Đề gồm **01 trang**

ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN OLYMPIC **ĐẠI SỐ**

NĂM HỌC: 2024 - 2025

Thời gian làm bài: 150 phút (*không kể thời gian phát đề*)

Câu 1. Cho đa thức $P(x) = x^n - a_1x^{n-1} - 2a_2x^{n-2} - ... - (n-1)a_{n-1}x - na_n$, trong đó a_i là các số thực không âm và có ít nhất một số khác không.

(1) Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ có duy nhất một nghiệm dương x_0, là nghiệm đơn, và mọi nghiệm khác của $P(x)$ có môđun không vượt quá x_0.

(2) Đặt $a = \sum_{i=1}^{n} ia_i$, $b = \sum_{i=1}^{n} i^2a_i$. Chứng minh rằng $a^a \leq x_0^b$.

Câu 2. Gọi $\mathbb{F}[x]$ là $\mathbb{F}$-không gian véctơ các đa thức với hệ số trong trường $\mathbb{F}$. Xét các ánh xạ $\mathcal{S}, \mathcal{T} : \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x]$ xác định như sau: Với mọi $f(x) = \sum_{i=0}^{d} a_ix^i \in \mathbb{F}[x]$, ta có

$$\mathcal{S}(f) = \sum_{i=0}^{d} \frac{a_i}{i+1}x^{i+1}, \quad \mathcal{T}(f) = \sum_{i=1}^{d} ia_ix^{i-1}.$$

a) Chứng minh $\mathcal{S}$ và $\mathcal{T}$ là các ánh xạ tuyến tính.

b) Tính $\mathcal{S}_\circ\mathcal{T}$ và $\mathcal{T} \circ \mathcal{S}$.

c) Gọi $\mathbb{F}[x]_d$, $d \geq 1$, là tập tất cả các đa thức trong $\mathbb{F}[x]$ có bậc không vượt quá d. Chứng minh rằng $\mathbb{F}[x]$ là một $\mathbb{F}$-không gian véctơ với cơ sở $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2, \ldots x^d\}$.

Tìm ma trận của $\mathcal{T}$ đối với cơ sở $\mathfrak{B}$.

d) Tìm giá trị riêng và không gian con riêng tương ứng của $\mathcal{T}$.

Câu 3. a) Cho $A = [a_{ij}]$ là một ma trận vuông cấp n và $\hat{A}$ là ma trận phụ hợp của A, nghĩa là: phần tử trên dòng i cột j của $\hat{A}$ là phần bù đại số của phần tử a_{ji} của A. Chứng minh rằng $A\hat{A} = \det(A)I_n$.

b) Cho $a_1, \ldots, a_n$ là các số (thực hoặc phức). Gọi a là véctơ dòng với thành phần thứ j là $-a_j$. Tính định thức của $A = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ -a_1 & a \end{bmatrix}$. Xác định điều kiện để A khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo của nó.

Câu 4. Chứng minh

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(D).$$

Câu 5. Xét phép biến đổi ϕ được cho như sau đây: với bộ 4 số nguyên (x_1, x_2, x_3, x_4) ta đặt

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (|x_1 - x_2|, |x_2 - x_3|, |x_3 - x_4|, |x_4 - x_1|).$$

Chứng minh rằng, xuất phát từ một bộ số nguyên tuỳ ý, sau hữu hạn bước áp dụng ϕ liên tiếp ta sẽ nhận được một phần tử của tập hợp

$$S := \big\{(u_1, u_2, u_3, u_4) \mid u_1u_2u_3u_4 = 0\big\}.$$

- - - - HẾT - - - -