VIỆN CNTT VÀ TT **Đề thi OLP Đại số vòng 1 - 2025**

TRUNG TÂM TOÁN ƯD VÀ TH **Thời gian: 180'**

Câu 1. Cho $P(x), Q(x)$ là hai đa thức hệ số thực, bậc dương sao cho đa thức $P(x^4) + xQ(x^4)$ chia hết cho đa thức $x^2 + 1$.

a. Hãy chỉ ra cặp đa thức $(P(x), Q(x))$ bậc nhất thỏa mãn điều kiện đề bài.

b. Chứng minh $P(x)Q(x)$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x + 1$.

Câu 2. Tìm tất cả các ma trận $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ thoả mãn:

$$\begin{cases} Tr(X).Y + Tr(Y).X = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \\ XY = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Câu 3. Giả sử $a, b, c \in [1975; 2025]$. Tìm giá trị lớn nhất của định thức

$$\begin{vmatrix} 3a^2 & b^2 + ab + a^2 & c^2 + ac + a^2 \\ a^2 + ab + b^2 & 3b^2 & c^2 + bc + b^2 \\ a^2 + ac + c^2 & b^2 + bc + c^2 & 3c^2 \end{vmatrix}.$$

Câu 4. Cho n là số nguyên dương, $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sao cho $A + B = E$ và $(A^2 + B^2)(A^4 + B^4) = A^5 + B^5$. Tìm tất cả các trị riêng của ma trận AB.

Câu 5. Cho các số nguyên dương n, m sao cho $n \geq m$. Giả sử ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ và $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng các ma trận AB và BA có cùng trị riêng.

Câu 6. a) Đếm số ma trận đối xứng 3×3 với năm phần tử 1 và bốn phần tử 0, và ma trận là khả nghịch (không suy biến).

b) Đếm số ma trận 3×3 không suy biến có bốn phần tử bằng 1 và tất cả các phần tử khác bằng 0.

Hết

- *Ghi chú: Học viên không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*