sao cho $|f(x)| \leq K|x|, \forall x \in [a, b]$.
Với mọi $x \in [a, b]$, đặt $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Khi đó g liên tục trên $[a, b]$. Do vậy $K = \sup\limits_{x\in[a,b]} |\frac{f(x)}{x}| = \max\limits_{x\in[a,b]} |\frac{f(x)}{x}| < +\infty$.
Hơn nữa, tồn tại $x_0 \in [a, b]$ để

$$K = |\frac{f(x_0)}{x_0}| < 1 \text{ vì } |f(x)| \leq |x|, \forall x \neq 0.$$

Từ đó ta suy ra $|f(x)| \leq K|x|, \forall x \in [a, b]$.

Bài 3.2 (ĐH Tây Bắc)**.** Do giả thiết ta có $f(x) > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2.$$

Ngoài ra, do $\lim\limits_{x\to 0} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2$ nên với mọi $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho

$$0 \leq f(x) + \frac{1}{f(x)} - 2 < \varepsilon, \forall 0 < |x| < \delta.$$

Mặt khác, ta lại có

$$f(x) + \frac{1}{f(x)} - 2 < \varepsilon \Leftrightarrow [f(x) - 1] + [\frac{1}{f(x)} - 1] < \varepsilon \quad (1)$$

Từ (1) ta được

$$-[f(x) - 1][\frac{1}{f(x)} - 1] < \varepsilon \quad (2)$$

Bình phương hai vế của (1) ta được

$$[f(x) - 1]^2 + [\frac{1}{f(x)} - 1]^2 + 2[f(x) - 1][\frac{1}{f(x)} - 1] < \varepsilon^2$$

Suy ra

$$[f(x) - 1]^2 + [\frac{1}{f(x)} - 1]^2 + 2[f(x) - 1][\frac{1}{f(x)} - 1] < \varepsilon^2 \quad (3)$$

Thay (2) vào (3) ta được

$$[f(x) - 1]^2 + [\frac{1}{f(x)} - 1]^2 < \varepsilon^2 + 2\varepsilon.$$

Hay nói cách khác

$$[f(x) - 1]^2 < \varepsilon^2 + 2\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

Bài 3.3 (ĐH Đồng Tháp). Từ giả thiết, ta có $f'(x) - 2019f(x) \geq 2019$. Suy ra

$$f'(x)e^{-2019x} - 2019f(x)e^{-2019x} \geq 2019e^{-2019x}.$$

Suy ra $\left(f(x)e^{-2019x}\right)' \geq 2019e^{-2019x}$. Do đó $\int\limits_0^1 \left(f(x)e^{-2019x}\right)' dx \geq \int\limits_0^1 2019e^{-2019x} dx$.

Suy ra $f(1)e^{-2019} - f(0) \geq 1 - e^{-2019}$ hay $f(1) \geq 2018e^{2019} - 1$.

Bài 3.4 (ĐH Đồng Tháp). Đặt $f(x) = g(x) + cx$ với c là hằng số cần tìm. Thay $f(x) = g(x) + cx$ vào 2, ta được

$$g(9x) - \frac{5}{6}g(6x) + \frac{1}{6}g(4x) + \frac{14}{3}cx = 6x.$$

Ta cần chọn c sao cho $\frac{14}{3}c = 6$ hay $c = \frac{9}{7}$. Như vậy, bằng cách đặt $f(x) = g(x) + \frac{9}{7}x$, điều kiện 2 trở thành

$$g(9x) - \frac{5}{6}g(6x) + \frac{1}{6}g(4x) = 0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay $4x$ bởi x, ta được

$$g(\frac{9}{4}x) - \frac{5}{6}g(\frac{3}{2}x) + \frac{1}{6}g(x) = 0.$$

Suy ra

$$\left[g(\frac{9}{4}x) - \frac{1}{3}g(\frac{3}{2}x)\right] - \frac{1}{2}\left[g(\frac{3}{2}x) - \frac{1}{3}g(x)\right] = 0.$$

Đặt $h(x) = g(\frac{3}{2}x) - \frac{1}{3}g(x)$. Khi đó,

$$h(\frac{3}{2}x) - \frac{1}{2}h(x) = 0.$$

Bằng cách thay x bởi $\frac{2}{3}x$, ta được $h(x) = \frac{1}{2}h(\frac{2}{3}x)$. Tiếp tục thay x bởi $\frac{2}{3}x$, ta được

$$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n h\left((\frac{2}{3})^n\right).$$

Kết hợp điều này với tính liên tục tại 0 của h, ta có

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} h(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n h\left((\frac{2}{3})^n\right) = 0.h(0) = 0.$$

Do đó, $g(\frac{3}{2}x) - \frac{1}{3}g(x) = 0$. Lập luận tương tự, ta được $g(x) = 0$. Vậy $f(x) = \frac{9}{7}x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 3.5 (CĐ Sư phạm Nam Định). +) Theo giả thiết $f(x) > 0$ với mọi $x > 0$.
Do đó $3f(x) \geq 2f(f(x)) + x > x$ và $f(x) > \frac{x}{3} = a_1.x$ với mọi $x > 0$, $a_1 = \frac{1}{3}$.
Ta có $f(f(x)) > a_1 f(x) > a_1^2 x$, $3f(x) \geq 2a_1^2 x + x$,
$f(x) > a_2 x$ với mọi $x > 0$, $a_2 = \frac{2a_1^2 + 1}{3}$.
Tổng quát ta có $f(x) > a_n x \quad (1)$ với $a_n = \frac{2a_{n-1}^2 + 1}{3}, a_1 = \frac{1}{3}$.
+) Ta chứng minh $0 < a_n < \frac{1}{2} \quad (2)$ với mọi $n \geq 1$ bằng qui nạp.
với $n = 1$, $0 < a_1 = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.
Giả sử $0 < a_k < \frac{1}{2}$, do đó $0 < a_k^2 < \frac{1}{4}$, và $0 < \frac{1}{3} < \frac{2a_k^2 + 1}{3} < \frac{1}{2}$.
Vậy $0 < a_{k+1} < \frac{1}{2}$ và (2) đúng với $n = k + 1$.
Theo nguyên lý qui nạp ta được điều phải chứng minh.
+) $a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - 1)(2a_n - 1)}{3} > 0$ với mọi $n \geq 1$. Do đó dãy (a_n) là dãy tăng và bị chặn trên bởi $1/2$. Do đó tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l \geq \frac{1}{2}$.
Theo giả thiết ta có $l = \frac{2l^2 + 1}{3}$, vậy $l = 1$ hoặc $l = 1/2$. Vì $l \leq 1/2$ nên $l = 1/2 = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
+) Vì $f(x) > a_n x$ với mọi $x > 0$, $n \geq 1$.
Cho $n \to +\infty$ ta được $f(x) \geq \frac{1}{2}x$.

Bài 3.6 (ĐH Phạm Văn Đồng). **Cách 1.** Với mọi $t > 1$, sử dụng khai triển Taylor tại lân cận điểm 1, tồn tại $c \in (1, t)$

$$\begin{aligned}\ln t &= \ln 1 + \ln'(1)(t-1) + \frac{\ln''(c)}{2!}(t-1)^2 \\ &= (t-1) - \frac{(t-1)^2}{2c^2}.\end{aligned}$$

Trước tiên nhận thấy $\ln t < t - 1$, với mọi $t > 1$. Hơn nữa, vì $c > 1$ nên $\frac{1}{c^2} < 1$.
Từ đó, với mọi $t > 1$

$$\ln t > (t-1) - \frac{(t-1)^2}{2}.$$

Do vậy, với mọi $t > 1$

$$\begin{aligned}(t-1) - \frac{(t-1)^2}{2} &< \ln t < t - 1\\ \Rightarrow \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} &< \frac{\ln t}{(t-1)^2} < \frac{1}{t-1}.\end{aligned}$$

Sử dụng đánh giá tích phân

$$\begin{aligned}\int_x^{x^2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\right) dt &\le f(x) \le \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}\\ \Leftrightarrow \ln(x+1) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} &\le f(x) \le \ln(x+1).\end{aligned}$$

Từ đó, ta kết luận

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \ln 2.$$

Cách 2. Sử dụng công thức tích phân từng phần,

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{(t-1)^2} dt = -\int_x^{x^2} \ln t d\left(\frac{1}{t-1}\right)\\ &= -\frac{\ln t}{t-1}\Bigg|_x^{x^2} + \int_x^{x^2} \frac{dt}{t(t-1)}\\ &= \left(-\frac{\ln t}{t-1} - \ln t + \ln(t-1)\right)\Bigg|_x^{x^2}\\ &= \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \ln x.\end{aligned}$$

Từ đó,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 = \ln 2.$$

Bài 3.7 (ĐH SPKT Vĩnh Long)**.** Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2019^x f(x)}{2019^x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2019^x \left((\ln 2019) f(x) + f'(x)\right)}{2019^x \ln 2019}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln 2019) f(x) + f'(x)}{\ln 2019}\\ &= \frac{2019}{\ln 2019}.\end{aligned}$$

Bài 3.8 (ĐH Nha Trang). a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, tương đương với

$$\lim_{x\to 0} x^{k-2019}\left|\cos\frac{\pi}{x}\right| = 0.$$

Từ đây suy ra $k > 2019$.
b) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^{k-2020}\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|$.
$f(x)$ khả vi tại $x = 0 \Leftrightarrow k > 2020$.
c) Ta có

$$f'_+\left(\frac{2}{2019}\right) = \lim_{x\to\left(\frac{2}{2019}\right)^+}\frac{x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right| - f(\frac{2}{2019})}{x-\frac{2}{2019}} = \pi.$$

Tương tự,

$$f'_-\left(\frac{2}{2019}\right) = -\pi.$$

Vậy $f(x)$ không khả vi tại $\dfrac{2}{2019}$.

Bài 3.9 (ĐH BK Tp HCM). Từ giả thuyết suy ra dãy $\{f(n)\}$ tăng và $f(n) \geqslant f(1) = a > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \ell < +\infty$ thì từ ii) suy ra $\ell = 2019\ell^2 + \ell \Rightarrow \ell = 0$ (mâu thuẫn). Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = +\infty$. Mặt khác,

$$f(k+1) = 2019(f(k))^2 + f(k) \Rightarrow 2019(f(k))^2 = f(k+1) - f(k)$$

$\Rightarrow \dfrac{2019(f(k))^2}{f(k)f(k+1)} = \dfrac{f(k+1)-f(k)}{f(k)f(k+1)}$
$\Rightarrow \dfrac{f(k)}{f(k+1)} = \dfrac{1}{2019}\left(\dfrac{1}{f(k)} - \dfrac{1}{f(k+1)}\right)$.
Từ đó suy ra

$$\frac{f(1)}{f(2)}+\frac{f(2)}{f(3)}+\ldots+\frac{f(n)}{f(n+1)} = \frac{1}{2019}\Big[\left(\frac{1}{f(1)}-\frac{1}{f(2)}\right)+\left(\frac{1}{f(2)}-\frac{1}{f(3)}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{f(n)}-\frac{1}{f(n+1)}\right)\Big] = \frac{1}{2019}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{f(n+1)}\right)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{2019a}$$

4 PHÉP TÍNH VI PHÂN

Bài 4.1 (ĐH Tây Bắc)**.** 1. Vì lý do thực tiễn, người ta muốn làm một đoạn đường thẳng AB đi qua vị trí M. Hãy xác định độ dài ngắn nhất của đoạn đường cần làm.

Chọn hệ trục toạn độ Oxy có $Ox \equiv OA; Oy \equiv OB \Rightarrow M\left(\frac{1}{8};1\right)$.

Gọi $A\left(0;a\right), B\left(b;0\right)$ khi đó PT của AB là $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ đường thẳng này đi qua

$$\begin{aligned} M\left(\frac{1}{8};1\right) \Rightarrow \frac{1}{a} = 1 - \frac{1}{8b} \Rightarrow a &= \frac{8b}{8b-1} \\ &= 1 + \frac{1}{8b-1} \\ &\Rightarrow AB^2 = b^2 + \left(1+\frac{1}{8b-1}\right)^2 \\ &= 1 + b^2 + \frac{2}{8b-1} + \frac{1}{\left(8b-1\right)^2} \end{aligned}$$

Xét $f\left(b\right) = 1 + b^2 + \frac{2}{8b-1} + \frac{1}{\left(8b-1\right)^2}$ với $b > \frac{1}{8}$.

Ta có

$$\begin{aligned} f' &= 2b - \frac{16}{\left(8b-1\right)^2} - \frac{16}{\left(8b-1\right)^3} \\ &= 2b\left(1-\frac{64}{\left(8b-1\right)^3}\right) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{4}{\left(8b-1\right)} = 1 \Rightarrow b \\ &= \frac{5}{8} \Rightarrow a = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Ta có bảng biến thiên như sau:

x		$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{8}$		$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+\infty$	$\searrow$	$\frac{125}{64}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy GTNH của $AB = \sqrt{\dfrac{125}{64}} = \dfrac{5}{8}\sqrt{5}(km)$.

2. Từ O người ta cũng muốn làm một con đường hiện đại tới M. Họ chọn một điểm K trên OE và làm con đường mới từ M đến K sau đó nâng cấp con đường từ K đến O. Hỏi vị trí của K cách O bao nhiêu để để chi phí làm con đường này thấp nhất. Biết trên mỗi km đường chi phí làm đường mới bằng $\dfrac{5}{4}$ lần chi phí nâng cấp đường cũ.

Giả sử K cách E một đoạn bằng $x(km)$ với $0 \leq x \leq 1$.

Ta có $MK = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{64}}, KO = 1 - x$;

Gọi chi phí nâng cấp đường trên $1km$ đường là r thì chi phí làm mỗi km đường mới là $\dfrac{5}{4}r$ vậy chi phí làm đoạn đường MKO là

$$C = \frac{5}{4}r.\sqrt{x^2 + \frac{1}{64}} + r\left(1 - x\right).$$

Ta có C thấp nhất khi hàm

$$g\left(x\right) = \frac{5}{4}.\sqrt{x^2 + \frac{1}{64}} + \left(1 - x\right)$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có

$$g'\left(x\right) = \frac{5}{4}.\frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{64}}} - 1$$

$$g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}.\frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{64}}} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{6}.$$

x	0		$\frac{1}{6}$		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{37}{32}$	$\searrow$	$\frac{105}{96}$	$\nearrow$	$\frac{5\sqrt{65}}{32}$

Khảo sát hàm $g\left(x\right)$ ta có hàm $g\left(x\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \dfrac{1}{6}$. Vậy điểm K cần tìm cách O là $KO = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}(km)$.

Bài 4.2 (ĐH Tây Bắc)**.** 1. Hàm f bị chặn trên $[a, +\infty)$.
Theo giả thiết, luôn tồn tại $b > a$ sao cho

$$|f(x) - c| \leq 1, \forall x > b$$

Vậy $|f(x)| \leq 1 + |c|$ khi $x > b$.
Mặt khác do f liên tục trên $[a, b]$ nên f bị chặn trên $[a, b]$. Đặt $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| < +\infty$.
Từ đó ta được

$$|f(x)| \leq \max\{M, 1 + |c|\}, \forall x \in [a, +\infty).$$

2. Hàm f liên tục đều trên $[a, +\infty)$.
Do giả thiết $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_0 > a$ sao cho

$$|f(x) - c| < \varepsilon/3, \forall x \geq x_0.$$

Vì f liên tục trên $[a, x_0]$ nên f liên tục đều trên đoạn này. Vậy tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3, \forall x, \in [a, x_0].$$

Tiếp theo lấy $x, y \in [a, +\infty)$ sao cho $|x - y| < \delta$. Không mất tính tổng quát, giả sử $x < y$. Khi đó ta có
i) Nếu $x, y \in [a, x_0]$ thì theo trên bởi tính liên tục đều trên $[a, x_0]$ ta có $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3 < \varepsilon$;
2i) Nếu $x, y \geq x_0$ thì

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - c| + |f(y) - c| < 2/3\varepsilon < \varepsilon;$$

3i) Nếu $x \in [a, x_0], y > x_0$ thì

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y)| < 2/3\varepsilon < \varepsilon.$$

Vậy f liên tục đều trên $[a, +\infty)$.
3. Nếu $c > f(a)$ thì tồn tại một điểm $x_0 \in [a, +\infty)$ sao cho $f(x_0) = \inf\limits_{x \in [a, +\infty)} f(x)$.
Vì $f(a) < c$ nên tồn tại $b > a$ sao cho $f(x) > f(a)$ với mọi $x \geq b$.
Mặt khác do hàm f liên tục trên $[a, b]$ nên tồn tại $x_0 \in [a, b]$ sao cho $f(x_0) = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.
Khi đó rõ ràng

$$f(x_0) \leq f(a) < f(x), \forall x \geq b.$$

Vậy ta được

$$f(x_0) = \inf_{x \in [a,b]} f(x).$$

Bài 4.3 (ĐH Tây Bắc). 1. Giả sử ông A cần chiếc bể có thể tích là $10m^3$, cho biết giá thành khi xây các mỗi m^2 các mặt đáy và các mặt bên trong lòng bể tương ứng lần lượt là 700.000đ và 500.000đ.
a) Tính tổng chi phí ông A bỏ ra để xây chiếc bể theo chiều dài cạnh x.
Ta gọi chiều cao của bể là $y > 0$ thì theo giả thiết $x^2y = 10$, do đó ta có $y = \dfrac{10}{x^2}$.
Theo giả thiết về giá thành khi xây các mỗi m^2 các mặt đáy và các mặt bên trong lòng bể, ta được hàm chi phí

$$C(x) = 2.7.x^2 + 5.4.x.\frac{10}{x^2} = 14x^2 + \frac{200}{x} \text{ đơn vị } 100.000 \text{ đ}, x \geq 1.$$

b) Tìm kích thước của chiếc bể để chi phí xây dựng mà ông A bỏ ra để xây bể là nhỏ nhất.
Bài toán tương đương với việc tìm giá trị nhỏ nhất của $C(x), x \geq 1$.
Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được

$$C(x) = 14x^2 + \frac{200}{x} = 14x^2 + \frac{100}{x} + \frac{100}{x} \geq 3\sqrt[3]{14x^2.\frac{100}{x}.\frac{100}{x}} = 300\sqrt{14}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt[3]{\dfrac{50}{7}}$.
2. Sau khi xây xong bể, ông A đo thấy tổng diện tích xung quanh mặt trong của bể là $150m^2$.
a) Hãy tính thể tích V của bể thông qua chiều dài cạnh x.
Ta tiếp tục gọi y là chiều cao của bể. Khi đó ta có diện tích xung quanh bên trong bể là

$$S = 2x^2 + 4xy.$$

Do $S = 150$ nên $y = \dfrac{x}{2}(\dfrac{75}{x} - x)$.
Từ đó thể tích của bể là $V = V(x) = \dfrac{x}{2}(75 - x^2)$.
b) Tìm thể tích V và thể tích lớn nhất của bể có thể đạt được.
Để tìm miền biến thiên của V theo x, ta tìm miền biến thiên của x.
Do $y = \dfrac{x}{2}(\dfrac{75}{x} - x) > 0, x \geq 1$ nên $x \in [1, 5\sqrt{3})$.
Lập bảng biên thiên đối với hàm thể tích $V = V(x), x \in [1, 5\sqrt{3})$ ta được $V_{\max} = V(5) = 125$.

Bài 4.4 (ĐH Tây Bắc). 1. Phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm khác 0 và 1 trên I.

Thật vậy, với mọi $x \in (0;1]$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{f(x)}{x} \to f'(0) = 1 > 0$ khi $x \to 0^+$. Vậy tồn tại $\alpha \in (0;1)$ đủ nhỏ để $\forall x \in (0;\alpha), f(x) > 0$. Đặc biệt ta chọn được $f(\dfrac{\alpha}{2}) > 0$.

Tương tự, với mọi $x \in [0;1)$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{f(x)}{x-1} \to f'(1) = 1 > 0$ khi $x \to 1^-$. Vậy tồn tại $\beta \in (0;1)$ đủ nhỏ để $\forall x \in (1-\beta;1), f(x) < 0$. Đặc biệt ta chọn được $f(1-\dfrac{\beta}{2}) > 0$ (ở đây ta có thể chọn α, β đủ nhỏ để $\dfrac{\alpha}{2} < 1 - \dfrac{\beta}{2}$).
Do f khả vi nên f liên tục trên I, áp dụng định lý giá trị trung gian cho hàm liên tục trên đoạn $[\dfrac{\alpha}{2}, 1-\dfrac{\beta}{2}]$, ta tìm được $c \in (\dfrac{\alpha}{2}; 1-\dfrac{\beta}{2}) : f(c) = 0$.
2. Phương trình $f'(x) = 0$ luôn có ít nhất 2 nghiệm phân biệt trên I.
Do hàm f khả vi liên tục trên I và $0 < c < 1$ thuộc khoảng mở I nên f thỏa mãn các điều kiện của Định lý Rolle. Khi đó áp dụng Định lý Rolle lần lượt vào các đoạn $[0;c]$ và $c;1]$ (bởi $f(0) = f(c) = f(1) = 0$) ta có $\exists c_1 \in (0;\dfrac{\alpha}{2}) : f'(c_1) = 0$ và tồn tại $c_2 \in (1-\dfrac{\beta}{2};1) : f'(c_2) = 0$. Từ đó có điều phải chứng minh.

Bài 4.5 (ĐH Đồng Tháp)**.** Đặt xe 1 là xe ôtô xuất phát từ A và xe 2 là xe ôtô xuất phát từ B. Gọi $f(t), g(t)$ lần lượt là quãng đường từ A đến hai xe. Gọi s là độ dài quãng đường AB và t_0 là thời gian hai xe đi hết quãng đường. Đặt $h(t) := f(t)+g(t)$. Khi đó ta có $h(0) = s, h(t_0) = s$. Áp dụng định lí Rolle ta có sự tồn tại của một điểm $c \in (0,t_0)$ sao cho $h'(c) = 0$, nghĩa là $f'(c) = -g'(c)$. Chú ý rằng hàm số vận tốc của xe 1 và xe hai lần lượt là $v_1(t) = f'(t)$ và $v_2(t) = g'(t)$. Do đó tại thời điểm c hai xe có cùng độ lớn về vận tốc nhưng ngược chiều nhau.

Bài 4.6 (CĐ Sư phạm Nam Định)**.** a) (2 điểm) Gọi E là chân đường vuông góc từ D xuống AB. Khi đó C sẽ nằm giữa A và E.

$$AE = \sqrt{L^2-h^2}, CD = \frac{h}{\sin\alpha}, AC = AE - CE = \sqrt{L^2-h^2} - \frac{h}{\tan\alpha}.$$

Vậy $S = AC + CD = \sqrt{L^2-h^2} - h.\cot\alpha + \dfrac{h}{\sin\alpha}$.

b) (4 điểm).

$$T(\alpha) = \frac{AC}{v_1} + \frac{CD}{v_2} = \frac{\sqrt{L^2-h^2} - h.\cot\alpha}{v_1} + \frac{h}{v_2.\sin\alpha} \text{ với } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

$$T'(\alpha) = \frac{h}{v_2\sin^2\alpha}.\left(\frac{v_2}{v_1} - \cos\alpha\right).$$

Đặt $c = \arccos \dfrac{v_2}{v_1} \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và $T'(c) = 0$.

Vì hàm $\cos$ nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên:

nếu $0 < \alpha < c$ thì $T'(\alpha) < 0$,

nếu $c < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ thì $T'(\alpha) > 0$.

Vậy $T(\alpha) \to \min$ khi $\alpha = c = \arccos \dfrac{v_2}{v_1}$.

Bài 4.7 (ĐH Phạm Văn Đồng). Đặt $g(x) = f(x).\dfrac{x+1}{e^x}$. Khi đó

$$\begin{cases} g(0) = g(1) = 0 \\ g(x) \text{ liên tục trên } [0;1] \text{ và có đạo hàm trên } (0;1) \\ g'(x) = \dfrac{f'(x)(x+1) - xf(x)}{e^x} \end{cases}$$

nên theo định lý Rolle thì tồn tại $c \in (0;1)$ sao cho $g'(c) = 0$.

Bài 4.8 (ĐH Thủy lợi Hà Nội). + Giả sử $0 < x_1 < x_2 < 1$ là hai nghiệm của phương trình $f(x) = 2019$, khi đó $f(x_1) = f(x_2) = 2019$.
+ Áp dụng Định lý Rolle cho $f(x)$ trên $[x_1; x_2] \subset [0;1]$: khi đó tồn tại $c_0 \in (x_1; x_2)$ sao cho $f'(c_0) = 0$.
+ Do f liên tục và $f(x) \geqslant 2019,\ \forall x \in [0;1]$ nên $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_1 và x_2, cùng với tính khả vi ta có $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.
+ Áp dụng Rolle đối với $f'(x)$ lần lượt trong $[x_1; c_0]$ và $[c_0; x_2]$ sẽ tồn tại $c_1 \in (x_1; c_0),\ c_2 \in (c_0; x_2)$ sao cho $f''(c_1) = f''(c_2) = 0$.
+ Lại áp dụng Rolle với f'' trong $[c_1; c_2]$, sẽ tồn tại $c \in (c_1; c_2) \subset (0;1)$ sao cho $f'''(c) = 0$.

Bài 4.9 (ĐH SPKT Vĩnh Long). Đặt $g(x) = (x-1)f(x)e^{-2019x}$, thì g liên tục trên $[1, 2019]$, khả vi trong khoảng $(1, 2019)$, và $g(1) = g(2019) = 0$.
Do đó, theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (1, 2019)$ sao cho $g'(c) = 0$
Mà $g'(x) = ((x-1)f'(x) + f(x) - 2019(x-1)f(x))\, e^{-2019x}$
Nên $((c-1)f'(c) + f(c) - 2019(c-1)f(c))\, e^{-2019c} = 0$

Suy ra $f'(c) = \left(\dfrac{2019c - 2020}{c-1}\right) f(c)$.

Bài 4.10 (ĐH Nha Trang). $\exists a \in (0;\,1):\ f(a) = \dfrac{1}{2019}$, $\exists b \in (a;\,1):\ f(b) = \dfrac{5}{2019}$.

Theo định lý Lagrange

$$\exists c_1 \in (0;\, a),\, c_2 \in (a;\, b),\, c_3 \in (\,b, 1) :\ f'(c_1) = \frac{f(a)-f(0)}{a} = \frac{1}{2019a},$$
$$f'(c_2\,) = \frac{4}{2019\,(b-a)},\ f'(c_3) = \frac{2014}{2019\,(b-1)}.$$

Từ đây ta có đpcm.

Bài 4.11 (ĐH BK Tp HCM). Đầu tiên ta chứng minh f không giảm trên Q_+^*. Lấy $x, y \in Q_+^*, x < y \Rightarrow x = \dfrac{m}{p}; y = \dfrac{n}{p}$ với $m, n, p \in \mathbb{N}, m < n$. Khi đó

$$f(x) = f\left(m \cdot \frac{1}{p}\right) \leqslant f\left(n \cdot \frac{1}{p}\right) = f(y).$$

Bây giờ lấy $x, y \in (0, +\infty), x < y$. Khi đó tồn tại 2 dãy số hữu tỷ $\{r_n\}, \{q_n\} \subset (0, +\infty) : \lim\limits_{n\to\infty} r_n = x, \lim\limits_{n\to\infty} q_n = y$. Vì $x < y \Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_0$, ta có $r_n < q_n$. Theo phần trên: $f(r_n) \leqslant f(q_n), \forall n \geqslant N_0$. Cho $n \to +\infty$, vì f liên tục $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) = f(x) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} f(q_n) = f(y)$ (đpcm).

Bài 4.12 (ĐH GTVT). Viết khai triển Taylor của f tại a và b, ta có

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{f''(c_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \\ &= f(a) + \frac{f''(c_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,\ \text{với } c_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(b) + \frac{f'(b)}{1!}\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{f''(c_2)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \\ &= f(b) + \frac{f''(c_2)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,\ \text{với } c_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Từ (6) và (7), ta có

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \frac{|f''(c_2) - f''(c_1)|}{2} \\ &\le \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \max\{|f''(c_1)|, |f''(c_2)|\}. \end{aligned}$$

Đặt $|f''(c)| = \max\{|f''(c_1)|, |f''(c_2)|\}$, ta có $c \in (a, b)$ thỏa mãn

$$|f''(c)| \ge \frac{4}{(b-a)^2}\, |f(b) - f(a)|\,.$$

Bài 4.13 (ĐH Hàng Hải). Giả sử $0 < x_2 - x_1 < \pi$. Ta chứng minh $g(x_1)$ cùng dấu với $g(x_2)$. Giả sử ngược lại, $g(x_1)$ trái dấu với $g(x_2)$. Vì $0 < x_2 - x_1 < \pi$ nên tồn tại x sao cho

$$x < x_1 < x_2 < x + \pi. \tag{8}$$

Đặt

$$h(t) = f^{'}(x+t)sint - f(x+t)cost.$$

Ta có

$$h^{'}(t) = \Big(f^{''}(x+t) + f(x+t)\Big)\, sint,$$

hay

$$h^{'}(t) = g(x+t)sint. \tag{9}$$

Đặt $t_i = x_i - x, i = \overline{1,2}$. Do (8) ta có

$$0 < t_1 < t_2 < \pi. \tag{10}$$

Từ (9) suy ra

$$h^{'}(t_i) = g(x+t_i)sint_i,$$

hay

$$h^{'}(t_i) = g(x_i)sint_i, i = \overline{1,2}.$$

Do (10) ta có $sint_i > 0$, do đó $h^{'}(t_i)$ cùng dấu với $g(x_i), i = \overline{1,2}$. Mà $g(x_1)$ trái dấu với $g(x_2)$, suy ra $h^{'}(t_1)$ trái dấu với $h^{'}(t_2)$. Theo định lý Darboux, tồn tại $c \in (t_1; t_2) \subset (0; \pi)$ sao cho $h^{'}(c) = 0$ hay $g(x+c)sinc = 0$. Từ đó ta có $g(x+c) = 0$ vì $sinc \neq 0$. Mâu thuẫn giả thiết của bài toán.
Giả sử $a < b$. Chia đoạn $[a; b]$ thành n đoạn nhỏ bằng nhau bởi các điểm chia

$$a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b,$$

sao cho độ dài mỗi đoạn nhỏ nhỏ hơn π . Vì $0 < a_i - a_{i-1} < \pi$ nên theo chứng minh trên $g(a_{i-1})$ cùng dấu với $g(a_i)$ với mọi $i = \overline{1,n}$. Từ đó suy ra $g(a_0)$ cùng dấu với $g(a_1)$, hay $g(a)$ cùng dấu với $g(b)$. Bài toán được chứng minh.

Bài 4.14 (ĐH KT Hà Nội). Đặt $b_k = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{a_1 + a_2 + ... + a_{2019}}$ với $k = 1, 2, \ldots, 2019$ và $b_0 = 0$.
Áp dụng định lý giá trị trung bình trên $[b_k; b_{k+1}]$ với $k = 0, 1, \ldots, 2018$, tồn tại $c_{k+1} \in (b_k; b_{k+1})$ sao cho $f'(c_{k+1}) = \dfrac{f(b_{k+1}) - f(b_k)}{b_{k+1} - b_k}$.
Suy ra $\sum\limits_{k=1}^{2019} a_k f'(c_k) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{2019}).(f(1) - f(0))$.
Áp dụng định lý giá trị trung bình trên $[0; 1]$, tồn tại $c_0 \in (0; 1)$ sao cho $f(1) - f(0) = f'(c_0)$.

Bài 4.15 (ĐH KT Hà Nội). — Thời gian cần thiết là

$$t = \frac{\sqrt{400 + x^2} + \sqrt{400 + z^2}}{30} + \frac{y}{50}.$$

Sử dụng bất đẳng thức

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2} \geq \sqrt{(a+b)^2 + (x+y)^2}$$

thì

$$t \geq \frac{\sqrt{(x+z)^2 + 40^2}}{30} + \frac{y}{50} = \frac{\sqrt{(100-y)^2 + 1600}}{30} + \frac{y}{50} = g(y).$$

— Khảo sát hàm số $g(y)$ tìm được $t_{\min} = \dfrac{46}{15}$ khi $y = 70$ km.

5 PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Bài 5.1 (ĐH Tây Bắc). 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ với $x \in \mathbb{R}$.
Xét $f(x) = 2x - [x]$ trên $\mathbb{R}$.
Với $x_0 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow n < x_0 < n + 1$ với $n \in \mathbb{Z}$. Ta luôn tìm được $\varepsilon > 0$ sao cho $n < x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon < n + 1 \Rightarrow [x_0 - \varepsilon] = [x_0] = [x_0 + \varepsilon] = n$.
Vì vậy ta có $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 2x_o - n = f(x_0)$. Vậy $f(x)$ liên tục với $x_0 \notin \mathbb{Z}$.
Với $x_0 \in \mathbb{Z}$ ta có

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 2x_o - x_o = x_0 = f(x_0) \\ &\lim_{x \to x_0^-} f(x) = 2x_o - (x_o - 1) = x_0 + 1 \neq f(x_0) \end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ chỉ liên tục phải tại x_0, không liên tục trái $x_0 \in \mathbb{Z}$ nên $f(x)$ gián đoạn tại $x_0 \in \mathbb{Z}$.

2. Chứng minh hàm số $f(x)$ khả tích trên đoạn $[0, 3]$ và tính $\int\limits_0^3 f(x)dx$.

Trên đoạn $[0, 3]$ theo ý 1, thì $f(x)$ chỉ gián đoạn tại 1,2 và 3 do đó $f(x)$ khả tích trên $[0; 3]$.
Ta có

$$\begin{aligned} \int\limits_0^3 f(x)dx &= \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_1^2 f(x)dx + \int\limits_2^3 f(x)dx \\ &= \int\limits_0^1 2xdx + \int\limits_1^2 (2x-1)dx + \int\limits_2^3 (2x-2)dx \\ &= 1 + 2 + 3 = 6 \end{aligned}$$

Bài 5.2 (ĐH Tây Bắc)**.** Đặt $M = \max\limits_{0\le x\le 1} |f'(x)|$. Khi đó ta có $-M \le f'(x) \le M, \forall x \in [0,1]$.
Do $f > 0$ nên nhân hai vế bất đẳng thức trên với $f(x)$ ta được

$$-Mf(x) \le f'(x)f(x) \le Mf(x), \forall x \in [0,1].$$

Lấy tích phân bất đẳng thức trên từ 0 tới x ta được

$$-M\int\limits_0^x f(t)dt \le \frac{1}{2}f^2(x) - \frac{1}{2}f^2(0) \le M\int\limits_0^x f(t)dt, \forall x \in [0,1].$$

Tiếp tục nhân các vế bất đẳng thức trên với $f(x)$ ta được

$$-Mf(x)\int\limits_0^x f(t)dt \le \frac{1}{2}f^3(x) - \frac{1}{2}f^2(0)f(x) \le Mf(x)\int\limits_0^x f(t)dt, \forall x \in [0,1].$$

Bây giờ ta tích phân trên $[0,1]$ bất đẳng thức kép cuối cùng trên đây ta được

$$-M\left(\int\limits_0^x f(t)dt\right)^2 \le \int\limits_0^1 f^3(x)dx - f^2(0)\int\limits_0^1 f(x)dx \le M\left(\int\limits_0^x f(t)dt\right)^2, \forall x \in [0,1].$$

Từ đó

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_0^1 f^3(x)dx - f^2(0)\int\limits_0^1 f(x)dx\right| &\le M\left(\int\limits_0^1 f(t)dt\right)^2\\ &= \max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\left(\int\limits_0^1 f(t)dt\right)^2.\end{aligned}$$

Bài 5.3 (ĐH Đồng Tháp)**.** Đặt $g(x) = e^{1-x^2}f(x)$. Khi đó $g(1) = f(1)$ và

$$g'(x) = e^{1-x^2}(f'(x) - 2xf(x))\ \forall x \in [0,1].$$

Áp dụng định lí giá trị trung gian của tích phân của hàm g trên đoạn $[0, \frac{1}{3}]$, ta suy ra tồn tại $x_0 \in [0, \frac{1}{3}]$ sao cho $g(x_0) = 3\int_0^{\frac{1}{3}} g(x)dx = f(1) = g(1)$. Áp dụng định lý Rolle cho hàm g trên $[x_0, 1]$, ta suy ra tồn tại $c \in (x_0, 1)$ sao cho $g'(c) = 0$ nghĩa là

$$f'(c) = 2cf(c).$$

Bài 5.4 (CĐ Sư phạm Nam Định). Đặt $F(t) = \int\limits_0^t f(x)dx$.

Do đó $F'(t) = f(t)$ và $F(0) = 0$, $F'(1) = f(1) = 0$.
Đặt $g(t) = \sin(2019F'(t)).F(t)$ trên đoạn $[0, 1]$.
Do $f(t)$ khả vi liên tục trên $[0, 1]$ nên $g(t)$ khả vi liên tục trên đoạn $[0, 1]$.
$g'(t) = F'(t).\sin(2019F'(t)) + 2019F(t).F"(t).\cos(2019F'(t))$
$g(0) = F(0).\sin(2019F'(0)) = 0$, $g(1) = \sin(2019F'(1)).F(1) = 0$ (Vì $F'(1) = F(0) = 0$)
Vậy hàm $g(t)$ thỏa mãn các điều kiện của định lý Rolle.
Vậy tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $g'(c) = 0$.
Do đó $F'(c).\sin(2019F'(c)) + 2019F(c).F"(c).\cos(2019F'(c)) = 0$.
Nếu $\cos(2019F'(c)) = 0$ thì $F'(c) = 0$ hoặc $\sin(2019F'(c)) = 0$. Cả 2 trường hợp thì $\sin(2019F'(c)) = 0$. Mâu thuẫn vì $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ với mọi $a \in \mathbb{R}$.
Vậy $\cos(2019F'(c)) \neq 0$. Vậy $F'(c).\tan(2019F'(c)) = -2019F(c).F"(c)$.

Do đó ta có $f(c).\tan(2019f(c)) = -2019f'(c).\int\limits_0^c f(x)dx$.

Bài 5.5 (CĐ Sư phạm Nam Định). a) Theo giả thiết ta có $f'(x) \leq 6$ và $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [0, 1]$ và $f(1) \geq 0$. Do đó $2f'(x).f(x) \leq 12f(x)$.
Lấy $t \in [0, 1]$ bất kỳ và ta có

$$\int\limits_0^t 2f'(x)f(x)dx \leq \int\limits_0^t 12f(x)dx.$$

Do đó

$$\int\limits_0^t 2f(x)d(f(x)) \leq 12\int\limits_0^t f(x)dx.$$

Tương đương với $f^2(x)\Big|_0^t \leq 12\int\limits_0^t f(x)dx$. Hay

$$f^2(t) - f^2(0) \leq 12\int\limits_0^t f(x)dx.$$

$\Leftrightarrow f^2(t) \leq 12\int\limits_0^t f(x)dx.$

Cho $t = 1$ ta được $f^2(1) \leq 12.\int\limits_0^1 f(x)dx = 4$. Do đó $0 \leq f(1) \leq 2$.

b) Theo câu a) ta có $f^3(t) \leq 12f(t).\int\limits_0^t f(x)dx \quad (1)$.

Đặt $F(t) = \int\limits_0^t f(x)dx$, do đó $F'(t) = f(t)$ và $F(0) = 0$, $F(1) = 1/3$, $F'(0) = f(0) = 0$.

Từ (1) ta có $\int\limits_0^1 f^3(t)dt \leq 12\int\limits_0^1 F'(t).F(t)dt$.

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f^3(x)dx \leq 12\int\limits_0^1 F(x)d(F(x)) = 6F^2(x)\Big|_0^1 = 6F^2(1) - 6F^2(0) = \dfrac{2}{3}$.

Bài 5.6 (ĐH Phạm Văn Đồng)**.** 1. Với mọi $x \neq 0$, $\varphi(x)$ liên tục nên $\int_0^x \varphi(t)dt$ khả vi tại x, và $e^{\frac{1}{x^2}}$ khả vi với mọi $x \neq 0$. Do đó $f(x)$ khả vi với mọi $x \neq 0$. Khi đó, với mọi $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}\int_0^x \varphi(t)dt + e^{\frac{1}{x^2}}\varphi(x) \\ &= -\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}\int_0^x \varphi(t)dt + 1. \end{aligned}$$

2. Với mọi $t \neq 0$, ta có $\varphi'(t) = \dfrac{2}{t^3}e^{-\frac{1}{t^2}} = \dfrac{2}{t^3}\varphi(t)$. Từ đó $2\varphi(t) = t^3\varphi'(t)$. Do đó, lấy tích phân và sử dụng công thức tích phân từng phần, với mọi $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} 2\int_0^x \varphi(t)dt = \int_0^x t^3\varphi'(t)dt &= \int_0^x t^3 d\left(\varphi(t)\right) \\ &= t^3\varphi(t)\Big|_0^x - 3\int_0^x t^2\varphi(t)dt \\ &= x^3\varphi(x) - 3\int_0^x t^2\varphi(t)dt. \end{aligned}$$

Từ đó, suy ra đẳng thức cần chứng minh.

Ta có, với mọi $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{e^{\frac{1}{x^2}}\displaystyle\int_0^x \varphi(t)dt}{x} \\
&= \frac{e^{\frac{1}{x^2}}\left(\dfrac{x^3}{2}\varphi(x) - \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^x t^2\varphi(t)dt\right)}{x} \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}\frac{\displaystyle\int_0^x t^2\varphi(t)dt}{x\varphi(x)}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Nhận thấy $0 \leq t \leq x$ thì $0 = \varphi(0) \leq \varphi(t) \leq \varphi(x)$. Do đó

$$0 \leq \int_0^x t^2\varphi(t)dt \leq \int_0^x t^2\varphi(x)dt = \frac{x^3}{3}\varphi(x).$$

Từ đó

$$0 \leq \frac{\displaystyle\int_0^x t^2\varphi(t)dt}{x\varphi(x)} \leq \frac{x^2}{3}. \tag{12}$$

Chính vì thế, (11) và (12) cho ta đạo hàm phải $f'_+(0) = 0$.

Mặc khác, vì f là hàm lẻ nên dễ dàng ta cũng có đạo hàm trái $f'_-(0) = 0$. Từ đó, ta kết luận điều phải chứng minh.

Có thể sử dụng quy tắc L'Hospital cùng với $x^3\varphi'(x) = 2\varphi(x)$, với mọi $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^x t^2\varphi(t)dt}{x\varphi(x)} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\varphi(x)}{\varphi(x) + x\varphi'(x)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\varphi(x)}{\varphi(x) + \frac{2}{x^2}\varphi(x)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4}{x^2+2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3. Sử dụng quy tắc L'Hospital cùng với $x^3\varphi'(x) = 2\varphi(x)$, với mọi $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \varphi(t)dt}{x^3\varphi(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{3x^2\varphi(x)+x^3\varphi'(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{3x^2\varphi(x)+2\varphi(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{3x^2+2}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Bài 5.7 (ĐH Phạm Văn Đồng)**.** Sử dụng công thức tích phân từng phần,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\sin(nx)dx &= -\frac{1}{n}\int_a^b f(x)d\left(\cos(nx)\right)\\
&= -\frac{1}{n}f(x)\cos(nx)\Big|_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos(nx)dx\\
&= \frac{1}{n}\left(f(a)\cos(na) - f(b)\cos(nb)\right) + \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos(nx)dx.
\end{aligned}$$

Vì f và f' liên tục trên đoạn $[a,b]$ nên theo định lý Weierstrass, f và f' bị chặn trên đoạn $[a,b]$. Tức là, tồn tại $M > 0$ sao cho $|f(x)| \leq M$ và $|f'(x)| \leq M$, với mọi $x \in [a,b]$. Do đó

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(nx)dx\right| \leq \frac{1}{n}\left(|f(a)| + |f(b)|\right) + \frac{M(b-a)}{n}.$$

Từ đó ta kết luận

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)dx = 0.$$

Bài 5.8 (ĐH Thủy lợi Hà Nội)**.** Áp dụng Bất đẳng thức Schwarz ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}} = \left|\int_0^1 \sqrt{(1+x^2)^3}f(x)dx\right| &= \left|\int_0^1 (1+x^2)^2 f(x)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\right|\\
&\leqslant \left(\int_0^1 (1+x^2)^4 f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\int_0^1 (1+x^2)^2(1+x^2)^2 f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}$$

$$< 2\left(\int_0^1 (1+x^2)^2 f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Từ đó: $\displaystyle\int_0^1 (1+x^2)^2 f^2(x)dx > \frac{1}{2\pi}$.

Bài 5.9 (ĐH Thủy lợi Hà Nội). + Giả sử tồn tại hàm f khả vi trên $[0;2]$ và thỏa mãn các tính chất đã nêu.
+ Với $x \in (0;2)$, áp dụng Định lý Lagrange cho $f(x)$ trong $[0;x]$: tồn tại $c_1 \in (0;x) : f'(c_1) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)-1}{x} \geqslant -1$, từ đó suy ra $f(x) \geqslant 1-x$
+ Tương tự, tồn tại $c_2 \in (x;2) : \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{f(x)-1}{x-2} = f'(c_2) \leqslant 1$, và từ đó $f(x) \geqslant x-1$.
+ Kết hợp lại ta có: với $x \in [0;2]$ thì $f(x) \geqslant |x-1|$, từ đó

$$\int_0^2 f(x)dx \geqslant \int_0^2 |x-1|dx = \int_0^1 (-x+1)dx + \int_1^2 (x-1)dx = 1.$$

+ Từ tính liên tục của f và giả thiết $|\displaystyle\int_0^2 f(x)dx| \leqslant 1$ suy ra $|\displaystyle\int_0^2 f(x)dx| = 1$, điều này xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = |x-1|$. Tuy nhiên hàm $f(x) = |x-1|$ không khả vi tại $x = 1$, vậy nên không thể tồn tại hàm f thỏa mãn các tính chất đã nêu.

Bài 5.10 (ĐH Thủy lợi Hà Nội). Ta có

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}dx$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(1-x)}{f(x)+f(1-x)}dx = \frac{1}{2}.$$

Bài 5.11 (ĐH SPKT Vĩnh Long). Ta có

$$\begin{aligned}
3 = \int\limits_0^1 (x+f'(x))^2 dx &= \int\limits_0^1 x^2dx + 2\int\limits_0^1 xf'(x)dx + \int\limits_0^1 (f'(x))^2dx \\
&= \frac{1}{3} + 2\int\limits_0^1 xf'(x)dx + \frac{2}{3} \\
&= 1 + 2\int\limits_0^1 xf'(x)dx
\end{aligned}$$

Hay $\int\limits_0^1 xf'(x)dx = 1$. Xét $\int\limits_0^1 xf'(x)dx$. Đặt

$$\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases}$$

Dẫn đến

$$\begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

Ta được

$$1 = \int\limits_0^1 xf'(x)dx = [xf(x)]_0^1 - \int\limits_0^1 f(x)dx = -\int\limits_0^1 f(x)dx.$$

Suy ra $\int\limits_0^1 f(x)dx = -1$.

Bài 5.12 (ĐH Nha Trang)**.** $|f(x).f'(x)| = \left|\int\limits_0^x f'(t)dt\right|.|f'(x)| \le \int\limits_0^x |f'(t)|\,dt.|f'(x)|$.

$\int\limits_0^{2019} |f(x).f'(x)|dx \le \int\limits_0^{2019} \left(\int\limits_0^x |f'(t)|\,dt.|f'(x)|\right)d\,x = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^x |f'(t)|\,dt\right)^2\Bigg|_0^{2019}$.

$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{2019} |f'(x)|\,dx\right)^2 \le \frac{2019}{2}\int\limits_0^{2019} (f'(x))^2 dx$.

Bài 5.13 (ĐH GTVT)**.** a)

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-x}^{x} \frac{f(t)}{1+a^t}dt &= \int\limits_{-x}^{0} \frac{f(t)}{1+a^t}dt + \int\limits_0^x \frac{f(t)}{1+a^t}dt \\
&= -\int\limits_x^0 \frac{f(-u)}{1+a^{-u}}du + \int\limits_0^x \frac{f(t)}{1+a^t}dt \\
&= \int\limits_0^x \frac{f(u)a^u}{1+a^u}du + \int\limits_0^x \frac{f(t)}{1+a^t}dt \\
&= \int\limits_0^x f(t)dt.
\end{aligned}$$

b) Áp dụng công thức phần a), ta có $I_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+2019^x)\sin x} dx = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx.$

Với $n \geq 2$, thì

$$\begin{aligned}\sin(nx) &= \sin(nx-2x)\cos 2x + \cos(nx-2x)\sin 2x \\ &= \sin(nx-2x)(1-2\sin^2 x) + 2\cos(nx-2x)\sin x.\cos x \\ &= \sin(nx-2x) + 2\sin x\left[\cos(nx-2x)\cos x - \sin(nx-2x)\sin x\right] \\ &= \sin(nx-2x) + 2\sin x\cos(nx-x).\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}I_n &= \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx \\ &= \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{\sin(nx-2x)}{\sin x} + 2\cos(nx-x) \right) dx \\ &= I_{n-2} + \frac{2}{n-1}\sin(xn-x)\bigg|_0^{\pi} = I_{n-2},\ \forall n \geq 2.\end{aligned}$$

Vậy

$$I_n = \begin{cases} I_0 = 0 & \text{nếu } n = 2k, \\ I_1 = \pi & \text{nếu } n = 2k+1. \end{cases}$$

Bài 5.14 (ĐH GTVT). Do f liên tục trên $[0,1]$ nên tồn tại $c \in [0,1]$ sao cho $|f(c)| = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| = M$. Với $u > 0$, ta có

$$\left(\int\limits_0^1 |f(x)|^u dx \right)^{\frac{1}{u}} \leq \left(\int\limits_0^1 M^u dx \right)^{\frac{1}{u}} = M.$$

Do f liên tục tại c nên với $\forall \epsilon > 0$, tồn tại $[\alpha, \beta] \subset [0,1]$ sao cho $|f(x)| - |f(c)| \geq -\epsilon, \forall x \in [\alpha, \beta]$. Vậy

$$|f(x)| \geq M - \epsilon, \forall x \in [\alpha, \beta].$$

Khi đó

$$\left(\int_0^1 |f(x)|^u dx\right)^{\frac{1}{u}} \geq \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^u dx\right)^{\frac{1}{u}}$$
$$\geq \left(\int_\alpha^\beta (M-\epsilon)^u dx\right)^{\frac{1}{u}}$$
$$= (M-\epsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{u}}.$$

Cho $u \to +\infty$, ta được

$$(M-\epsilon) \leq \lim_{u\to+\infty} \left(\int_0^1 |f(x)|^u dx\right)^{\frac{1}{u}} \leq M, \forall \epsilon > 0.$$

Cho $\epsilon \to 0$, ta được

$$\lim_{u\to+\infty} \left(\int_0^1 |f(x)|^u dx\right)^{\frac{1}{u}} = M = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Bài 5.15 (ĐH Hàng Hải). Ta có các đồng nhất thức sau (dùng giả thiết b)):

$$\int_a^b \frac{(f(x))^{2020}}{(g(x))^{2019}}dx - \int_a^b \frac{(f(x))^{2019}}{(g(x))^{2018}}dx = \int_a^b \left[\frac{(f(x))^{2020}}{(g(x))^{2019}} - \frac{(f(x))^{2019}}{(g(x))^{2018}}\right] dx$$
$$= \int_a^b \left\{\frac{[(f(x))^{2019} - (g(x))^{2019}]}{(g(x))^{2019}}[f(x)-g(x)] + [f(x)-g(x)]\right\} dx$$
$$= \int_a^b \left\{\frac{[(f(x))^{2019} - (g(x))^{2019}]}{(g(x))^{2019}}[f(x)-g(x)]\right\} dx + \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$
$$= \int_a^b \left\{\frac{[(f(x))^{2019} - (g(x))^{2019}]}{(g(x))^{2019}}[f(x)-g(x)]\right\} dx.$$

Để ý rằng $[(f(x))^{2019} - (g(x))^{2019}][f(x)-g(x)] \geq 0 \quad (\forall x \in [a,b])$ và $a < b$ ta có:

$$\int_a^b \left\{\frac{[(f(x))^{2019} - (g(x))^{2019}]}{(g(x))^{2019}}[f(x)-g(x)]\right\} dx \geq 0.$$

Vậy:

$$\int_a^b \frac{(f(x))^{2020}}{(g(x))^{2019}}dx \geq \int_a^b \frac{(f(x))^{2019}}{(g(x))^{2018}}dx.$$

Bài 5.16 (ĐH KT Hà Nội). a) Đa thức $P(x) = A.(x-c)(d-x)+1$ với $0 < A < \min\left(\dfrac{1}{c.d}, \dfrac{1}{(1-c).(1-d)}\right)$, thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

b) Chỉ ra $\int\limits_0^1 f(x)x^n dx = 0$ với mọi số tự nhiên n. Suy ra $\int\limits_0^1 f(x).[Q(x)]^m dx = 0$ với $Q(x)$ là một đa thức bậc 2 bất kỳ và m là số tự nhiên bất kỳ.
Phản chứng tồn tại $c \in [0;1]$ sao cho $f(c) \neq 0$. Vì bài toán đúng với $f(x)$ thì cũng đúng với $-f(x)$ và ngược lại, do đó ta coi $f(c) > 0$.
Bởi tính liên tục của $f(x)$ trên $[0;1]$ và $f(c) > 0$ nên tồn tại a, b thỏa mãn $0 < a < b < 1$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in [a, b]$. Lấy c_1, c_2 thỏa mãn $a < c_1 < c_2 < b$. Áp dụng câu a), tìm được đa thức bậc hai $P(x)$ thỏa mãn $\min\limits_{x\in[c_1;c_2]} P(x) \geq 1 > P(x) \geq 0$ với mọi $x \in [0; c_1) \cup (c_2; 1]$. Theo tính chất hàm bậc hai ta có $\max\limits_{x\in[0;a]} P(x) \leq P(a) < 1$ và $\max\limits_{x\in[b;1]} P(x) \leq P(b) < 1$.
Mặt khác, với mỗi số tự nhiên $m \geq 1$, ta có

$$\begin{aligned}
0 = \int\limits_0^1 f(x)[P(x)]^m dx &= \int\limits_0^a f(x)[P(x)]^m dx + \int\limits_a^b f(x)[P(x)]^m dx + \int\limits_b^1 f(x)[P(x)]^m dx \\
&\geq \int\limits_0^a f(x)[P(x)]^m dx + \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)[P(x)]^m dx + \int\limits_b^1 f(x)[P(x)]^m dx \\
&\geq \int\limits_0^a f(x)[P(x)]^m dx + \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \int\limits_b^1 f(x)[P(x)]^m dx.
\end{aligned}$$

Ta lại có: với mỗi $m \geq 1$,

$$\int\limits_0^a |f(x)|[P(x)]^m dx \leq [P(a)]^m \int\limits_0^a |f(x)|dx,$$

và

$$\int\limits_b^1 |f(x)|[P(x)]^m dx \leq [P(b)]^m \int\limits_b^1 |f(x)|dx.$$

Vì khi $m \to +\infty$, ta có $[P(a)]^m \to 0$ và $[P(b)]^m \to 0$ nên $\int\limits_0^a f(x)[P(x)]^m dx \to 0$,

và $\int\limits_b^1 f(x)[P(x)]^m dx \to 0$ khi $m \to +\infty$.
Từ các kết quả trên, ta nhận được

$$0 \geq \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx.$$

Vì $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[c_1; c_2]$ nên $\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx > 0$. Điều này mẫu thuẫn với bất thẳng thức ngay trên. Suy ra $f(x) = 0$ với mọi $x \in [0; 1]$.

6 PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Bài 6.1 (ĐH SPKT Vĩnh Long)**.** Cho $x = -1$, ta được $f(-1) = 2019f(-1) + 2018$
Suy ra $f(-1) = -1$
Đạo hàm hai vế, ta được

$$f'(2019x + 2018) = f'(x)$$

Lần lượt thay x bởi $\dfrac{x-2018}{2019}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'\left(\frac{x-2018}{2019}\right) \\ &= f'\left(\frac{\frac{x-2018}{2019} - 2018}{2019}\right) = f'\left(\frac{x - 2019^2 + 1}{2019^2}\right) \\ &= ... \\ &= f'\left(\frac{x - 2019^n + 1}{2019^n}\right) \end{aligned}$$

Cho $n \to \infty$, ta được $f'(x) = f'(-1) = a = const$
Suy ra, $f(x) = ax + b$.
Mà $-1 = f(-1) = -a + b \Rightarrow b = a - 1$.
Nên $f(x) = ax + a - 1, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Kiểm tra lại ta thấy đúng.

Bài 6.2 (ĐH SPKT Vĩnh Long)**.** Ta có:

$$\begin{aligned}
0 \le \int_0^1 \left(e^{-\frac{1}{2}f(x)}f'(x)+2\right)^2 dx &= \int_0^1 e^{-f(x)}(f'(x))^2 dx + 4\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}f(x)}f'(x)dx + 4\int_0^1 dx \\
&= \int_0^1 e^{-f(x)}(f'(x))^2 dx - 8(e^{-\frac{1}{2}f(1)} - e^{-\frac{1}{2}f(0)}) + 4 \\
&= \int_0^1 e^{-f(x)}(f'(x))^2 dx - 4
\end{aligned}$$

Suy ra $\int_0^1 e^{-f(x)}(f'(x))^2 dx \ge 4$

Mà theo giả thiết $\int_0^1 e^{-f(x)}(f'(x))^2 dx \le 4$, nên suy ra

$$\int_0^1 e^{-f(x)}(f'(x))^2 dx = 4$$

Do đó $\int_0^1 \left(e^{-\frac{1}{2}f(x)}f'(x)+2\right)^2 dx = 0$ và $e^{-\frac{1}{2}f(x)}f'(x) = -2$
Hay $-2e^{-\frac{1}{2}f(x)} = -2x + C$
Mà $f(0) = 0$ nên $C = -2$.
Vậy, $f(x) = -2\ln(x+1)$.

Bài 6.3 (ĐH GTVT)**.** Từ giả thiết, với $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(x) - f\left(\frac{x}{2019}\right) &= \frac{x}{2019} \\
f\left(\frac{x}{2019}\right) - f\left(\frac{x}{2019^2}\right) &= \frac{x}{2019^2} \\
f\left(\frac{x}{2019^2}\right) - f\left(\frac{x}{2019^3}\right) &= \frac{x}{2019^3} \\
&\cdots \\
&\cdots \\
f\left(\frac{x}{2019^{n-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2019^n}\right) &= \frac{x}{2019^n}.
\end{aligned}$$

Cộng vế với vế, các đẳng thức trên, ta được

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2019^n}\right) = x\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2019}\right)^k.$$

Cho $n \to +\infty$, do f liên tục nên

$$f(x) - f(0) = x\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2019}\right)^n = x\frac{1}{2018}.$$

Vậy $f(x) = 2019 + \dfrac{x}{2018}, \forall x \in \mathbb{R}$.
Ngược lại, dễ dàng kiểm tra $f(x) = 2019 + \dfrac{x}{2018}, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Bài 6.4 (ĐH KT Hà Nội)**.** Từ giả thiết và áp dụng khai triển Taylor cho hàm số $f(x)$ tại $x = 0$, với mỗi $x \in (0; 1]$, tồn tại c nằm giữa 0 và x sao cho:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(c).\frac{x^2}{2}.$$

Suy ra $f(x) \leq \dfrac{2019}{4} + \dfrac{2019}{2}.x + 6057.\dfrac{x^2}{2}$ với mọi $x \in (0; 1]$. Vì $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ nên bất đẳng thức đúng cho mọi $x \in [0; 1]$.
Do đó, ta có $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \left(f(x) - \frac{2019}{4} - \frac{2019}{2}.x - 6057.\frac{x^2}{2}\right)dx \leq 0$.
Suy ra $f(x) = \dfrac{2019}{4} + \dfrac{2019}{2}.x + 6057.\dfrac{x^2}{2}$ với mọi $x \in [0; 1]$.
Dễ thấy hàm số $f(x) = \dfrac{2019}{4} + \dfrac{2019}{2}.x + 6057.\dfrac{x^2}{2}$ thỏa mãn các điều kiện bài toán.