TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHENIKAA	OLYMPIC TOÁN HỌC CẤP TRƯỜNG
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN	Năm học 2024-2025
BỘ MÔN TOÁN	Ngày 15 tháng 2 năm 2025

Môn thi: **Đại số**
Thời gian: **120** phút (không kể phát đề)
Đề thi gồm **01** trang

CÂU 1 (4,0 điểm). Tìm a để hệ phương trình dưới đây có vô số nghiệm

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 + X_3 = 4, \\ X_1 - aX_2 - 2X_3 = -5, \\ 7X_1 + 3X_2 + (a-5)X_3 = 7. \end{cases}$$

CÂU 2 (4,0 điểm). Tìm tất cả các đa thức $P(X)$ thỏa mãn $P(X)P(X+1) = P\left(X^2+X\right)$.

CÂU 3 (4,0 điểm). Cho $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ là một ma trận vuông cỡ n. *Vết* của A, ký hiệu bởi Tr(A), là một số được định nghĩa như sau

$$\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Cho biết $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$ và $\mathrm{Tr}(cA) = c\mathrm{Tr}(A)$ với mọi số c và với mọi ma trận vuông cùng cỡ A và B.

(a) Chứng minh rằng $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A - \det(A)I$ với mọi ma trận vuông A cỡ 2.

(b) Chứng minh rằng $\mathrm{Tr}\left(A^2\right) = \mathrm{Tr}(A)^2 - 2\det(A)$ và $\det(A+I) = \det(A) + \mathrm{Tr}(A) + 1$ với mọi ma trận vuông A cỡ 2.

(c) Tìm tất cả các ma trận vuông A cỡ 2 thỏa mãn $A^2 + A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

CÂU 4 (4,0 điểm). Với mỗi số nguyên dương n, xét định thức cỡ n

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

với quy ước $D_0 = 1$.

(a) Tính D_1 và D_2.

(b) Chứng minh các đẳng thức sau đúng với mọi $n \geq 3$: $D_n = D_{n-1} - D_{n-2}$ và $D_n = -D_{n-3}$.

(c) Tính D_{2025}.

CÂU 5 (4,0 điểm). Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

(a) Tính các giá trị riêng λ_1 và λ_2 của A.

(b) Tìm hai véctơ riêng v_1 và v_2 của A tương ứng với các giá trị riêng λ_1 và λ_2.

(c) Tìm các số x_1 và x_2 sao cho $v = x_1v_1 + x_2v_2$, trong đó $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$. Từ đó tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} A^n v$.

HẾT