ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN CẤP TRƯỜNG – NĂM 2025

Môn thi: Đại số

Khoa khoa học tự nhiên – Trường Đại học Hùng Vương

Câu 1 (6 điểm)**.** Cho không gian vectơ $V = \mathbb{R}^3$ và ánh xạ tuyến tính $T : V \to V$ xác định bởi:

$$T(x, y, z) = (x - y,\, 2y + z,\, x + z)$$

1. Viết ma trận biểu diễn của T trong cơ sở chính tắc của V.
2. Tìm cơ sở, số chiều của $\mathrm{Ker}(T)$ và $\mathrm{Im}(T)$.
3. Ánh xạ T có phải là toàn cấu không? Vì sao?

Câu 2 (6 điểm)**.** Cho $f : U \to V,\ g : V \to W$ là các ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng

$$\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker g).$$

Câu 3 (6 điểm)**.** Tính các định thức sau:

$$A = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} \quad \text{và} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$$

Câu 4 (6 điểm)**.** Giả sử $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là một hệ hữu hạn vectơ trong không gian vectơ V, chứng minh các mệnh đề sau tương đương:

1. S là cơ sở của V.
2. S là hệ sinh độc lập tuyến tính của V.
3. S là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của V.

Câu 5 (6 điểm)**.** Chứng minh rằng tập hợp:

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) | 2x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0\}$$

là không gian vectơ con của $\mathbb{R}$-không gian vectơ $\mathbb{R}^3$. Tìm một cơ sở và số chiều của W?