

ĐỀ KIỂM TRA SỐ 1, MÔN ĐẠI SỐ NĂM 2025

Bài 1. Cho a là số thực khác 0.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 & a^3 \\ a^{-1} & 0 & a & a^2 \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 & a \\ a^{-3} & a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Tính $\det(A)$.
- b) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A .

Bài 2. Một khẩu phần ăn của công ty thứ nhất cung cấp 100 calo, 3 g protein, 21 g carbohydrate và 3 g mỡ. Một khẩu phần ăn của công ty thứ hai cung cấp 100 calo, 2 g protein, 25 g carbohydrate và 1 g mỡ.

- a) Lập ma trận A và ma trận cột B để tích AB cho biết lượng calo, protein, carbohydrate và mỡ chứa trong hỗn hợp gồm 3 khẩu phần ăn của công ty thứ nhất và 2 khẩu phần ăn của công ty thứ hai.
- b) Tính tỷ lệ trộn để được một hỗn hợp chứa 100 calo, 2,25 g protein, 24 g carbohydrate và 1,5 g mỡ.

Bài 3. Giả sử $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến tính cho bởi

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4, mx_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4, -3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4),$$

trong đó $m \in \mathbb{R}$ là tham số.

- (a) Với $m = 1$, hãy tìm một cơ sở và số chiều của không gian hạt nhân $\text{Ker}(f)$.
- (b) Tìm ma trận chính tắc của ánh xạ f . Tìm m để f là một toàn cấu.

Bài 4. Cho $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên và có bậc lớn hơn hoặc bằng 1.

- a) Chứng minh rằng nếu z, t là hai số nguyên phân biệt thì ta có $f(z) - f(t)$ chia hết cho $z - t$.
- b) Có tồn tại ba số nguyên phân biệt a, b, c sao cho $f(a) = b, f(b) = c$ và $f(c) = a$?