TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN TOÁN – LÝ

ĐỀ KIỂM TRA OLP TOÁN 2024-2025
BÀI SỐ 1 - MÔN ĐẠI SỐ

Ngày kiểm tra: 01/03/2025
Thời gian làm bài: **90** phút
Không được sử dụng tài liệu

Câu 1.

a/ Cho các ma trận $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, thỏa mãn $AB = BA$.

Chứng minh rằng $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Nếu bỏ điều kiện $AB = BA$ thì kết luận còn đúng không?

b/ Cho các số thực a_0, d và gọi $a_k = a_0 + kd$, với $k = 1, 2, 3, ..., n$.

Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$. Tính $\det(A)$.

Câu 2.

a/ Cho ma trận $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng $\det(I_n + A^2) \geq 0$.

b/ Cho các ma trận $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $AB = \mathrm{O}_n$.

Chứng minh rằng $\det(I_n + A^{2p} + B^{2q}) \geq 0$, với $p, q \in \mathbb{N}$.

Câu 3.

Tìm n để hệ phương trình tuyến tính sau có 3 nghiệm độc lập tuyến tính

$$\begin{cases} 1^2 x_1 + 2^2 x_2 + 3^2 x_3 + \cdots + n^2 x_n + (n+1)^2 x_{n+1} = 0 \\ 2^2 x_1 + 3^2 x_2 + 4^2 x_3 + \cdots + (n+1)^2 x_n + (n+2)^2 x_{n+1} = 0 \\ 3^2 x_1 + 4^2 x_2 + 5^2 x_3 + \cdots + (n+2)^2 x_n + (n+3)^2 x_{n+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n^2 x_1 + (n+1)^2 x_2 + (n+2)^2 x_3 + \cdots + (2n-1)^2 x_n + (2n)^2 x_{n+1} = 0 \\ (n+1)^2 x_1 + (n+2)^2 x_2 + (n+3)^2 x_3 + \cdots + (2n)^2 x_n + (2n+1)^2 x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Câu 4.

Cho ánh xạ $\varphi : P_2[x] \to P_2[x]$ như sau:

Với $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, ta có:

$$\varphi(p) = (-a_0 + 3a_1 - a_2) + (-3a_0 + 5a_1 - a_2)x + (-3a_0 + 3a_1 + a_2)x^2.$$

a/ Chứng tỏ rằng φ là toán tử tuyến tính; xác định ma trận A tương ứng của φ đối với cơ sở $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$.

b/ Tìm giá trị riêng, véc tơ riêng của A và xét xem A có chéo hóa được hay không? Nếu được, hãy chéo hóa A và tìm ma trận chuyển T cùng với ma trận T^{-1} tương ứng, sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận đường chéo.

c/ Cho $p(x) = 1 - 3x + 2x^2$. Hãy xác định $\varphi^{2025}(p) = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{\text{2025 lần}}(p)$

<u>Câu 5</u>.

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn

$$1+P(x)=\frac{1}{2}[P(x+1)+P(x-1)],\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

TRƯỞNG BỘ MÔN

CAO THANH TÌNH