KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN
LẦN THỨ 24

QUY NHƠN, 11-17/4/2016

HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

ĐẠI HỌC
QUY NHƠN

HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

ĐẠI HỌC
QUY NHƠN

KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN
LẦN THỨ 24

BAN BIÊN TẬP

Phùng Hồ Hải (chủ biên)
Viện Toán học

Ngô Quốc Anh
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội

Hoàng Ngự Huấn
Đại học Mỏ-Địa Chất Hà Nội

Trần Lê Nam
Đại học Đồng Tháp

Dương Việt Thông
Đại học KTQD Hà Nội

Phùng Thị Thủy
Đại học Thủ Đô

QUY NHƠN, 11-17/4/2016

Mục lục

Giới thiệu

Tập kỷ yếu của Kỳ thi Olympic Toán Sinh viên và Học sinh lần thứ 24 tập hợp một số bài cùng với các đáp án do các trường và học viện tham gia kỳ thi đề xuất. Do giới hạn về thời gian nên ở đây chúng tôi chỉ tập hợp bài tập từ những đề được soạn bằng LATEX, những đề thi đề xuất ở dạng file *.doc hoặc *.pdf mà không có file LATEX đi kèm đều không xuất hiện trong tập kỷ yếu này. Chúng tôi cũng giữ nguyên cách trình bày đề và đáp án như đề xuất, chỉ sửa lại một số lỗi nhỏ mà chúng tôi phát hiện ra trong quá trình biên tập.

Nhóm biên tập

Phần I

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN LẦN THỨ 24

Thông tin về kỳ thi

Thông tin chung

Kỳ thi Olympic Toán dành cho sinh viên lần thứ 24 được tổ chức từ 11-17/4/2016 tại Trường đại học Quy Nhơn. Năm nay ngoài kỳ thi dành cho sinh viên, Hội Toán học còn phối hợp với Trường Đại học Quy Nhơn tổ chức kỳ thi dành cho học sinh trung học phổ thông chuyên.

Các trường đoàn chụp ảnh lưu niệm tại lễ khai mạc

Đã có 81 đoàn từ các trường đại học, cao đẳng, học viện trong cả nước tham dự kỳ thi, có 665 sinh viên dự thi các môn Đại số và Giải tích. Tại kỳ thi dành cho học sinh trung học phổ thông chuyên, đã có 11 trường gửi đoàn tham dự, với tổng số 47 học sinh.

Cơ quan tổ chức

- Bộ Giáo dục và Đào tạo
- Liên hiệp các Hội Khoa học và Kỹ thuật Việt Nam
- Trung ương Hội Sinh viên Việt Nam
- Hội Toán học Việt Nam
- Trường đại học Quy Nhơn

Ban tổ chức

Đồng trưởng ban: GS.TSKH. Phùng Hồ Hải (Hội Toán học Việt Nam), GS.TS. Nguyễn Hồng Anh (Đại học Quy Nhơn)

Phó ban: Đại diện Bộ Giáo Dục & Đào Tạo, Đại diện TW Hội Sinh viên Việt Nam, GS.TSKH. Phạm Thế Long (Hội Toán học Việt Nam), PGS.TS. Đinh Thanh Đức (Đại học Quy Nhơn).

Ủy viên: TS. Nguyễn Thái Hòa (Đại học Quy Nhơn), TS. Ngô Lâm Xuân Châu (Đại học Quy Nhơn), TS. Mai Thành Tấn (Đại học Quy Nhơn), TS. Đoàn Trung Cường (Viện Toán học), TS. Lê Cường (Đại học Bách khoa Hà

Nội), TS. Nguyễn Chu Gia Vượng (Viện Toán học), TS. Nguyễn Duy Thái Sơn (Đại học Sư phạm Đà Nẵng), TS. Ngô Quốc Anh (Đại học KHTN - ĐHQG Hà Nội).

Hiệu trưởng Trường Đại học Quy Nhơn Nguyễn Hồng Anh đọc diễn văn bế mạc

Kết quả

Với kết quả thi của thí sinh, Hội đồng thi đã thống nhất danh sách sinh viên được trao giải. Số lượng giải được trao cụ thể như sau:

BẢNG A

Môn Đại số

- Giải nhất: 21 giải.
- Giải nhì: 40 giải.
- Giải ba: 59 giải.
- Khuyến khích: 5 giải.

Môn Giải tích

- Giải nhất: 23 giải.
- Giải nhì: 41 giải.
- Giải ba: 55 giải.
- Khuyến khích: 10 giải.

BẢNG B

Môn Đại số

- Giải nhất: 9 giải.
- Giải nhì: 18 giải.
- Giải ba: 35 giải.
- Khuyến khích: 10 giải.

Môn Giải tích

- Giải nhất: 10 giải.
- Giải nhì: 17 giải.
- Giải ba: 28 giải.
- Khuyến khích: 13 giải.

Giải đặc biệt

Ban tổ chức kỳ thi đã quyết định trao 12 giải đặc biệt cho các sinh viên hoặc đạt điểm cao nhất của một môn hoặc đạt hai giải nhất của cả hai môn.

Thứ trưởng Bộ GD&ĐT Bùi Văn Ga, Phó Chủ tịch HĐND tỉnh Bình Định Võ Vinh Quang và các sinh viên đoạt giải đặc biệt.

Chủ tịch Hội Toán học Nguyễn Hữu Dư và đoàn ĐHSP Hà Nội - nhất toàn đoàn

Trao cờ luân lưu, từ trái qua phải: Tổng thư ký Hội Toán học Phùng Hồ Hải, Hiệu trưởng ĐH Quy Nhơn Nguyễn Hồng Anh và Hiệu trưởng Đại học Phú Yên Trần Văn Chương

Phát biểu khai mạc Olympic Toán học Sinh viên - Học sinh 2016

Phùng Hồ Hải [1]

Olympic Toán học sinh viên đã được tổ chức liên tục trong suốt 24 năm qua. Đây thực sự là một ngày hội cho những sinh viên yêu Toán. Sự đam mê, hăng hái tham gia của các bạn sinh viên tại các kỳ Olympic đã mang lại cho chúng tôi, những người tổ chức rất nhiều động viên, không chỉ trong hoạt động tổ chức kỳ thi Olympic này, mà trong cả công tác giảng dạy và nghiên cứu tại các cơ sở.

Kỳ thi Olympic Toán học là nơi sinh viên từ mọi miền đất nước, tới so tài. Họ có thể là sinh viên Tổng hợp, sinh viên Bách Khoa, sinh viên Sư phạm, hay sinh viên Xây dựng, sinh viên Giao thông, sinh viên Nông nghiệp, sinh viên Tài chính, sinh viên Ngân hàng, sinh viên Kiến trúc. Rất nhiều ngành nghề khác nhau, nhất nhiều định hướng khác nhau trong cuộc sống và sự nghiệp. Nhưng họ có một mẫu số chung, đó là, nói một cách giản dị, họ thích toán.

Niềm vui, hạnh phúc trong Toán học rất đặc biệt, rất khó chia sẻ cho người khác. Chính vì thế một dịp để những người thích toán gặp nhau, chia sẻ với nhau đam mê của mình có ý nghĩa rất quan trọng. Olympic Toán học sinh viên vì thế không chỉ là kỳ thi, nó còn là dịp để chúng ta gặp nhau, thách thức nhau bằng những bài toán, hạnh phúc vì những lời giải hay, lời giải đẹp.

Trong khuôn khổ kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên Toàn quốc năm nay, Hội Toán học phối hợp với với trường Đại học Quy Nhơn tổ chức một kỳ thi dành cho Học sinh phổ thông trung học. Chúng tôi hy vọng kỳ thì này với cách thức tổ chức có nhiều khác biệt với những kỳ thi học sinh giỏi khác, sẽ mang lại cho các bạn học sinh niềm vui. Các bạn hãy tận dụng cơ hội này để giao lưu, học hỏi với các anh chỉ sinh viên, tìm hiểu thêm về trường Đại học Quy Nhơn. Tôi hy vọng, trong vài năm tới, một số trong các bạn sẽ trở thành sinh viên trường Đại học Quy Nhơn, và lý tưởng nhất đối với tôi, là sinh viên Khoa Toán.

Thay mặt cho ban tổ chức, tôi xin chúc sức khỏe các vị đại biểu, toàn thể các thầy cô giáo và chúc các bạn học sinh-sinh viên, thi tốt và chơi thật vui.

[1] Phó chủ tịch kiêm Tổng thư ký Hội Toán học Việt Nam, Trưởng ban tổ chức Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên - Học sinh Toàn quốc lần thứ 24.

THÔNG BÁO
Kỳ thi Olympic Toán Sinh viên lần thứ 25
Phú Yên - 4/2017

Thông tin chung

Cơ quan tổ chức

- Bộ Giáo dục và Đào tạo
- Liên hiệp các hội khoa học và kĩ thuật Việt Nam
- Trung ương Hội sinh viên Việt Nam
- Hội Toán học Việt Nam
- Đại học Quy Nhơn

Thời gian và địa điểm

Từ 10-16/4/2016 tại Trường Đại học Phú Yên, thành phố Tuy Hòa, Phú Yên

Ban tổ chức

Đồng trưởng ban: Ông Trần Văn Chương - Hiệu trưởng trường Đại học Phú Yên; GS.TSKH Phùng Hồ Hải - Phó chủ tịch kiêm Tổng thư ký Hội Toán học Việt Nam

Phó ban: Đại diện Bộ Giáo dục & Đào tạo (Lãnh đạo Vụ công tác Học sinh sinh viên), Đại diện TW Hội sinh viên Việt Nam; GS.TSKH Phạm Thế Long - Phó chủ tịch Hội Toán học Việt Nam; PGS.TS Nguyễn Huy Vị - Phó hiệu trưởng trường Đại học Phú Yên.

Ủy viên: TS Lê Đức Thoang, Trưởng khoa Khoa học Tự nhiên, Đại học Phú Yên; ThS Lê Thị Kim Loan, Phó trưởng phòng Đào tạo, Đại học Phú Yên; TS Lê Cường, Đại học Bách khoa Hà Nội; TS Đoàn Trung Cường, Viện Toán học; TS Nguyễn Chu Gia Vượng, Viện Toán học; TS Nguyễn Duy Thái Sơn, Đại học Sư phạm Đà Nẵng; TS Ngô Quốc Anh, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội.

Đăng ký

Các đoàn đăng ký tham dự trực tuyến tại trang web của Hội Toán học Việt Nam theo địa chỉ http://vms.org.vn (chọn: Hoạt động/Olympic Toán Sinh viên/Đăng ký tham dự).

Thời gian đăng ký: **từ ngày 01/01/2017 đến trước ngày 20/3/2017**.

Chương trình

- Ngày 10/4/2017: Các đoàn đăng ký.
- Ngày 11-14/4/2017: Khai mạc, tổ chức thi, chấm thi, xét giải
- Ngày 15/4/2017: Tổng kết và trao giải
- Ngày 16/4/2017: Hội thảo về công tác chuẩn bị kỳ thi Olympic sinh viên năm 2018.

Liên hệ

Các vấn đề cần hỗ trợ từ Trường Đại học Phú Yên (giúp liên hệ chỗ ở hoặc giới thiệu địa chỉ khách sạn/nhà khách, địa điểm thi, hướng dẫn đường đi,...):

Ông Dương Chí Viễn
Email: phonghcqt@pyu.edu.vn
Điện thoại: 0907646816

Các vấn đề liên quan tới tổ chức chung của kỳ thi:

GS. TSKH. Phùng Hồ Hải
Email: olymtoansv@gmail.com
Điện thoại: 0904134384

Các thông tin về kỳ thi đều được cập nhật trên trang web của Hội Toán học Việt Nam tại địa chỉ htttp://vms.org.vn

Đề cương các môn thi

MÔN ĐẠI SỐ

Phần I: SỐ PHỨC VÀ ĐA THỨC

1. Số phức, các tính chất cơ bản. Mô tả hình học của số phức.
2. Đa thức một biến: các phép toán của đa thức, số học của đa thức (phân tích thành nhân tử, ước chung lớn nhất, nguyên tố cùng nhau).
3. Nghiệm của đa thức, định lý Bezout, định lý Viete, đa thức đối xứng*.
4. Bài toán xác định đa thức (nội suy, phương pháp hệ số bất định,...)

Phần II: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

1. Hệ phương trình tuyến tính.
   a. Hệ phương trình tuyến tính. Ma trận.
   b. Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gauss-Jordan.
   c. Nghiệm riêng và nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính. Hệ phương trình tuyến tính không suy biến.
   d. Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.
2. Ma trận và định thức
   a. Ma trận, các phép toán của ma trận và một số tính chất cơ bản.
   b. Hạng của ma trận, cách tính.
   c. Ứng dụng của ma trận vào việc nghiên cứu hệ phương trình tuyến tính. Định lý Kronecker-Capelli.
   d. Định thức: định nghĩa (quy nạp theo cấp và theo phép thế), khai triển Laplace, tính chất của định thức, các phương pháp tính định thức.
   e. Ma trận nghịch đảo, các phương pháp tìm ma trận nghịch đảo (phần bù đại số, biến đổi sơ cấp).
   f. Ứng dụng của định thức vào việc giải hệ phương trình tuyến tính: Định lý Cramer.
   g. Ma trận đồng dạng và tính chéo hóa được của ma trận*.
   h. Một số dạng ma trận đặc biệt: ma trận Vandermonde, ma trận đối xứng, ma trận phản đối xứng, ma trận Hermite, ma trận trực giao*.

3. Không gian tuyến tính và ánh xạ tuyến tính.

    a. Định nghĩa, không gian con, các ví dụ liên quan tới Đại số, Giải tích.
    b. Cơ sở và số chiều.
    c. Ánh xạ tuyến tính, ma trận biểu diễn.
    d. Toán tử tuyến tính, trị riêng, véc tơ riêng.
    e. Đa thức đặc trưng, đa thức tối thiểu, Định lý Cayley-Hamilton*.

Phần III: TỔ HỢP

1. Chỉnh hợp, tổ hợp, tam giác Pascal, hệ số nhị thức.
2. Các quy tắc đếm cơ bản: quy tắc cộng, quy tắc nhân, nguyên lý bù trừ.
3. Phân hoạch của số tự nhiên.
4. Nguyên lý quy nạp, nguyên lý Dirichlet, nguyên lý cực hạn.
5. Chuỗi lũy thừa hình thức. Hàm sinh. Ứng dụng của hàm sinh*.

TÀI LIỆU

1. Lê Tuấn Hoa: Đại số tuyến tính qua các ví dụ và bài tập, NXB ĐHQG Hà Nội, 2006.
2. Nguyễn Hữu Việt Hưng: Đại số tuyến tính, NXB ĐHQG Hà Nội, 2000.
3. V. Prasolov: Polynomials, Springer, 2004.
4. K. H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications, Bản dịch tiếng Việt: Toán học rời rạc và Ứng dụng trong tin học, NXB Giáo dục, Hà Nội, 2007.
5. Ngô Việt Trung: Đại số tuyến tính, NXB ĐHQG Hà Nội, 2002.

Ghi chú: *Các nội dung có dấu * dành cho sinh viên dự thi bảng A.*

MÔN GIẢI TÍCH

Phần I: DÃY SỐ VÀ HÀM SỐ

1. Dãy hội tụ, dãy đơn điệu, dãy bị chặn, dãy dần ra vô cực.
2. Các tính chất và phép toán về dãy hội tụ.
3. Tìm giới hạn của dãy số.
4. Hàm đơn điệu, hàm bị chặn, hàm tuần hoàn, hàm chẵn và hàm lẻ, hàm ngược.
5. Giới hạn của hàm số.
6. Tính liên tục, các tính chất của hàm liên tục.
7. Hàm lồi, bất đẳng thức Jensen*.

Phần II: GIẢI TÍCH TRÊN HÀM MỘT BIẾN

1. Phép tính vi phân hàm một biến.
   a. Định nghĩa và các phép toán về đạo hàm.
   b. Các định lý của Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy, L'Hôpital.
   c. Công thức Taylor, công thức Maclaurin.
   d. Cực trị, giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm số.
   e. Hàm lồi khả vi*.
2. Phép tính tích phân hàm một biến.
   a. Nguyên hàm và tích phân bất định.
   b. Các phương pháp tính tích phân bất định.
   c. Tích phân các hàm hữu tỷ, hàm vô tỷ, hàm lượng giác.
   d. Định nghĩa và các phương pháp tính tích phân xác định, tính khả tích.
   e. Định lý cơ bản của phép tính vi tích phân (đạo hàm của tích phân xác định theo cận của tích phân, công thức Newton-Leibniz).
   f. Tích phân phụ thuộc tham số.
   g. Các định lý về trung bình tích phân.
   h. Bất đẳng thức tích phân.
   i. Sự hội tụ và phân kỳ của tích phân suy rộng, các tiêu chuẩn so sánh đối với tích phân của hàm dương*.

3. Chuỗi số, dãy hàm và chuỗi hàm.

    a. Chuỗi số, tiêu chuẩn Cauchy về điều kiện cần và đủ cho sự hội tụ của chuỗi*.

    b. Các tiêu chuẩn so sánh, tiêu chuẩn tích phân (Cauchy), tiêu chuẩn đối với chuỗi đan dấu (Leibniz), hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện, tiêu chuẩn căn thức (Cauchy), tiêu chuẩn tỉ số (D'Alembert)*.

    c. Các tiêu chuẩn hội tụ Abel, Dirichlet*.

    d. Chuỗi lũy thừa*.

    e. Tiêu chuẩn hội tụ đều cho dãy hàm và chuỗi hàm một biến, các tính chất cơ bản của dãy hàm và chuỗi hàm hội tụ đều*.

Phần III: KHÔNG GIAN METRIC*

1. Không gian metric.

2. Tôpô trên không gian metric.

3. Ánh xạ liên tục, đẳng cự, đồng phôi.

4. Các tính chất đầy đủ, compact, liên thông.

TÀI LIỆU

1. J. Dieudonné, *Cơ sở giải tích hiện đại* (Phan Đức Chính dịch, tập 1), NXB ĐH&THCN, 1978.

2. G.M. Fichtengon, *Cơ sở giải tích toán học*, NXB ĐH&THCN, 1986.

3. W.A.J. Kosmala, *A friendly introduction to analysis*, Pearson Prentice Hall, 2004.

4. Nguyễn Xuân Liêm, *Giải tích toán học*, NXB Giáo dục, 1997.

5. Nguyễn Duy Tiến, *Bài giảng giải tích*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2005.

Ghi chú: *Các nội dung có dấu * dành cho sinh viên dự thi bảng A.*

Phần II

ĐỀ THI

Chương 1

Đề thi chính thức

1 Đề thi dành cho Học sinh phổ thông

NGÀY THI THỨ NHẤT

Sự phân bố của số nguyên tố trong tập hợp số tự nhiên, cách xây dựng các số nguyên tố là những bài toán được quan tâm từ rất lâu trong Số học. Dưới đây chúng ta sẽ tìm cách chứng minh trường hợp đặc biệt của một trong những kết quả đẹp nhất của Số học: định lý Dirichlet về sự tồn tại vô hạn số nguyên tố trong một cấp số cộng mà số hạng đầu tiên và công sai nguyên tố cùng nhau.

A. Khái niệm cấp

Bài 1.1. Cho a, n là các số nguyên nguyên tố cùng nhau với $n \geq 2$. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương c nhỏ nhất với tính chất $a^c \equiv 1 \pmod{n}$. Số nguyên c được gọi là cấp của a modulo n và được kí hiệu là $\mathrm{ord}_n(a)$. (Xem lời giải trang 63.)

Bài 1.2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k, $a^k \equiv 1 \pmod{n}$ khi và chỉ khi $\mathrm{ord}_n(a) \mid k$. (Xem lời giải trang 63.)

Bài 1.3. Chứng minh rằng $\mathrm{ord}_n(a) \mid \varphi(n)$, trong đó φ kí hiệu hàm số phi của Euler, định nghĩa bởi công thức: $\varphi(1) = 1$ và với $n > 1$,

$$\varphi(n) = n \prod_{p \text{ là ước nguyên tố của } n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

(Xem lời giải trang 63.)

(Nhắc lại rằng kí hiệu $x \mid y$ nghĩa là x là một ước của y.)

B. Sự tồn tại số nguyên tố trong một số cấp số cộng

Bài 1.4. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố có dạng $4k+3$. (Xem lời giải trang 63.)

Bài 1.5. (i) Chứng minh rằng ước nguyên tố lẻ của một số có dạng n^2+1 luôn đồng dư với 1 modulo 4.

(ii) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố có dạng $4k+1$.
(Xem lời giải trang 63.)

Bài 1.6. (i) Chứng minh rằng ước nguyên tố $\neq 3$ của số tự nhiên có dạng n^2-n+1 phải đồng dư với 1 modulo 6.

(ii) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố có dạng $6k+1$.
(Xem lời giải trang 64.)

C. Sự tồn tại số nguyên tố trong cấp số cộng có dạng $nk+1$

Trong các bài tập sau đây, ta cố định một số nguyên $k \geq 3$. Với a là một số nguyên $\neq 0$ và p là một số nguyên tố, ta dùng kí hiệu $v_p(a)$ để chỉ số mũ đúng của p trong phân tích của a ra thừa số nguyên tố, nói cách khác $p^{v_p(a)} \mid a$ nhưng $p^{v_p(a)+1} \nmid a$.

Bài 1.7. Giả sử p là một ước nguyên tố của k^k-1. Kí hiệu c là cấp của k modulo p. Chứng minh rằng $v_p(k^c-1) = v_p(k^k-1)$. (Xem lời giải trang 64.)

Ta nhắc lại rằng một số nguyên dương được gọi là không có ước chính phương nếu trong phân tích ra thừa số nguyên tố của nó, mỗi số nguyên tố đều xuất hiện với số mũ ≤ 1. Như vậy, các số nguyên dương không có ước chính phương đầu tiên là $1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, \ldots$.

Bài 1.8. Kí hiệu $\mathcal{D}$ là tập tất cả các ước nguyên dương d của k sao cho $d < k$ mà $\frac{k}{d}$ là một số nguyên không có ước chính phương. Kí hiệu $\mathcal{D}_1 = \{d \in \mathcal{D} \mid$ số ước nguyên tố của $\frac{k}{d}$ là lẻ$\}$, $\mathcal{D}_2 = \{d \in \mathcal{D} \mid$ số ước nguyên tố của $\frac{k}{d}$ là chẵn$\}$. Đặt

$$A = \prod_{d \in \mathcal{D}_1} (k^d - 1), \quad B = \prod_{d \in \mathcal{D}_2} (k^d - 1).$$

(Ta qui ước $A = 1$ nếu $\mathcal{D}_1 = \emptyset$ và tương tự $B = 1$ nếu $\mathcal{D}_2 = \emptyset$.) Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p mà $p \mid k^k - 1$ nhưng $p \not\equiv 1 \pmod{k}$ thì ta có $v_p(A) = v_p(B) + v_p(k^k-1)$. (Xem lời giải trang 64.)

Bài 1.9. Chứng minh rằng k^k-1 có một ước nguyên tố có dạng $nk+1$. (Xem lời giải trang 65.)

Bài 1.10. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố có dạng $nk+1$. (Xem lời giải trang 65.)

NGÀY THI THỨ HAI

Mục tiêu của bài thi này là tìm hiểu một số trường hợp riêng của định lý Markov: nếu $P(x)$ là một đa thức với hệ số thực và có bậc không vượt quá n thì

$$\max_{|x|\le 1}|P'(x)| \le n^2 \max_{|x|\le 1}|P(x)|.$$

Chứng minh của định lý Markov vượt quá chương trình toán THPT. Ta sẽ tìm cách chứng minh những trường hợp riêng khi $n \le 3$ của định lý và khảo sát một số bài toán xung quanh các trường hợp đó.
Trong các bài toán dưới đây, biến số x chỉ nhận giá trị thực.

A. Bất đẳng thức Markov cho đa thức bậc nhất

Bài 1.11. Giả sử a, b là hai số thực sao cho $|ax + b| \le 1$ khi $|x| \le 1$. Chứng minh rằng:

(i) (2 điểm) $|a| \le 1$.

(ii) (2 điểm) $|bx + a| \le 1$ khi $|x| \le 1$.

(Xem lời giải trang 65.)

B. Bất đẳng thức Markov cho các đa thức bậc hai và bậc ba

Bài 1.12. Giả sử a, b, c là ba số thực sao cho các giá trị của đa thức ax^2+bx+c tại $1, 0, -1$ đều thuộc đoạn $[-1, 1]$.

(i) (3 điểm) Chứng minh rằng $|2ax + b| \le 4$ khi $|x| \le 1$.

(ii) (3 điểm) Chứng minh rằng $|cx^2 + bx + a| \le 2$ khi $|x| \le 1$.

(Xem lời giải trang 66.)

Bài 1.13. Giả sử a, b, c, d là bốn số thực sao cho các giá trị $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ của đa thức $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tương ứng tại $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ đều thuộc đoạn $[-1, 1]$.

(i) (1 điểm) Chứng minh rằng với mọi số thực A, B, ta có đẳng thức $|A + B| + |A - B| = 2\max\{|A|, |B|\}$.

(ii) (3 điểm) Bằng cách biểu diễn $3ax^2 + 2bx + c$ theo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ và x, hãy chứng minh rằng $|3ax^2 + 2bx + c| \le 9$ khi $|x| \le 1$.

(iii) (2 điểm) Chứng minh rằng $|dx^3 + cx^2 + bx + a| \le 4$ khi $|x| \le 1$.

(Xem lời giải trang 66.)

C. Hai bất đẳng thức khác cho các tam thức

Bài 1.14. Cho a, b, c là ba số thực và n là một số nguyên dương. Giả sử đa thức $f(x) = ax^{2n} + bx + c$ có các giá trị tại $1, 0, -1$ thuộc đoạn $[-1, 1]$. Chứng minh rằng:

(i) (2 điểm) $|f(x)| \leq \dfrac{2n-1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}} + 1$ khi $|x| \leq 1$.

(ii) (2 điểm) Với mỗi $1 \leq M < \infty$, ta có $|f(x)| \leq 2M^{2n} - 1$ khi $1 \leq |x| \leq M$.

(Xem lời giải trang 68.)

2 Đề thi môn Đại số

Bài 2.1 (Bảng A)**.** Cho a, b là các số thực và

$$A = \begin{pmatrix} -a & b & 0 & 0 \\ 0 & -a & b & 0 \\ 0 & 0 & -a & b \\ b & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

1. Tính định thức của A.

2. Với các giá trị a, b nào thì A khả nghịch và trong trường hợp đó hãy tính A^{-1}.

3. Công ty cây xanh đô thị thực hiện Dự án thay thế các cây già cỗi và cây không đúng chủng loại bởi các cây mới. Công ty thực hiện chương trình trong bốn tháng. Trong mỗi tháng công ty sẽ chặt bỏ 10% tổng số cây xanh trong thành phố tính tới ngày đầu tiên của tháng, đồng thời thực hiện trồng thêm một số cây xanh. Cụ thể trong tháng thứ nhất sẽ trồng thêm 100 cây, tháng thứ hai trồng thêm 102 cây, tháng thứ ba trồng thêm 104 cây, tháng cuối cùng trồng thêm 106 cây. Tại buổi tổng kết Dự án người ta cho biết, tổng số cây hiện tại trong thành phố đã tăng thêm 80 so với trước khi thực hiện Dự án. Hỏi hiện nay thành phố có bao nhiêu cây xanh?

(Xem lời giải trang 69.)

Bài 2.2 (Bảng A)**.** Ký hiệu V là không gian véc tơ của các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n với hệ số thực. Xét ánh xạ tuyến tính

$$\Phi : V[x] \to V[x], \quad \text{cho bởi} \quad \Phi(p(x)) = p(x+1).$$

1. Tìm ma trận biểu diễn của Φ theo cơ sở $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ của V

2. Chứng minh rằng tồn tại các số thực $a_0, a_1, \ldots, a_n$ với tính chất sau đây: với mọi đa thức hệ số thực p bậc $\leq n$ thì

$$p(x+n) + a_{n-1}p(x+n-1) + \cdots + a_1 p(x+1) + a_0 p(x) = 0.$$

(Xem lời giải trang 69.)

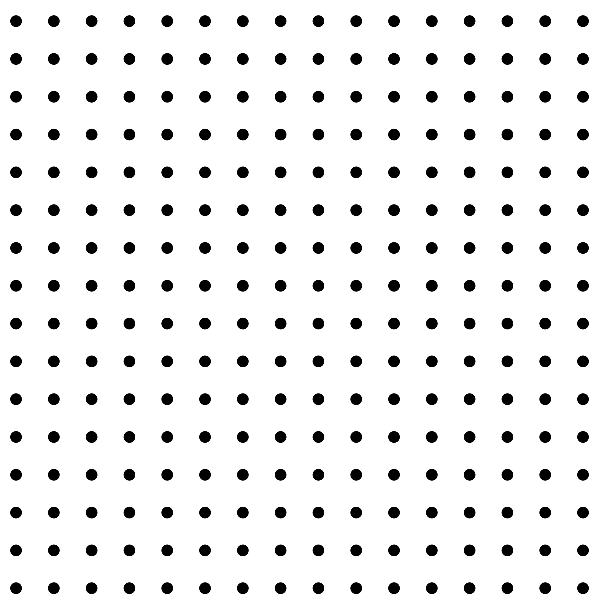
Bài 2.3 (Bảng A)**.** Với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$ xét đa thức $P_n(x) = nx^n - x^{n-1} - \ldots - x - 1$. Hỏi $P_n(x)$ có bao nhiêu nghiệm thực:

(i) Khi $n = 2, 3$?

(ii) Khi $n \geq 4$?

(Xem lời giải trang 70.)

Bài 2.4 (Bảng A)**.** Xét mảng 16×16 tạo thành từ các dãy điểm như Hình 1 (khoảng cách giữa các hàng và các cột là 1 đơn vị).



Hình 1. *Mảng* 16×16 *điểm*

1. (3 điểm) Tìm số hình vuông với đỉnh trên mảng và có diện tích bằng 4 (đơn vị diện tích).

2. (3 điểm) Tìm số hình vuông với đỉnh trên mảng và có diện tích bằng 25 (đơn vị diện tích)?

(Xem lời giải trang 71.)

Bài 2.5 (Bảng B). Ký hiệu D là phép đạo hàm trên tập các đa thức hệ số thực $\mathbb{R}[x]$ và T là ánh xạ từ $\mathbb{R}[x]$ vào chính nó, cho bởi $T(p(x)) = xp(x)$.

(i) Chứng minh rằng ánh xạ D không là đơn ánh và ánh xạ T không là toàn ánh.

(ii) Chứng minh rằng ánh xạ $D \circ T - T \circ D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ là song ánh.

(Xem lời giải trang 71.)

Bài 2.6 (Bảng B). Ký hiệu V là không gian véc tơ các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n với hệ số thực. Xét ánh xạ tuyến tính

$$\Phi : V \to V, \quad \text{cho bởi} \quad \Phi(p(x)) = p(x+1) - p(x).$$

(i) Tìm ma trận biểu diễn của Φ theo cơ sở $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ của V.

(ii) Chứng minh rằng $\Phi^{n+1} = 0$.

(iii) Tìm một cơ sở để theo đó ma trận của Φ có dạng dưới đây:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

(iv) Xác định tất cả các đa thức p thoả mãn: $p(a+1) + p(a-1) = 2p(a)$ với mọi số nguyên a.

(Xem lời giải trang 71.)

3 Đề thi môn Giải tích

Bài 3.1 (Bảng A). Cho $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác đinh bởi các điều kiện

$$u_1 = a, \; u_{n+1} = {u_n}^2 - u_n + 1 \quad \forall n \geq 1.$$

1. Tìm tất cả các giá trị thực của a để dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.
2. Tìm giới hạn của dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ khi nó hội tụ.

(Xem lời giải trang 72.)

Bài 3.2 (Bảng A). Phần nguyên của số thực x được định nghĩa là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, và được kí hiệu là $[x]$. Hiệu $x - [x]$ được gọi là phần lẻ của x, và được kí hiệu là $\{x\}$.
Giả sử a, b là các số thực dương và n là số tự nhiên. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} (a\{nb\} + b\{na\}) = 0$$

khi và chỉ khi a và b là các số nguyên. (Xem lời giải trang 73.)

Bài 3.3 (Bảng A). Cho $a \geq 1$ là một số thực và $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

- $(f(ax))^2 \leq a^3x^2f(x)$ với mọi số thực x;
- f bị chặn trên trong một lân cận nào đó của 0.

Chứng minh rằng $|f(x)| \leq \dfrac{x^2}{a}$ với mọi số thực x. (Xem lời giải trang 73.)

Bài 3.4 (Bảng A). Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi vô hạn lần và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

$$f(0)f'(0) \geq 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

1. Chứng minh rằng tồn tại một dãy số $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tăng ngặt và không âm sao cho
$$f^{(n)}(x_n) = 0$$
với mọi số nguyên dương n (trong đó, $f^{(n)}$ kí hiệu đạo hàm cấp n của f).
2. Tồn tại hay không một hàm số f thỏa mãn mọi yêu cầu của đề bài và không đồng nhất bằng 0?

(Xem lời giải trang 74.)

Bài 3.5 (Bảng A). Với mỗi số thực $0 < \alpha \neq 1$, gọi f_α là hàm số được xác định trên khoảng $(1, \infty)$ bởi công thức

$$f_\alpha(x) = \int_x^{x^\alpha} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \quad (\forall x > 1).$$

1. Chứng minh rằng f_α là một phép đồng phôi, tức là một song ánh liên tục, từ khoảng $(1, \infty)$ lên một khoảng $I_\alpha \subset \mathbb{R}$ nào đó sao cho ánh xạ ngược $f_\alpha^{-1} : I_\alpha \to (1, \infty)$ cũng liên tục.

2. Tìm I_α.

(Xem lời giải trang 75.)

Bài 3.6 (Bảng B). Cho $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác đinh bởi các điều kiện

$$u_1 = a,\ u_{n+1} = u_n + (u_n - 2016)^2 \quad \forall n \geq 1.$$

1. Tìm tất cả các giá trị thực của a để dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.

2. Tìm giới hạn của dãy số đó khi nó hội tụ.

(Xem lời giải trang 76.)

Bài 3.7 (Bảng B). Cho α là một số thực và $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Chứng minh các khẳng định sau:

1. f liên tục nếu và chỉ nếu $\alpha > 0$.

2. f khả vi nếu và chỉ nếu $\alpha > 1$.

3. f khả vi liên tục nếu và chỉ nếu $\alpha > 2$.

(Xem lời giải trang 76.)

Bài 3.8 (Bảng B). Cho $a \geq 1$ là một số thực và $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

- $(f(ax))^2 \leq a^3 x^2 f(x)$ với mọi số thực x;

- f bị chặn trên trong khoảng $(-1, 1)$.

Chứng minh rằng $|f(x)| \leq \dfrac{x^2}{a}$ với mọi số thực x. (Xem lời giải trang 77.)

Bài 3.9 (Bang B). Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi liên tục hai lần và thỏa mãn điều kiện

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình $f''(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm. (Xem lời giải trang 77.)

Bài 3.10 (Bảng B). Cho $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \quad (\forall x > 1).$$

Hãy tìm tập tất cả các giá trị của f. (Xem lời giải trang 78.)

Chương 2

Đề đề xuất môn Đại số

1 Ma trận

Bài 1.1 (Đại học Nông Lâm Huế)**.** Cho $a \in \mathbb{R}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ là ma trận đơn vị cấp 2, $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Xác định ma trận $X = (aI_2 + J)^{2016} + (aI_2 + K)^{2016}$ (Xem lời giải trang 79.)

Bài 1.2 (Đại học Tây Bắc)**.** Cho các ma trận $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$ABA = A; AB + BA = 2I.$$

Chứng minh rằng: $AB = BA = I$. (Xem lời giải trang 80.)

Bài 1.3 (Đại học Tây Bắc)**.** Cho các ma trận $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$A^2 = A; B^2 = B; C^2 = C.$$

Chứng minh rằng nếu $A + B + C = 0$ thì $A = B = C = 0$. (Xem lời giải trang 80.)

Bài 1.4 (Đại học Kỹ Thuật Hậu Cần CAND)**.** Ký hiệu $SL_2(\mathbb{Z})$ là tập hợp ma trận thực cấp 2 với các phần tử là các số nguyên và có $\det(A) = 1$.

1) Cho ví dụ về các ma trận $A, B, C \in SL_2(\mathbb{Z})$ thỏa mãn $A^2 + B^2 = C^2$.

2) Chứng minh rằng không tồn tại các ma trận $A, B, C \in SL_2(\mathbb{Z})$ sao cho $A^4 + B^4 = C^4$. (Xem lời giải trang 80.)

Bài 1.5 (Đại học Kỹ Thuật Hậu Cần CAND)**.** Cho A, B là các ma trận thực vuông cấp n thỏa mãn $A^2 + B^2 = \sqrt{3}(AB - BA)$.
Chứng minh rằng nếu $C = BA - AB$ khả nghịch, thì n là bội số của 6. (Xem lời giải trang 81.)

Bài 1.6 (Đại học Hùng Vương)**.** Cho $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,3041975}$ là một ma trận vuông cấp 3041975 với các phần tử thực. Chứng minh rằng, tồn tại một ma trận cột X cỡ 3041975×1 với các phần tử không đồng thời bằng 0 sao cho $AX = A^tX$, ở đây A^t là ma trận chuyển vị của ma trận A ($A^t = [a^t_{ij}]_{i,j=1,\ldots,3041975}$, $a^t_{ij} = a_{ji}$ với mọi $i, j = 1, \ldots, 3041975$). (Xem lời giải trang 82.)

Bài 1.7 (Đại học Công nghiệp Thực phẩm)**.** Cho A là ma trận vuông cấp n, thỏa mãn điều kiện $A^k = 0$ với một số nguyên dương k nào đó (ta gọi A là ma trận lũy linh). Chứng minh rằng

1. Ma trận $(I - A)$ khả nghịch

2. Hãy biểu diễn ma trận $(I - A)^{-1}$ qua A.

(Xem lời giải trang 82.)

Bài 1.8 (Đại học Hồng Đức)**.** Tính

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & 8 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{2016}.$$

(Xem lời giải trang 82.)

Bài 1.9 (Đại học Tây Bắc)**.** Cho b, c, d là các số thực khác 0. Hãy tìm hạng của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{b}{c} + \frac{c}{b} & \frac{d}{c} + \frac{c}{d} \\ \frac{b}{c} + \frac{c}{b} & 2 & \frac{d}{b} + \frac{b}{d} \\ \frac{d}{c} + \frac{c}{d} & \frac{d}{b} + \frac{b}{d} & 2 \end{bmatrix}$$

(Xem lời giải trang 83.)

Bài 1.10 (Đại học Tây Bắc)**.** Tìm hạng của ma trận $A_n \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$

$$A_n = \begin{bmatrix} a & b & \ldots & b \\ b & a & \ldots & b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b & b & \ldots & a \end{bmatrix}; a^2 + b^2 \neq 0.$$

(Xem lời giải trang 83.)

Bài 1.11 (Đại học Tân Trào). Cho A là ma trận vuông cấp $n \geq 2$, $A = (a_{ij})$, trong đó $a_{ij} = i + j$, $i, j = 1, 2, ..., n$. Tìm hạng của A. (Xem lời giải trang 84.)

Bài 1.12 (Đại học Hùng Vương). Cho $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tính hạng của hệ véctơ $\{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}\}$ trong $\mathbb{C}$-không gian véctơ $\mathbb{C}^2$ với $\overrightarrow{\alpha} = (|z_1 + z_2|, \frac{1}{2}(|z_1| + |z_2|))$, $\overrightarrow{\beta} = (\left|\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right|, 1)$. (Xem lời giải trang 84.)

Bài 1.13 (Đại học Bách Khoa Hà Nội). Cho $n \in \mathbb{N}^*$ và $A = [a_{ij}]$ là một ma trận thực, vuông cấp n sao cho $A^t A = A$ trong đó A^t là ma trận chuyển vị của A. Chứng minh rằng:

1. $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{trace}(A)$;
2. $0 \leq \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \leq n$.

(Xem lời giải trang 85.)

Bài 1.14 (Đại học Sư phạm Huế). Cho A là một ma trận vuông phức cấp n sao cho $\mathrm{trace}(A^k) = 0$ với mọi $k = 1, \cdots, n$. Chứng minh rằng A là ma trận lũy linh. (Xem lời giải trang 85.)

Bài 1.15 (Đại học Sư phạm Huế). Giả sử $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$ là các ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng tìm được $n + 1$ số $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ không đồng thời bằng 0 sao cho ma trận $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_{n+1} A_{n+1}$ suy biến. (Xem lời giải trang 85.)

Bài 1.16 (Đại học Sư phạm 2). Cho $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ là ma trận lũy linh cấp k. Chứng minh các kết quả sau:
1) Hệ các ma trận $\{I_n, A, ..., A^{k-1}\}$ là hệ ma trận độc lập tuyến tính.
2) $\mathrm{rank}(A + A^2 + ... + A^{2014}) = \mathrm{rank}(A + A^2 + ... + A^{2015})$. (Xem lời giải trang 85.)

Bài 1.17 (Đại học Công nghiệp Thực phẩm). Cho A là ma trận vuông cấp 2 và k là số nguyên dương. Chứng minh rằng $A^k = 0$ khi và chỉ khi $A^2 = 0$. (Xem lời giải trang 86.)

Bài 1.18 (Đại học Tây Bắc). Tìm ma trận $X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ sao cho:

$$X^2 + 2X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(Xem lời giải trang 86.)

Bài 1.19 (Đại học Tân Trào)**.** Cho A là ma trận vuông thực, cấp 4×2, B là ma trận vuông thực, cấp 2×4 thỏa mãn

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tìm ma trận BA. (Xem lời giải trang 86.)

Bài 1.20 (Đại học Tân Trào)**.** Chứng minh rằng: Tồn tại ma trận vuông cấp $n \in \mathbb{N}$ với các phần tử hữu tỷ thỏa mãn $A^{-1} = I + A^T$ khi và chỉ khi n chẵn. Trong đó A^T là ma trận chuyển vị của A; A^{-1} là ma trận nghịch đảo của A. (Xem lời giải trang 87.)

Bài 1.21 (Đại học Tân Trào)**.** Chứng minh rằng: Mọi ma trận vuông là khả nghịch khi và chỉ khi đa thức cực tiểu của nó có hệ số tự do khác không. (Xem lời giải trang 87.)

Bài 1.22 (Đại học Hùng Vương)**.** Cho $A = [a_{ij}]_{i,j=n}$ là một ma trận vuông cấp n thỏa mãn

$$I + A + A^2 + \cdots + A^{2016} = 0.$$

Chứng minh rằng $A^2 - I$ là một ma trận khả nghịch. (Xem lời giải trang 87.)

Bài 1.23 (Đại học Giao thông Vận tải)**.** Cho ma trận vuông cấp hai

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Chứng minh rằng nếu A là ma trận vuông thực cấp hai sao cho $AM = MA$ thì tồn tại hai số thực α, β để

$$A = \alpha I + \beta M,$$

ở đây I là ma trận đơn vị cấp hai.
b) Áp dụng câu a, hãy tìm ma trận vuông thực cấp hai X sao cho

$$X^{2016} - X^{2010} = 6M.$$

(Xem lời giải trang 88.)

Bài 1.24 (Đại học Giao thông Vận tải)**.** Cho $n \geq 3$ và A là một ma trận vuông thực cấp n sao cho các phần tử trên mỗi hàng của A lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng tồn tại các số thực α, β sao cho

$$A^3 + \alpha A^2 + \beta A = 0.$$

(Xem lời giải trang 89.)

Bài 1.25 (Đại học Giao thông Vận tải). Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ và cho 10 ma trận $M_1, M_2, \ldots, M_{10}$ thỏa mãn ba điều kiện sau đây:

i) Các phần tử của các ma trận $M_i, i = 1, 2, \ldots, 10$ là các số nguyên.

ii) Với mỗi chỉ số i, $1 = 1, 2, \ldots, 10$, ma trận M_i hoặc giao hoán với A hoặc giao hoán với B.

iii) $M_1^2 + M_2^2 + \ldots + M_{10}^2 = \begin{pmatrix} 2016 & 0 \\ 0 & -2008 \end{pmatrix}$.

Tính tổng
$$N = M_1^6 + M_2^6 + \ldots + M_{10}^6.$$
(Xem lời giải trang 90.)

Bài 1.26 (Học Viện An ninh Nhân dân). Cho các ma trận thực A, B vuông cấp n thỏa mãn $A^{15} = B^{16} = I_n$ và $AB = BA$. Chứng minh rằng $I_n + A + B$ khả nghịch. (Xem lời giải trang 91.)

Bài 1.27 (Học Viện An ninh Nhân dân). Cho N là ma trận vuông cấp n mà tất cả các phần tử đều bằng $\dfrac{1}{n^2}$ và ma trận thực A vuông cấp n sao cho $A^k = N$ với số nguyên dương k nào đó.

Giả sử $A = [a_{ij}]_n$. Chứng minh rằng $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \geqslant 1$. (Xem lời giải trang 92.)

Bài 1.28 (Đại học Bách Khoa Hà Nội). Cho các ma trận $A,\ B$ vuông cấp n thỏa mãn A là ma trận khả nghịch và $A^2 - B = AB$.

1. Ma trận B có thể là ma trận lũy linh không? Tại sao?
2. Chứng minh rằng $AB = BA$.

(Xem lời giải trang 92.)

2 Định thức

Bài 2.1 (Đại học Tây Bắc). Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & x_4 & -x_3 \\ -x_3 & -x_4 & x_1 & x_2 \\ -x_4 & x_3 & -x_2 & x_1 \end{vmatrix}$$

biết rằng x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình $x^4 - 12x^3 + 4x - 2016 = 0$. (Xem lời giải trang 92.)

Bài 2.2 (Đại học Kỹ Thuật Hậu Cần CAND). Cho hai bộ số thực $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ với $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j, (\forall i \neq j)$ và $a_i \neq b_j, \forall (i,j)$. Xét ma trận $M = [m_{ij}]$ cấp n với $m_{ij} = \dfrac{1}{a_i - b_j}$. Chứng minh rằng $\det(M) \neq 0$. (Xem lời giải trang 93.)

Bài 2.3 (Đại học An Giang). Tính định thức cấp n của ma trận sau trên $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(Xem lời giải trang 94.)

Bài 2.4 (Đại học Hồng Đức). Tính định thức cấp 2016 sau:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

(Xem lời giải trang 94.)

Bài 2.5 (Học Viện An ninh Nhân dân). Cho các số thực $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ và $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$.
Xét ma trận $M = [m_{ij}]$ cấp n, với $m_{ij} = e^{a_i b_j}$. Chứng minh rằng $\det(M) > 0$.
(Xem lời giải trang 95.)

Bài 2.6 (Phạm Văn Đồng). Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} & -1 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Tính A^{2016}. (Xem lời giải trang 97.)

Bài 2.7 (Đại học Đồng Tháp). Chứng minh rằng với các số thực a, b, c, d tùy ý ta có:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

(Xem lời giải trang 98.)

Bài 2.8 (Đại học Công nghiệp Thực phẩm). Tính định thức sau

$$D = \begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}.$$

(Xem lời giải trang 98.)

Bài 2.9 (Đại học Sư phạm 2). Cho A là ma trận vuông cấp n trên trường số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$\det(AA^T + 16I_n) \geq 2^{4n}.$$

(Xem lời giải trang 99.)

Bài 2.10 (Đại học Sư phạm 2). Cho f(x) là đa thức bâc chẵn có hệ số thực thỏa mãn $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $\det f(A) \geq 0$ với mọi ma trận thực vuông cấp n. (Xem lời giải trang 99.)

3 Hệ phương trình

Bài 3.1 (Đại học Tây Bắc). Cho a_{ij} là các số nguyên $(i, j = 1, 2, ..., n)$. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ \frac{1}{2^2}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ \frac{1}{2^n}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{cases}$$

(Xem lời giải trang 99.)

Bài 3.2 (Đại học Kỹ Thuật Hậu Cần CAND). Cho các số nguyên a_{ij} , $(i, j = 1, 2, ..., n)$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \dfrac{1}{2016}x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \dfrac{1}{2016}x_2 \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \dfrac{1}{2016}x_n \end{cases}$$

(Xem lời giải trang 100.)

Bài 3.3 (Đại học Hải Phòng). Giải hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x_1 \quad + 2x_2 \quad + 3x_3 = 4 \\ x_2 \quad + 2x_3 \quad + 3x_4 = 4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-2} + 2x_{n-1} + 3x_n = 4 \\ x_{n-1} + 2x_n \quad + 3x_1 = 4 \\ x_n \quad + 2x_1 \quad + 3x_2 = 4 \end{cases}$$

(Xem lời giải trang 100.)

Bài 3.4 (Phạm Văn Đồng). Cho $A = (a_{ij}) \in M_{2016}(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A^2 = -A$. Giải hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\ 2016}x_{2016} & = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2\ 2016}x_{2016} & = x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{2016\ 1}x_1 + a_{2016\ 2}x_2 + \ldots + a_{2016\ 2016}x_{2016} & = x_{2016} \end{cases}$$

(Xem lời giải trang 101.)

Bài 3.5 (Đại học Nông Lâm Huế). Tìm a để hệ có nghiệm tầm thường

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + \cdots + x_{2015} + x_{2016} = 0 \\ x_1 + ax_2 + \cdots + x_{2015} + x_{2016} = 0 \\ \ldots \\ x_1 + x_2 + \cdots + ax_{2015} + x_{2016} = 0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{2015} + ax_{2016} = 0 \end{cases}$$

(Xem lời giải trang 102.)

Bài 3.6 (Đại học Nông Lâm Huế). Giải phương trình

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 & x^4 \\ 1 & 13 & 13^3 & 13^4 \\ 1 & 17 & 17^3 & 17^4 \\ 1 & 19 & 19^3 & 19^4 \end{vmatrix} = 0.$$

(Xem lời giải trang 102.)

Bài 3.7 (Đại học Bách Khoa Hà Nội). Cho A là ma trận trực giao cấp n lẻ. Chứng minh rằng hệ phương trình $(A - A^t)X = 0$ có nghiệm không tầm thường. (Xem lời giải trang 103.)

Bài 3.8 (Đại học Sư phạm 2). Cho A, B là các ma trận vuông cùng cấp n trên trường số thực. Chứng minh rằng không gian nghiệm của hai phương trình $AX = 0$ và $BX = 0$ là bằng nhau khi và chỉ khi tồn tại ma trân khả nghịch C sao cho $A = CB$. (Xem lời giải trang 103.)

Bài 3.9 (Đại học Nông Lâm Huế). Cho các ma trận vuông cấp $n = 2016$ sau

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{n\times n} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2015 & 2016 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2014 & 2015 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2013 & 2014 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tìm $X_{n\times n}$ để $A \times X = B$ (Xem lời giải trang 104.)

4 Không gian véc tơ và ánh xạ tuyến tính

Bài 4.1 (Đại học Hùng Vương). Cho $n+1$ số thực $a_0, a_1, \ldots, a_n$ đôi một khác nhau¸c nhau. Chứng minh rằng:
(i) Hệ $\{(X - a_k)^n \mid k = 0, 1, \ldots, n\}$ là độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}$-không gian véctơ $\mathbb{R}[X]$ (không gian véctơ các đa thức với hệ số thực).
(ii) $\det\Big([(a_{i-1} - a_{j-1})^n]_{i,j=1,\ldots,n+1}\Big) \neq 0$. (Xem lời giải trang 105.)

Bài 4.2 (Đại học Sư phạm Huế). Cho A là một ma trận vuông phức cấp n và $Z(A) = \{B \mid AB = BA\}$ là tập hợp các ma trận vuông phức cấp n giao hoán với A. Chứng minh $Z(A)$ là không gian véctơ con của không gian véctơ các ma trận vuông phức cấp n và $\dim Z(A) \geq n$. (Xem lời giải trang 105.)

Bài 4.3 (Đại học Sư phạm Huế). Cho A là ma trận vuông thực cấp n có hạng bằng r và $S(A)$ là tập hợp các ma trận vuông thực X cấp n thỏa mãn $AX = 0$. Chứng minh $S(A)$ là không gian véctơ con của không gian véctơ các ma trận vuông thực cấp n và $\dim S(A) = n(n-r)$. (Xem lời giải trang 106.)

Bài 4.4 (Đại học Sư phạm Huế). Cho V là không gian véctơ hữu hạn chiều trên trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, M là một tự đồng cấu của V sao cho $M(x) \neq x$, $\forall x \in V \backslash 0$. Giả sử $M^p = Id_V$, với p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng số chiều của V chia hết cho $p-1$. (Xem lời giải trang 106.)

Bài 4.5 (Đại học An Giang). Cho K là trường và $K_{n+1}[x]$ là không gian véc tơ của các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n trên K. Định nghĩa ánh xạ $\varphi : K_{n+1}\left[x\right] \to K_{n+1}\left[x\right]$ cho bởi $\varphi(p(x)) = p(x+1)$. Chứng minh rằng φ là một toán tử tuyến tính. Tìm ma trận biểu diễn của φ theo cơ sở $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ của $K_{n+1}\left[x\right]$. Tìm các giá trị riêng của φ. Xác định đa thức cực tiểu của φ. (Xem lời giải trang 107.)

Bài 4.6 (Đại học An Giang). Giả sử $\mathbb{R}\left[x\right]$ là không gian véc tơ của các đa thức trên $\mathbb{R}$ Chứng minh rằng ánh xạ đạo hàm $D : \mathbb{R}\left[x\right] \to \mathbb{R}\left[x\right]$ cho bởi $D(p(x)) = p'(x)$ là một toán tử tuyến tính. Chứng minh rằng ánh $T : \mathbb{R}\left[x\right] \to \mathbb{R}\left[x\right]$ cho bởi $T(p(x)) = xp(x)$ là một toán tử tuyến tính. Hãy xác định các toán tử tuyến tính $D+T, DT$ và TD. Chứng minh rằng $DT - TD = Id$ trong đó Id là ánh xạ tuyến tính đồng nhất trên $\mathbb{R}\left[x\right]$ và từ đó suy ra $(TD)^2 = T^2D^2 + TD$. Hãy tìm một ánh xạ tuyến tính $S : \mathbb{R}\left[x\right] \to \mathbb{R}\left[x\right]$ sao cho $DS = Id$. Chứng minh rằng D và S không là đẳng cấu. (Xem lời giải trang 107.)

Bài 4.7 (Đại học An Giang). Chứng tỏ rằng không gian véc tơ $M_n(\mathbb{R})$ là một không gian Euclid với tích vô hướng xác định bởi $\langle A|B\rangle = tr(AB^T)$. Tìm các không gian con bù trực giao của không gian con các ma trận đường chéo và của không gian con các ma trận đối xứng của $M_n(\mathbb{R})$. (Xem lời giải trang 108.)

Bài 4.8 (Đại học Giao thông Vận tải). Cho ánh xạ $\varphi : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ xác định bởi

$$\varphi(P(x)) = P(x^2 + x) - P(x^2) \quad \text{với mọi } P(x) \in \mathbb{R}[x].$$

a) Chứng minh rằng φ là một toán tử tuyến tính.
b) Chứng minh rằng φ không phải là một tự đẳng cấu của $\mathbb{R}[x]$.
c) Tìm tất cả các giá trị riêng của φ. (Xem lời giải trang 109.)

Bài 4.9 (Đại học Đồng Tháp). Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp n trên trường số thực. Ta gọi số thực được xác định bởi công thức $\operatorname{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ là *vết* của ma trận A. Trong không gian $M_n(\mathbb{R})$ các ma trận vuông thực cấp n, cho V là không gian vector con thỏa điều kiện $\operatorname{trace}(X^2) = 0$ với mọi $X \in V$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của $\dim V$ (số chiều của V) (Xem lời giải trang 110.)

Bài 4.10 (Đại học Công nghiệp Thực phẩm). Giả sử V là một không gian Euclide n chiều trên trường số thực với tích vô hướng thông thường

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i, \forall u = (u_i), v = (v_i) \in V,$$

và $D : V \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng tồn tại mộ véc tơ $f \in V$, sao cho

$$D(u) = \langle f, u\rangle, \forall u \in V.$$

(Xem lời giải trang 110.)

5 Giá trị riêng và véc tơ riêng

Bài 5.1 (Đại học Hải Phòng). Tìm các giá trị riêng của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

(Xem lời giải trang 111.)

Bài 5.2 (Đại học Đồng Tháp). Tìm một ma trận vuông thực cấp 3, không phải là ma trận tam giác, sao cho $2015, 2016$ và 2017 là các giá trị riêng của nó. (Xem lời giải trang 111.)

Bài 5.3 (Đại học Đồng Tháp). Cho $\mathbb{V}$ là một không gian vector thực hữu hạn chiều và φ là một toán tử tuyến tính trên $\mathbb{V}$ sao cho $\varphi^k = \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}$, với $k \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng tổng các giá trị riêng của φ nếu có là một số nguyên. (Xem lời giải trang 112.)

6 Đa thức

Bài 6.1 (Đại học Tây Bắc). Cho đa thức $f(x)$ có các hệ số thực thỏa mãn điều kiện $f(x) > 0$ với mọi $x > 0$. Chứng minh rằng tồn tại vô số các số dương a, b sao cho $f^2(a) < f(a+b)(f(a)+b)$. (Xem lời giải trang 112.)

Bài 6.2 (Đại học Tây Bắc)**.** Tìm một đa thức khác đa thức không với hệ số nguyên có bậc nhỏ nhất nhận số thực $x = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ làm nghiệm. (Xem lời giải trang 112.)

Bài 6.3 (Đại học Tây Bắc)**.** Xét $\mathbb{R}-$không gian vec tơ $\mathbb{R}_n[x]$ các đa thức có bậc không vượt quá n. Chứng minh rằng hệ các đa thức

$$f_0(x) = 1, f_k(x) = \frac{x(x-1)...(x-k+1)}{k!}; k = 1, 2, ..., n$$

là một cơ sở của $\mathbb{R}_n[x]$. (Xem lời giải trang 113.)

Bài 6.4 (Đại học Kỹ Thuật Hậu Cần CAND)**.** Gọi $P_2[x]$ là tập hợp tất cả các đa thức bậc không quá 2 trên trường số thực.
Cho ánh xạ $\varphi : P_2[x] \to P_2[x]$ như sau: với $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$
thì $\varphi(p) = (5a_0 + 6a_1 + 2a_2) - (a_1 + 8a_2)x + (a_0 - 2a_2)x^2$
1) Chứng tỏ rằng φ là một toán tử tuyến tính và xác định ma trận A tương ứng của φ đối với cơ sở $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$.
2) Tìm giá trị riêng, vector riêng của A và xem nó có chéo hóa được không (nếu được hãy chéo hóa nó và tìm ma trận chuyển T cùng với ma trận T^{-1} tương ứng). (Xem lời giải trang 113.)

Bài 6.5 (Đại học Hùng Vương)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ thỏa mãn điều kiện

$$P^2(x) - P^2(y) = P(x+y)P(x-y)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. (Xem lời giải trang 114.)

Bài 6.6 (Đại học Hải Phòng)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn:

$$P(x)P(2x^2 - 1) = P(x^2)P(2x - 1).$$

(Xem lời giải trang 114.)

Bài 6.7 (Đại học Bách Khoa Hà Nội)**.** Cho các đa thức $p(x) = x^3 - 4x + 2$ và $q(x) = 4x^3 - 4x - 1$. Gọi a là nghiệm lớn nhất của $p(x)$ và b là nghiệm nhỏ nhất của $q(x)$. Chứng minh rằng: $a + 2b = 0$. (Xem lời giải trang 115.)

Bài 6.8 (Đại học An Giang)**.** Cho A là ma trận vuông cấp n khả nghịch trên K. Chứng minh rằng tồn tại đa thức $p(x) \in K[x]$ sao cho $A^{-1} = p(A)$. (Xem lời giải trang 115.)

Bài 6.9 (Đại học Sư phạm 2)**.** Tìm tất cả các đa thức bậc 5 hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} P(x) + 1 & \text{chia hết cho } (x-1)^3 \\ P(x) - 1 & \text{chia hết cho } (x+1)^3 \end{cases}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. (Xem lời giải trang 115.)

Bài 6.10 (Đại học Sư phạm 2). Cho đa thức $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_{2016}x^{2016}$, $a_0 \cdot a_{2016} \neq 0$ có 2016 nghiệm dương. Chứng minh rằng: $\left|\frac{a_{2015} \cdot a_1}{a_{2016} \cdot a_0}\right| \geq 2016^2$. (Xem lời giải trang 115.)

Bài 6.11 (Đại học Hồng Đức). Cho đa thức $P(x)$ bậc $n \geq 2$, có $n-1$ nghiệm $x_1, ..., x_{n-1}$ phân biệt, trong đó x_1 là nghiệm kép. Chứng minh rằng:

$$\frac{x_2 - x_1}{P'(x_2)} + \frac{x_3 - x_1}{P'(x_3)} + \cdots + \frac{x_{n-1} - x_1}{P'(x_{n-1})} \neq 0$$

(Xem lời giải trang 116.)

Bài 6.12 (Đại học Hồng Đức). Cho $P(x)$ là một đa thức bậc 2016 sao cho $P(k) = \dfrac{k}{k + 2016}$ với mọi $k = -2015, -2014, ..., -1, 0$. Tính $P(1)$. (Xem lời giải trang 116.)

đề sai

Bài 6.13 (Phạm Văn Đồng). Tìm các đa thức $f(x)$ với hệ số hữu tỉ có bậc nhỏ nhất sao cho

$$f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{3}.$$

(Xem lời giải trang 117.)

7 Tổ hợp

Bài 7.1 (Đại học Tân Trào). Chứng minh rằng: Từ 6 số vô tỷ tùy ý luôn có thể chọn ra được 3 số, chẳng hạn, a, b, c sao cho $a + b, b + c, c + a$ cũng là các số vô tỷ. (Xem lời giải trang 117.)

dirichlet

Bài 7.2 (Đại học Hải Phòng). Chứng minh rằng từ 6 số vô tỉ cho trước bao giờ cũng chọn được 3 số vô tỉ (gọi là x, y và z) sao cho các tổng $x + y, y + z, z + x$ đồng thời là số vô tỉ nhưng không thể cùng là số hữu tỉ. (Xem lời giải trang 117.)

Bài 7.3 (Đại học Bách Khoa Hà Nội). Gọi a_n là số các chuỗi tam phân (chuỗi gồm các ký tự '0', '1' hoặc '2') độ dài n sao cho không có hai ký tự '0' hay hai ký tự '1' liền nhau.

1. Tìm công thức truy hồi cho a_n

2. Tìm công thức tường minh cho a_n.

(Xem lời giải trang 118.)

Bài 7.4 (Đại học An Giang)**.** Cho $p(x)$ là đa thức bậc 2 với các hệ số nguyên. Giả sử $p(k)$ chia hết cho 5 với mọi số nguyên k. Chứng minh rằng tất các các hệ số của $p(x)$ đều chia hết cho 5. (Xem lời giải trang 119.)

Bài 7.5 (Đại học Hồng Đức)**.** Cho một ma trận A cấp 2016 có 3024 hệ số 1 và các hệ số còn lại là 0. Chứng minh rằng có thể chọn được 1008 dòng và 1008 cột của A sao cho các số 1 đều nằm trên 1008 dòng và 1008 cột này. (Xem lời giải trang 119.)

Bài 7.6 (Đại học Giao thông Vận tải)**.** Một công ty cây xanh đô thị thực hiện một chương trình thay thế các cây già cỗi và cây không đúng chủng loại bởi các cây mới. Công ty thực hiện chương trình trong sáu tháng. Tháng thứ nhất chặt bỏ 5% số cây do mình quản lý và trồng 200 cây mới. Tháng thứ hai chặt 5% tổng số cây ở cuối tháng thứ nhất (5% của tổng số cây cũ và mới) và trồng 205 cây mới. Các tháng thứ 3, 4, 5, 6 công ty chặt 5% tổng số cây ở cuối tháng trước đó và trồng mới số cây tương ứng là 210, 215, 220, 225. Sau sáu tháng chương trình kết thúc thì tổng số cây do công ty quản lý tăng thêm 600 cây so với lúc chưa thực hiện chương trình. Hãy tính số cây của công ty quản lý sau khi thực hiện xong chương trình. (Xem lời giải trang 119.) toan thuc te

Bài 7.7 (Phạm Văn Đồng)**.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số trong đó có 3 chữ số lẻ khác nhau và 3 chữ số chẵn khác nhau mà mỗi chữ số chẵn có mặt 2 lần?
b. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3, BC = 4$.
Chứng minh rằng từ 7 điểm bất kỳ trong hình chữ nhật $ABCD$ luôn tìm được hai điểm mà khoảng cách giữa chúng không lớn hơn $\sqrt{5}$. (Xem lời giải trang 120.)

Bài 7.8 (Đại học Đồng Tháp)**.** Cho các dãy số $(x_n), (y_n), (z_n), n \in \mathbb{N}$ với $x_0 = a, y_0 = b, z_0 = c$, a, b, c là các số thực cho trước và

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + y_n \\ y_{n+1} &= y_n + z_n \\ z_{n+1} &= z_n \end{cases}$$

Tính $x_{2016}, y_{2016}, z_{2016}$ theo a, b, c. (Xem lời giải trang 120.)

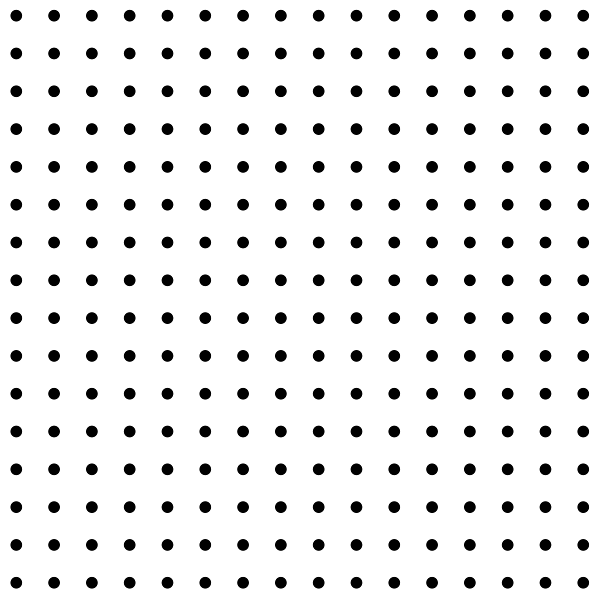
Bài 7.9 (Đại học Đồng Tháp)**.** Trong nhà kho, số lượng **mỗi loại** chuối, táo, lê và xoài là lớn hơn 2016 quả. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 2016 quả để phục vụ cuộc thi Olympic sinh viên năm 2016 quả sao cho

- Số quả chuối là chẵn;
- Số quả táo chia hết cho 5;

- Số quả lê ít hơn 10;
- Số quả xoài không nhiều hơn 1.

(Xem lời giải trang 121.)

Bài 7.10 (Đại học Đồng Tháp)**.** Xác định số lượng hình vuông vẽ được sao cho mọi đỉnh của hình vuông đều nằm trong mảng 16×16 tạo thành từ các dãy điểm như Hình 1 (các điểm cách đều nhau).



(Xem lời giải trang 121.)

Bài 7.11 (Đại học Công nghiệp Thực phẩm)**.** Có 25 bạn nam và 25 bạn nữ cùng ngồi vào một bàn tròn. Chứng minh rằng luôn có một bạn ngồi cạnh hai bạn nữ. (Xem lời giải trang 122.)

Bài 7.12 (Đại học Công nghiệp Thực phẩm)**.** Cho đa thức $P(x)$ bận n thỏa mãn

$$P\left(k\right)=\frac{1}{C_{n+1}^{k}}, k=0,1,2,\cdots,n.$$

Tính $P(n+1)$. (Xem lời giải trang 122.)

Bài 7.13 (Đại học Nông Lâm Huế)**.** Có 13 viên bi kích thước giống nhau, trong đó có 1 viên bi lạ, có trọng lượng khác những viên bi còn lại (nặng hơn hoặc nhẹ hơn). Hãy chỉ cách dùng cân tiểu ly 3 lần để tìm ra viên bi lạ đó. (Xem lời giải trang 122.)

Chương 3

Đề đề xuất môn Giải tích

1 Dãy số

Bài 1.1 (Đại học Đồng Tháp). Cho (x_n) là dãy số thực bị chặn thỏa mãn điều kiện

$$x_{n+2} \leq \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n), \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Chứng minh rằng dãy số (X_n) xác định bởi $X_n := \max\{x_n, x_{n+1}\}$ hội tụ.
(b) Chứng minh rằng dãy số (x_n) hội tụ. (Xem lời giải trang 125.)

Bài 1.2 (Đại học Kỹ thuật Hậu cần CAND). Cho đa thức $P_n(x) = x^n - x - 2016 \quad (n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2)$. Chứng minh rằng:

1. $P_n(x)$ có duy nhất nghiệm trong khoảng $(1, 2016)$;
2. Gọi nghiệm trên là γ_n, khi đó dãy γ_n, $n = 2, 3 \ldots$, là đơn điệu giảm.

(Xem lời giải trang 125.)

Bài 1.3 (Đại học Hùng Vương). Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi:

$$x_1 = 5;$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{7}(x_n^2 - x_n + 16), \ \forall n \geq 1.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i + 3}$. (Xem lời giải trang 126.)

Bài 1.4 (Đại học Sư phạm Huế). Cho dãy số $(x_n)_n$ xác định như sau:

$$\begin{cases} x_1 &= 1, \\ x_{n+1} &= (n+1)(x_n + 1), n \geq 1. \end{cases}$$

Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)$. (Xem lời giải trang 126.)

Bài 1.5 (Đại học An Giang). Cho dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ xác định bởi

$$\begin{cases} a_1 \geq 0 \\ a_{n+1} = 2016^n a_n^2, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Tìm các giá trị đầu a_1 để $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. (Xem lời giải trang 126.)

Bài 1.6 (Đại học Sư phạm Hà Nội 2). Cho $\{x_n\}$ thỏa mãn $\lim\limits_{n\to+\infty} (2x_{n+1} - x_n) = x$. Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. (Xem lời giải trang 127.)

Bài 1.7 (Đại học Hồng Đức). Cho dãy số x_n thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 = 2015, \\ \dfrac{x_1}{1} + \dfrac{x_2}{2} + \cdots + \dfrac{x_n}{n} = (n+2016)x_{n+1} \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n}$. (Xem lời giải trang 127.)

Bài 1.8 (Đại học Hồng Đức).

1. Chứng minh rằng dãy $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ tăng nghiêm ngặt.
2. Tìm giới hạn
$$\lim_{n\to+\infty} n[(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} - (1 + \frac{1}{n})^n].$$

(Xem lời giải trang 127.)

Bài 1.9 (Đại học Tây Bắc). Cho $u_0 = 0, u_n = \dfrac{u_{n-1}}{2016} + (-1)^n, \forall n \geq 1$. Hãy tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^2$. (Xem lời giải trang 128.)

Bài 1.10 (Đại học Giao thông Vận tải). Cho dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $x_1 = b$ và

$$x_{n+1} = x_n^2 + (1-2a)x_n + a^2, \;\; n = 1, 2, 3, ...$$

Tìm tất cả các giá trị của a, b sao cho dãy này có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó. (Xem lời giải trang 129.)

Bài 1.11 (Đại học Phạm Văn Đồng). Cho dãy số (u_n) được xác định bởi công thức truy hồi như sau:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{5} \\ u_{n+1} = \dfrac{2016u_n}{2015u_n + 1}, \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số trên. Từ đó tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. (Xem lời giải trang 129.)

Bài 1.12 (Đại học Xây Dựng). Tìm các số thực dương α sao cho dãy số sau hội tụ

$$u_1 = \frac{\alpha}{2}, u_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha + u_n^2) \quad \text{với} \quad \forall n \geq 1.$$

Xác định $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ khi đó. (Xem lời giải trang 129.)

Bài 1.13 (Đại học Ngân Hàng TP. Hồ Chí Minh). Cho dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 2, \\ u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = 1,\ \text{với mọi } n \geq 1. \end{cases}$$

Tính giới hạn sau

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}}.$$

(Xem lời giải trang 130.)

Bài 1.14 (Đại học Tây Bắc). Tính u_{2016} biết dãy số $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cho bởi

$$\begin{cases} u_0 = 2; \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2u_{n-1} + n - 2. \end{cases}$$

(Xem lời giải trang 130.)

Bài 1.15 (Đại học Tây Bắc). Tính u_{2016} biết dãy số $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cho bởi

$$\begin{cases} u_0 = 1; \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 3u_{n-1} + 2^n. \end{cases}$$

(Xem lời giải trang 131.)

Bài 1.16 (Đại học Tây Bắc). Cho $f : [1; +\infty) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(x+1) = 2016f^2(x) + f(x), \forall x \in [1; +\infty)$, với $f(1) = 2016^{-1}$. Hãy tính

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{f(1)}{f(2)} + \frac{f(2)}{f(3)} + \cdots + \frac{f(n)}{f(n+1)}\right].$$

(Xem lời giải trang 131.)

Bài 1.17 (Đại học Ngân Hàng TP. Hồ Chí Minh). Tính giới hạn sau

$$\lim_{n\to\infty} \left(n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n+k]{e}}\right).$$

(Xem lời giải trang 131.)

2 Chuỗi số

Bài 2.1 (Đại học Kỹ thuật Hậu cần CAND). Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định như sau:

$$a_1 = -\frac{1}{2}\ ,\ a_n - (2 + a_n)a_{n+1} = 0\ , (\forall n \geqslant 1)$$

Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ, nhưng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ không hội tụ và tổng của chuỗi này bằng $+\infty$. (Xem lời giải trang 132.)

Bài 2.2 (Đại học Hồng Đức). Cho $u_n = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}$.

1. Tìm giới hạn
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n^3}}.$$

2. Tùy theo $s \in \mathbb{R}$, hãy xét sự hội tụ của chuỗi
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n^s}.$$

(Xem lời giải trang 133.)

Bài 2.3 (Đại học Đồng Tháp). Cho (a_n) là dãy số thực sao cho chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.
(Xem lời giải trang 133.)

Bài 2.4 (Đại học An Giang). Cho dãy số $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ xác định bởi

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(n-k)!}.$$

Chứng minh chuỗi sau hội tụ và tìm tổng của chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

(Xem lời giải trang 133.)

Bài 2.5 (Đại học Sư phạm Hà Nội 2). Cho dãy $\{x_n\}$ thỏa mãn $x_1 \in (0, 1)$, $x_{n+1} = x_n - nx_n^2$ với $n \geq 1$. Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ.
(Xem lời giải trang 134.)

Bài 2.6 (Đại học Giao thông Vận tải). Giả sử $\{a_n\}$ là dãy số dương và $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ. Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{(n-1)/n}$ cũng hội tụ. (Xem lời giải trang 134.)

Bài 2.7 (Đại học Xây Dựng). Cho dãy số dương $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ thỏa mãn $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ phân kì. (Xem lời giải trang 135.)

Bài 2.8 (Học Viện An ninh Nhân dân). Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định như sau:

$$x_1 = -\frac{1}{2}\ ,\ x_n - (1 + x_n(1 + x_n))x_{n+1} = 0\ (n \geqslant 1)$$

Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1 + x_n)$ hội tụ và tính tổng của chuỗi này. (Xem lời giải trang 135.)

3 Hàm số

Bài 3.1 (Đại học Đồng Tháp). Giả sử $C[0,1]$ là tập hợp tất cả các hàm giá trị thực liên tục trên $[0,1]$. Trên $C[0,1]$ xét hai mêtric d, ρ sau

$$d(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|,\ \rho(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx \text{ với mọi } f,g \in C[0,1].$$

Chứng minh rằng ánh xạ đồng nhất $\mathrm{id} : (C[0,1], d) \longrightarrow (C[0,1], \rho)$ liên tục nhưng ánh xạ đồng nhất $\mathrm{id} : (C[0,1], \rho) \longrightarrow (C[0,1], d)$ không liên tục. (Xem lời giải trang 136.)

Bài 3.2 (Đại học Đồng Tháp). Cho (X,d) là không gian mêtric đầy đủ và $f : X \to X$ là ánh xạ liên tục sao cho tồn tại $\alpha, \beta \in [0,1)$ với $\alpha + \beta < 1$ thỏa mãn

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha\frac{d(x, f(x))d(y, f(y))}{2016 + d(x,y)} + \beta d(x,y)$$

với mọi $x, y \in X$. Lấy $x_0 \in X$, xét dãy (x_n) xác định bởi

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1}) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Chứng minh (x_n) là dãy Cauchy.
(b) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất $x^* \in X$ sao cho $x^* = f(x^*)$. (Xem lời giải trang 136.)

Bài 3.3 (Đại học Kỹ thuật Hậu cần CAND). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ $(a < b)$, và khả vi trong khoảng (a, b). Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{2}{b-c} < f'(c) < \frac{2}{a-c}.$$

(Xem lời giải trang 137.)

Bài 3.4 (Học Viện An ninh Nhân dân). Tính giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\sin^n x + \cos^n x}.dx$$

(Xem lời giải trang 137.)

Bài 3.5 (Đại học Tây Bắc).

1. Tìm đa thức bậc thấp nhất nhận giá trị cực đại bằng 6 tại $x = 1$ và cực tiểu bằng 2 tại $x = 3$.
2. Cho đa thức $P(x)$ với bậc nhỏ hơn 2016 sao cho cả ba giá trị $P(0), P(1), P(-1)$ đều khác không. Giả sử đạo hàm cấp 2013 của $\dfrac{P(x)}{x^3 - x}$ viết dưới dạng $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ với $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức. Hãy tìm bậc nhỏ nhất có thể của $f(x)$.

(Xem lời giải trang 138.)

Bài 3.6 (Đại học Tây Bắc). Chứng minh rằng luôn tồn tại ít nhất một số thực $x \in (0; 1)$ sao cho ta có

$$\int_a^1 \frac{t^{2015}dt}{(1+t)(1+t^2)\dots(1+t^{2016})} = \frac{a^{2016}}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^{2016})}.$$

(Xem lời giải trang 139.)

Bài 3.7 (Đại học Tây Bắc). Tìm tập giá trị của hàm số sau

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}, \forall x > 1.$$

(Xem lời giải trang 139.)

Bài 3.8 (Đại học Tây Bắc). Tính giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \ln(1+x) - \ln(1+\sin x)}{\sin^4 \frac{x}{2}}.$$

(Xem lời giải trang 140.)

4 Phép tính vi phân

Bài 4.1 (Đại học Đồng Tháp). Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số khả vi đến cấp hai, thỏa mãn $f(0) = 1, f'(0) = 0$ và $f''(x) - 7f'(x) + 12f(x) + 24 \geq 0$ với mọi $x \in (0, +\infty)$. Chứng minh rằng $f(x) \geq 12e^{3x} - 9e^{4x} - 2$ với mọi $x \in (0, +\infty)$. (Xem lời giải trang 141.)

Bài 4.2 (Đại học Kỹ thuật Hậu cần CAND). Cho hàm $f \in C^1[0,1]$ (tức là f khả vi liên tục trên $[0,1]$) thỏa mãn

$$\int_0^1 f(x)dx = 1\ ,\ \int_0^1 xf(x)dx = 2\ ,\ \int_0^1 x^2 f(x)dx = 3.$$

Chứng minh rằng với mỗi $k \in [-24, 60]$ tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $f'(c) = k$. (Xem lời giải trang 141.)

Bài 4.3 (Đại học Hùng Vương). Cho $f(x)$ là hàm khả vi cấp 2 trên $[a,b]$ và trên đoạn này f có ít nhất ba không điểm khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho

$$f''(c) + 8064f(c) = 2020f'(c).$$

(Xem lời giải trang 141.)

Bài 4.4 (Đại học Sư phạm Huế). Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi cấp ba và có ít nhất 5 nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng $f + 6f' + 12f'' + 8f'''$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt. (Xem lời giải trang 142.)

Bài 4.5 (Đại học Sư phạm Huế). Cho a, b, c là các số thục thỏa mãn $a < b < c$ và f là hàm khả vi trên $[a,c]$. Chứng minh tồn tại $c_1 \in (a,b)$ và $c_2 \in (a,c)$, $c_1 < c_2$ sao cho $f(a) - f(b) = (a-b)f'(c_1)$ và $f(a) - f(c) = (a-c)f'(c_2)$ (Xem lời giải trang 142.)

Bài 4.6 (Đại học An Giang). Giả sử f là một hàm khả vi liên tục đến cấp hai thỏa $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ và

$$f''(x) - 2016f'(x) + 2015f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0, \infty)\,.$$

Chứng minh rằng

$$f(x) \geq \frac{1}{2014}\left(e^{2015x} - e^x\right), \forall x \in [0, \infty)\,.$$

(Xem lời giải trang 142.)

Bài 4.7 (Đại học Sư phạm Hà Nội 2)**.** Cho f là hàm khả vi trên đoạn $[0,1]$ và thỏa mãn $f(0)=0, f(1)=1$. Chứng minh rằng tồn tại các số khác nhau $x_1, x_2, \ldots, x_{2016}$ trong $[0,1]$ sao cho

$$\sum_{i=1}^{2016} \frac{1}{f'(x_i)} = 2016.$$

(Xem lời giải trang 143.)

Bài 4.8 (Đại học Sư phạm Hà Nội 2)**.** Cho f là đa thức với hệ số thực và $f(x_0) \neq 0, x_0 \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng tồn tại đa thức g với các hệ số thực sao cho đa thức $p(x) := f(x)g(x)$ có các tính chất

$$p(x_0) = 1, p'(x_0) = 0, p''(x_0) = 0.$$

(Xem lời giải trang 143.)

Bài 4.9 (Đại học Sư phạm Hà Nội 2)**.** Giả sử f là hàm số có đạo hàm tới cấp 2 trên $\mathbb{R}$. Giả sử

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty, \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)| < \infty.$$

Chứng minh rằng $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq 2\sqrt{\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|}$. (Xem lời giải trang 143.)

Bài 4.10 (Đại học Hồng Đức)**.** Cho hàm số $f : [a,b] \subset (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục. Chứng minh rằng tồn tại $c, d \in (a,b)$ thỏa mãn $c < d$ và

$$c(c-a)f'(c) = a(b-c)f'(d).$$

(Xem lời giải trang 143.)

Bài 4.11 (Đại học Giao thông Vận tải)**.** a) Cho $f(x)$ liên tục trên $[0, \frac{\pi}{2}]$ và khả vi trong $(0, \frac{\pi}{2})$ sao cho $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$ và $f^2(x) + [f'(x)]^2 \neq 0$ với mọi $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ sao cho

$$\tan c = \frac{f(c) + f'(c)}{f(c) - f'(c)}.$$

b) Cho $f : [0,1] \to [0,\infty)$ là một hàm liên tục. Khảo sát sự hội tụ của dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ cho bởi

$$u_n = n\int_0^1 [f(t)]^n dt, \ \ n = 1, 2, 3, ...$$

(Xem lời giải trang 144.)

Bài 4.12 (Học Viện An ninh Nhân dân)**.** Cho hàm f khả vi liên tục đến cấp 4 trên $[-1, 1]$ và thỏa mãn $f'(-1) = f'(1)$.
Chứng minh rằng tồn tại $c \in (-1, 1)$ sao cho

$$2f(0) - f(-1) - f(1) = \frac{1}{12} f^{(4)}(c)$$

(Xem lời giải trang 144.)

Bài 4.13 (Đại học Phạm Văn Đồng)**.** Giả sử f là hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0, 1]$ và thỏa mãn điều kiện $f(0) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm $x_0 \in [0, 1]$ sao cho

$$|f'(x_0)| \geq 4 \int_0^1 |f(x)| dx.$$

(Xem lời giải trang 145.)

Bài 4.14 (Đại học Phạm Văn Đồng)**.** Giả sử $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là hàm số khả vi hai lần trên đoạn $[0, 1]$, thỏa mãn điều kiện $f(1) \geq 0$, và với mọi $x \in [0, 1]$: $f''(x) \leq 1$. Chứng minh rằng

$$f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{4}.$$

(Xem lời giải trang 145.)

Bài 4.15 (Đại học Xây Dựng)**.** Cho f là hàm số liên tục trên $[a, b]$, g là hàm số khả vi trên $[a, b]$ thỏa mãn $(f(a) - g'(a))(f(b) - g'(b)) < 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = g'(c)$. (Xem lời giải trang 146.)

Bài 4.16 (Đại học Ngân Hàng TP. Hồ Chí Minh)**.** Tìm tất cả các hàm số $f : [0, 1] \to [0, 1]$ thỏa mãn

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|,$$

với mọi $x, y \in [0, 1]$. (Xem lời giải trang 146.)

Bài 4.17 (Đại học Tây Bắc)**.** Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn điều kiện $f(x) = -f(x^2), \forall x \in \mathbb{R}$. (Xem lời giải trang 147.)

Bài 4.18 (Đại học Tây Bắc)**.** Cho hàm f khả vi trên đoạn $[a; b]$ thỏa mãn điều kiện

$$f(a) = f(b) = 0 \text{ và } f(x) \neq 0, \forall x \in (a; b).$$

Chứng minh rằng luôn tồn tại dãy $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (a; b)$ sao cho

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f'(x_n)}{(\sqrt[n]{e} - 1) f(x_n)} = 2016.$$

(Xem lời giải trang 147.)

5 Phép tính tích phân

Bài 5.1 (Đại học Đồng Tháp). Tính tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha \sin x + \beta \cos x}{\alpha \cos x + \beta \sin x} dx$ với $\alpha \geq \beta > 0$. (Xem lời giải trang 147.)

Bài 5.2 (Đại học Kỹ thuật Hậu cần CAND). Cho hàm $f \in C^2[-1,1]$ (tức là f khả vi liên tục đến cấp 2 trên $[-1,1]$) thỏa mãn $f(0) = 0$. Chứng minh rằng

$$\int_{-1}^{1} [f''(x)]^2 dx \geqslant 10\Big[\int_{-1}^{1} f(x)dx\Big]^2$$

(Xem lời giải trang 148.)

Bài 5.3 (Đại học Hùng Vương). Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) = 2;\ \min\limits_{x\in[0,1]} f(x) = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng

$$\int\limits_0^1 f(x)dx. \int\limits_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{25}{8}.$$

(Xem lời giải trang 148.)

Bài 5.4 (Đại học Sư phạm Huế). Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$(a^2 + ab + b^2) \int_a^b f(x)dx = 3 \int_a^b x^2 f(x)dx,$$

với mọi $a, b \in \mathbb{R}$. (Xem lời giải trang 149.)

Bài 5.5 (Đại học Sư phạm Huế). Cho các hàm số f, g liên tục và nhận giá trị dương trên $[0,1]$. Giả sử fg và $\frac{f}{g}$ đồng biến trên $[0,1]$. Chứng minh rằng

$$\int\limits_0^1 f(x)dx \int\limits_0^1 \frac{dx}{f(x)} \geq \int\limits_0^1 g(x)dx \int\limits_0^1 \frac{dx}{g(x)}.$$

(Xem lời giải trang 149.)

Bài 5.6 (Đại học Sư phạm Huế). Cho $f : [a,b] \to [0,\infty)$ là hàm liên tục và khác 0. Tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int\limits_a^b f^{n+1}(x)dx}{\int\limits_a^b f^n(x)dx}.$$

(Xem lời giải trang 149.)

Bài 5.7 (Đại học An Giang)**.** Cho f là một hàm liên tục trên $[0, 1]$ sao cho với mỗi $x \in [0, 1]$

$$\int_0^x f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2}.$$

Chứng minh rằng

$$\int_0^1 f^2(t)dt \geq \frac{1}{3}.$$

(Xem lời giải trang 150.)

Bài 5.8 (Đại học Sư phạm Hà Nội 2)**.** Cho f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn

$$f(x) \geq 0, \forall x \geq 0 \text{ và } \int_0^\infty f(x)dx < \infty.$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_0^n xf(x)dx = 0.$ (Xem lời giải trang 150.)

Bài 5.9 (Đại học Hồng Đức)**.** Cho hàm số $f \in C^1([a, b])$ thỏa mãn $f(a) \geq 0$ và $f'(x) \geq (t-2)(x-a)^{t-3}$, $\forall x \in [a, b]$, $t \geq 3$. Chứng minh rằng

$$\left(\int\limits_a^b f(x)dx\right)^{t-1} \leq \int\limits_a^b [f(x)]^t dx.$$

(Xem lời giải trang 151.)

Bài 5.10 (Đại học Giao thông Vận tải)**.** Giả sử $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi sao cho đạo hàm của nó liên tục trên $[0, 1]$ và n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)dx\right] = \frac{f(0)-f(1)}{2}.$$

(Xem lời giải trang 151.)

Bài 5.11 (Đại học Phạm Văn Đồng)**.** Giả sử f là hàm số khả vi liên tục trên đoạn $[0, 1]$, thỏa mãn điều kiện $f(0) = 0$, và với mọi $x \in [0, 1] : 0 \leq f'(x) \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \geq \int_0^1 (f(x))^3 dx.$$

Cho một ví dụ về hàm f mà đẳng thức xảy ra. (Xem lời giải trang 152.)

Bài 5.12 (Đại học Xây Dựng). Giả sử f là hàm không âm trên $[0,1]$ và $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 \left(x - \int_0^1 uf(u)du\right)^2 f(x)dx \leq \frac{1}{4}.$$

(Xem lời giải trang 153.)

Bài 5.13 (Học Viện An ninh Nhân dân). Chứng minh bất đẳng thức

$$\sin x \cdot \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) \geqslant 2x^2\ , -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

(Xem lời giải trang 154.)

Bài 5.14 (Đại học Tây Bắc). Tìm giới hạn sau

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2} dx.$$

(Xem lời giải trang 154.)

Bài 5.15 (Đại học Giao thông Vận tải). Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi sao cho đạo hàm của nó liên tục trên $[0,1]$ và $f(0) = 0$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 |f'(x)f(x)|dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|^2 dx.$$

(Xem lời giải trang 154.)

6 Phương trình hàm

Bài 6.1 (Đại học Đồng Tháp). Cho $\lambda \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại $x = 0$ và thỏa mãn điều kiện sau

$$f(x+y) = f(\lambda x) + f(\lambda y) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

(Xem lời giải trang 155.)

Bài 6.2 (Đại học Hùng Vương). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(f(x)) = -2015f(x) + 2016x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(Xem lời giải trang 155.)

Bài 6.3 (Đại học Hùng Vương)**.** Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(xf(y)-x)=xy-f(x),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

(Xem lời giải trang 156.)

Bài 6.4 (Đại học An Giang)**.** Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xy)+f(x-y)+f(x+y+1)=xy+2x+1,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

(Xem lời giải trang 156.)

Bài 6.5 (Đại học Sư phạm Hà Nội 2)**.** Tìm tất cả các cặp hàm số $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=g(x+y),\forall x\neq y.$$

(Xem lời giải trang 157.)

Bài 6.6 (Đại học Hồng Đức)**.** Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+f(x+y))+f(xy)=x+f(x+y)+yf(x),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

(Xem lời giải trang 158.)

Bài 6.7 (Đại học Giao thông Vận tải)**.** Tìm tất cả các hàm liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$3f(2x+1)=f(x)+5x\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

(Xem lời giải trang 159.)

Bài 6.8 (Đại học Phạm Văn Đồng)**.** Tìm tất cả các hàm số $f:[1,+\infty)\to[1,+\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xf(y))=yf(x),\quad \forall x,y\in[1,+\infty).$$

(Xem lời giải trang 159.)

Bài 6.9 (Đại học Xây Dựng)**.** Tìm tất cả hàm số thực $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(f(\frac{x}{2})+f(\frac{x+1}{2})\right),\forall x\in[0,1].$$

(Xem lời giải trang 160.)

Bài 6.10 (Đại học Ngân Hàng TP. Hồ Chí Minh). Cho hàm số liên tục $f : [0; 1] \to [0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x) + f(1 - x) = 1 \quad \text{với mọi } x \in [0; 1].$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{8} < \int_0^1 x f(x)\, dx < \frac{3}{8}.$$

Có thể thay $\frac{1}{8}$ bởi số lớn hơn hoặc $\frac{3}{8}$ bởi số nhỏ hơn để kết luận trên vẫn còn đúng hay không? (Xem lời giải trang 160.)

Bài 6.11 (Đại học Tây Bắc). Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi $f(x) = x^{2017} + x - 1$.

1. Chứng minh ánh xạ f là song ánh.
2. Giải phương trình $f(x) = f^{-1}(x), x \in \mathbb{R}$.

(Xem lời giải trang 162.)

Phần III

HƯỚNG DẪN GIẢI

Chương 4

Đáp án đề thi chính thức

1 Đáp án đề thi dành cho Học sinh THPT

NGÀY THI THỨ NHẤT

A. Khái niệm cấp

Bài 1.1. Xét luỹ thừa a^m $(m \geq 1)$. Do chỉ có một số hữu hạn các lớp đồng dư modulo n (có n lớp cả thảy) nên phải tồn tại $m_1 > m_2$ để $a^{m_1} \equiv a^{m_2} \pmod{n}$. Do $(a, m) = 1$ đồng dư này dẫn đến $a^{m_1 - m_2} \equiv 1 \pmod{n}$. Như vậy, tập các số nguyên dương k sao cho $a^k \equiv 1 \pmod{n}$ là không rỗng, nói riêng có một phần tử nhỏ nhất c.

Bài 1.2. Nếu $c = \mathrm{ord}_n(a) \mid k$ thì rõ ràng $n \mid a^c - 1 \mid a^k - 1$. Đảo lại, giả sử k là một số nguyên dương thoả mãn $a^k \equiv 1 \pmod{n}$. Viết $k = cq + r$ với $0 \leq r < c$. Thế thì $1 \equiv a^k = (a^c)^q \cdot a^r \equiv a^r \pmod{n}$. Từ định nghĩa của c ta phải có $r = 0$, nghĩa là $c \mid k$.

Bài 1.3. Theo định lý Euler, $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. Từ đó, kết luận của bài toán 1.2 cho thấy $c \mid \phi(n)$.

B. Sự tồn tại số nguyên tố trong một số cấp số cộng

Bài 1.4. Giả sử chỉ tồn tại hữu hạn số nguyên tố $p_1, \ldots, p_n$ có dạng $4k + 1$. Xét số $4\prod_{i=1}^{n} p_i - 1$. Số này nhất thiết phải có một ước nguyên tố dạng $4k+3$. Nhưng ước nguyên tố này không thể là một trong các p_i, vô lý.

Bài 1.5. (i) Giả sử $p \mid n^2 + 1$, p nguyên tố $\equiv 3 \pmod{4}$. Theo định lý Fermat

nhỏ $n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, nghĩa là $(-1)^{2k+1} \equiv 1 \pmod p$, vô lý.
(ii) Giả sử chỉ có một số hữu hạn các số nguyên tố $\equiv 1 \pmod 4$, là $p_1, \ldots, p_n$. Xét số $(2\prod_{i=1}^n p_i)^2 + 1$. Theo (i), một ước nguyên tố bất kì của số này (hiển nhiên là lẻ) đều $\equiv 1 \pmod 4$ và không thể là một trong các p_i được, vô lý.

Bài 1.6. (i) Xét $p \mid n^2 - n + 1$, nguyên tố, $p \neq 3$. Chú ý rằng do $n^2 + n - 1$ là lẻ, ta phải có $n \equiv 1 \pmod 6$ hoặc $n \equiv 5 \pmod 6$. Giả sử $p \equiv 5 \pmod 6$. Ta có $n^3 \equiv -1 \pmod p$. Từ đó

$$n^{p-1} \equiv n^{6k+4} \equiv (-1)n \pmod p.$$

Kết hợp với định lý Fermat nhỏ, ta suy ra $n \equiv -1 \pmod p$. Thế nhưng khi đó $n^2 - n + 1 \equiv 3 \pmod p$, vô lý.
(ii) Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố $\equiv 1 \pmod 6$ là $p_1, \ldots, p_r$. Xét $n = 3\prod_{i=1}^r p_i$. Khi đó một ước nguyên tố của $n^2 - n + 1$ (hiển nhiên $\neq 3$) đều $\equiv 1 \pmod 6$ và khác các ước p_i, vô lý.

C. Sự tồn tại số nguyên tố trong cấp số cộng dạng $nk + 1$

Bài 1.7. Chú ý rằng $p \mid k^k - 1$ nên $(k, p) = 1$ và theo tính chất về cấp thì $c \mid k$. Đặt $k = ck'$. Như vậy,

$$k^k - 1 = k^{ck'} - 1 = (k^c - 1)(k^{c(k'-1)} + k^{c(k'-2)} + \cdots + 1).$$

Bởi vì $k^c \equiv 1 \pmod p$, và chú ý rằng $(p, k') = 1$, nên ta có

$$k^{c(k'-1)} + k^{c(k'-2)} + \cdots + 1 \equiv 1 + 1 + \cdots + 1 = k' \not\equiv 0 \pmod p.$$

Như vậy, $k^k - 1$ là tích của $k^c - 1$ với một số nguyên không chia hết cho p. Vì vậy, $v_p(k^k - 1) = v_p(k^c - 1)$. Lưu ý rằng, với mọi d sao cho $c \mid d \mid k$ thì $k^c - 1 \mid k^d - 1 \mid k^k - 1$ nên rõ ràng ta cũng phải có $v_p(k^c - 1) = v_p(k^d - 1) = v_p(k^k - 1)$.

Bài 1.8. Ta vẫn ký hiệu c cho cấp của k modulo p. Ta biết rằng với mọi d, $p \mid k^d - 1$ khi và chỉ khi $c \mid d$. Hơn nữa, nếu ta đặt $v = v_p(k^k - 1)$ thì theo nhận xét cuối của trong lập luận của bài toán 1.7 ở trên, với mọi $d \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$,

$$p \mid k^d - 1 \implies v_p(k^d - 1) = v.$$

Từ đó suy ra, $v_p(A) = s_a v, v_p(B) = s_b v$, trong đó s_a (tương ứng, s_b) kí hiệu số các phần tử $d \in \mathcal{D}_1$ (tương ứng, $d \in \mathcal{D}_2$) sao cho $c \mid d$, nói cách khác, sao cho $\frac{k}{d}$ là ước của $\frac{k}{c}$.
Chú ý rằng theo định lý Fermat nhỏ $c \mid p - 1$ nên nếu $c = k$ thì $k \mid p - 1$

hay $p \equiv 1 \pmod{k}$, trái với giả thiết bài toán. Như vậy, $c < k$. Ta kí hiệu $q_1, \ldots, q_N$ là tất cả các ước nguyên tố phân biệt của $\frac{k}{c}$ (như vậy, $N \geq 1$). Thế thì s_a bằng số các cách chọn $1, 3, \ldots,$ phần tử của tập $\{q_1, \ldots, q_N\}$, nói cách khác, bằng $\binom{N}{1} + \binom{N}{3} + \cdots = \frac{1}{2}\left[(1+1)^N - (1-1)^N\right] = 2^{N-1}$. Tương tự, s_b bằng số các cách chọn $2, 4, \ldots,$ phần tử của tập $\{q_1, \ldots, q_N\}$ (chú ý điều kiện $d \neq k$, hay $\frac{k}{d} \neq 1$), do đó bằng $\frac{1}{2}\left[(1+1)^N + (1-1)^N\right] - 1 = 2^{N-1} - 1$. Ta suy ra $v_p(A) = 2^{N-1}v = v_p(B) + v_p(k^k - 1)$.

Bài 1.9. Ta suy luận bằng phản chứng. Giả sử mọi ước nguyên tố của $k^k - 1$ đều $\not\equiv 1 \pmod{k}$. Chú ý rằng mọi ước nguyên tố của A và B đều là ước nguyên tố của một nhân tử có dạng $k^d - 1$ với $d \mid k$ nào đó nên cũng là ước của $k^k - 1$. Vì thế, theo kết luận của bài toán 1.8 ở trên, ta phải có

$$A = (k^k - 1)B. \quad (*)$$

Bây giờ, chú ý rằng $\mathcal{D} \neq \emptyset$ nên ta có thể chọn d_0 là phần tử nhỏ nhất của $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \sqcup \mathcal{D}_2$. Thế thì mọi $d \in \mathcal{D}, d \neq d_0$ ta có $d > d_0$ và $k^d - 1 \equiv -1 \pmod{k^{d_0+1}}$, cũng như $k^k - 1 \equiv -1 \pmod{k^{d_0+1}}$. Như vậy, trong đẳng thức $(*)$ ở trên, mỗi nhân tử, ngoại trừ nhân tử $k^{d_0} - 1$, đều $\equiv -1 \pmod{k^{d_0+1}}$. Chính vì vậy, rút gọn $(*)$ modulo k^{d_0+1} cho ta $(-1)^r \equiv (-1)^s(k^{d_0} + 1) \pmod{k^{d_0+1}}$ với r, s nào đó. Thế nhưng hiển nhiên đồng dư trên không thể xảy ra. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ sự tồn tại của một ước nguyên tố của $k^k - 1$ đồng dư với 1 modulo k.

Bài 1.10. Việc tồn tại vô hạn số nguyên tố lẻ là hiển nhiên (chẳng hạn được suy ra từ bài 1.4) nên ta sẽ giả sử $k \geq 3$. Kết luận của bài toán 1.9 cho thấy tồn tại ít nhất một số nguyên tố $\equiv 1 \pmod{k}$. Giả sử chỉ tồn tại một số hữu hạn các số nguyên tố có dạng như vậy và gọi $p = kn_0 + 1$ là số nguyên tố lớn nhất trong các số nguyên tố $\equiv 1 \pmod{k}$. Thế nhưng, vẫn theo kết luận của 1.9, bây giờ áp dụng cho kn_0 thay vì k, có ít nhất một số nguyên tố $q \equiv 1 \pmod{2kn_0}$. Thế nhưng khi đó $q \equiv 1 \pmod{k}$ và $q > p$, mâu thuẫn với tính cực đại của p.

NGÀY THI THỨ HAI

Bài 1.11. Bằng cách xét các giá trị tại -1 và 1, giả thiết $|ax + b| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$ đem lại $|-a + b| \leq 1$ và $|a + b| \leq 1$.

(i) Từ bất đẳng thức tam giác, ta có $|2a| = |(a + b) - (-a + b)| \leq |a + b| + |-a + b| \leq 2$, nghĩa là $|a| \leq 1$.

(ii) Để chứng minh $|bx+a| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$ ta chỉ cần kiểm tra tại $x = \pm 1$. Nói cách khác, ta cần kiểm tra rằng $|a+b| \leq 1$ và $|a-b| \leq 1$, nhưng các bất đẳng thức này đã được thiết lập ở trên.

Bài 1.12. Đặt $d = a+b+c, e = a-b+c$. Như vậy, theo giả thiết thì $|c|, |d|, |e| \leq 1$. (i) Để kiểm tra bất đẳng thức $|2ax+b| \leq 4$, ta chỉ cần kiểm tra tại các giá trị $x = \pm 1$. Nói cách khác, ta cần kiểm tra rằng $|2a+b| \leq 4$ và $|2a-b| \leq 4$. Từ các đẳng thức $d = a+b+c, e = a-b+c$ ta suy ra

$$a = \frac{1}{2}(d+e) - c, \quad b = \frac{1}{2}(d-e).$$

Như vậy, $2a+b = (d+e) - 2c + \frac{1}{2}(d-e) = \frac{3}{2}d - 2c + \frac{1}{2}e$. Từ đó, theo bất đẳng thức tam giác,

$$|2a+b| \leq \frac{3}{2}|d| + 2|c| + \frac{1}{2}|e| \leq \frac{3}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 4.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $|2a-b| \leq 4$.
(ii) Ta có

$$cx^2 + bx + a = c(x^2-1) + \frac{d}{2}(1+x) + \frac{e}{2}(1-x).$$

Từ đó, dựa vào bất đẳng thức tam giác, ta có khi $|x| \leq 1$,

$$\begin{aligned}|cx^2+bx+c| &= \left|c(x^2-1) + \frac{d}{2}(1+x) + \frac{e}{2}(1-x)\right| \\ &\leq |x^2-1| + \frac{1}{2}|1+x| + \frac{1}{2}|1-x| \\ &= 1 - x^2 + \frac{1}{2}(1+x+1-x) = 2 - x^2 \leq 2.\end{aligned}$$

Bài 1.13. (i) Dễ thấy: cả hai vế của đẳng thức cần chứng minh là không đổi khi ta hoán đổi vị trí của A và B, hoặc khi ta đổi dấu một trong hai số A, B. Vì thế, chỉ cần xét trường hợp $A \geq B \geq 0$; và chính trong trường hợp này,

$$|A+B| + |A-B| = A+B+A-B = 2A = 2\max\{A,B\} = 2\max\{|A|,|B|\}.$$

(ii) Xem

$$\begin{cases} \alpha = -a + b - c + d \\ \beta = -\frac{a}{8} + \frac{b}{4} - \frac{c}{2} + d \\ \gamma = \frac{a}{8} + \frac{b}{4} + \frac{c}{2} + d \\ \delta = a + b + c + d \end{cases}$$

như một hệ phương trình với các ẩn số a, b, c, d. Giải hệ đó ta tìm được "nghiệm":

$$\begin{cases} a = -2\frac{\alpha}{3} + 4\frac{\beta}{3} - 4\frac{\gamma}{3} + 2\frac{\delta}{3} \\ b = 2\frac{\alpha}{3} - 2\frac{\beta}{3} - 2\frac{\gamma}{3} + 2\frac{\delta}{3} \\ c = \frac{\alpha}{6} - 4\frac{\beta}{3} + 4\frac{\gamma}{3} - \frac{\delta}{6} \\ d = -\frac{\alpha}{6} + 2\frac{\beta}{3} + 2\frac{\gamma}{3} - \frac{\delta}{6}. \end{cases}$$

Thay chúng vào $g(x) := 3ax^2 + 2bx + c$, ta có

$$g(x) \equiv -\frac{\alpha}{6}(12x^2-8x-1)+4\frac{\beta}{3}(3x^2-x-1)-4\frac{\gamma}{3}(3x^2+x-1)+\frac{\delta}{6}(12x^2+8x-1).$$

Nhưng theo giả thiết, $\max\{|\alpha|, |\beta|, |\gamma|, |\delta|\} \le 1$, nên áp dụng bất đẳng thức tam giác và kết luận của câu (i), ta thấy nếu $|x| \le 1$ thì

$$\begin{aligned} |g(x)| &\le \frac{1}{6}(|12x^2 - 8x - 1| + |12x^2 + 8x - 1|) + \frac{4}{3}(|3x^2 - x - 1| + |3x^2 + x - 1|) \\ &= \frac{1}{3}\max\{|12x^2 - 1|, 8|x|\} + \frac{8}{3}\max\{|3x^2 - 1|, |x|\} \le \frac{1}{3}\cdot 11 + \frac{8}{3}\cdot 2 = 9. \end{aligned}$$

(iii) Thay các "nghiệm" a, b, c, d tìm được ở (ii) vào $h(x) := dx^3 + cx^2 + bx + a$ ta suy ra

$$\begin{aligned} h(x) = &-2\frac{\alpha}{3}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1 - x) + 4\frac{\beta}{3}(1 - x^2)\left(1 - \frac{x}{2}\right) \\ &- 4\frac{\gamma}{3}(1 - x^2)\left(1 + \frac{x}{2}\right) + 2\frac{\delta}{3}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1 + x). \end{aligned}$$

Vậy, khi $|x| \le 1$, ta có đánh giá:

$$\begin{aligned} |h(x)| &\le \frac{2}{3}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1 - x) + \frac{4}{3}(1 - x^2)\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \frac{4}{3}(1 - x^2)\left(1 + \frac{x}{2}\right) + \\ &\quad + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1 + x) \\ &= \frac{4}{3}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) + \frac{8}{3}(1 - x^2) \\ &= 4 - 3x^2 \le 4. \end{aligned}$$

Bài 1.14. (i) Ta có $a = \frac{1}{2}(d+e) - c, \quad b = \frac{1}{2}(d-e)$. Như vậy,

$$f(x) = \frac{d}{2}(x^{2n}+x) + \frac{e}{2}(x^{2n}-x) + c(1-x^{2n}).$$

Theo giả thiết, $\max\{|c|,|d|,|e|\} \leq 1$, nên dựa vào kết luận của bài toán 1.13 (i), khi $|x| \leq 1$ thì

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}(|x^{2n}+x|+|x^{2n}-x|)+|1-x^{2n}| = \max\{x^{2n},|x|\}+1-x^{2n} = 1+|x|-x^{2n}. \quad (*)$$

Cách 1: Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức TBC-TBN cho $2n$ số không âm:

$$x^{2n}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}}, \frac{1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}}}_{2n-1 \text{ số}}$$

ta có

$$x^{2n} + \frac{2n-1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}} \geq 2n \sqrt[2n]{\frac{x^{2n}}{4^n n^{2n}}} = |x|.$$

Vì thế, $(*) \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{2n-1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}} + 1$, đpcm.

Cách 2: Mặt khác, ta có thể khảo sát hàm số $y = g(t) = 1 + t - t^{2n}$ với $0 \leq t \leq 1$. Dễ thấy $g'(t) = 1 - 2nt^{2n-1} > 0$ khi $0 \leq t < t_* := \frac{1}{\sqrt[2n-1]{2n}}$; $g'(t) < 0$ khi $t_* < t \leq 1$. Vậy,

$$\begin{aligned}\max_{0\leq t\leq 1} g(t) &= g(t_*) = 1 + t_*(1-t_*^{2n-1}) = 1 + t_*(2n-1)t_*^{2n-1} = 1 + (2n-1)t_*^{2n} \\ &= \frac{2n-1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}} + 1.\end{aligned}$$

Từ đó, $(*)$ cho ta đpcm.
(ii) Khi $1 \leq |x| \leq M < \infty$, dựa vào $(*)$ và kết luận của bài toán 1.13 (i), ta có:

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leq \frac{1}{2}(|x^{2n}+x|+|x^{2n}-x|)+|1-x^{2n}| = \max\{x^{2n},|x|\}+x^{2n}-1 \\ &= 2x^{2n}-1 \leq 2M^{2n}-1.\end{aligned}$$

2 Đáp án đề thi chính thức môn Đại số

Bài 2.1. (i) Đáp số $a^4 - b^4$.
(ii) Sử dụng công thức Cramer,

$$A^{-1} = (b^4 - a^4)^{-1} \begin{pmatrix} a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 \\ b^3 & a^3 & a^2b & ab^2 \\ ab^2 & b^3 & a^3 & a^2b \\ a^2b & ab^2 & b^3 & a^3 \end{pmatrix}.$$

Ký hiệu y_0 là số cây ban đầu công ty quản lý. Ký hiệu y_1, y_2, y_3, y_4 là số cây tương ứng của công ty ở cuối các tháng thứ $1, 2, 3, 4$. Từ giả thiết chúng ta có:

$$y_1 = 0,9y_0 + 100$$

hay là

$$10y_1 - 9y_0 = 1000.$$

Phân tích tương tự ta nhận được

$$10y_2 - 9y_1 = 1.020;\ 10y_3 - 9y_2 = 1.040;\ 10y_4 - 9y_3 = 1.060.$$

Kết hợp với $y_4 = y_0 + 80$ thì phương trình cuối cùng ở trên viết lại được là

$$10y_0 - 9y_3 = 260$$

Vậy ta có hệ phương trình tuyến tính với ma trận cho bởi

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 10 \\ 10 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.020 \\ 1.040 \\ 260 \end{pmatrix}$$

Sử dụng công thức tính ma trận A^{-1} ở câu trên ta tính được

$$y_0 = \frac{729 * 1.000 + 810 * 1.020 + 900 * 1.040 + 1000 * 260}{19 * 181} = 800.$$

Vậy $y_4 = 880$.

Bài 2.2. (i) Ma trận theo cơ sở đã cho là

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & C_n^0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^n \end{bmatrix}$$

(ii) đa thức đặc trưng của Φ có dạng (modulo dấu $\pm$)

$$T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0$$

Theo định lý Cayley-Halmilton,

$$\Phi^n + a_{n-1}\Phi^{n-1} + \cdot + a_0\mathrm{Id} = 0.$$

Nhưng đẳng thức này chính xác nói rằng với mọi $P \in V$ thì

$$P(x+n) + a_{n-1}P(x+n-1) + \cdots + a_0P(x) = 0.$$

Bài 2.3. (i) $n = 2$: $P_2(x) = 2x^2 - x - 1$ có hai nghiệm thực $x = 1$ và $x = -1/2$. $n = 3$: $P_3(x) = 3x^3 - x^2 - x - 1 = (x-1)(3x^2 + 2x + 1)$. Từ đó ta thấy, $P_3(x)$ chỉ có duy nhất nghiệm $x = 1$.
(ii) $P_n(x) = (x-1)(nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 2x + 1)$. Ta sẽ chứng minh đa thức

$$Q(x) := nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 2x + 1$$

có duy nhất một nghiệm thực $x = a < 0$ nếu n chẵn và không có nghiệm thực nếu n lẻ. Nhận xét, $Q(x) = R'(x)$, trong đó

$$R(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + 1 = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Vậy

$$Q(x) = R'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} \quad (\forall x \neq 1).$$

Ta hãy khảo sát đa thức ở tử số $S(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$. Ta có

$$S'(x) = n(n+1)x^{n-1}(x-1).$$

Như vậy, $S'(x) = 0$ với $x = 0$ hay $x = 1$. Tuy nhiên, dáng điệu của S phụ thuộc vào tính chẵn lẻ của n:
Với n lẻ, $S'(x) < 0$ trên $(-\infty, 0)$ và $(0, 1)$ và $S'(x) > 0$ trên $(1, +\infty)$. Hàm số đạt cực tiểu toàn cục tại $x = 1$ và $S(1) = 0$. Như vậy, $S(1) = 0$ khi và chỉ khi $x = 1$.
Với n chẵn, $S'(x) > 0$ trên $(-\infty, 0)$ và $(1, +\infty)$, $S'(x) < 0$ trên $(0, 1)$ và $S(0) = 1$, $S(1) = 0$. Như vậy, S có 2 nghiệm là $a < 0$ nào đó và 1.
Nhưng chú ý rằng 1 không phải là nghiệm của Q vì $Q(1) = n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$. Như vậy, $Q(x)$ không có nghiệm nếu n lẻ và có 1 nghiệm duy nhất $a < 0$ nếu n chẵn. Ta kết luận rằng P_n có 1 nghiệm thực (là 1) nếu n lẻ và 2 nghiệm thực (là $a, 1$) nếu n chẵn.

Bài 2.4. Xét một hình vuông có diện tích S. Cạnh hình vuông có độ dài là $c = \sqrt{S}$. Khi đó một cạnh hình vuông là cạnh huyền của một tam giác vuông mà hai cạnh góc vuông còn lại là một đường thẳng đứng và một đường ngang. Khi đó $c^2 = a^2 + b^2$ với $a, b \geq 0$ là hai số nguyên, tương ứng với độ dài hai cạnh tam giác vuông đó. Do đó $S = a^2 + b^2$.
(i) $S = 4$: suy ra $a = 2, b = 0$ hoặc $a = 0, b = 2$. Do đó hình vuông có hai cạnh song song với các đường dọc và ngang. Nói riêng, mỗi hình vuông ứng với hai đoạn độ dài 2 trên cột dọc và ngang. Số đoạn như vậy trên một cột ngang hoặc dọc là $16 - 2 = 14$. Số hình vuông diện tích 4 do đó là $N_4 = 14^2 = 196$.
(ii) $S = 25$: Ta có $25 = 0 + 5^2 = 3^2 + 4^2$. Do đó xảy ra hai trường hợp

$$\begin{cases} a = 0, b = 5 \text{ hoặc } a = 5, b = 0; \\ a = 3, b = 4 \text{ hoặc } a = 4, b = 3. \end{cases}$$

Trường hợp thứ nhất, lập luận tương tự như trên suy ra có tất cả $A = (16 - 5)^2 = 121$ hình vuông có các cạnh độ dài 5 và song song với các trục dọc, ngang.
Trường hợp thứ hai, do tính đối xứng nên số hình vuông là $B = 2C$ với C là số hình vuông ứng với trường hợp $a = 3, b = 4$. Một hình vuông như vậy ứng với hai đoạn có độ dài 7 trên các trục dọc và ngang. Số hình như vậy do đó là

$$C = (16 - 7)^2 = 81.$$

Do đó số hình vuông có diện tích 25 trong trường hợp $(a, b) = (3, 4)$ hoặc $(4, 3)$ là

$$B = 2.81 = 162.$$

Vậy tổng số hình vuông có diện tích 25 là $S_{25} = A + B = 283$.

Bài 2.5. (i) Dễ thấy ánh xạ D biến hàm hằng vào 0 và ánh xạ T biến một đa thức bất kỳ vào đa thức thức có nghiệm tại 0. Vậy D không là đơn ánh còn T không là toàn ánh.
(ii) Ta có

$$(D \circ T - T \circ D)(p(x)) = D(xp(x)) - xD(p(x)) = p(x) + xp'(x) - xp'(x) = p(x),$$

với mọi $p(x)$. Vậy ánh xạ $D \circ T - T \circ D$ là song ánh.

Bài 2.6. (i) Ma trận theo cơ sở đã cho là

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & C_n^0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) Có thể suy ra trực tiếp từ ý (i) (ma trận nhận được là ma trận đường chéo trên chặt). Cũng có thể sự dụng nhận xét: ánh xạ Φ làm giảm bậc đa thức, từ đó $\Phi^{n+1} = 0$.
(iii) Nhận xét rằng toán tử này giảm bậc của mỗi đa thức khác hằng đi 1 đơn vị. Vậy có thể chọn cơ sở dạng $e_1 = p(x)$ - đa thức bậc n, $e_i = \Phi^{i-1}e_1$.
Có thể chỉ ra ví dụ cụ thể cho cơ sở hoặc chứng minh nhận định trên (xem câu sau).
(iv) Do p là một đa thức, điều kiện $p(a+1) + p(a-1) = 2p(a)$ đúng với mọi a nguyên tương đương với $p(x+1) + p(x-1) = 2p(x)$. Dễ thấy điều kiện này lại tương đương với $p(x) \in \ker \Phi^2$. Sử dụng cơ sở đã cho ở câu (ii) (thậm chí nếu tinh ý có thể sử dụng ma trận tìm được ở câu (i)), ta thấy rằng $\ker \Phi^2$ chính là không gian sinh bởi 2 vectơ đầu tiên, nói cách khác, là các đa thức có bậc ≤ 1.
Cách khác dựa vào lập luận về hạng: dựa vào ma trận đã cho trong (i), ta dễ dàng thấy Φ^2 là một ánh xạ có hạng bằng $n-2$. Từ đó suy ra $\ker \Phi$ có hạng bằng 2. Nhưng hiển nhiên không gian các đa thức bậc ≤ 1 nằm trong $\ker \Phi$. Từ đó có điều cần chứng minh.
Nhận xét. Ta cũng có thể lập luận một cách giải tích như sau: bởi vì p là một đa thức điều kiện $p(a+1) + p(a-1) = 2p(a)$, mà ta viết lại thành $p(a) = \frac{1}{2}(p(a+1) + p(a-1))$, đúng với mọi a tương đương với $p(\alpha) = \frac{1}{2}(p(\alpha+\beta) + p(\alpha-\beta))$ $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$. Như vậy p là một hàm số vừa lồi vừa lõm. Điều này chỉ có thể xảy ra khi đồ thị p là một đường thẳng, nói cách khác, khi p là một đa thức bậc ≤ 1!

3 Đáp án đề thi chính thức môn Giải tích

Bài 3.1. Công thức truy hồi được viết lại thành $u_{n+1} = u_n + (u_n - 1)^2$; suy ra dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ đơn điệu không giảm. Nếu dãy hội tụ về ℓ thì $\ell = \ell + (\ell-1)^2 \Rightarrow \ell = 1$.
Vì dãy đơn điệu không giảm nên nếu nó hội tụ về ℓ thì $u_n \leq \ell = 1$ $(\forall n \geq 1)$. Đặc biệt,

$$a^2 - a + 1 = u_2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a \leq 1.$$

Đảo lại, cho $0 \leq a \leq 1$. Khi đó, $0 \leq u_1 \leq 1$. Giả sử với $n \geq 1$ nào đó, ta đã có $0 \leq u_n \leq 1$. Suy ra:

$$u_n(u_n - 1) \leq 0 \Rightarrow {u_n}^2 - u_n + 1 \leq 1.$$

Theo công thức truy hồi, bất đẳng thức cuối này có thể viết được thành $u_{n+1} \leq 1$; vậy, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$. Nguyên lý quy nạp cho ta $0 \leq u_n \leq 1$ với mọi $n \geq 1$. Dãy đã cho đơn điệu và bị chặn nên hội tụ. Kết luận: các giá trị cần tìm của a là $0 \leq a \leq 1$.

Bài 3.2. Nếu $a, b \in \mathbb{N}^*$ thì ta có ngay:

$$\lim_{n\to\infty} (a\{nb\} + b\{na\}) = 0. \tag{4.1}$$

Đảo lại, giả sử đã có (4.1). Dễ thấy $0 \leq \{na\} \leq \dfrac{1}{b}(a\{nb\} + b\{na\})$, nên theo định lý về giới hạn kẹp thì (4.1) kéo theo

$$\lim_{n\to\infty} \{na\} = 0, \text{ và tương tự, } \lim_{n\to\infty} \{nb\} = 0. \tag{4.2}$$

Đến đây có thể chứng minh $a, b \in \mathbb{N}^*$ theo các cách khác nhau như sau:
Cách 1: Giả sử a vô tỉ. Khi đó trong biểu diễn thập phân

$$a = (C, c_1c_2\ldots)_{10} = C + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^i}$$

tồn tại một chữ số $c \neq 0$ xuất hiện vô hạn lần; tức là, tồn tại các chỉ số $i_1 < i_2 < \cdots$ sao cho $c = c_{i_1} = c_{i_2} = \ldots$ Xét $n = 10^{i_k - 1} \underset{(k\to\infty)}{\to} \infty$, ta có

$$na = (Cc_1\ldots c_{i_k-1}, c_{i_k}\ldots c_{i_{k+1}}\ldots)_{10} \Rightarrow \{na\} > (0, c)_{10} = \frac{c}{10} > 0,$$

mâu thuẫn với (4.2).
Vậy a hữu tỉ: $a = \dfrac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{N}^*$. Xét $n = kq + 1 \underset{(k\to\infty)}{\to} \infty$, ta có $\{na\} = \{kp + a\} = \{a\}$ nên (4.2) $\Rightarrow \{a\} = 0$. Từ đó, $a \in \mathbb{N}^*$. Tương tự, $b \in \mathbb{N}^*$.
Cách 2: Ta sẽ chứng minh rằng $\{a\} = 0$. Giả sử đpcm là sai. Khi đó $0 < \{a\} < 1$. Với $\varepsilon := \min\{1 - \{a\}, \{a\}\} > 0$, theo (4.2) và định nghĩa của giới hạn, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $0 \leq \{na\} < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$. Đặc biệt,

$$0 \leq \{n_0a\}, \{(n_0 + 1)a\} < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Lại có

$$\{(n_0 + 1)a\} = \{[a] + \{a\} + [n_0a] + \{n_0a\}\} = \{\{a\} + \{n_0a\}\}. \tag{4.4}$$

Nhưng $0 < \{a\} \leq \{a\} + \{n_0a\} < \{a\} + \varepsilon \leq 1$ nên (4.3)-(4.4) kéo theo $\varepsilon > \{(n_0 + 1)a\} = \{a\} + \{n_0a\} \geq \{a\}$, mâu thuẫn với định nghĩa của ε! Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng $\{a\} = 0$, tức là $a \in \mathbb{N}^*$. Tương tự, ta có $b \in \mathbb{N}^*$.

Bài 3.3. Trong điều kiện thứ nhất, chọn $x = 0$ ta thấy $f(0)^2 \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

Với $x \neq 0$, từ điều kiện này ta cũng có $f(x) \geq \dfrac{f(ax)^2}{a^3x^2} \geq 0$. Vậy, $f(x) \geq 0$ với mọi x.
Nếu $a = 1$, điều kiện thứ nhất trở thành $f(x)^2 \leq x^2 f(x)$, ta suy ra $f(x) \leq x^2$ với mọi số thực x, nên đpcm là đúng. Bây giờ, xét trường hợp $a > 1$.
Đặt $g(x) := \dfrac{|f(x)|}{x^2/a} = \dfrac{f(x)}{x^2/a} \geq 0$ với mọi $x \neq 0$. Từ nay, xem $x \neq 0$ và chỉ còn phải chứng minh rằng $g(x) \leq 1$. Theo định nghĩa của g, ta có $f(x) = \dfrac{x^2}{a} g(x)$. Từ đó, viết lại theo g điều kiện thứ nhất như sau:

$$\left(\frac{(ax)^2}{a} g(ax)\right)^2 \leq a^3 x^2 \frac{x^2}{a} g(x) \Leftrightarrow g(ax)^2 \leq g(x). \tag{4.1}$$

Dùng (4.1), bằng quy nạp theo $n \in \mathbb{N}$, ta thấy:

$$g(x) \leq g\left(\frac{x}{a^n}\right)^{2^{-n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Theo điều kiện thứ hai, tồn tại $m, M \in (0, \infty)$ sao cho $(0 \leq)\ f(t) \leq M$ khi $|t| < m$. Vì $a > 1$ nên cũng tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ (phụ thuộc vào x) để $\left|\dfrac{x}{a^n}\right| < m$ với mọi $n \geq n_0$; và với các số tự nhiên n như thế, (4.2) kéo theo

$$g(x) \leq \left(\frac{f\left(\dfrac{x}{a^n}\right)}{\left(\dfrac{x}{a^n}\right)^2 / a}\right)^{2^{-n}} \leq \frac{a^{\frac{2n+1}{2^n}}}{x^{2^{1-n}}} M^{2^{-n}}. \tag{4.3}$$

Dễ thấy $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n+1}{2^n} = 0$ (có thể dùng quy tắc l'Hospital), nên bằng cách cho $n \to \infty$ trong (4.3), ta có ngay $g(x) \leq 1$, đpcm.

Bài 3.4. Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \geq 0$, thì nói riêng, $f'(0) > 0$, nên điều kiện đầu của bài toán kéo theo $f(0) \geq 0$; nhưng lúc này f tăng ngặt trên $[0, \infty)$ nên điều kiện thứ hai không thể thỏa mãn được. Một cách tương tự, nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \geq 0$, thì ta cũng gặp mâu thuẫn. Vậy, $\exists x_1 \geq 0, f'(x_1) = 0$. Giả sử với $k \geq 1$ nào đó, ta đã chứng minh được sự tồn tại của k số $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ sao cho $f^{(n)}(x_n) = 0$ với mọi số nguyên dương $n \leq k$. Nếu $f^{(k+1)}(x) > 0$ với mọi $x > x_k$, thì $f^{(k)}$ tăng ngặt trên $[x_k, \infty)$; suy ra

$$f^{(k)}(x) \geq f^{(k)}(x_k + 1) > f^{(k)}(x_k) = 0 \quad \forall x \geq x_k + 1.$$

Với mỗi $x \geq x_k + 1$, lấy $\int_{x_k+1}^{x} \mathrm{d}t$ hai vế của bất đẳng thức $f^{(k)}(t) \geq f^{(k)}(x_k + 1)$ cả thảy k lần, ta sẽ thu được một bất đẳng thức có dạng

$$f(x) \geq \frac{f^{(k)}(x_k + 1)}{k!} x^k + \text{một đa thức có bậc bé hơn } k \text{ của biến } x;$$

vì thế, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, mâu thuẫn với điều kiện thứ hai. Một cách tương tự, nếu $f^{(k+1)}(x) < 0$ với mọi $x > x_k$, thì ta sẽ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, cũng mâu thuẫn với điều kiện thứ hai. Vậy, $\exists x_{k+1} > x_k$, $f^{(k+1)}(x_{k+1}) = 0$. Nguyên lý quy nạp cho ta kết luận của bài toán.
Cuối cùng, một ví dụ về hàm số f thỏa mãn mọi yêu cầu của đề bài, và không đồng nhất bằng 0, được cho chẳng hạn bởi công thức $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ (điều kiện thứ hai được kiểm tra bằng quy tắc l'Hospital).

Bài 3.5. Dùng định lý cơ bản của phép tính vi-tích phân (về đạo hàm theo cận của tích phân xác định):

$$f'_\alpha(x) = \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\ln x^\alpha} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x^{\alpha-1}-1}{\ln x} \quad \forall x > 1.$$

Vì thế: nếu $\alpha > 1$ thì $f'_\alpha > 0$ nên f_α tăng ngặt trên $I := (1,\infty)$; còn nếu $0 < \alpha < 1$ thì $f'_\alpha < 0$ nên f_α giảm ngặt trên I. Vậy, f_α luôn là một song ánh khả vi (nên liên tục) từ khoảng I lên một khoảng $I_\alpha \subset \mathbb{R}$, là ảnh của f_α. Ánh xạ ngược $g_\alpha := f_\alpha^{-1} : I_\alpha \to I$ cũng khả vi, $g'_\alpha(y) = \dfrac{1}{f'_\alpha(x)}$ với mọi $y = f_\alpha(x) \in I_\alpha$, suy ra f_α là một phép đồng phôi.
Để tìm I_α trong trường hợp $\alpha > 1$, ta đánh giá

$$f_\alpha(x) \geq (x^\alpha - x) \min\left\{\frac{1}{\ln t} : x \leq t \leq x^\alpha\right\} = \frac{x^\alpha - x}{\ln x^\alpha} = \frac{x}{\alpha} \cdot \frac{x^{\alpha-1}-1}{\ln x} \underset{(x\to+\infty)}{\to} +\infty \tag{4.4}$$

(quy tắc l'Hospital).
Đổi biến số $t = \mathrm{e}^u$, ta lại có $f_\alpha(x) = \int_{\ln x}^{\alpha \ln x} \mathrm{e}^u \dfrac{\mathrm{d}u}{u}$. Với mọi $x > 1$, khi $\ln x < u < \alpha \ln x$, ta có $x < \mathrm{e}^u < x^\alpha$, suy ra

$$x \ln \alpha = x \int_{\ln x}^{\alpha \ln x} \frac{\mathrm{d}u}{u} < f_\alpha(x) < x^\alpha \int_{\ln x}^{\alpha \ln x} \frac{\mathrm{d}u}{u} = x^\alpha \ln \alpha \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f_\alpha(x) = \ln \alpha \tag{4.5}$$

Từ (4.4)-(4.5), ta thấy $I_\alpha = (\ln \alpha, +\infty)$.
Để tìm I_α trong trường hợp $0 < \alpha < 1$, ta có thể dùng một trong các cách:
Cách 1: Tương tự trường hợp $\alpha > 1$, lần này ta đánh giá

$$f_\alpha(x) \leq -(x - x^\alpha) \min\left\{\frac{1}{\ln t} : x^\alpha \leq t \leq x\right\} = \frac{x^\alpha - x}{\ln x} = x^\alpha \cdot \frac{1 - x^{1-\alpha}}{\ln x} \underset{(x\to+\infty)}{\to} -\infty \tag{4.6}$$

(quy tắc l'Hospital).
Cũng đổi biến số $t = \mathrm{e}^u$, và để ý: với mọi $x > 1$, khi $\alpha \ln x < u < \ln x$, ta có

$x^\alpha < \mathrm{e}^u < x$, suy ra

$$x \ln \alpha = -x \int_{\alpha \ln x}^{\ln x} \frac{\mathrm{d}u}{u} < f_\alpha(x) < -x^\alpha \int_{\alpha \ln x}^{\ln x} \frac{\mathrm{d}u}{u} = x^\alpha \ln \alpha \Rightarrow \lim_{x \to 1^+} f_\alpha(x) = \ln \alpha \tag{4.7}$$

Từ (4.6)-(4.7), ta thấy $I_\alpha = (-\infty, \ln \alpha)$.

<u>**Cách 2**</u>: Ta có $f_\alpha(x) = -f_{\frac{1}{\alpha}}(z)$ với $z := x^\alpha$; mà $\dfrac{1}{\alpha} > 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} z = +\infty$ và $z \to 1^+$ khi $x \to 1^+$ nên dùng chính kết quả của trường hợp đã chứng minh ở trên ta có ngay:

$$\lim_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = -\lim_{z \to +\infty} f_{\frac{1}{\alpha}}(z) = -\infty, \ \lim_{x \to 1^+} f_\alpha(x) = -\lim_{z \to 1^+} f_{\frac{1}{\alpha}}(z) = -\ln(1/\alpha) = \ln \alpha.$$

Suy ra $I_\alpha = (-\infty, \ln \alpha)$.

Bài 3.6. Từ công thức truy hồi ta thấy ngay dãy số $(u_n)_{n=1}^\infty$ đơn điệu không giảm. Nếu nó hội tụ về ℓ thì $\ell = \ell + (\ell - 2016)^2 \Rightarrow \ell = 2016$. Vì dãy đơn điệu không giảm nên nếu nó hội tụ về ℓ thì $u_n \leq \ell = 2016$ $(\forall n \geq 1)$. Đặc biệt,

$$a + (a - 2016)^2 = u_2 \leq 2016 \Rightarrow (a - 2016)(a - 2015) \leq 0 \Rightarrow 2015 \leq a \leq 2016.$$

Đảo lại, cho $2015 \leq a \leq 2016$. Khi đó, $2015 \leq u_1 \leq 2016$. Giả sử với $n \geq 1$ nào đó, ta đã có $2015 \leq u_n \leq 2016$. Suy ra:

$$(u_n - 2016)(u_n - 2016 + 1) \leq 0 \Rightarrow (u_n - 2016)^2 + u_n - 2016 \leq 0.$$

Theo công thức truy hồi, bất đẳng thức cuối này có thể viết được thành $u_{n+1} \leq 2016$; vậy, $2015 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2016$. Sử dụng nguyên lý quy nạp ta thu được $2015 \leq u_n \leq 2016$ với mọi $n \geq 1$.
Dãy đã cho đơn điệu và bị chặn nên hội tụ. Kết luận: các giá trị cần tìm của a là $2015 \leq a \leq 2016$.

Bài 3.7. Dễ thấy hàm f liên tục trên $(0, 1]$ nên f liên tục trên $[0, 1]$ khi và chỉ khi nó liên tục (bên phải) tại điểm 0.
Nếu $\alpha > 0$ thì $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$, nên từ bất đẳng thức $|f(x)| \leq x^\alpha$ $(\forall x \in (0, 1])$ ta suy ra ngay $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, tức là f liên tục (bên phải) tại điểm 0.
Đảo lại, vì $x_n := \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1} \underset{(n \to +\infty)}{\to} 0^+$ với $\sin \frac{1}{x_n} \equiv 1$, ta thấy nếu f liên tục (bên phải) tại điểm 0 thì phải có $\lim\limits_{n \to +\infty} {x_n}^\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(0) = 0$. Suy ra $\alpha > 0$.
Dễ thấy hàm f khả vi trên $(0, 1]$ nên f khả vi trên $[0, 1]$ khi và chỉ khi nó có đạo hàm bên phải tại điểm 0.

Nếu $\alpha > 1$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} = 0$ (chính là kết quả của phần 1 vì $\alpha - 1 > 0$), nên f có đạo hàm bên phải $f'_+(0) = 0$
Đảo lại, vì $y_n := (2n\pi)^{-1} \underset{(n\to+\infty)}{\to} 0^+$ với $\sin\frac{1}{y_n} \equiv 0$, ta thấy nếu f có đạo hàm bên phải tại điểm 0 thì $f'_+(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(y_n)-f(0)}{y_n - 0} = 0$.
Vậy, với x_n như đã nói ở phần 1, ta có $0 = f'_+(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = \lim\limits_{n\to+\infty} {x_n}^{\alpha-1}$. Điều này chỉ xảy ra khi $\alpha > 1$.

Dễ thấy hàm f khả vi liên tục trên $(0,1]$ với

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x} \quad \forall x \in (0,1] \tag{4.8}$$

nên f khả vi liên tục khi và chỉ khi nó có đạo hàm bên phải $f'_+(0) = 0$ (kết quả của phần 2) và $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = f'_+(0)$.
Nếu $\alpha > 2$ thì

$$\text{(4.8)} \Rightarrow |f'(x)| \le \alpha x^{\alpha-1} + x^{\alpha-2} \underset{x\to 0^+}{\to} 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 = f'_+(0).$$

Đảo lại, với y_n như đã dùng ở phần 2, vì $\cos\frac{1}{y_n} \equiv 1$, ta thấy nếu

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = f'_+(0) = 0$$

thì $0 = -\lim\limits_{n\to+\infty} f'(y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} {y_n}^{\alpha-2}$. Điều này chỉ xảy ra khi $\alpha > 2$.

Bài 3.8. Xem đáp án bài 3.3.

Bài 3.9. Giả sử phản chứng rằng phương trình $f''(x) = 0$ vô nghiệm. Theo giả thiết, f'' liên tục nên từ đây suy ra: f'' không đổi dấu trên $\mathbb{R}$. Nếu cần, sẽ thay f bởi $-f$, ta có thể xem rằng $f''(x) > 0$ với mọi x.
Lúc này f' tăng ngặt. Nếu tồn tại a để $f'(a) > 0$ thì với mọi $x > a$ ta có

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t > f(a) + \int_a^x f'(a)\mathrm{d}t = f(a) + f'(a)(x-a);$$

chia hai vế cho $x > \max\{a, 0\}$ rồi lấy $\lim\limits_{x\to+\infty}$, dùng giả thiết ta thấy:

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \ge \lim_{x\to+\infty} \frac{f(a)}{x} + f'(a)\lim_{x\to+\infty} \frac{x-a}{x} = f'(a),$$

vô lý!
Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng $f'(x) \le 0$ với mọi x. Mà f' tăng ngặt, nên tồn tại b để $f'(b) < 0$. Với mọi $x < b$, ta lại có

$$f(x) = f(b) - \int_x^b f'(t)\mathrm{d}t > f(b) - \int_x^b f'(b)\mathrm{d}t = f(b) + f'(b)(x-b).$$

Chia hai vế của bất đẳng thức này cho $x < \min\{b, 0\}$ rồi lấy $\lim\limits_{x\to-\infty}$, dùng giả thiết ta thấy:

$$0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \le \lim_{x\to-\infty} \frac{f(b)}{x} + f'(b) \lim_{x\to-\infty} \frac{x-b}{x} = f'(b),$$

cũng vô lý! Tất cả các mâu thuẫn gặp được chứng tỏ rằng phương trình $f''(x) = 0$ phải có ít nhất một nghiệm.
Ghi chú: Thực ra chỉ cần giả thiết f khả vi hai lần (f'' không nhất thiết liên tục). Khi đó, dùng tính chất nhận giá trị trung gian của hàm đạo hàm, ta thấy nếu phương trình $f''(x) = 0$ vô nghiệm thì f'' cũng không đổi dấu trên $\mathbb{R}$.

Bài 3.10. Dùng định lý cơ bản của phép tính vi-tích phân (về đạo hàm theo cận của tích phân xác định):

$$f'(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{(1/2)x^{-1/2}}{\ln x^{1/2}} = \frac{1 - x^{-1/2}}{\ln x} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\ln x} > 0 \quad \forall x > 1$$

nên f tăng ngặt và liên tục trên $I := (1, \infty)$.
Để tìm tập ảnh J của f, ta đánh giá

$$f(x) \ge (x - \sqrt{x}) \min\left\{\frac{1}{\ln t} : \sqrt{x} \le t \le x\right\} = \frac{x - \sqrt{x}}{\ln x}. \tag{4.9}$$

Theo quy tắc l'Hospital, $f(x) \to +\infty$ khi $x \to +\infty$.
Đổi biến số $t = \mathrm{e}^u$, ta có: $f(x) = \int_{(1/2)\ln x}^{\ln x} \mathrm{e}^u \frac{\mathrm{d}u}{u}$ và để ý: với mọi $x > 1$, khi $(1/2)\ln x < u < \ln x$, thì $\sqrt{x} < \mathrm{e}^u < x$, suy ra

$$\begin{aligned}\sqrt{x}\ln 2 &= \sqrt{x}\int_{(1/2)\ln x}^{\ln x} \frac{\mathrm{d}u}{u} < f(x) < x\int_{(1/2)\ln x}^{\ln x} \frac{\mathrm{d}u}{u} = x\ln 2 \\ &\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) = \ln 2 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Từ (4.9)-(4.10), ta thấy $J = (\ln 2, \infty)$.
Ghi chú: để chứng minh (4.9) ta có thể dùng bất đẳng thức $\mathrm{e}^t \ge 1 + t > t \Rightarrow \ln t < t \Rightarrow \frac{1}{\ln t} > \frac{1}{t}$ với mọi $t > 1$. Vậy, $f(x) > \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln\sqrt{x}$. Suy ra (4.9).

Chương 5

Đáp án đề đề xuất môn Đại số

1 Ma trận

Bài 1.1. Ta có

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

và

$$B = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

và tìm A^{2016} và B^{2016} bằng quy nạp $A^1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$;

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2a & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2a & a^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2 & a^3 \end{pmatrix}$$

Ta chứng minh $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$ bằng quy nạp. Thật vậy giả sử

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ ka^{k-1} & a^k \end{pmatrix},$$

ta chứng minh

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 \\ (k+1)a^k & a^{k+1} \end{pmatrix}$$

$$VT = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ ka^{k-1} & a^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 \\ (k+1)a^k & a^{k+1} \end{pmatrix} = VP,$$

công thức đúng với mọi n. Từ đó suy ra: $A^{2016} = \begin{pmatrix} a^{2016} & 0 \\ 2016a^{2015} & a^{2016} \end{pmatrix}$. Tương tự

$$B^{2016} = \begin{pmatrix} a^{2016} & 2016a^{2015} \\ 0 & a^{2016} \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{2016} + B^{2016} = \begin{pmatrix} 2a^{2016} & 2016a^{2015} \\ 2016a^{2015} & 2a^{2016} \end{pmatrix}.$$

Bài 1.2. Từ $A = ABA$ suy ra $AB = (ABA)B = (AB)^2; BA = B(ABA) = (BA)^2$. Đặt $P = I - AB; Q = I - BA$. Ta có $P^2 = (I - AB)^2 = I - 2AB + (AB)^2 = I - AB = P$, và tương tự $Q^2 = Q$
Từ giả thiết $AB + BA = 2I$ suy ra $P + Q = 0$ hay $P = -Q$ từ đó ta có $P = P^2 = Q^2 = Q$. Vậy $P = Q = 0$ hay $AB = BA = I$.

Bài 1.3. Từ giả thiết $A + B + C = 0$ ta có $C = -(A + B)$ suy ra

$$C = C^2 = (A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A + AB + BA + B = AB + BA - C.$$

Suy ra $2C = AB + BA$. Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned} AB - BA &= A^2B + ABA - ABA - BA^2 \\ &= A(AB + BA) - (AB + BA)A \\ &= 2(AC - CA) \\ &= -2(A(A + B) - (A + B)A) \\ &= -2(AB - BA) \end{aligned}$$

Suy ra $AB - BA = 0$ hay $AB = BA = C$.
Từ $A + B + C = 0$ ta có

$$0 = A(A + B + C) = A(A + B + AB) = A^2 + AB + A^2B = A + 2AB = A + 2C$$

Tương tự ta cũng có $B + 2C = 0$ từ đó ta có $A = B$ và suy ra $C = AB = A^2 = A$. Vậy $A = B = C = 0$.

Bài 1.4. 1) Có thể lấy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

và kiểm tra trực tiếp thấy thỏa mãn yêu cầu của đề bài $A^2 + B^2 = C^2 = -I$.
2) Dễ dàng chứng tỏ được với mỗi ma trận vuông A cấp 2 ta có mối liên hệ $A^2 = \mathrm{tr}(A)A - \det(A)I_2$, trong đó $\mathrm{tr}(A)$ là vết của A.

Giả sử có các ma trận $A, B, C \in SL_2(\mathbb{Z})$ sao cho $A^4 + B^4 = C^4$.
Gọi $a = \mathrm{tr}(A), b = \mathrm{tr}(B), c = \mathrm{tr}(C)$. Khi đó $A^2 = aA - I_2$ và
$A^4 = (aA - I_2)^2 = a^2A^2 - 2aA + I_2 = (a^3 - 2a)A + (1 - a^2)I_2$.
Tương tự có kết quả cho B^4 và C^4 rồi từ đó ta dẫn đến

$$(a^3 - 2a)A + (b^3 - 2b)B + (2 - a^2 - b^2)I_2 = (c^3 - 2c)C + (1 - c^2)I_2$$

Lấy vết theo 2 vế ta suy ra $a^4 + b^4 - c^4 = 4(a^2 + b^2 - c^2) - 2 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$.
Với mỗi số nguyên k ta thấy: k là số chẵn ($k = 2l$) hoặc k là số lẻ ($k = 2l+1$), từ đó $k^4 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$ hoặc $k^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$.
Từ đẳng thức $a^4 + b^4 - c^4 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$, bằng cách xét từng trường hợp trong 8 trường hợp có thể của bộ ba (a, b, c) ta suy ra a và b phải cùng là số lẻ, còn c phải là số chẵn.
Khi đó ta dẫn đến $a^4 + b^4 - 4(a^2 + b^2) \equiv 2(\mathrm{mod}\ 8)$ và $c^4 - 4c^2 - 2 \equiv 6(\mathrm{mod}\ 8)$
Nhưng từ đẳng thức $a^4+b^4-c^4 = 4(a^2+b^2-c^2)-2$ ta lại có $a^4+b^4-4(a^2+b^2) = c^4 - 4c^2 - 2$, điều này mâu thuẫn với điều vừa có ở trên!
Vậy không tồn tại các ma trận $A, B, C \in SL_2(\mathbb{Z})$ sao cho $A^4 + B^4 = C^4$.

Bài 1.5. Đặt $M = A + iB$ với $i^2 = -1$ là đơn vị ảo của trường số phức. Khi đó ta có ma trận liên hợp $\overline{M} = \overline{A + iB} = A - iB$ và

$$\begin{aligned} M\overline{M} &= (A + iB)\overline{(A + iB)} = (A + iB)(A - iB) = (A^2 + B^2) - i(AB - BA) \\ &= (A^2 + B^2) - \frac{i}{\sqrt{3}}(A^2 + B^2) = \Big(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\Big)(A^2 + B^2) \end{aligned}$$

Vì $BA-AB$ khả nghịch nên $AB-BA$ khả nghịch, suy ra $A^2+B^2 = \sqrt{3}(AB-BA)$ cũng khả nghịch, tức là $\det(A^2 + B^2) \neq 0$. Gọi $\alpha = (1 - \frac{i}{\sqrt{3}})$, lấy định thức 2 vế ta được

$$\det(M\overline{M}) = \det[\alpha(A^2 + B^2)] = \alpha^n \det(A^2 + B^2)$$

Do định nghĩa định thức ta thấy $\det(\overline{M}) = \overline{\det(M)}$. Từ đó suy ra

$$\alpha^n = \frac{\det(M\overline{M})}{\det(A^2 + B^2)} = \frac{\det(M)\overline{\det(M)}}{\det(A^2 + B^2)} = \frac{|\det(M)|^2}{\det(A^2 + B^2)}$$

là số một thực. Mặt khác ta có

$$\alpha^n = \Big[\frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\Big)\Big]^n = \Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^n\Big(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\Big)^n = \Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^n\Big(\cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}\Big)$$

nên phải có $\sin\frac{n\pi}{6} = 0$, suy ra n phải là bội số của 6.

Bài 1.6. Xét ma trận $A - A^t$. Ta có $(A - A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$. Chú ý rằng

$$\begin{aligned}\det(A - A^t) &= \det(A - A^t)^t = \det[-(A - A^t)] \\ &= (-1)^{3041975}\det(A - A^t) = -\det(A - A^t).\end{aligned}$$

Suy ra $\det(A - A^t) = 0$. Do đó hệ phương trình tuyến tính thuần nhất gồm 3041975 ẩn với ma trận hệ số là $A - A^t$ có nghiệm không tầm thường, nghĩa là tồn tại một ma trận cột X cỡ 3041975×1 với các phần tử không đồng thời bằng 0 sao cho $(A - A^t)X = 0$ hay $AX = A^tX$.

Bài 1.7. Ta có

$$(I - A)\sum_{i=1}^{k-1} A^i = I - A^k = I.$$

Do đó $I - A$ khả nghịch và $(I - A)^{-1} = \sum\limits_{i=1}^{k-1} A^i$.

Bài 1.8. Nhận thấy

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & 8 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & D \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

trong đó $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$

Ta có $B^3 = EI, C^3 = 0, B^2.D + B.D.C + D.C^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix} := F$. Khi đó $A^3 = \begin{bmatrix} EI & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^{2016} = (A^3)^{672} = \begin{bmatrix} I^{672} & I^{672}F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bài 1.9.
$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 2 & \frac{b}{c}+\frac{c}{b} & \frac{d}{c}+\frac{c}{d} \\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b} & 2 & \frac{d}{b}+\frac{b}{d} \\ \frac{d}{c}+\frac{c}{d} & \frac{d}{b}+\frac{b}{d} & 2 \end{vmatrix} \\ &= 8+2\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{d}{b}+\frac{b}{d}\right)\left(\frac{d}{c}+\frac{c}{d}\right) \\ &\quad -2\left(\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{d}{b}+\frac{b}{d}\right)^2+\left(\frac{d}{c}+\frac{c}{d}\right)^2\right).\end{aligned}$$

Khai triển và rút gọn ta được $\det A = 0$.
Mặt khác ta có: Nếu $b^2 \neq c^2$ thì $\begin{vmatrix} 2 & \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b} & 2 \end{vmatrix} = 4-\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2 = -\left(\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right)^2 \neq 0$.
Nếu $b^2 \neq d^2$ thì $\begin{vmatrix} 2 & \frac{b}{d}+\frac{d}{b} \\ \frac{b}{d}+\frac{d}{b} & 2 \end{vmatrix} = 4-\left(\frac{b}{d}+\frac{d}{b}\right)^2 = -\left(\frac{b}{d}-\frac{d}{b}\right)^2 \neq 0$.
Nếu $c^2 \neq d^2$ thì $\begin{vmatrix} 2 & \frac{c}{d}+\frac{d}{c} \\ \frac{c}{d}+\frac{d}{c} & 2 \end{vmatrix} = 4-\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)^2 = -\left(\frac{c}{d}-\frac{d}{c}\right)^2 \neq 0$.
Nếu $b^2 = c^2 = d^2$ thì 4 định thức con cấp 2 bao quanh định thức con cấp 1: $D_1^1 = 2 \neq 0$ của ma trận A là $D_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b} & 2 \end{vmatrix} = 4-\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2 = -\left(\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right)^2 = 0$.
$D_{12}^{13} = D_{13}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & \frac{d}{c}+\frac{c}{d} \\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b} & \frac{d}{b}+\frac{b}{d} \end{vmatrix} = 2\left(\frac{d}{b}+\frac{b}{d}\right)-\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{d}{c}+\frac{c}{d}\right) = \frac{d}{b}+\frac{b}{d}-\frac{bd}{c^2}-\frac{c^2}{bd} = 0$ vì $c^2 = d^2$.
$D_{13}^{13} = \begin{vmatrix} 2 & \frac{c}{d}+\frac{d}{c} \\ \frac{c}{d}+\frac{d}{c} & 2 \end{vmatrix} = 4-\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)^2 = -\left(\frac{c}{d}-\frac{d}{c}\right)^2 = 0$.
Vậy nếu $b^2 = c^2 = d^2$ thì hạng của ma trận A bằng 1, còn trong các trường hợp khác hạng của A bằng 2.

Bài 1.10. Tính $\det A_n$. Cộng các dòng từ dòng thứ 2 đến dòng n vào dòng đầu rồi rút nhân tử chung ta được

$$\det A_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

Nhân dòng đầu với $-b$ rồi cộng lần lượt vào các dòng còn lại được

$$\det A_n = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

Từ đó ta suy ra:
Nếu $a = b \neq 0$ thì hạng của A_n bằng 1.
Nếu $a = -(n-1)b,\ \ n > 2$ thì $\det A_n = 0; \det A_{n-1} = (a+(n-2)b)(a-b)^{n-2} \neq 0$ suy ra hạng của A_n bằng $n-1$. Nếu $a \neq b; a \neq -(n-1)b$ thì $\det A_n \neq 0$ nên hạng của A_n bằng n.

Bài 1.11. Theo giả thiết, ta có

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ 4 & 5 & 6 & \cdots & n+3 \\ . & . & \cdots & . & \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ . & . & \cdots & . & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

Suy ra $\operatorname{rank} A = 2$.

Bài 1.12. Gọi D là định thức cấp 2 tạo bởi tọa độ của hệ véctơ $\{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}\}$ (D cũng chính là định thức của hệ véctơ $\{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}\}$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{C}$-không gian véctơ $\mathbb{C}^2$). Dễ thấy

$$\begin{aligned} D &= |z_1 + z_2| - \frac{1}{2}(|z_1| + |z_2|)\left|\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right| \\ &= \left(\left|\frac{|z_1|}{|z_1| + |z_2|}\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{|z_2|}{|z_1| + |z_2|}\frac{z_2}{|z_2|}\right| - \left|\frac{1}{2}\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{1}{2}\frac{z_2}{|z_2|}\right|\right)(|z_1| + |z_2|) \end{aligned}.$$

Đặt $\varphi_1 = \arg z_1, \varphi_2 = \arg z_2, M_1(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1), M_2(\cos\varphi_2, \sin\varphi_2), O(0,0)$. Khi đó $|\overrightarrow{OM_1}| = |\overrightarrow{OM_2}| = 1$ và

$$D = \left(\left|\frac{|z_1|}{|z_1| + |z_2|}\overrightarrow{OM_1} + \frac{|z_2|}{|z_1| + |z_2|}\overrightarrow{OM_2}\right| - \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{OM_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OM_2}\right|\right)(|z_1| + |z_2|).$$

Ta có $\left|\frac{|z_1|}{|z_1| + |z_2|}\overrightarrow{OM_1} + \frac{|z_2|}{|z_1| + |z_2|}\overrightarrow{OM_2}\right| = |\overrightarrow{OM}|$ với M thuộc đoạn thẳng M_1M_2 và $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{OM_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OM_2}\right| = |\overrightarrow{OM_0}|$ với M_0 là trung điểm của đoạn thẳng M_1M_2. Dễ thấy $|\overrightarrow{OM}| \geq |\overrightarrow{OM_0}|$ vì $OM_0 \perp M_1M_2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M trùng với M_0. Điều này tương đương $\frac{|z_1|}{|z_1| + |z_2|} = \frac{|z_2|}{|z_1| + |z_2|} = \frac{1}{2}$ hay $|z_1| = |z_2|$. Vậy:

- nếu $|z_1| \neq |z_2|$ thì $D > 0$ nên hạng của hệ $\{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}\}$ bằng 2;

- nếu $|z_1| = |z_2|$ thì $D = 0$ nên hạng của hệ $\{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}\}$ bằng 1.

Bài 1.13. a) Ta có $A = A^tA = (A^tA)^t = A^t$, tức là A là ma trận đối xứng. Do đó, $A^2 = A.A = A^tA = A$ và A chéo hóa được. Nếu λ là một giá trị riêng của A thì $\lambda^2 = \lambda$, bởi vậy $\lambda = 0$ hoặc $\lambda = 1$. Từ đó, suy ra tồn tại ma trận P sao cho $P^{-1}AP = \Lambda$ là ma trận chéo mà các phần tử trên đường chéo chính là 0 hoặc 1. Vì vậy, $rank(A) = trace(A)$.

b) Đặt $U = \begin{bmatrix} 1 \\ ... \\ 1 \end{bmatrix}$ là ma trận cột cỡ $n \times 1$ mà các phần tử đều là 1.

Ta có $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} = U^tAU$. Mặt khác, $U^tAU = U^tA^tAU = (AU)^tAU \geq 0$. Do đó, ta được $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \geq 0$.

Tiếp tục, đặt $B = I_n - A$, ta có $B^tB = (I_n - A)^t(I_n - A) = I_n - A - A^t + A^tA = I_n - A = B$. Áp dụng kết quả trên cho B ta được $n - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \geq 0$. Ta có điều cần chứng minh.

Bài 1.14. Giả sử A có dạng chéo hóa Jordan với các khối Jordan tương ứng với các giá trị riêng $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ phân biệt. Khi đó, A^k là ma trận có các phần tử trên đường chéo chính là λ_i^k. Từ giả thiết $tr(A^k) = 0$ với mọi $k = 1, \cdots, n$ ta có hệ phương trình:

$$\Sigma_{i=1}^m \mu_i \lambda_i^k = 0, k = 1, \cdots, n, \left(1 \leq M_i, \sum_i^m M_i \leq n\right).$$

Từ hệ này ta suy ra $\lambda_i = 0, 1 \leq i \leq m$. Vậy A là ma trận lũy linh.

Bài 1.15. Gọi $v_1, v_2, \cdots, v_{n+1}$ là các véctơ cột đầu tiên của các ma trận $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$ tương ứng. Khi đó, $n+1$ véctơ này phụ thuộc tuyến tính. Do đó tồn tại $n+1$ số thực $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_{n+1}v_{n+1} = 0.$$

Lúc đó ma trận $x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_{n+1}A_{n+1}$ có cột đầu tiên bằng 0 nên suy biến.

Bài 1.16. 1) Giả sử có phương trình

$$a_0I_n + a_1A + ... + a_{k-1}A^{k-1} = 0.$$

Khi đó, từ tính chất lũy linh của ma trận A nhân cả hai vế trên với ma trận

A^{k-1} ta được $a_0 = 0$.
Tương tự, ta có điều phải chứng minh.
2) Sử dụng tính chất lũy linh của ma trận A chứng minh rằng $rank(A + A^2 + ... + A^{2014}) = rankA$ và $rank(A + A^2 + ... + A^{2015}) = rankA$.
Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 1.17. Nếu $A^k = 0$, thì định thức của A bằng 0, tức là nếu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, thì ta có $ad - bc = 0$. Do đó theo Định lí Hamilton-Cayley

$$A^2 = (a + d)\,A.$$

Suy ra

$$A^k = (a + d)^{k-1}\,A.$$

Nếu $a + d = 0$, thi ta có $A^k = 0$, với mọi $k \geq 2$. Nếu $a + d \neq 0$, thì ta có $A^k = 0$, với $k \geq 2$ nào đó khi và chỉ khi $A^2 = 0$.

Bài 1.18. Phương trình $X^2 + 2X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ tương đương với $(X + I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$. Giả sử $X + I = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Khi đó ta có $\begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ suy ra $\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a + d) = 0 \\ c(a + d) = 4 \\ d^2 + bc \; = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a = b = 0 \\ c = d = \pm 2 \end{cases}$

Suy ra $X + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ hoặc $X + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.
Vậy $X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ hoặc $X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$.

Bài 1.19. Đặt

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix},$$

trong đó A_1, A_2, B_1, B_2 là các ma trận vuông cấp 2. Theo giả thiết ta có: $A_1B_1 = I = A_2B_2;\; A_2B_1 = -I = A_1B_2$. Suy ra $B_1 = A_1^{-1}, B_2 = A_2^{-1}$. Suy ra

$$BA = B_1A_1 + B_2A_2 = 2I.$$

Bài 1.20. Giả sử tồn tại ma trận A sao cho $A^{-1} = I + A^T$. Ta có

$$\begin{aligned} A^T = A^{-1} - I \Leftrightarrow A &= (A^{-1} - I)^T = (A^{-1})^T - I = (A^T)^{-1} - I \\ &= (A^{-1} - I)^{-1} - I \\ &\Leftrightarrow A + I = (A^{-1} - I)^{-1} \Leftrightarrow (A^{-1} - I)(A + I) = I \\ &\Leftrightarrow (I - A)(I + A) = A \\ &\Leftrightarrow A^2 + A - I = 0. \end{aligned}$$

Vậy A là một nghiệm của đa thức $f(x) = x^2 + x - 1$. Đa thức này có hai nghiệm phân biệt là $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$, mà A là ma trận với hệ số hữu tỷ nên đa thức cực tiểu của A phải là $f(x) = x^2 + x - 1$. Suy ra đa thức đặc trưng của A phải có dạng $(x^2 + x - 1)^k$. Suy ra $n = 2k$, tức là n là chẵn.

Ngược lại, giả sử n là chẵn, ta xét ma trận $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Ta có

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = I_2 + B^T.$$

Gọi A là ma trận vuông cấp n trên đường chéo chính là $n/2$ khối các ma trận B, các phần tử còn lại bằng 0. Khi đó, ta có: $A^{-1} = I + A^T$.

Bài 1.21. Giả sử A là ma trận vuông cấp $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Giả sử đa thức cực tiểu của A là

$$m_A(\lambda) = \lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0,\ 0 \leq r \leq n.$$

Vì A nghiệm đúng đa thức cực tiểu của nó, nên ta có:

$$\begin{aligned} A^r + a_{r-1}A^{r-1} + \cdots + a_1A &= -a_0I \\ \Leftrightarrow A(A^{r-1} + a_{r-1}A^{r-2} + \cdots + a_1I) &= -a_0I. \end{aligned}$$

Do đó, nếu $a_0 \neq 0$ thì A khả nghịch.
Ngược lại, nếu A khả nghịch và $a_0 = 0$ thì ta có

$$A^{r-1} + a_{r-1}A^{r-2} + \cdots + a_1I = 0.$$

Suy ra $m_A(\lambda)$ không là đa thức cực tiểu của ma trận A. Mâu thuẫn. Vì vậy, để tránh mâu thuẫn thì $a_0 \neq 0$.

Bài 1.22. Từ giả thiết, ta có

$$(A - I)(I + A + A^2 + \cdots + A^{2016}) = 0$$

hay $A^{2017} - I = 0$. Suy ra $A^{2017} + I = 2I$. Dễ thấy

$$A^{2017} + I = (A + I)(A^{2016} - A^{2015} + A^{2014} + \cdots + (-1)^kA^k + \cdots + I) = 2I$$

là một ma trận khả nghịch. Do đó $A+I$ khả nghịch. Nếu $A-I$ không khả nghịch thì tồn tại X là một véctơ cột khác 0 cỡ $n\times 1$ sao cho $(A-I)X=0$ hay $AX=X$. Suy ra $A^kX=X$ với mọi k và dẫn đến $(I+A+A^2+\cdots+A^{2016})X=2017X\neq 0$. Điều này mâu thuẫn $I+A+A^2+\cdots+A^{2016}=0$. Vậy $A-I$ là ma trận khả nghịch.

Vậy $(A+I)(A-I)=A^2-I$ khả nghịch

Bài 1.23. a) Đặt $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Chúng ta có:

$$AM=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & -a-b\\ c+d & -c-d\end{pmatrix}$$
$$MA=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-c & b-d\\ a-c & b-d\end{pmatrix}$$

Do đó đẳng thức $AM=MA$ tương đương với hệ

$$\begin{cases} a+b=a-c\\ -a-b=b-d\\ c+d=a-c\\ -c-d=b-d\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=d+2c\\ b=-c\\ c,d \text{ tùy ý}\end{cases}$$

Từ đó ta biểu diễn được

$$A=\begin{pmatrix} d+2c & -c\\ c & d\end{pmatrix}=(c+d)\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=(c+d)I+cM.$$

b) Từ phương trình ta có

$$M=\frac{1}{6}(X^{2016}-X^{2010}).$$

Do M là đa thức của X nên $XM=MX$. Theo câu a ta suy ra tồn tại α,β thực để

$$X=\alpha I+\beta M.$$

Tính toán trực tiếp ta có $M^2=0$. Sử dụng nhị thức Newton ta thu được

$$X^{2016}=\alpha^{2016}I+2016\alpha^{2015}\beta M,$$
$$X^{2010}=\alpha^{2010}I+2010\alpha^{2009}\beta M.$$

Thế vào phương trình ta thu được

$$(\alpha^{2016}-\alpha^{2010})I+(2016\alpha^{2015}\beta-2010\alpha^{2009}\beta-6)M=0$$

Do hệ $\{I, M\}$ độc lập tuyến tính nên ta thu được hệ

$$\begin{cases} \alpha^{2016} - \alpha^{2010} = 0 \\ 2016\alpha^{2015}\beta - 2010\alpha^{2009}\beta - 6 = 0. \end{cases}$$

Phương trình thứ nhất của hệ chính là

$$\alpha^{2010}(\alpha^6 - 1) = 0$$

và có các nghiệm là $\alpha = 0, \alpha = \pm 1$.
Nếu $\alpha = 0$ thì thay vào phương trình thứ hai ta được $-6 = 0$ không thỏa mãn.
Nếu $\alpha = 1$ thì thay vào phương trình thứ hai ta được $6\beta - 6 = 0$ hay là $\beta = 1$ và ta tìm được

$$X = I + M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nếu $\alpha = -1$ thì thay vào phương trình thứ hai ta được $-6\beta - 6 = 0$ hay là $\beta = -1$ và ta tìm được

$$X = -I - M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bài 1.24. Giả sử $A = (a_{ij})_{n \times n}$ và $d_1, d_2, \ldots, d_n$ tương ứng là công sai của các cấp số cộng trên các hàng thứ $1, 2, \ldots, n$. Ký hiệu $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tương ứng là các cột thứ $1, 2, \ldots, n$ của A và $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)^T$. Theo giả thiết chúng ta có

$$C_k = C_1 + (k-1)D, \quad k = 2, 3, \ldots, n. \tag{1}$$

Đặt

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & d_1 \\ a_{21} & d_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & d_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n-1 \end{pmatrix}.$$

Chú ý rằng $B = (C_1, D)$ và từ (1) chúng ta có đẳng thức $A = BC$. Ma trận tích CB là một ma trận vuông cấp hai nên với

$$\alpha = -\mathrm{Trace}(CB), \quad \beta = \det(CB)$$

ta có đẳng thức

$$(CB)^2 + \alpha CB + \beta I = 0 \tag{2}$$

trong đó, I là ma trận đơn vị cấp 2. Nhân ma trận B vào bên trái, nhân ma trận C vào bên phải hai vế của đẳng thức (2) ta thu được

$$A^3 + \alpha A^2 + \beta A = 0$$

Bài 1.25. Ký hiệu $I \subset \{1, 2, \dots, 10\}$ là tập hợp các chỉ số i mà $M_iA = AM_i$. Ký hiệu $J = \{1, 2, \dots, 10\} \setminus I$. Ta thấy $j \in J$ thì $M_jB = BM_j$. Tương tự kết quả Bài 1.23, câu a ta khẳng định được:

- Nếu $i \in I$ thì tồn tại $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$ để cho $M_i = \alpha_i E + \beta_i A$;
- Nếu $j \in J$ thì tồn tại $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z}$ để cho $M_j = \alpha_j E + \beta_j B$.

(Ở đây E là ma trận đơn vị cấp hai.)
Tính toán trực tiếp ta nhận được $A^2 = B^2 = 0$ nên sử dụng nhị thức Newton ta có

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} M_k^2 &= \sum_{i \in I}(\alpha_i^2 E + 2\alpha_i\beta_i A) + \sum_{j \in J}(\alpha_j^2 E + 2\alpha_j\beta_j B) \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{10} \alpha_k^2\Big)E + 2\Big(\sum_{i \in I}\alpha_i\beta_i\Big)A + 2\Big(\sum_{j \in J}\alpha_j\beta_j\Big)B.\end{aligned}$$

và cũng có

$$N = \sum_{k=1}^{10} M_k^6 = \Big(\sum_{k=1}^{10} \alpha_k^6\Big)E + 6\Big(\sum_{i \in I}\alpha_i^5\beta_i\Big)A + 6\Big(\sum_{j \in J}\alpha_j^5\beta_j\Big)B.$$

Tính toán trực tiếp ta có:

$$\begin{pmatrix}2016 & 0\\ 0 & -2008\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1006 & 1006\\ -1006 & -1006\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1006 & -1006\\ 1006 & -1006\end{pmatrix} = 4E + 1006A + 1006B.$$

Như vậy điều kiện iii có thể viết lại là

$$\Big(4 - \sum_{k=1}^{10}\alpha_k^2\Big)E + 2\Big(503 - \sum_{i \in I}\alpha_i\beta_i\Big)A + 2\Big(503 - \sum_{j \in J}\alpha_j\beta_j\Big)B = 0.$$

Do hệ $\{E, A, B\}$ độc lập tuyến tính nên ta thu được các đẳng thức

$$\sum_{k=1}^{10}\alpha_k^2 = 4; \quad \sum_{i \in I}\alpha_i\beta_i = 503; \quad \sum_{j \in J}\alpha_j\beta_j = 503.$$

Hai đẳng thức sau cho thấy có ít nhất hai chỉ số k để $\alpha_k \neq 0$. Suy ra các số hạng trong tổng $\sum_{k=1}^{10} \alpha_k^2$ đều nhỏ hơn 4. Từ điều này ta thấy các số chính phương $\alpha_k^2, k = 1, 2, \dots, 10$ chỉ có thể nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1. Từ $\alpha_k^2 = 0$ hoặc $\alpha_k^2 = 1$ ta suy ra $\alpha_k^6 = \alpha_k^2; \alpha^5 = \alpha_k$ với mỗi $k = 1, 2, \dots, 10$. Như vậy ta thu được

$$\sum_{k=1}^{10} \alpha_k^6 = 4; \quad \sum_{i \in I} \alpha_i^5 \beta_i = 503; \quad \sum_{j \in J} \alpha_j^5 \beta_j = 503.$$

Từ đó ta tính toán được

$$N = 4E + 3018A + 3018B = \begin{pmatrix} 6040 & 0 \\ 0 & -6032 \end{pmatrix}.$$

Ghi chú: Trong bài toán này có 4 chỉ số k để $\alpha_k^2 = 1$ và có 6 chỉ số k để $\alpha_k = 0$.

Bài 1.26. Ta sẽ chứng minh hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $(I_n + A + B)x = \theta$ chỉ có nghiệm tầm thường $x = \theta$, do đó ma trận $I_n + A + B$ khả nghịch. Gọi $x \in \mathbb{R}^n$ là vector sao cho $(I_n + A + B)x = \theta$, tức là $(A + I_n)x = -Bx$. Khi đó $B(A + I_n)x = -B^2x$ hay $(A + I_n)Bx = -B^2x$ (do $AB = BA$). Dẫn đến $(A + I_n)^2x = B^2x$. Bằng quy nạp ta dễ dàng có

$$(A + I_n)^k x = (-1)^k B^k x, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Nói riêng, ta có $A^{15}x = I_n x$ hay $(A^{15} - I_n)x = \theta$ và $(A + I_n)^{16}x = B^{16}x = I_n x$ hay $[(A + I_n)^{16} - I_n]x = \theta$.
Xét các đa thức $p(t) = t^{15} - 1$ và $q(t) = (t + 1)^{16} - 1$. Từ kết quả trên ta dẫn đến $p(A)x = \theta$ và $q(A)x = \theta$. Mặt khác

$$\begin{aligned} p(t) &= (t - 1)(t^{14} + t^{13} + \cdots + t + 1) \\ q(t) &= [(t + 1)^8 + 1][(t + 1)^4 + 1][(t + 1)^2 + 1](t + 2)t \end{aligned}$$

nên 2 đa thức $p(t)$ và $q(t)$ nguyên tố cùng nhau (không có nhân tử chung). Theo thuật chia Euclide tồn tại 2 đa thức $r(t)$ và $s(t)$ khác hằng số (có bậc ít nhất bằng 1) sao cho $r(t)p(t) - s(t)q(t) = 1$. Suy ra

$$I_n = r(A)p(A) - s(A)q(A)$$
$$x = I_n x = r(A)p(A)x - s(A)q(A)x = \theta$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 1.27. Với $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, gọi $X = [x_{ij}]_n$, đặt $m(X) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_{ij}^2$.

Trước tiên ta chứng minh rằng với $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ thì $m(XY) \leqslant m(X)m(Y)$.

Thật vậy, coi $XY = Z = [z_{ij}]_n$. Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$z_{ij}^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}y_{kj}\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} y_{kj}^2\Big)$$

Lấy tổng theo j ta được

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}^2 &\leqslant \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} y_{kj}^2\Big)\\ &= \Big(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} y_{kj}^2\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}^2\Big)\cdot m(Y)\end{aligned}$$

Lại lấy tổng theo i ta được

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}^2\Big)\cdot m(Y) = \Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}^2\Big)\cdot m(Y) = m(X)m(Y)$$

Áp dụng điều vừa chứng minh ta có

$$[m(A)]^k \geqslant m(A^k) = m(N) = 1$$

Đến đây do $m(A) \geqslant 0$ ta suy ra $m(A) \geqslant 1$.

Bài 1.28. Ta có $A^2 - B = AB \Rightarrow A^2 = (A+I)B \Rightarrow (A^2)^{-1}(A+I)B = I$. Do đó, B là ma trận khả nghịch nên B không thể là một ma trận lũy linh (vì ma trận lũy linh có định thức bằng 0). Hơn nữa, $(A^2)^{-1}(A+I)$ là ma trận nghịch đảo của B nên $B(A^2)^{-1}(A+I) = I \Rightarrow B(A+I)(A^2)^{-1} = I \Rightarrow B(A+I) = A^2 \Rightarrow BA = A^2 - B$. Bởi vậy, $AB = BA$.

2 Định thức

Bài 2.1. Vì định thức của ma trận không đổi qua phép chuyển vị nên ta có

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & x_4 & -x_3 \\ -x_3 & -x_4 & x_1 & x_2 \\ -x_4 & x_3 & -x_2 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix}$$

Suy ra

$$D^2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & x_4 & -x_3 \\ -x_3 & -x_4 & x_1 & x_2 \\ -x_4 & x_3 & -x_2 & x_1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^4$$

Với $\alpha = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Từ đó suy ra $D = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2$.
Vì x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình $x^4 - 12x^3 + 4x - 2016 = 0$ nên ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 144.$$

Vậy $D = 144^2 = 20736$.

Bài 2.2. Ta có

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1 - b_1} & \frac{1}{a_1 - b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1 - b_n} \\ \frac{1}{a_2 - b_1} & \frac{1}{a_2 - b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2 - b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n - b_1} & \frac{1}{a_n - b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n - b_n} \end{bmatrix}$$

Gọi $X = [x_1, x_2, ..., x_n]^t$. Xét hệ phương trình thuần nhất $MX = \theta \quad (*)$
Ta sẽ chứng minh hệ $(*)$ chỉ có nghiệm $X = \theta$, như thế $\det(M) \neq 0$.
Hệ $(*)$ viết cụ thể là

$$\begin{cases} \frac{x_1}{a_1 - b_1} + \frac{x_2}{a_1 - b_2} + \frac{x_3}{a_1 - b_3} + \cdots + \frac{x_n}{a_1 - b_n} = 0 \\ \frac{x_1}{a_2 - b_1} + \frac{x_2}{a_2 - b_2} + \frac{x_3}{a_2 - b_3} + \cdots + \frac{x_n}{a_2 - b_n} = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \frac{x_1}{a_n - b_1} + \frac{x_2}{a_n - b_2} + \frac{x_3}{a_n - b_3} + \cdots + \frac{x_n}{a_n - b_n} = 0 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x_1}{x - b_1} + \frac{x_2}{x - b_2} + ... + \frac{x_n}{x - b_n} = \frac{P(x)}{\prod_{i=1}^n (x - b_i)}$, trong đó

$$\begin{aligned} P(x) = & \; x_1(x - b_2)(x - b_3)...(x - b_n) \\ & + x_2(x - b_1)(x - b_3)...(x - b_n) \\ & + ... \\ & + x_n(x - b_1)(x - b_2)...(x - b_{n-1}) \end{aligned}$$

là đa thức bậc $(n-1)$.
Phương trình thứ nhất của hệ là $f(a_1) = \dfrac{P(a_1)}{\prod_{i=1}^{n}(a_1 - b_i)} = 0$, hay $P(a_1) = 0$.
Phương trình thứ hai của hệ là $f(a_2) = \dfrac{P(a_2)}{\prod_{i=1}^{n}(a_2 - b_i)} = 0$, hay $P(a_2) = 0$.
v.v... Phương trình thứ n của hệ là $f(a_n) = \dfrac{P(a_n)}{\prod_{i=1}^{n}(a_n - b_i)} = 0$, hay $P(a_n) = 0$.
Như vậy đa thức $P(x)$ bậc $(n-1)$ có n nghiệm phân biệt $a_1, a_2, ..., a_n$.
Do đó $P(x) \equiv 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Lấy $x = b_1$ ta được $P(b_1) = x_1(b_1 - b_2)(b_1 - b_3)...(b_1 - b_n) = 0$, nên $x_1 = 0$.
Lấy $x = b_2$ ta được $P(b_1) = x_2(b_2 - b_1)(b_2 - b_3)...(b_2 - b_n) = 0$, nên $x_2 = 0$.
v.v... Lấy $x = b_n$ ta được $P(b_n) = x_n(b_n - b_1)(b_n - b_2)...(b_n - b_{n-1}) = 0$, nên $x_n = 0$.
Vậy hệ phương trình đã cho chỉ có nghiệm tầm thường $[x_1, x_2, ..., x_n]^t = \theta$.

Bài 2.3. Đặt

$$D_n = \det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Sử dụng phương pháp truy hồi, khai triển theo dòng thứ nhất ta được

$$D_n = 3D_{n-1} + 4D_{n-2}$$

Phương trình đặc trưng $t^2 - 3t - 4 = 0; \Delta = 25; \sqrt{\Delta} = 5$ nghiệm 4 và -1. Vậy

$$D^n = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2.5}\right) 4^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2.5}\right) (-1)^n$$

Từ đó suy ra $D_n = \dfrac{4^{n+1} + (-1)^n}{5}$.

Bài 2.4. Đặt $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$. (Định thức cấp n).

Khai triển theo cột đầu ta có

$$D_n = -D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} := X_{n-1}.$$

Do đó $D_{2016} = -1 + \sum_{j=1}^{2015} (-1)^{j-1} X_i$.
Tính X_n. Ta có $X_n - X_{n-1} + X_{n-2} = 0$. Xét phương trình đặc trưng $t^2 - t + 1 = 0$.
Khi đó ta nhận được

$$X_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i\right) \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} i\right) \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} i\right) \left[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right]^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i\right) \left[\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\right]^n$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} i\right) \left[\cos(-n\frac{\pi}{3}) + i\sin(-n\frac{\pi}{3})\right] + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i\right) \left[\cos(n\frac{\pi}{3}) + i\sin(n\frac{\pi}{3})\right]$$

Đặt $a_n = \cos(-n\frac{\pi}{3}) + i\sin(-n\frac{\pi}{3})$ và $b_n = \cos(n\frac{\pi}{3}) + i\sin(n\frac{\pi}{3})$. Ta có

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2015} (-1)^{n-1} a_n &= \sum_{j=1}^{2015} (-1)^{j-1} \left[\cos(-j\frac{\pi}{3}) + i\sin(-j\frac{\pi}{3})\right] \\ &= 1 + 335 \sum_{j=1}^{6} (-1)^{j-1} \left[\cos\left(-j\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-j\frac{\pi}{3}\right)\right] = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2015} (-1)^{n-1} b_n &= \sum_{j=1}^{2015} (-1)^{j-1} \left[\cos(j\frac{\pi}{3}) + i\sin(j\frac{\pi}{3})\right] \\ &= 1 + 335 \sum_{j=1}^{6} (-1)^{j-1} \left[\cos\left(j\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(j\frac{\pi}{3}\right)\right] = 1 \end{aligned}$$

Vậy $D_{2016} = 0$.

Bài 2.5. Ta chứng minh bằng quy nạp.
Với $n = 1$ thì $\det(M) = \det[e^{a_1 b_1}] = e^{a_1 b_1} > 0$.
Giả sử kết luận của bài toán đúng với các ma trận M từ cấp 1 cho đến cấp $(n-1)$, ở đây $n \geqslant 2$. Ta sẽ chứng tỏ kết luận của bài toán đúng với ma trận M cấp n.

Gọi $c_i = a_i - a_1 > 0$ $(i = 2, 3, ..., n)$ ta thấy
$e^{a_ib_j} = e^{a_1b_j}e^{c_ib_j}$ với $(i = 2, 3, ..., n), (j = 1, 2, ..., n)$ và từ đó $\det(M) =$

$$= \det\begin{bmatrix} e^{a_1b_1} & e^{a_1b_2} & \cdots & e^{a_1b_n} \\ e^{a_2b_1} & e^{a_2b_2} & \cdots & e^{a_2b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{a_nb_1} & e^{a_nb_2} & \cdots & e^{a_nb_n} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} e^{a_1b_1} & e^{a_1b_2} & \cdots & e^{a_1b_n} \\ e^{a_1b_1}e^{c_2b_1} & e^{a_1b_2}e^{c_2b_2} & \cdots & e^{a_1b_n}e^{c_2b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{a_1b_1}e^{c_nb_1} & e^{a_1b_2}e^{c_nb_2} & \cdots & e^{a_1b_n}e^{c_nb_n} \end{bmatrix}$$

$$= e^{a_1(b_1+b_2+\cdots+b_n)}\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{c_2b_1} & e^{c_2b_2} & \cdots & e^{c_2b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{c_nb_1} & e^{c_nb_2} & \cdots & e^{c_nb_n} \end{bmatrix} = e^{a_1(b_1+b_2+\cdots+b_n)}\det(N)$$

Như vậy ta chỉ cần chứng tỏ $\det(N) > 0$.
Lấy cột thứ $(n-1)$ nhân với (-1) rồi cộng vào cột thứ n, lấy cột thứ $(n-2)$ nhân với (-1) rồi cộng vào cột thứ $(n-1)$, ..., cuối cùng lấy cột thứ nhất nhân với (-1) rồi cộng vào cột thứ hai, ta được

$$\det(N) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ e^{c_2b_1} & e^{c_2b_2} - e^{c_2b_1} & e^{c_2b_3} - e^{c_2b_2} & \cdots & e^{c_2b_n} - e^{c_2b_{n-1}} \\ e^{c_3b_1} & e^{c_3b_2} - e^{c_3b_1} & e^{c_3b_3} - e^{c_3b_2} & \cdots & e^{c_3b_n} - e^{c_3b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{c_nb_1} & e^{c_nb_2} - e^{c_nb_1} & e^{c_nb_3} - e^{c_nb_2} & \cdots & e^{c_nb_n} - e^{c_nb_{n-1}} \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} e^{c_2b_2} - e^{c_2b_1} & e^{c_2b_3} - e^{c_2b_2} & \cdots & e^{c_2b_n} - e^{c_2b_{n-1}} \\ e^{c_3b_2} - e^{c_3b_1} & e^{c_3b_3} - e^{c_3b_2} & \cdots & e^{c_3b_n} - e^{c_3b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{c_nb_2} - e^{c_nb_1} & e^{c_nb_3} - e^{c_nb_2} & \cdots & e^{c_nb_n} - e^{c_nb_{n-1}} \end{bmatrix} = \det(P)$$

Xét hàm số

$$f(t) = \det\begin{bmatrix} e^{c_2t} & e^{c_2b_3} - e^{c_2b_2} & \cdots & e^{c_2b_n} - e^{c_2b_{n-1}} \\ e^{c_3t} & e^{c_3b_3} - e^{c_3b_2} & \cdots & e^{c_3b_n} - e^{c_3b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{c_nt} & e^{c_nb_3} - e^{c_nb_2} & \cdots & e^{c_nb_n} - e^{c_nb_{n-1}} \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

Ta thấy $f(t)$ là hàm khả vi và $\det(P) = f(b_2) - f(b_1)$. Theo định lý Lagrange tồn tại $x_1 \in (b_1, b_2)$ sao cho $f(b_2) - f(b_1) = (b_2 - b_1)f'(x_1)$. Từ đó ta có $\det(P) =$

$$= (b_2 - b_1)\det\begin{bmatrix} c_2e^{c_2x_1} & e^{c_2b_3} - e^{c_2b_2} & \cdots & e^{c_2b_n} - e^{c_2b_{n-1}} \\ c_3e^{c_3x_1} & e^{c_3b_3} - e^{c_3b_2} & \cdots & e^{c_3b_n} - e^{c_3b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_ne^{c_nx_1} & e^{c_nb_3} - e^{c_nb_2} & \cdots & e^{c_nb_n} - e^{c_nb_{n-1}} \end{bmatrix} = (b_2 - b_1)\det(Q)$$

Áp dụng cách làm tương tự như ở trên cho cột thứ hai của ma trận Q, ta suy ra tồn tại $x_2 \in (b_2, b_3)$ sao cho $\det(P) =$

$$(b_2 - b_1)(b_3 - b_2)\det \begin{bmatrix} c_2 e^{c_2 x_1} & c_2 e^{c_2 x_2} & \cdots & e^{c_2 b_n} - e^{c_2 b_{n-1}} \\ c_3 e^{c_3 x_1} & c_3 e^{c_3 x_2} & \cdots & e^{c_3 b_n} - e^{c_3 b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n e^{c_n x_1} & c_n e^{c_n x_2} & \cdots & e^{c_n b_n} - e^{c_n b_{n-1}} \end{bmatrix}$$

Cứ tiếp tục như thế, cuối cùng ta suy ra tồn tại $x_i \in (b_{i+1}, b_i)$, $(i = 1, 2, .., n-1)$ để

$$\begin{aligned} \det(P) &= \prod_{i=1}^{n-1}(b_{i+1} - b_i)\det \begin{bmatrix} c_2 e^{c_2 x_1} & c_2 e^{c_2 x_2} & \cdots & c_2 e^{c_2 x_{n-1}} \\ c_3 e^{c_3 x_1} & c_3 e^{c_3 x_2} & \cdots & c_3 e^{c_3 x_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n e^{c_n x_1} & c_n e^{c_n x_2} & \cdots & c_n e^{c_n x_{n-1}} \end{bmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{n-1}(b_{i+1} - b_i)\prod_{k=2}^{n} c_k \det \begin{bmatrix} e^{c_2 x_1} & e^{c_2 x_2} & \cdots & e^{c_2 x_{n-1}} \\ e^{c_3 x_1} & e^{c_3 x_2} & \cdots & e^{c_3 x_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{c_n x_1} & e^{c_n x_2} & \cdots & e^{c_n x_{n-1}} \end{bmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{n-1}(b_{i+1} - b_i)\prod_{k=2}^{n} c_k \det(R) \end{aligned}$$

Rõ ràng là $c_2 < c_3 < \cdots < c_n$ và $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$, nên ma trận R cấp $(n-1)$ thỏa mãn giả thiết quy nạp, do đó $\det(R) > 0$. Vậy $\det(N) = \det(P) > 0$.

Bài 2.6. Ta có

$$A^2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} & -\sqrt{3} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-\sqrt{3}+1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{3} & -2\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} - \sin\dfrac{\pi}{3} \end{bmatrix}$$

$=$

$$\begin{bmatrix} \cos 2\dfrac{\pi}{6} + \sin 2\dfrac{\pi}{6} & -2\sin 2\dfrac{\pi}{6} \\ \sin 2\dfrac{\pi}{6} & \cos 2\dfrac{\pi}{6} - \sin 2\dfrac{\pi}{6} \end{bmatrix}$$

và

$$A^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\dfrac{\pi}{6} + 3\sin\dfrac{\pi}{6} & -2\sin 3\dfrac{\pi}{6} \\ \sin 3\dfrac{\pi}{6} & \cos 3\dfrac{\pi}{6} - \sin 3\dfrac{\pi}{6} \end{bmatrix}$$

Quy nạp ta có được

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\frac{\pi}{6} + n\sin\frac{\pi}{6} & -2\sin n\frac{\pi}{6} \\ \sin n\frac{\pi}{6} & \cos n\frac{\pi}{6} - \sin n\frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$$

Thay $n = 2016$ thì

$$A^{2016} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài 2.7. Xét đa thức theo biến x như sau:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{vmatrix} = u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + u_4x^4.$$

Dễ thấy a, b, c, d là các nghiệm của $f(x)$. Theo Định lí Viét ta có $a+b+c+d = -\frac{u_3}{u_4}$.
Mặt khác, khai triển định thức $f(x)$ theo dòng cuối ta có

$$u_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}, u_4 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2.8. Cộng tất cả các hàng vào hàng đầu

$$D = \begin{vmatrix} a+b+c-x & a+b+c-x & a+b+c-x & a+b+c-x \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix},$$

Ta thấy khi $x = a+b+c$, định thức bằng 0. Tương tự, cộng hàng 2 vào hàng 1, và hàng 4 vào hàng 3, ta thấy nếu $a - x = b + c$, định thức bằng 0.

$$D = \begin{vmatrix} -x+a & a-x & b+c & c+b \\ a & -x & c & b \\ b+c & c+b & a-x & a-x \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}$$

Tương tự, với các cặp hàng $1+3, 2+4$ và $1+4, 2+3$ ta được

$$D = (x-a-b-c)(x-a+b+c)(x+a-b+c)(x+a+b-c).$$

Bài 2.9. Ma trận $B = AA^T + 16I_n$ là ma trận đối xứng nên ma trận B có đủ n giá trị riêng thực.
Gọi $\lambda \in \mathbb{R}$ là một giá trị riêng của B ứng với véc tơ riêng $X \neq 0$. Khi đó:

$$AA^T X = (\lambda - 16)X.$$

Nhân hai về của phương trình này với véc tơ X^T ta được:

$$X^T AA^T X = (\lambda - 16)X^T X.$$

Vì vậy từ $X \neq 0$ ta kéo theo rằng $\lambda \geq 16$.
Do đó, $\det(AA^T + 16I_n) \geq 16^n = 2^{4n}$. Đây là điều phải chứng minh.

Bài 2.10. Chú ý rằng các giá trị riêng của ma trận $f(A)$ đều có dạng $f(\lambda)$ trong đó $\lambda \in \mathbb{C}$ là giá trị riêng của ma trận A. Ta cũng chú ý rằng nếu $f(\lambda)$ là giá trị riêng của $f(A)$ thì $f(\bar{\lambda})$ cũng là giá trị riêng của $f(A)$, kết hợp với tính chất của đa thức $f(\lambda) \geq 0$ trong đó λ là giá trị riêng thực của ma trận A ta sẽ có điều phải chứng minh.

3 Hệ phương trình

Bài 3.1. Hệ đã cho tương dương với hệ $AX = \frac{1}{2}X$ với

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & \ldots & 2a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2^{n-1}a_{n1} & 2^{n-1}a_{2n} & \ldots & 2^{n-1}a_{nn} \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Gọi $P(X)$ là đa thức đặc trưng của ma trận A thì dễ thấy rằng $P(X)$ là đa thức đơn (hệ số bậc cao nhất bằng 1) với các hệ số đều nguyên. Suy ra nghiệm hữu tỷ nếu có của $P(X)$ phải là số nguyên. Vậy $P\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ suy ra $\frac{1}{2}$ không là giá trị riêng của ma trận A.
Vậy hệ phương trình $AX = \frac{1}{2}X$ có duy nhất nghiệm tầm thường.

Bài 3.2. Hệ đã cho có thể viết lại

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\frac{1}{2016} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\frac{1}{2016} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1}-\frac{1}{2016} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}-\frac{1}{2016} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Xét ma trận $A = [a_{ij}]_n$. Hệ trên có thể viết thành $\left(A - \frac{1}{2016} I_n\right) x = \theta \quad (*)$.
Đa thức đặc trưng của ma trận A là

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

Vì $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $(i, j = 1, 2, ..., n)$ nên $c_0, c_1, ..., c_{n-1} \in \mathbb{Z}$ và nói riêng $c_0 = \det(A)$.
Ta thấy

$$\begin{aligned}\det\left(A - \frac{1}{2016} I_n\right) &= P(\frac{1}{2016}) = (-1)^n \frac{1}{2016^n} + c_{n-1}\frac{1}{2016^{n-1}} + \cdots + c_1\frac{1}{2016} + c_0 \\ &= \frac{1}{2016^n}[(-1)^n + 2016c_{n-1} + \cdots + 2016^{n-1}c_1 + 2016^n c_0] = \frac{1}{2016^n} \cdot S\end{aligned}$$

Rõ ràng là $S \equiv (-1)^n (\mathrm{mod}\ 2016)$, nên $S \neq 0$, suy ra $\det(A - \frac{1}{2016} I_n) = P(\frac{1}{2016}) \neq 0$.
Điều này dẫn tới hệ $(*)$ chỉ có nghiệm tầm thường $[x_1, x_2, ..., x_n]^t = \theta$.
Nhận xét. Trong hệ đã cho, nếu ta thay $\frac{1}{2016}$ ở vế phải bởi $\frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0, \pm 1$ thì bài toán vẫn được giải hoàn toàn tương tự.

Bài 3.3. Lấy phương trình thứ $k+1$ trừ cho phương trình thứ k, $k = 1, 2, ..., n-1$ và lấy phương trình đầu trừ phương trình cuối, ta được hệ phương trình hệ quả:

$$\begin{cases} (x_1 - x_n) + 2(x_2 - x_1) + 3(x_3 - x_2) = 0 \\ (x_2 - x_1) + 2(x_3 - x_2) + 3(x_4 - x_3) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x_{n-1} - x_{n-2}) + 2(x_n - x_{n-1}) + 3(x_1 - x_n) = 0 \\ (x_n - x_{n-1}) + 2(x_1 - x_n) + 3(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Đặt $y_1 = x_1 - x_n, y_2 = x_2 - x_1, y_3 = x_3 - x_2, ..., y_n = x_n - x_{n-1}$, ta được hệ

$$\begin{cases} y_1 & + 2y_2 + 3y_3 = 0 \\ y_2 & + 2y_3 + 3y_4 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ y_{n-1} & + 2y_n + 3y_1 = 0 \\ y_n & + 2y_1 + 3y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 & + \alpha y_2 + (2-\alpha)(y_2 + \alpha y_3) = 0 \\ y_2 & + \alpha y_3 + (2-\alpha)(y_3 + \alpha y_4) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ y_{n-1} & + \alpha y_n + (2-\alpha)(y_n + \alpha y_1) = 0 \\ y_n & + \alpha y_1 + (2-\alpha)(y_1 + \alpha y_2) = 0 \end{cases}$$

trong đó α là số phức thỏa mãn $\alpha(2-\alpha) = 3 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 3 = 0$.

Đặt $y_1 + \alpha y_2 = z_1, y_2 + \alpha y_3 = z_2, ..., y_{n-1} + \alpha y_n = z_{n-1}, y_n + \alpha y_1 = z_n$, hệ phương trình hệ quả được viết lại thành

$$\begin{cases} z_1 & + (2-\alpha)z_2 = 0 \\ z_2 & + (2-\alpha)z_3 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ z_{n-1} & + (2-\alpha)z_n = 0 \\ z_n & + (2-\alpha)z_1 = 0 \end{cases}$$

Suy ra

$$z_1 = (\alpha-2)z_2 = (\alpha-2)^2 z_3 = ... = (\alpha-2)^n z_1 \Rightarrow z_1 = 0$$

Từ đó ta có $z_1 = z_2 = ... = z_n = 0$. Vậy

$$y_1 = -\alpha y_2 = ... = (-\alpha)^{n-1} y_n = (-\alpha)^n y_1 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow y_i = 0 \ \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Do đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{2}{3}.$$

Bài 3.4. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (a_{11}-1)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\ 2016}x_{2016} & = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-1)x_2 + \ldots + a_{2\ 2016}x_{2016} & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{2016\ 1}x_1 + a_{2016\ 2}x_2 + \ldots + (a_{2016\ 2016}-1)x_{2016} & = 0 \end{cases}$$

Ma trận hệ số có dạng $M = A - I$. Mà $M(A+2I) = (A-I)(A+2I) = A^2 + A - 2I = -A + A - 2I = -2I$. Do đó det$M \neq 0$. Vì vậy hệ có nghiệm tầm thường.

Bài 3.5. $\det(A) = \begin{vmatrix} a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$

$$\overset{h_1 + \sum_{i=2}^{2016} h_i}{\longrightarrow} = \begin{vmatrix} a+2015 & a+2015 & \dots & a+2015 & a+2015 \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+2015) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{h_i - h_1}{\underset{i=\overline{2,2016}}{\longrightarrow}} = (a+2015) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$= (a+2015)(a-1)^{2015}$.

Hệ có nghiệm tầm thường khi $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \neq -2015 \\ a \neq 1 \end{array} \right.$

Bài 3.6. Đặt $\begin{cases} a = 13 \\ b = 17 \\ c = 19 \end{cases}$ ta có

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & x & x^3 & x^4 \\ 1 & a & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^3 & c^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^3 & x^4 \\ 0 & a-x & a^3-x^3 & a^4-x^4 \\ 0 & b-x & b^3-x^3 & b^4-x^4 \\ 0 & c-x & c^3-x^3 & c^4-x^4 \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)(b-x)(c-x) \begin{vmatrix} 1 & x & x^3 & x^4 \\ 0 & 1 & a^2+ax+x^2 & a^3+a^2x+ax^2+x^3 \\ 0 & 1 & b^2+bx+x^2 & b^3+b^2x+bx^2+x^3 \\ 0 & 1 & c^2+cx+x^2 & c^3+c^2x+cx^2+x^3 \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)(b-x)(c-x)\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 & x^4 \\ 0 & 1 & a^2+ax+x^2 & a^3+a^2x+ax^2+x^3 \\ 0 & 0 & b^2-a^2+(b-a)x & b^3-a^3+(b^2-a^2)x+(b-a)x^2 \\ 0 & 0 & c^2-a^2+(c-a)x & c^3-a^3+(c^2-a^2)x+(c-a)x^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)(b-x)(c-x)(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 & x^4 \\ 0 & 1 & a^2+ax+x^2 & a^3+a^2x+ax^2+x^3 \\ 0 & 0 & b+a+x & b^2+ba+a^2+(b+a)x+x^2 \\ 0 & 0 & c+a+x & c^2+ca+a^2+(c+a)x+x^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)(b-x)(c-x(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 & x^4 \\ 0 & 1 & a^2+ax+x^2 & a^3+a^2x+ax^2+x^3 \\ 0 & 0 & b+a+x & b^2+ba+a^2+(b+a)x+x^2 \\ 0 & 0 & c-b & c^2-b^2+(c-b)a+(c-b)x \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)(b-x)(c-x)(b-a)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 & x^4 \\ 0 & 1 & a^2+ax+x^2 & a^3+a^2x+ax^2+x^3 \\ 0 & 0 & b+a+x & b^2+ba+a^2+(b+a)x+x^2 \\ 0 & 0 & 1 & c+b+a+x \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)(b-x)(c-x)(b-a)(c-a)(c-b)[(a+b+c)x+ab+bc+ca].$$

Suy ra nghiệm của $D_x = 0$ là $\left[\begin{array}{l} x = a \\ x = b \\ x = c \\ x = -\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 13 \\ x = 17 \\ x = 19 \\ x = -\dfrac{791}{49} \end{array}\right.$

Bài 3.7. Ta cần chứng minh $\det(A - A^t) = 0$.
Vì A là ma trận trực giao cấp n lẻ nên $A^tA = I$ và $\det(A-A^t) = (-1)^n\det(A^t-A) = -\det(A^t - A)$. Ta có

$$\det A \det(A - A^t) = \det(A^2 - I) = \det((A^t)^2 - AA^t) = \det(A^t - A)\det A^t.$$

Vì $\det A \neq 0$ nên $\det(A - A^t) = -\det(A - A^t)$. Do đó, $\det(A - A^t) = 0$.

Bài 3.8. Giả sử tồn tại ma trân khả nghịch C sao cho $A = CB$ thì hiển nhiên mọi nghiệm của $AX = 0$ đều là nghiệm của $BX = 0$ và ngược lại.
Ngược lại, nếu tập nghiệm của $AX = 0$ trùng với tập nghiệm của $BX = 0$. Thực hiện biến đổi trên các dòng của hai hệ phương trình $AX = 0$ và $BX = 0$ ta đưa được cả hai hệ về cùng một hệ có dạng $DX = 0$ (với D cấp $n \times n$ bao gồm cả các dòng bằng 0).
Điều này chứng tỏ tồn tại các ma trận khả nghịch C_1, C_2 sao cho $C_1A = D$ và $C_2B = D$ (biến đổi trên các dòng của ma trận tương đương với việc nhân trái với một ma trận khả nghịch nào đó).
Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.9. Ta cần tìm A^{-1} để $A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B \Rightarrow X = A^{-1} \times B$
Dùng phương pháp ma trận đơn vị tìm A^{-1} ta có

$$A_{n\times n}\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{h_i - h_{i+1}}{\rightarrow} \underset{i=\overline{1,n-1}}{\rightarrow} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= (I_n | A^{-1})$$

suy ra:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vậy

$$X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2015 & 2016 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2014 & 2015 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 2013 & 2014 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 Không gian véc tơ và ánh xạ tuyến tính

Bài 4.1. (i) Hệ thức $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X - a_k)^n = 0$ tương đương với

$$\sum_{i=0}^{n} (\sum_{k=0}^{n} (-1)^i C_n^i a_k^{n-i} \lambda_k) X^i = 0.$$

Theo định nghĩa đa thức suy ra $\sum_{k=0}^{n} (-1)^i C_n^i a_k^{n-i} \lambda_k = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Vì $(-1)^i C_n^i \neq 0$ nên hệ này tương đương $\sum_{k=0}^{n} a_k^{n-i} \lambda_k = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Dễ thấy đây là một hệ phương trình tuyến tính Cramer thuần nhất gồm $n+1$ ẩn λ_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ với ma trận hệ số là ma trận Vadermonde cấp $n+1$ có định thức khác 0 nên có nghiệm duy nhất $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Vậy hệ $\{(X - a_k)^n \mid k = 0, 1, \ldots, n\}$ là độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}[X]$.
(ii) Nếu $\det\Big([(a_{i-1} - a_{j-1})^n]_{i,j=1,\ldots,n+1}\Big) = 0$ thì hệ phương trình tuyến tính thuần nhất gồm $n+1$ ẩn λ_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$:

$$\sum_{k=0}^{n} (a_{i-1} - a_k)^n \lambda_k = 0 \ (i = 1, \ldots, n+1)$$

có nghiệm không tầm thường. Gọi λ_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ là một nghiệm không tầm thường. Đặt $f(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X - a_k)^n$. Vì hệ $\{(X - a_k)^n \,|\, k = 0, 1, \ldots, n\}$ là độc lập tuyến tính nên $f(X) \neq 0$ và $\deg f(X) \leq n$. Tuy nhiên ta lại có $f(a_0) = f(a_1) = \cdots = f(a_n) = 0$ nghĩa là $f(X)$ có ít nhất $n+1$ nghiệm phân biệt. Điều này là vô lí. Vậy $\det\Big([(a_{i-1} - a_{j-1})^n]_{i,j=1,\ldots,n+1}\Big) \neq 0$

Bài 4.2. Xét ánh xạ tuyến tính $T : Mat_n(\mathbb{C}) \to Mat_n(\mathbb{C}), B \mapsto AB - BA$. Khi đó, $Z(A) = ker(T)$ là không gian véc tơ con của $Mat_n(\mathbb{C})$. Để ý rằng, nếu C là ma trận khả nghịch thì

$$AB = BA$$

khi và chỉ khi $C^{-1}ACC^{-1}BC = C^{-1}BCC^{-1}AC$. Nếu $D_1, \cdots, D_n$ là các ma trận độc lập tuyến tính thì $C^{-1}D_1C, \cdots, C^{-1}D_nC$ cũng độc lập tuyến tính. Do đó, ta có thể gải sử A có dạng Jordan, với khối Jordan thứ i cấp k là:

$$A_i = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Khi đó A_i giao hoán với

$$B_i = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{k-1} & b_k \\ 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{k-2} & b_{k-1} \\ 0 & 0 & b_1 & \cdots & b_{k-3} & b_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \end{pmatrix}.$$

Do đó A giao hoán với

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_r \end{pmatrix}.$$

Vì trong B có n biến nên $\dim Z(A) \geq n$.

Bài 4.3. Do A là ma trận cấp n có hạng bằng r nên tồn tại các ma trận khả nghịch P, Q sao cho $A = PI_{n,r}Q$ với $I_{n,r}$ là ma trận có dạng:

$$I_{n,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Để ý rằng, k ma trận $X_1, \cdots, X_k$ độc lập khi và chỉ khi các ma trận $QX_1, \cdots, QX_k$ độc lập tuyến tính (Do Q là ma trận khã nghịch). Phương trình $AX = 0$ tương đương với phương trình $I_{n,r}QX = 0$. Do đó, để tìm số nghiệm độc lập tuyến tính tối đại của phương trình $AX = 0$ ta chỉ cần tìm số nghiệm độc lập tuyến tính tối đại của phương trình $I_{n,r}Y = 0$. Ma trận Y thỏa mãn phương trình $I_{n,r}Y = 0$ khi và chỉ khi nó có dạng

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_1 & Y_2 \end{pmatrix},$$

trong đó $Y1$ là ma trận cấp $(n-r)$xr còn Y_2 là ma trận vuông cấp $n-r$. Từ đó suy ra số nghiệm độc lập tuyến tính tối đại của phương trình $AX = 0$ là $(n-r)r + (n-r)^2 = n(n-r)$.

Bài 4.4. Do $M^p = I$ nên đa thức tối tiểu $p(x)$ của M phải là ước của

$$x^p - 1 = (x-1)(x^{p-1} + \cdots + 1).$$

Theo giả thiết 1 không phải là giá trị riêng của M nên $p(x)$ là ước của $(x^{p-1} + \cdots + 1)$. Mà $(x^{p-1} + \cdots + 1)$ là đa thức bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ nên $p(x) =$

$x^{p-1} + \cdots + 1$.
Mặt khác, đa thức đặc trưng χ_M và đa thức tối tiểu có chung nhân tử bất khả quy nên

$$\chi_M(x) = (p(x))^k, k \geq 1.$$

Vậy $\dim V = \deg \chi_M = k(p-1)$.

Bài 4.5. ○ Với mọi $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_{n+1}[x], \alpha \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}
\varphi(p(x)+q(x)) &= \varphi((p+q)(x)) = (p+q)(x+1) \\
&= p(x+1) + q(x+1) = \varphi(p(x)) + \varphi(q(x)) \\
\varphi(\alpha p(x)) &= (\alpha p)(x+1) = \alpha p(x+1) = \alpha\varphi(p(x))
\end{aligned}$$

○ Ma trận biểu diễn của φ theo cơ sở $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ của $K_{n+1}[x]$. Ta có

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= 1 \\
\varphi(x) &= 1 + x \\
\varphi(x^2) &= 1 + 2x + x^2 \\
\ldots \\
\varphi(x^n) &= C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^n x^n
\end{aligned}$$

Ma trận biểu diễn của φ theo cơ sở S là

$$[\varphi]_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & C_n^0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^n \end{bmatrix}$$

○ Đa thức đặc trưng của φ là $f_\varphi(x) = (1-x)^{n+1}$. Do đó 1 là giá trị riêng duy nhất của φ. Theo định lý Cayley-Hamilton, ta có $f_\varphi(\varphi) = 0$. Do đó đa thức cực tiểu của φ là một trong các đa thức có dạng $m(x) = (x-1)^r$ với $1 \leqslant r \leqslant n+1$. Do ma trận A có dạng tam giác cấp $n+1$ nên $(A-I)^{n+1} = 0$ và $(A-I)^r \neq 0$ với $1 \leq r \leq n$. Vậy đa thức cực tiểu của φ là $m_\varphi(x) = (x-1)^{n+1}$.

Bài 4.6. ○ Với mọi $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x], \alpha \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}
&D(p(x)+q(x)) = (p(x)+q(x))' = p'(x) + q'(x) = D(p(x)) + D(q(x)) \\
&D(\alpha p(x)) = (\alpha p(x))' = \alpha p'(x) = \alpha D(p(x)) \\
&T(p(x)+q(x)) = x(p(x)+q(x)) = xp(x) + xq(x) = T(p(x)) + T(q(x)) \\
&T(\alpha p(x)) = x(\alpha p(x)) = \alpha x p(x) = \alpha T(p(x))
\end{aligned}$$

∘ Với mọi $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$. Ta có

$$\begin{aligned}(D+T)(p(x)) &= (D+T)(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)\\ &= D(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + T(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)\\ &= a_1 + \cdots + na_nx^{n-1} + a_0 + a_1x^2 + \cdots + a_nx^{n+1}\\ &= a_1 + (a_0 + 2a_2)x + \cdots + (a_{n-2} + na_n)x^{n-1} + a_{n-1}x^n + a_nx^{n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(DT)(p(x)) &= (DT)(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = D(T(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n))\\ &= D(a_0x + a_1x^2 + \cdots + a_nx^{n+1}) = a_0 + 2a_1x + \cdots + (n+1)a_nx^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(TD)(p(x)) &= (TD)(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = T(D(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n))\\ &= T(a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}) = a_1x + 2a_2x^2 + \cdots + na_nx^n\end{aligned}$$

∘ Với mọi $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ ta có $(DT)(p(x)) - (TD)(p(x)) = p(x)$.
Vậy $(DT - TD)(p(x)) = \mathrm{Id}(p(x))$ và do đó $DT - TD = \mathrm{Id}$. Do đó

$$(TD)^2 = (TD)(TD) = T(DT)D = T(TD + Id)D = T^2D^2 + TD$$

∘ Định nghĩa ánh xạ $S : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ cho bởi

$$S(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

Dễ dàng kiểm tra được S là toán tử tuyến tính và $DS = Id$.
∘ D không đẳng cấu vì D không là đơn ánh ($D(1) = D(2) = 0$) và S không đẳng cấu vì S không là toàn ánh (không có $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ để $S(p(x)) = 1$).

Bài 4.7. ∘ $M_n(\mathbb{R})$ là một không gian Euclid với tích vô hướng $\langle A|B\rangle = tr(AB^T)$

$$\langle A|B\rangle = tr(AB^T) = tr(B^TA) = tr((B^TA)^T) = tr(A^TB) = tr(BA^T) = \langle B|A\rangle$$

$$\begin{aligned}\langle A+C|B\rangle &= tr((A+C)B^T) = tr(AB^T + CB^T)\\ &= tr(AB^T) + tr(CB^T) = \langle A|B\rangle + \langle C|B\rangle\end{aligned}$$

$$\langle \alpha A|B\rangle = tr((\alpha A)B^T) = tr(\alpha AB^T) = \alpha tr(AB^T) = \alpha\langle A|B\rangle$$

$\langle A|A\rangle = tr(AA^T) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$ và $\langle A|A\rangle = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0$ với mọi i, j hay $A = 0$.
∘ Không gian con bù trực giao của không gian con các ma trận đường chéo là không gian con gồm các ma trận có các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 0.
∘ Không gian con bù trực giao của không gian con các ma trận đối xứng là không gian con gồm các ma trận phản đối xứng.

Bài 4.8. a) Lấy $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ tùy ý và lấy $\lambda \in \mathbb{R}$ tùy ý. Ta có

$$\begin{aligned}\varphi(P+Q) &= (P+Q)(x^2+x) - (P+Q)(x^2)\\ &= [P(x^2+x) - P(x^2)] + [Q(x^2+x) - Q(x^2)]\\ &= \varphi(P) + \varphi(Q),\\ \varphi(\lambda P) &= (\lambda P)(x^2+x) - (\lambda P)(x^2) = \lambda[P(x^2+x) - P(x^2)] = \lambda\varphi(P).\end{aligned}$$

Như vậy φ là một toán tử tuyến tính.
b) Với mỗi $P \in \mathbb{R}[x]$ chúng ta có

$$\varphi(P(x))\Big|_{x=0} = P(x^2+x)\Big|_{x=0} - P(x^2)\Big|_{x=0} = P(0) - P(0) = 0.$$

Suy ra $\varphi(P(x))$ luôn luôn chia hết cho x. Do đó các phần tử $T(x) \in \mathbb{R}[x], T(0) \neq 0$ sẽ không nằm trong ảnh của ánh xạ φ và ta kết luận được φ không phải là một tự đẳng cấu của $\mathbb{R}[x]$.
c) Xét phần tử $P_0(x) \equiv 1$ trong $\mathbb{R}[x]$. Chúng ta có

$$\varphi(P_0) = P_0(x^2+x) - P_0(x) \equiv 0$$

tức là $\varphi(P_0) = 0.P_0$ và $\lambda = 0$ là một giá trị riêng của φ.
Tiếp theo ta xác định các giá trị riêng khác 0 của φ. Giả sử $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ là một véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda \neq 0$, tức là

$$\varphi(P) = \lambda P.$$

Do $\varphi(P)$ chia hết cho x và $\lambda \neq 0$ nên $P(x)$ cũng chia hết cho x. Suy ra tồn tại $k \geq 1$ và $Q(x)$ để $P(x) = x^kQ(x)$ và $Q(0) \neq 0$. Vì thế ta đưa ra được đẳng thức

$$(x^2+x)^kQ(x^2+x) - x^{2k}Q(x^2) = \lambda x^kQ(x).$$

Giản ước x^k ở hai vế ta thu được

$$(x+1)^kQ(x^2+x) - x^kQ(x^2) = \lambda Q(x).$$

Thế $x = 0$ vào hai vế đẳng thức trên và sử dụng $k \geq 1, Q(0) \neq 0$ ta nhận được $\lambda = 1$. Nếu chọn $P_1(x) \equiv x$ thì ta kiểm tra trực tiếp được rằng $\varphi(P_1) = P_1$ và đẳng thức này cho thấy $\lambda = 1$ là một giá trị riêng của φ.
Như vậy ta kết luận được φ có hai giá trị riêng là $0, 1$.
Ghi chú: Việc xác định các véc tơ riêng ứng với $\lambda = 0$ đi đến giải phương trình hàm

$$P(x^2+x) = P(x^2)$$

và ta chỉ ra được kết quả $P(x) \equiv a \neq 0$.
Việc xác định các véc tơ riêng ứng với $\lambda = 1$ đi đến giải phương trình hàm

$$P(x^2+x) - P(x^2) = P(x)$$

và ta chỉ ra được kết quả $P(x) = ax, a \neq 0$. Ở đây ta có thể sử dụng phương pháp hệ số bất định để giải phương trình thứ hai.

Bài 4.9. Chứng minh nếu Y là một ma trận đối xứng thì Y là một phần tử của V khi và chỉ khi $Y = 0$.
Do số chiều của không gian con gồm các ma trận đối xứng bằng $\dfrac{n(n+1)}{2}$ nên $\dim V \leq n - \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$
Tập hợp $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{R},\, i = 1, \ldots, n-1,\, j = 2, \ldots, n \right\}$
là một không gian con của không gian tập hợp các ma trận vuông cấp n trên trường số thực, có số chiều bằng $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
Dễ thấy $W \subset V$. Do đó, số chiều lớn nhất của V là $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Bài 4.10. Trong không gian Euclide V trên trường số thực, ta chọn một cơ sở trực chuẩn $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Khi đó với mọi $u \in V$, ta luôn có duy nhất biểu diễn
$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i.$$
Do đó
$$D(u) = D\left(\sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle D(e_i).$$
Nếu chọn $f = \sum\limits_{i=1}^{n} D(e_i) e_i$, ta có
$$\begin{aligned} \langle f, u \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} D(e_i) e_i, u \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} D(e_i) \langle e_i, u \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} D(e_i) \langle u, e_i \rangle \\ &= D(u). \end{aligned}$$
Dễ thấy f chỉ phụ thuộc vào ánh xạ tuyến tính D và duy nhất.

5 Giá trị riêng và véc tơ riêng

Bài 5.1. Với ma trận $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$ thì $\det B = f(1)f(\varepsilon)f(\varepsilon^2)$, ở đây

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ và } f(x) = a + bx + cx^2.$$

Thật vậy, ta có $\varepsilon^3 = 1, \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = \dfrac{\varepsilon^3 - 1}{\varepsilon - 1} = 0$ và

$$f(1) = a + b + c;\ f(\varepsilon) = a + b\varepsilon + c\varepsilon^2;\ f(\varepsilon^2) = a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon.$$

Do đó

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) \cdot f(\varepsilon^2) &= (a + b\varepsilon + c\varepsilon^2)(a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon) \\ &= a^2 + ab\varepsilon^2 + ac\varepsilon + ab\varepsilon + b^2 + bc\varepsilon^2 + ac\varepsilon^2 + bc\varepsilon + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) + (ab + bc + ca)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Vậy $f(1)f(\varepsilon)f(\varepsilon^2) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \det B$. Mặt khác thì

$$B - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} a-\lambda & b & c \\ c & a-\lambda & b \\ b & c & a-\lambda \end{bmatrix}.$$

Xét đa thức $g(x) = a - \lambda + bx + cx^2 = f(x) - \lambda$. Theo nhận xét trên ta có

$$\det(B - \lambda I_3) = g(1)g(\varepsilon)g(\varepsilon^2) = [f(1) - \lambda][f(\varepsilon) - \lambda][f(\varepsilon^2) - \lambda].$$

Vậy giá trị riêng của ma trận B là:

$$\lambda_1 = f(1);\ \lambda_2 = f(\varepsilon);\ \lambda_3 = f(\varepsilon^2).$$

Thay $a = 1, b = c = \sqrt{2}$ vào ta được các giá trị riêng của ma trận A:

$$\lambda_1 = 1 + 2\sqrt{2}; \lambda_2 = \lambda_3 = 1 - \sqrt{2}.$$

Bài 5.2. Ta phải tìm ma trận A sao cho dạng chéo hóa của nó là ma trận

$$B = \begin{pmatrix} 2015 & 0 & 0 \\ 0 & 2016 & 0 \\ 0 & 0 & 2017 \end{pmatrix}.$$

Chỉ cần tìm một ma trận C khả nghịch, không có dạng tam giác, chẳng hạn

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

và tính $A = C^{-1}BC$.

Bài 5.3. Chứng minh rằng λ là giá trị riêng của φ thì λ^k là một giá trị riêng của φ^k.
Do $\lambda^k = 1$ nên $\lambda = \pm 1$. Từ đó, tổng các giá trị riêng của φ là một số nguyên.

6 Đa thức

Bài 6.1. Giả sử $f(x)$ là đa thức có các hệ số thực thỏa mãn điều kiện $f(x) > 0$ với mọi $x > 0$. Nếu $f(x)$ là hàm hằng $f(x) = c > 0$ thì với mọi số dương a, b ta luôn có

$$f^2(a) = c^2 < c(c+b) = f(a+b)(f(a)+b).$$

Nếu $f(x)$ khác hằng thì giả sử $f(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_0;\ a_n \neq 0$. Vì $f(x)$ liên tục và $f(x) > 0$ với mọi $x > 0$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ từ đó suy ra với $\forall A > 0, \exists B > 0 : \forall x \geqslant B, f(x) > A$. Với mỗi $a > 0$ ta đặt $A = f^2(a) > 0$ khi đó tồn tại $B > 0$ sao cho $\forall x \geqslant B, f(x) > A$. Khi đó với $b = B + 1$ ta sẽ có

$$f(a+b)(f(a)+b) = f(a+B+1)(f(a)+B+1) > A(f(a)+B+1) > A = f^2(a).$$

Bài 6.2. Từ $x = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ suy ra $(x-1)^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ khai triển và rút gọn ta được $x^2 - 2x - 4 = 2\sqrt{6}$ lại bình phương hai vế ta được $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 16x - 8 = 0$.
Vậy $x = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ là nghiệm của đa thức $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 16x - 8$.
Tiếp theo ta chứng minh rằng $x = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ không là nghiệm của bất kỳ đa thức khác không với hệ số nguyên có bậc nhỏ hơn 4.
Trước hết ta có nhận xét rằng nếu a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0$ thì $a = b = c = d = 0$.
Thật vậy, từ đẳng thức trên ta có $a + b\sqrt{2} = (c + d\sqrt{2})\sqrt{3}$.
Nếu $c + d\sqrt{2} = 0$ thì $c = d = 0$ và kéo theo $a = b = 0$.
Nếu $c + d\sqrt{2} \neq 0$ thì $\sqrt{3} = p + q\sqrt{2}$ với $p = \frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}; q = \frac{bc-ad}{c^2-2d^2}$.
Bình phương hai vế được $(3 - p^2 - 2q^2) + 2pq\sqrt{2}$ suy ra

$$\begin{cases} pq = 0 \\ p^2 + 2q^2 = 0 \end{cases}.$$

Hệ này không có nghiệm hữu tỷ. Mâu thuẫn. Vậy ta phải có $a = b = c = d = 0$. Giả sử $x = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ là nghiệm của đa thức với hệ số nguyên $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ khi đó có đẳng thức $a(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^3 + b(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + c(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) + d = 0$.
Khai triển vế trái được $b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} + b_3\sqrt{6} = 0$ trong đó:

$$\begin{cases} b_0 = 16a + 6b + c + d = 0 \\ b_1 = 14a + 2b + c = 0 \\ b_2 = 12a + 2b + c = 0 \\ b_3 = 6a + 2b = 0 \end{cases}$$

Với chú ý rằng $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ nên ta dễ dàng suy ra $a = b = c = d = 0$.
Vậy $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 16x - 8$ là đa thức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 6.3. Ta cần chứng minh rằng với mỗi đa thức $f(x)$ bậc $m \leqslant n$ luôn tồn tại duy nhất các số thực $b_0, b_1, ..., b_m$ sao cho $f(x) = b_0f_0(x) + b_1f_1(x) + ... + b_mf_m(x)$ (1)
Chú ý rằng cả hai vế của đẳng thức (1) đều là các đa thức bậc m, nên khi cho x lần lượt nhận các giá trị từ 0 đến m ta được hệ $m + 1$ phương trình với $m + 1$ ẩn $b_0, ..., b_m$

$$\begin{cases} f(0) = b_0 \\ f(1) = b_0 + b_1 \\ f(2) = b_0 + C_2^1 b_1 + C_2^2 b_2 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ f(m) = b_0 + C_m^1 b_1 + ... + C_m^m b_m \end{cases}$$

Rõ ràng hệ này có nghiệm duy nhất và ta có điều phải chứng minh.

Bài 6.4. Dễ dàng kiểm tra được φ là toán tử tuyến tính.
Ma trận A của φ đối với cơ sở $\{1, x, x^2\}$ trong $P_2[x]$ là

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của A là $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) =$

$$= \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 6 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & -8 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 15\lambda - 36$$
$$= -(\lambda + 4)(\lambda - 3)^2$$

Các giá trị riêng của A là $\lambda_1 = -4$ và $\lambda_2 = 3$ (bội 2).
Với giá trị riêng $\lambda_1 = -4$ ta giải hệ thuần nhất $(A + 4I_3)x = \theta$ tìm được vector riêng cơ sở là $v_1 = (-6, 8, 3)^t$.
Với giá trị riêng $\lambda_2 = 3$ ta giải hệ thuần nhất $(A - 3I_3)x = \theta$ chỉ tìm được một vector riêng cơ sở là $v_2 = (5, -2, 1)^t$.
Do đó ma trận A không chéo hóa được.

Bài 6.5. Đặt $Q(X) = P^2(X)$. Thay y bởi $x - 1$ trong hệ thức đã cho, ta được

$$Q(x) - Q(x-1) = P(1)P(2x-1) \ (1).$$

Dễ thấy nếu $P(X)$ là hằng số thì $P(X) = 0$. Giả sử $n = \deg P(X) > 0$. Khi đó

$$\deg Q(X) = 2n, \deg[Q(x) - Q(x-1)] = 2n - 1, \deg P(2X-1) = n.$$

Từ (1) suy ra $n = \deg[P(1)P(2X-1)] = \deg[Q(x) - Q(x-1)] = 2n - 1$ và do đó $n = 1$. Viết $P(X) = aX + b,\ a \neq 0$. Theo giả thiết, ta có

$$(ax+b)^2 - (ay+b)^2 = [a(x+y)+b][a(x-y)+b]$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Suy ra $b = 0$. Vậy $P(X) = aX,\ a \neq 0$. Hợp các trường hợp có đáp số $P(X) = aX,\ a \in \mathbb{R}$.

Bài 6.6. Rõ ràng đa thức 0 thỏa mãn đề bài. Xét trường hợp $P(x)$ là đa thức khác đa thức 0 và có bậc n. Rõ ràng ta có

$$P(2x-1) = 2^n P(x) + R(x),$$

ở đây $R(x)$ là đa thức 0 hoặc có bậc nhỏ hơn n. Từ giả thiết $P(x)P(2x^2-1) = P(x^2)P(2x-1)$, suy ra

$$P(x)[2^n P(x^2) + P(x^2)] = P(x^2)[2^n P(x) + R(x)],$$

hay $P(x)R(x^2) = P(x^2)R(x)$. Giả sử bậc của $R(x)$ là $m \geq 0$, thế thì $n + 2m = m + 2n$ hay $m = n$, vô lí. Vậy $R(x) = 0$, do đó

$$P(2x-1) = 2^n P(x) \Leftrightarrow P(2x+1) = 2^n P(x+1).$$

Đặt $Q(x) = P(x+1) \Rightarrow Q(2x) = 2^n Q(x)$. Gọi $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1 x + a_0$, thế thì

$$2^i a_i = 2^n a_i \quad \forall i = 1, 2, ..., n-1, \text{ do đó } a_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, ..., n-1$$

Ngoài ra ta có $2^n a_0 = a_0$, nên $a_0 = 0$ hoặc $n = 0$.

- Nếu $n = 0$ thì ta có $P(x) = c$, với c là số thực khác 0.

- Nếu $a_0 = 0$ thì $Q(x) = cx^n$, do đó $P(x) = c(x-1)^n$, với c là số thực khác 0.

Thử lại, ta thấy các đa thức $P(x) = c$ và $P(x) = c(x-1)^n$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Bài 6.7. Áp dụng định lý về hàm số liên tục ta có $p(x)$ có 3 nghiệm thực phân biệt trong các khoảng $(-3;0),\ (0;1),\ (1;2)$ và $q(x)$ có 3 nghiệm thực phân biệt trong các khoảng $(-1;-\frac{1}{2}),\ (-\frac{1}{2};0),\ (0;2)$.
Do a là nghiệm lớn nhất của $p(x)$ nên $a \in (1;2)$ và $a^3 - 4a + 2 = 0$.
Đặt $b = -\frac{a}{2}$ ta có $b \in (-1;-\frac{1}{2})$ và $4b^3 - 4b - 1 = 0$ nên b là nghiệm nhỏ nhất của $q(x)$ và $a + 2b = 0$.

Bài 6.8. Gọi $p_A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ là đa thức đặc trưng của ma trận A. Theo định lý Cayley-Hamilton, $0 = p_A(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$. Do ma trận A khả nghịch nên ta có $A^{-1} = -\frac{a_1}{a_0}I - \frac{a_2}{a_0}A - \cdots - \frac{a_n}{a_0}A^{n-1}$.
Đặt $b_i = -\dfrac{a_{i+1}}{a_0}$, khi đó ta có $p(x) = b_1 + b_2x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} \in K[x]$ và $A^{-1} = p(A)$.

Bài 6.9. Từ giả thiết suy ra $degP'(x) = 4$ và $P'(x)$ chia hết cho $(x-1)^2$ và $(x+1)^2$. Khi đó ta có:

$$P'(x) = a(x-1)^2(x+1)^2 = a(x^4 - 2x^2 + 1), a \neq 0.$$

Vậy

$$P(x) = a(\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x) + b.$$

Mặt khác, theo giả thiết thì $P(1) = -1, P(-1) = 1$ thay vào trên ta được:

$$P(x) = -\frac{1}{8}(3x^5 - 10x^3 + 15x).$$

Thử lại ta thấy thỏa mãn vậy đa thức cần tìm là $P(x) = -\frac{1}{8}(3x^5 - 10x^3 + 15x)$

Bài 6.10. Gọi $x_1, x_2, ..., x_{2016}$ là các nghiệm dương của $P(x)$, khi đó theo định lý Viete ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_{2016} & = \frac{a_{2015}}{a_{2016}} > 0 \\ ... & \\ x_1x_2...x_{2015} + x_1x_3...x_{2016} + ... + x_2x_3x_{2016} & = -\frac{a_1}{a_{2016}} > 0 \\ x_1x_2...x_{2016} & = \frac{a_0}{a_{2016}} > 0 \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$\left|\frac{a_{2015}\cdot a_1}{a_{2016}\cdot a_0}\right| = \left|\frac{(x_1+x_2+...+x_{2016})(x_1x_2...x_{2015}+x_1x_3...x_{2016}+...+x_2x_3x_{2016})}{(x_1x_2...x_{2016})}\right|$$

$$\geq \frac{2016\sqrt[2016]{x_1x_2...x_{2016}}\cdot 2016\sqrt[2016]{(x_1x_2...x_{2016})^{2015}}}{x_1x_2...x_{2016}} = (2016)^2.$$

Bài 6.11. $P(x)$ có dạng sau $P(x)a(x-x_1)^2(x-x_2)...(x-x_{n-1})$ với $a \neq 0$. Khi đó

$$P'(x) = 2a(x-x_1)...(x-x_{n-1}) + (x-x_1)[P_2(x)+...+P_{n-1}(x)],$$

trong đó $(x-x_1)P_i(x) = P(x)$.
Từ $\dfrac{P'(x)}{x-x_1} = 2a(x-x_2)...(x-x_{n-1}) + [P_2(x)+...+P_{n-1}(x)]$ ta có

$$\begin{cases} P_i(x_j) & = 0\text{với} jnei \\ P_i(x_i)1 & \neq 0\text{với mọi} i = 2,...,n-1 \end{cases}.$$

Xét đa thức $Q(x) = 1 - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{P_i(x)}{\frac{P'(x)}{x_i-x_1}}$, có bậc $n-2$. Nhận thấy $Q(x)$ nhận $x_2,...,x_{n-1}$ là nghiệm. Vậy hệ số cao nhất của $Q(x)$ là

$$a\left[\frac{x_2-x_1}{P'(x_2)} + \frac{x_3-x_1}{P'(x_3)} + \cdots + \frac{x_{n-1}-x_1}{P'(x_{n-1})}\right] \neq 0.$$

Từ đó ta nhận được điều phải chứng minh.

Bài 6.12. Xét đa thức bậc 2016 sau:

$$Q(x) = (x+2016)P(x) - x. \tag{5.2}$$

Nhận thấy $Q(x)$ nhận có các nghiệm là $-2015, -2014, ..., -1, 0$
Do đó $Q(x)$ có dạng

$$Q(x) = ax(x+1)...(x+2015). \tag{5.3}$$

Suy ra $Q(-2016) = a.2016!$. Theo (5.2) ta cũng có $Q(-2016) = 2016$. Nên ta nhận được $a = \dfrac{1}{2015!}$

Từ (5.3) ta có $Q(1) = 2016$. Theo (5.2) ta có $Q(1) = 2017.P(1) - 1$. Vậy $P(1) = 1$.

Bài 6.13. Nếu deg$f = 1$ thì $f(x) = ax + b$ trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$.
Suy ra

$$(a-1)\sqrt[3]{3} + \sqrt[9]{3} = 3 - b$$

vì $a, b \in \mathbb{Q}$ cho nên ta suy ra điều vô lý.
Nếu $f(x) = ax^2 + bx + c$ thì

$$f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{3}$$

ta suy ra được

$$\begin{cases} a+b & = 0 \\ 3a+b & = 1 \\ 6a+c=3 \end{cases}$$

Giải hệ ta có $a = \dfrac{1}{2}, b = -\dfrac{1}{2}, c = 0$. Vậy $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x$.

7 Tổ hợp

Bài 7.1. Xét trên mặt phẳng sau điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Với mỗi điểm ta sẽ gán cho nó một số vô tỷ. Như vậy sáu điểm được gắn với sáu số vô tỷ đã cho. Hai điểm mang số a và b sẽ được nối với nhau bằng một đoạn thẳng màu đỏ nếu $a + b$ là số vô tỷ, ngược lại sẽ được tô màu xanh khi $a + b$ là số hữu tỷ.
Theo bài ra, tồn tại ít nhất một tam giác cùng màu. Giả sử tam giác có ba đỉnh được gắn số là a, b và c. Khi đó có hai khả năng xảy ra:
1) Nếu tam giác đó là tam giác xanh, thì $a + b$, $b + c$, $c + a$ là ba số hữu tỷ. Suy ra $(a + b) + (b + c) - (c + a) = 2b$ cũng là một số hữu tỷ. Mâu thuẫn, vì b là số vô tỷ.
2) Nếu tam giác đó có màu đỏ, thì $a + b$, $b + c$, $c + a$ là ba số vô tỷ. Điều phải chứng minh.

Bài 7.2. Trước hết ta chứng minh bài toán: " *Trong mặt phẳng cho 6 điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Mỗi đoạn thẳng nối từng cặp điểm được bôi màu đỏ hoặc xanh. Khi đó tồn tại ba điểm trong số sáu điểm đã cho, sao cho chúng là các đỉnh của một tam giác mà các cạnh của nó được bôi cùng một màu*".

Thật vậy, xét A là một trong 6 điểm đã cho. Khi đó xét 5 đoạn thẳng (mỗi đoạn thẳng nối bởi điểm A và 5 điểm còn lại). Vì mỗi đoạn thẳng được bôi bởi màu đỏ hoặc màu xanh, nên theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 3 trong 5 đoạn thẳng nói trên cùng màu. Giả sử đó là các đoạn AB, AB', AB'' và có thể cho rằng chúng màu xanh. Chỉ có 2 khả năng xảy ra:

a) Nếu ít nhất một trong các đoạn thẳng $BB', BB'', B'B''$ màu xanh thì tồn tại tam giác với 3 cạnh xanh.

b) Nếu không phải như vậy thì cả 3 đoạn thẳng $BB', BB'', B'B''$ cùng màu đỏ, và tam giác tạo nên bởi 3 cạnh này thỏa mãn bài ra.

Trở lại bài toán ban đầu. Xét trên mặt phẳng sáu điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Mỗi điểm trên mặt phẳng đó, ta gắn cho nó một số vô tỉ.

Hai điểm a và b sẽ được nối với nhau bởi đoạn thẳng màu đỏ nếu $a+b$ là số vô tỉ, và được gắn màu xanh nếu $a+b$ là số hữu tỉ. Khi đó tồn tại ít nhất một tam giác mà các cạnh cùng màu. Giả sử các đỉnh của tam giác đó được gắn bởi các số hữu tỉ x, y và z.

i) Nếu tam giác ấy màu xanh thì cả 3 số $x+y$, $y+z$ và $z+x$ là số hữu tỉ, suy ra $(x+y)+(y+z)-(z+x)=2y$ là số hữu tỉ, vô lí vì $2y$ là số vô tỉ.

ii) Nếu tam giác ấy màu đỏ thì cả 3 số $x+y$, $y+z$ và $z+x$ là số vô tỉ. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 7.3. Gọi $a_{0,n}, a_{1,n}, a_{2,n}$ tương ứng là số chuỗi tam phân có tính chất trên nhưng kết thúc tương ứng bằng ký tự '0', '1' và '2'. Ta thấy:

$$a_{2,n}=a_{n-1}, \quad a_{1,n}=a_{2,n-1}+a_{0,n-1}, \quad a_{0,n}=a_{2,n-1}+a_{1,n-1}.$$

Do đó

$$a_n=a_{2,n}+a_{1,n}+a_{0,n}=a_{n-1}+a_{2,n-1}+a_{0,n-1}+a_{2,n-1}+a_{1,n-1}=2a_{n-1}+a_{n-2}\ (*)$$

và $a_1=3, a_2=7$.
Phương trình đặc trưng ứng với công thức truy hồi (*): $q^2=2q+1$ có hai nghiệm phân biệt $q_1=1+\sqrt{2}$, $q_2=1-\sqrt{2}$. Công thức truy hồi tổng quát:

$$a_n=C_1(1+\sqrt{2})^n)+C_2(1-\sqrt{2})^n$$

Thay điều kiện đầu thu được: $C_1=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $C_2=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$, công thức tường minh:

$$a_n=\frac{(1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}}{2}$$

Bài 7.4. Giả sử $p(x) = ax^2 + bx + c$. Ta có $p(0) = c, p(1) = a + b + c, p(-1) = a-b+c$ đều chia hết cho 5. Ta có $2a = p(10+p(-1)-2p(0)$ và $2b = p(1)-p(-1)$ đều chia hết cho 5. Do đó các hệ số a, b, c của đa thức $p(x)$ đều chia hết cho 5.

Bài 7.5. Chọn ra 1008 dòng có chứa nhiều số 1 nhất. Ta sẽ chứng minh số các số 1 còn lại nhỏ hơn hoặc bằng 1008.
Giả sử số các số 1 còn lại nhiều hơn hoặc bằng 1009. Theo nguyên lí Dirichlet sẽ có ít nhất một dòng có 2 số 1 trong số 1008 dòng còn lại.
Từ đó suy ra, theo cách chọn 1008 dòng ban đầu thì các dòng này mỗi dòng phải có ít nhất 2 số 1. Dẫn đến 1008 dòng này có ít nhất $2 \times 1008 = 2016$ số 1.
Như vậy tổng số các số 1 có trong bảng phải lớn hơn hoặc bằng $1009 + 2016 = 3025$. Mâu thuẫn với giả thiết đề bài là có tổng 3024 số 1.
Như vậy số các số một còn lại nhỏ hơn hoặc bằng 1008, nên có nhiều nhất 1008 cột chứa các số 1 còn lại này. Từ đó ta nhận được kết luận của bài toán.

Bài 7.6. Ký hiệu y_1 là số cây ban đầu công ty quản lý. Ký hiệu $y_2, y_3, \ldots, y_7$ là số cây tương ứng của công ty ở cuối các tháng thứ $1, 2, \ldots, 6$. Từ giả thiết chúng ta có:

$$y_2 = 0,95y_1 + 200$$

hay là

$$20y_2 - 19y_1 = 4000.$$

Phân tích tương tự ta nhận được

$$20y_3 - 19y_2 = 4100;\ 20y_4 - 19y_3 = 4200; \ldots;\ 20y_7 - 19y_6 = 4500.$$

Kết hợp với $y_7 = y_1 + 600$ thì phương trình cuối cùng ở trên viết lại được là

$$20y_1 - 19y_6 = -7500$$

Tiếp theo đặt $y_1 = x_1 + 2000, y_2 = x_2 + 2100, \ldots, y_6 = x_6 + 2500$. Quy các phương trình trên về hệ phương trình của $x_1, x_2, \ldots, x_6$ thì ta thu được hệ thuần nhất

$$\begin{cases} 20x_2 - 19x_1 = 0 \\ 20x_3 - 19x_2 = 0 \\ \cdots\cdots \\ 20x_1 - 19x_6 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Ma trận hệ số của hệ thuần nhất trên là

$$A = \begin{pmatrix} -19 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -19 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -19 & 20 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19 \end{pmatrix}.$$

Do $\det A$ là một số nguyên lẻ nên $\det A \neq 0$. Vì thế ta kết luận được hệ (1) có duy nhất nghiệm tầm thường

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_6 = 0.$$

Như vậy ta suy ra $y_1 = x_1 + 2000 = 2000$ và $y_7 = y_1 + 600 = 2600$.
Ghi chú: Để giải hệ thuần nhất ta có thể tính toán như sau

$$x_1 = \left(\frac{20}{19}\right) x_2 = \left(\frac{20}{19}\right)^2 x_3 = \ldots = \left(\frac{20}{19}\right)^5 x_6 = \left(\frac{20}{19}\right)^6 x_1.$$

Ta suy ra $x_1 = 0$ và $x_2 = x_3 = \ldots = x_6 = 0$. Từ đó tính được kết quả.

Bài 7.7. a. Trường hợp 1: Số được lập không có số 0. Khi đó có C_5^3 cách chọn 3 số lẻ.
Có C_4^3 cách chọn 3 số chẵn khác 0.
Xếp 9 số trên vào 9 vị trí trong đó 3 số chẵn có mặt 2 lần nên có

$$C_5^3 . C_4^3 \frac{9!}{2!2!2!} = 1814400 \text{ (số)}.$$

Trường hợp 2: Số được lập có mặt số 0.
Xếp hai số 0 vào 9 vị trí nên có C_8^2 cách. Xếp 7 số còn lại trong đó có 2 số chẵn lặp lại 2 lần nên có

$$C_5^3 . C_4^2 \frac{7!}{2!2!} = 2116800 \text{ (số)}.$$

Vậy có $1814400 + 2116800 = 3931200$ (số).
2. Chia hình chữ nhật thành 6 hình chữ nhật con có kích thước 1×2. Khi đó chọn 2 trong 7 điểm thì phải có 2 điểm cùng thuộc một hình chữ nhật. Vậy khoảng cách giữa hai điểm đó không quá $\sqrt{5}$.

Bài 7.8. Hệ phương trình trên được viết lại dưới dạng

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Từ đó, chúng ta suy ra được

$$\begin{pmatrix} x_{2016} \\ y_{2016} \\ z_{2016} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2016} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ hay } \begin{pmatrix} x_{2016} \\ y_{2016} \\ z_{2016} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2016 & \frac{2016.2015}{2} \\ 0 & 1 & 2016 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

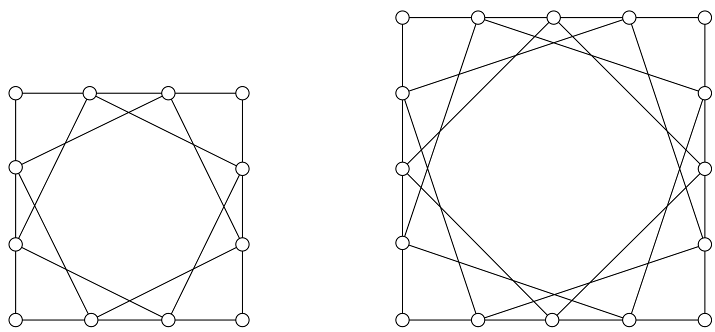
Vậy, $(x_{2016}, y_{2016}, z_{2016}) = \left(a + 2016b + \frac{2016.2015}{2}c, b + 2016c, c\right)$

Bài 7.9. Hàm sinh cho số cách lựa chọn quả chuối là $S_1(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots$
Hàm sinh cho số cách lựa chọn quả chuối là $S_2(x) = 1 + x^5 + x^{10} + \cdots$
Hàm sinh cho số cách lựa chọn quả lê là $S_3(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^9$
Hàm sinh cho số cách lựa chọn quả xoài là $S_4(x) = 1 + x$
Hàm sinh của bài toán là $S_1(x)S_2(x)S_3(x)S_4(x)$
Ta có

$$\begin{aligned} S_1(x)S_2(x)S_3(x)S_4(x) &= \frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5}\frac{1-x^{10}}{1-x}(1+x) = \frac{1+x^5}{(1-x)^2} \\ &= (1+x^5)(1+2x+3x+\cdots). \end{aligned}$$

Số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là hệ số của x^{2016} trong $(1+x^5)(1+2x+3x+\cdots)$
Vậy, số cách chọn thỏa mãn yêu cầu là $2017 + 2012 = 4029$ cách.

Bài 7.10. Chúng ta gọi hình vuông có các cạnh song song với 2 biên của dãy là hình vuông chuẩn. Hình vuông chuẩn có mỗi cạnh đi qua $k+1$ điểm được gọi là hình vuông chuẩn cấp k. Chúng ta dễ thấy rằng trên mỗi hình vuông chuẩn cấp k có k hình vuông thỏa mãn yêu cầu của bài toán.



Trên mỗi hình vuông chuẩn cấp k có k hình vuông thỏa mãn yêu cầu của bài toán

Số hình vuông chuẩn cấp k trong mảng là $(16-k)^2,\ k=1,\dots,15$.
Số hình vuông thỏa yêu cầu của bài toán là

$$\sum_{k=1}^{15}(16-k)^2.k = 16^2\sum_{k=1}^{15}k - 32\sum_{k=1}^{15}k^2 + \sum_{k=1}^{15}k^3 = 5440.$$

Vậy có 5440 hình vuông thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 7.11. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử không có ai ngồi giữa 2 bạn nữ Ta gọi một nhóm các bạn nữ ngồi liên tiếp cạnh nhau và bị kẹp bởi các bạn nam 2 bên là một khối Theo giả thiết không có ai ngồi cạnh hai bạn nữ nên một khối như thế có nhiều nhất 2 bạn nữ và có ít nhất 2 bạn nam ngồi giữa 2 khối liên tiếp nhau. Do đó, ta có ít nhất $\left[\dfrac{25}{2}\right]=13$ khối và ít nhất $2\times 13=26$ bạn ngồi giữa 13 khối đó. Mà ta chỉ có 25 bạn nam nên điều giả sử của ta là vô lí, vậy luôn có một bạn ngồi giữa hai bạn nữ.

Bài 7.12. Với $1\le i\le n$, áp dụng công thức nội suy Lagrange, ta có

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_{n+1}^k}\prod_{i\neq k}\frac{x-i}{k-i}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{\prod\limits_{i\neq k}(x-i)}{C_{n+1}^k(-1)^{n-k}(n-k)!k!}\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n+1-k}{(n+1)!}\prod_{i\neq k}(x-i)\,.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
P(n+1) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n+1-k}{(n+1)!}\prod_{i\neq k}(n+1-i)\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\,.
\end{aligned}$$

Do đó $P(n+1)=0$ nếu n lẻ và $P(n+1)=1$ nếu n chẵn.

Bài 7.13. Theo Lý thuyết Thông tin, số lần cân để tìm ra viên bi lạ từ N viên là $k\ge\log_3(2N+1)$. Ký hiệu mỗi lần cân như sau [bi ở đĩa trái] (kết quả: $<,=,>$) [bi ở đĩa trái] bị mang tính nặng hơn ($\underline{0}$) hay nhẹ hơn ($\overline{0}$)

Lần thứ I	Dự đoán	Lần thứ II	Dự đoán	Lần thứ III	KL
$[01, 02, 03, 04] =$ $[05, 06, 07, 08]$	$09, 10, 11,$ $12, 13$	$[08, 09] =$ $[10, 11]$	$12, 13$	$[11] = [12]$ $[11] <> [12]$	13 12
		$[08, 09] <$ $[10, 11]$	$\overline{9}, \underline{10}, \underline{11}$	$[10] = [11]$	09
				$[10] < [11]$	11
				$[10] > [11]$	10
		$[08, 09] >$ $[10, 11]$	$\underline{9}, \overline{10}, \overline{11}$	$[10] = [11]$	09
				$[10] < [11]$	10
				$[10] > [11]$	11
$[01, 02, 03, 04] <$ $[05, 06, 07, 08]$	$\overline{01}, \overline{02}, \overline{03}, \overline{04}$ $\underline{05}, \underline{06}, \underline{07}, \underline{08}$	$[01, 02, 05] =$ $[03, 04, 06]$	$\underline{07}, \underline{08}$	$[07] < [08]$ $[07] > [08]$	08 07
		$[01, 02, 05] <$ $[03, 04, 06]$	$\overline{01}, \overline{02}, \underline{06}$	$[01] = [02]$	06
				$[01] < [02]$	01
				$[01] > [02]$	02
		$[01, 02, 05] >$ $[03, 04, 06]$	$\overline{03}, \overline{04}, \underline{05}$	$[03] = [04]$	05
				$[03] < [04]$	03
				$[03] > [04]$	04
$[01, 02, 03, 04] >$ $[05, 06, 07, 08]$	$\underline{01}, \underline{02}, \underline{03}, \underline{04}$ $\overline{05}, \overline{06}, \overline{07}, \overline{08}$	$[01, 02, 05] =$ $[03, 04, 06]$	$\overline{07}, \overline{08}$	$[07] < [08]$ $[07] > [08]$	07 08
		$[01, 02, 05] <$ $[03, 04, 06]$	$\overline{03}, \overline{04}, \underline{05}$	$[03] = [04]$	05
				$[03] < [04]$	03
				$[03] > [04]$	04
		$[01, 02, 05] >$ $[03, 04, 06]$	$\overline{01}, \overline{02}, \underline{06}$	$[01] = [02]$	06
				$[01] < [02]$	01
				$[01] > [02]$	02

Chương 6

Đáp án đề đề xuât môn Giải tích

1 Dãy số

Bài 1.1. (a) Với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có $x_{n+2} \leq \dfrac{x_{n+1} + x_n}{2} \leq \max\{x_{n+1}, x_n\} \leq X_n$ và $x_{n+1} \leq \max\{x_{n+1}, x_n\} = X_n$. Do đó $X_{n+1} \leq X_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Suy ra (X_n) là dãy không tăng và bị chặn nên (X_n) hội tụ.
(b) Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = l$. Khi đó với $\epsilon > 0$ bất kì, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $l \leq X_n < l + \epsilon$. Do đó $x_n < l + \epsilon$ với mọi $n \geq N$. Giả sử $x_n \leq l - 3\epsilon$. Khi đó $l \leq x_{n+1} = X_n < l + \epsilon$. Do đó

$$x_{n+2} \leq \frac{x_n + x_{n+1}}{2} < l - \epsilon, \quad x_{n+3} \leq \frac{x_{n+2} + x_{n+1}}{2} < l.$$

Do đó $X_{n+2} < l$. Điều này mâu thuẫn với (X_n) là dãy không tăng. Do đó ta có

$$l - 3\epsilon < x_n < l + \epsilon \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Cho $\epsilon \to 0$ ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$.

Bài 1.2. a) Ta thấy $P_n'(x) = nx^{n-1} - 1 > 0, \forall x > 1$ nên $P_n(x)$ là liên tục và đơn điệu tăng trên $(1, 2016)$. Mặt khác $P_n(1) = -2016 < 0$ và $P_n(2016) = 2016(2016^{n-1} - 2) > 0$. Suy ra $P_n(x)$ có nghiệm duy nhất γ_n trong khoảng $(1, 2016)$.
b) Vì $\gamma_n \in (1, 2016)$ nên $\gamma_n^{n+1} > \gamma_n^n$. Ta có

$$P_{n+1}(\gamma_n) = \gamma_n^{n+1} - \gamma_n - 2016 > \gamma_n^n - \gamma_n - 2016 = P_n(\gamma_n) = 0 = P_{n+1}(\gamma_{n+1})$$

tức là $P_{n+1}(\gamma_n) > P_{n+1}(\gamma_{n+1}) \quad (*)$. Mặt khác vì $[P_{n+1}(x)]' = (n+1)x^n - 1 > 0, \forall x > 1$ nên $P_{n+1}(x)$ là hàm liên tục và đơn điệu tăng trên $(1, 2016)$. Thế mà $\gamma_n, \gamma_{n+1} \in (1, 2016)$, nên từ $(*)$ ta suy ra $\gamma_n > \gamma_{n+1}$, hay dãy $\{\gamma_n\}_{n=2}^{\infty}$ là đơn điệu giảm.

Bài 1.3. Ta có $\{x_n\}$ là dãy tăng và

$$\frac{1}{x_n+3} = \frac{1}{x_n-4} - \frac{1}{x_{n+1}-4}.$$

nên

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i+3} = \frac{1}{x_1-4} - \frac{1}{x_{n+1}-4} = 1 - \frac{1}{x_{n+1}-4}.$$

Nếu $\{x_n\}$ là dãy bị chặn trên thì $\{x_n\}$ có giới hạn và

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 4 < 5.$$

Vậy trường hợp này không xảy ra. Do đó, $\{x_n\}$ là dãy không bị chặn trên, nên

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i+3} = 1 - \frac{1}{x_{n+1}-4} = 1.$$

Bài 1.4. Dễ thấy (x_n) là dãy dương và $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_k}\right) = \frac{x_{n+1}}{(n+1)!}$. Ta có

$$x_n = n + n(n-1) + \ldots + n(n-1)\ldots 3.2 + n(n-1)\ldots 2.1$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_k}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e.$$

Bài 1.5. Xét $a_1 = 0$, khi đó ta có $a_n = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Nếu $0 < a_1 < \frac{1}{2016^2}$ thì bằng quy nạp ta chứng minh được

$$0 < a_n < \frac{1}{2016^{n+1}}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Nếu $a_1 = \frac{1}{2016^2}$ thì bằng quy nạp ta chứng minh được

$$a_n = \frac{1}{2016^{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

và do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Nếu $a_1 > \frac{1}{2016^2}$ thì bằng quy nạp ta chứng minh được $a_n > \frac{1}{2016^{n+1}}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Xét dãy $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ xác định bởi $b_n = 2016^{n+1}a_n$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó ta có

$$b_1 = 2016^2 a_1 > 1, \quad b_{n+1} = b_n^2 = b_{n-1}^{2^2} = \ldots = b_1^{2^n}.$$

Suy ra $a_n = \frac{b_n}{2016^{n+1}} = \frac{b_1^{2^{n-1}}}{2016^{n+1}}$, từ đây ta suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ do $b_1 > 1$.
Vậy $a_1 \in \left[0, \frac{1}{2016^2}\right]$.

Bài 1.6. Từ giả thiết ta có: với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ ta có

$$\begin{aligned}
&|2x_{n+1} - x_n - x| \leq \varepsilon\\
&|2(x_{n+1} - x) - (x_n - x)| \leq \varepsilon\\
&|x_{n+1} - x| \leq \tfrac{1}{2}|x_n - x| + \tfrac{\varepsilon}{2}\\
&|x_{n+1} - x| \leq \tfrac{1}{2^n}|x_1 - x| + \tfrac{\varepsilon}{2}(1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{2^n}) \Rightarrow |x_{n+1} - x| \leq \tfrac{1}{2^n}|x_1 - x| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

Bài 1.7. Dãy số x_n là dãy số dương. Từ giả thiết, ta có

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \cdots + \frac{x_n}{n} = (n + 2016)x_{n+1}.$$

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{n-1} = (n + 2015)x_n.$$

Do đó

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n^2 + 2015n + 1}{n^2 + 2016n} \to 1 \quad \text{khi} \quad n \to +\infty.$$

Suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = 0. \tag{6.1}$$

Ta có

$$\ln \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{n}\ln(x_1) + \frac{1}{n}\left(\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \ln\left(\frac{x_3}{x_2}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)\right). \tag{6.2}$$

Từ (6.1) và (6.2), ta suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} \ln \sqrt[n]{x_n} = 0.$$

Vì vậy

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1.$$

Bài 1.8. a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Do đó $u_n < u_{n+1}$. Vậy dãy u_n là dãy tăng nghiêm ngặt.
b) Giới hạn ta cần tính là một số không âm. Xét hàm $f : [n, n+1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi công thức

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Suy ra

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}\right).$$

Áp dụng định lý Lagrange, tồn tại $c_n \in (n, n+1)$ sao cho $f'(c_n) = f(n+1) - f(n)$. Vậy ta cần tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} nf'(c_n)$ với

$$f'(c_n) = \left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \left(\ln(1 + \frac{1}{c_n}) - \frac{1}{c_n+1}\right).$$

Vì $n < c_n < n+1$, kéo theo

$$f'(c_n) < \left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \left(\ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n+2}\right).$$

Mặt khác khi $n \to +\infty$ thì $c_n \to +\infty$. Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Ta có

$$0 \le \lim_{n\to+\infty} nf'(c_n) \le \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \left(\ln(1 + \frac{1}{n})^n - \frac{n}{n+2}\right) = 0.$$

Theo nguyên lý kẹp

$$\lim_{n\to+\infty} n[(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} - (1 + \frac{1}{n})^n] = 0.$$

Bài 1.9. Nhân hai vế với 2016^n ta được $2016^n u_n = 2016^{n-1}u_{n-1} + (-1)^n 2016^n$. Đặt $v_n = 2016^n u_n$ thì $v_n - v_{n-1} = (-1)^n 2016^n$. Suy ra $v_n = (v_n - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_{n-2}) + \cdots + (v_1 - v_0) + v_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^i 2016^i$. Vậy $u_n = \dfrac{v_n}{2016^n} = \dfrac{1 + (-1)^n 2016^n}{2016^{n-1}2017}$.
Vậy

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} u_n^2 &= \lim_{n\to\infty} [\frac{1 + (-1)^n 2016^n}{2016^{n-1}2017}]^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} [\frac{1}{2016^{n-1}2017} - (-1)^n \frac{2016}{2017}]^2 = (\frac{2016}{2017})^2.\end{aligned}$$

Bài 1.10. Ta có $x_{n+1} = x_n + (x_n - a)^2 \geq x_n, \quad n \geq 1$. Do đó $\{x_n\}$ là dãy tăng. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ thì ta có ngay $l = l + (l-a)^2$, hay $l = a$. Vì $\{x_n\}$ là dãy tăng nên $x_n \leq a$ với mọi $n \geq 1$, tức là ta có $(x_n - a)^2 + x_n \leq a$ với mọi $n \geq 1$. Vậy $a - 1 \leq x_n \leq a$ với mọi $n \geq 1$. Nói riêng

$$a - 1 \leq x_1 \leq a \iff a - 1 \leq b \leq a.$$

Ngược lại, giả sử $a - 1 \leq b \leq a$. Vì $b = x_1$ nên $a - 1 \leq x_1 \leq a$ và

$$x_{n+1} \geq x_n \geq ... \geq x_1 = b \geq a - 1.$$

Bằng quy nạp dễ thấy $a - 1 \leq x_n \leq a$ với mọi $n \geq 1$. Vì dãy này tăng nên hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

Bài 1.11. Do mọi số hạng của dãy đều dương nên từ công thức truy hồi ta có

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2015}{2016} + \frac{1}{2016u_n}.$$

Đặt $x_n = \frac{1}{u_n}, \forall n \geq 1$. Khi đó $x_1 = 5$ và $\forall n \geq 1$,

$$x_{n+1} = \frac{2015}{2016} + \frac{x_n}{2016}.$$

Suy ra $2016x_{n+1} = 2015 + x_n$. Hay $2016(x_{n+1} - 1) = x_n - 1$. Vậy

$$x_{n+1} - 1 = \frac{1}{2016}(x_n - 1) = \cdots = \frac{1}{2016^n}(x_1 - 1) = \frac{4}{2016^n}.$$

Từ đó $x_n = \dfrac{4}{2016^{n-1}} + 1$. Vì vậy $\forall n \geq 1$,

$$u_n = \frac{2016^{n-1}}{4 + 2016^{n-1}}.$$

Từ đó $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

Bài 1.12. Nếu $\alpha > 1$ thì $u_{n+1} = (\alpha + u_n^2)/2 > (1 + u_n^2)/2 \geq u_n$. Suy ra u_n là dãy tăng. Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, vì nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ hữu hạn thì thay vào phương trình dãy ta được

$$a = \frac{1}{2}(\alpha + a^2) \Longrightarrow a^2 - 2a + \alpha = 0 \text{(phương trình này vô nghiệm)}.$$

Nếu $0 < \alpha \leq 1$ thì dễ thấy $u_1 < 1$, hơn nữa giả sử $u_n < 1$ thì

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha + u_n^2) < \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

tức là $0 < u_n < 1 \forall n$.

Mặt khác $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n^2 - u_{n-1}^2)$ và từ $u_2 = \frac{1}{2}(\alpha + u_1^2) = u_1 + \frac{u_1^2}{2} > u_1$ ta suy ra u_n là dãy tăng, bị chặn. Từ đó $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \leq 1$. Thay vào phương trình dãy ta được $a = 1 - \sqrt{1-\alpha}$.

Vậy với $0 < \alpha \leq 1$ thì dãy hội tụ và khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 - \sqrt{1-\alpha}$.

Bài 1.13. Bằng qui nạp, dễ thấy $u_n > 0$. Ta có

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_{k-1}u_{k+1} - u_k^2}{u_k u_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{u_{k-1}}{u_k} - \frac{u_k}{u_{k+1}}\right) = \frac{u_0}{u_1} - \frac{u_n}{u_{n+1}}.$$

Mặt khác cũng theo lập luận trên ta có $\frac{u_{k-1}}{u_k} - \frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{1}{u_k u_{k+1}} > 0$. Do đó dãy số $\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên hội tụ về l thỏa mãn $l < \frac{u_0}{u_1} = \frac{1}{2}$.

Mặt khác theo giả thiết ta có $u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = u_{n-2}u_n - u_{n-1}^2$ (cùng bằng 1). Suy ra $\frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_n} = \frac{u_n + u_{n-2}}{u_{n-1}}$. Áp dụng hệ thức này liên tiếp $n-1$ lần ta được

$$\frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_n} = \frac{u_n + u_{n-2}}{u_{n-1}} = \cdots = \frac{u_2 + u_0}{u_1} = 3.$$

Lấy giới hạn ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_n} = 3 \quad \text{hay} \quad \frac{1}{l} + l = 3.$$

Kết hợp với điều kiện $l < \frac{1}{2}$ ta suy ra $l = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Từ các lập luận trên ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{u_0}{u_1} - l = \frac{\sqrt{5}-2}{2}.$$

Bài 1.14. Đặt $u_n = v_n + an + b$. Chúng ta xác định a, b sao cho v_n là cấp số cộng hoặc cấp số nhân. Ta có, $u_{n+1} = v_{n+1} + an + a + b$. Mặt khác, $u_{n+1} = 2u_n + n - 1 = 2(v_n + an + b) + n - 1 = 2v_n + 2an + n + 2b - 1$. Từ trên, ta chọn a, b thoản mãn

$$\begin{cases} an = 2an + n \\ a + b = 2b - 1 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $a = -1, b = 0$. Khi đó, theo cách đặt và theo giả thiết ta nhận được $u_n = v_n - n$, và

$$\begin{cases} v_n = 2v_{n-1} \\ v_0 = 2 \end{cases}$$

Do đó $v_n = 2^{n+1}$ và $u_n = 2^{n+1} - n$. Vậy $u_{2016} = 2^{2017} - 2016$.

Bài 1.15. Đặt $v_n = u_n + q2^n$. Thay vào biểu thức của u_n ta được $v_n - q2^n = 3(v_{n-1} - q2^{n-1}) + 2^n \Leftrightarrow v_n = 3v_{n-1} + q2^n - 3q2^{n-1} + 2^n$. Chúng ta chọn $q = 2$ thì $v_n = 3v_{n-1}$, $v_0 = 3$. Và ta được $v_n = 3^{n+1}$. Suy ra $u_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Nên $u_{2016} = 3^{2017} - 2^{2017}$.
Cách 2: Chia hai vế cho 2^n Đặt $v_n = u_n/2^n$ ta có $v_n = 3/2v_{n-1} + 1$. Đặt $v_n = w_n + c$ ta thay vào biểu thức của v_n. Ta chọn $c = -2$ suy ra $w_n = 3(3/2)^n$. Từ đó $v_n = 3^{n+1}/2^n - 2$ và $u_n = v_n 2^n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Từ đó $u_{2016} = 3^{2017} - 2^{2017}$.

Bài 1.16. + Từ giả thiết về f ta thấy $f(k+1) - f(k) = 2016f^2(k) \geq 0$. Chứng tỏ dãy $f(n)$ tăng. Nếu $\lim_n f(n) := a < +\infty$ thì từ giả thiết suy ra $f(n+1) = 2016f^2(n) + f(n)$, khi đó lấy giới hạn hai vế ta thu được $a = 2016a^2 + a$ hay $\lim_n f(n) = a = 0$. Nhưng do dãy $f(n)$ tăng nên mâu thuẫn với $f(1) > 0$. Vậy $\lim_n f(n) = +\infty$. Mặt khác từ giả thiết ta có $2016f^2(k) = f(k+1) - f(k)$ nên ta thu được

$$\frac{f(k)}{f(k+1)} = \frac{1}{2016}\left(\frac{1}{f(k)} - \frac{1}{f(k+1)}\right).$$

Vậy

$$\begin{aligned} &\frac{f(1)}{f(2)} + \frac{f(2)}{f(3)} + \cdots + \frac{f(n)}{f(n+1)} \\ &= \frac{1}{2016}\left(\frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(2)} - \frac{1}{f(3)} + \cdots + \frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f(n+1)}\right) \\ &= \frac{1}{2016}\left(\frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(n+1)}\right) \to \frac{1}{2016f(1)} = 1 \end{aligned}$$

do $f(n+1) \to +\infty$) khi $n \to \infty$.

Bài 1.17. Xét $x \geq 0$, theo công thức khai triển Taylor ta tìm được $x_1, x_2 \in [0, x]$ sao cho

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x_1^2}{2} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x_2^3}{6}.$$

Do đó

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}, \quad \text{với mọi } x \geq 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức trên với $x = \dfrac{1}{n+k}$, ta có

$$\frac{1}{n+k} - \frac{1}{2(n+k)^2} \le 1 - \frac{1}{\sqrt[n+k]{e}} \le \frac{1}{n+k}.$$

Cho $k = 1, 2, \dots, n$ rồi lấy tổng ta được

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \le n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n+k]{e}} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}. \quad (1)$$

Ta có

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2}$$

nên theo nguyên lí kẹp

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = 0. \quad (2)$$

Mặt khác ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{1+k/n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) và theo nguyên lí kẹp ta suy ra giới hạn cần tìm là $\ln 2$.

2 Chuỗi số

Bài 2.1. Bằng quy nạp ta chứng minh được $-\frac{1}{2} \leqslant a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Thật vậy, rõ ràng $-\frac{1}{2} = x_1 < 0$. Giả sử $-\frac{1}{2} \leqslant x_n < 0$, ta có $\frac{3}{2} \leqslant x_n + 2 < 2$, dẫn đến $\frac{2}{3} \geqslant \frac{1}{a_n+2} > \frac{1}{2}$ và do đó $\frac{2}{3}a_n \leqslant x_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n+2} < \dfrac{1}{2}x_n < 0$.
Mặt khác $-\frac{1}{2} \leqslant a_n$, nên $\frac{2}{3}\cdot(-\frac{1}{2}) \leqslant \frac{2}{3}\cdot a_n$ hay $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} \leqslant \frac{2}{3}a_n \leqslant a_{n+1}$. Vậy ta có $-\frac{1}{2} \leqslant a_{n+1} < 0$. Từ giả thiết ta lại có $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n+2}$.
Bằng cách khảo sát hàm số $f(x) = \dfrac{a}{a+2}$, $(a \neq -2)$ ta thấy hàm này đơn điệu tăng, nên ta suy ra dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ đơn điệu tăng. Dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ đơn điệu tăng và bị chặn (bởi 0), nên hội tụ. Gọi $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ta thấy $a = \dfrac{a}{a+2}$ và $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 0$, nên phải có $a = 0$. Khi đó $\frac{1}{2} \leqslant 1 + a_n < 1$ và $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n) = 1 \neq 0$, nên chuỗi

dương $\sum_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ không hội tụ và ta được $\sum_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = +\infty$.

Bài 2.2. Ta có

$$\int_0^n \sqrt{x}dx = \int_0^1 \sqrt{x}dx + \int_1^2 \sqrt{x}dx + \cdots + \int_{n-1}^n \sqrt{x}dx < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\sqrt{n^3} < u_n. \tag{6.3}$$

$$\int_1^{n+1} \sqrt{x}dx = \int_1^2 \sqrt{x}dx + \int_2^3 \sqrt{x}dx + \cdots + \int_n^{n+1} \sqrt{x}dx > \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}.$$

$$\Leftrightarrow u_n < \frac{2}{3}\sqrt{(n+1)^3} - \frac{2}{3}. \tag{6.4}$$

Từ (6.3) và (6.4), ta suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n^3}} = \frac{2}{3}.$$

Cũng từ (6.3) và (6.4), ta suy ra sự hội tụ của chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n^s}$ tương đương như sự hội tụ của chuỗi Rieman $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{s-3/2}}$. Do đó, nếu $s > \frac{5}{2}$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n^s}$ hội tụ. Ngược lại, nếu $s \le \frac{5}{2}$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n^s}$ phân kỳ.

Bài 2.3. Giả sử m, n là hai số nguyên dương sau cho $2m < n$. Vì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên chúng ta có thể giả sử rằng $r_m := \sum_{j=m+1}^{\infty} a_n < \epsilon$ với $\epsilon > 0$ bất kì cho trước. Do đó

$$(n-m)a_n \le a_{m+1} + \cdots + a_n \le r_m := \sum_{j=m+1}^{\infty} a_n.$$

Suy ra

$$0 \le na_n \le \frac{n}{n-m} r_m < \frac{n}{n-m}\epsilon < 2\epsilon.$$

Do đó $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

Bài 2.4. Xét chuỗi lũy thừa sinh bởi dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Bằng quy

nạp ta dễ dàng chứng minh được $0 < a_n \leq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vì vậy chuỗi này hội tụ tuyệt đối trên miền $D = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\} = (-1, 1)$. Suy ra chuỗi $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ hội tụ và $f(x) > 0$ với $x \in [0, 1)$.
Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(n-k)!}x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} = f(x)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!} = f(x)e^x. \end{aligned}$$

Chú ý rằng $f(0) = 1$ và $f(x) > 0$ với $x \in [0, 1)$ nên ta có

$$\ln f(x) = \ln f(x) - \ln f(0) = \int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \int_0^x e^t dt = e^x - 1.$$

Suy ra $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\sqrt{e}-1}$.

Bài 2.5. Với mỗi $n \geq 1$, xét hàm $f_n : (0, \dfrac{1}{2n}] \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x - nx^2$. Dễ dàng thấy rằng $0 < f_n(x) \leq \frac{1}{4n}$, đồng thời $f_n(x)$ là hàm tăng trên $(0, \frac{1}{2n}]$. Bằng quy nạp ta đi chứng minh rằng

$$0 < x_n < \frac{2}{n^2} \tag{6.5}$$

với mọi $n \geq 2$. Với $n = 2, 3, 4$ ta có

$$\begin{array}{l} 0 < f_1(0) < x_2 = f_1(x_1) = x_1 - x_1^2 \leq \frac{1}{4} < \frac{2}{4} \\ 0 < f_2(0) < x_3 = f_2(x_2) = x_2 - 2x_2^2 \leq \frac{1}{8} < \frac{2}{9} \\ 0 < f_3(0) < x_4 = f_3(x_3) = x_3 - 3x_3^2 \leq \frac{1}{12} < \frac{2}{16}. \end{array}$$

Giả sử (6.5) đúng với mọi $n \geq 4$, ta có $0 < x_n \leq \frac{2}{n^2} \leq \frac{1}{2n}$. Do đó,

$$0 < f_n(0) < x_{n+1} = f_n(x_n) = f_n(\frac{2}{n^2}) = \frac{2}{n^2} - n.\frac{4}{n^4} = \frac{2n-4}{n^3} < \frac{2}{(n+1)^2}.$$

Như vậy, (6.5) đúng với mọi $n \geq 2$. Theo dấu hiệu so sánh của chuỗi số dương, chuỗi đã cho hội tụ.

Bài 2.6. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, với mọi $n \geq 2$ ta có

$$a_n^{(n-1)/n} = (a_n^{1/2}a_n^{1/2}.a_n^{n-2})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{2\sqrt{a_n} + (n-2)a_n}{n}.$$

Nhưng

$$\frac{2\sqrt{a_n}}{n} \leq 1/n^2 + a_n \ \ (\text{vì } \ 2xy \leq x^2 + y^2)$$

và
$$\frac{(n-2)a_n}{n} \le a_n \ \ ;(\text{vì } \ (n-2)/n \le 1).$$
Do đó
$$0 < a_n^{(n-1)/n} \le 1/n^2 + 2a_n \ \ \forall n \ge 2.$$
Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[1/n^2 + 2a_n]$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn so sánh ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.7. Đặt $b_n = 1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, thế thì $a_{n+1} = a_1(1-b_1)(1-b_2)...(1-b_n)$ và
$$\ln(a_{n+1}) = \ln(a_1) + \ln(1-b_1) + ... + \ln(1-b_n)$$
Giả sử chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|b_n|$ hội tụ. Suy ra $\lim b_n = 0$, ta có thể coi $|b_n| < \dfrac{1}{2}, \forall n$.
Để ý rằng $\dfrac{1}{1-x} \le 2$ khi $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$. Từ đó
$$\int_0^{|b|} \frac{1}{1-x}dx \le \int_0^{|b|} 2dx, \forall |b| < \frac{1}{2}$$
tức là $\ln(1-|b|) \ge -2|b|, \forall |b| < \dfrac{1}{2}$. Như vậy
$$\ln(a_{n+1}) \ge \ln(a_1) - 2|b_1| - 2|b_2| - ... - 2|b_n|$$
$$\Longrightarrow -\ln(a_{n+1}) \le -\ln a_1 + 2|b_1| + 2|b_2| + ... + 2|b_n|(1)$$
Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ nên $\lim a_n = 0$ hay $-\lim \ln a_n = +\infty$ Kết hợp với (1) ta suy ra $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|b_n| = +\infty$, mâu thuẫn.
Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|b_n| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}|1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}|$ phân kì.

Bài 2.8. Ta thấy $x^2+x+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, nên từ giả thiết ta có $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{x_n^2 + x_n + 1}$ và bằng quy nạp ta suy ra dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ gồm toàn các giá trị âm.
Đặt $y_n = 1 + x_n$, ta dẫn đến $y_{n+1} = \dfrac{y_n^2}{x_n^2 + x_n + 1}$ và bằng quy nạp ta suy ra dãy $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ gồm toàn các giá trị dương.
Mặt khác, dễ thấy
$$x_n - x_{n+1} = y_n x_n x_{n+1} \quad \text{và} \quad y_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$$

Suy ra với $m > 1$ thì $\sum\limits_{n=1}^{m-1} y_n = \frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_1} = 2 + \frac{1}{x_m} < 2$.

Điều này có nghĩa là dãy tổng riêng của chuỗi dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ bị chặn trên (bởi 2), do đó chuỗi này hội tụ.

Chuỗi này hội tụ nên số hạng tổng quát của nó phải thỏa mãn $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, do đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$, suy ra $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1 + x_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m-1} y_n = \lim\limits_{m\to\infty} \left(2 + \frac{1}{x_m}\right) = 1$.

3 Hàm số

Bài 3.1. 1) Chứng tỏ $\mathrm{id} : (C[0, 1], d) \longrightarrow (C[0, 1], \rho)$ liên tục. Giả sử $f_n \to f$ trong $(C[0, 1], d)$. Ta chứng tỏ $f_n \to f$ trong $(C[0, 1], \rho)$. Thật vậy từ $f_n \to f$ trong $(C[0, 1], d)$ ta có $d(f_n, f) = \max\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$. Suy ra $f_n \rightrightarrows f$ trên $[0, 1]$. Vậy $\rho(f_n, f) = \int\limits_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx \to 0$. Do đó $f_n \to f$ trong $(C[0, 1], \rho)$.
Vậy ánh xạ đồng nhất $\mathrm{id} : (C[0, 1], d) \longrightarrow (C[0, 1], \rho)$ liên tục.

Chứng tỏ $\mathrm{id} : (C[0, 1], \rho) \longrightarrow (C[0, 1], d)$ không liên tục. Ta cần xây dựng dãy $f_n \to f$ trong $(C[0, 1], \rho)$ mà $f_n \not\to f$ trong $(C[0, 1], d)$. Với mỗi n xét $f_n(x) = x^n$ và $f(x) = 0$ với mọi $x \in [0, 1]$. Khi đó $\rho(f_n, f) = \int\limits_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx = \frac{1}{n+1} \to 0$, nghĩa là $f_n \to f$ trong $(C[0, 1], \rho)$. Tuy nhiên $d(f_n, f) = \max\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\to 0$, nghĩa là $f_n \not\to f$ trong $(C[0, 1], d)$. Vậy $\mathrm{id} : (C[0, 1], \rho) \longrightarrow (C[0, 1], d)$ không liên tục.

Bài 3.2. a) Đặt $k = \frac{\beta}{1-\alpha} \in [0, 1)$. Với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1}) \\
&\le \alpha\frac{d(x_n, f(x_n))d(x_{n-1}, f(x_{n-1}))}{2016 + d(x_n, x_{n-1})} + \beta d(x_n, x_{n-1}) \\
&\le \alpha\frac{d(x_n, x_{n+1})d(x_{n-1}, x_n)}{2016 + d(x_n, x_{n-1})} + \beta d(x_n, x_{n-1}) \\
&\le \alpha d(x_n, x_{n+1}) + \beta d(x_n, x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Suy ra

$$d(x_{n+1},x_n)\le\frac{\beta}{1-\alpha}d(x_n,x_{n-1})=kd(x_n,x_{n-1})\le k^2d(x_{n-1},x_{n-2})\le\ldots\le k^nd(x_1,x_0).$$

Với $m>n$ ta có

$$\begin{aligned}d(x_n,x_m)&\le d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\ldots+d(x_{m-1},x_m)\\&\le(k^n+k^{n+1}+\ldots+k^{m-1})d(x_0,x_1)\\&\le\frac{k^n}{1-k}d(x_0,x_1).\end{aligned}$$

Vì $k\in[0,1)$ nên $\lim\limits_{n,m\to+\infty}d(x_n,x_m)=0$. Do đó (x_n) là dãy Cauchy.

(b) Vì X là đầy đủ nên tồn tại $x^*\in X$ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x^*$. Vì $f(x)$ liên tục nên $x^*=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_{n-1})=f(\lim\limits_{n\to+\infty}x_{n-1})=f(x^*)$.

Giả sử tồn tại $y^*\in X$ sao cho $y^*\ne x^*$ và $f(y^*)=y^*$. Khi đó

$$d(x^*,y^*)=d(f(x^*),f(y^*))\le\alpha\frac{d(x^*,f(x^*))d(y^*,f(y^*))}{2016+d(x^*,y^*)}+\beta d(x^*,y^*)=\beta d(x^*,y^*)<d(x^*,y^*).$$

Điều này là mâu thuẫn. Vậy tồn tại duy nhất $x^*\in X$ thỏa mãn $x^*=f(x^*)$.

Bài 3.3. Xét hàm số $g(x)=(x-a)(x-b)\exp\{f(x)\}$ (ở đây $\exp\{t\}=e^t$). Ta có $g(a)=g(b)=0$. Theo định lý Rolle tồn tại điểm $c\in(a,b)$ sao cho $g'(c)=0$. Thế mà

$$\begin{aligned}g'(x)&=(x-a)\exp\{f(x)\}+(x-b)\exp\{f(x)\}+(x-a)(x-b)f'(x)\exp\{f(x)\}\\&=[(2x-a-b)+(x-a)(x-b)f'(x)]\exp\{f(x)\}\end{aligned}$$

nên $g'(c)=0$ nghĩa là $[(2c-a-b)+(c-a)(c-b)f'(c)]\exp\{f(c)\}=0$. Suy ra $(2c-a-b)+(c-a)(c-b)f'(c)=0$, hay là $f'(c)=\dfrac{a+b-2c}{(a-c)(b-c)}$.

Cuối cùng ta dễ dàng chứng minh

$$\frac{2}{b-c}<f'(c)=\frac{a+b-2c}{(a-c)(b-c)}<\frac{2}{a-c}.$$

Bài 3.4. Đổi biến $x=\frac{\pi}{4}-t$ ta được

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[n]{\sin^n x+\cos^n x}.dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt[n]{\sin^n(\frac{\pi}{4}-t)+\cos^n(\frac{\pi}{4}-t)}.dt$$

Xét $f(t) = \sqrt[n]{\sin^n(\frac{\pi}{4}-t)+\cos^n(\frac{\pi}{4}-t)}$ trên $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ ta dễ dàng thấy $f(-t) = f(t)$, nên đây là hàm chẵn. Do đó

$$I_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[n]{\sin^n(\frac{\pi}{4}-t)+\cos^n(\frac{\pi}{4}-t)}.dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[n]{\tan^n(\frac{\pi}{4}-t)+1}.\cos(\frac{\pi}{4}-t)dt$$

Với $t\in[0,\frac{\pi}{4}]$ thì $1 \leqslant \sqrt[n]{\tan^n(\frac{\pi}{4}-t)+1} \leqslant \sqrt[n]{2}$ và $\cos(\frac{\pi}{4}-t)>0$, nên suy ra

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(\frac{\pi}{4}-t)dt \leqslant I_n \leqslant 2\sqrt[n]{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(\frac{\pi}{4}-t)dt$$
$$\sqrt{2} \leqslant I_n \leqslant \sqrt[n]{2}.\sqrt{2}$$

Vậy ta được $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \sqrt{2}$.

Bài 3.5. a) Giả sử $P(x)$ là hàm số cần tìm, từ giả thiết $P'(1) = P'(3) = 0$. Vì $P'(x)$ cũng là đa thức và triệt tiêu tại 1 và 3 nên $P'(x)$ là bội của $(x-1)(x-3)$ và do đó có bậc ≥ 2 vậy bậc của $P(x) \geq 3$. Để có P có bậc nhỏ nhất, chúng ta chọn $P'(x) = A(x-1)(x-3) = A(x^2-4x+3)$ với A là hằng số. Từ điều kiện cực trị $P''(1)<0$ và $P''(3)>0$ suy ra $A>0$ Ta có $P(x) = A(x^3/3-2x^2+3x)+B$. Từ giả thiết về cực trị $P(1)=6$ và $P(3)=2$ suy ra $A=3, B=2$ (thỏa mãn $A>0$). Đa thức cần tìm là $P(x) = x^3-6x^2+9x+2$.
b) Từ giả thiết ta luôn tìm được ba số $a,b,c\neq 0$ (do $P(0),P(1),P(-1)\neq 0$) và đa thức $Q(x)$ có bậc nhỏ hơn 2013 (vì bậc của P nhỏ hơn 2016) để

$$\frac{P(x)}{x^3-x} = Q(x)+\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}.$$

Từ đó đạo hàm 2013 lần ta được

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(-1)^{2013}2013!a}{x^{2014}}+\frac{(-1)^{2013}2013!b}{(x+1)^{2014}}+\frac{(-1)^{2013}2013!c}{(x-1)^{2014}}.$$

Từ đó quy đồng và biểu diễn được

$$f(x) = -2013!g(x)\frac{a(x^2-1)^{2014}+bx^{2014}(x-1)^{2014}+cx^{2014}(x+1)^{2014}}{x^{2014}(x+1)^{2014}(x-1)^{2014}}.$$

Từ đó do f là đa thức nên $g(x)$ chia hết cho mẫu thức $x^{2014}(x+1)^{2014}(x-1)^{2014}$. Vì vậy tồn tại đa thức $C(x)$ sao cho

$$f(x) = C(x)[a(x^2-1)^{2014}+bx^{2014}(x-1)^{2014}+cx^{2014}(x+1)^{2014}].$$

Đồng thời ta cần tìm để bậc của f nhỏ nhất nên ta chọn đa thức $C(x)$ là hằng số (có thể coi $C(x)=1$) vậy

$$f(x) = a(x^2-1)^{2014}+bx^{2014}(x-1)^{2014}+cx^{2014}(x+1)^{2014}.$$

Ta thấy hệ số của lũy thừa x^{4028} (cao nhất) là $(a+b+c)$. Vì thế ta chọn $a+b+c=0$ thì buộc hệ số lũy thừa cao nhất (bậc 2.2014=4028) bằng 0. Khi đó hệ số của lũy thừa bậc cao nhất còn lại (x^{4027}) là $(c-b)$. Vì vậy ta chọn $b=c\neq 0$ thì buộc hệ số lũy thừa kế tiếp theo (bậc 4027) bằng 0. Hệ số của bậc nhỏ nhất có thể là $-2014a+2013\cdot 2014b$ với bậc 4026.Vậy bậc nhỏ nhất có thể của f là 4026.

Bài 3.6. + Phương trình đã cho viết được dưới dạng

$$\int_a^1 \frac{t^{2015}dt}{(1+t)(1+t^2)\dots(1+t^{2016})} - \frac{a^{2016}}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^{2016})} = 0.$$

Đặt

$$f(x) = \int_x^1 \frac{t^{2015}dt}{(1+t)(1+t^2)\dots(1+t^{2016})} - \frac{x^{2016}}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2016})}.$$

Rõ ràng $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0;1]$. Ta dễ chứng minh được

$$f(0) = \int_0^1 \frac{t^{2015}dt}{(1+t)(1+t^2)\dots(1+t^{2016})} > 0.$$

Ta lại có $f(1) = -\frac{1}{2^{2016}} < 0$. Vậy $f(0)f(1) < 0$. Từ đó, theo định lý giá trị trung gian của hàm liên tục, tồn tại $a\in(0,1)$ để $f(a)=0$ nên ta có điều phải chứng minh.
Cách 2: Có thể giải bằng phương pháp dùng Định lý Rolle, bằng cách đặt hàm dưới dấu tích phân là $h(x)$. Khi đó, nếu coi a là biến x thì phương trình đã cho có thể viết dưới dạng

$$\int_x^1 h(t)dt - xh(x) = 0 \Leftrightarrow (x\int_x^1 h(t)dt)' = 0.$$

Ta xét hàm $g(x) = x\int_x^1 h(t)dt$ thì g liên tục trên $[0;1]$ và $g(0)=g(1)=0$. Theo Định lý Rolle, tồn tại $a\in(0;1)$ để $g'(a)=0$ hay $\int_a^1 h(t)dt - ah(a)$. Đó là ĐPCM.

Bài 3.7. Ta thấy từ công thức đạo hàm của tích phân theo biến cận trên $f'(x) = \dfrac{2x}{\ln(x^2)} - \dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{x-1}{\ln x} > 0, \forall x>1$, nên hàm f tăng, do đó tập giá trị của f là $(f(1+0); f(+\infty))$. Do hàm dưới dấu tích phân $\frac{1}{\ln t}$ nghịch biến trên $(x; x^2)$ nên áp dụng công thức L'Hospital ta có

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \geq \frac{1}{2\ln x} \int_x^{x^2} dt = (x^2 - x)\frac{1}{\ln x^2} \to +\infty.$$

Vậy $f(+\infty) = +\infty$. Để tính $f(1+0)$, ta đặt $t = e^v$ thì

$$f(x) = \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{e^v}{v} dv.$$

Ta có bằng các tính toán cụ thể

$$f(x) = \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{e^v}{v} dv < e^{2\ln x} \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{dv}{v} = x^2 \ln 2.$$

$$f(x) = \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{e^v}{v} dv > e^{\ln x} \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{dv}{v} = x \ln 2.$$

Do đó miền giá trị của f là $(\ln 2; +\infty)$.

Bài 3.8. Khai triển bậc hữu hạn đối với $\sin x$ và $\ln(1+x)$ tại 0 đến bậc 4 trên tử số $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
&\sin\ln(1+x) - \ln(1+\sin x)\\
&= \sin(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)) - \ln(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))\\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) - \frac{1}{6}(x - \frac{x^2}{2}) + o(x^4))\\
&- [(x - \frac{x^3}{3}) - \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6})^2 + \frac{1}{3}(x - \frac{x^3}{6})^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)]\\
&= \frac{x^4}{12} + o(x^4)
\end{aligned}.$$

Từ đó ta có

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\ln(1+x) - \ln(1+\sin x)}{\sin^4 \frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{12}}{\sin^4 \frac{x}{2}} = \frac{4}{3}.$$

4 Phép tính vi phân

Bài 4.1. Ta có

$$f''(x) - 7f'(x) + 12f(x) + 24 = (f'(x) - 3f(x) - 6)' - 4(f'(x) - 3f(x) - 6) \geq 0.$$

Đặt $g(x) = f'(x) - 3f(x) - 6$. Ta có $g'(x) - 4g(x) \geq 0$ hay $\Big(g(x)e^{-4x}\Big)' \geq 0$ với mọi $x \in (0, +\infty)$. Suy ra $g(x)e^{-4x} \geq g(0) = -9$ hay $e^{-4x}(f'(x) - 3f(x) - 6) \geq -9$. Do đó

$$e^{-3x}(f'(x) - 3f(x) - 6) \geq -9e^x.$$

Suy ra

$$\Big(e^{-3x}(f(x) + 2)\Big)' \geq -9e^x.$$

Do đó

$$\Big(e^{-3x}(f(x) + 2) + 9e^x\Big)' \geq 0$$

với mọi $x \in (0, +\infty)$. Suy ra

$$e^{-3x}(f(x) + 2) + 9e^x \geq f(0) + 2 + 9 = 12.$$

Do đó

$$f(x) \geq 12e^{3x} - 9e^{4x} - 2$$

Bài 4.2. Với $p \in [0, 1]$, sử dụng tích phân từng phần ta có

$$\int_0^1 f'(x)x(1-x)[p(1-x) + (1-p)x]dx = 5 - 7p.$$

Mặt khác, theo định lý giá trị trung gian thứ nhất, tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho

$$\begin{aligned}&\int_0^1 f'(x)x(1-x)[p(1-x) + (1-p)x]dx \\ &\quad = f'(c)\textstyle\int_0^1 x(1-x)[p(1-x) + (1-p)x]dx = f'(c)/12.\end{aligned}$$

Vậy $f'(c) = 60 - 84p$. Với mỗi $t \in [-24, 60]$, tồn tại $p \in [0, 1]$ sao cho $60 - 84p = t$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 4.3. Đặt $g(x) = e^{-4x}f(x)$. Áp dụng định li Rolle ta tìm được $c_1, c_2 \in (a, b)$ sao cho

$$f'(c_1) = 4f(c_1); \quad f'(c_2) = 4f(c_2); \quad c_1 \neq c_2.$$

Đặt $h(x) = e^{-2016x}(f'(x) - 4f(x))$. Áp dụng định li Rolle ta tìm được $c \in (a, b)$ sao cho

$$f''(c) + 8064f(c) = 2020f'(c).$$

Bài 4.4. Xét hàm $g(x) = e^{\frac{x}{2}}f(x)$. Vì g có ít nhất 5 nghiệmphân biệt, nên theo định lí Rolle g''' có 2 nghiệm phân biệt. Ta có

$$g'''(x) = \frac{1}{8}e^{x/2}(f(x) + 6f'(x) + 12f''(x) + 8f'''(x)),$$

và $e^{x/2} > 0, \forall x$ nên ta có điều cần chứng minh.

Bài 4.5. Áp dụng định lí Lagrange ta có $c_1 \in (a, b)$ và $d \in (b, c)$ sao cho $f(a) - f(b) = (a - b)f'(c_1)$ và $f(b) - f(c) = (b - c)f'(d)$. Khi đó

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(c) - f(b)}{c - b}\frac{c - b}{c - a} + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\frac{b - a}{c - a} = tf'(d) + (1 - t)f'(c_1)$$

trong đó $t = \frac{c-b}{c-a}$. Vì $t \in (0, 1)$ nên $tf'(d) + (1 - t)f'(c_1)$ nằm giữa $f'(d)$ và $f'(c_1)$. Theo định lí Darboux, tồn tại $c_2 \in (c_1, d)$ sao cho $f'(c_2) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

Bài 4.6. Đặt $g(x) = f'(x) - f(x)$, với $x \in [0, \infty)$. Khi đó ta được

$$g'(x) - 2015g(x) \geq 0, \quad x \in [0, \infty).$$

Suy ra $(g(x)e^{-2015x})' \geq 0$ với mọi $x \in [0, \infty)$. Do đó

$$g(x)e^{-2015x} \geq g(0) = f'(0) - f(0) = 1.$$

Từ đây, ta được bất đẳng thức

$$f'(x) - f(x) \geq e^{2015x}, \quad \forall x \in [0, \infty),$$

hay

$$\left(f(x)e^{-x} - \frac{e^{2014x}}{2014}\right)' \geq 0, \quad \forall x \in [0, \infty).$$

Suy ra

$$f(x)e^{-x} - \frac{e^{2014x}}{2014} \geq f(0) - \frac{1}{2014} = -\frac{1}{2014}, \forall x \in [0, \infty).$$

Vì vậy

$$f(x) \geq \frac{e^{2015x}}{2014} - \frac{e^x}{2014}, \forall x \in [0, \infty).$$

Bài 4.7. Với mỗi $i = 0, 1, 2..., 2016$, vì hàm f khả vi trên $[0, 1]$ nên tồn tại số $c_i \in [0, 1]$ sao cho $f(c_i) = \frac{i}{2016}$, theo giả thiết ta có thể chọn $c_0 = 0$, $c_{2016} = 2016$. Áp dụng định lý Lagarange cho hàm f trên đoạn $[c_i, c_{i+1}]$ ta có: tồn tại $x_{i+1} \in [c_i, c_{i+1}]$ sao cho

$$f'(x_{i+1}) = \frac{f(c_{i+1}) - f(c_i)}{c_{i+1} - c_i} = \frac{1}{2016(c_{i+1} - c_i)}.$$

Do đó $\sum_{i=1}^{2016} \frac{1}{f'(x_i)} = \sum_{i=0}^{2015} 2016(c_{i+1} - c_i) = 2016.$

Bài 4.8. a) Ta xác định đa thức g dưới dạng

$$g(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_1(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n. \tag{6.6}$$

So sánh các hệ số ở hai vế của phương trình $p(x) = f(x)g(x)$ ta chỉ cần chọn các số $a_0 = \dfrac{1}{f(x_0)}, a_1 = -\dfrac{f'(x_0)g(x_0)}{f(x_0)}, a_2 = -\dfrac{f''(x_0)g(x_0) + f'(x_0)g'(x_0)}{f(x_0)}$.

Bài 4.9. Với mỗi $x \in \mathbb{R}$ cố định và h là số dương nào đó. Áp dụng công thức khai triển Taylor tồn tại số $x_0 \in (x, x + 2h)$ sao cho

$$f(x + 2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x_0).$$

Từ đó ta có $f'(x) = \dfrac{f(x + 2h) - f(x)}{2h} - hf''(x_0)$. Do đó ta có

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|}{h} + h \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|.$$

Chọn $h = \sqrt{\dfrac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|}{\sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|}}$ ta có kết quả như yêu cầu.

Bài 4.10. Xét hàm

$$F(x) = \frac{(x - a)(f(b) - f(x))}{x}.$$

Ta có $F(a) = F(b) = 0$ và $F(x)$ là hàm khả vi liên tục. Theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $F'(c) = 0$. Suy ra

$$c(c - a)f'(c) = a(f(b) - f(c)).$$

Theo định lý Lagrange, tồn tại $d \in (c, b)$ sao cho

$$f(b) - f(c) = f'(d)(b - c).$$

Do đó $c < d$ và
$$c(c-a)f'(c) = a(b-c)f'(d).$$

Bài 4.11. (a) Dễ thấy trên $[0, \frac{\pi}{2}]$, hàm số $g(x) = f(x)(\cos x + \sin x)$ thỏa mãn các điều kiện của định lý Rolle nên suy ra tồn tại $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ sao cho $g'(c) = 0$, hay
$$[f'(c) + f(c)]\cos c = [f(c) - f'(c)]\sin c. \tag{6.7}$$
Từ đẳng thức trên và từ giả thiết
$$0 \neq f^2(c) + [f'(c)]^2 = \frac{[f(c) + f'(c)]^2 + [f(c) - f'(c)]^2}{2}$$
ta suy ra $f(c) + f'(c) \neq 0$, $f(c) - f'(c) \neq 0$. Và như vậy, đẳng thức (6.7) có thể viết lại thành
$$\tan c = \frac{\sin c}{\cos c} = \frac{f(c) + f'(c)}{f(c) - f'(c)}.$$
(b) Nếu $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) < 1$ thì tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $f(t) \leq 1 - \epsilon < 1$, vì vậy
$$|u_n| \leq n(1-\epsilon)^n \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$
Nếu $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) > 1$ thì tồn tại $t_0 \in [0,1]$ sao cho $f(t_0) > 1$. Giả sử $t_0 \in (0,1)$. Khi đó vì f liên tục nên tồn tại $\eta > 0$ sao cho $f(t) \geq 1 + \epsilon > 1$ với mọi $t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$. Do đó
$$|u_n| \geq 2n\eta(1+\epsilon)^n \to \infty \text{ khi } n \to \infty.$$
Lập luận tương tự với $t_0 \in \{0, 1\}$.

Bài 4.12. Đặt $h = 2f(0) - f(-1) - f(1)$ và xét hàm
$$g(x) = f(-x) + f(x) - 2f(0) - hx^2(x^2 - 2)\ ,\ x \in [-1, 1]$$
Ta thấy $g(0) = g(1) = 0$, nên theo định lý Rolle tồn tại $t \in (0,1)$ sao cho $g'(t) = 0$.
Thế mà $g'(x) = f'(x) - f'(-x) - 4hx(x^2 - 1)$ có $g'(0) = g'(1) = 0$ (chú ý rằng $f'(-1) = f'(1)$), nên lại theo định lý Rolle tồn tại $s_1 \in (0,t), s_2 \in (t,1)$ sao cho $g''(s_1) = g''(s_2) = 0$.
Vẫn theo định lý Rolle tồn tại $u \in (s_1, s_2) \subset (0,1)$ sao cho $g'''(u) = 0$. Mặt khác
$$\begin{aligned} g''(x) &= f''(x) + f''(-x) - 12hx^2 + 4h \\ g'''(x) &= f'''(x) - f'''(-x) - 24hx \\ g^{(4)}(x) &= f^{(4)}(x) + f^{(4)}(-x) - 24h \end{aligned}$$

nên rõ ràng $g'''(0) = 0$.
Lại theo định lý Rolle tồn tại $v \in (0, u) \subset (0, 1)$ sao cho $g^{(4)}(v) = 0$.
Từ đó ta được $h = \frac{1}{24}[f^{(4)}(v) + f^{(4)}(-v)]$.
Ta lại thấy $\min\{f^{(4)}(v), f^{(4)}(-v)\} \leqslant \dfrac{f^{(4)}(v) + f^{(4)}(-v)}{2} \leqslant \max\{f^{(4)}(v), f^{(4)}(-v)\}$ và do $g^{(4)}(x)$ liên tục, nên theo định lý giá trị trung gian với hàm liên tục suy ra tồn tại $c \in [-v, v] \subset (0, 1)$ sao cho $g^{(4)}(c) = \dfrac{f^{(4)}(v) + f^{(4)}(-v)}{2}$.
Đến đây ta được điều phải chứng minh.

Bài 4.13. Vì f' liên tục trên $[0, 1]$ nên $|f'|$ liên tục trên $[0, 1]$. Theo định lý Weierstrass, tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho

$$|f'(x_0)| = \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

$\forall x \in (0, 1]$, theo định lý Lagrange, tồn tại $\theta_1(x) \in (0, x)$ sao cho

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\theta_1(x))(x - 0).$$

Do đó $\forall x \in (0, 1]$,

$$|f(x)| \leq |f'(x_0)|x. \tag{6.8}$$

Tiếp theo, $\forall x \in [0, 1)$, theo định lý Lagrange, tồn tại $\theta_2(x) \in (x, 1)$ sao cho

$$-f(x) = f(1) - f(x) = f'(\theta_2(x))(1 - x).$$

Do đó $\forall x \in [0, 1)$,

$$|f(x)| \leq |f'(x_0)|(1 - x). \tag{6.9}$$

Từ (6.8) và (6.9), ta suy ra

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x)|\, dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)|\, dx \\
&\leq \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(x_0)|x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(x_0)|(1 - x) dx \\
&= \frac{|f'(x_0)|}{4}.
\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 4.14. Vì f là hàm khả vi hai lần trên đoạn $[0, 1]$ nên sử dụng khai triển Taylor tại lân cận điểm $\frac{1}{2}$, tồn tại các số $\theta_1 \in (0, \frac{1}{2})$ và $\theta_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$,

$$f(0) = f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{f'(\frac{1}{2})}{1!}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{f''(\theta_1)}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)^2,$$

và

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{f'(\frac{1}{2})}{1!}\frac{1}{2} + \frac{f''(\theta_2)}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Từ đó, cùng với $f''(\theta_1) \leq 1$ và $f''(\theta_2) \leq 1$, ta suy ra

$$f(1) + f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{8}\left(f''(\theta_1) + f''(\theta_2)\right) \leq \frac{1}{4}.$$

Vì $f(1) \geq 0$ nên

$$f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(1) + f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{4}.$$

Bài 4.15. Đặt $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ và $h(x) = F(x) - g(x)$. Khi đó $h(x)$ khả vi trên $[a, b]$ và $h'(a)h'(b) < 0$. Ta chứng minh $\exists c \in (a, b)$ sao cho $h'(c) = 0$ là xong.

Thật vậy, giả sử $h'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Suy ra $h(x) \neq h(y)$ với mọi $x \neq y \in [a, b]$, tức là h đơn ánh trên $[a, b]$. Kết hợp với h liên tục trên $[a, b]$ ta có h đơn điệu ngặt trên $[a, b]$. Từ đó hoặc $h'(x) > 0$ hoặc $h'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$. Như vậy $h'(a)h'(b) < 0$, mâu thuẫn.

Bài 4.16. Chọn $x = 1$, $y = 0$, theo giả thiết ta có

$$|f(1) - f(0)| \geq |1 - 0| = 1.$$

Mặt khác do $0 \leq f(0), f(1) \leq 1$ nên ta phải có

$$|f(1) - f(0)| \leq 1.$$

Do đó dấu bằng trong các bất đẳng thức trên phải xảy ra. Ta có 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $f(0) = 0$ và $f(1) = 1$. Do $f(x) \in [0, 1]$ với $x \in [0, 1]$ nên một mặt ta có

$$f(x) = |f(x) - f(0)| \geq |x - 0| = x.$$

Mặt khác ta có

$$f(x) = 1 - |f(1) - f(x)| \leq 1 - |1 - x| = x.$$

Do đó $f(x) = x$ với mọi $x \in [0, 1]$.

Trường hợp 2: $f(0) = 1$ và $f(1) = 0$. Do $f(x) \in [0, 1]$ với $x \in [0, 1]$ nên một mặt ta có

$$f(x) = |f(x) - f(1)| \geq |x - 1| = 1 - x.$$

Mặt khác ta có

$$f(x) = 1 - |f(0) - f(x)| \leq 1 - |0 - x| = 1 - x.$$

Do đó $f(x) = 1 - x$ với mọi $x \in [0, 1]$.
Tóm lại có 2 hàm số thỏa mãn bài toán là $f(x) = x$ và $f(x) = 1 - x$ với mọi $x \in [0, 1]$.

Bài 4.17. Từ giả thiết ta có $f(0) = 0$ và $f(-x) = -f((-x)^2) = -f(x^2) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng tỏ hàm f đã cho là chẵn (nên ta chỉ cần tìm f với $x > 0$). Với mọi $x > 0$ ta thay x bởi $\sqrt{x}$ vào biểu thức đã cho ta được $-f(x) = f(x^{1/2})$ hay $f(x) = (-1)f(x^{1/2})$. Tiếp tục thay x bởi $\sqrt{x}$ trong biểu thức vừa thu được ta được $f(x^{1/2}) = (-1)f(x^{1/2^2})$ hay $f(x) = (-1)^2 f(x^{1/2^2})$. Tiếp tục quá trình này ta thu được $f(x) = (-1)^n f(x^{1/2^n})$. Do $x^{1/2^n} \to 1$ và f liên tục nên ta có $f(x^{1/2^n}) \to f(1)$. Ta có nếu $f(x) \neq 0$ thì từ $f(x) = (-1)^n f(x^{1/2^n})$ hay $(-1)^n f(x) = f(x^{1/2^n})$ ta thu được mâu thuẫn vì vế phải hội tụ tới $f(1)$, trong khi vế trái phân kì. Vậy ta phải có $f(x) = 0$. Vậy $f(x) = 0, \forall x \geq 0$. Cùng với tính chẵn của f ta kết luận $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 4.18. Xét hàm $g(x) = e^{-(\sqrt[n]{e}-1)2016x} f(x)$. Rõ ràng $g(x)$ là hàm liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trên $(a; b)$ thỏa mãn điều kiện định lý Rolle. Vậy với mỗi n, tồn tại $x_n \in (a; b)$ sao cho $g'(x_n) = 0$. Mặt khác ta có $g'(x) = e^{-(\sqrt[n]{e}-1)2016x}(f'(x) - (\sqrt[n]{e} - 1)2016 f(x))$. Khi đó $g'(x_n) = 0$ tương đương với

$$\frac{f'(x_n)}{(\sqrt[n]{e} - 1)f(x_n)} = 2016 \to 2016.$$

5 Phép tính tích phân

Bài 5.1. Nếu $\alpha = \beta$ ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha \sin x + \beta \cos x}{\alpha \cos x + \beta \sin x} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$.
Nếu $\alpha > \beta$ ta đặt

$$m := \frac{\beta}{\alpha}(1 - \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2 + \alpha^2}),\ n := \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2 + \alpha^2}.$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha\sin x+\beta\cos x}{\alpha\cos x+\beta\sin x}dx &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m(\alpha\cos x+\beta\sin x)+n(\alpha\cos x+\beta\sin x)'}{\alpha\cos x+\beta\sin x}dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} mdx + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\alpha\cos x+\beta\sin x)}{\alpha\cos x+\beta\sin x}\\ &= m\frac{\pi}{2}+n\ln\frac{\beta}{\alpha}.\end{aligned}$$

Bài 5.2. Ta chứng tỏ $\int_{-1}^1 (1-|x|)^2 f''(x)dx = 2\int_{-1}^1 f(x)dx$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (1-|x|)^2 f''(x)dx &= \int_0^1 (1-x)^2[f''(x)+f''(-x)]dx\\ &= (1-x)^2[f'(x)-f'(-x)]\Big|_0^1 + 2\int_0^1 (1-x)[f'(x)-f'(-x)]dx\\ &= 2(1-x)[f(x)+f(-x)]\Big|_0^1 + 2\int_0^1 [f(x)+f(-x)]dx = 2\int_{-1}^1 f(x)dx\end{aligned}$$

Đến đây áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz về tích phân

$$\Big[\int_a^b u(x)v(x)dx\Big]^2 \leqslant \int_a^b [u(x)]^2dx \cdot \int_a^b [v(x)]^2dx$$

ta có

$$4\Big[\int_{-1}^1 f(x)dx\Big]^2 \leqslant \int_{-1}^1 (1-|x|)^4dx \int_{-1}^1 [f''(x)]^2dx$$

và dễ dàng thấy $\int_{-1}^1 (1-|x|)^4dx = 2\int_0^1 (1-x)^4dx = \cdots = \frac{2}{5}$, nên ta suy ra bất đẳng thức cần phải chứng minh.

Bài 5.3. Ta có $\dfrac{(f(x)-\frac{1}{2})(f(x)-2)}{f(x)} \leq 0\ \forall x \in (0,1)$ nên tích phân 2 vế ta được

$$\int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leq 2+\frac{1}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được điều phải chứng minh.

Bài 5.4. Với $a = 0, b = t > 0$ ta có

$$t^2F(t) = 3\int\limits_0^t x^2 f(x)dx,$$

trong đó $F(t) = \int\limits_0^t f(x)dx$. Đạo hàm hai vế ta có $2tF(t) + t^2f(t) = 3t^2f(t)$ hay $2t(tf(t) - F(t)) = 0$, do đó $\left(\frac{F(t)}{t}\right)' = 0$. Suy ra $F(t) = kt$ hay $f(t) = k$ với mọi $t \in (0, \infty)$. Tiến hành tương tự cho $(-\infty, 0)$, kết quả là tồn tại các hằng số k, k_2, k_3 sao cho

$$f(t) = \begin{cases} k_2 & \text{nếu } t < 0 \\ k_3 & \text{nếu } t = 0 \\ k & \text{nếu } t > 0. \end{cases}$$

Vì f liên tục nên $k_2 = k_3 = k$. Vậy $f(t) = k$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Bài 5.5. Xét hàm

$$F(t) = \int\limits_0^t f(x)dx \int\limits_0^t \frac{dx}{f(x)} - \int\limits_0^t g(x)dx \int\limits_0^t \frac{dx}{g(x)}.$$

Ta có $F'(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ vì fg và $\dfrac{f}{g}$ đồng biến trên $[0, 1]$. Do $F(0) = 0$ nên $F(t) \geq 0, \forall t \geq 0$. Chọn $t = 1$ ta có điều phải chứng minh.

Bài 5.6. Gọi $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Ta có

$$\int\limits_a^b f^{n+1}(x)dx \leq M\int\limits_a^b f^n(x)dx$$

nên

$$\frac{\int\limits_a^b f^{n+1}(x)dx}{\int\limits_a^b f^n(x)dx} \leq M.$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder với $p = \frac{n+1}{n}$, $q = n + 1$ ta có

$$\int\limits_a^b f^n(x)dx \leq \left(\int\limits_a^b f^{n+1}(x)dx\right)^{\frac{n}{n+1}} . \left(\int\limits_a^b dx\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Do đó

$$\frac{\int\limits_a^b f^{n+1}(x)dx}{\int\limits_a^b f^n(x)dx} \geq \frac{1}{\sqrt[n+1]{b-a}} \sqrt[n+1]{\int\limits_a^b f^{n+1}(x)dx}.$$

Cho $n \to \infty$ và lưu ý $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int\limits_a^b f^n(x)dx} = M$ ta có kết quả.

Bài 5.7. Từ bất đẳng thức

$$0 \leq \int_0^1 (f(x)+x-1)^2\, dx = \int_0^1 f^2(x)dx - 2\int_0^1 (1-x)f(x)dx + \int_0^1 (1-x)^2 dx,$$

ta được

$$\int_0^1 f^2(x)dx \geq 2\int_0^1 (1-x)f(x)dx - \frac{1}{3}.$$

Mặt khác, ta có

$$\int_0^1 \int_0^x f(t)dtdx \geq \int_0^1 \frac{1-x^2}{2}dx = \frac{1}{3} \quad \text{hay} \quad \int_0^1 (1-t)f(t)dt \geq \frac{1}{3}.$$

Vì vậy $\int_0^1 f^2(t)dt \geq \frac{1}{3}$.

Bài 5.8. Giả sử $\varepsilon \in (0,1)$. Vì $\int_0^\infty f(x)dx < \infty$ nên có số tự nhiên N sao cho

$$\int_n^\infty f(x)dx < \varepsilon, \forall n > N. \tag{6.10}$$

Do đó với n đủ lớn $n\varepsilon > N$ ta có

$$\begin{aligned}\int_0^n \frac{x}{n} f(x)dx &= \int_0^{n\varepsilon} \frac{x}{n} f(x)dx + \int_{n\varepsilon}^n \frac{x}{n} f(x)dx \\ &< \varepsilon \int_0^{n\varepsilon} f(x)dx + \int_{n\varepsilon}^n \frac{x}{n} f(x)dx \\ &< \varepsilon \int_0^{n\varepsilon} f(x)dx + \varepsilon \\ &< \varepsilon\Big(\int_0^\infty f(x)dx + 1\Big).\end{aligned}$$

Vì bất đẳng thức cuối cũng đúng với $\varepsilon > 0$ tuỳ ý và n đủ lớn. Do đó ta có $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^n xf(x)dx = 0$.

Bài 5.9. Từ giả thiết của bài toán, ta nhận thấy $f(x)$ là hàm đơn điệu không giảm do $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$. Do đó

$$f(x)(x-a) \geq \int_a^x f(s)ds, \quad \forall x \in [a, b]. \tag{6.11}$$

Đặt

$$F(x) = \int_a^x [f(s)]^t ds - \Big(\int_a^x f(s)ds\Big)^{t-1}.$$

Khi đó, $F(a) = 0$ và $F'(x) = f(x)G(x)$, ở đây

$$G(x) = [f(x)]^{t-1} - (t-1)\Big(\int_a^x f(s)ds\Big)^{t-2}.$$

Rõ ràng, $G(a) = [f(a)]^{t-1} \geq 0$ và

$$G'(x) = (t-1)f(x)\bigg([f(x)]^{t-3}f'(x) - (t-2)\Big(\int_a^x f(s)ds\Big)^{t-3}\bigg).$$

Sử dụng giả thiết và (6.11), ta có

$$[f(x)]^{t-3}f'(x) \geq (t-2)\Big(f(x)(x-a)\Big)^{t-3} \geq (t-2)\Big(\int_a^x f(s)ds\Big)^{t-3}.$$

Do đó, $G'(x) \geq 0$, kéo theo $G(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$. Suy ra $F'(x) \geq 0$. Từ đó ta suy ra được $F(b) \geq 0$, hay

$$\Big(\int_a^b f(x)dx\Big)^{t-1} \leq \int_a^b [f(x)]^t dx.$$

Bài 5.10. Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)dx &= n\sum_{j=0}^{n-1}\left[\frac{1}{n}f\left(\frac{j}{n}\right) - \int_{j/n}^{(j+1)/n} f(x)dx\right] \\ &= n\sum_{j=0}^{n-1}\int_{j/n}^{(j+1)/n}\left[f\left(\frac{j}{n}\right) - f(x)\right]dx.\end{aligned}$$

Mặt khác, theo định lý Lagrange, với mọi $x \in (\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n})$ đều tồn tại $c_x \in (\frac{j}{n}, x)$ sao cho

$$\int_{j/n}^{(j+1)/n} \left[f\left(\frac{j}{n}\right) - f(x)\right]dx = \int_{j/n}^{(j+1)/n} f'(c_x)\left(\frac{j}{n} - x\right)dx \ \ \forall j = 0, 2, ..., n-1.$$

Vì f' bị chặn trên $[0,1]$ nên đặt

$$m_j := \min\left\{f'(x) : \frac{j}{n} \le x \le \frac{j+1}{n}\right\} \text{ và } M_j := \max\left\{f'(x) : \frac{j}{n} \le x \le \frac{j+1}{n}\right\}.$$

Do đó với mỗi $j = 0, 2, ..., n-1$ ta có

$$\int_{j/n}^{(j+1)/n} m_j\left(\frac{j}{n} - x\right)dx \le \int_{j/n}^{(j+1)/n} \left[f\left(\frac{j}{n}\right) - f(x)\right]dx \le \int_{j/n}^{(j+1)/n} M_j\left(\frac{j}{n} - x\right)dx.$$

Vì $\displaystyle\int_{j/n}^{(j+1)/n} \left(\frac{j}{n} - x\right)dx = \frac{-1}{2n^2}$ nên

$$-\sum_{j=0}^{n-1} \frac{m_j}{2n^2} \le \sum_{j=0}^{n-1} \int_{j/n}^{(j+1)/n} \left[f\left(\frac{j}{n}\right) - f(x)\right]dx \le -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{M_j}{2n^2}.$$

Và do đó

$$-\sum_{j=0}^{n-1} \frac{m_j}{2n} \le \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)dx \le -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{M_j}{2n}.$$

Vì $\sum\limits_{j=0}^{n-1} \dfrac{m_j}{n}$ và $\sum\limits_{j=0}^{n-1} \dfrac{M_j}{n}$ là *tổng dưới* và *tổng trên* của $f'(x)$ ứng với phân hoạch $\mathcal{P} = \{\frac{j}{n} : j = 0, 1, ..., n\}$ của $[0,1]$ nên ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m_j}{n} = \int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) \text{ và } \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{M_j}{n} = \int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0).$$

Theo định lý kẹp ta có ngay

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)dx = -\frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

Bài 5.11. Xét hàm số

$$F(t) = \left(\int_0^t f(x)dx\right)^2 - \int_0^t (f(x))^3 dx, \quad \text{với } t \in [0,1].$$

Ta muốn chứng minh $F(t) \geq 0$, $\forall t \in [0,1]$. Từ đó với $F(1) \geq 0$, ta suy ra điều cần chứng minh.
$\forall t \in [0,1]$, ta có

$$F'(t) = f(t)\left(2\int_0^t f(x)dx - f^2(t)\right).$$

Vì $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$ nên f là hàm đơn điệu tăng trên đoạn $[0,1]$. Do đó $f(x) \geq f(0) = 0$, $\forall x \in [0,1]$. Khi đó dấu của $F'(t)$ cùng dấu với hàm

$$G(t) = 2\int_0^t f(x)dx - f^2(t).$$

Khi đó $\forall t \in [0,1]$,

$$G'(t) = 2f(t) - 2f(t)f'(t) = 2f(t)\left(1 - f'(t)\right) \geq 0,$$

vì $f(t) \geq 0$ và $1 - f'(t) \geq 0$, $\forall t \in [0,1]$. Do đó, $G(t)$ là đơn điệu tăng trên đoạn $[0,1]$. Vì vậy, $G(t) \geq G(0) = 0$, $\forall t \in [0,1]$.
Do đó, $F'(t) \geq 0$, $\forall t \in [0,1]$. Suy ra $F(t)$ là đơn điệu tăng trên đoạn $[0,1]$. Vì vậy, $F(t) \geq F(0) = 0$, $\forall t \in [0,1]$. Ta kết luận điều phải chứng minh.
Cuối cùng, một ví dụ mà đẳng thức xảy ra là hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Bài 5.12. Đặt $\beta = \displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$. Ta chứng minh

$$\int_0^1 (x-\beta)^2 f(x)dx \leq \int_0^1 (x-\alpha)^2 f(x)dx, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy, sử dụng $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 1$ và $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx = \beta$ ta có

$$\int_0^1 (x-\alpha)^2 f(x)dx = \int_0^1 ((x-\beta)+(\beta-\alpha))^2 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 (x-\beta)^2 f(x)dx + (\beta-\alpha)^2 + 2(\beta-\alpha)\beta - 2(\beta-\alpha)\beta$$

$$= \int_0^1 (x-\beta)^2 f(x)dx + (\beta-\alpha)^2 \geq \int_0^1 (x-\beta)^2 f(x)dx.$$

Để ý rằng $(x - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}, \forall x \in [0,1]$. Lấy $\alpha = \frac{1}{2}$ rồi áp dụng kết quả trên ta được

$$\int_0^1 (x-\beta)^2 f(x)dx \leq \int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 f(x)dx \leq \int_0^1 \frac{1}{4} f(x)dx = \frac{1}{4}.$$

Bài 5.13. Hai vế là hàm chẵn nên chỉ cần xét $x \in [0, \frac{\pi}{2})$. Ta có

$$\int_0^x \cos t dt = \sin x \quad , \quad \int_0^x \frac{1}{\cos t} dt = \frac{1}{2} \ln\Big(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\Big)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz về tích phân

$$\Big[\int_0^x f(t)g(t)dt\Big]^2 \leqslant \int_0^x [f(t)]^2 dt \cdot \int_0^x [g(t)]^2 dt$$

với $f(t) = \sqrt{\cos t}$, $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\cos t}}$ ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 5.14. Do $\dfrac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2}$ hội tụ điểm đến $\dfrac{1}{1+x^2}$. Vì vậy, ta muốn thu được đánh giá

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} (\frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2})dx\right| \to 0.$$

Ta tách tích phân trên $[0, +\infty)$ thành trên $[0, \sqrt{n}] \cup [\sqrt{n}; +\infty)$ (thay vì $[0; 1]$ và $[1; +\infty)$. Khi đó ta có

$$\int\limits_0^{+\infty} (\frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2})dx = \int\limits_0^{\sqrt{n}} (\frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2})dx + \int\limits_{\sqrt{n}}^{+\infty} (\frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2})dx = I_n + J_n.$$

Với I_n ta có

$$0 \le \int\limits_0^{\sqrt{n}} \frac{1-e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2} dx \le \int\limits_0^{\sqrt{n}} \frac{1-e^{-\frac{\sqrt{n}}{n}}}{1+x^2} dx = (1-e^{-\frac{\sqrt{n}}{n}}) \arctan \sqrt{n} \to 0.$$

Với J_n ta có

$$0 \le \int\limits_{\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{1-e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2} dx \le \int\limits_{\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi/2 - \arctan \sqrt{n} \to 0.$$

Vậy $I \to \pi/2$

Bài 5.15. Ta có

$$\int_0^x f'(t)dx = f(x) - f(0) = f(x).$$

Suy ra với mọi $x \in (0,1)$:

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t)dt \right| \le \int_0^x |f'(t)|dt = F(x) - F(0), \tag{6.12}$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $|f'(x)|$. Đặt $G(x) = F(x) - F(0)$. Khi đó $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của $|f'(x)|$. Do đó với mọi $x \in (0,1)$ ta có $G'(x) = |f'(x)|$, $G(0) = 0$ và do (6.12), $|f(x)| \le G(x)$. Vậy

$$\int_0^1 |f(x)f'(x)|dx = \int_0^1 |f(x)|G'(x)dx \le \int_0^1 G(x)G'(x)dx. \tag{6.13}$$

Đổi biến $u = G(x)$ ta được

$$\int_0^1 G(x)G'(x)dx = \int_{G(0)}^{G(1)} udu = \frac{1}{2}[G^2(1) - G^2(0)] = \frac{G^2(1)}{2}. \tag{6.14}$$

Lại có $G(1) = F(1) - F(0) = \displaystyle\int_0^1 |f'(x)|dx$. Cuối cùng theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$G^2(1) = \left(\int_0^1 |f'(x)|dx \right)^2 \le \int_0^1 |f'(x)|^2 dx. \tag{6.15}$$

Từ (6.13), (6.14) và (6.15) ta có điều phải chứng minh.

6 Phương trình hàm

Bài 6.1. Cho $x = y = 0$ ta có $f(0) = 0$.
Nếu $\lambda = 1$ thì $f(x)$ là nghiệm của phương trình Cauchy nên ta có $f(x) = f(1)x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Nếu $\lambda = 0$ thì $f(x+y) = 2f(0) = 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Do đó $f(x) \equiv 0$.
Nếu $\lambda = -1$ thì với $y = 0$ ta có $f(x) = f(-x)$. Cho $y = -x$ ta lại có $f(x) = -f(-x)$. Do đó $f(x) \equiv 0$.
Nếu $|\lambda| < 1$ thì với $y = 0$ ta có $f(x) = f(\lambda x) = f(\lambda^2 x) = \cdots = f(\lambda^n x)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$. Vì $|\lambda| < 1$ ta có $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda^n = 0$. Do đó $f(x) \equiv 0$.
Nếu $|\lambda| > 1$ thì với $y = 0$ ta có $f(x) = f(\lambda x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Đặt $\mu = \frac{1}{\lambda}$ và thay x bởi μx ta có $f(\mu x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó $f(x) = f(\mu^n x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x) \equiv 0$.

Bài 6.2. Thay x bởi $f(x)$ ta được: $f(f(f(x))) = -2015f(f(x)) + 2016f(x)$.

Tiếp tục quá trình trên và đặt $x_n = f(f(...f(x))), n$ lần, ta được phương trình sai phân:

$$x_{n+2} = -2015x_{n+1} + 2016x_n.$$

Phương trình đặc trưng là $\lambda^2+2015\lambda-2016 = 0$. Phương trình này có nghiệm $\lambda = 1$ hoặc $\lambda = -2016$. Vậy $x_n = c_1 + c_2(-2016)^n$. Ta có

$$\begin{cases} x_0 = c_1 + c_2 = x \\ x_1 = c_1 - 2016c_2 = f(x) \end{cases}$$

Từ đó ta có $f(x) = x - 2017c_2$ hoặc $f(x) = -2016x + 2017c_1$. Thay vào điều kiện ban đầu ta được $c_2 = 0$ và c_1 tùy ý. Vậy hàm cần tìm là $f(x) = x$ hoặc $f(x) = -2016x + c$, c tùy ý.

Bài 6.3. Ta có

$$f(xf(y) - x) = xy - f(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Thay $x = 1$ trong (1) ta được

$$f(f(y) - 1) = y - f(1) \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

Trong (2), thay $y = 1 + f(1)$, ta được $f(f(1 + f(1)) - 1) = 1$. Đặt

$$f(1 + f(1)) - 1 = a;\ f(0) = b,$$

ta có $f(xf(a) - x) = f(0) = b$, hay

$$b = f(xf(a) - x) = ax - f(x) \Rightarrow f(x) = ax - b.$$

Thay biểu thức của $f(x)$ vào (1), ta có $a^2 = 1;\ b = 0$. Vậy $f(x) = x$ hoặc $f(x) = -x$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 6.4. Giả sử tìm được hàm f thỏa yêu cầu bài toán. Đặt $g(t) = f(t) - t$, ta được

$$g(xy) + g(x - y) + g(x + y + 1) = 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay $y = 0$, ta được

$$g(0) + g(x) + g(x + 1) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (6.16)$$

Thay $y = -1$, ta được

$$g(-x) + g(x + 1) + g(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (6.17)$$

Từ (6.16) và (6.17) ta suy ra

$$g(-x) = g(0),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \text{hay} \quad g(x) = g(0),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $g(x)$ là hàm hằng và

$$0 = g(xy) + g(x-y) + g(x+y+1) = 3g(0) \Rightarrow g(0) = 0.$$

Vì vậy $g(x) = 0$ và do đó $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại ta thấy $f(x) = x$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 6.5. Từ giả thiết ta có

$$f(x) - f(y) = (x-y)g(x+y), \forall x \neq y, \tag{6.18}$$

đẳng thức trên cũng đúng với cả $x = y$. Vì đẳng thức (6.18) đúng với hàm f thì cũng đúng với hàm số $f + c$, với c là hằng số tuỳ ý, nên không mất tính tổng quát ta giả sử $f(0) = 0$. Khi đó cho $y = 0$ vào đẳng thức (6.18) ta được

$$f(x) = xg(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6.19}$$

Khi đó phương trình ban đầu được viết lại dưới dạng

$$xg(x) - yg(y) = (x-y)g(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{6.20}$$

Đẳng thức (6.20) cũng đúng với hàm g thì cũng đúng với hàm $g+c$, c là hằng số tuỳ ý. Do vậy ta có thể giả sử $g(0) = 0$. Cho $x = -y$ vào (6.20) ta nhận được

$$-yg(-y) = yg(y), \forall y \in \mathbb{R} \tag{6.21}$$

Do đó g là hàm lẻ. Khi đó thay y bởi $-y$ trong (6.20) ta có

$$xg(x) - yg(y) = (x+y)g(x-y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{6.22}$$

So sánh với (6.20) ta có

$$(x+y)g(x-y) = (x-y)g(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{6.23}$$

Đến đây, đặt $u = x+y, v = x-y$ và thay vào phương trình (6.23) ta có $ug(v) = vg(u), \forall u, v \in \mathbb{R}$. Do vậy $g(u) = au, a \in \mathbb{R}$ hay các cặp hàm số cần tìm có dạng

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 \\ g(x) &= ax, a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nếu không giả thiết $g(0) = 0$ thì hàm g cần tìm có dạng $g(x) = ax + b$ và $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Bài 6.6. Chọn $x = y = 0$, $f(f(0)) + f(0) = f(0)$. Suy ra $f(f(0)) = 0$. Chọn $x = 0$, $y = f(0)$.

$$2f(0) = f^2(0).$$

Suy ra $f(0) = 0 \quad$ hoặc $\quad f(0) = 2$.
Xét trường hợp $f(0) = 2$. Chọn $y = 1$

$$f(x + f(x + 1)) = x + f(x + 1).$$

Chọn $x = 0$, $y = x + f(x + 1)$.

$$f(x + 1) = 1 - x.$$

Do đó, ta suy ra $f(x) = 2 - x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn yêu cầu bài ra.
Xét trường hợp $f(0) = 0$. Chọn $y = 0$.

$$f(x + f(x)) = x + f(x). \tag{6.24}$$

Chọn $y = 1$.

$$f(x + f(x + 1)) = x + f(x + 1). \tag{6.25}$$

Chọn $y = -x$.

$$f(x) + f(-x^2) = x - xf(x). \tag{6.26}$$

Từ (6.26), ta dễ dàng rút ra được, với $x = -1$, $f(-1) = -1$ và với $x = 1$, $f(1) = 1$ Chọn $x = 1$, $y = x - 1 + f(x)$.

$$f(x + 1 + f(x)) + f(x - 1 + f(x)) = x + 1 + f(x) + x - 1 + f(x).$$

Kết hợp với (6.25), ta có

$$f(x + 1 + f(x)) = x + 1 + f(x) \tag{6.27}$$

Chọn $y = -1$

$$f(x + f(x - 1)) + f(-x) = x + f(x - 1) - f(x).$$

Kết hợp với (6.27), ta có

$$f(-x) = -f(x) \tag{6.28}$$

Thay x bởi $-x$ và $y = x$ vào phương trình hàm ban đầu, ta có

$$f(-x) + f(-x^2) = -x + xf(-x) \tag{6.29}$$

Lấy (6.26) trừ (6.29).

$$f(x) - f(-x) = 2x - xf(-x) - xf(-x).$$

Kết hợp với (6.28), suy ra $f(x) = x$. Thử lại,ta thấy $f(x) = x$ thỏa mãn yêu cầu bài ra. Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu bài ra: $f(x) = x$ và $f(x) = 2-x$.

Bài 6.7. Ta có

$$3[f(2x+1) - (2x+1)] = [f(x) - x] - 3\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

hay $3g(2x+1) = g(x) - 3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (với $g(x) = f(x) - x$). Đặt $h(x) = g(x) + \frac{3}{2}$, ta được

$$h(2x+1) = \frac{1}{3}h(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay x bởi $\dfrac{x-1}{2}$ ta có

$$h(x) = \frac{1}{3}h\left(\frac{x-1}{2}\right)\ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6.30}$$

Áp dụng liên tiếp (6.30) ta có

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{3}h\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{1}{3^2}h\left(\frac{x-1-2}{2^2}\right) = \frac{1}{3^3}h\left(\frac{x-1-2-2^2}{2^3}\right) \\ &= \ldots = \frac{1}{3^n}h\left(\frac{x-1-2-2^2-\ldots-2^{n-1}}{2^n}\right) = \frac{1}{3^n}h\left(\frac{x+1-2^n}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Ta có

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} h(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n}h\left(\frac{x+1-2^n}{2^n}\right) = 0.h(-1) = 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(x) = x - \dfrac{3}{2}\ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 6.8. Cho $x = y = 1$, ta có $f(f(1)) = f(1)$. Từ đó cùng với giả thiết,

$$f(xf(f(1))) = f(xf(1)) = 1.f(x).$$

Mặt khác cũng theo giả thiết $f(xf(f(1))) = f(1)f(x)$. Vì vậy $f(1) = 1$.
Ta có $f(f(y)) = y$. Nếu $f(y) = 1$ thì $y = f(f(y)) = f(1) = 1$. Suy ra

$$f(y) > 1, \quad \forall y > 1.$$

Từ đó $f(\frac{x}{y}) > 1, \forall x > y \geq 1$. Khi đó $\forall x > y \geq 1$,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y}y\right) = f\left(\frac{x}{y}f(f(y))\right) = f(y)f\left(\frac{x}{y}\right) > f(y).$$

Vì vậy f là hàm đồng biến trên $[1,+\infty)$.
Ta sẽ chứng minh rằng $f(x) = x$, $\forall x \in [1,+\infty)$. Thật vậy, giả sử tồn tại $x_0 \in [1,+\infty)$ sao cho $f(x_0) \neq x_0$.
Nếu $f(x_0) > x_0$ thì $f(f(x_0)) > f(x_0)$ hay $x_0 > f(x_0)$. Điều này vô lý.
Nếu $f(x_0) < x_0$ thì $f(f(x_0)) < f(x_0)$ hay $x_0 < f(x_0)$. Điều này vô lý.
Vậy $f(x) = x, \forall x \in [1,+\infty)$. Thử lại, ta thấy $f(x)$ vừa tìm được thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Bài 6.9. Ta chứng minh $f(x) \equiv c$ với $\forall x \in [0,1]$.
Do f liên tục nên $\exists x_1, x_2 \in [0,1]$ sao cho $f(x_1) = \min f(x) = m, f(x_2) = \max f(x) = M$ trên khi $x \in [0,1]$.
Khi đó $2m = 2f(x_1) = f(x_1/2) + f((1+x_1)/2)$. Suy ra $f(x_1/2) = m$.
Cứ như vậy ta được $f(\frac{x_1}{2^n}) = m, \forall n \in \mathbb{N}$. Từ đó sử dụng tính liên tục của f ta có

$$m = f(\lim_{n\to+\infty} \frac{x_1}{2^n}) = f(0).$$

Lập luận tương tự với $f(x_2)$ ta cũng có $M = f(0)$.
Do đó hàm số cần tìm là hàm hằng, $f(x) \equiv c$.

Bài 6.10. Đổi biến $x = 1 - t$ ta được

$$\int_{1/2}^{1} xf(x)\,dx = -\int_{1/2}^{0} (1-t)f(1-t)\,dt = \int_{0}^{1/2} (1-x)f(1-x)\,dx.$$

Do đó

$$\int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^{1/2} \left(xf(x) + (1-x)f(1-x)\right)\,dx. \quad (1)$$

Với $x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ ta có $1 - x \geq x$ nên

$$x = x(f(x)+f(1-x)) \leq xf(x)+(1-x)f(1-x) \leq (1-x)(f(x)+f(1-x)) = 1-x.$$

Lấy tích phân từ 0 đến $\dfrac{1}{2}$ ta nhận được

$$\int_0^{1/2} x\,dx \leq \int_0^{1/2} \left(xf(x) + (1-x)f(1-x)\right)\,dx \leq \int_0^{1/2} (1-x)\,dx. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{1}{8} \leq \int_0^1 xf(x)\,dx \leq \frac{3}{8}. \quad (3)$$

Bất đẳng thức thứ nhất của (3) sẽ trở thành đẳng thức khi và chỉ khi $f(1-x) = 0$ với mọi $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$, kết hợp với giả thiết $f(x) + f(1-x) = 1$ suy ra

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right) \\ 0, & \text{nếu } x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases}.$$

Điều này mâu thuẫn với tính liên tục của f, vậy bất đẳng thức đầu tiên của (3) không thể trở thành đẳng thức. Chứng minh tương tự bất đẳng thức thứ hai của (3) cũng không thể trở thành đẳng thức. Tóm lại ta có

$$\frac{1}{8} < \int_0^1 xf(x)\,dx < \frac{3}{8}.$$

Với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, xét các hàm số

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \in \left[0; \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right), \\ \frac{n+2}{4} - \frac{nx}{2}, & \text{nếu } x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}; \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right), \\ 0, & \text{nếu } x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}; 1\right], \end{cases}$$

và $g_n(x) = 1 - f_n(x)$ với mọi $x \in [0; 1]$.
Các hàm số f_n và g_n thỏa mãn điều kiện đề bài. Mặt khác

$$\int_0^{1/2-1/n} xf_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^2$$

và

$$0 \leq \int_{1/2-1/n}^{1/2+1/n} xf_n(x)\,dx \leq \int_{1/2-1/n}^{1/2+1/n} dx = \frac{2}{n}$$

nên ta có

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 xf_n(x)\,dx = \frac{1}{8}$$

và

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 xg_n(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx - \lim_{n\to\infty} \int_0^1 xf_n(x)\,dx = \frac{3}{8}.$$

Do đó không thể thay $\frac{1}{8}$ bởi số lớn hơn hoặc $\frac{3}{8}$ bởi số nhỏ hơn để kết luận của bài toán vẫn đúng.

Bài 6.11. a) Ánh xạ f tăng nghiêm ngặt. Rõ ràng f liên tục, $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$. Vậy f là song ánh.

b) + Nếu $f(x) = f^{-1}(x)$ thì $f(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$. Do vậy không thể $f(x) > x$ hay $f(x) < x$. Đảo lại hiển nhiên ta có $f(x) = x$ thỏa mãn điều kiện đã cho. Rõ ràng phương trình đã cho tương đương với $f(x) = x$ và ta thu được nghiệm $x = 1$.