

**Bài 1.** (6 điểm) Với các số thực  $a$  và  $b$ , xét ma trận sau đây:  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & a \\ -1 & b & 4 \\ 0 & 2 & b \end{bmatrix}$ .

- a) Với  $a = b = 0$ , tính  $A^{-1} \cdot A^T + 3I_3$  với  $I_3$  là ma trận đơn vị cấp 3.  
 b) Chứng minh rằng nếu  $a < -\frac{73}{6}$  thì luôn có  $\text{rank}(A) = 3$ .

**Bài 2.** (6 điểm) Cho ma trận  $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ .

- a) Chéo hoá ma trận  $A$  ở dạng  $P.D.P^{-1}$  và tính  $A^{2025}$ .  
 b) Bằng cách sử dụng các ma trận  $P, D$  ở trên, hãy chỉ ra một ma trận  $C$  mà  $C^3 = A$ .

**Bài 3.** (6 điểm) Với  $m$  là tham số, xét hệ phương trình  $\begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ 2x + 3y + z + 4t = 3 \\ 3x + 4y + 2z + t = 4 \\ 5x + 8y + 4z + mt = 7 \end{cases}$ .

- a) Hỏi có tồn tại hay không số  $m$  để hệ có vô số nghiệm?  
 b) Tìm tất cả các số  $m$  để hệ có nghiệm  $(x, y, z, t)$  thỏa mãn  $xyzt = 0$ .

**Bài 4.** (3 điểm) Cho ánh xạ tuyến tính  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  được xác định như sau

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_4, 2x_2 - x_3 + x_4).$$

Xác định cơ sở và số chiều của  $\text{Ker } f$ .

**Bài 5.** (6 điểm) Trong một chu trình sản xuất, đặt  $N$  là "không có sự cố" và  $Y$  là "có sự cố". Cho xác suất chuyển từ ngày này sang ngày tiếp theo là 0.8 để  $N \rightarrow N$ , do vậy xác suất là 0.2 để  $N \rightarrow Y$ ; xác suất này là 0.6 để  $Y \rightarrow N$ , như vậy là 0.4 để  $Y \rightarrow Y$ .

- a) Giả sử hôm nay có sự cố thì xác suất  $N$  sau 2 ngày là bao nhiêu?  
 b) Giả sử hôm nay không có sự cố thì xác suất  $Y$  sau 1 tháng (30 ngày) là bao nhiêu?

**Bài 6.** (3 điểm) Trong HAI chọn MỘT.

a) Cho đa thức  $P(x)$  bậc ba có hệ số bậc ba là 1 và có ba nghiệm thực (không nhất thiết phân biệt) là  $x_1, x_2, x_3 \in (0; 1)$ . Chứng minh rằng

$$0 < |P(0)|P(1) \leq \frac{1}{64}.$$

b) Cho tứ giác  $ABCD$  lồi. Trên các đoạn  $AB, BC, CD, DA$  người ta lần lượt lấy 6, 7, 8, 9 điểm phân biệt (không trùng với hai đầu mút của đoạn). Đếm số cách chọn ra 3 điểm trong tổng cộng 30 điểm đã cho để tạo thành tam giác.

————— **HẾT** —————

**Lưu ý:** Sinh viên không được sử dụng tài liệu.