NHỮNG BÀI TOÁN GIẢI TÍCH CHỌN LỌC

Nhà xuất bản mong bạn đọc
đóng góp ý kiến, phê bình

HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

NHỮNG BÀI TOÁN GIẢI TÍCH CHỌN LỌC

Dùng cho các Nhà trường Quân đội

NHÀ XUẤT BẢN QUÂN ĐỘI NHÂN DÂN
HÀ NỘI - 2005

Biên soạn

TS. TÔ VĂN BAN

MỤC LỤC

Trang

LỜI GIỚI THIỆU

Nhằm góp phần giúp cho sinh viên với một nỗ lực nhất định tiệm cận được tới một số phương pháp luận của toán học, chúng tôi xin ra mắt bạn đọc cuốn "Những bài toán giải tích chọn lọc". Sách là bộ sưu tập những bài tập hay, khá khó, điển hình và rất đa dạng từ các cuộc thi Olympic sinh viên trong nước và quốc tế, từ các cuốn sách của các tác giả nổi tiếng trong và ngoài nước, các tạp chí Americal Mathematical Monthly, Putnam Problem, Delta... với những lời giải đôi khi được cải tiến cùng một số bài tập khác của chúng tôi.

Để khắc phục tình trạng thiếu thời gian nghiêm trọng của sinh viên, chúng tôi đã dẫn ra toàn bộ các lời giải - dẫu rằng chúng tôi không bao giờ khuyên độc giả chỉ đọc những lời giải này. Chúng tôi đã cố gắng trình bày theo ý chủ đạo xuyên suốt: Sách không chỉ giúp độc giả biết được lời giải của bài toán, mà hơn cả, làm thế nào để giải được nó, những suy luận nào tỏ ra "có lý"..., các kết luận, nhận xét từ bài tập đưa ra, những thủ pháp chủ đạo thường dùng để giải bài toán liên quan. Để tiện theo dõi, ở đầu mỗi chương chúng tôi đưa vào phần tóm tắt lý thuyết và ở đầu mỗi mục nhỏ chúng tôi đưa ra những cách giải chính.

Nội dung được phân làm năm chương. Ở chương một chúng ta có thể tìm thấy những bài toán liên quan đến số thực và chuỗi số cũng như nhiều bài toán liên quan đến dãy số. Chương hai gồm những bài liên quan đến sự liên tục của hàm số. Chương ba chứa đựng những kiến thức về đạo hàm cũng như các ứng dụng của nó. Chương bốn dành cho tích phân xác định: các phương pháp lấy tích phân, các bất đẳng thức tích phân, các ứng dụng...Chúng ta sẽ thấy một số kết quả về hàm nhiều biến như giới hạn, liên tục, hàm ẩn, cực trị... ở chương năm.

Hy vọng rằng sách là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên năm đầu ít nhiều có năng khiếu về toán, cho sinh viên các lớp tài năng, cũng như là tài liệu tốt phục vụ các kỳ thi Olympic toán sinh viên. Sách cũng là tài liệu cho học sinh và giáo viên luyện học sinh giỏi ở các trường phổ thông trung học.

Tác giả chân thành cảm ơn Nhà xuất bản, Ban chủ nhiệm Khoa CNTT - Học viện KTQS, Ban Chủ nhiệm Bộ môn Toán Khoa CNTT đã đề ra chủ trương xuất bản và tạo những điều kiện tốt nhất dể tài liệu này có thể nhanh chóng hoàn thành. Đặc biệt tác giả bày tỏ lòng qúy trọng với PGS TS Nguyễn Xuân Viên, TS Nguyễn Thanh Hà, TS Nguyễn Bá Long, CN Tạ Ngọc Ánh, CN Tô Văn Đinh, CN Nguyễn Hồng Nam, CN Phạm Văn Khánh, CN Nguyễn Quốc Tuấn đã đọc toàn bộ hoặc từng phần bản thảo cũng như bản đánh máy.

Tác giả

Trang chẵn bỏ

MỘT SỐ KÝ HIỆU DÙNG TRONG SÁCH

- $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_+^*$ tập các số thực, tập các số thực không âm, tập các số thực dương.
- $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}^*$ tập các số nguyên không âm, tập các số nguyên dương.
- $\mathbf{Z}$ tập các số nguyên $\{0; \pm 1; \pm 2;...\}$.
- $\mathbf{Q}$ tập các số hữu tỉ.
- $\mathbf{C}$ tập các số phức.
- $(a; b)$ khoảng mở $\{x \in \mathbf{R}, a < x < b\}$.
- $[a; b)$ khoảng nửa mở $\{x \in \mathbf{R}, a \le x < b\}$.
- $[a; b]$ đoạn $\{x \in \mathbf{R}, a \le x \le b\}$.
- $[x]$, $E(x)$ phần nguyên của số thực x.
- $\{x\}$ phần phân (lẻ) của số thực x $\{x\} = x - [x]$;
  tập hợp gồm 1 phần tử x
- $n\,!$ giai thừa $n\,! = 1.\,2.\,3...\,n$.
- $n!!$ giai thừa kép $(2n-1)!! = 1.\,3.\,5...\,(2n-1)$;
  $(2n)!! = 2.\,4.\,6...\,(2n)$.
- C_n^k số tổ hợp chập k của n phần tử, chính là hệ số của khai triển Newton:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad 0 \le k \le n,\ k, n \in \mathbf{N}.$$

- Max A(MinA) phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) của tập A.
- Sup A (Inf A) cận trên đúng (cận dưới đúng) của tập A.
- $|x|$ giá trị tuyệt đối của số thực x, modul của số phức x.
- $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ phần thực, phần ảo của số phức z.
- $f(x)$- hàm số; - giá trị của hàm f tại điểm x.
- $f(x)\big|_{x=a}$ - giá trị của hàm f tại điểm x = a.
- $f : A \to B$ - Ánh xạ từ A vào B; - hàm số với tập xác định là A, tập giá trị chứa trong B.
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ giới hạn của dãy số $\{x_n\}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = k$ hay $x_n \to k$ $(n \to \infty)$ dãy x_n dần đến k khi n dần đến ∞.
- $\overline{\lim}\, x_n, \underline{\lim}\, x_n$ giới hạn trên, giới hạn dưới của dãy $\{x_n\}$.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ giới hạn của hàm số f(x) khi x dẫn đến a.
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \left(\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\right)$ giới hạn của hàm số f(x) khi x dần đến a về bên phải (về bên trái).
- $f'(x); \dfrac{df(x)}{dx}$ đạo hàm bậc nhất của hàm f(x).
- $f'_+(x_0)\left(f'_-(x_0)\right)$ đạo hàm phía phải (trái) của hàm f(x) tại x_0.
- $f^{(n)}(x); \dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ đạo hàm bậc n của hàm f(x).
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}, f'_x, \dfrac{\partial f}{\partial y}, f'_y$... các đạo hàm riêng bậc một của hàm nhiều biến.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f''_{xx}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$,... các đạo hàm riêng bậc hai của hàm nhiều biến.
- df , $d^2 f$ ... vi phân cấp một, cấp hai,... của hàm f(x).
- $\|.\|, \|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$ chuẩn, chuẩn tổng các giá trị tuyệt đối, chuẩn Euclide, chuẩn Max trên $\mathbf{R}^n$.
- B(a,r) hình cầu mở tâm a, bán kính r.

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\upsilon}}(a); \dfrac{\partial f}{\partial \upsilon}(a)$ đạo hàm theo hướng véc tơ $\vec{\upsilon} \in \mathbf{R}^2$

- $\int_a^\infty f(x)dx$ tích phân suy rộng loại 1 của hàm f(x) trên $[a;+\infty)$.
- $f(x) = o(g(x))$ f(x) là vô cùng bé bậc cao hơn so với vô cùng bé g(x).
- $f(x) = O(g(x))$ f(x) là vô cùng bé cùng bậc so với vô cùng bé g(x).
- $f(x) \sim g(x)$ $f(x)$ là vô cùng bé tương đương với vô cùng bé g(x).

Chương I

GIỚI HẠN DÃY SỐ

§1.0. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

SỐ THỰC

* Ta nói $x \in \mathbf{R}$ là một cận trên của tập $A \subset \mathbf{R}$ nếu $\forall a \in A$, $a \le x$.

Ta nói $y \in \mathbf{R}$ là một cận dưới của tập $A \subset \mathbf{R}$ nếu $\forall a \in A$, $y \le a$.

Ta nói x là phần tử lớn nhất (hay giá trị lớn nhất) hoặc cận trên đúng của tập A $\subset \mathbf{R}$ nếu: $x \in A, a \le x \quad \forall a \in A$.

Kí hiệu giá trị lớn nhất của tập A là Max (A). Tương tự những điều trên đối với giá trị nhỏ nhất. Giá trị nhỏ nhất của tập A kí hiệu là Min (A).

Tập $A \subset \mathbf{R}$ được gọi là bị chặn trên nếu A có ít nhất 1 cận trên; được gọi là bị chặn dưới nếu A có ít nhất 1 cận dưới. $A \subset \mathbf{R}$ được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới.

* Phần tử bé nhất trong các cận trên của $A \subset \mathbf{R}$, nếu tồn tại, được gọi là cận trên đúng của A, kí hiệu là Sup (A).

Phần tử lớn nhất trong các cận dưới của $A \subset \mathbf{R}$, nếu tồn tại, được gọi là cận dưới đúng của A, kí hiệu là Inf(A).

Tiên đề về cận trên đúng.

Mọi tập con không rỗng và bị chặn trên của $\mathbf{R}$ đều có cận trên đúng.

Tiên đề trên tương đương với: Mọi tập con không rỗng và bị chặn dưới của $\mathbf{R}$ đều có cận dưới đúng.

* Nếu A không bị chặn trên, ta quy ước viết Sup(A) = + ∞; nếu A không bị chặn dưới, ta quy ước viết Inf(A) = - ∞.

* Cho $A \subset \mathbf{R}$ là tập con không rỗng. Khi đó:

$$M = \mathrm{Sup}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} + M \text{ là một cận trên của A;} \\ + \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, M - \varepsilon < a \le M. \end{cases}$$

* Căn bậc n của số dương. $\forall a \in \mathbf{R}_+$, $\forall n$ nguyên dương, tồn tại duy nhất

$b \in \mathbf{R}_+$ sao cho $b^n = a$. Phần tử b này được kí hiệu bởi $\sqrt[n]{a}$ hay $a^{1/n}$ và gọi là căn bậc n của a. Với n = 2, ta kí hiệu $\sqrt{a}$ thay cho $\sqrt[2]{a}$.

* Tính chất Archimede. R có tính chất Archimede, cụ thể là:

$$\forall \varepsilon > 0;\ \forall A > 0,\ \exists n \in \mathbf{N}^*: n\varepsilon > A.$$

* Phần nguyên. Với mọi $x \in \mathbf{R}$, tồn tại duy nhất số nguyên $n \in \mathbf{Z}$ sao cho $n \le x < n + 1$. Số nguyên như vậy được gọi là phần nguyên của x, kí hiệu [x], hoặc E(x).

* Cho 2 tập số thực A, B, hơn nữa $A \subset B$. Ta nói tập A là trù mật trong tập B nếu $\forall b \in B,\ \forall \varepsilon > 0; \exists a \in A: b - \varepsilon < a < b + \varepsilon$.

* Tập các số hữu tỉ $\mathbf{Q}$ trù mật trong $\mathbf{R}$.

* Tập các số vô tỉ $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ trù mật trong $\mathbf{R}$.

* Khoảng mở rộng. Cho $a, b \in \mathbf{R}$, a < b. Có 9 loại khoảng: [a;b]; [a;b); (a;b]; (a;b); $(-\infty;a]$; $(-\infty; a)$; $[a; +\infty)$; $(a; +\infty)$; $(-\infty; +\infty)$, được gọi chung là các khoảng mở rộng; 4 loại đầu được gọi là bị chặn; a (b) được gọi là mút của khoảng.

DÃY SỐ

* Dãy $\{u_n\}$ được gọi là hội tụ đến λ (hay có giới hạn λ) nếu với mọi số $\varepsilon > 0$, tồn tại $N \in \mathbf{N}$ sao cho $|u_n - \lambda| < \varepsilon,\quad \forall n > N$.

Khi đó ta viết $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lambda$ hay $u_n \to \lambda$ $(n \to \infty)$.

* Ta nói $\{u_n\}$ là dãy hội tụ nếu tồn tại $\lambda \in \mathbf{R}$ để $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lambda$. Ta nói $\{u_n\}$ phân kì nếu nó không hội tụ.

* Ta nói $\{u_n\}$ tiến đến $+\infty$ (hay $\{u_n\}$ dần ra $+\infty$, hay $\{u_n\}$ nhận $+\infty$ làm giới hạn) nếu

$$\forall L > 0;\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n > N,\ u_n \ge L.$$

Khi đó ta viết $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ hoặc $u_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$.

* Ta nói $\{u_n\}$ tiến đến ∞ (hay $\{u_n\}$ có giới hạn ∞,...) và viết $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ nếu:

$$\forall L > 0;\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n > N, |u_n| \ge A.$$

* Tính chất về thứ tự của giới hạn.

+ Nếu $a_n \le b_n$ với $n \ge n_0$ nào đó, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ thì $a \le b$.

+ Định lý kẹp. Cho $\{u_n\},\{v_n\},\{w_n\}$ là 3 dãy. Nếu từ một chỉ số N nào đó trở đi xảy ra bất đẳng thức

$$u_n \le w_n \le v_n$$

còn $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ hội tụ đến cùng một giới hạn λ. Khi đó $\{w_n\}$ cũng hội tụ đến λ.

* Các tính chất của dãy hội tụ.

$\{u_n\}$, $\{v_n\}$ là 2 dãy; r, λ, λ' là 3 số thực. Ta có:

1. $u_n \to \lambda (n \to \infty) \Rightarrow |u_n| \to |\lambda| \quad (n \to \infty)$.

2. $u_n \to 0 \ (n \to \infty) \Rightarrow |u_n| \to 0 \quad (n \to \infty)$.

3. $\begin{cases} u_n \to \lambda \\ v_n \to \lambda' \ (n \to \infty) \end{cases} \Rightarrow u_n \pm v_n \to \lambda \pm \lambda' (n \to \infty)$.

4. $u_n \to \lambda \ (n \to \infty) \Rightarrow \lambda u_n \to \lambda\lambda \quad (n \to \infty)$.

5. $\begin{cases} u_n \to 0 \ (n \to \infty) \\ \{v_n\} \text{ bi cn} \end{cases} \Rightarrow u_n v_n \to 0 \quad (n \to \infty)$.

6. $\begin{cases} u_n \to \lambda \\ v_n \to \lambda' (n \to \infty) \end{cases} \Rightarrow u_n v_n \to \lambda\lambda' (n \to \infty)$.

7. $u_n \to \lambda \ne 0 \ (n \to \infty) \Rightarrow \{1/u_n\}$ được xác định từ một chỉ số N nào đó và $1/u_n \to 1/\lambda$ ($n \to \infty$).

8. $u_n \to \lambda$; $v_n \to \lambda' \ne 0$ ($n \to \infty$) $\Rightarrow \{u_n/v_n\}$ được xác định từ một chỉ số N nào đó và $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{\lambda}{\lambda'}$.

* Sự hội tụ của dãy đơn điệu.

$\{u_n\}$ được gọi là dãy tăng (giảm) nếu $u_{n+1} \ge u_n$ ($u_{n+1} \le u_n$) với mọi n.

$\{u_n\}$ được gọi là tăng (giảm) thực sự nếu $u_{n+1} > u_n$ ($u_{n+1} < u_n$) với mọi n.

Dãy tăng hoặc giảm gọi chung là dãy đơn điệu.

Dãy tăng (giảm), bị chặn trên (dưới) thì hội tụ.

Dãy tăng, không bị chặn trên thì dần ra $+\infty$.

* Dãy kề nhau.

Hai dãy $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ được gọi là kề nhau nếu $\{u_n\}$ tăng, $\{v_n\}$ giảm và

$$v_n - u_n \to 0 \ (n \to \infty).$$

Hai dãy $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ kề nhau thì chúng hội tụ đến cùng một giới hạn λ. Hơn nữa

$$u_n \le u_{n+1} \le \lambda \le v_{n+1} \le v_n \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

* Dãy con.

Cho dãy $\{u_n\}$: u_1, u_2, u_3 ... Dãy $\{u_{n_k}\}$ với các chỉ số thoả mãn: $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ được gọi là 1 dãy con trích ra từ dãy $\{u_n\}$.

* Nếu $\{u_n\}$ có giới hạn λ thì mọi dãy con trích ra từ đó cũng có giới hạn λ .

* Cho $\{u_n\}$ là một dãy, $\lambda \in \mathbf{R}$. Khi đó $u_n \to \lambda (n \to \infty)$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n} = \lambda$ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = \lambda$.

Có thể mở rộng định lý này bằng cách tách dãy $\{u_n\}$ thành hai hoặc k dãy con rời nhau.

* Bổ đề Bolzano - Weierstrass. Từ một dãy số thực bị chặn luôn có thể trích ra một dãy con hội tụ.

* Nếu từ dãy $\{x_n\}$ có thể trích ra một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ đến giới hạn a $\in \mathbf{R}$ thì a được gọi là điểm giới hạn của dãy đã cho.

* Giới hạn trên, giới hạn dưới.

$\{u_n\}$ là dãy số. $\{u_{n_k}\}$ là một dãy con của nó thoả mãn

- $\exists \lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = \lambda$;

- Đối với mọi dãy con $\{u_{m_k}\}$ khác mà $\exists \lim\limits_{k\to\infty} u_{m_k} = \lambda'$ thì $\lambda' \le \lambda$.

Khi đó λ được gọi là giới hạn trên của dãy $\{u_n\}$, kí hiệu $\overline{\lim}\, u_n$.

Tương tự ý nghĩa cho $\underline{\lim}\, u_n$. Ta có:

a) Luôn tồn tại $\overline{\lim}\, u_n \le +\infty$; hơn nữa nếu $\{u_n\}$ không bị chặn trên thì $\overline{\lim}\, u_n = +\infty$.

b) Nếu $\{u_n\}$ bị chặn trên bởi M thì $\overline{\lim}\, u_n \le M$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lambda \Leftrightarrow \overline{\lim}\, u_n = \underline{\lim}\, u_n = \lambda$.

* Dãy Cauchy. Dãy $\{u_n\}$ được gọi là dãy Cauchy nếu $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}^*$, $\forall$ m, n > N: $|x_n - x_m| \le \varepsilon$.

* $\{u_n\}$ là dãy Cauchy

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*, \forall\, n > N: \left|x_n - x_{n+p}\right| \le \varepsilon, \forall p \ge 0.$

* Dãy $\{u_n\}$ là dãy Cauchy khi và chỉ khi nó hội tụ.

* Dãy $\{a_n\}$ được gọi là vô cùng bé so với dãy $\{b_n\}$, viết $a_n = o\,(b_n)$ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

* Dãy $\{a_n\}$ được gọi là cùng bậc với dãy $\{b_n\}$, viết $a_n = O\,(b_n)$ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k \neq 0$.

* Dãy $\{a_n\}$ được gọi là tương đương với $\{b_n\}$, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, viết $a_n \sim b_n$.

* Một số giới hạn đặc biệt

+ $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \to e \qquad (n\to\infty);$

+ $\sqrt[n]{a} \to 1 \qquad (n\to\infty)\,(a > 0);$

+ $1 + 1 + \dfrac{1}{2\,!} + \ldots + \dfrac{1}{n\,!} \to e \qquad (n\to\infty);$

+ $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} \to +\infty \qquad (n\to\infty);$

+ $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} \to \dfrac{\pi^2}{6} \qquad (n\to\infty).$

CHUỖI SỐ

* Cho $\{u_n\}$ là một dãy số. Tổng hình thức $u_1 + u_2 + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là một chuỗi số.

$u_1, u_2, \ldots$: các số hạng; u_n: số hạng thứ n hay số hạng tổng quát.

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$: tổng riêng thứ n.

Nếu tồn tại gới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ ta nói chuỗi hội tụ, có tổng S và viết $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Trái lại, ta nói chuỗi phân kì.

* Chuỗi phần dư. $R_n = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} u_i$ được gọi là phần dư thứ n của chuỗi. Chuỗi hội tụ khi và chỉ khi R_n hữu hạn và $R_n \to 0\ (n\to\infty)$.

* Sự hội tụ hay phân kì của chuỗi không thay đổi khi ta thêm, hoặc bớt, hoặc thay đổi một số hữu hạn số hạng của chuỗi.

* Nếu các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì các chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a u_n)\,(\forall a \in \mathbf{R}),\ \sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$$

cũng hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty} a\, u_n = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n;\ \sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

* Tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ của chuỗi số. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p \geq N, \forall q > 0: \qquad \left|S_{p+q} - S_p\right| = \left|\sum_{n=p+1}^{p+q} u_n\right| \leq \varepsilon.$$

* Khi $a_n \geq 0\ \forall n$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là chuỗi số dương.

* Chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ khi và chỉ khi dãy tổng riêng $\{S_n\}$ bị chặn.

* Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sao cho $0 \leq u_n \leq v_n$. Khi đó

+ Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ;

+ Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kì.

* Nếu $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = k \in (0; +\infty)$ thì hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

* Tiêu chuẩn D'Alembert. Giả sử đối với chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$.

Nếu $\lambda < 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ; $\lambda > 1$ thì chuỗi phân kì.

* Tiêu chuẩn Cauchy. Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sao cho $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$.

Nếu $\lambda < 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ; $\lambda > 1$ thì chuỗi phân kì.

* Tiêu chuẩn tích phân. Cho hàm f(x) liên tục, không âm, đơn điệu giảm trên $[a;+\infty)$. Khi đó tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và tổng $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với u_n = f(n) cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

§1.1. SỐ THỰC

Bài 1.1.1. Tìm Inf, Sup, Min, Max (nếu có) của các tập:

a) $A = \{[x] + [1/x] : x > 0\}$;

b) $B = \left\{\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n} : \quad n \in \mathbf{N}^*\right\}$;

c) $C = \left\{\frac{1+(-1)^n}{n} - n^2 : n \in \mathbf{N}^*\right\}$;

d) $D = \left\{\frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3} : n \in \mathbf{N}^*\right\}$;

e) $E = \{2^x + 2^{1/x} : x > 0\}$

Giải.

a) Từ chỗ $x\frac{1}{x} = 1$ suy ra $x \geq 1$ hoặc $\frac{1}{x} \geq 1$. Vậy $[x] \geq 1$ hoặc $\left[\frac{1}{x}\right] \geq 1$, từ đó $[x] + \left[\frac{1}{x}\right] \geq 1$.

Mặt khác $\left[\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] = 1$.

Vậy $\text{Inf}\, A = \text{Min}A = 1$, đạt được tại, chẳng hạn, x = 3/2.

Chúng ta cũng có thể xét hàm $f(x)=[x]+\left[\frac{1}{x}\right]$ trên các tập $\left(0;\frac{1}{2}\right]; \left(\frac{1}{2};2\right)\setminus\{1\}; \{1\}; [2;+\infty]$ rồi suy ra kết luận.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên SupA = + ∞.

b) Đặt $u_n = \frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{n}$. Với $k \in \mathbf{N}^*$ ta có:

+ $u_{2k} = \frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{2k} \le \frac{3}{4} = u_2$.

+ $u_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}} - \frac{1}{2k+1} \le \frac{1}{2^{2k+1}} \le \frac{1}{8}$;

$u_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}} - \frac{1}{2k+1} \ge -\frac{1}{2k+1} \ge -\frac{1}{3} \ge u_1 = -\frac{1}{2}$.

Vậy $\text{InfB} = \text{MinB} = u_1 = -\frac{1}{2}$; $\text{SupB} = \text{MaxB} = u_2 = \frac{3}{4}$.

c) Đặt $u_n = \frac{1+(-1)^n}{n} - n^2$, $n \in \mathbf{N}^*$.

+ $u_n < \frac{2}{n} - n^2 \le 2 - n^2$, vậy B không bị chặn dưới.

+ $u_1 = -1$.

+ $u_n \le 2-n^2 \le 2-4=-2$ với n = 2, 3, ...

Vậy $\text{Inf}\,B = -\infty$; $\text{Sup}\,B = \text{Max}\,B = u_1 = -1$.

d) Với k = 0, 1, 2, ... ta có

+ $0 \ge u_{3k+1} = -\frac{3k}{2(3k+2)} = -\frac{1}{2\left(1+\frac{2}{3k}\right)} \downarrow -\frac{1}{2}\ (k\to\infty)$.

+ $0 \ge u_{3k+2} = -\frac{3k+1}{2(3k+3)} = -\frac{1}{2\left(1+\frac{2}{3k+1}\right)} \downarrow -\frac{1}{2}\ (k\to\infty)$.

+ $0 < u_{3k+3} = \frac{3k+2}{3k+4} = \frac{1}{1+\frac{2}{3k+2}} \uparrow 1\ (k\to\infty)$.

Vậy $\text{InfD} = -\frac{1}{2}$; $\text{SupD} = 1$.

e) Ta có $2^x + 2^{1/x} \geq 2\sqrt{2^{x+(1/x)}} \geq 2\sqrt{2^2} = 4$;

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = 1/x hay x = 1.

Vậy $\text{InfE} = \text{MinE} = 4$, đạt được tại x = 1.

+ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2^x + 2^{1/x}\right) = +\infty$, vậy $\text{SupE} = +\infty$.

Bài 1.1.2. Cho A, B là hai tập con khác trống trong **R**, kí hiệu:

$-A = \{x : -x \in A\}$;

$A + B = \{x + y : x \in A ; y \in B\}$;

$A - B = \{x - y : x \in A ; y \in B\}$.

Chứng minh rằng

a) $\text{Inf}(-A) = -\text{SupA}$; $\text{Sup}(-A) = -\text{InfA}$;

b) $\text{Sup}(A + B) = \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B)$;

c) $\text{Sup}(A - B) = \text{Sup}(A) - \text{Inf}(B)$.

Giải.

a) Giả sử A bị chặn trên, đặt M = SupA. Với mọi $x \in (-A)$ thì $-x \in A$ nên $-x \leq M$

hay $-M \leq x$; vậy $-M$ là một cận dưới của (-A).

Cho n là một cận dưới của $(-A)$: $\forall a \in A,\ n \leq -a$. Suy ra $a < -n$, thế thì $-n$ là một cận trên của A. Vậy $M \leq -n$ hay $n \leq -M$. Suy ra $-M$ là cận dưới bé nhất của (-A).

Nếu A không bị chặn trên: $\text{SupA} = +\infty$, dễ thấy (-A) không bị chặn dưới hay $\text{Inf}(-A) = -\infty$

Tương tự, Sup(-A) = -InfA ; (a) được chứng minh.

b) Giả sử cả A và B đều bị chặn trên đặt M = SupA; N = SupB. Lấy $c \in A + B$; tồn tại $a \in A; b \in B$ để c = a + b, suy ra $c \leq M + N$. Điều này chứng tỏ M + N là một cận trên của A + B.

Hơn nữa, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $x \in A; y \in B$ sao cho $M - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq M$; $N - \frac{\varepsilon}{2} < y \leq N$ do đó $M + N - \varepsilon < x + y \leq M + N$. Vì $x + y \in A + B$, từ định nghĩa suy ra $M + N = \text{Sup}(A + B)$.

Nếu A hoặc B (hoặc cả hai) không bị chặn trên thì A + B cũng không bị chặn trên. Từ định nghĩa ta suy ra $\text{Sup}(A + B) = \infty = \text{SupA} + \text{SupB}$.

c) Đẳng thức (c) là hệ quả của (a) và (b). Thật vậy,

Sup(A-B) = Sup (A+(-B)) = SupA + Sup(-B) = SupA - InfB.

Lưu ý. Lập luận tương tự như trên ta còn chứng minh được:

+ Inf(A+B) = InfA + InfB;

+ Inf(A-B) = InfA - SupB;

+ Với $A \subset \mathbf{R}_+^*$; $\mathrm{Inf}\left(A^{-1}\right) = 1/\mathrm{Sup}(A)$ ...

Bài 1.1.3. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng

$S = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ với điều kiện $\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$.

Giải. Theo bất đẳng thức Bunhiacopski ta có

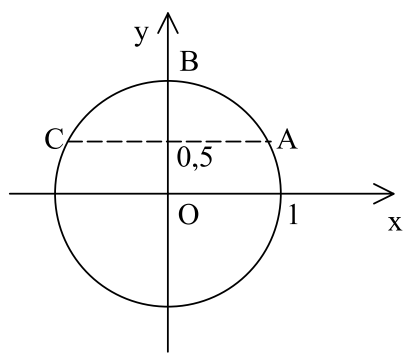
$$S = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \frac{1}{n}.$$

Đẳng thức xảy ra với $a_k = 1/n$, k = 1, 2, ..., n. Do đó giá trị nhỏ nhất cần tìm là 1/n.

Bài 1.1.4. Chứng minh rằng tập $\{n \sin n : \ n \in \mathbf{N}\}$ không bị chặn.

Giải. Với L > 0 tùy ý, đặt N = [2L] + 1.

N là một số nguyên, $N \geq 2L+1$. Xét 7 số nguyên liên tiếp N, N + 1, ..., N + 7.



Khi thể hiện góc lượng giác của 7 số nguyên này lên vòng tròn đơn vị, có ít nhất một điểm nằm trên cung AC (vì độ dài cung AC bằng $2\pi/3 > 1$).

Vậy có ít nhất một trong 7 số nói trên có sin lớn hơn 1/2, chẳng hạn đó là $N_0 = N + i \ (i \in \{0;1;...;7\})$. Từ đó

$$N_0 \sin N_0 > N_0 \frac{1}{2} > L.$$

Vậy tập đã cho không bị chặn trên. Tương tự, tập đó cũng không bị chặn dưới.

Bài 1.1.5. Chứng minh rằng khi bỏ đi một tập hữu hạn từ một tập trù mật trong $\mathbb{R}$ ta được một tập vẫn còn trù mật trong $\mathbb{R}$.

Giải. Giả sử tập D trù mật trong $\mathbb{R}$ và F là tập con gồm hữu hạn phần tử của D. Xét x, y tùy ý của $\mathbb{R}$ với x < y. vì D trù mật trong $\mathbb{R}$ nên có vô số phần tử của D trên khoảng (x;y). Vì F hữu hạn nên sau khi bỏ đi F, ta vẫn còn ít nhất một phần tử của D trên (x;y) (đpcm).

Bài 1.1.6. Kí hiệu $E = \{q^2 : q \in \mathbb{Q}\}$ và $D = E \cup \{-E\}$.

Chứng minh rằng D trù mật trong $\mathbb{R}$.

Giải. Cho hai số thực x, y: $x < y$.

* Nếu $x \ge 0$ thì $\sqrt{x} \le \sqrt{y}$. Do $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$, tồn tại $q \in \mathbb{Q}$ sao cho $\sqrt{x} < q < \sqrt{y}$, từ đó $x < q^2 < y$, trong đó $q^2 \in D$.

* Nếu $y \le 0$ thì $\sqrt{-y} < \sqrt{-x}$; tồn tại $q \in \mathbb{Q}$ sao cho $\sqrt{-y} < q < \sqrt{-x}$, từ đó $x < -q^2 < y$ trong đó $-q^2 \in D$.

* Nếu x < 0 và y > 0, ta có thể chọn q = 0.

Tóm lại, D là tập trù mật trong $\mathbb{R}$.

Bài 1.1.7. Chứng minh rằng $\sqrt{2}\,; \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ là các số vô tỉ.

Giải.

a) Giả sử có hai số nguyên dương m, n sao cho ƯCLN (m, n) = 1 và $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$ hay $m^2 = 2n^2$.

Suy ra $m^2 \,\vdots\, 2$, do đó $m \,\vdots\, 2$. Vậy $n^2 = \frac{m^2}{2} \,\vdots\, 2$, suy ra $n \,\vdots\, 2$.

Vậy m và n nhận 2 làm một ước chung, mâu thuẫn.

Có thể nhận được mâu thuẫn bằng cách khác. Từ chỗ $m^2 = 2n^2$ suy ra

$$n^2 = m^2 - n^2 \,\vdots\, (m-n)(m+n). \qquad (*)$$

Mặt khác, do ƯCLN(m,n) = 1 nên

ƯCLN (n; m-n) = ƯCLN (n; m + n) = 1 mâu thuẫn với (*).

b) Lí luận tương tự như phần (a) ta được $\sqrt{6}$ là số vô tỉ. Giả sử $q = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, ta có $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = \left(q - \sqrt{6}\right)^2 \Leftrightarrow q^2 + 1 = 2(q+1)\sqrt{6}$.

Vế trái là số hữu tỉ, vế phải là số vô tỉ, mâu thuẫn.

Bài 1.1.8.

a) Chứng minh rằng mỗi tập con vô hạn của một tập đếm được là một tập đếm được.

b) Chứng minh rằng hợp của hai tập đếm được là một tập đếm được.

Giải.

a) Cho E là một tập đếm được và F là tập con vô hạn của E. Tồn tại một song ánh $f: E \to \mathbb{N}$. Vì ánh xạ $g = f|_F \to f(F)$ xác định bởi $g(x) = f(x) \quad \forall x \in F$ là một song ánh nên ta chỉ cần chứng minh f(F) đếm được. Xây dựng ánh xạ $\varphi: \mathbb{N} \to f(F)$ như sau:

$\varphi(0) = \operatorname{Min} f(F)$;

$\varphi(1) = \operatorname{Min}\left(f(F) \setminus \{\varphi(0)\}\right)$;

$\varphi(n) = \operatorname{Min}\left(f(F) \setminus \{\varphi(0), \ldots, \varphi(n-1)\}\right) \ldots$

Dễ thấy φ là một ánh xạ và là một song ánh. Từ đó f(F) đếm được và ta nhận được đpcm.

b) Giả sử E, F là hai tập đếm được bất kì.

Trường hợp 1: $E \cap F = \varnothing$. Tồn tại hai song ánh $f: \mathbb{N} \to E$ và $g: \mathbb{N} \to F$. Dễ kiểm chứng rằng ánh xạ $h: \mathbb{N} \to E \cup F$ xác định bởi

$$h(n) = \begin{cases} f(n/2) \text{ nếu n chẵn;} \\ g((n+1)/2) \text{ nếu n lẻ} \end{cases}$$

là một song ánh. Vậy $E \cup F$ là tập đếm được.

Trường hợp 2: $E \cap F \neq \varnothing$. Xét $E' = E \times \{0\}$ và $F' = F \times \{1\}$; chúng đều là những tập đếm được và không giao nhau. Theo trường hợp 1, $E' \cup F'$ là tập đếm được.

Mặt khác, đặt $G = (E \times \{0\}) \cup \{(x,1): x \in F \ \& \ x \overline{\in} E\}$.

Đây là tập vô hạn, được chứa trong tập đếm được $E' \cup F'$ nên nó là tập đếm được.

Xây dựng ánh xạ $\varphi: E \cup F \to G$ như sau:

$$\forall x \in E \cup F,\ \varphi(x) = \begin{cases} (x,0) \text{ nếu } x \in E\,; \\ (x,1) \text{ nếu } x \in F \text{ và } x \notin E\,. \end{cases}$$

Rõ ràng φ là một song ánh. G đếm được nên $E \cup F$ cũng đếm được. Tóm lại ta luôn có $E \cup F$ là tập đếm được.

Lưu ý. Với trường hợp 2, khi $E \cap F \neq \varnothing$ ta còn có thể chứng minh như sau:

Ta có $E \cup F = E \cup (F \setminus (E \cap F)) = E \cup H$ với $H = F \setminus (E \cap F)$.

Rõ ràng $H \cap E = \varnothing$ và H là tập con của F.

+ Nếu H gồm vô hạn phần tử, theo (a) H đếm được; theo trường hợp 1, $H \cup E$ đếm được.

+ Giả sử $H = \{h_1, ..., h_n\}$. Gọi $f: \mathbf{N}^* \to E$ là song ánh từ $\mathbf{N}^*$ lên E. Xét $g: \mathbf{N}^* \to E \cup H$ xác định bởi:

$g(1) = h_1, ..., g(n) = h_n,\ g(n+1) = f(1), g(n+2) = f(2), ...$

Rõ ràng g là song ánh, vậy $E \cup H$ đếm được.

Bài 1.1.9. Chứng tỏ rằng ánh xạ $f: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}^*$ xác định bởi:

$$f(m,n) = (2m+1)2^n$$

là một song ánh.

Suy ra rằng $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$; $\mathbf{Z}^2$; $\mathbf{Q}$ đều là những tập đếm được.

Giải.

* Cho $N \in \mathbf{N}^*$, tồn tại (duy nhất) $n \in \mathbf{N}$ sao cho $N \,\vdots\, 2^n$ và $N \not\vdots\, 2^{n+1}$.

Đặt $p = N/2^n$ thì p là một số nguyên lẻ, do đó $p = 2m+1$. Vậy $N = p2^n = (2m+1)2^n$, suy ra f là ánh xạ lên.

Nếu $N \in \mathbf{N}^*$ và $N = (2m+1)2^n$ thì n là số mũ của 2 trong dạng phân tích của N ra thừa số nguyên tố, suy ra tính duy nhất của n rồi của m.

Vậy f là đơn ánh, từ đó f là song ánh.

* Ánh xạ h: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}^*$ với $h(n) = n+1$ là song ánh, vậy $\mathbf{N}^*$ đếm được, theo điều đã chứng minh suy ra $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ đếm được.

* Vì $\mathbf{Z}^2 = \mathbf{N}^2 \cup (\mathbf{N} \times (-\mathbf{N})) \cup ((-\mathbf{N}) \times \mathbf{N}) \cup ((-\mathbf{N}) \times (-\mathbf{N}))$, suy ra tập $\mathbf{Z}^2$ đếm được.

* Từ chỗ $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Z}^2$ suy ra tập $\mathbf{Q}$ đếm được.

§1.2. TÌM GIỚI HẠN THEO ĐỊNH NGHĨA

+ Điều quan trọng là ta phải làm trội $|u_n - \lambda|$ bởi g(n) nào đó sao cho dễ giải được bất đẳng thức g(n) < ε, hoặc dễ chỉ ra nó nghiệm đúng với n > N nào đó.

+ Có thể ta làm trội $|u_n - \lambda|$ bởi tổng h(n) + k(n) rồi giải riêng

$$h(n) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ với } n > N_1,$$

$$k(n) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ với } n > N_2.$$

Khi đó với $N = \max(N_1, N_2)$ thì $|u_n - \lambda| < \varepsilon$.

Các kiến thức về bất đẳng thức luôn cần thiết.

Bài 1.2.1.

a) Chứng minh rằng nếu

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \text{ thì } \lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} = a.$$

b) Chứng minh rằng nếu

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a; \quad u_n > 0 \text{ thì } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{u_1} + \ldots + \frac{1}{u_n}} = a.$$

c) Chứng minh rằng nếu

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \text{ thì } \lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} = +\infty.$$

Giải. Đây là hệ quả của định lý Toeplitz. Tuy nhiên ta có thể chứng minh chúng sơ cấp hơn như sau.

a) Vì dãy $\{u_n\}$ có giới hạn nên bị chặn, vậy có số M để $|u_n| \le M, \ \forall n$. Hơn nữa với $\varepsilon > 0$, $\exists N_1$ để $\forall n > N_1$, $|u_n - a| < \varepsilon/2$. $\forall n > N_1$ ta có

$$\left|\frac{1}{n}\left(u_1 + \ldots + u_{N_1} + u_{N_1+1} + \ldots + u_n\right) - a\right| \le$$

$$\le \frac{\left|(u_1 - a) + \ldots + (u_{N_1} - a)\right|}{n} + \frac{\left|u_{N_1+1} - a\right| + \ldots + \left|u_n - a\right|}{n}$$

$$\le \frac{(M+|a|)N_1}{n} + \frac{\varepsilon}{2}\ \frac{n-N_1}{n}$$

Với $n > N_2 = \left[\frac{2(M+|a|)N_1}{\varepsilon}\right]$ thì $\frac{(M+|a|)N_1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Chọn N = max(N_1, N_2) thì với n > N xảy ra:

$$\left|(u_1 + \ldots + u_n)/n - a\right| < \varepsilon.$$

c) Chỉ cần xét trường hợp khi $u_n \ge 0\ \forall n$. Với L > 0 tùy ý cho trước, có số nguyên N_1 để $\forall n > N_1$ thì $u_n > 2L$. Với $n > N_1$, ta có:

$$\frac{1}{n}\left(u_1 + \ldots + u_{N_1} + u_{N_1+1} + \ldots + u_n\right) \ \ge\ \frac{u_{N_1+1} + \ldots + u_n}{n}$$

$$> \frac{(2L) + \ldots + (2L)}{n} = \frac{2L(n-N_1)}{n}.$$

Chọn N = $2N_1$, $\forall n > N$ ta có:

$$\frac{2L(n-N_1)}{n} > 2L\frac{1}{2} = L.$$

b) Xét $v_n = \frac{1}{u_n}$. Nếu $a \ne 0$ thì

$\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{a} \in \mathbf{R}$. Theo phần a,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{u_1} + \ldots + \frac{1}{u_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(v_1 + \ldots + v_n)/n} = \frac{1}{1/a} = a.$$

Nếu a = 0 thì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$. Theo phần c

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{u_1} + \ldots + \frac{1}{u_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(v_1 + \ldots + v_n)/n} = 0$$

Bài 1.2.2. Cho dãy $\{x_n\}$ thoả mãn điều kiện

$0 \le x_{n+m} \le x_n + x_m, \forall m, n$. Chứng minh rằng dãy $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$ hội tụ.

Giải.

$\left\{\frac{x_n}{n}, n = 1,2,\ldots\right\}$ là tập bị chặn dưới bởi 0. Đặt $\alpha = \mathrm{Inf}\left\{\frac{x_n}{n}, n = 1,2,\ldots\right\}$. Ta sẽ chứng minh $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n/n)$.

Với $\varepsilon > 0$ cho trước, theo tính chất của Inf, $\exists$ m sao cho $\alpha \le \frac{x_m}{m} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$. Với n là số tự nhiên bất kì, chia n cho m được $n = qm + r$ với q, r là hai số nguyên sao cho $0 \le r \le m-1$. Khi đó

$$x_n = x_{qm+r} \le x_m + ... + x_m + x_r = qx_m + x_r$$

(coi $x_0 = 0$). Thế thì $\alpha \le \frac{x_n}{n} \le \frac{qx_m + x_r}{qm+r} = \frac{x_m}{m}\frac{qm}{qm+r} + \frac{x_r}{n} \le \alpha + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{x_r}{n}$.

Với $0 \le r \le m - 1$ thì $x_r \le \max\{x_1, ..., x_{m-1}\} = c$.

Với $n > \frac{2c}{\varepsilon}$ ta có $0 \le \frac{x_r}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Khi đó

$$\alpha \le \frac{x_n}{n} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \alpha + \varepsilon.$$

Suy ra $$\lim_{n\to\infty}(x_n/n) = \alpha.$$

Bài 1.2.3. Cho dãy $\{u_n\}$ thoả mãn:

$u_n \ge 1;\ u_{p+q} \le u_p u_q,\ \forall p, q \in \mathbf{N}^*$. Chứng minh rằng dãy $v_n = \frac{\ln u_n}{n}$ hội tụ và giới hạn của nó là Inf (v_n).

Hướng dẫn. Logarít hoá rồi áp dụng Bài 1.2.2.

Bài 1.2.4. Cho dãy các số dương $\{u_n\}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = +\infty$.

Giải. Cho A > 0 tùy ý cố định. Từ giả thiết, có số nguyên N_1: $\forall n > N_1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge A+1$. Khi đó

$$\frac{u_{N_1+1}}{u_{N_1}} \ge A+1; \qquad \frac{u_{N_1+2}}{u_{N_1+1}} \ge A+1; ...; \frac{u_n}{u_{n-1}} \ge A+1.$$

Nhân vế với vế ta được:

$$\frac{u_n}{u_{N_1}} \ge (A+1)^{n-N_1} \Leftrightarrow \sqrt[n]{u_n} \ge (A+1)\left(\frac{u_{N_1}}{(A+1)^{N_1}}\right)^{1/n}.$$

Đã biết rằng $\left(\dfrac{u_{N_1}}{(A+1)^{N_1}}\right)^{1/n} \to 1$ khi $n \to \infty$, nên có số nguyên N_2 sao cho

$$\forall n > N_2, \left(\frac{u_{N_1}}{(A+1)^{N_1}}\right)^{1/n} \geq \frac{A}{A+1}.$$

Khi đó, với $n > N = \max(N_1, N_2)$, $\sqrt[n]{u_n} \geq (A+1)\dfrac{A}{A+1} = A$,

hay $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty$.

Bài 1.2.5. (Định lý Stolz). Cho $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ là 2 dãy thoả mãn

a) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0, \{v_n\}$ giảm thực sự;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \lambda \in \mathbf{R}$.

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lambda$.

Giải. Cho $\varepsilon > 0$ cố định, có số nguyên N sao cho $\forall\, n > N$,

$$\left|\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} - \lambda\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|(u_{n+1}-\lambda v_{n+1}) - (u_n - \lambda v_n)\right| \leq \varepsilon(v_n - v_{n+1}).$$

Khi đó với n, p nguyên, $p > n > N$ ta có:

$$\left|(u_p - \lambda v_p) - (u_n - \lambda v_n)\right| \leq \left|(u_p - \lambda v_p) - (u_{p-1} - \lambda v_{p-1})\right| +$$

$$+ \left|(u_{p-1} - \lambda v_{p-1}) - (u_{p-2} - \lambda v_{p-2})\right| + \ldots + \left|(u_{n+1} - \lambda v_{n+1}) - (u_n - \lambda v_n)\right| \leq$$

$$\leq \varepsilon(v_{p-1} - v_p) + \varepsilon(v_{p-2} - v_{p-1}) + \ldots + \varepsilon(v_n - v_{n+1}) = \varepsilon(v_n - v_p).$$

Cho $p \to \infty$ ta thu được:

$$|u_n - \lambda v_n| \leq \varepsilon v_n \text{ hay } \left|\frac{u_n}{v_n} - \lambda\right| \leq \varepsilon, \forall n > N.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lambda$.

Bài 1.2.6: Cho $\{u_n\}, \{v_n\}$ là hai dãy thoả mãn

a) $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$; $\{v_n\}$ tăng thực sự;

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \lambda$.

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lambda$.

Bài 1.2.7. Cho dãy $\{a_n\}$ hội tụ về a. Với mỗi n nguyên dương đặt

$$b_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i\, a_i .$$

Chứng minh rằng $\{b_n\}$ hội tụ về a.

Giải. $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, \quad \forall i > N_1$ thì $|a_i - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Lưu ý rằng $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, với $n > N_1$ ta có

$$|b_n - a| = \left| \frac{2}{n(n+1)} \left(\sum_{i=1}^{n} i\, a_i - \sum_{i=1}^{n} i\, a \right) \right| \le \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{N_1} i\, |(a_i - a)|$$

$$+ \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=N_1+1}^{n} i\, |a_i - a| \le \frac{1}{n(n+1)} L + \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=N_1+1}^{n} i\, \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{L}{n(n+1)} + \frac{\varepsilon}{2},$$

trong đó $\displaystyle L = 2 \sum_{i=1}^{N_1} i\, |a_i - a|$.

Vì $L/(n(n+1)) \to 0$ khi $n \to \infty$ nên có N_2 để với $n > N_2$, $L/(n(n+1)) < \varepsilon/2$.

Vậy với $n > N = \max(N_1, N_2)$ ta có $|b_n - a| < \varepsilon$, nói khác $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = a$.

§1.3. CÁC PHÉP TOÁN VỚI GIỚI HẠN - THAY TƯƠNG ĐƯƠNG

Bài 1.3.1. Cho $\alpha \in \mathbf{R}$ sao cho $\alpha/\pi \notin \mathbf{Z}$. Chứng minh rằng không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n \to \infty} \sin(\alpha n)$, đặc biệt không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n \to \infty} \sin n$.

Giải. Giả sử giới hạn của dãy tồn tại. Khi đó

$$0=\lim_{n\to\infty}\left(\sin(n+2)\alpha-\sin n\alpha\right)=2\sin\alpha\lim_{n\to\infty}\cos(n+1)\alpha.$$

Suy ra $$\lim_{n\to\infty}\cos n\alpha=0.$$

Từ đó $$0=\lim_{n\to\infty}\left(\cos(n+2)\alpha-\cos n\alpha\right)=-2\sin\alpha\lim_{n\to\infty}\sin(n+1)\alpha.$$

Suy ra $$\lim_{n\to\infty}\sin n\alpha=0.$$

Từ đó $$1=\lim_{n\to\infty}\left(\sin^2 n\alpha+\cos^2 n\alpha\right)=0,$$ vô lý.

Lưu ý: Cũng chính từ chứng minh này suy ra không tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n\alpha,\ \lim\limits_{n\to\infty}\cos n$.

Bài 1.3.2. Dãy $\{x_n\}$ xác định bởi:

$$x_n=\sin x_{n-1};n=2,3,...;x_1 \text{ tuỳ ý trên } (0;\pi).$$

Chứng minh rằng $$x_n\sim\sqrt{\frac{3}{n}},\ (n\to\infty).$$

Giải. Dễ thấy $x_n\to 0$ và $\{x_n\}$ đơn điệu giảm. Ta có:

$$\frac{1}{x_n^2}=\frac{1}{\sin^2 x_{n-1}}=\frac{1}{\left(x_{n-1}-\frac{x_{n-1}^3}{3\,!}+o\left(x_{n-1}^4\right)\right)^2}$$

$$=\frac{1}{x_{n-1}^2\left(1-\frac{x_{n-1}^2}{3\,!}+o\left(x_{n-1}^3\right)\right)^2}=\frac{1}{x_{n-1}^2}+\frac{1}{3}+o(1)$$

hay $$\frac{1}{x_n^2}=\frac{1}{x_{n-1}^2}+\frac{1}{3}+y_n,\ \text{trong đó } y_n\to 0\ (n\to\infty).$$

Từ đó $$\frac{1}{x_n^2}=\frac{1}{x_1^2}+\frac{n-1}{3}+(y_2+...+y_n)\ (n\ \geq 2),$$

hay $$\frac{3}{nx_n^2}=\frac{n-1}{n}+\frac{3}{nx_1^2}+\frac{3}{n}(y_2+...+y_n)\to 1\ (n\to\infty).$$ Suy ra đpcm.

Bài 1.3.3. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)$.

Giải. Khai triển Maclaurin của e^x với x = 1 ta được

$$e = e^1 = 1+1+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{e^{\theta}}{(n+2)!},\ 0<\theta<1.$$

$$\Rightarrow 2\pi\, en! = 2\pi\left[\left(1+1+...+\frac{1}{n!}\right)n! + \frac{1}{n+1} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)(n+2)}\right].$$

Vậy $n\sin(2\pi en!) = n\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \to 2\pi (n\to\infty)$.

Bài 1.3.4. Cho $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là hai dãy số dương thoả mãn

$$\lim_{n\to\infty} a_n^n = a; \qquad \lim_{n\to\infty} b_n^n = b \text{ với } a, b > 0.$$

Với p, q dương thoả mãn p + q = 1, chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty}(pa_n + qb_n)^n = a^p b^q.$$

Giải. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n^n} = 1$. Từ giả thiết

$$\ln a = \lim_{n\to\infty}\ln\left(a_n^n\right) = \lim_{n\to\infty} n\ln a_n = \lim_{n\to\infty} n\ln(1+(a_n-1))$$

$$= \lim_{n\to\infty} n(a_n-1). \text{ Suy ra } a_n - 1 \sim \frac{\ln a}{n}.$$

Tương tự ta có $b_n - 1 \sim \frac{\ln b}{n}$. Từ đó:

$$\lim_{n\to\infty} n\ln(pa_n+qb_n) = \lim_{n\to\infty} n\ln[1+p(a_n-1)+q(b_n-1)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n[p(a_n-1)+q(b_n-1)] = \lim_{n\to\infty} n\left[p\frac{\ln a}{n}+q\frac{\ln b}{n}\right]$$

$= p\ln a + q\ln b$. Suy ra kết luận.

Bài 1.3.5. Cho các số dương a_1, ..., a_p, hãy tính

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[p]{(n+a_1)(n+a_2)...(n+a_p)}-n\right).$$

Giải.
$$a_n = \sqrt[p]{(n+a_1)(n+a_2)...(n+a_p)} - n$$

$$= n\left(\sqrt[p]{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)...\left(1+\frac{a_p}{n}\right)} - 1\right).$$

Vì $\sqrt[p]{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)...\left(1+\frac{a_p}{n}\right)}-1=\sqrt[p]{1+\frac{a_1+...+a_p}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}-1$

$$\sim\left(\frac{a_1+...+a_p}{np}\right),$$

nên $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\frac{a_1+...+a_p}{np}=\frac{a_1+...+a_p}{p}$.

§1.4. DÃY ĐƠN ĐIỆU

Để chứng minh $\{u_n\}$ tăng, ta thường chứng minh $u_{n+1}-u_n\ge 0$ hoặc trong trường hợp dãy số dương, $\frac{u_{n+1}}{u_n}\ge 1$. Có thể dãy đơn điệu chỉ từ một chỉ số n_0 nào đó.

Bài 1.4.1. Cho $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ là 2 dãy sao cho $v_n>0,\forall n$ và $\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}$ là dãy tăng. Chứng minh rằng dãy $\left\{\frac{u_1+...+u_n}{v_1+...+v_n}\right\}$ tăng .

Giải. Đặt $U_n=u_1+...+u_n$; $V_n=v_1+...+v_n$. Ta có

$$\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}}-\frac{U_n}{V_n}=\frac{(U_n+u_{n+1})V_n-(V_n+v_{n+1})U_n}{V_n\,V_{n+1}}$$

$$=\frac{u_{n+1}V_n-v_{n+1}U_n}{V_n\,V_{n+1}}.$$

Hơn nữa $u_{n+1}V_n-v_{n+1}U_n=\sum_{k=1}^{n}(u_{n+1}v_k-v_{n+1}u_k)$

$$=\sum_{k=1}^{n}v_kv_{n+1}\left(\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}-\frac{u_k}{v_k}\right)\ge 0\ .$$

Bài 1.4.2. Với mỗi n nguyên dương, đặt $u_n=C_{2n}^{n}\sqrt{n}\,4^{-n}$.
Chứng minh rằng $\{u_n\}$ hội tụ.

Giải. Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}=\frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{n(n+1)}}$

$$=\left(1+\frac{1}{4\left(n^2+n\right)}\right)^{1/2}>1$$

Vậy $\{u_n\}$ tăng thực sự. Mặt khác,

$$\ln u_{n+1}-\ln u_n=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{4\left(n^2+n\right)}\right)\leq$$

$$\leq\frac{1}{8\left(n^2+n\right)}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Cộng lại ta được

$$\ln u_{n+1}-\ln u_1=\sum_{k=1}^{n}\left(\ln u_{k+1}-\ln u_k\right)\leq\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{8}$$

hay $\ln u_{n+1}<\ln u_1+\frac{1}{8}$, nghĩa là $\{u_n\}$ bị chặn trên.

Vậy $\{u_n\}$ hội tụ.

Bài 1.4.3. Chứng minh rằng $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$ hội tụ. Từ đó ta có công thức:

$1+\frac{1}{2}+\ \ldots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n$ với C là hằng số Euler ($C=0{,}5772\ldots$), $\varepsilon_n\to 0\ (n\to\infty)$.

Giải. $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$

(chỉ việc thay x = 1/n từ bất đẳng thức $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x,\ \forall x>0,$ mà dễ chứng minh bằng đạo hàm).

Như vậy $\{u_n\}$ giảm thực sự. Hơn nữa ta có:

$$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n$$

$$=\ln\frac{n+1}{n}>0\ .$$

Vậy dãy $\{u_n\}$ hội tụ. Phần còn lại là rõ khi ta đặt C là giới hạn của dãy.

Bài 1.4.4. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}\right)$.

Hướng dẫn: Đặt $u_n=\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}$,

$u_n = C+\ln 2n+\varepsilon_{2n}-(C+\ln\, n+\varepsilon_n)\to\ln 2\ (n\to\infty)$.

Cách khác: Dựa vào bất đẳng thức $\frac{1}{k+1}<\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)<\frac{1}{k}$ hoặc phương pháp tổng tích phân.

Bài 1.4.5. Chứng minh sự hội tụ của các dãy sau:

a) $a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$, $n\in\mathbf{N}$;

b) $b_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^n}$, $n\in\mathbf{N}$.

Giải.

a) Rõ ràng $\{a_n\},\{b_n\}$ là dãy tăng. Ngoài ra

$$a_n = 1+\frac{1}{2^2}\ ...+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{(n-1)n}$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2.$$

Vậy $\{a_n\}$ hội tụ. (Chứng minh được giới hạn của dãy là $\pi^2/6$).

Hiển nhiên là $b_n < a_n$ nên theo câu (a), $\{b_n\}$ bị chặn trên.

Bài 1.4.6. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\,!}{2^{n^2}}$.

Giải. Đặt $a_n=\frac{n\,!}{2^{n^2}}$. Thế thì

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{2^{2n+1}}<1$. Vậy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm. Rõ nó bị chặn dưới.

Gọi λ là giới hạn của dãy, chuyển qua giới hạn đẳng thức

$a_{n+1}=\frac{n+1}{2^{2n+1}}a_n$, ta được

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{2n+1}} \lambda = 0.$$

Bài 1.4.7. Cho s > 0; p > 0. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{(1+p)^n} = 0.$$

Giải. Đặt $a_n = \frac{n^s}{(1+p)^n}$, ta có $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^s \frac{1}{p+1}$.

Lại có: $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^s \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p+1} < 1.$$

Vậy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm từ chỉ số n_0 nào đấy. Nó bị chặn dưới bởi 0. Gọi λ là giới hạn của nó thì λ thoả mãn tính chất $\lambda = \frac{1}{p+1}\lambda$. Vậy $\lambda = 0$.

Lưu ý:

+ Hiển nhiên kết luận đúng cả với $s \le 0$.

+ Ta nói rằng hàm mũ (a^n) trội hơn hàm lũy thừa (n^s).

+ Bạn đọc có thể giải thông qua giới hạn hàm số như ở mục §1.8.

Bài 1.4.8. Giả sử $c_n \ge 0, \forall n$. Đặt

$$a_n = (1+c_1)(1+c_2)\ldots(1+c_n);$$

$$u_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n \; \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Chứng minh rằng $\{u_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi $\{a_n\}$ hội tụ.

Giải. *Cần.* Rõ ràng dãy $\{a_n\}$ đơn điệu tăng. Mặt khác

$$b_n = \ln a_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+c_k) \le \sum_{k=1}^{n} c_k = u_n \le \lim_{n\to\infty} u_n < \infty.$$

Vậy $\{b_n\}$ bị chặn trên. Từ đó $\{b_n\}$ hội tụ và $a_n = e^{b_n}$ hội tụ.

Đủ. Hiển nhiên $\{u_n\}$ tăng. Mặt khác

$$0 \le u_n = c_1 + \ldots + c_n \le (1+c_1)\ldots(1+c_n) \le \lim_{n\to\infty} a_n < \infty.$$

Vậy dãy tăng $\{u_n\}$ bị chặn trên, nó hội tụ.

Bài 1.4.9. Khảo sát tính đơn điệu và tìm giới hạn của dãy

$$a_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}, \qquad n \geq 1.$$

Giải. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{2n+3} < 1$, với $n \geq 1$.

Vậy $\{a_n\}$ giảm và bị chặn dưới bởi 0. Gọi λ là giới hạn của nó. Từ chỗ $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n+3} a_n$, chuyển qua giới hạn ta được $0 \leq \lambda = \dfrac{1}{2}\lambda$ hay $\lambda = 0$.

Bài 1.4.10. Chứng minh sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy

$$a_n = \frac{n+1}{2^{(n+1)}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{2^n}{n}\right); \qquad n \in \mathbf{N}^*.$$

Giải. Ta có
$$a_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)}(a_n + 1). \qquad (*)$$

Suy ra
$$a_{n+1} - a_n = \frac{-n a_n + (n+2)}{2(n+1)}.$$

Dễ chứng minh theo quy nạp rằng $na_n > n+2$.

Vậy $a_{n+1} - a_n < 0$ hay $\{a_n\}$ giảm, do nó bị chặn dưới bởi 0 nên hội tụ. Cho qua giới hạn 2 vế của (*), giới hạn λ của $\{a_n\}$ thoả mãn $\lambda = \dfrac{\lambda+1}{2}$ hay $\lambda = 1$.

Bài 1.4.11. Cho $a_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots + \sqrt{1}}}$ (n lần căn).

Tìm
$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Giải. Vì $\sqrt{1+\sqrt{1}} > 1$ nên $\{a_n\}$ tăng thực sự.

Mặt khác $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$, theo quy nạp ta chứng minh được $a_n \leq 2$. Vậy dãy có giới hạn λ. λ là nghiệm của phương trình $\lambda = \sqrt{1+\lambda}$ hay $\lambda = (\sqrt{5}+1)/2$.

Vậy
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Bài 1.4.12. Tìm
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Giải. Đặt $u_n = n/2^n$; $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{2n} < 1, \quad (n > 1)$.

Vậy $\{u_n\}$ giảm thực sự. Rõ $u_n > 0$, $\forall n$. Vậy tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = g$. Dễ thấy g thoả mãn điều kiện $g = \dfrac{1}{2}g$. Vậy g = 0.

DÃY KỀ NHAU

Đối với những bài toán giới hạn đồng thời của 2 dãy $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ thường chúng ta đưa về trường hợp 2 dãy kề nhau. Thứ tự tiến hành có thể là:

- Dãy nọ *"bé thua"* dãy kia: chẳng hạn $u_n \le v_n$;
- (Từ đó) dãy *"bé"* tăng: $\{u_n\}$ tăng;
- (Từ đó) dãy *"lớn"* giảm: $\{v_n\}$ giảm.
- Xét thêm $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n)$.

Bài 1.4.13. Cho 0 < a < b và $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ là các dãy xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = a, \ \ v_1 = b; \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}; \qquad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\{u_n\}$và $\{v_n\}$ hội tụ đến cùng một giới hạn gọi là trung bình cộng nhân của a và b.

Giải. Rõ ràng $u_n > 0$; $v_n > 0$, $\forall n$.

Theo bất đẳng thức Cauchy $u_n \le v_n$, $\forall n$.

$$+ \ v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \le 0, \text{ vậy } \{v_n\} \text{ giảm.}$$

$$+ \ u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right) \ge 0, \text{ vậy } \{u_n\} \text{ tăng.}$$

Từ đó $u_1 \le ... \le u_n \le u_{n+1} \le v_{n+1} \le v_n \le ... \le v_1, \forall n$.

$\{u_n\}$ tăng và bị chặn trên (bởi v_1) nên có giới hạn λ;

$\{v_n\}$ giảm và bị chặn dưới (bởi u_1) nên có giới hạn λ';

Chuyển qua giới hạn đẳng thức $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, suy ra $\lambda = \lambda'$.

Bài 1.4.14. Chứng minh rằng 2 dãy $\{u_n\}$và $\{v_n\}$:

$$u_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+1}; \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2},\ n \geq 3$$

là kề nhau, nghĩa là:

$\{u_n\}$ tăng, $\{v_n\}$ giảm, $u_n \leq v_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Giải. + Rõ ràng $\{u_n\}$ tăng.

+ $v_n - u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \to 0\ (n \to \infty); v_n > u_n, \quad \forall n$.

+ $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{2n^2}$

$$= \frac{-(n-1)^2 + 3}{2(n^2+2n+2)n^2(n+1)^2} \leq 0.$$

Bài 1.4.15. Chứng minh rằng cả 2 dãy $\{a_n\}$và $\{b_n\}$ xác định bởi:

$$0 < b_1 < a_1; \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}\ \&\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ n \in \mathbf{N}$$

đều đơn điệu và có cùng giới hạn.

Giải. Rõ ràng $a_n > 0$; $b_n > 0$, $\forall$n.

Từ chỗ $2(a_n^2 + b_n^2) \geq (a_n + b_n)^2$,

ta suy ra $\qquad a_n \geq b_n, \forall n.$

+ $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n} \leq \frac{a_n^2 + a_n b_n}{a_n + b_n} = a_n$, vậy $\{a_n\}$ giảm.

+ $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \geq \frac{b_n + b_n}{2} = b_n$, vậy $\{b_n\}$tăng.

Như vậy $b_1 \leq b_2 \leq ... b_n \leq a_n \leq ... \leq a_1$. Do đó cả hai dãy đều hội tụ. Đặt $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ và $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Cho $n \to \infty$ từ đẳng thức $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ ta được

$b = \frac{a+b}{2}$, hay a = b.

Bài 1.4.16. Hai dãy truy hồi $\{a_n\}$và $\{b_n\}$ cho bởi công thức

$$0 < b_1 < a_1,\quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\qquad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n},\ n \geq 1.$$

Chứng minh rằng cả 2 dãy trên đều đơn điệu và có cùng giới hạn.

Giải. Theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \geq \sqrt{a_n b_n} = \frac{2a_n b_n}{2\sqrt{a_n b_n}} \geq b_{n+1}.$$

Vậy ta luôn có $b_n \leq a_n\ \forall n$.

Từ đó $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \leq \dfrac{a_n + a_n}{2} = a_n$: $\{a_n\}$ giảm;

$$b_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + b_n} b_n \geq \frac{2a_n}{a_n + a_n} b_n = b_n : \{b_n\} \text{ tăng.}$$

Như vậy $b_1 \leq ... \leq b_n \leq a_n \leq ... \leq a_1$ suy ra hai dãy $\{a_n\}, \{b_n\}$ đều có giới hạn. Đặt $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$, $\beta = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$, chuyển qua giới hạn ta được

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ hay } \alpha = \beta.$$

Bài 1.4.17. Cho hai dãy $\{u_n\}$và $\{v_n\}$ xác định bởi

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!};\qquad v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}.$$

Chứng tỏ rằng $\{u_n\}$và $\{v_n\}$ đều là hai dãy đơn điệu và có cùng giới hạn.

Giải. Rõ ràng $\{u_n\}$ tăng; $\forall n$ và $\lim\limits_{n \to \infty} (v_n - u_n) = 0$.

Ta chỉ còn việc chứng minh $\{v_n\}$ giảm, quả vậy

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n\,n!}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0.$$

Vậy $\{u_n\}$và $\{v_n\}$ đều có giới hạn và có cùng giới hạn.

Bài 1.4.18. Cho hai dãy $\{a_n\}, \{b_n\}$ xác định như sau

$$a_1 = a,\ b_1 = b,\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2};\ b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_n}{2}.$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Giải. Giả sử a ≤ b, ta sẽ chứng minh theo quy nạp rằng $\{a_n\}$ là dãy tăng, $\{b_n\}$ là dãy giảm và $a_n \le b_n, \quad \forall n \ge 1$.

Quả vậy $a_2 = \dfrac{a+b}{2} \ge a = a_1$; $b_2 = \dfrac{(a+b)/2+b}{2} = \dfrac{a+3b}{4} \le b = b_1$;

$b_2 - a_2 = (b-a)/4 \ge 0$, vậy $a_2 \le b_2$. Ngoài ra

$a_{n+1} - a_n = (b_n - a_n)/2 \ge 0$; $b_{n+1} - b_n = (a_n - b_n)/4 \le 0$.

Vậy $\{a_n\}$ tăng, $\{b_n\}$ giảm.

Lại có
$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{4}(b_n - a_n) \qquad (*)$$

Vậy $a_{n+1} \le b_{n+1}$ theo quy nạp.

Lại từ (*), $(b_n - a_n) = \dfrac{1}{4^{n-1}}(b-a) \to 0 \ (n \to \infty)$.

Từ đó $\{a_n\}, \{b_n\}$ có cùng giới hạn (hơn nữa, chúng là 2 dãy kề nhau !).

Tương tự, a ≥ b thì $\{a_n\}$ giảm, $\{b_n\}$ tăng và cùng giới hạn.

Bài 1.4.19. Cho dãy các số dương $\{x_n\}$ sao cho
$$x_0 = 1 \ge x_1 \ge x_2 \ge \dots \qquad (*)$$

a) Chứng minh rằng với mỗi dãy thoả mãn điều kiện (*) tồn tại $n \ge 1$ sao cho

$x_0^2/x_1 + x_1^2/x_2 + \dots + x_{n-1}^2/x_n > 3{,}999$.

b) Tìm một dãy thoả mãn điều kiện (*) sao cho

$x_0^2/x_1 + x_1^2/x_2 + \dots + x_{n-1}^2/x_n < 4, \ \forall n$.

Giải. Với mỗi dãy $\{x_n\}$ thoả mãn điều kiện (*), xét dãy tổng riêng $\{S_n\}$ với
$$S_n = x_0^2/x_1 + \dots + x_{n-1}^2/x_n.$$

Rõ ràng $\{S_n\}$ tăng nên nó hội tụ đến giới hạn S (hữu hạn hay vô hạn).

Dễ thấy tập các giá trị S là khác trống và bị chặn dưới bởi 1. Gọi s là cận dưới đúng của tập này. Ta chỉ việc chứng minh $s \ge 4$. Quả vậy, cho trước $\varepsilon > 0$ tùy ý, theo tính chất của cận dưới đúng, ta có thể tìm được dãy $\{x_n\}$ với giới hạn tương ứng
$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \in [s\,;\, s+\varepsilon).$$

Mặt khác, ta có thể viết lại giới hạn S như sau

$$S=\frac{x_0^2}{x_1}+x_1\left[\left(\frac{x_1^2}{x_1}\right)^2\Big/\frac{x_2}{x_1}+\ldots+\left(\frac{x_n^2}{x_1}\right)^2\Big/\frac{x_{n+1}}{x_1}+\ldots\right].$$

Tổng trong ngoặc vuông chính là giới hạn của dãy tổng riêng ứng với dãy $\left\{\frac{x_n}{x_1}, n\ge 1\right\}$ mà cũng thoả mãn điều kiện (*).

Từ đó $s+\varepsilon > \frac{1}{x_1}+x_1 s$.

Điều này đúng với mọi $\varepsilon>0$; lại có $\frac{1}{x_1}+x_1 s\ge 2\sqrt{s}$ suy ra $s\ge 4$.

b) Đặt $x_n = 1/2^n$. Khi đó

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}=2+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}=4-\frac{1}{2^{n-2}}<4,\ \forall n.$$

§1.5. ĐỊNH LÝ KẸP

Để có thể dùng định lý kẹp trong việc khảo sát và tìm giới hạn của dãy $\{\omega_n\}$, ta phải đánh giá "trội" và "non" dãy đó. Cụ thể, ta phải tìm 2 dãy $\{u_n\},\{v_n\}$ thoả mãn:

+ $u_n\le\omega_n\le v_n$,

+ $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ đều không quá thô, dễ tìm giới hạn,

+ $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ có chung giới hạn.

Rõ ràng, các kiến thức về bất đẳng thức là cần thiết.

Bài 1.5.1. Cho p là số nguyên dương còn $a_1, \ldots, a_p, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ là những số dương. Chứng minh rằng

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i a_i^n\right)^{1/n}=\underset{1\le i\le p}{\mathrm{Max}}\{a_i\};$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i a_i^{-n}\right)^{-1/n}=\underset{1\le i\le p}{\mathrm{Min}}\{a_i\}$$

Giải.

a) Không mất tính tổng quát, coi $a_1 = \max\{a_1, ..., a_p\}$.

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i^n\right)^{1/n} = a_1\left[\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left(\frac{a_i}{a_1}\right)^n\right]^{1/n}.$$

Từ đó ta có:

$$\lambda_1^{1/n} a_1 \le \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i^n\right)^{1/n} \le \left[\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right]^{1/n} a_1 .$$

Mặt khác $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_1^{1/n} a_1 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\right)^{1/n} a_1 = a_1,$

nên theo định lý kẹp ta thu được kết quả.

b) Theo phần (a) ta có:

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i^{-n}\right)^{-1/n} = \left[\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left(a_i^{-1}\right)^n\right)^{1/n}\right]^{-1}$$

$$\to \left(\max_{1\le i\le p} a_i^{-1}\right)^{-1} = \min_{1\le i\le p}\{a_i\} \, (n\to\infty).$$

Lưu ý: Có thể tổng quát hoá kết quả này sang tích phân xác định.

Bài 1.5.2. Chứng minh sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy với số hạng tổng quát là:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$; $\qquad$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$;

c) $\displaystyle\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\,[kx], \quad x \in \mathbf{R}$; $\qquad$ d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

Giải.

a) Ta có: $\quad \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \le \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2k}} \le \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}$ với $1 \le k \le n$.

Vậy $\quad \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}} \le \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2k}} \le \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2}}.$

Theo định lý kẹp, giới hạn đã cho là 1.

b) $$\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{n^2+2k}} \geq \frac{n^2}{\sqrt{n^2+2n^2}} = \frac{n}{\sqrt{3}}.$$

Theo định lý so sánh, dãy đã cho hội tụ đến + ∞.

c) + $\displaystyle\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k\left[kx\right] \leq \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2x = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}x \to \frac{x}{3}\ (n\to\infty).$

+ $\displaystyle\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k\left[kx\right] \geq \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k(kx-1)$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}x - \frac{n(n+1)}{2n^3} \to \frac{x}{3}\ (n\to\infty).$$

Theo định lý kẹp, dãy đã cho hội tụ đến $\frac{x}{3}$.

d) $$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right) \geq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = 1+\frac{n+1}{2} \to +\infty\ (n\to\infty).$$

Bài 1.5.3. Sử dụng bất đẳng thức

$$x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x, \qquad \forall x>0 \tag{*}$$

chứng minh sự tồn tại giới hạn và tính giá trị

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right).$$

Giải. Bất đẳng thức được chứng minh bằng phương pháp đạo hàm.

Bây giờ đặt $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)$ từ bất đẳng thức (*) ta có:

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)$$

$$= 1+\frac{n(n+1)}{2n^2} \to \frac{3}{2} \qquad (n\to\infty).$$

Cũng lại theo bất đẳng thức (*) ta có

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right) \geq \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)^2\right]$$

$$\geq 1+\frac{n(n+1)}{2n^2}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{n}{n^2}\right)^2\frac{1}{2} = 1+\frac{n+1}{2n}-\frac{2}{n}\to\frac{3}{2}(n\to\infty).$$

Theo định lý kẹp, giới hạn của dãy đã cho là $e^{3/2}$.

Lưu ý: Đặc biệt, với $x=\frac{1}{n}$, n nguyên dương từ (*) dẫn đến

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}. \qquad (**)$$

(*) và (**) là bất đẳng thức khá quen thuộc, các bạn nên nhớ để dễ áp dụng sau này.

Bài 1.5.4. Tìm giới hạn của dãy $u_n = \frac{a^n}{n\,!}$, $\quad a\in \mathbf{R}$.

Giải. Đặt $\quad N=[|a|]+1$, $\quad \forall n>N$ ta có:

$$0 \leq \left|\frac{a^n}{n\,!}\right| = \frac{|a|}{1}\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{N}\left(\frac{|a|}{N+1}\cdots\frac{|a|}{n}\right)$$

$$\leq \frac{|a|}{1}\cdots\frac{|a|}{N}\frac{|a|}{n} \to 0\ (n\to\infty).$$

Theo định lý kẹp, $u_n \to 0\ (n\to\infty)$.

Lưu ý: Ta nói rằng giai thừa (n !) trội hơn hàm mũ (a^n).

Bài 1.5.5. Tính các giới hạn

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)\ldots\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right);$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^{\sqrt{n}}}.$$

Giải.

a) Ta có $\quad 0<\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\ldots\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right)<\left(\sqrt{2}-1\right)^n \to 0(n\to\infty)$.

Theo định lý kẹp, giới hạn của dãy đã cho bằng 0.

b) Ta có $\quad 0\leq\frac{n}{2^{\sqrt{n}}}\leq\frac{\left([\sqrt{n}]+1\right)^2}{2^{[\sqrt{n}]+1}}2 \quad \to 0 \ (n\to\infty)$,

(xem, chẳng hạn Bài 1.3.7). Vậy giới hạn là 0.

Bài 1.5.6. Tính

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{10\sin^2 \frac{n^{2000}}{\ln n} + \cos^2 \frac{n^{2000}}{\ln n}} \ .$$

Giải. Ta có $\quad 1 \le \sqrt[n]{1+9\ \sin^2 \frac{n^{2000}}{\ln n}} \ \le\ \sqrt[n]{10} \to 1 \ \ (n\to\infty).$

Theo định lý kẹp, giới hạn cần tìm là 1.

Bài 1.5.7. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1+n\sin n)^{1/(2n+n\cos n)}.$

Giải. Ta có

$$1 < (1+n\ (1+\sin n))^{1/(2n+n\cos n)} < (1+2\,n)^{1/(2n+n\cos n)}$$

$$< (1+2n)^{1/n} = e^{(1/n)\ln(1+2n)} \to e^0 = 1 \ \ (n\to\infty).$$

Vậy giới hạn cần tìm là 1.

Bài 1.5.8. Tìm giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2^2+...+n^n}{n^n}.$$

Giải. Ta có

$$1 = \frac{n^n}{n^n} < \frac{1^1+2^2+...+n^n}{n^n} < \frac{n^1+n^2+...+n^n}{n^n} = \frac{n(n^n-1)}{n-1}\frac{1}{n^n}$$

$$= \frac{n}{n-1}\frac{n^n-1}{n^n} \to 1 \ \ (n\to\infty).$$

Vậy dãy đã cho có giới hạn 1 khi $n\to\infty$.

Bài 1.5.9. Cho dãy số $\{x_k\}$ với $x_k = \frac{1}{2\,!} + \frac{2}{3\,!} + ... + \frac{k}{(k+1)\,!}$.

Tính giới hạn

$$J = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1^n + ... + x_{2000}^n}\ .$$

Giải. Dễ thấy $x_1 < x_2 < ... < x_{2000}$. Như bài 1.4.1, $J = x_{2000}$.

Bài 1.5.10. Tính $J = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n+1} + \sin\frac{\pi}{n+2} + ... + \sin\frac{\pi}{2n}\right)$.

Giải. Bất đẳng thức $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x\ ,\ \forall x > 0$

có thể chứng minh bằng đạo hàm. Từ đó:

$$\frac{\pi}{n+k} - \frac{\pi^3}{6(n+k)^3} < \sin\frac{\pi}{n+k} < \frac{\pi}{n+k}.$$

Cộng lại ta được

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n+k} - \frac{\pi^3}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^3} \le S_n \le \sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n+k}.$$

Vì $\quad 0 < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^3} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{n^2} \to 0 \quad (n\to\infty)$,

nên theo định lý kẹp

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n+k} = \pi\ln 2 \text{ (xem Bài 1.4.4)}$$

§1.6. TIÊU CHUẨN CAUCHY

Dẫu rằng tiêu chuẩn Cauchy ít có ích để tìm giá trị của giới hạn, nhưng nó lại rất hữu hiệu để chứng minh sự hội tụ của dãy. Để chứng minh dãy không là dãy Cauchy, ta phải khôn khéo chỉ ra hai chỉ số m, n (ví dụ m = 2n, m = n^2...) sao cho $|u_n - u_m| > \varepsilon$. Để chứng minh dãy là dãy Cauchy, ta phải đưa ra đánh giá để chỉ số n + p là "vô nghĩa" đối với hiệu $|u_{n+p} - u_n|$ tức là $\forall p > 0, |u_{n+p} - u_n| \le h(n) < \varepsilon$ với n đủ lớn.

Bài 1.6.1. Trong những dãy sau, dãy nào là dãy Cauchy ?

a) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$;

b) $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{2^2}{4^2} + ... + \frac{n^2}{4^n}$;

c) $u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{n}{(n+1)^2}$.

Giải. a) $\left|u_{2n}-u_n\right| = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

chứng tỏ rằng $\{u_n\}$ không là dãy Cauchy.

b) Có thể chứng minh theo quy nạp rằng

$4^n > n^4\ \forall n \geq 5$. Từ đó ta có

$$\left|u_{n+k}-u_n\right| < \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+...+\frac{1}{(n+k)^2}$$

$$< \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+...+\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+...+\left(\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\right)$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

với n mà $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Vậy $\{u_n\}$ là dãy Cauchy.

c) $$u_{2n}-u_n = \frac{n+1}{(n+2)^2}+...+\frac{2n}{(2n+1)^2}$$

$$\geq n\frac{2n}{(2n+1)^2} \geq \frac{2n^2}{(3n)^2} = \frac{2}{9}.$$

Vậy $\{u_n\}$ không là dãy Cauchy.

Bài 1.6.2. Cho dãy $\{a_n\}$ thoả mãn điều kiện

$$\left|a_{n+2}-a_{n+1}\right| \leq \lambda\left|a_{n+1}-a_n\right|,\ \lambda \in (0,1). \qquad (*)$$

Chứng minh rằng $\{a_n\}$ hội tụ.

Giải. Dễ suy ra theo quy nạp rằng $\left|a_{n+1}-a_n\right| \leq \lambda^{n-1}\left|a_2-a_1\right|$, $(n \geq 1)$.

Vậy

$$\left|a_{n+k}-a_n\right| = \left|(a_{n+k}-a_{n+k-1})+(a_{n+k-1}-a_{n+k-2})+...+(a_{n+1}-a_n)\right|$$

$$\leq \left(\lambda^{n+k-2}+\lambda^{n+k-3}+...+\lambda^{n-1}\right)\left|a_2-a_1\right|$$

$$\leq \lambda^{n-1}\left(1+\lambda+\lambda^2+...\right)\left|a_2-a_1\right| = \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda}\left|a_2-a_1\right|.$$

Lại có $\dfrac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda}\left|a_2-a_1\right| < \varepsilon$ với $n > \left[1+\dfrac{\ln\dfrac{\varepsilon(1-\lambda)}{\left|a_2-a_1\right|}}{\ln\lambda}\right]$.

Vậy $\{a_n\}$ là dãy hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy.

Lưu ý: Dãy thoả mãn điều kiện (*) được xét đến kĩ hơn ở mục ♣1.13.c.

§1.7. TÌM BIỂU THỨC CỦA SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Sau đây là một số phương pháp thông dụng để tìm số hạng tổng quát:

+ Sử dụng hằng đẳng thức, các tổng và tích quen thuộc;

+ Viết ra vài số hạng đầu, suy đoán số hạng tổng quát rồi chứng minh;

+ Nếu u_n biểu diễn dưới dạng tổng riêng: $u_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; cố gắng tách mỗi số hạng a_i thành hiệu: $a_1 = x_2 - x_1$; $a_2 = x_3 - x_2$; ...; $a_n = x_{n+1} - x_n$ (có thể dôi ra một lượng nhất định). Khi đó

$$u_n = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_{n+1} - x_n) = x_{n+1} - x_1.$$

+ Nếu u_n biểu diễn dưới dạng tích $u_n = a_1 a_2 \ldots a_n$, cố gắng tách mỗi thừa số a_i thành thương: $a_1 = \dfrac{x_2}{x_1}$; $a_2 = \dfrac{x_3}{x_2}$;...;$a_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ (có thể dôi ra một lượng nhất định).

Khi đó $u_n = \dfrac{x_2}{x_1}\dfrac{x_3}{x_2}\ldots\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{x_{n+1}}{x_1}$.

Bài 1.7.1. Tính $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)$ với $|z| < 1$.

Giải.
$$a_n = \frac{1}{1-z}(1-z)(1+z)\left(1+z^2\right)\left(1+z^{2^2}\right)\ldots\left(1+z^{2^n}\right)$$
$$= \frac{1}{1-z}\left(1-z^2\right)\left(1+z^2\right)\left(1+z^{2^2}\right)\ldots\left(1+z^{2^n}\right)$$
$$= \frac{1}{1-z}\left(1-z^{2^2}\right)\left(1+z^{2^2}\right)\ldots\left(1+z^{2^n}\right) = \ldots$$
$$= \frac{1}{1-z}\left(1-z^{2^{n+1}}\right) \to \frac{1}{1-z}\ (n\to\infty).$$

Bài 1.7.2. Chứng minh rằng $\forall q \in (-1;1)$ ta có

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(\frac{1-q^{2^k}}{1+q^{2^k}} \right)^{\frac{1}{2^k}} = (1-q)^2 .$$

Hướng dẫn: Đặt $\alpha = 1-q$, $\quad a_k = 1 + q^{2^k}$ và gọi tích riêng thứ n là u_n thì

$$u_n = \frac{\alpha}{a_0} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\alpha a_0 a_1 ... a_{k-1}}{a_k} \right)^{\frac{1}{2^k}}$$

$$= \frac{1}{a_0} \alpha^{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^n}} \frac{a_0^{1/2} (a_0 a_1)^{1/2^2} ... (a_0 a_1 ... a_{n-1})^{1/2^n}}{a_1^{1/2} a_2^{1/2^2} ... a_n^{1/2^n}}$$

$$= ... = \alpha^2 \left(1 - q^{2^{n+1}} \right)^{-1/2^n} .$$

Vì $\ln\left(1-q^{2^{n+1}}\right)^{-1/2^n} = -\frac{1}{2^n} \ln\left(1-q^{2^{n+1}}\right) \sim q^{2^{n+1}} / 2^n \to 0 \ (n \to \infty)$ ta suy ra kết luận.

Bài 1.7.3. Với α là một số thực, hãy tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\alpha + \frac{1}{n} \right)^2 + \left(\alpha + \frac{2}{n} \right)^2 + ... + \left(\alpha + \frac{n-1}{n} \right)^2 \right].$$

Giải. $a_n = \frac{1}{n} \left[(n-1)\alpha^2 + \frac{n(n-1)}{n} \alpha + \frac{1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2}{n^2} \right]$

$$\to \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{3} \quad (n \to \infty).$$

Bài 1.7.4. Tính $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$.

Giải. Ta có

$$\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{(k-1)}{k+1} \frac{(k+1)^2 - (k+1) + 1}{(k^2 - k + 1)}.$$

Giản ước các thừa số ta được

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{1}{3}\frac{\left(3^2-3+1\right)}{\left(2^2-2+1\right)}\frac{2}{4}\frac{\left(4^2-4+1\right)}{\left(3^2-3+1\right)}\cdots\frac{(n-1)\left((n+1)^2-(n+1)+1\right)}{(n+1)\left(n^2-n+1\right)}$$

$$=\frac{2}{3n(n+1)}\left(n^2+n+1\right) \to \frac{2}{3} \quad (n\to\infty).$$

Bài 1.7.5. Tính

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{2.3}\right)\left(1-\frac{2}{3.4}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right).$$

Giải. Từ chỗ

$$1-\frac{2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)},$$

giản ước thừa số ta có

$$u_n = \frac{1.4}{2.3}\,\frac{2.5}{3.4}\,\frac{3.6}{4.5}\cdots\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+3}{3(n+1)} \to \frac{1}{3}\ (n\to\infty).$$

Bài 1.7.6. Tìm tất cả các giá trị $x \in \mathbf{R}$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{2}{x^{2^k}+x^{-2^k}}\right)$$

tồn tại và tìm giá trị của giới hạn này.

Giải. Với $x \neq 1$ ta có:

$$u_n = \prod_{k=0}^{n}\frac{\left(x^{2^k}+1\right)^2}{x^{2^{k+1}}+1}$$

$$= \frac{(x+1)^2\left(x^2+1\right)^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^{2^2}+1\right)}\,\frac{\left(x^{2^2}+1\right)^2}{\left(x^{2^3}+1\right)}\cdots\frac{\left(x^{2^n}+1\right)^2}{\left(x^{2^{n+1}}+1\right)}$$

$$=(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^{2^2}+1\right)\cdots\left(x^{2^n}+1\right)\frac{x+1}{(x-1)\left(x^{2^{n+1}}+1\right)}.$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} -\dfrac{x+1}{x-1} \text{ khi} & |x|<1 \\ \dfrac{x+1}{x-1} & |x|>1 \\ 0 & x=-1 \\ +\infty & x=1. \end{cases}$

Bài 1.7.7. Với giá trị $x \in \mathbf{R}$ nào thì giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+x^{3^k}+x^{2.3^k}\right)$$

tồn tại và tìm giá trị của nó.

Giải. Với $x \neq 1$, ta có

$$1+x^{3^k}+x^{2.3^k} = \frac{\left(1+x^{3^k}+x^{2.3^k}\right)\left(x^{3^k}-1\right)}{x^{3^k}-1} = \frac{x^{3^{k+1}}-1}{x^{3^k}-1}.$$

Từ đó

$$u_n = \frac{\left(x^{3^2}-1\right)}{\left(x^{3^1}-1\right)} \frac{\left(x^{3^3}-1\right)}{\left(x^{3^2}-1\right)} \cdots \frac{\left(x^{3^{n+1}}-1\right)}{\left(x^{3^n}-1\right)} = \frac{x^{3^{n+1}}-1}{x^3-1}.$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} 1/(1-x^3) \quad \text{khi} & |x|<1 \\ +\infty & |x|>1 \\ 1 & x=-1 \\ +\infty & x=1. \end{cases}$

Bài 1.7.8. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1.1!+2.2!+...+n.n!}{(n+1)!}$.

Giải. Từ chỗ k. k ! = (k + 1) ! - k !, ta có

$$u_n = \frac{(2!-1!)+(3!-2!)+...+((n+1)!-n!)}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!} \to 1,\ (n\to\infty).$$

Bài 1.7.9. Cho $a_n = 3 - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+1)!}, n \in \mathbf{N}^*$.

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$.

Giải. Vì $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{k+1-k}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ nên

$$a_n = 3 - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1-k}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{(k+1)!}$$

$$= 3 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k.k!} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} \to \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = e \quad (n\to\infty).$$

Bài 1.7.10. Tính

$$\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2.2^2} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}\right).$$

Giải. Sử dụng công thức cộng arctang

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg}\frac{a+b}{1-ab},$$

ta có:

$$a_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}; \quad a_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2.2^2} = \operatorname{arctg}\frac{2}{3};$$

$$a_3 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2.3^2} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$$

Từ đó ta suy đoán rằng $a_n = \operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1}$. Công thức này có thể chứng minh theo quy nạp.

Như vậy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{\pi}{4}$.

Bài 1.7.11. Cho hàm số f(x) xác định trên $[1;+\infty)$ thoả mãn các điều kiện sau:

i) f(1) = a > 0;

ii) $f(x+1) = 2001(f(x))^2 + f(x), \quad \forall x \in [1;+\infty)$.

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(1)}{f(2)} + \dfrac{f(2)}{f(3)} + \ldots + \dfrac{f(n)}{f(n+1)}\right]$.

Giải. Từ giả thiết suy ra dãy $\{f(n)\}$ tăng; $f(n) \geq f(1) = a > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lambda < +\infty$ thì từ ii) suy ra $\lambda = 2001\lambda^2 + \lambda$ hay $\lambda = 0$, mâu thuẫn. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = +\infty$.

Mặt khác ta có

$$f(k+1) = 2001(f(k))^2 + f(k) \Leftrightarrow 2001(f(k))^2 = f(k+1) - f(k)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2001(f(k))^2}{f(k)f(k+1)} = \frac{f(k+1)-f(k)}{f(k)f(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(k)}{f(k+1)} = \frac{1}{2001}\left(\frac{1}{f(k)} - \frac{1}{f(k+1)}\right).$$

Từ đó,

$$S_n = \frac{1}{2001}\left[\left(\frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(2)}\right) + \left(\frac{1}{f(2)} - \frac{1}{f(3)}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f(n+1)}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2001}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{f(n+1)}\right) \to \frac{1}{2001a} \ (n \to \infty).$$

Bài 1.7.12. Tìm giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3 + 6k^2 + 11k + 5}{(k+3)!}.$$

Giải. Ta có

$$\frac{k^3 + 6k^2 + 11k + 5}{(k+3)!} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3) - 1}{(k+3)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+3)!}.$$

Suy ra:

$$S_n = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{4!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{5!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{6!}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+3)!}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!}\right) \to \frac{5}{3} \ (n \to \infty).$$

Bài 1.7.13. Tìm giới hạn dãy $\{S_n\}$ cho bởi

$$S_n = \frac{6}{(9-4)(3-2)} + \frac{36}{(27-8)(9-4)} + \ldots + \frac{6^n}{\left(3^{n+1} - 2^{n+1}\right)\left(3^n - 2^n\right)}.$$

Giải. $S_n = 6\left(\frac{3^1-2^1}{9-4} - \frac{3^0-2^0}{3-2}\right) + 6\left(\frac{3^2-2^2}{27-8} - \frac{3-2}{9-4}\right) + \ldots +$

$$+\,6\left(\frac{3^n-2^n}{3^{n+1}-2^{n+1}} - \frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{3^n-2^n}\right) = 6\frac{3^n-2^n}{3^{n+1}-2^{n+1}}.$$

Vậy
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 6\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3-\left(\frac{2}{3}\right)^n.2} = 2.$$

§1.8. THÔNG QUA GIỚI HẠN HÀM SỐ

Khi tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, ta có thể nhìn u_n như là giá trị của hàm f(x) nào đó tại x = n, tức là $u_n = f(n)$. Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lambda$ thì $\{u_n\}$ cũng có giới hạn λ. Ưu điểm của phương pháp này là tìm giới hạn hàm số dường như "dễ hơn" tìm giới hạn dãy số.

Bài 1.8.1. Chứng minh rằng:

a) $$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) = \ln a, \qquad (a>0);$$

b) $$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{n}-1\right) = +\infty.$$

Giải.

a) Theo quy tắc L' Hôpital ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[x]{a}-1\right) = \lim_{t\to0^+}\frac{a^t-1}{t} = \lim_{t\to0^+}\frac{a^t\ln a}{1} = \ln a.$$

Vậy dãy đã cho có giới hạn là lna.

b) Tương tự ta có

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[x]{x}-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln x}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{t\to0}\frac{e^{-t\ln t}-1}{t} = \lim_{t\to0}\frac{-e^{-t\ln t}(\ln t+1)}{1} = +\infty.$$

Vậy dãy đã cho có giới hạn $+\infty$.

Bài 1.8.2. Chứng minh các kết quả sau

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty \quad (a > 1;\ \alpha > 0)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)^{1/n} = 1$.

Giải. a) Ta đã giải quyết phần (a) ở Bài 1.4.7. Bây giờ ta giải theo cách khác. Đặt $m = [\alpha] + 1$, thế thì

$$\frac{a^x}{x^\alpha} \ge \frac{a^x}{x^m} \qquad \forall x \ge 1.$$

Áp dụng quy tắc L'Hôpital m lần ta được:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x \ln a}{m x^{m-1}} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x \ln^m a}{m!} = +\infty.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$. Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$.

b) Áp dụng quy tắc L'Hôpital ta được

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t^{1/\alpha}}{t} = \frac{1}{\alpha} \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = \frac{1}{\alpha} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0.$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^0 = 1$.

§1.9. PHƯƠNG PHÁP TỔNG TÍCH PHÂN

Để áp dụng thành công phương pháp tổng tích phân, chúng ta phải biến đổi số hạng tổng quát của dãy đã cho thành tổng tích phân của hàm nào đó:

- Trên đoạn $[0; 1]$, $[0; a]$ hay $[a; b]$ phù hợp;

- Thường với phép chia đều miền lấy tích phân (rất cần thừa số $\dfrac{1}{n}$!);

- Chọn điểm trung gian ξ_i ở mút trái, mút phải hay trung điểm đoạn thứ i; thậm chí phải chứng minh ξ_i chính là một điểm nào đó của đoạn thứ i.

Nếu S_n là tổng tích phân của hàm liên tục f(x) nào đó trên $[a; b]$ thì $S_n \to \int_a^b f(x)dx \ (n\to\infty)$; tính tích phân, ta sẽ thu được giới hạn cần tìm.

- Nếu tích phân suy rộng $\int\limits_{(a;b]} f(x)dx$ hội tụ, f(x) giảm, không âm, liên tục trên (a;b] thì có thể chọn tổng tích phân với phép chia đều, điểm trung gian ξ_i ở mút phải.

Tuy nhiên, rất nhiều khi tổng S_n đã cho không phải là tổng tích phân, mà chỉ "gần như" vậy: Yêu cầu chúng ta thêm bớt lượng thích hợp.

Bài 1.9.1. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}\right]=\ln 2 .$$

Giải. Đặt $S_n = 1/\sqrt{n(n+1)} + ... + 1/\sqrt{2n(2n+1)}$ ta có

$$\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n+1} < S_n < \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}$$

hay $$u_n + \frac{1}{2n+1} < S_n < \frac{1}{n} + u_n$$

trong đó $$u_n = \frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+...+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right] .$$

u_n là tổng tích phân của hàm $\frac{1}{1+x}$ trên đoạn $[0; 1]$ với phép chia đều đoạn $[0; 1]$ làm n phần, lấy giá trị trung gian ξ_i tại mút phải đoạn $\left[\frac{i-1}{n}; \frac{i}{n}\right]$.

Từ đó $$u_n \to \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2, \quad (n\to\infty).$$

Theo định lý kẹp, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln 2$.

Bài 1.9.2. Cho hàm f(x) liên tục trên $[0; 1]$, f(x) > 0.

a) Chứng minh rằng $\forall$n nguyên dương có các giá trị $x_0, x_1, ... x_n$ duy nhất thoả mãn.

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b ;$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \frac{1}{n}\int_0^1 f(x)dx .$$

b) Tính $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_n)\right)$.

Giải. Đặt $x_0 = 0$. Hàm số $F(t)=\int_0^t f(x)dx$ liên tục, đồng biến (do $F'(t) = f(t) > 0$) trên $[0;\ 1]$; $F(0)=0<F(1)=A=\int_0^1 f(x)dx$, ngoài ra $\frac{A}{n}\in(0;\ A)$, nên có duy nhất $x_1\in(0;1)$ thoả mãn

$$F(x_1)=\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx=\frac{A}{n}.$$

Tương tự, F(t) liên tục, đồng biến trên $[x_1;\ 1]$; $F(x_1)=\frac{A}{n}<F(1)=A$, ngoài ra $\frac{2A}{n}\in\left(\frac{A}{n};\ A\right)$ nên có duy nhất $x_2\in(x_1;1)$ thoả mãn:

$$F(x_2)=\int_0^{x_2} f(x)dx=\frac{2A}{n}\Leftrightarrow\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\frac{A}{n}.$$

Cứ như vậy ta xây dựng được dãy $x_0, x_1,..., x_n$ như đòi hỏi.

b) Vì $x_k=F^{-1}\left(\frac{kA}{n}\right)$ nên

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(F^{-1}\left(\frac{kA}{n}\right)\right)=\frac{1}{A}\left[\frac{A}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(F^{-1}\left(k\frac{A}{n}\right)\right)\right].$$

Biểu thức trong ngoặc vuông là tổng tích phân của hàm $f(F^{-1}(x))$ trên đoạn $[0;\ A]$ với cách chia đều thành n đoạn bằng nhau và chọn điểm ξ_k ở mút phải đoạn $\left[(k-1)\frac{A}{n},\ k\frac{A}{n}\right]$. Từ đó

$$S_n\to\frac{1}{A}\int_0^A f\left(F^{-1}(t)\right)dt\qquad(n\to\infty).$$

Đặt biến $u=F^{-1}(t)\Leftrightarrow F(u)=t$;

$dt=F'(u)du=f(u)du$; $f\left(F^{-1}(t)\right)=f(u)$; $u: 0\to 1$ ta được giới hạn cần tìm là:

$$\frac{1}{A}\int_0^A f\left(F^{-1}(t)\right)dt=\frac{1}{A}\int_0^1 f(u).f(u)du=\frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}.$$

Lưu ý: Ví dụ này chứng tỏ rằng khi ta chọn các điểm chia $x_0, x_1, ..., x_n$ trên

$[a;\, b]$ tùy ý không đều nhau không để ý gì đến “giãn cách” giữa chúng, thì trung bình cộng $\dfrac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}$ các giá trị tương ứng của hàm số có thể sẽ không dần đến tích phân $\int_a^b f(x)dx$.

Bài 1.9.3. Xác định giới hạn của dãy cho bởi số hạng tổng quát

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k^2}{n^3+k^3}$; b) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}$.

Giải.

a) $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k^2}{n^3+k^3}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}=u_n+v_n$$

trong đó:

$$+\ 0<u_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}<\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty).$$

$$+\ v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}\to\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\ln\left(1+x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}\ln 2\,(n\to\infty).$$

Vậy dãy đã cho có giới hạn là $\frac{1}{3}\ln 2$.

b) Đặt $k = n + \lambda - 1 \Leftrightarrow \lambda = k+1-n$ ta được:

$$S_n=\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{1}{2n+2\lambda-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{\lambda-1/2}{n}}\right].$$

Biểu thức trong ngoặc vuông là tổng tích phân của hàm $y=\dfrac{1}{1+x}$ trên đoạn $[0;1]$ với cách chia đều đoạn $[0;1]$ làm n đoạn, điểm ξ_λ là trung điểm đoạn $\left[\frac{\lambda-1}{n},\frac{\lambda}{n}\right]$. Từ đó $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\frac{\ln 2}{2}$.

Bài 1.9.4. Tính $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} - n\right]$.

Giải. Để làm non e^t, bất đẳng thức $1 + t < e^t$, $t > 0$ rất quen thuộc. Để làm trội e^t sử dụng khai triển Maclaurin $e^t = 1+t+\frac{e^{\xi}}{2}t^2$ với $0 < \xi < t$.

Vậy $e^t < 1+t+t^2\frac{e^t}{2}$ hay $t < e^t - 1 < t+\frac{t^2}{2}e^t$.

Từ đó $\frac{1}{n+k} < e^{\frac{1}{n+k}} - 1 < \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2(n+k)^2}e^{\frac{1}{n+k}}$.

Cộng vế với vế ta đi đến

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} < S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n+k}} - 1\right) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} + u_n$$

trong đó $u_n = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}e^{\frac{1}{n+k}} \le \frac{n}{2(n+1)^2}e^{\frac{1}{n+1}} \to 0\ (n\to\infty)$.

Theo định lý kẹp, ta có:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1\frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

Bài 1.9.5. Tìm giới hạn

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{1/n}}{n+1} + \frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

Giải. $$S_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{2^{i/n}}{n+\frac{1}{i}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{i/n}}{1+\frac{1}{ni}}.$$

Dường như vế phải không phải là tổng tích phân của bất kỳ hàm nào trên đoạn $[0;1]$ với phép chia đều thành n đoạn, và chọn điểm ξ_i ở mút trái, mút phải cũng như trung điểm thông thường.

Tuy nhiên dễ chứng minh rằng với i = 1, ..., n và n lớn

$$2^{\frac{i-1}{n}} \le \frac{2^{i/n}}{1+\frac{1}{ni}} < 2^{i/n}.$$

Vì hàm mũ liên tục, $\exists \xi_i \in \left(\frac{i-1}{n}; \frac{1}{n}\right)$ để

$$\frac{2^{i/n}}{1+\frac{1}{ni}} = 2^{\xi_i}. \text{ Từ đó } \quad S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2^{\xi_i}$$

lại là tổng tích phân của hàm 2^x trên đoạn $[0; 1]$ với phép chia đều $[0; 1]$ thành n đoạn và cách chọn ξ_i như đã chỉ. Từ đó

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}.$$

Bài 1.9.6. Tìm hàm f(x) khả tích trên $[0; 1]$ và thoả mãn

$$f(x) = \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{x}{3}\right) + f\left(\frac{x+1}{3}\right) + f\left(\frac{x+2}{3}\right)\right], \forall x \in [0;1].$$

Giải. Hiển nhiên là $\frac{x}{3}, \frac{x+1}{3}, \frac{x+2}{3} \in [0; 1]\ \forall x \in [0; 1]$.

Từ giả thiết ta có

$$f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{x/3}{3}\right) + f\left(\frac{x/3+1}{3}\right) + f\left(\frac{x/3+2}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{x}{9}\right) + f\left(\frac{x}{9}+\frac{3}{9}\right) + f\left(\frac{x}{9}+\frac{6}{9}\right)\right].$$

Tương tự biến đổi với $f\left(\frac{x+1}{3}\right)$ và $f\left(\frac{x+2}{3}\right)$. Từ đó có

$$f(x) = \frac{1}{9}\left[f\left(\frac{x}{9}\right) + f\left(\frac{x}{9}+\frac{1}{9}\right) + \ldots + f\left(\frac{x}{9}+\frac{8}{9}\right)\right].$$

Dễ chứng minh theo quy nạp rằng

$$f(x) = \frac{1}{3^n}\left[f\left(\frac{x}{3^n}\right) + f\left(\frac{x}{3^n}+\frac{1}{3^n}\right) + \ldots + f\left(\frac{x}{3^n}+\frac{3^n-1}{3^n}\right)\right].$$

Vế phải là tổng tích phân của hàm f(x) trên đoạn [0; 1] với các bước đều nhau $h = \frac{1}{3^n}$, giá trị trung gian $\xi_i = \frac{x}{3^n}+\frac{i}{3^n}$, nó dần đến $\int_0^1 f(t)dt\ (n\to\infty)$.

Vậy $$f(x)=\int_0^1 f(t)dt = C.$$

Thử lại thấy đúng.

Bài 1.9.7. Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} (kn)^{\frac{1}{(n+k)\ln n}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{kn}}$.

Giải.

a) $$\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(kn)}{(k+n)\ln n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\frac{k}{n}}{(k+n)\ln n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2\ln n}{(k+n)\ln n} = \alpha_n + \beta_n$$

trong đó:

+ $$\beta_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k+n} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{k}{n}+1} \to 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 2\ln 2;$$

+ $$(\ln n)\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\frac{k}{n}}{k+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}+1}.$$

Lưu ý rằng tích phân $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}dx$ hội tụ, hàm $f(x) = -\frac{\ln x}{x+1}$ giảm, không âm, liên tục trên $(0; 1]$. Từ đó tổng tích phân $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}$ của hàm f(x) ứng với phép chia đều $[0; 1]$ thành n phần, chọn ξ_k ở mút phải đoạn thứ k sẽ hội tụ về $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}dx \ (n\to\infty)$.

Vậy $\alpha_n \to 0 \quad (n\to\infty)$.

Tóm lại, $\lim\limits_{n\to\infty} \ln u_n = 2\ln 2$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 4$.

b) $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{kn}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{n}}}\right).$$

Nhận thấy rằng hàm $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ giảm, dương, liên tục trên $(0;1]$ và tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ hội tụ, còn S_n là tổng tích phân của f(x) với cách chia đều đoạn $[0;1]$, chọn các điểm ξ_k ở mút phải đoạn thứ k. Từ đó $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$.

Bài 1.9.8. Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ với

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\sin\frac{\pi}{2n}} + \frac{1}{1+\sin\frac{2\pi}{2n}} + \ldots + \frac{1}{1+\sin\frac{n\pi}{2n}}\right).$$

Giải. S_n là tổng tích phân của hàm $f(x)=\frac{1}{1+\sin\frac{\pi x}{2}}$ trên $[0;1]$ với cách chia đều $[0;1]$ thành n đoạn và chọn điểm ξ_i tại đầu mút phải của đoạn thứ i. Từ đó

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+\sin\frac{\pi x}{2}} = \int_0^1 \frac{1}{\left(\sin\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}\right)^2}dx$$

$$= \frac{-2}{\pi}\cot g\,\frac{\pi}{4}(x+1)\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

§1.10. TỐC ĐỘ PHÁT TRIỂN

Trong quá trình nghiên cứu lý thuyết giới hạn người ta đã tìm ra những định lí rất sâu sắc như định lý Toeplitz, định lý Stolz... giúp dễ dàng tìm được một loạt giới hạn thú vị. Mục này và mục §1.11 tiếp sau sẽ nhằm giới thiệu hai trong các định lý đó.

Ba bài đầu tiên 1.10.1; 1.10.2; 1.10.3 rất quan trọng, là cơ sở cho nhiều áp dụng.

Bài 1.10.1. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = q$. Chứng minh rằng:

a) Nếu q < 1 thì $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$;

a) Nếu q > 1 thì $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.

Giải.

a) Chọn $\varepsilon > 0$ tùy ý đủ nhỏ sao cho $q + \varepsilon < 1$. Từ giả thiết, $\exists$ N_0 để $\left|\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right| < q+\varepsilon$, với $n > N_0$. Áp dụng liên tiếp các bất đẳng thức ta được

$$|a_n| < (q+\varepsilon)^{n-N_0} |a_{N_0}|, \qquad n > N_0.$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Cho $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho $q - \varepsilon > 1$. Tương tự trên, từ chỉ số N_1 nào đó ta có

$$|a_n| > (q+\varepsilon)^{n-N_1} |a_{N_1}|,$$

suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

Lưu ý: Trong kinh tế, người ta gọi $p_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ là tốc độ phát triển thời kì tại thời kì n.

Bài 1.10.2. Giả sử có $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$. Chứng minh rằng

a) Nếu $q < 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

b) Nếu $q > 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Giải.

a) Chọn ε đủ nhỏ sao cho $q + \varepsilon < 1$. Từ giả thiết, $\exists$ $N_0 \in \mathbf{N}^*$ sao cho

$|a_n| < (q+\varepsilon)^n$, $n \ge N_0$. Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Tương tự, chọn ε đủ nhỏ để $q - \varepsilon > 1$.

$|a_n| > (q-\varepsilon)^n$, $n \ge N_1$, do đó $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

Lưu ý: trong kinh tế, người ta gọi $\overline{p_n} = \sqrt[n]{\dfrac{a_1}{a_0}\dfrac{a_2}{a_1}\cdots\dfrac{a_n}{a_{n-1}}} = \dfrac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{a_0}}$ là tốc độ phát triển bình quân tính đến thời kỳ n.

Bài 1.10.3. Cho dãy dương $\{a_n\}$, chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$ thì $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$ ($a \ge 0$ hoặc $a = +\infty$).

(Nếu tốc độ phát triển thời kì có giới hạn a thì tốc độ phát triển bình quân cũng vậy).

Giải. Nếu $a > 0$, từ giả thiết ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\ln a$.

Lại có
$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{a_0}\cdot\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_0}\,\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}}.$$

Từ đó, theo Bài 1.1.1.

$$u_n=\ln\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{n}\ln a_0+\frac{1}{n}\left(\ln\frac{a_1}{a_0}+\ldots+\ln\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)\to\ln a\quad(n\to\infty).$$

Vậy
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a.$$

Trường hợp $a = 0$ hoặc $a = +\infty$ làm tương tự.

Lưu ý: Trường hợp $a = +\infty$ đã được xét đến ở Bài 1.2.4 theo ngôn ngữ "N - ε".

Bài 1.10.4. Cho $\alpha\in\mathbf{R}$, $a\in(0;1)$, tính giới hạn dãy

a) $n^\alpha a^n$;

b) $\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n\,!}x^n$ với $m\in\mathbf{N}^*, |x|<1$.

Giải. a) Đây chính là Bài 1.8.2a, ở đó ta dùng quy tắc L'Hôpital. Bây giờ, áp dụng tốc độ phát triển (Bài 1.10.1) ta giải như sau:

Đặt $u_n=n^\alpha a^n$, thế thì

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^\alpha a\to a\in(0;1).\text{ Vậy }\lim_{n\to\infty}u_n=0;$$

b) $$\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right|=\left|\frac{m-n+1}{n}\right||x|\to|x|,\ (n\to\infty).$$

Vậy
$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

Bài 1.10.5. Cho k là số tự nhiên cố định bất kỳ ≥ 2. Tính $\lim\limits_{n\to\infty}\left(C_{nk}^n\right)^{1/n}$.

Giải. Đặt $a_n = \{C_{nk}^n\}$, ta có:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)k)!}{(n+1)!\,((n+1)(k-1))!}\,\frac{n!((k-1)n)!}{(nk)!} =$$

$$\frac{(nk+1)(nk+2)...(nk+k)}{(n+1)(nk-n+1)...(nk-n+k-1)} \to \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \ (n\to\infty).$$

Theo Bài 1.10.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{k^k}{(k-1)^{k-1}}$.

Bài 1.10.6. Cho cấp số cộng dương $\{a_n\}$, tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(a_1 ... a_n)^{1/n}}{a_1 + a_2 + ... + a_n}.$$

Giải. Giả sử công sai của cấp số cộng là d > 0, đặt

$$c_n = \frac{n^n (a_1 ... a_n)}{(a_1 + ... + a_n)^n}.$$

Khi đó $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{(n+1)a_{n+1}}{a_1 + a_2 + ... + a_{n+1}}\left(\dfrac{\frac{a_1 + ... + a_n}{n}}{\frac{a_1 + ... + a_{n+1}}{n+1}}\right)^n$

$$= \frac{2a_{n+1}}{a_1 + a_{n+1}}\left(\frac{2a_1 + (n-1)d}{2a_1 + nd}\right)^n \to 2e^{-1} \ (n \to \infty).$$

Áp dụng Bài 1.10.3, giới hạn của dãy đã cho là $2e^{-1}$. Khi d = 0, giới hạn dãy bằng 1.

Bài 1.10.7. Tìm các giới hạn của dãy cho bởi số hạng tổng quát

a) $u_n = \left(\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)\right)^{1/n}$; b) $u_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}$.

Giải.

a) *Cách 1*. Đặt $a_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$, suy ra $u_n = \sqrt[n]{a_n}$. Lại có

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1+\frac{1}{n+1} \to 1\ (n\to\infty)$. Theo Bài 1.10.3 giới hạn cần tìm là 1.

Cách 2.

$$\lim_{n\to\infty} \ln u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$$. Suy ra kết quả.

b) *Cách 1.* Đặt $a_n = \frac{(2n)!}{n^n\, n!}$, suy ra $u_n = \sqrt[n]{a_n}$. Lại có

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)\, n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{4}{e}\ (n\to\infty).$$

Vậy theo Bài 1.10.3 dãy đã cho hội tụ về 4/e.

Cách 2. (Phương pháp tổng tích phân)

$$u_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)}{n}\frac{(n+2)}{n}...\frac{(n+n)}{n}}.$$

Vậy $$\ln u_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+...+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$\to \int_0^1 \ln(1+x)dx = \ln 4 - 1\ (n\to\infty),$$

hay $\lim_{n\to\infty} u_n = 4/e$.

Bài 1.10.8. Tính các giới hạn của dãy với số hạng tổng quát

a) $u_n = \left(\frac{n!}{n^n\, e^{-n}}\right)^{1/n}$; b) $u_n = \frac{\sqrt[k]{n}}{\sqrt[n]{n!}}$.

Giải.

a)

Đặt $a_n = u_n^2$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}\, e^{-(n+1)}}\frac{n^n\, e^{-n}}{n!} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to 1\ (n\to\infty).$

Sử dụng kết quả Bài 1.10.3 dãy đã cho có giới hạn là 1.

b) Đặt $a_n = \dfrac{\sqrt[k]{n^n}}{n!}$, với k > 1, ta có

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[k]{(n+1)^{n+1}}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{\sqrt[k]{n^n}} = \frac{1}{(n+1)^{1-\frac{1}{k}}}\,\sqrt[k]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

+ Với k = 1, $u_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}}$. Đặt $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$, ta c ó

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e\ (n\to\infty).$$

Theo Bài 1.10.3, giới hạn của dãy là 0 với k > 1, là e với k = 1.

Bài 1.10.9. Cho dãy $\{a_n\}$ thoả mãn $\lim\limits_{n\to\infty} n^x a_n = a$, với $x\in\mathbf{R}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} n^x (a_1 a_2 ... a_n)^{1/n} = ae^x$.

Giải. Đặt $u_n = n^{nx}(a_1 a_2 ... a_n)$, ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}(n+1)^x a_{n+1} \to e^x a \quad (n\to\infty).$$

Theo Bài 1.10.3, giới hạn cần tìm là ae^x.

§1.11. ĐỊNH LÝ STOLZ

Định lý Stolz như là một dạng sai phân của định lý L'Hôpitat nên việc nhớ nó khá dễ dàng.

Định lý 1. Cho $\{u_n\},\{v_n\}$ là hai dãy thoả mãn

i) $\{v_n\}$ tăng thực sự tới $+\infty$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \lambda \in \mathbf{R}$.

Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lambda$.

Định lý 2. Cho $\{u_n\},\{v_n\}$ là hai dãy sao cho

i) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$;

ii) $\{v_n\}$ giảm thực sự;

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \lambda \in \mathbf{R}$.

Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lambda$.

Chúng ta đã chứng minh Định lý 2 ở Bài 1.2.5. Định lý 1 cũng được chứng minh tương tự hoặc dựa vào định lý Toeplitz. Ta chỉ quan tâm đến các ứng dụng của chúng.

Bài 1.11.1. Tính các giới hạn của dãy với số hạng tổng quát a_n cho bởi:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

b) $\dfrac{1}{n^{k+1}}\left(k!+\dfrac{(k+1)!}{1!}+...+\dfrac{(k+n)!}{n!}\right)$ $(k \in \mathbf{N}^*)$;

c) $\dfrac{1}{n^{k+1}}\left(1^k+2^k+...+n^k\right)$ $(k \in \mathbf{N}^*)$;

d) $\dfrac{1}{n^k}\left(1^k+2^k+...+n^k\right)-\dfrac{n}{k+1}$ $(k \in \mathbf{N}^*)$.

Giải.

a) Xét $u_n = 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $v_n = \sqrt{n}$. Khi đó $v_n \uparrow +\infty$ $(n\to\infty)$,

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)} \to 2\,(n\to\infty).$$

Theo định lý Stolz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = 2$.

b) Bây giờ, đặt $u_n = k!+\dfrac{(k+1)!}{1!}+...+\dfrac{(k+n)!}{n!}$, $v_n = n^{k+1} \uparrow +\infty$.

Theo định lý Stolz ta được

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)...(n+k+1)}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{k+1}{n}\right)}{n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}-1\right]} = \frac{1}{k+1}.$$

c) Đặt $u_n = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$, $v_n = n^{k+1}$ thì $v_n \uparrow +\infty$, ta đi đến

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}-1\right]} \to \frac{1}{k+1}\,(n\to\infty).$$

Theo định lý Stolz dãy có giới hạn 1/(k+1).

Lưu ý: Câu này có thể giải theo phương pháp tổng tích phân.

d) Sử dụng định lý Stolz cho các dãy

$$u_n = (k+1)\left(1^k + 2^k + \ldots + n^k\right) - n^{k+1}, \quad v_n = (k+1)n^k$$

ta có $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \frac{(k+1)(n+1)^k - (n+1)^{k+1} + n^{k+1}}{(k+1)\left((n+1)^k - n^k\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)n^k\left(1+\frac{1}{n}\right)^k + n^{k+1}\left(1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}\right)}{(k+1)n^k\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)n^k\left(1+\frac{k}{n}\right) + n^{k+1}\left(-\frac{(k+1)}{n} - \frac{(k+1)k}{2n^2}\right)}{(k+1)n^k\frac{k}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Vậy dãy có giới hạn 1/2.

Bài 1.11.2. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Tìm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2}} + \frac{a_3}{\sqrt{3}} \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{n}}\right).$$

Giải. Đặt $u_n = a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2}} + \frac{a_3}{\sqrt{3}} \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{n}}$, $v_n = \sqrt{n}$, ta có:

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-u_n}=\frac{a_{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}=a_{n+1}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\to 2a\ (n\to\infty).$$

Vậy theo định lý Stolz, dãy đã cho có giới hạn 2a.

Bài 1.11.3. Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ thoả mãn

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)=a \quad \text{thì } \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a.$$

Giải. Đặt $u_n = a_n$, $v_n = n$, theo định lý Stolz ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{1}=a.$$

Bài 1.11.4. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\ldots\frac{a_n}{n}\right)=a.$$

Giải. Đặt $u_n=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\ldots\frac{a_n}{n},\ v_n=\ln n$.

Theo định lý Stolz ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{(n+1)(\ln(n+1)-\ln n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}\frac{1}{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=a.$$

Bài 1.11.5. Tính:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}}{\ln n}$.

Giải.

a) *Cách 1*. Đặt $u_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n};\ v_n=\ln n$, ta có

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}=\frac{1}{(n+1)(\ln(n+1)-\ln n)}=\frac{1}{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\to 1\ (n\to\infty).$$

Theo định lý Stolz, dãy đã cho có giới hạn là 1.

Cách 2. Sử dụng Bài 1.4.3. ta có:

$$\frac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}{\ln n}=\frac{C+\ln n+\varepsilon_n}{\ln n}\to 1 \ (n\to\infty).$$

b) Đáp số $\frac{1}{2}$.

§1.12. DÃY TRUY HỒI TUYẾN TÍNH VỚI HỆ SỐ HẰNG SỐ

§1.12a. Cấp 1

Dãy truy hồi tuyến tính cấp một với hệ số hằng số là dãy có dạng

$$u_{n+1}=a\,u_n+b, \qquad n\geq 0.$$

+ Nếu $a=1$, $\{u_n\}$ là cấp số cộng;

+ Nếu $a\neq 1$, $u_n=Aa^n+B$.

Bài 1.12.1. Cho dãy $\{u_n\}$ xác định bởi

$$u_1=0,\ u_n=\frac{u_{n-1}+2}{3},\ n\geq 2.$$

Tìm số hạng thứ n và giới hạn của dãy.

Giải. $\{u_n\}$ là dãy truy hồi cấp một với hệ số hằng số. Từ đó

$$u_n = A\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+B \qquad n\geq 1.$$

Với $n = 1$: $A + B = u_1 = 0$;

$n = 2$: $A\frac{1}{3}+B=u_2=\frac{2}{3}$.

Vậy $A = -1$, $B = 1$. Từ đó $u_n=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(dễ chứng minh điều này theo quy nạp).

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=1$.

Bài 1.12.2. Với các giá trị nào của các số thực a, b thì dãy $\{x_n\}$ với $x_0=a$, $x_{n+1}=1+bx_n$ hội tụ.

Giải. Đây là dãy truy hồi cấp 1 với hệ số hằng số.

Nếu b = 1, $\{u_n\}$ là cấp số cộng với công bội d = 1, dãy phân kỳ ra $+\infty$.

Nếu $b \neq 1$, số hạng tổng quát của dãy có dạng $x_n = A.b^n + B$.

Với n = 0, $A + B = a$;

n = 1, $Ab + B = 1 + ba$.

Ta được $A = a - 1/(1-b)$; $B = 1/(1-b)$. Vậy

$$x_n = \left(a - \frac{1}{1-b}\right) b^n + \frac{1}{1-b} \text{ (dễ chứng minh theo quy nạp).}$$

Từ đó nếu $|b| < 1$ còn a tùy ý, hoặc $b \neq 1$ còn $a = \frac{1}{1-b}$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{1-b}$.

Các trường hợp khác dãy phân kỳ.

§1.12b. Cấp 2

Dãy truy hồi tuyến tính cấp hai với hệ số hằng số là dãy $\{u_n\}$ có dạng

$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$, $n \in \mathbf{N}$, a và b - hằng số.

1.12b.1. Trường hợp dễ tìm công thức cho số hạng tổng quát

Trong một số trường hợp chúng ta dễ dàng suy ra được công thức cho số hạng tổng quát, vấn đề khi đó sẽ khá đơn giản.

Bài 1.12.3. Dãy $\{u_n\}$ xác định bởi

$u_1 = 0, u_2 = 1$ & $u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 2$ với $n \geq 2$.

Xác định số hạng tổng quát của dãy và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Giải. *T*a có $u_1 = 0,$ $u_2 = 1,$

$$u_3 = 2.1 - 0 + 2 = 4,$$
$$u_4 = 2.4 - 1 + 2 = 9.$$

Chúng ta hy vọng có công thức $u_n = (n-1)^2$. Bằng quy nạp, công thức này được chứng minh. Từ đó $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Bài 1.12.4. Tìm số hạng tổng quát của dãy $\{u_n\}$ xác định bởi $u_1, u_2 \in \mathbf{R}$,

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n), \qquad n \geq 1$$

và khảo sát sự hội tụ của dãy đó.

Giải. $$u_{n+2}-u_{n+1}=-\frac{1}{2}(u_{n+1}-u_n).$$

Từ đó $$u_{n+2}-u_{n+1}=-\frac{1}{2}(u_{n+1}-u_n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2(u_n-u_{n-1})=...$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(u_2-u_1)\qquad(n\ge 1).$$

Vậy $$u_{n+2}=u_1+(u_2-u_1)+(u_3-u_2)+...+(u_{n+2}-u_{n+1})$$

$$=u_1+(u_2-u_1)\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+...+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$=\frac{u_1+2u_2}{3}+\frac{u_2-u_1}{3(-2)^n}\to\frac{u_1+2u_2}{3},\ (n\to\infty).$$

Bài 1.12.5. Cho dãy $\{a_n\}$ xác định bởi

$$a_1=a,\ \ a_2=b,\ a_{n+1}=pa_{n-1}+(1-p)a_n,\ n=2,3...$$

Hãy tìm các giá trị a, b, p để dãy trên hội tụ.

Giải. Ta có

$a_{n+1}-a_n=-p(a_n-a_{n-1})$. Vậy

$$a_{n+1}-a_n=(-p)^2(a_{n-1}-a_{n-2})=...=(-1)^{n-1}p^{n-1}(b-a),\ n\ge 1.$$

$$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+...+(a_n-a_{n-1})$$

$$=a+(b-a)\left(1-p+p^2-...+(-1)^{n-2}(p)^{n-2}\right).$$

+ Nếu $b=a$ thì $a_n=a\to a\ \ (n\to\infty)$.

+ Nếu $b\ne a$, $\{a_n\}$ hội tụ nếu $|p|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a+\dfrac{b-a}{1+p}$ và phân kì nếu $|p|\ge 1$.

1.12b.2. Trường hợp tổng quát

Xét dãy $\{u_n\}$ thoả mãn $u_{n+2}=au_{n+1}+b\,u_n$

hay $u_{n+2}-au_{n+1}-b\,u_n=0$.

Phương trình k^2 - ak - b = 0

gọi là phương trình đặc trưng (PTĐT) của dãy.

Trường hợp 1. PTĐT có hai nghiệm phân biệt k_1, k_2. Khi đó có hai số A, B $\in \mathbf{R}$ để u_n có dạng

$$u_n = A k_1^n + B k_2^n,\ \ n = 0,1,2,...$$

Trường hợp 2. PTĐT có nghiệm kép $k_1 = k_2 = k_0$. Khi đó có hai số A, B $\in \mathbf{R}$ để u_n có dạng

$$u_n = A k_0^n + B n k_0^{n-1}, \qquad n = 0,1,2,...$$

(Nếu $k_0 = 0$ thì $1.\ 0^{1-1}$ coi là 1).

Trường hợp 3. PTĐT có nghiệm phức $k_{1,2} = \rho(\cos\theta \pm i \sin\theta)$. Khi đó có hai số A, B $\in \mathbf{R}$ để u_n có dạng

$$u_n = \rho^n (A\cos n\theta + B \sin n\theta), \quad n = 0,1,2,...$$

Cho $n = \overline{0,1}$ (hoặc trong trường hợp dãy bắt đầu bởi 1, 2,... cho $n = \overline{1,2}$) để tìm ra 2 hằng số A, B.

Từ lý thuyết về dãy truy hồi cấp hai với hệ số hằng, ta có thể giải một loạt bài toán lí thú, thậm chí những bài toán về phương trình hàm, về dãy truy hồi cấp hai xác định bởi bất đẳng thức.

Bài 1.12.6. Cho dãy Fibonaci $\{u_n\}$ xác định bởi

$$u_0 = 0; \qquad u_1 = 1, \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad n \geq 0.$$

Chứng tỏ rằng: $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ (khi $n \to \infty$)

và u_n là số nguyên gần nhất với số $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Giải. + PTĐT $k^2 - k - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Khi đó có 2 số A, B để

$$u_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Thay n = 0, n = 1 vào công thức ta được:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A\,\frac{1+\sqrt{5}}{2} + B\,\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{\sqrt{5}}; \\ B = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Vậy $$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

(có thể chứng minh theo quy nạp).

Từ đó $$\lim_{n\to\infty}\left[u_n \bigg/ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = 1.$$

\+ Lại có $$\left|u_n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|^n < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$$

nên u_n là số nguyên gần nhất với số $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Bài 1.12.7. Cho dãy $\{u_n\}$ xác định bởi

$$u_0 = 1; \qquad u_1 = a, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{n2^n}$.

Giải. Phương trình đặc trưng $k^2 - 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = 2$. Ta tìm u_n dưới dạng

$$u_n = A2^n + B.n.2^{n-1}.$$

Thay n = 0 và n = 1, từ điều kiện đã cho ta được

$$\begin{cases} A = 1 \\ A.2 + B = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = a - 2. \end{cases}$$

Vậy $$u_n = 2^n + n(a-2)2^{n-1}$$

(có thể chứng minh theo quy nạp).

Từ đó $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{n2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{a-2}{2}\right) = \frac{a-2}{2}.$$

Bài 1.12.8. Tìm số hạng tổng quát của dãy $\{u_n\}$ xác định bởi:

$$u_0 = 0;\ u_1 = 1, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n, \quad n \ge 0.$$

Giải. PTĐT $k^2 - k + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy có hai số A và B để $\{u_n\}$ có dạng

$$u_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(A\cos n\frac{\pi}{4} + B\sin n\frac{\pi}{4}\right).$$

Thay n = 0 và n = 1 vào công thức này ta được:

$$\begin{cases} A = 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(A\dfrac{\sqrt{2}}{2} + B\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 2. \end{cases}$$

Vậy $u_n = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n} 2\sin n\dfrac{\pi}{4}$ (có thể chứng minh theo quy nạp).

Từ đó $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Bài 1.12.9. Cho dãy truy hồi $\{u_n\}$ xác định bởi

$$u_0 > 0;\ u_1 > 0;\ u_{n+2} = \left(u_n^2 u_{n+1}\right)^{1/3},\ n \geq 0.$$

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy;

b) Tìm giới hạn của dãy khi $u_0 = 1$, $u_1 = 32$.

Giải.

a) Dễ suy ra theo quy nạp rằng $u_n > 0$. Xét $v_n = \ln u_n$, thế thì $\{v_n\}$ là dãy truy hồi tuyến tính cấp hai với hệ số hằng số xác định bởi $v_0 = \ln u_0$, $v_1 = \ln u_1$ và $v_{n+2} = \dfrac{1}{3}v_{n+1} + \dfrac{2}{3}v_n$.

PTĐT $k^2 - \dfrac{1}{3}k - \dfrac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow k = 1,\ k = -\dfrac{2}{3}$.

Vậy ta có thể tìm $\{v_n\}$ dưới dạng

$$v_n = A + B\left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

Chon = 0, n = 1 ta được

$$\begin{cases} A + B = v_0 \\ A - \dfrac{2}{3}B = v_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{2v_0 + 3v_1}{5} \\ B = \dfrac{3}{5}(v_0 - v_1). \end{cases}$$

Vậy $$v_n = \frac{2v_0 + 3v_1}{5} + \frac{3}{5}(v_0 - v_1)\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

(có thể chứng minh theo quy nạp). Từ đó

$$u_n = e^{v_n} = u_0^{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\left(-\frac{2}{5}\right)^n} u_1^{\frac{3}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)}.$$

b) Với $u_0 = 1, u_1 = 32$ thì $u_n = 32^{\frac{3}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)} \to 8 \ (n \to \infty)$.

Lưu ý:

i) Chúng ta có thể dùng Bài 1.12.5. để tìm công thức cho v_n.

ii) "Phép đổi dãy" như chúng ta làm vừa rồi (xét dãy mới $v_n = \ln u_n$) khá hiệu qủa trong nhiều trường hợp. Bài sau đây là một ví dụ như vậy.

Bài 1.12.10. Tìm số hạng tổng quát và khảo sát sự hội tụ của dãy $\{u_n\}$ cho bởi

$$\begin{cases} u_0 > 0, \qquad u_1 > 0; \\ u_{n+2} = \dfrac{2u_{n+1}u_n}{u_{n+1}+u_n}. \end{cases}$$

Giải. Bằng phép quy nạp suy ra $u_n > 0$, $\forall$n.

Đặt $v_n = \dfrac{1}{u_n}$, thế thì $\{v_n\}$ là dãy truy hồi tuyến tính cấp hai thoả mãn

$$v_0 = \frac{1}{u_0}; \ v_1 = \frac{1}{u_1};$$

$$v_{n+2} = \frac{v_{n+1}+v_n}{2}.$$

Từ đó suy ra rằng (ví dụ, sử dụng Bài 1.12.4)

$$v_n = \frac{v_0+2v_1}{3} + \frac{v_1 - v_0}{3(-2)^{n-1}}.$$

Vậy $u_n = \dfrac{1}{v_n} = \left[\left(\dfrac{1}{u_0}+\dfrac{2}{u_1}\right)\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3(-2)^{n-1}}\left(\dfrac{1}{u_1}-\dfrac{1}{u_0}\right)\right]^{-1}$

$$\to \frac{3u_0u_1}{2u_0+u_1} \ (n\to\infty).$$

Bài 1.12.11. Cho dãy $\{u_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} u_0 = 0, & u_1 = 1; \\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n, & n \geq 0. \end{cases}$$

Tìm $\overline{\lim}\dfrac{u_n}{2^n}$ và $\underline{\lim}\dfrac{u_n}{2^n}$.

Giải. Phương trình đặc trưng $k^2 + 2k + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} \pm i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Từ đó $\{u_n\}$ có dạng

$$u_n = 2^n\left(A\cos\frac{2n\pi}{3} + B\sin\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Thay n = 0, n = 1 vào ta được

$$\begin{cases} A = 0 \\ 2\left(A\left(-\dfrac{1}{2}\right) + B\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Vậy $u_n = \dfrac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{2n\pi}{3}$ (có thể chứng minh theo quy nạp).

Từ đó $\overline{\lim}\dfrac{u_n}{2^n} = \dfrac{1}{2}$; $\underline{\lim}\dfrac{u_n}{2^n} = -\dfrac{1}{2}$.

Bài 1.12.12. Tìm các hàm số f: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ thoả mãn:

$$f(f(x)) + f(x) = 2000.\ 2001x,\ \forall x \in \mathbf{R}_+.$$

Giải. Ta sẽ dùng các phương pháp của dãy truy hồi tuyến tính cấp hai để giải bài toán phương trình hàm này. $\forall x \in \mathbf{R}_+$, xét dãy $\{u_n\}$ xác định bởi

$$u_0 = x,\ u_1 = f(x),\ u_{n+1} = f(u_n),\quad n \geq 0.$$

Rõ ràng cần có $u_n \geq 0$, $\forall n$. Từ giả thiết ta có

$$f(f(u_n)) + f(u_n) = 2000.\ 2001u_n$$

hay $$u_{n+2} = -u_{n+1} + 2000.2001.u_n.$$

Như vậy $\{u_n\}$ là dãy truy hồi tuyến tính cấp hai. Phương trình đặc trưng $k^2 + k - 2000.2001 = 0$ với nghiệm $k_1 = 2000$, $k_2 = -2001$. Từ đó u_n có dạng:

$$u_n = A(2000)^n + B(-2001)^n,\ n \geq 0.$$

+ *Trường hợp 1:* B < 0. Khi đó

$$\lim_{k\to\infty} u_{2k} = \lim_{k\to\infty} 2001^{2k}\left[A\left(\frac{2000}{2001}\right)^{2k} + B\right] = -\infty: \text{Mâu thuẫn.}$$

+ *Trường hợp 2:* B > 0 Tương tự

$$\lim_{k\to\infty} u_{2k+1} = = -\infty: \text{Mâu thuẫn.}$$

Vậy B = 0, tức là $u_n = A.\ 2000^n$.

$$\begin{cases} u_0 = A.2000^0 = x \\ u_1 = A.2000^1 = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = x \\ f(x) = 2000x. \end{cases}$$

Thử lại thấy đúng. Đáp số f(x) = 2000x.

Bài 1.12.13. Tìm hàm số f: $\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$ thoả mãn

$$f(f(x)) + a f(x) = b(a+b)x,\ (a,\ b > 0).$$

Suy ra giới hạn của hàm số

$$g(x) = \underbrace{f\left(f\left(\ldots f\left(\frac{1}{f(x)}\right)\ldots\right)\right)}_{2000\ \text{lan}} \quad (x \to \infty).$$

Giải. Cho x > 0 tùy ý, xét dãy $\{u_n\}$ xác định bởi

$$u_0 = x, \qquad u_1 = f(x), \qquad u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \geq 0.$$

Rõ ràng cần có $u_n > 0$, ∀n. Theo giả thiết $\{u_n\}$ thoả mãn phương trình

$$u_{n+2} + a u_{n+1} = b(a+b)u_n.$$

Phương trình đặc trưng

$$k^2 + ak - b(a+b) = 0 \Leftrightarrow k = b;\ k = -(a+b).$$

Vậy $\{u_n\}$ có dạng

$$A b^n + B(-1)^n (a+b)^n = (a+b)^n\left[A\left(\frac{b}{a+b}\right)^n + B(-1)^n\right],\ n \geq 0.$$

Ta có $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a+b}\right)^n = 0$, vậy

+ Nếu B > 0 thì $u_{2k+1} < 0$ với k đủ lớn, mâu thuẫn.

+ Nếu B < 0 thì $u_{2k} < 0$ với k đủ lớn, mâu thuẫn.

Từ đó B = 0 hay $u_n = A.b^n$. Cho n = 0, 1 ta được

$$\begin{cases} u_0 = A = x \\ u_1 = Ab = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = x \\ f(x) = bx \end{cases}$$

Thử lại f(x) = bx thấy đúng. Khi đó

$$f\left(f\left(\ldots\left(f\left(\frac{1}{bx}\right)\right)\ldots\right)\right) = \frac{b^{1999}}{x} \to 0 \qquad (x \to \infty).$$

Nhận xét: Với a = 1, b = 2000 ta nhận lại kết quả Bài 1.12.12.

Bài 1.12.14. Cho dãy $\{a_n\}$ xác định bởi

$$a_1 > 0;\ a_2 > 0; \qquad a_{n+2} \le p a_{n+1} + q a_n, \quad (n \ge 1).$$

trong đó p, q dương cố định, p + q < 1.

Chứng minh rằng $\{a_n\}$ hội tụ và tìm giới hạn của nó.

Giải. Xét dãy $\{b_n\}$ xác định bởi

$$b_1 = a_1; b_2 = a_2;\ b_{n+2} = p b_{n+1} + q b_n,\ (n \ge 1).$$

Đây là dãy truy hồi tuyến tính cấp 2. Phương trình đặc trưng

$$k^2 - pk - q = 0 \Leftrightarrow k_1 = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}\ ; \quad k_2 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

Vậy $b_n = Ak_1^n + Bk_2^n$ (dễ suy ra theo quy nạp).

Ta có $\qquad 0 < |k_1| < k_2 = \dfrac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$

Từ chỗ $\qquad$ p + q < 1 dễ suy ra $0 < k_2 < 1$.

Vậy $\qquad b_n \to 0\ (n \to \infty)$.

Rõ ràng $\qquad 0 \le a_n \le b_n,\ \forall n$. Vậy $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = 0$.

§1.13. DÃY TRUY HỒI CẤP MỘT DẠNG $u_{n+1} = f(u_n, n)$

§1.13a. Trường hợp dễ tìm số hạng tổng quát

Ngoài các kỹ thuật đã nói ở mục §1.7cần lưu ý kĩ thuật lập dãy mới sau:

Từ dữ liệu, biến đổi thành một đẳng thức, ở đó một biểu thức nào đó của u_{n+1} bằng một hàm nào đó của chính biểu thức đó nhưng đối với u_n:

$$g(u_{n+1}) = f(g(u_n)) \text{ hoặc } g(u_n) = f(g(u_n), n).$$

Khi đó đặt $v_n = g(u_n)$ ta được dãy truy hồi mới $\{v_n\}$.

Bài 1.13.1. Khảo sát dãy $\{u_n\}$ xác định bởi

$$u_0 \in \mathbf{R}; \qquad u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n, \qquad n \ge 0.$$

Giải. $u_{n+1} + 1 = (u_n + 1)^2$. Nếu đặt $u_n + 1 = v_n$ thì $v_{n+1} = v_n^2$,

từ đó $v_n = v_0^{2^n}$ hay $u_n = (u_0 + 1)^{2^n} - 1$. Từ đó

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{khi} \quad u_0 < -2 \;\text{ hoac }\; u_0 > 0; \\ 0 & \qquad\quad u_0 = -2 \;\text{ hoac }\; u_0 = 0; \\ -1 & \qquad\quad -2 < u_0 < 0. \end{cases}$$

Bài 1.13.2. Khảo sát dãy xác định bởi

$$u_0 \in \mathbf{R}, u_{n+1} = \frac{1}{n+3}\left(n u_n - \frac{1}{n+1}\right), \; n \ge 0.$$

Giải. Từ giả thiết suy ra $u_1 = -1/3$;

$$(n+3)(n+2)(n+1)u_{n+1} = (n+2)(n+1)n\, u_n - (n+2).$$

Đặt $v_n = (n+2)(n+1)n u_n$ thì $v_1 = -2$; $v_{n+1} = v_n - (n+2)$.

Vậy
$$v_n = v_{n-1} - (n+1);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$
$$v_2 = v_1 - 3.$$

Cộng lại ta được

$$v_n = v_1 - (3 + \dots + (n+1)) = -\frac{(n+3)n}{2}.$$

Từ đó $$u_n = -\frac{(n+3)}{2(n+1)(n+2)} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Bài 1.13.3. Khảo sát dãy xác định bởi

a) $u_1 = 1, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}, \; n \ge 1;$

b) $u_1 > 0; \; u_{n+1} = \frac{u_1}{1} + \dots + \frac{u_n}{n}, \quad n \ge 1.$

Giải.

a) Bình phương hai vế đẳng thức đã cho, được dãy $\{u_n^2\}$ với

$$u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{1}{2^n}.$$ Từ đó

$$u_n^2 = u_{n-1}^2 + \frac{1}{2^{n-1}};...; u_2^2 = u_1^2 + \frac{1}{2}; \qquad u_1^2 = 1.$$

Cộng lại ta có $\quad u_n^2 = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

Vậy $\qquad u_n = \sqrt{2 - \frac{1}{2^{n-1}}} \to \sqrt{2} \qquad (n \to \infty)$.

b) Rõ ràng $u_n > 0$, $\forall n$.

$$u_{n+1} = \left(\frac{u_1}{1} + ... + \frac{u_{n-1}}{n-1}\right) + \frac{u_n}{n} = u_n + \frac{u_n}{n} = \frac{n+1}{n} u_n.$$

Suy ra $\qquad u_{n+1} = \frac{n+1}{n} u_n, \qquad n \geq 2$. Từ đó

$$u_n = \frac{n}{n-1} u_{n-1} ...; u_3 = \frac{3}{2} u_2.$$

Nhân vế với vế ta được $u_n = \frac{nu_2}{2} \to \infty (n \to \infty)$.

Bài 1.13.4. Cho $a_1 \in \mathbf{R}$ và $a_{n+1} = \left|a_n - 2^{1-n}\right|, \forall n \geq 0$.

Khảo sát sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy nếu có.

Phân tích. Để thấy cách phân các trường hợp của a_1, ta giả sử biểu thức dưới dấu trị tuyệt đối luôn dương. Khi đó $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2^{n-1}}$. Từ đó cộng lại ta được

$$a_n = a_1 - \left(1 + ... + \frac{1}{2^{n-2}}\right) > 0, \forall n \Rightarrow a_1 \geq 2...$$

Giải.

Trường hợp 1: $a_1 \geq 2$. Khi đó $a_2 = |a_1 - 1| = a_1 - 1 \geq 1$;

$a_3 = \left|a_2 - \frac{1}{2}\right| = a_2 - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$. Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$a_n = a_{n-1} - \frac{1}{2^{n-2}} \geq \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Cộng lại ta được $a_n = a_1 - \left(1 + ... + \frac{1}{2^{n-2}}\right) \to a_1 - 2 \ (n \to \infty)$.

Trường hợp 2: $a_1 \leq 0$. Khi đó $a_2 = |1 - a_1| = 1 - a_1 \geq 1$, tình hình lại giống như trường hợp 1:

$a_3 = a_2 - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}, \ldots$. Bằng quy nạp ta chứng minh được

$a_n = a_{n-1} - \frac{1}{2^{n-2}} \geq \frac{1}{2^{n-2}}$.

Cộng lại ta có $a_n = a_2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) \to a_2 - 1 = -a_1 \quad (n \to \infty)$.

Trường hợp 3: $0 < a_1 < 2$. Tình hình khác xa hai trường hợp đầu. Tuy nhiên ta thấy $a_2 = |a_1 - 1| < 1 \Rightarrow a_3 = \left|a_2 - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$.

Tương tự bằng quy nạp ta chứng minh được

$$a_{n+1} = \left|a_n - \frac{1}{2^{n-1}}\right| < \frac{1}{2^{n-1}} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Bài 1.13.5. Dãy $\{a_n\}$ xác định bởi

$$a_1 = 1, \quad a_n = n(a_{n-1} + 1); \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Tính
$$\lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right).$$

Giải

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2(1+1) = 2.1 + 2$$
$$a_3 = 3(a_2 + 1) = 3.2.1 + 3.2 + 3$$
$$a_4 = 4(a_3 + 1) = 4.3.2.1 + 4.3.2 + 4.3 + 4$$

Theo quy nạp ta chứng minh được

$$a_n = n(a_{n-1} + 1) =$$
$$= n(n-1)\ldots 1 + n(n-1)\ldots 2 + n(n-1)\ldots 3 + \ldots + n(n-1) + n$$
$$= n!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right)$$

Vậy
$$1 + \frac{1}{a_k} = \frac{a_k + 1}{a_k} = \frac{a_{k+1}}{(k+1)a_k}.$$ Từ đó

$$u_n = \frac{a_2}{2.a_1} \frac{a_3}{3.a_2} \ldots \frac{a_n}{n.a_{n-1}} \frac{a_{n+1}}{(n+1)a_n}$$
$$= \frac{a_{n+1}}{a_1(n+1)!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \to e \quad (n \to \infty).$$

Bài 1.13.6. Cho a ≥ b > 0 xây dựng dãy $\{a_n\}$ theo quy nạp như sau

$$a_1 = a + b, \qquad a_n = a_1 - \frac{ab}{a_{n-1}}, \qquad n \ge 2.$$

Tìm công thức tường minh cho số hạng tổng quát của dãy và từ đó tính $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Giải. Với a > b ta có

$$a_1 = a + b; \qquad a_2 = a + b - \frac{ab}{a+b} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2};$$

$$a_3 = a + b - \frac{a^3 b - b^3 a}{a^3 - b^3} = \frac{a^4 - b^4}{a^3 - b^3}.$$

Dễ chứng minh theo quy nạp rằng $a_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n}$.

Từ đó
$$a_n = \frac{a^{n+1}\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\right)}{a^n\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} \to a \quad (n \to \infty).$$

Với $a = b$, $\quad a_n = \dfrac{n+1}{n} a \to a (n \to \infty)$.

Bài 1.13.7. Cho a > 0, b > 0, xét dãy $\{a_n\}$ cho bởi

$$a_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad a_n = \frac{a\, a_{n-1}}{\sqrt{a^2 + a_{n-1}^2}}, \qquad n \ge 2.$$

Tìm số hạng thứ n của dãy và tính $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Giải. $a_2 = \dfrac{a.ab\Big/\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2 + a^2b^2\big/\left(a^2+b^2\right)}} = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}};$

$$a_3 = \frac{a.ab\Big/\sqrt{a^2+2b^2}}{\sqrt{a^2 + a^2b^2\big/\left(a^2+2b^2\right)}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+3b^2}}.$$

Theo quy nạp, ta có thể chứng minh được

$a_n = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+nb^2}}$. Từ đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bài 1.13.8. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Sử dụng kết quả trên để tính giới hạn của dãy truy hồi cho bởi

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, \qquad n \geq 1.$$

Hướng dẫn: Chứng minh đẳng thức theo quy nạp. Giới hạn bằng 2.

Bài 1.13.9. Tìm giới hạn nếu có của dãy $\{a_n\}$ với $a_1 = a \geq 0$;

$$a_{n+1} = \sqrt{5a_n}, \qquad n = 1, 2, ...$$

Giải. Dễ thấy dãy $\{a_n\}$ đơn điệu và bị chặn.

Tuy nhiên ta có thể lập được công thức cho a_n. Quả vậy,

$$a_2 = \sqrt{5a_1} = \sqrt{5^2\frac{a}{5}} = 5\left(\frac{a}{5}\right)^{1/2};$$

$$a_3 = \sqrt{5a_2} = \sqrt{5.5\left(\frac{a_1}{5}\right)^{1/2}} = 5\left(\frac{a}{5}\right)^{1/4}.$$

Tương tự ta chứng minh theo quy nạp $a_n = 5\left(\frac{a}{5}\right)^{1/2^{n-1}}$. Từ đó

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 5; & a > 0 \\ 0; & a = 0. \end{cases}$$

Cũng có thể giải như sau:

$$a_n = \sqrt{5\sqrt{5...\sqrt{5.a}}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}} a^{\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Bài 1.13.10. Dãy $\{h_n\}$ cho bởi

$$h_1 = \frac{1}{2}, \qquad h_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-h_n^2}}{2}}, \qquad n \geq 1.$$

Đặt $S_n = h_1 + ... + h_n$. Chứng minh rằng $\lim_{n\to\infty} S_n < 1{,}03$.

Giải. Trong biểu thức của h_{n+1} có chứa $\sqrt{1-h_n^2}$ nên ta nghĩ đến lượng giác hóa.

Ta có:

$$h_1 = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3.2^1};$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sin\frac{\pi}{3.2^2}.$$

Dễ chứng minh theo quy nạp rằng $h_n = \sin\frac{\pi}{3.2^n}$. Vậy $h_n < \frac{\pi}{3.2^n}$

Suy ra $$S_n = h_1 + \ldots + h_n \le \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3.2^2} + \ldots + \frac{\pi}{3.2^n}$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} < 1{,}03.$$

Bài 1.13.11. Cho dãy $\{a_n\}$ với

$$a_1 = \frac{1}{2}; \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n^2 a_n \qquad (n \ge 1).$$

Tìm $$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n.$$

Giải. Trước hết ta lập công thức truy hồi cho $\{a_n\}$.

Ta có: $n^2 a_n = a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n = (n-1)^2 a_{n-1} + a_n$.

Vậy $$a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1}.$$

Áp dụng liên tiếp các đẳng thức này ta được:

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}\,\frac{n-2}{n}\ldots\frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Vậy $$n^2 a_n = \frac{n}{n+1} \to 1\,(n\to\infty).$$

§1.13b. Trường hợp dễ suy được tính đơn điệu

Để chứng minh tính đồng biến của dãy dương $\{u_n\}$ ta chứng minh $u_{n+1} - u_n > 0$ hoặc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Bài 1.13.12. Khảo sát dãy $\{u_n\}$ sau đây:

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}.$$

Giải. Rõ ràng $u_n > 0, \forall n$. Ta có:

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n^3}{u_n^2 + 1} < 0 \text{, vậy } \{u_n\} \text{ giảm.}$$

Nó bị chặn dưới bởi 0 nên hội tụ đến giới hạn λ. Chuyển qua giới hạn hai vế ta được $\lambda = \dfrac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \geq 0 \Rightarrow \lambda = 0$.

Bài 1.13.13. Khảo sát dãy $\{u_n\}$ xác định bởi:

$$u_0 \in \mathbf{R},\ u_{n+1} = u_n + \int_0^1 |t - u_n|\, dt,\ \ n \geq 0.$$

Giải. *Cách 1.*

$$\text{Ta có } F(a) = \int_0^1 |t - a|\, dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - a & \text{khi } a \leq 0 \\ a^2 - a + \dfrac{1}{2} & 0 < a \leq 1 \\ a - \dfrac{1}{2} & a \geq 1. \end{cases}$$

Từ đó $F(a) \geq \dfrac{1}{4}$, $\forall a \in \mathbf{R}$. Vậy $u_{n+1} \geq u_n + \dfrac{1}{4}$.

Cộng lại ta được $u_n \geq u_0 + \dfrac{n}{4}$. Vậy $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$.

Cách 2. Rõ ràng $\{u_n\}$ là dãy tăng. Nếu nó bị chặn, suy ra hội tụ. Đặt $\lambda = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$. Dễ chứng minh $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 |t - u_n|\, dt = \int_0^1 |t - \lambda|\, dt$. Từ đó, chuyển qua giới hạn ta được:

$\lambda = \lambda + \int_0^1 |t - \lambda|\, dt$ hay $\int_0^1 |t - \lambda|\, dt = 0$, mâu thuẫn. Vậy $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$.

Bài 1.13.14. Giả sử dãy $\{a_n\}$ thỏa mãn điều kiện

$$0 < a_n < 1, \quad a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4} \text{ với } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy hội tụ và tìm giới hạn của nó.

Giải. Từ giả thiết và theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a_n + (1 - a_{n+1})}{2} \geq \sqrt{a_n(1 - a_{n+1})} > \frac{1}{2}.$$

Vậy $a_n - a_{n+1} > 0$, tức là $\{a_n\}$ giảm. Rõ ràng $a_n > 0\ \forall n$. Gọi λ là giới hạn của nó. Chuyển qua giới hạn bất đẳng thức cho trong giả thiết ta được:

$$\lambda(1-\lambda) \geq \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

Bài 1.13.15. Chứng minh sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy

$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \qquad$ với $n \geq 1$.

Giải. Nếu dãy có giới hạn λ thì λ thỏa mãn phương trình $\lambda = \sqrt{6+\lambda}$ hay $\lambda = 3$. Ta chứng minh $\{a_n\}$ tăng và bị chặn bởi 3.

Theo quy nạp, dễ suy ra $0 \leq a_n < 3$.

Mặt khác $(a_{n+1})^2 - a_n^2 = a_n - a_{n-1}$ nên theo nạp, $\{a_n\}$ tăng.

Kết luận: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$

Lưu ý: Ta có thể giải bài toán tương tự với $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$, $a \geq 0$.

Bài 1.13.16. Xét tính đơn điệu và tìm giới hạn của dãy

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{2(2a_n+1)}{a_n+3} \text{ với } n \in \mathbf{N}^*.$$

Giải. Rõ ràng $a_n > 0, \forall n$. Mặt khác, nếu $\{a_n\}$ có giới hạn $\lambda \geq 0$ thì

$$\lambda = \frac{2(2\lambda+1)}{\lambda+3} \text{ hay } \lambda = 2.$$

Dễ chứng minh theo quy nạp rằng $1 \leq a_n < 2$.

Mặt khác $\qquad a_{n+1} = 4 - \dfrac{10}{a_n+3}$ nên

$$a_{n+1} - a_n = 10\frac{a_n - a_{n-1}}{(a_n+3)(a_{n-1}+3)};\ a_1 = 1;\ a_2 = 1{,}5.$$

Như vậy $\{a_n\}$ tăng theo quy nạp. Tóm lại $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Bài 1.13.17. Cho $a > 0$, $b > 0$ và dãy $\{a_n\}$ cho bởi

$$a_1 \in (0; b); \qquad a_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + a_n^2}{a+1}}, \qquad n \geq 1.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Giải. Rõ $a_n \ge 0,\ \forall n$. Nếu dãy có giới hạn λ thì

$\lambda=\sqrt{\dfrac{ab^2+\lambda^2}{a+1}} \Rightarrow \lambda = b$. Tương tự bài trên ta chứng minh theo quy nạp rằng 0 < a_n < b và rằng $\{a_n\}$ tăng. Từ đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ = b.

Bài 1.13.18. Cho dãy $\{a_n\}$ xác định bởi

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{a_n}}, \qquad n \ge 1.$$

Tìm giới hạn của dãy.

Giải. Rõ $2 \le a_n \le 3; \quad a_1 = 2 < a_2 = \frac{16}{7}.$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $\{a_n\}$ tăng, quả vậy

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{(3a_n+1)(3a_{n-1}+1)}.$$

Từ đó $\{a_n\}$ có giới hạn λ thỏa mãn

$$2 \le \lambda = 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{\lambda}} \Rightarrow \lambda = \frac{3+\sqrt{15}}{3}.$$

Bài 1.13.19. Cho $\{a_n\}$ xác định như sau

$$a_1 > 0;\ a_{n+1} = \text{arctg } a_n,\ n \ge 1.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Giải. Dễ dàng chứng minh bất đẳng thức arctgx < x với x > 0. Từ đó dãy đơn điệu giảm. Lại có $0 \le a_n$, $\forall$n. Vậy dãy hội tụ, gọi λ là giới hạn của dãy. Do hàm arctgx liên tục nên ta có $\lambda = \text{arctg}\lambda$. Vậy $\lambda = 0$.

Bài 1.13.20. Cho $\{a_n\}$ là dãy dương và đặt $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, n > 1.

Giả sử ta có

$$a_{n+1} \le \frac{1}{S_{n+1}}\left((S_n - 1)a_n + a_{n-1}\right), \ \ n > 1.$$

Tính $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Giải. $\{S_n\}$ tăng. Nếu nó bị chặn trên thì sẽ hội tụ và

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0.$$

Bây giờ giả sử $\{S_n\}$ không bị chặn, từ giả thiết suy ra

$$a_{n+1} S_{n+1} + a_n \le a_n S_n + a_{n-1}.$$

Áp dụng liên tiếp các bất đẳng thức ta được

$$a_n S_n + a_{n-1} \le S_2 a_2 + a_1.$$

Từ đó $\quad a_n \le a_n + \frac{a_{n-1}}{S_n} \le \frac{S_2 a_2 + a_1}{S_n} \to 0 \ (n \to \infty).$

Tóm lại, ta luôn có $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bài 1.13.21. Khảo sát sự hội tụ của dãy $\{u_n\}$ xác định bởi

$$u_0 > 0,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a^2}{u_n}\right),\ n \ge 0 \qquad (a > 0 \text{ cố định}).$$

Giải. Rõ ràng $u_n > 0,\ \forall n \in \mathbf{N}$. Theo bất đẳng thức Cauchy

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a^2}{u_n}\right) \ge a > 0.$$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{a^2 - u_n^2}{2u_n} \le 0$. Vậy $\{u_n\}$ giảm. Gọi λ là giới hạn của dãy, phải có $\lambda = \dfrac{1}{2}\left(\lambda + \dfrac{a^2}{\lambda}\right) \ge a \Leftrightarrow \lambda = a$.

Bài 1.13.22. Cho p nguyên dương, a > 0, $a_1 > 0$. Xác định dãy $\{a_n\}$ như sau:

$$a_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)a_n + \frac{a}{a_n^{p-1}}\right), n \in \mathbf{N}^*.$$

Tìm lim a_n.

Giải. Ta có

$$a_{n+1}-a_n=-\frac{a_n}{p}+\frac{a}{pa_n^{p-1}}=\frac{-a_n^p+a}{pa_n^{p-1}}.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy

$$a_{n+1}\geq \sqrt[p]{a_n^{p-1}\frac{a}{a_n^{p-1}}}=\sqrt[p]{a}\ .$$

Vậy a_{n+1} - $a_n \leq 0$, $n \geq 2$. Suy ra dãy $\{a_n\}$ giảm, bị chặn dưới bởi 0 nên nó hội tụ đến λ. Qua giới hạn ta được $\lambda=\frac{1}{p}\left((p-1)\lambda+\frac{a}{\lambda^{p-1}}\right)$.

Xảy ra dấu bằng ở bất đẳng thức Cauchy nên $\lambda=\sqrt[p]{a}$.

§1.13c. Trường hợp ánh xạ co

Nếu dãy $\{u_n\}$ xác định bởi $u_0\in[a;b]$, $u_{n+1}=f(u_n)$ trong đó $f:[a;b]\to[a;b]$ là ánh xạ co, tức là $\exists\,\lambda\in[0;1)$ để

$$|f(x)-f(y)|\leq\lambda\,|x-y|,\ \forall x,y\in[a;b]$$

thì $\{u_n\}$ có giới hạn λ là điểm bất động duy nhất của f(x), tức là điểm λ mà $f(\lambda)=\lambda$.

Trong quá trình giải, ta nên chứng minh lại định lý này như làm ở Bài 1.13.23 sau. Xem thêm Bài 1.6.2.

+ Trong một số trường hợp, dãy đã cho chỉ "co lại" từ một chỉ số n_0 nào đó.

+ Cũng có thể bản thân f chưa phải là ánh xạ co nhưng g $=f_0f$ lại là ánh xạ co, khi đó xét hai dãy chẵn lẻ.

Bài 1.13.23. Cho dãy số thực $\{u_n\}$ xác định như sau:

$$u_1=a\ ;\qquad u_{n+1}=\frac{1}{2}\ln\left(1+u_n^2\right)-2002,\ n\geq 1.$$

Chứng minh rằng $\{u_n\}$ là dãy hội tụ.

Giải. Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-2002,\ x\in\mathbf{R}$.

Đây là hàm khả vi trên **R** và

$$|f'(x)|=\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\leq\frac{1}{2},\ \forall x\in\mathbf{R}.$$

Theo định lý Lagrăng, $\forall x,y,\exists c$ giữa x và y để

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)(x-y)|\leq\frac{1}{2}|x-y|\ .$$

Như vậy f(x) là ánh xạ co. Ta có

$$|u_{n+1}-u_n| = |f(u_n)-f(u_{n-1})| \le \frac{1}{2}|u_n - u_{n-1}|.$$

Áp dụng liên tiếp các bất đẳng thức, ta được

$$|u_n - u_{n-1}| \le \frac{1}{2^{n-2}}|u_2 - u_1|, \quad n \ge 2.$$

Từ đó

$$|u_{n+k}-u_n| \le |u_{n+k}-u_{n+k-1}| + |u_{n+k-1}-u_{n+k-2}| + ... + |u_{n+1}-u_n|$$

$$\le \left(\frac{1}{2^{n+k-2}}+\frac{1}{2^{n+k-1}}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right)|u_2-u_1| \le \frac{1}{2^{n-2}}|u_2-u_1|.$$

Vậy $|u_{n+k}-u_n| < \varepsilon$ với n đủ lớn. Suy ra $\{u_n\}$ là dãy Cauchy, nó sẽ hội tụ.

Bài 1.13.24. Khảo sát sự hội tụ của $\{a_n\}$ cho bởi

$$a_1 = a \ge 0, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 1}, \forall n = 1, 2, ...$$

Giải. Xét $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $x \ge 0$. Khi đó $a_{n+1} = f(a_n)$.

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. Vậy f(x) chưa phải là ánh xạ co trên $[0;+\infty)$.

Tuy vậy, f '(x) > 0 nên f(x) đồng biến. Vậy

$a_2 = f(a_1) = \sqrt{2a+1} \ge 1$, đồng thời

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \le \frac{1}{\sqrt{3}} < 1, \forall x \ge 1.$$

Vậy f(x) là ánh xạ co trên $[1;+\infty)$. Từ đó $\{a_n\}$, n ≥ 2 hội tụ (chứng minh tương tự Bài 1.13.23). Vậy $\{a_n\}$, n ≥ 1 cũng hội tụ. Giới hạn λ của nó thỏa mãn $\lambda = \sqrt{2\lambda+1}$ hay $\lambda = 1+\sqrt{2}$.

Bài 1.13.25. Khảo sát sự hội tụ của dãy $\{a_n\}$ cho bởi

$$a_1 = a \ge 0, \; a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, \; n \ge 1.$$

Giải. *Cách 1.* Dễ chứng minh theo quy nạp rằng $a_n \in [0; 1]$

Với $\qquad f(x) = \frac{1}{1+x}, x \in [0; 1]$ thì $a_{n+1} = f(a_n)$.

$f'(x)=\dfrac{-1}{(1+x)^2}<0$, f(x) giảm song chưa phải là ánh xạ co.

Xét $$g(x)=f(f(x))=\frac{1+x}{2+x}=1-\frac{1}{2+x},\ \forall x\in[0;1].$$

$0\le g'(x)=\dfrac{1}{(2+x)^2}\le \dfrac{1}{4}$. Vậy g(x) là ánh xạ co.

Đối với dãy $\{a_{2n+1}\}$ ta có $a_{2(n+1)+1}=g(a_{2n+1})$.

Vậy dãy $\{a_{2n+1}\}$ hội tụ đến giới hạn λ.

Tương tự, dãy $\{a_{2n}\}$ có $a_{2(n+1)}=g(a_{2n})$; vậy $\{a_{2n}\}$ hội tụ đến giới hạn k.

Cả λ và k đều là nghiệm dương của phương trình g(x) = x hay $\lambda=k=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Vậy $\{a_n\}$ có giới hạn $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Cách 2. Vì f(x) nghịch biến nên g(x) đồng biến. Từ đó $\{a_{2n+1}\}$ là dãy đơn điệu. Nó bị chặn nên hội tụ đến giới hạn λ.

Thêm nữa, $\{a_{2n}\}$ đơn điệu, nó bị chặn nên hội tụ đến giới hạn k. Phương trình g(x) = x có nghiệm dương duy nhất nên $\lambda=k=\dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ (xem thêm Bài 1.13.38, Bài 1.13.40).

Cách 3. $\lambda-a_2=\dfrac{1}{1+\lambda}-\dfrac{1}{1+a_1}=\dfrac{a_1-\lambda}{(1+\lambda)(1+a_1)}$

$$\lambda-a_3=\frac{1}{1+\lambda}-\frac{1}{1+a_2}=\frac{a_2-\lambda}{(1+\lambda)(1+a_2)}=\frac{-(a_1-\lambda)}{(1+\lambda)^2(1+a_1)(1+a_2)}.$$

Theo quy nạp ta được:

$$\lambda-a_{n+1}=\frac{1}{1+\lambda}-\frac{1}{1+a_n}=(-1)^{n-1}\frac{(a_1-\lambda)}{(1+\lambda)^n(1+a_1)+...+(1+a_n)}.$$

Theo quy nạp dễ thấy $0 < a_n < 1$. Vậy

$$|\lambda-a_{n+1}|<\frac{|a_1-\lambda|}{(1+\lambda)^n}\downarrow 0 \qquad (n\to\infty).$$

Bài 1.13.26. Khảo sát dãy $\{u_n\}$ cho bởi

$$u_0=1;\qquad u_{n+1}=\frac{1}{2+u_n},\qquad n\ge 0.$$

Giải. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$, $x \geq 0$. Nếu $\{u_n\}$ có giới hạn λ thì λ là nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{2+x}=x \Leftrightarrow x=\lambda=\sqrt{2}-1 \approx 0{,}414$.

Lưu ý rằng $|f'(x)| = \left|-\dfrac{1}{(2+x)^2}\right| \leq \dfrac{1}{2}$ nên xảy ra trường hợp ánh xạ co, từ đó ta có:

$$|u_{n+1}-\lambda| = \left|\frac{1}{2+u_n} - \frac{1}{2+\lambda}\right| = \frac{|u_n-\lambda|}{|2+u_n|(2+\lambda)} \leq \frac{1}{4}|u_n-\lambda|.$$

Theo quy nạp dễ suy ra

$$|u_n-\lambda| \leq \frac{1}{4^n}|u_0-\lambda|, \; n \geq 0.$$

Vậy $\qquad u_n \to \lambda, (n \to \infty)$.

§1.13d. Khảo sát độ lệch

Theo phương pháp này, trước hết ta tìm giới hạn khả dĩ λ của dãy $\{u_n\}$. Lập $|u_n-\lambda|$ gọi là độ lệch của u_n với số λ. Trong nhiều trường hợp, khảo sát sự hội tụ của $|u_n-\lambda|$ khá dễ dàng.

Bài 1.13.27. Khảo sát dãy $\{u_n\}$ cho bởi

$$u_0>0; \; u_{n+1}=\frac{u_n^2+3}{2(u_n+1)}, \; n \geq 0.$$

Giải. Rõ ràng $u_n>0, \; \forall n$. Nếu $\{u_n\}$ có giới hạn λ thì bằng cách chuyển qua giới hạn ta có

$$\lambda=\frac{\lambda^2+3}{2(\lambda+1)} \Leftrightarrow \lambda=1.$$

Mặt khác

$$|u_{n+1}-1| \leq \frac{(u_n-1)^2}{2(u_n+1)}=\frac{|u_n-1|}{2(u_n+1)}|u_n-1| \leq \frac{1}{2}|u_n-1|.$$

Áp dụng liên tiếp các bất đẳng thức ta được

$$|u_n-1| \leq \frac{1}{2^n}\,|u_0-1| \to 0 \; (n \to \infty).$$

Bài 1.13.28. Chứng minh rằng dãy

$2,\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},...$ có giới hạn. Tìm giới hạn đó.

Giải. *Cách 1.* Ta có

$$u_1 = 2, u_{n+1} = 2+\frac{1}{u_n},\ n \ge 1.$$

Rõ ràng $u_n > 0\ \forall n$. Nếu dãy có giới hạn λ thì $\lambda = 2+\frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = 1+\sqrt{2}$.

Xét $x_n = u_n - \lambda = u_n - \left(1+\sqrt{2}\right)$. Ta chứng minh theo quy nạp rằng $|x_n| < 1$ và $|x_{n+1}| < \frac{1}{2}|x_n|$. Quả vậy, khẳng định đúng với n = 1. Lại có $x_{n+1} = u_{n+1} - \lambda = 2+\frac{1}{\lambda+x_n} - \lambda = \frac{x_n\left(1-\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{2}+x_n}$. Vậy, nếu khẳng định đúng với n thì

$|x_{n+1}| < |x_n| \left|\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right| < \frac{1}{2}|x_n|$, suy ra khẳng định cũng đúng với n + 1.

Từ đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1+\sqrt{2}$.

Cách 2. Xét hai dãy $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ với $a_k = u_{2k}$, $b_k = u_{2k+1}$.

Đây là hai dãy dương, ngoài ra:

$$a_0 = a,\ a_{k+1} = 2+\frac{1}{2+\frac{1}{a_k}},\ k \ge 0;$$

$$b_0 = 2+\frac{1}{2},\ \ b_{k+1} = 2+\frac{1}{2+\frac{1}{b_k}},\ k \ge 0.$$

Dễ chứng minh $\{a_k\}$ tăng, bị chặn trên bởi 3 nên tồn tại $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\{b_k\}$ giảm, bị chặn dưới bởi 2, có giới hạn $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Cả a và b đều thỏa mãn phương trình $x = 2+\frac{1}{2+\frac{1}{x}}$,

vậy $a = b = 1+\sqrt{2}$. Từ đó $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1+\sqrt{2}$.

Bài 1.13.29. Khảo sát dãy $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 0; \\ u_{n+1} = \sqrt{3 - v_n}\ ; \\ v_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}\ . \end{cases}$$

Giải.

Bước 1. Khảo sát sơ bộ. Ta sẽ chứng tỏ rằng dãy luôn tồn tại $\forall$n, hơn nữa $0 \le u_n \le \sqrt{3}; 0 \le v_n \le 3$. Điều đó dễ chứng minh bằng quy nạp.

Bước 2. Tìm giới hạn "khả dĩ". Giả sử có các giới hạn

$\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \in [0;+\infty)$; $k = \lim\limits_{n\to\infty} v_n \in [0;+\infty)$. Qua giới hạn ta được:

$$\begin{cases} \lambda = \sqrt{3-k} \\ k = \sqrt{3+\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 = 3-k \\ k^2 = 3+\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ k = 2. \end{cases}$$

Bước 3. Khảo sát độ lệch. Đặt $\begin{cases} a_n = u_n - 1 \\ b_n = v_n - 2. \end{cases}$

Ta coi $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là những dãy truy hồi mới, biểu diễn a_{n+1}, b_{n+1} qua a_n, b_n ta được:

$$a_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \sqrt{3 - v_n} - 1 = \frac{-b_n}{\sqrt{1 - b_n} + 1},$$

$$b_{n+1} = v_{n+1} - 2 = \sqrt{3 + u_n} - 2 = \frac{a_n}{\sqrt{4 + a_n} + 2}.$$

Rõ ràng $\quad |a_{n+1}| \le |b_n|; \quad |b_{n+1}| \le \left|\frac{a_n}{2}\right|.$

Đặt $\quad M_n = \mathrm{Max}\,(|a_n|, |b_n|)$ thì

$$|a_{n+2}| \le |b_{n+1}| \le \frac{|a_n|}{2} \le \frac{M_n}{2};$$

$$|b_{n+2}| \le \frac{|a_{n+1}|}{2} \le \frac{|b_n|}{2} \le \frac{M_n}{2}.$$

Vậy $M_{n+2} \le \frac{M_n}{2}$ (Dãy $\{M_n\}$ co lại sau 2 bước). Từ đó

$$\begin{cases} M_{2k} \le \dfrac{1}{2^k} M_0 \\ M_{2k+1} \le \dfrac{1}{2^k} M_1 \end{cases} \Rightarrow \quad a_n \to 0;\ b_n \to 0\ (n\to\infty).$$

Đáp số $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 2$.

Bài 1.13.30. Cho 2 dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ xác định bởi

$a_1 = 3$, $b_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2b_n$; $\quad b_{n+1} = a_n + b_n$.

Tìm giới hạn của $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

Giải. Đặt $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ ta được $c_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{a_n + b_n} = \dfrac{c_n + 2}{c_n + 1}$.

Rõ ràng a_n , b_n dương, suy ra $1 < c_n$, $\forall n$. Giả sử $\{c_n\}$ có giới hạn λ thì

$$\lambda = \frac{\lambda+2}{\lambda+1} \Rightarrow \lambda = \sqrt{2} \text{ . Ta có}$$

$$\left|c_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{c_n + 2}{c_n + 1} - \sqrt{2}\right| = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{c_n + 1}\left|c_n - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2}\left|c_n - \sqrt{2}\right|.$$

Từ đó $\left|c_{n+1} - \sqrt{2}\right| < \dfrac{1}{2^n}\left|c_1 - \sqrt{2}\right|$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \sqrt{2}$.

Lưu ý: Bạn đọc cũng có thể nhận thấy đối với hàm số $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ có $\left|f'(x)\right| = \dfrac{1}{(x+1)^2} < \dfrac{1}{2}$ với $x > 1$ nên đối với $\{c_n\}$ đã xảy ra trường hợp ánh xạ co (xem §1.13c).

§1.13e. Trường hợp tổng quát

Giả sử f: $I \to I$ là hàm số từ khoảng đóng $I \subset \mathbf{R}$ vào I, còn dãy $\{u_n\}$xác định bởi công thức truy hồi $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Nếu f(x) liên tục và $u_n \to \lambda \in R$ $(n \to \infty)$ thì $\lambda \in I$ và $f(\lambda) = \lambda$ (λđược gọi là điểm bất động của ánh xạ f).

Thường ta phải giải phương trình này, các nghiệm của nó gọi là các giới hạn "khả dĩ" của dãy $\{u_n\}$.

b.1) Giả sử f(x) đơn điệu tăng.

Trường hợp 1. $u_0 \le u_1 \Rightarrow u_1 \le u_2 \Rightarrow \dots$ vậy $\{u_n\}$ tăng.

Trường hợp 2. $u_0 \ge u_1 \Rightarrow u_1 \ge u_2 \Rightarrow \dots$ vậy $\{u_n\}$ giảm.

Như vậy $\{u_n\}$ đơn điệu. Cần xét thêm tính bị chặn của nó. Thường $\{u_n\}$ bị chặn bởi giới hạn "khả dĩ".

Việc nghiên cứu các khoảng ổn định (a; b): f(a; b) $\subset$ (a; b) là rất hữu ích.

b.2) Giả sử f(x) đơn điệu giảm.

Khi đó g = f_0f đơn điệu tăng. Theo phần b.1, 2 dãy $\{u_{2n}\}$ và $\{u_{2n+1}\}$ đơn điệu, chiều biến thiên của chúng trái ngược nhau.

Việc xét dấu của g(x) - x hoặc cũng vậy, $\frac{g(x)}{x} - 1$ giúp ta dễ dàng xác định chiều biến thiên của hai dãy này. Cần xét thêm tính bị chặn và sự bằng nhau của giới hạn hai dãy chẵn lẻ đó.

Lưu ý: Để xét tính đơn điệu của f có thể dùng nhận xét hoặc tính đạo hàm $f'(x)$; để xét dấu của u_1 - u_0 đôi khi ta xét dấu của f(x) - x.

Bài 1.13.31. Khảo sát dãy xác định bởi $u_0 \ge 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{6}\left(u_n^2 + 8\right)$.

Giải. $u_{n+1} = f(u_n)$ với $f(x) = \frac{x^2+8}{6}$.

Rõ $u_n \ge 0,\ \forall n$. Ngoài ra nếu $\{u_n\}$ có giới hạn λ thì λ là nghiệm của phương trình

$$\lambda = \frac{\lambda^2+8}{6} \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ hoặc } \lambda = 4. \qquad (*)$$

Vì f(x) đồng biến khi x > 0 nên ta có bảng biến thiên

x	0	2	4	$+\infty$
f(x)	$\frac{4}{3}$ ↗	2 ↗	4 ↗	$+\infty$

f(x) tăng nên $\{u_n\}$ đơn điệu, chiều biến thiên của nó phụ thuộc vào dấu của u_1 - u_0.

Lại có $f(x)-x=\frac{1}{6}(x-2)(x-4)$, vậy

$$u_1-u_0=f(u_0)-u_0=\frac{1}{6}(u_0-2)(u_0-4) \qquad (**)$$

Trường hợp 1. $u_0\in[0;2]$. Từ (**), $u_1\geq u_0$. Từ bảng biến thiên suy ra $u_n\in[0;2], \forall n$. Dễ suy ra theo quy nạp rằng $\{u_n\}$ tăng. Vậy $\exists\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}u_n\in[0;2]$. Từ (*), $\lambda=2$.

Trường hợp 2: $u_0\in(2;4)$. Tương tự, $\{u_n\}$ giảm, ≥ 2. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lambda\in[2;4)$. Từ (*), $\lambda=2$.

Trường hợp 3: $u_0=4$. Khi đó $u_n=4$, $\forall n$, và $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=4$.

Trường hợp 4: $u_0\in(4;+\infty)$. Từ (**) suy ra $u_1-u_0>0$, vậy $\{u_n\}$ tăng. Nếu nó hội tụ đến λ thì $\lambda\geq u_0>4$, mâu thuẫn (*). Vậy $u_n\uparrow+\infty, (n\to\infty)$.

Bài 1.13.32. Khảo sát dãy $\{a_n\}$ xác định bởi

$$a_1=a>1; \quad a_{n+1}=\frac{a_n}{\ln a_n},\ n\geq 1.$$

Giải. Xét hàm số $f(x)=\frac{x}{\ln x}$, $x>1$.

$$f'(x)=\frac{1}{\ln x}\left(1-\frac{1}{\ln x}\right).$$

Bảng biến thiên

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

Vậy $f(x)\geq e, \forall x\geq 1$.

Ta có $a_2=f(a)\geq e$; $a_{n+1}=f(a_n)\geq e, \forall n\geq 2$; Mặt khác

$$a_3 = f(a_2) = \frac{a_2}{\ln a_2} < a_2.$$

Từ đó dãy a_2, a_3, a_4... giảm. Đặt $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ thì $a = \frac{a}{\ln a}$ hay a = e.

Cách 2. (Dùng ánh xạ co). f(x) không là ánh xạ co. Từ bảng biến thiên, $f(x) \geq e,\ \forall x \geq 1;\ a_2 = f(a_1) \geq e$. Theo bất đẳng thức Cauchy,

$$0 \leq f'(x) = \frac{1}{\ln x}\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right) \leq \frac{1}{4},\ \forall x \geq e.$$

Vậy f(x) lại là ánh xạ co trên $[e; +\infty)$. Theo phương pháp của Bài 1.13.23, dãy $\{a_n, n \geq 2\}$ hội tụ. Giới hạn của nó là e.

Bài 1.13.33. Khảo sát dãy $\{a_n\}$ cho bởi

$$a_1 = \sqrt{2}; \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}},\ n \geq 1.$$

Giải. Rõ ràng $a_{n+1} = f(a_n)$ với $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{x}},\ x \geq 0$.

Dễ suy ra theo quy nạp rằng $0 \leq a_n \leq 2, \forall n \geq 1$. Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{2+\sqrt{x}}} > 0,$$ với x > 0. Vậy f(x) tăng.

Lại có $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt[4]{2}} > \sqrt{2} = a_1$, suy ra $\{a_n\}$ tăng. Vậy tồn tại $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, nó là nghiệm của phương trình $a = \sqrt{2 + \sqrt{a}}$.

Lưu ý: Ta có thể chứng minh $\{a_n\}$ tăng theo cách khác. Trước hết theo quy nạp $0 < a_n < 2$. Hơn nữa $a_{n+1}^2 - a_n^2 = \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}$ nên theo quy nạp $\{a_n\}$ tăng.

Bài 1.13.34. Cho a > 0 cố định, xét dãy $\{a_n\}$ xác định như sau:

$$a_1 > 0; \qquad a_{n+1} = a_n \frac{a_n^2 + 3a}{3a_n^2 + a},\ n \geq 1.$$

Tìm các giá trị a_1 để dãy hội tụ và khi đó tìm giới hạn của dãy.

Giải. Dễ chứng minh a_n xác định, dương.

Xét $$f(x) = \frac{x^3 + 3ax}{3x^2 + a}, x > 0.$$

Rõ ràng $$a_{n+1} = f(a_n),\ n \geq 1.$$

Nếu dãy có giới hạn λ thì λ phải là nghiệm dương của phương trình

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = \frac{2x\left(a - x^2\right)}{3x^2 + a} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{a} \text{ hoặc } x = 0.$$

$f'(x) = \dfrac{\left(x^2 - a\right)^2}{\left(3x^2 + a\right)^2} \geq 0$, vậy f(x) đồng biến. Có bảng biến thiên

$$\begin{array}{c|ccc}
x & 0 & \sqrt{a} & +\infty \\
\hline
 & & & +\infty \\
f(x) & & \sqrt{a} \nearrow & \\
 & 0 \nearrow & &
\end{array}$$

Từ đó, $\{a_n\}$ là dãy đơn điệu. Chiều biến thiên của $\{a_n\}$ phụ thuộc vào dấu của a_2 - a_1. Ta có:

$$a_2 - a_1 = f(a_1) - a_1 = \frac{2a_1\left(a - a_1^2\right)}{3a_1^2 + a} \text{ cùng dấu với } a - a_1^2.$$

Trường hợp 1. $0 < a_1 < \sqrt{a} \Rightarrow a_2 - a_1 > 0 \Rightarrow \{a_n\}$ tăng, từ bảng biến thiên, dễ chứng minh theo quy nạp rằng $a_n \leq \sqrt{a}$. Vậy dãy hội tụ.

Trường hợp 2. $a_1 = \sqrt{a}$: Dãy hằng, hội tụ về $\sqrt{a}$.

Trường hợp 3. $a_1 > \sqrt{a} \Rightarrow a_2 - a_1 < 0 \Rightarrow \{a_n\}$ giảm, từ bảng biến thiên, dễ chứng minh theo quy nạp rằng $a_n > \sqrt{a}$. Vậy nó hội tụ.

Tóm lại, dãy hội tụ về $\sqrt{a}$, $\forall a_1 > 0$.

Bài 1.13.35. Cho a cố định bất kỳ, hãy khảo sát dãy $\{a_n\}$cho bởi:

$$a_1 \in \mathbf{R},\ a_{n+1} = a_n^2 + (1 - 2a)a_n + a^2, \quad n \geq 1.$$

Giải. $a_{n+1} = (a_n - a)^2 + a_n \geq a_n \Rightarrow \{a_n\}$ tăng.

Nếu nó có giới hạn λ thì λ là nghiệm của phương trình f(λ) = λ, trong đó f(x) = x^2 + (1-2a)x + a^2. Vậy λ = a.

Vì $f(x) = a \Leftrightarrow x = a$ hoặc x = a - 1, dễ thu được bảng biến thiên của f(x).

x	$-\infty$		$a-1$		$a-1/2$		a		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	a	$\searrow$	$a-1/4$	$\nearrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

Trường hợp 1: $a_1 > a$. $\{a_n\}$ tăng. Nếu $\lambda < +\infty$, $\lambda = \lim a_n$ thì $\lambda > a$, vô lý. Vậy dãy phân kì.

Trường hợp 2: $a-1 \le a_1 \le a$. Từ bảng biến thiên, $a-1 \le a_n \le a\ \forall n$, $\{a_n\}$ tăng. Vậy dãy có giới hạn a.

Trường hợp 3: $a_1 < a-1$. Từ bảng biến thiên, $a_2 = f(a) > a$. Dãy phân kì.

Bài 1.13.36. Chứng minh rằng dãy truy hồi

$$0 < a_1 < 1 ; \qquad a_{n+1} = \cos(a_n),\ n \ge 1$$

hội tụ tới nghiệm duy nhất của phương trình cosx = x.

Giải. Dễ chứng minh theo quy nạp rằng $a_n \in (0;1)$

Hàm số f(x) = cosx nghịch biến trên $[0\,;1]$. Vậy h(x) = cos(cosx) đồng biến trên $[0\,;1]$.

Đối với 2 dãy $\{a_{2n+1}\};\{a_{2n}\}$ ta có:

$$a_{2(n+1)-1} = h(a_{2n-1}) \Rightarrow \{a_{2n-1}\} \text{đơn điệu;}$$

$$a_{2(n+1)} = h(a_{2n}) \Rightarrow \{a_{2n}\} \text{ đơn điệu.}$$

Như đã nói, 2 dãy này bị chặn, vậy chúng hội tụ.

Đặt $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}$, $k = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$ thì λ, k thỏa mãn phương trình cos(cosx) = x.

Dễ thấy cả hai phương trình cosx = x và cos(cosx) = x đều có nghiệm duy nhất và hai nghiệm duy nhất đó trùng nhau. Vậy k = λ, dãy $\{a_n\}$ hội tụ và hội tụ đến nghiệm duy nhất của phương trình cosx = x.

Lưu ý: $\{a_{2n-1}\}$ tăng $\Leftrightarrow a_3 - a_1 \ge 0$

$\Leftrightarrow a_3 \ge a_1 \Leftrightarrow a_4 = \cos a_3 \le a_2 = \cos a_1 \Leftrightarrow \{a_{2n}\}$ giảm.

Vậy chiều biến thiên của $\{a_{2n-1}\}$ và $\{a_{2n}\}$ là trái ngược nhau. Bạn đọc có thể chỉ rõ với $0 \le a_1 < \lambda$ thì $\{a_{2n-1}\}$ tăng, $\lambda < a_1 < 1$ thì $\{a_{2n-1}\}$ giảm.

Bài 1.13.37. Khảo sát sự hội tụ của dãy $\{a_n\}$ xác định bởi

$$a_1 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]; \ a_{n+1} = \frac{\pi}{3}\sin a_n, n \geq 1.$$

Giải. Dễ chứng minh theo quy nạp rằng $0 \leq a_n \leq \frac{\pi}{2}, \ \forall n$.

Rõ ràng $a_{n+1} = f(a_n)$ với $f(x) = \frac{\pi}{3}\sin x$. $f'(x) = \frac{\pi}{3}\cos x \geq 0$, nên f(x) đồng biến (tuy nhiên f(x) không là ánh xạ co). Đặt $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ thì $g' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} < 0$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Từ đó g(x) nghịch biến.

Gọi x_0 là nghiệm dương của phương trình $\frac{\pi}{3}\sin x = x$ hay $\frac{\sin x}{x} = \frac{3}{\pi}$, ta có bảng biến thiên

x	0		x_0		$\pi/2$
$\frac{\pi}{3}\sin x$	0	$\nearrow$	x_0	$\nearrow$	$\pi/3$
$\dfrac{\frac{\pi}{3}\sin x}{x}$	$\pi/3$	$\searrow$	1	$\searrow$	$2/3$

Trường hợp 1: $0 < a_1 \leq x_0$. $\quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{\pi}{3}\sin a_1}{a_1} \geq 1$

hay $a_1 \leq a_2$. f(x) đồng biến nên theo quy nạp $\{a_n\}$ tăng; nó sẽ hội tụ.

Trường hợp 2: $x_0 < a_1 \leq \frac{\pi}{2}$. $\quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{\pi}{3}\sin a_1}{a_1} < 1$

$\Rightarrow a_2 < a_1$, f(x) đồng biến nên theo quy nạp $\{a_n\}$ giảm, nó sẽ hội tụ.

Như vậy, $\forall a_1 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\{a_n\}$ hội tụ về nghiệm dương của phương trình $\frac{\sin x}{x} = \frac{3}{\pi}$.

Bài 1.13.38. Cho $a_1 > 0$, xác định dãy $\{a_n\}$ bởi $a_{n+1} = 2^{1-a_n}$, $n \geq 1$. Khảo sát tính hội tụ của dãy.

Giải.

Nhận thấy rằng $0 < a_n < 2, \ \forall n \geq 2$.

Rõ ràng $a_{n+1} = f(a_n), \ n \geq 1$ với $f(x) = 2^{1-x}$.

f(x) nghịch biến nên g(x) = f(f(x)) đồng biến.

Đặt $F(x) = g(x) - x$ thì $F'(x) < 0$. Từ đó phương trình $F(x) = 0$ hay g(x) = x có nghiệm duy nhất x = 1.

Đối với dãy $\{a_{2n-1}\}$ ta có $a_{2n+1} = g(a_{2n-1})$ nên $\{a_{2n-1}\}$đơn điệu, gọi $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}$.

Cũng vậy, $a_{2(n+1)} = g(a_{2n})$ nên $\{a_{2n}\}$ đơn điệu, gọi $k = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$.

Cả λ và k đều là nghiệm của phương trình g(x) = x nên λ = k = 1. Từ đó, $\{a_n\}$ hội tụ đến giới hạn 1.

Lưu ý: Chiều biến thiên của $\{a_{2n}\}$ và $\{a_{2n-1}\}$ là ngược nhau.

Bài 1.13.39. Tìm giới hạn của dãy cho bởi

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = 2^{\frac{a_n}{2}}, \ n \geq 1.$$

Giải. Dễ chứng tỏ theo quy nạp rằng $1 \leq a_n \leq 2$.

Lại có $a_{n+1} = f(a_n)$, trong đó $f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$ là hàm tăng.

Xét $g(x) = f(x) - x, \ x \in [1; 2], \ g'(x) = 2^{\frac{x}{2}}.\frac{1}{2}\ln 2 - 1 < 0$

$$\Rightarrow g(x) \geq g(2) = 0 \Rightarrow f(x) \geq x, \ \forall x \in [1; 2].$$

Vậy $a_2 = f(a_1) \geq a_1$. Theo quy nạp $\{a_n\}$ tăng. Giới hạn λ của nó thỏa mãn $2^{\lambda/2} = \lambda$ hay λ = 2.

Bài 1.13.40. Khảo sát dãy $\{x_n\}$ với

$$x_0 = a \in (0; 1); \qquad x_n = \sqrt{1 - x_{n-1}}, \qquad n \geq 1.$$

Giải. Dễ thấy $x_n \in (0; 1), \ \forall n$. Lại có $x_{n+1} = f(x_n), n \geq 0$, trong đó $f(x) = \sqrt{1-x}$.

$f : [0; 1] \to [0; 1]$, f nghịch biến; $f(x) = x \Leftrightarrow x = a_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Từ đó $g(x) = f(f(x)) = \sqrt{1-\sqrt{1-x}}$ đồng biến.

Phương trình g(x) = x có 3 nghiệm x = 0; x = 1; x = a_0. Ta không thể xét đơn giản như Bài 1.13.39 được. Đặt F(x) = g(x) - x, có bảng biến thiên

x	0		a_0		1
$f(x)$	1	$\searrow$	a_0	$\searrow$	0
$F(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	0	$\nearrow$	a_0	$\nearrow$	1

Trường hợp 1: $0<a<a_0$. Dễ chứng minh theo quy nạp rằng $0 < x_{2n} < a_0 < x_{2n-1} < 1$, $\forall n \ge 1$. Hơn nữa ta có

$$x_2 - x_0 = g(x_0) - x_0 > 0 \text{ hay } x_2 > x_0.$$

g(x) đồng biến nên theo quy nạp $\{x_{2n}\}$ tăng với giới hạn $\lambda \in (0, a_0]$ và là nghiệm của phương trình g(x) = 0. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a_0$.

Mặt khác $x_3 - x_1 = g(x_1) - x_1 < 0$ hay $x_3 < x_1$, g(x) đồng biến nên theo quy nạp $\{x_{2n+1}\}$ giảm. Nó có giới hạn $\lambda \in [a_0; 1)$ và là nghiệm của phương trình g(x) = 0. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a_0$.

Từ đó
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a_0.$$

Trường hợp $a_0 < a < 1$ tương tự. Nếu $a = a_0$, dãy hằng.

Tóm lại, dãy có giới hạn $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\forall a \in (0; 1)$.

Bài 1.13.41. Cho dãy $\{a_n\}$ xác định bởi

$$a_1 = 1; \qquad a_n = \left(a_{n-1}^{-7/3} + 1\right)^{-3/13}, \ n \ge 2.$$

Chứng minh rằng $\{a_n\}$ có giới hạn. Đặt $x_0 = -\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ thì x_0 là nghiệm của phương trình

$$x^{13} - x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 1 = 0.$$

Giải. Dễ suy ra theo quy nạp rằng $a_n \in (0;1]$. Rõ ràng $a_{n+1} = f(a_n)$, $n \geq 1$, trong đó $f(x) = \left(x^{-7/3} + 1\right)^{-3/13}$, f(x) đồng biến.

Ta có $a_2 = 2^{-3/13} < 1 = a_1$. Theo quy nạp suy ra $\{a_n\}$ giảm. Nó bị chặn dưới bởi 0 nên có giới hạn $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

f(x) liên tục nên λ là nghiệm của phương trình $x = \left(x^{-7/3} + 1\right)^{-3/13}$

hay $x^{-13/3} = x^{-7/3} + 1 \Leftrightarrow x^{-13/3} = x^2 . x^{-13/3} + 1$

$\Leftrightarrow \left(1 - x^2\right)^3 = x^{13} \Leftrightarrow \left(1 - (-x)^2\right)^3 + (-x)^{13} = 0$.

Khai triển, ta được điều phải chứng minh.

§1.13f. Lập dãy mới - Dãy qua dãy

Trong nhiều trường hợp, nếu ta biết cách đặt ra một dãy mới, ta có thể đơn giản đáng kể lời giải. Chúng ta đã có những kinh nghiệm về điều này ở mục §1.7; các Bài 1.12.9; 1.12.10; 1.13.1; 1.13.2; 1.13.29; 1.13.30. Sau đây là một số ví dụ bổ sung.

Bài 1.13.42. Cho dãy $\{x_n\}$ xác định như sau

$$x_0 = 0; \qquad x_n = \frac{x_{n-1}}{2004} + (-1)^n, \quad n \geq 1.$$

Tính $$\lim_{n\to\infty} x_n^2.$$

Giải. Qua giới hạn hai vế hoặc bình phương hai vế rồi qua giới hạn đều không thành công. Bây giờ nhân hai vế với 2004^n ta có:

$$2004^n x_n = 2004^{n-1} x_{n-1} + (-1)^n\, 2004^n.$$

Đặt $y_n = 2004^n x_n$ ta đi đến

$$y_n = y_{n-1} + (-1)^n\, 2004^n \text{ hay}$$

$$y_n - y_{n-1} = (-1)^n\, 2004^n,\ n \geq 1.$$

Vậy
$$y_n = (y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \ldots + (y_1 - y_0) + y_0$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i\, 2004^i,\ n \geq 1.$$

Từ đó $$x_n = \frac{y_n}{2004^n} = \frac{-1+(-1)^n 2004^n}{2004^{n-1}2005}.$$

Suy ra $$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \left(\frac{2004}{2005}\right)^2.$$

Lưu ý: Các bạn cũng có thể nhân hai vế với $(-1)^n$ rồi đặt $y_n = (-1)^n x_n$.

Bài 1.13.43. Khảo sát dãy $\{u_n\}$ cho bởi

$$u_0 = a > 0;\quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + \sqrt{u_{n-1} + \ldots + \sqrt{u_0}}},\ n \geq 0.$$

Giải. $u_{n+1} = \sqrt{u_n + \sqrt{u_{n-1} + \ldots + \sqrt{u_0}}} = \sqrt{u_n + u_n} = \sqrt{2}\sqrt{u_n}$.

Vậy $$\frac{u_{n+1}}{2} = \sqrt{\frac{u_n}{2}}.$$

Đặt $\frac{u_n}{2} = v_n$ thì $v_{n+1} = (v_n)^{1/2}$, suy ra

$$v_n = v_1^{\frac{1}{2^{n-1}}} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$.

Bài 1.13.44. Cho $x \in \mathbf{R}$, $a_{i0} = \frac{x}{2^i}$; $a_{ij+1} = a_{ij}^2 + 2a_{ij}$, $i, j = 0, 1, 2, 3\ldots$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nn}$.

Giải. $$a_{n0}(x) = \frac{x}{2^n};\ a_{n1}(x) = a_{n0}(x)(a_{n0}(x)+2), \ldots,$$
$$a_{nn}(x) = a_{n\,n-1}(x)(a_{n\,n-1}(x)+2).$$

Từ đó nếu ta đặt $a_{nn}(x) = p_n(x)$, $n \geq 0$ thì $p_n(x)$ là đa thức ẩn x (bậc 2^n), ngoài ra

$$a_{n+1\,0}(x) = \frac{x}{2^{n+1}} = \frac{x/2}{2^n} = a_{n0}\left(\frac{x}{2}\right);$$

$$a_{n+1\,1}(x) = a_{n+1\,0}(x)(a_{n+1\,0}(x)+2) = a_{n1}\left(\frac{x}{2}\right)\ldots$$

$$a_{n+1\,n}(x) = a_{nn}\left(\frac{x}{2}\right);$$

$$a_{n+1\,n+1}(x) = a_{nn}\left(\frac{x}{2}\right)\left(a_{nn}\left(\frac{x}{2}\right)+2\right).$$

Vậy $$p_{n+1}(x)=\left(p_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2+2p_n\left(\frac{x}{2}\right). \qquad (*)$$

Cộng 1 vào hai vế của (*) ta được

$$p_{n+1}(x)+1=\left(p_n\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)^2 .$$

Từ đó bằng cách đổi biến $q_n(x)=1+p_n(x)$ ta được

$$q_n(x)=\left(q_0\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)^{2^n} \text{ hay } 1+p_n(x)=\left(1+\frac{x}{2^n}\right)^{2^n} .$$

Vậy $$A=\lim_{n\to\infty} a_{nn}=\lim_{n\to\infty} p_n(x)=e^x-1 .$$

Bài 1.13.45. Khảo sát sự hội tụ của dãy $\{x_n\}$với

$$x_1= a >0,\ (n+2)^2 x_{n+1} =n^2x_n-n-1,\ \ n\geq 1 .$$

Giải. Đặt $y_n=x_n+a$. Ta sẽ chọn a sao cho thu được dãy $\{y_n\}$ "tốt" theo nghĩa nào đó.

Ta có $x_n = y_n-a$. Từ đó

$$(n+2)^2(y_{n+1}-a) = n^2(y_n-a)-n-1$$

hay $$(n+2)^2 y_{n+1} = n^2y_n+(n+1)(4a-1).$$

Rõ ràng ta nên chọn a = 1/4. Khi đó

$$(n+2)^2 y_{n+1} = n^2y_n \text{ hay } y_{n+1} = \frac{n^2}{(n+2)^2}y_n .$$

Bằng phép nhân ta thu được

$$y_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^2\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \cdots \left(\frac{1}{3}\right)^2 y_1 = \left(\frac{2}{(n+2)(n+1)}\right)^2 y_1 .$$

Vậy $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(y_n-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}.$$

Bài 1.13.46. Cho hai số dương u_0, v_0. Với mỗi n nguyên dương đặt:

$$u_n=\frac{u_{n-1}+2v_{n-1}}{3} \text{ và } v_n=\frac{2u_{n-1}+v_{n-1}}{3} .$$

Chứng minh hai dãy $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ hội tụ.

Giải. Cộng, trừ 2 vế ta được $\begin{cases} u_n + v_n = u_{n-1} + v_{n-1} \\ u_n - v_n = -\frac{1}{3}(u_{n-1} - v_{n-1}). \end{cases}$

Vậy nếu đặt $x_n = u_n + v_n, \quad y_n = u_n - v_n, \ n \ge 0$

ta được $x_n = x_{n-1} \quad y_n = -\frac{1}{3}y_{n-1}$.

Từ đó $x_n = x_0 = u_0 + v_0; \quad y_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n (u_0 - v_0)$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = u_0 + v_0$; $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \frac{u_0 + v_0}{2}$.

Bài 1.13. 47. Cho dãy $\{a_n\}$ bị chặn thoả mãn $a_{n+1} \ge a_n - \frac{1}{2^n}$, $n \ge 1$. Chứng minh dãy $\{a_n\}$ hội tụ.

Giải. $a_{n+1} \ge a_n - \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{2^n} \ge a_n - \frac{1}{2^{n-1}}$.

Bây giờ ta đặt $a_n - \frac{1}{2^{n-1}} = b_n$ thì $b_{n+1} \ge b_n$.

Vậy $\{b_n\}$ là dãy tăng và bị chặn. $\{b_n\}$ hội tụ suy ra $\{a_n\}$ hội tụ.

Bài 1.13.48. Cho a và a_1 dương còn $a_{n+1} = a_n(2\text{-}a\ a_n)$; n = 1, 2, ... Khảo sát sự hội tụ của dãy $\{a_n\}$.

Giải. Từ cách xác định dãy ta có $aa_{n+1} = a\ a_n\ (2\text{-}\ a\ a_n)$.

Vậy nếu ta đặt $b_n = a\ a_n$ thì $b_{n+1} = b_n\ (2 - b_n)$. $\{a_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi $\{b_n\}$ hội tụ.

Có nhiều cách để nghiên cứu dãy $\{b_n\}$. Chẳng hạn ta có

$b_{n+1} = -\ (b_n - 1)^2 + 1$ hay $b_{n+1} - 1 = -\ (b_n - 1)^2$. Từ đó

$$b_{n+1} - 1 = -(b_1 - 1)^{2^n}.$$

$\{b_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi $|b_1 - 1| \le 1$ hay $0 \le a\,a_1 \le 2$.

Nếu $a_1 = 2/a$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, còn nếu $0 < a\ a_1 < 2$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1/a$.

Bài 1.13.49. Dãy $\{a_n\}$ bị chặn trên và thoả mãn điều kiện

$$a_{n+1} - a_n > -\frac{1}{n^2},\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Chứng tỏ dãy $\{a_n\}$ hội tụ.

Giải. $a_{n+1} - a_n > -\frac{1}{n^2} > -\frac{1}{n(n-1)} = \frac{-1}{n-1} + \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow\ a_{n+1} - \frac{1}{n} > a_n - \frac{1}{n-1}.$$

Vậy dãy $\{b_n\}$ với $b_n = a_n - \frac{1}{n-1}$ tăng, bị chặn trên. Từ đó $\{b_n\}$ hội tụ và cũng vậy, $\{a_n\}$ hội tụ.

Bài 1.13.50. Giả sử $\{a_n\}$ bị chặn và thoả mãn điều kiện

$$a_{n+1}\sqrt[2^n]{2} \geq a_n,\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Hãy thiết lập sự hội tụ của dãy $\{a_n\}$.

Giải. Từ điều kiện bài toán suy ra

$$a_{n+1}\, 2^{-\frac{1}{2^n}} \geq a_n 2^{-\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Nếu ta đặt $b_n = a_n 2^{-\frac{1}{2^{n-1}}}$ thì $\{b_n\}$ tăng và bị chặn, do đó nó hội tụ.

Rõ ràng $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Bài 1.13.51. Dãy $\{a_n\}$ thoả mãn điều kiện

$$a_{n+1} = 1/(2 - a_n).\ \text{Tìm } \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Giải. Ta thấy $a_{n+1} - 1 = \frac{a_n - 1}{1 + (1 - a_n)} \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n - 1} - 1$.

Vậy đặt $u_n = \frac{1}{a_n - 1}$ thì $u_{n+1} = u_n - 1$.

Áp dụng liên tiếp quan hệ này ta được

$u_{n+1} = u_1 - n \to -\infty\ (n \to \infty)$. Vậy $a_n = \frac{1}{u_n} + 1 \to 1\ (n \to \infty)$.

§1.14. DÃY TRUY HỒI CẤP 2 DẠNG $u_{n+1} = f(u_n, u_{n-1}, n)$

Chúng ta đã xét dãy truy hồi tuyến tính cấp hai hệ số hằng số ở mục §1.12b. Mục này dành cho dạng tổng quát $u_{n+1} = f(u_n, u_{n-1}, n)$. Các phương pháp với dãy truy hồi cấp một vẫn được áp dụng. Đặt biệt ta phải lưu ý những dãy được xác định bởi các bất đẳng thức.

Bài 1.14.1. Tính giới hạn dãy $\{u_n\}$ biết rằng

$$u_0 > 0;\ u_1 > 0 \quad u_{n+2} = \left(u_n^4 u_{n+1}\right)^{1/5}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Giải. Bằng phép quy nạp đơn giản có $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Đặt $v_n = \ln u_n$ thì

$$v_{n+2} = \ln u_{n+2} = \frac{4}{5}\ln u_n + \frac{1}{5}\ln u_{n+1} = \frac{1}{5}v_{n+1} + \frac{4}{5}v_n.$$

Vậy $\{v_n\}$ là dãy truy hồi tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng số.

$$v_{n+2} - v_{n+1} = -\frac{4}{5}(v_{n+1} - v_n).$$

Bây giờ đặt $p_n = v_{n+1} - v_n$ thì

$$p_0 = v_1 - v_0;\ p_1 = \left(-\frac{4}{5}\right)^1 p_0; \dots; p_n = \left(-\frac{4}{5}\right)^n p_0$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = v_0 + (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \dots + (v_{n+1} - v_n)$$

$$= v_0 + p_0 + \left(-\frac{4}{5}\right)p_0 + \dots + \left(-\frac{4}{5}\right)^n p_0 \to \frac{4}{9}v_0 + \frac{5}{9}v_1\ (n \to \infty).$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{v_n} = u_0^{4/9}\, u_1^{5/9}$.

Bài 1.14.2. Dãy $\{a_n\}$ cho bởi

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_{n+1} = \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n},\ n \geq 2.$$

Chứng minh rằng dãy trên bị chặn và tăng thực sự. Tìm giới hạn của dãy này.

Giải. Ta chứng minh theo quy nạp. Trước hết $a_1 < a_2 < a_3$. Hơn nữa giả sử dãy tăng thực sự đến số hạng thứ n + 1 tức là $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$. Khi đó

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \left(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}\right) - \left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}\right)$$
$$= \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_{n-1}} > 0.$$

Vậy $a_{n+2} > a_{n+1}$. Theo quy nạp, dãy $\{a_n\}$ tăng.

Mặt khác dễ thấy $a_n < 4$, vậy dãy có giới hạn λ. λ thoả mãn phương trình $\lambda=\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}$ hay $\lambda = 4$.

Bài 1.14.3. Dãy $\{a_n\}$ cho bởi

$a_1 = 16;\ a_2 = 9;\ a_{n+2} = \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n},\ n \geq 2$. Chứng tỏ rằng dãy $\{a_n\}$ giảm thực sự và tìm giới hạn của dãy.

Hướng dẫn: Dãy giảm, bị chặn dưới bởi 4.

Bài 1.14.4. Cho 2 số thực a và b, xây dựng dãy $\{a_n\}$ như sau

$$a_1 = a,\quad a_2 = b,\quad a_{n+1} = \frac{n-1}{n}a_n + \frac{1}{n}a_{n-1},\ n \geq 2.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Giải. Vì 2 hệ số $\frac{n-1}{n}$, $\frac{1}{n}$ có tổng bằng 1, nhớ đến Bài 1.12.5, ta làm như sau:

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n}(a_n - a_{n-1})$$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}(b-a).$$

Vậy $$a_{n+1} = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{n+1} - a_n)$$

$$= a + (b-a)\left[1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right]$$

$$\to b + (a-b)e^{-1}\ (n \to \infty).$$

Bài 1.14.5. Cho hai số thực a và b, xây dựng $\{a_n\}$ như sau:

$$a_1 = a,\quad a_2 = b,\quad a_{n+1} = \frac{1}{2n}a_{n-1} + \frac{2n-1}{2n}a_n,\ n \geq 2.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Giải. Với $n \geq 2$ ta có

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2n}(a_n - a_{n-1}) = \ldots = (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}n!}(b-a).$$

Giống như Bài 1.14.4 thu được

$$a_{n+1} = a + (b-a)\left[1 - \frac{1}{2.2\,!} + \frac{1}{2^2\,3\,!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}n\,!}\right]$$

$$\to 2b - a - 2(b-a)e^{-1/2} \quad (n \to \infty).$$

Bài 1.14.6. Xét tính hội tụ của dãy truy hồi dưới đây

$a_1 = \sqrt{2}$, $\quad a_2 = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, $a_{n+2} = \sqrt{2+\sqrt{3+a_n}}$, $n \geq 1$.

Giải. Rõ ràng $\quad a_{2n} = \sqrt{2+\sqrt{3+...+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ (2n lần căn);

$$a_{2n+1} = \sqrt{2+\sqrt{3+...+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{2}}}}} \text{ (2n + 1 lần căn).}$$

Vậy $\{a_n\}$ là dãy tăng. Hơn nữa có thể chứng minh theo quy nạp rằng dãy bị chặn trên bởi 3. Vậy dãy có giới hạn $\lambda \in (2;3)$ và λ thoả mãn phương trình $\lambda = \sqrt{2+\sqrt{3+\lambda}}$.

Bài 1.14.7. Cho dãy $\{a_n\}$ với

$a_0 = 1$, $a_1 = 2$ & $n(n+1)a_{n+1} = n(n-1)a_n - (n-2)a_{n-1}$, $(n \geq 1)$.

Chứng minh rằng

$$b_n = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + ... + \frac{a_n}{a_{n-1}} \sim \frac{1}{2}n^2 \quad \text{(khi } n \to \infty).$$

Giải. Từ giả thiết ta có

$1.2.a_2 = 1.0 - (-1).1$ hay $a_2 = 1/2\,!$;

$2.3.a_3 = 2.1.a_2 - 0.a_1$ hay $a_3 = 1/3\,!$;

$3.4.a_4 = 3.2.a_3 - 1.a_2$ hay $a_4 = 1/4\,!$.

Từ đó ta dự đoán công thức $a_n = 1/n\,!$; công thức này được chứng minh theo quy nạp. Suy ra

$$b_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{1/2} + 3 + 4 + ... + (n+1)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \sim \frac{1}{2}n^2.$$

Bài 1.14.8. Chứng minh rằng dãy a_n cho bởi

$$a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(1 + a_n + a_{n-1}^3\right)\ (n > 1)$$

hội tụ và tìm giới hạn của nó.

Giải. Dễ thấy $a_n \geq 0, \forall n$. $a_1 < a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$.

Giả sử dãy tăng đến chỉ số n, nghĩa là $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$. Khi đó

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}\left(a_n - a_{n-1} + a_{n-1}^3 - a_{n-2}^3\right) \geq 0$$

hay $a_{n+1} \geq a_n$. Theo nguyên lý quy nạp, dãy tăng.

Cũng lại theo quy nạp, $a_n \in [0;1], \forall n$. Từ đó dãy hội tụ đến giới hạn λ thoả mãn phương trình $\lambda = \frac{1}{3}\left(1 + \lambda + \lambda^3\right)$. Vậy $\lambda = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Bài 1.14.9. Cho dãy $\{a_n\}$ bị chặn và thoả mãn

$$a_{n+2} \leq \frac{1}{3}\ a_{n+1} + \frac{2}{3}\ a_n\ ,\quad n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy trên hội tụ.

Giải. Ta có $$a_{n+2} + \frac{2}{3}a_{n+1} \leq a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n.$$

Đặt $b_n = a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n$ thì $\{b_n\}$ là dãy giảm, bị chặn. Gọi b là giới hạn của nó, ta sẽ chứng minh rằng $\{a_n\}$ hội tụ đến $a = \frac{3}{5}b$.

Với $\varepsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $\frac{\varepsilon}{6} > |b_n - b|$ với $n \geq n_0$. Do đó

$$\frac{\varepsilon}{6} > \left|a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n - \frac{5}{3}a\right| \geq |a_{n+1} - a| - \frac{2}{3}|a_n - a| \text{ với } n \geq n_0.$$

Vậy $$|a_{n+1} - a| < \frac{2}{3}\ |a_n - a|\ + \frac{\varepsilon}{6}.$$

Theo quy nạp ta có

$$|a_{n_0+k} - a| < \left(\frac{2}{3}\right)^k |a_{n_0} - a| + \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + ... + \frac{2}{3} + 1\right)\frac{\varepsilon}{6}$$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \left|a_{n_0} - a\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Từ chỗ $\left(\frac{2}{3}\right)^k \left|a_{n_0} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ với k đủ lớn nên $\left|a_n - a\right| < \varepsilon$ với n đủ lớn.

Bài 1.14.10. Cho dãy $\{u_n\}$ xác định bởi

$$u_1 = u_2 = u_3 = 1;\ u_{n+3} = \frac{1 + u_{n+1}u_{n+2}}{u_n},\ \ n \geq 1.$$

a) Tìm một công thức đơn giản để biểu diễn u_{n+4} qua u_{n+2} và u_n (có chứng minh).

b) Suy ra rằng $u_n \in \mathbf{N}^*$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Giải. Tính toán ta được 9 số hạng đầu tiên của dãy là

1, 1, 1, 2, 3, 7, 11, 26, 41,...

Công thức dự đoán của chúng ta là $u_{n+4} = 4u_{n+2} - u_n$ (*)

Việc chứng minh công thức này theo quy nạp không có gì là khó khăn.

b) Rõ $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbf{Z}$. Từ (*) suy ra $u_n \in \mathbf{Z}$ $\forall n \geq 1$. Hơn nữa

$$u_{n+3} - u_{n+2} = \frac{1 + u_{n+2}\left(u_{n+1} - u_n\right)}{u_n} > 0$$

nếu $u_{n+1} > u_n$. Theo quy nạp, $\{u_n\}$tăng. Từ đó $u_n \in \mathbf{N}^*$ $\forall$n.

§1.15. NGHIỆM CÁC PHƯƠNG TRÌNH $f_n(x) = 0$

Hiển nhiên là các kiến thức về sự triệt tiêu của hàm liên tục trên đoạn đóng là cần thiết. Tuy nhiên, để có những kết luận tinh vi về nghiệm, trước hết thường người ta phải tìm thêm các tính chất phụ của chúng. Nói khác, **phải đánh giá sơ bộ** dãy nghiệm $\{x_n\}$. Sau đó, ta có thể giải quyết theo các phương pháp thông dụng khác như tìm giới hạn khả dĩ, xét tính đơn điệu, khảo sát độ lệch...

Bài 1.15.1. Chứng minh rằng tồn tại dãy số thực $\{a_n\}$, $a_n \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\cos a_n = a_n^n$. Tìm giới hạn của dãy số đó.

Giải. $\cos a_n = a_n^n \Leftrightarrow f_n\left(a_n\right) = 0$

trong đó $\quad f_n(x) = x^n - \cos x, \ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$f_n'(x) = n x^{n-1} + \sin x \geq 0$, vậy $f_n(x)$ đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Lại có $\quad f_n(0) f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^n < 0$.

Vậy có duy nhất $a_n \in [0; \pi/2]$ để $f_n(a_n) = 0$. Rõ ràng $0 < a_n < 1$.

Ta sẽ chứng minh $\{a_n\}$ là dãy tăng. Quả vậy, giả sử có chỉ số n nào đó mà $a_{n+1} < a_n$. Vì $a_n, a_{n+1} \in (0; \pi/2)$ nên $\cos a_{n+1} > \cos a_n$.

Vậy $\quad a_{n+1}^{n+1} - a_n^n = \cos a_{n+1} - \cos a_n > 0$

$\Rightarrow a_{n+1}^n > a_{n+1}^{n+1} > a_n^n \Rightarrow a_{n+1} > a_n$. Mâu thuẫn.

Từ đó $\{a_n\}$ là dãy tăng. Do nó bị chặn ở 1 nên có giới hạn $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Cho qua giới hạn đẳng thức $a_n = (\cos a_n)^{1/n}$ ta được $a = (\cos a)^0 = 1$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Lưu ý: Có thể làm cách khác để tìm giới hạn của $\{a_n\}$. Sau khi nhận xét $0 < a_n < 1$ thấy rằng $a_n = (\cos a_n)^{1/n} > (\cos 1)^{1/n} \uparrow 1 \quad (n \to \infty)$

Bài 1.15.2. Chứng minh rằng với mỗi n nguyên dương ≥ 3, có duy nhất một số $x_n \in [0; n]$ sao cho $x^n = e^x$. Hơn nữa $\{x_n\}$ là dãy hội tụ.

Giải. Nếu các bạn chuyển vế để được phương trình $x^n - e^x = 0$, các bạn sẽ gặp rắc rối khi đánh giá. Chúng ta chia cả hai vế cho e^x:

$x^n = e^x \Leftrightarrow x^n e^{-x} = 1$ hay $f_n(x) = 0$ với $f_n(x) = x^n e^{-x} - 1$.

Ta có $\quad f_n(0) f_n(n) = (-1)\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n - 1\right) < 0 \ (n \geq 3)$.

Vậy phương trình $f_n(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm $x_n \in [0; n]$.

Mặt khác $f'_n(x) = e^{-x} x^{n-1}(n - x) > 0, \ \forall x \in (0; n)$ nên $f_n(x)$ đồng biến trên $[0; n]$. Từ đó nghiệm x_n là duy nhất. Phương trình đã cho tương đương với $n \ln x = x > 0$. Suy ra $x_n > 1$. Ta sẽ chứng minh $\{x_n\}$ giảm. Như đã nêu, $f_n(x)$ đồng biến trên $[0; n]$.

Tương tự, $f_{n+1}(x)$ đồng biến trên $[0\,;n+1]$. Từ đó

$$f_{n+1}(x_n)=x_n^{n+1}e^{-x_n}-1>x_n^n e^{-x_n}-1$$
$$=\ f_n(x_n)=\ 0=f_{n+1}(x_{n+1})$$

$\Rightarrow x_n\ >\ x_{n+1}$. Từ đó $\{x_n\}$ giảm và do đó hội tụ.

Cách 2. Chúng ta cũng có thể đánh giá sơ bộ rồi khảo sát độ lệch.

$$(x_n)^n=e^{x_n}\ \Leftrightarrow\ x_n=e^{\frac{x_n}{n}}<e\ (\text{do } x_n<n).$$

Giới hạn khả dĩ của $\{x_n\}$ là 1. Vậy xét $|x_n-1|$, ta có

$$0<|x_n-1|=\left|e^{\frac{x_n}{n}}-1\right|=e^{\frac{x_n}{n}}-1<e^{\frac{e}{n}}-1.$$

Theo định lý kẹp, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

Bài 1.15.3. Cho phương trình $x^n = x + n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Chứng tỏ rằng phương trình đã cho có nghiệm dương x_n duy nhất;

b) Chứng tỏ rằng $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$;

c) Chứng tỏ rằng $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-1}{\frac{\ln n}{n}}=1$.

Giải.

a) Đặt $f_n(x)=\ x^n-x-n\,,\ x\geq 0$.

Rõ ràng $f_n(x)<0\ \forall x\in\ [0;\,1]$;

$f'_n(x)=nx^{n-1}-1>0\ \forall x>1$ nên $f_n(x)$ tăng trên $[1;\,+\infty)$;

$f_n(n)=n^n-2n>0$; $f_n(1)\,f_n(n)\ =(-n)(n^n-2n)<0\quad(n\geq 2)$.

Vậy có $x_n\in(1;\,n)$ là nghiệm dương duy nhất của phương trình đã cho .

b) Ở phần (a), ta đã đánh giá sơ bộ $\{x_n\}$. Sử dụng đánh giá sơ bộ đó ta dễ dàng có các đánh giá tinh vi hơn.

$$x_n^n=x_n+n\Rightarrow 1<\ x_n\ =\sqrt[n]{x_n+n}\ \leq\sqrt[n]{2n}\ .$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n}=1$, theo định lý kẹp ta được $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

c) Bây giờ ta xét dãy độ lệch $y_n=x_n-1>0$. Theo b) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. Phương trình đã cho được viết dưới dạng

$$(1+y_n)^n = (y_n+1)+n \Leftrightarrow n\ln(1+y_n) = \ln(n+1+y_n).$$

Vậy $$\frac{y_n}{\frac{\ln n}{n}} = \frac{y_n}{\ln(1+y_n)}\frac{n\ln(1+y_n)}{\ln n}$$

$$= \frac{y_n}{\ln(1+y_n)}\frac{\ln(n+1+y_n)}{\ln n} \to 1\ (n\to\infty).$$

Bài 1.15.4. Chứng minh rằng với n ≥ 3, phương trình $(\ln x)^n = x, (x \ge 1)$ có đúng 2 nghiệm r_n và s_n trong đó $r_n < s_n$, hơn nữa $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = e$; $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

Giải. Đặt $t = \ln x \ge 0$, phương trình trở thành $\frac{1}{n} = \frac{\ln t}{t}$.

Đặt $f(t) = \frac{\ln t}{t}$, ta có $f'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2}$, thu được bảng biến thiên

t	0		1		e		$+\infty$
$f'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

Từ đó, phương trình $f(t) = \frac{1}{n}$ $(n \ge 3)$ có đúng 2 nghiệm $r_n \in (1;e)$ và $s_n \in (e;+\infty)$, đồng thời khi $n\to\infty$, $\frac{1}{n}\to 0$ nên $r_n \downarrow 1$; $s_n \uparrow +\infty$.

Bài 1.15.5. Cho $\{a_n\}$ là dãy các nghiệm liên tiếp của phương trình $\operatorname{tg}x = x,\ x>0$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$.

Giải. Rõ ràng $a_n \in \left(n\pi,\ n\pi+\frac{\pi}{2}\right),\ n = 1,2,...$

Từ đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Hơn nữa

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-a_n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\operatorname{tg}a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0.$$

Do sự liên tục của hàm arctang ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-a_n\right) = 0$. Vậy

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-a_n-\pi\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-a_n\right)-\left(\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi-a_{n+1}\right)\right]=0.$$

Suy ra $\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)=\pi$.

Bài 1.15.6. Cho dãy hàm $\{f_n(x)\}$ xác định như sau

$$f_1(x)=f(x)=x^2-2;\ f_{n+1}(x)=f\left(f_n(x)\right),\qquad n\geq 1.$$

a) Chứng minh rằng phương trình $f_n(x) = 0$ có đúng 2^n nghiệm phân biệt.

b) Chỉ ra nghiệm lớn nhất x_n của phương trình này, từ đó tìm $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Giải. Theo quy nạp, ta chứng minh được $f_n(x)$ là đa thức bậc 2^n, từ đó nó có nhiều nhất 2^n nghiệm thực. Bảng biến thiên của f(x).

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó tập $[-2;2]$ là bất biến với f(x); $f_n(x) > 2$ với $|x|>2$ nên $f_n(x)$ chỉ có thể có nghiệm trên $[-2;2]$.

Để có thể suy ra biểu thức của $f_n(x)$, $x\in[-2;2]$ ta sẽ dùng đổi biến lượng giác (vì $f(x) = f_1(x)$ có dạng $\pm(x^2 - a^2)$).

Với $x\in[-2;2]$, đặt $x = 2\cos t$, $t\in[0;\pi]$, thế thì

$$f_1(x)=(2\cos t)^2-2=2\left(2\cos^2 t-1\right)=2\cos 2t;$$

$$f_2(x)=f\left(f(x)\right)=(2\cos 2t)^2-2=2\cos 2^2 t;$$

Lại theo quy nạp dễ thấy $f_n(x) = 2\cos(2^n t)$. Từ đó

$$f_n(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos 2^n t=0 \Leftrightarrow 2^n t=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2^{n+1}}+\frac{k\pi}{2^n},\ k\in\mathbf{Z}.$$

Do $t\in[0;\pi]$ nên $0\leq\frac{\pi}{2^{n+1}}+\frac{k\pi}{2^n}\leq\pi$.

Từ đó $k\in\{0;1;...;2^n-1\}$. Tóm lại phương trình có đúng 2^n nghiệm phân biệt.

b) $x_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \to 2 \ (n \to \infty)$.

§1.16. SƠ LƯỢC VỀ CHUỖI SỐ

Bài 1.16.1. Với $c \in (a;\pi)$, tìm tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{c}{2^n}$.

Giải. Ta tìm cách tách số hạng tổng quát của chuỗi thành hiệu hai số hạng liên tiếp của một dãy nào đó. Nhận xét rằng, với $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ta có

$$\operatorname{tg}2x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}, \text{ suy ra } \operatorname{tg}x = \operatorname{cotg}x - 2\operatorname{cotg}2x.$$

Vậy $a_n = \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{c}{2^n} = \frac{1}{2^n}\operatorname{cotg}\frac{c}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{cotg}\frac{c}{2^{n-1}}$, dẫn tới

$$S_n = a_1 + ... + a_n = \frac{1}{2^n}\operatorname{cotg}\frac{c}{2^n} - \operatorname{cotg}c \to \frac{1}{c} - \operatorname{cotg}c \ (n \to \infty).$$

Bài 1.16.2. Tìm tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ với

a) $a_n = \frac{n^3 - n + 2}{n!}$ b) $a_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$.

Giải.

a) $a_n = \frac{1}{n!}\left[(n-2)(n-1)n + 3(n-1)n + 2\right]$

$$= \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{2}{n!} \text{ với } n \geq 3.$$

Vậy $S = a_1 + a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n = 6 + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!} + 3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} + 2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}$

$$= 6 + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!} + 3\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} - 1\right) + 2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!}\right)\right)$$

$$= 6e - 2.$$

b) Đặt $x_n = \operatorname{arctg}n$, ta được $n = \operatorname{tg}x_n$;

$$\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n} = \frac{\operatorname{tg}x_{n+1} - \operatorname{tg}x_n}{1 + \operatorname{tg}x_{n+1}\operatorname{tg}x_n} = \operatorname{tg}(x_{n+1} - x_n).$$

Vậy $\quad a_n = \operatorname{arctg} \operatorname{tg}\left(x_{n+1} - x_n\right) = x_{n+1} - x_n$.

Suy ra $\quad S_n = \sum_{n=1}^{n}\left(x_{i+1} - x_i\right) = x_{n+1} - x_1 \to \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\left(n \to \infty\right)$.

Bài 1.16.3. Cho dãy $\{a_n\}$ xác định bởi

$a_1 > 2; a_{n+1} = a_n^2 - 2$, $n = 1, 2, \ldots$ Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4}}{2}.$$

Giải. Dễ suy ra $a_n \uparrow +\infty \left(n \to \infty\right)$. Bởi vì $a_n^2 - 4 = a_{n-1}^2\left(a_{n-1}^2 - 4\right)$ nên bằng quy nạp ta có thể chứng minh rằng $a_n^2 - 4 = a_1^2\, a_2^2 \ldots\, a_{n-1}^2\left(a_1^2 - 4\right)$. Suy ra

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} = \sqrt{a_1^2 - 4}. \tag{*}$$

Mặt khác, với n > 1 ta có

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_n}{a_1 \ldots a_{n-1}} - \frac{a_{n+1}}{a_1 \ldots a_n}\right). \tag{**}$$

Cộng các đẳng thức lại rồi cho qua giới hạn, để ý đến (*) ta được tổng của chuỗi là:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{a_2}{2a_1} - \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4} = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4}}{2}.$$

Bài 1.16.4. Tính tổng của các chuỗi sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$; $\qquad$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3n^2 + 6n + 2}{n(n+1)(n+2)}$.

Giải.

a) Để giải các bài toán dạng này, công thức $T_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = C + \ln n + o(n)$ từ Bài 1.4.3 là rất có ích. Ta có

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= T_{2n} - T_n = C + \ln 2n - (C + \ln n) + o(n) \to \ln 2 \quad (n \to \infty).$$

Rõ ràng $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(S_{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) = \ln 2$.

Vậy chuỗi có tổng bằng ln2.

b) Vì $\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ suy ra

$$S_{2n} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$-2\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + ... + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$= T_{2n} + (T_{2n+1} - 1) - 2(T_{2n+1} - 1)$$

$$= C + \ln 2n + C + \ln(2n+1) - 2(C + \ln(2n+1)) + 1 + o(n) \to 1 \quad (n \to \infty).$$

Cũng có thể giải thông qua (a).

c) Tương tự, $a_n = (-1)^n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$.

Đáp số: $\frac{1}{2}$.

Bài 1.16.5. Cho dãy $\{a_n\}$ xác định bởi

$$a_1 > 0;\ a_{n+1} = \ln\frac{e^{a_n} - 1}{a_n}, \quad n \ge 1.$$

Đặt $b_n = a_1 a_2 ... a_n$. Tìm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Giải. Từ điều kiện đã cho ta có

$e^{a_1} - 1 = a_1 e^{a_2}$

$e^{a_2} - 1 = a_2 e^{a_3}$

....

Nhân đẳng thức thứ hai với a_1, thứ ba với a_1a_2,..., thứ n +1 với $a_1 a_2... a_n$ rồi cộng lại ta được

$$e^{a_1} - 1 = a_1 + a_1a_2 + ... + a_1a_2...a_n + a_1a_2...a_{n+1}e^{a_{n+2}}.$$

Mặt khác, dễ thấy $a_n \downarrow 0\ (n \to \infty)$ nên

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1a_2...a_{n+1}e^{a_{n+2}}\right) = 0.$$

Suy ra $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = e^{a_1} - 1$.

Bài 1.16.6. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n$.

Giải. Ta thấy $\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n$ là một giá trị rất lớn, để tính sin của nó, ta tìm cách "kéo" nó đó về gần 0 bằng cách trừ đi một số chẵn lần π. Để làm điều đó ta đặt $b_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$. Khai triển Newton ta được b_n là một số nguyên chẵn $\forall n = 1, 2, ...$ Vậy

$$a_n = \sin\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n = \sin\left(\pi b_n - \pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right) = -\sin\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n.$$

Bởi vì $0 \le C_n = \sin\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n \le \pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n < \frac{\pi}{2^n}$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$ hội tụ, nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Bài 1.16.7. Có tồn tại dãy vô hạn các số thực $a_1, a_2, ...$ sao cho tổng $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ hội tụ, còn tổng $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + ...$ phân kì ?

Giải. Xét

$$a_n = \begin{cases} 1/\sqrt[3]{k} & \text{với } n = 3k\text{-}2 \text{ hoặc } n = 3k\text{-}1; \\ -2/\sqrt[3]{k} & n = 3k. \end{cases}$$

* Đặt $S_n = a_1 + ... + a_n$ thì

$$S_{3k}=0\,; \qquad S_{3k+1}=\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\,; \qquad S_{3k+2}=\frac{2}{\sqrt[3]{k+2}}.$$

Vậy $S_n \to 0\,(n\to\infty)$ và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

* $\sum\limits_{i=1}^{3n} a_i^3 = \frac{-6}{1}+\frac{-6}{2}+...+\frac{-6}{n} = -6\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right) \to -\infty\,(n\to\infty)$.

Suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ phân kì.

Trả lời: Tồn tại dãy như đòi hỏi.

Bài 1.16.8. Cho dãy $\{a_n\}$ biết rằng $a_n \in \left\{-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right\}$ và $a_n > 0$ khi và chỉ khi $a_{n-4} > 0$.

Chứng tỏ rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ khi và chỉ khi hai trong bốn số a_1, a_2, a_3, a_4 lớn hơn không.

Giải. Gọi tổng riêng thứ n là S_n. Đặt $u_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$, u_n có dạng

$$u_n = \frac{\pm(n+1)(n+2)(n+3) \pm n(n+2)(n+3) \pm n(n+1)(n+3) \pm n(n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \qquad (*)$$

* Nếu hai trong bốn số a_1, a_2, a_3, a_4 là dương thì tử số ở vế phải của (*) có 2 dấu (+), hai dấu (-), thế thì trong khai triển sẽ không còn số hạng n^3. Do đó $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ta lại biết rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ, suy ra $\{S_{4n}\}$ hội tụ.

Từ chỗ $a_n \to 0\ (n\to\infty)$, $S_{4n+i} = (S_{4n+i} - S_{4n}) + S_{4n}$ hội tụ với i = 1, 2, 3. Tóm lại chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

* Nếu số phần tử dương và âm trong $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ là khác nhau thì tử số ở vế phải của (*) sẽ chứa số hạng n^3. Do đó $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Hơn nữa, dễ dàng kiểm tra rằng $\{U_{4n-3}\}$ là dãy cùng dấu. Vậy $S_{4n} = u_1 + u_5 + ... + u_{4n-3}$ phân kì do

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì. Vậy trường hợp này chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì.

Bài 1.16.9.

Cho $B_n(x) = 1^x + 2^x + ... + n^x$;

$f(n) = B_n(\log_n 2)/(n\log_2 n)^2$.

Chứng tỏ rằng chuỗi $f(2) + f(3) + f(4) + ... +$ hội tụ.

Giải. chúng ta biết rằng chuỗi điều hoà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gần hội tụ. Cụ thể hơn, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn tích phân.

Như vậy ta chỉ việc chứng minh $B_n(\log_n 2) \le O(n)$. Quả vậy,

$B_n(\log_n 2) = 1^{\log_n 2} + ... + n^{\log_n 2} \le n.n^{\log_n 2} = 2n$.

Từ đó $f(n) \le \frac{2}{n\log_2^2 n}$. Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

Chương II

GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

§2.0. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

GIỚI HẠN HÀM SỐ

* *Đơn điệu - bị chặn.* Hàm số f: $X \to \mathbf{R}$, trong đó $X \subset \mathbf{R}$ được gọi là:

- Tăng nếu $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2, f(x_1) \le f(x_2)$;
- Tăng thực sự (hay đồng biến) nếu $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2,\ f(x_1) < f(x_2)$;
- Giảm nếu $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2,\ f(x_1) \ge f(x_2)$;
- Giảm thực sự (hay nghịch biến) nếu $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2, f(x_1) > f(x_2)$;
- Đơn điệu nếu nó tăng hoặc giảm;
- Đơn điệu thực sự nếu nó tăng thực sự hoặc giảm thực sự;
- Bị chặn trên nếu tồn tại $A \in \mathbf{R}$, $f(x) \le A, \forall x \in X$;
- Bị chặn dưới nếu tồn tại $B \in \mathbf{R}$, $f(x) \ge B, \forall x \in X$;
- Bị chặn nếu vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới.

* *Giới hạn hàm số.*

+ Cho hàm số f: (a ; b) $\to \mathbf{R}$ và $x_0 \in (a; b)$. Ta nói f(x) có giới hạn λ khi x dần đến x_0 hoặc tại $x = x_0$ và viết $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lambda$ hay f(x) $\to \lambda$ khi $x \to x_0$ nếu:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0, \forall x \in (a;b): 0 < |x - x_0| < \delta \text{ thì } |f(x) - \lambda| < \varepsilon.$$

+ Cho hàm số f: (a; b) $\to \mathbf{R}$. Ta nói f(x) có giới hạn λ khi $x \to a^+$, và viết $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lambda$ nếu:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0, \forall x \in (a;b): 0 < x - a < \delta \text{ thì } |f(x) - \lambda| < \varepsilon.$$

+ Cho hàm số f: (a; + ∞) $\to \mathbf{R}$. Ta nói f(x) có giới hạn λ khi x dần ra + ∞ (hoặc tại x = + ∞), và viết $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$ nếu:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ A > a, \forall x > A,\ |f(x) - \lambda| < \varepsilon.$$

Chúng ta hãy tự hiểu ý nghĩa của các kí hiệu $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

+ Cho hàm số f: (a; b) $\to \mathbf{R}$ và cho $x_0 \in$ (a ; b). Ta nói f(x) có giới hạn + ∞

khi x dần tới x_0 (hoặc tại $x = x_0$), và viết $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ nếu:

$\forall A > 0,\ \exists\ \delta > 0, \forall x \in (a;b):\ 0 < |x - x_0| < \delta$ thì $f(x) > A$.

Chúng ta hãy tự hiểu ý nghĩa của các đẳng thức

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lambda$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, ta nói f(x) là vô cùng bé (VCB) khi $x \to a$.

Nếu $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$, ta nói f(x) là vô cùng lớn (VCL) khi $x \to a$.

* *Tính duy nhất của giới hạn.* Nếu f(x) nhận λ và λ' làm giới hạn tại $x = x_0$ thì $\lambda = \lambda'$.

Hệ quả. Nếu hai hàm số f(x) và g(x) trùng nhau trong một lân cận nào đó của x_0 thì việc tồn tại giới hạn của f(x) và g(x) khi $x \to x_0$ là tương đương: Chúng cùng tồn tại hoặc cùng không tồn tại, nếu tồn tại thì bằng nhau.

* *Điều kiện đủ để hàm số có giới hạn.* Cho hàm số f: $I \to \mathbf{R}$ trong đó I là một khoảng của $\mathbf{R}$. Nếu f(x) có giới hạn tại $x_0 \in \overline{I}$ ($\overline{I}$: bao đóng của I) thì f(x) bị chặn trong một lân cận của x_0.

* Hàm số f: $I \to \mathbf{R}$ có giới hạn λ tại x_0 khi và chỉ khi với mỗi dãy $\{x_n\}$ trong I, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ thì $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lambda$.

* *Định lý kẹp.* Cho ba hàm số f, g, h xác định trên khoảng I của $\mathbf{R}$. Giả sử $f(x) \leq g(x) \leq h(x),\ \forall x \in I$; $a \in \overline{I}$ và

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \lambda.$$

Khi đó, tồn tại giới hạn của hàm g(x) tại x = a và $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lambda$.

* *Các tính chất của giới hạn* (tổng, hiệu, tích, thương, giới hạn không): giống giới hạn của dãy số (xem §1.0).

* *Giới hạn của hàm đơn điệu.*

Cho $a, b \in \overline{\mathbf{R}} = [-\infty; +\infty]$, $a < b$. $f : (a;b) \to \mathbf{R}$ là hàm tăng trên (a; b).

- Nếu f(x) bị chặn trên thì có giới hạn hữu hạn tại x = b và $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \sup\limits_{x \in (a;b)} f(x)$.

- Nếu f(x) không bị chặn trên thì có giới hạn trái $+\infty$ tại x = b và $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.

** Các giới hạn đặc biệt.*

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$;

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Hệ quả: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{u \to 0} (1+u)^{1/u} = e$;

** Vô cùng lớn, vô cùng bé tương đương.*

f(x) là VCB (khi $x \to a$) và $f(x) \neq 0$ thì 1/f(x) là VCL;

f(x) là VCL (khi $x \to a$) thì 1/f(x) là VCB.

* Giả sử f(x) và g(x) là những VCB (khi $x \to x_0$). Ta nói:

a) f(x) là VCB bậc cao hơn g(x), viết f(x) = o(g(x)) nếu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Khi đó ta cũng nói g(x) là VCB bậc thấp hơn f(x).

b) f(x) và g(x) là hai VCB cùng bậc, ta viết f(x) = O(g(x)) nếu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \quad (C \neq 0; C \neq \infty);$$

c) f(x) và g(x) là hai vô cùng bé tương đương, ta viết f(x) ~ g(x) nếu hằng số C ở (b) bằng 1. Đây là quan hệ tương đương thông thường của đại số (có ba tính chất: phản xạ, đối xứng, bắc cầu).

** Quy tắc thay tương đương.*

Nếu $f(x) \sim f_1(x)$ và $g(x) \sim g_1(x)$ (khi $x \to x_0$) thì

a) $\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$;

b) $f(x)g(x) \sim f_1(x)g_1(x)$.

** Quy tắc thay tương đương với tổng*

Giả sử a, b, α, β là các hằng số thực, $a \neq 0$, $b \neq 0$ sao cho $f(x) \sim ax^{\alpha}$; $g(x) \sim bx^{\beta}$ $(x \to 0)$.

+ Nếu $\alpha < \beta$ thì $f(x)+g(x) \sim ax^{\alpha}$;

+ Nếu $\alpha > \beta$ thì $f(x)+g(x) \sim bx^{\beta}$;

+ Nếu $\alpha = \beta$ và $a + b \neq 0$ thì $f(x)+g(x) \sim (a+b)x^{\alpha}$;

+ Nếu $\alpha = \beta$ và $a + b = 0$ thì chưa suy ra $f(x)+g(x) \sim 0$.

Lưu ý: Định lý vừa nêu cho phép ta thay tương đương đối với tích hoặc thương một cách hết sức tiện lợi. Đối với tổng, hiệu, ý tưởng cơ bản là thận trọng khi thay tương đương các vô cùng bé cùng bậc: Nếu thấy hiệu của chúng bằng 0 thì phải thay tương đương đến bậc cao hơn.

Chúng ta thường thay tương đương bởi biểu thức dạng ax^{α} hay tổng của các biểu thức như vậy (vì khi đó dễ so sánh).

LIÊN TỤC

* Cho I là một khoảng mở rộng của **R**, còn f: I → **R** là một hàm số trên I. f(x) được gọi là liên tục tại $x_0 \in I$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

* $f(x)$ được gọi là gián đoạn tại x_0 nếu nó không liên tục tại đó.

$f(x)$ được gọi là gián đoạn khử được tại x_0 nếu nó gián đoạn tại x_0 và tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$..

Trong một số trường hợp, có thể coi hàm gián đoạn khử được tại x_0 là liên tục tại x_0.

$f(x)$ được gọi là gián đoạn loại một tại x_0, x_0 gọi là điểm gián đoạn loại một của $f(x)$ nếu:

- $f(x)$ gián đoạn tại x_0;

- Tồn tại có giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

Nếu f(x) gián đoạn tại x_0 nhưng không gián đoạn loại một tại đó thì ta nói f(x) gián đoạn loại hai tại x_0; còn x_0 là điểm gián đoạn loại hai.

* f: (a; b) $\to \mathbf{R}$ được gọi là liên tục trên (a; b) nếu nó liên tục tại mọi điểm $x_0 \in$ (a; b).

f: [a; b] $\to \mathbf{R}$ được gọi là liên tục trên [a; b] nếu nó liên tục tại mọi điểm $x_0 \in$ (a; b) và liên tục phải tại a, liên tục trái tại b:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a); \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

* *Tính liên tục đối với các phép toán*. Nếu f(x) và g(x) là những hàm liên tục tại $x_0 \in$(a; b) thì

a) $f(x) \pm g(x)$; $f(x)g(x)$; $|f(x)|$ liên tục tại x_0.

b) cf(x) liên tục tại x_0 $\forall c \in \mathbf{R}$.

c) Nếu $g(x_0) \neq 0$ thì $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0.

* *Sự liên tục của hàm hợp.* Cho f: (a; b) $\to$ (c; d) là hàm liên tục tại $x_0 \in$ (a; b) còn g: (C; D) $\to \mathbf{R}$ là hàm liên tục tại $y_0 = f(x_0) \in$(c; d), trong đó $(c,d) \subset (C;D)$. Khi đó hàm hợp g_0f: (a; b) $\to \mathbf{R}$ mà $(g_0f)(x) = g(f(x))$ cũng liên tục tại x_0.

* Hàm sơ cấp liên tục trên tập xác định của chúng.

Hệ quả:

+ Nếu hàm sơ cấp xác định trên khoảng (a; b) thì nó liên tục trên khoảng đó.

+ Nếu trong một lân cận nào đó của x_0, $f(x)$ là hàm sơ cấp thì f(x) liên tục tại x_0.

* *Định lý về giá trị trung gian.* Cho hàm số f(x) xác định và liên tục trong khoảng (α; β). Giả sử có hai điểm a, b $\in$(α; β) sao cho f(a) f(b) < 0. Khi đó có điểm c giữa a và b sao cho f(c) = 0.

Hệ quả. Hàm f(x) liên tục trên đoạn đóng [a; b] sẽ nhận mọi giá trị từ f(a) đến f(b).

* *Định lý Weierstrass*. Cho f(x) liên tục trên đoạn đóng [a; b]. Khi đó nó bị chặn, đạt được cận trên đúng $M = \underset{x \in [a;b]}{\mathrm{Max}} f(x)$ và cận dưới đúng $m = \underset{x \in [a;b]}{\mathrm{Min}} f(x)$.

Nói khác, hàm liên tục biến tập đóng, bị chặn thành tập đóng, bị chặn.

* *Liên tục và đơn điệu.* Cho f(x) là hàm liên tục và là đơn ánh trên (a; b). Khi đó hoặc là f(x) là hàm tăng thực sự (còn gọi là đồng biến) hoặc là f(x) là hàm giảm thực sự (còn gọi là nghịch biến).

* *Liên tục và hàm ngược.* Cho I là một khoảng của $\mathbf{R}$, f: I $\to$ $\mathbf{R}$ là một ánh xạ. Xét ánh xạ cảm sinh $\bar{f}: I \to f(I)$ mà $\bar{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in I$. Nếu f(x) liên tục và đơn điệu thực sự thì:

a) $\bar{f}$ là một song ánh từ I lên f(I);

b) $(\bar{f})^{-1}$ cũng là hàm liên tục, đơn điệu thực sự, cùng chiều biến thiên với f.

* *Liên tục đều.* Giả sử I là một khoảng mở rộng của $\mathbf{R}$. f: I $\to$ $\mathbf{R}$ là một hàm số. Ta nói f(x) liên tục đều trên I nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x', x'' \in I, |x' - x''| < \delta$ thì

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

* Nếu f(x) liên tục đều trên I thì liên tục trên I .

* *Định lý Heine*. Hàm f(x) liên tục trên đoạn đóng, giới nội [a; b] thì liên tục đều trên đó.

§2.1. TÌM GIỚI HẠN - KHẢO SÁT SỰ LIÊN TỤC THEO NGÔN NGỮ ε - δ, THEO NGÔN NGỮ DÃY

Bài 2.1.1. Chứng minh rằng nếu f(x), g(x) là hai hàm liên tục trên (a;b) thì $\varphi(x) = \text{Min}(f(x), g(x))$; $\psi(x) = \text{Max}(f(x), g(x))$ cũng là hai hàm liên tục trên (a; b).

Giải. Giả sử $\varepsilon > 0$ tùy ý còn $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, x_0)$; $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon, x_0)$ tham gia vào định nghĩa liên tục tại x_0 của f(x), g(x) tương ứng. Với $|h| < \delta = \text{Min}(\delta_1, \delta_2)$ ta có

$$\begin{cases} f(x_0) - \varepsilon \le f(x_0 + h) \le f(x_0) + \varepsilon; \\ g(x_0) - \varepsilon \le g(x_0 + h) \le g(x_0) + \varepsilon. \end{cases} \qquad (1)$$

Từ đó ta có:

$$+ \ \varphi(x_0) - \varepsilon = \text{Min}(f(x_0), g(x_0)) - \varepsilon = \text{Min}(f(x_0) - \varepsilon, g(x_0) - \varepsilon)$$
$$\le f(x_0) - \varepsilon \le f(x_0 + h).$$

$$+ \ \varphi(x_0) - \varepsilon = \text{Min}(f(x_0) - \varepsilon, g(x_0) - \varepsilon) \le g(x_0) - \varepsilon \le g(x_0 + h).$$

Vậy $\varphi(x_0) - \varepsilon \le \text{Min}(f(x_0 + h), g(x_0 + h)) = \varphi(x_0 + h)$. (2)

Tương tự, từ (1) ta thu được

$$\varphi(x_0 + h) = \text{Min}(f(x_0 + h), g(x_0 + h)) \le f(x_0 + h) \le f(x_0) + \varepsilon;$$
$$\varphi(x_0 + h) = \text{Min}(f(x_0 + h), g(x_0 + h)) \le g(x_0 + h) \le g(x_0) + \varepsilon.$$

Vậy $\varphi(x_0 + h) \le \text{Min}(f(x_0) + \varepsilon, g(x_0) + \varepsilon)$

$$= \text{Min}(f(x_0), g(x_0)) + \varepsilon = \varphi(x_0) + \varepsilon. \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) ta suy ra

$$\varphi(x_0) - \varepsilon \le \varphi(x_0 + h) \le \varphi(x_0) + \varepsilon, \forall h : |h| < \delta.$$

Vậy hàm $\varphi(x)$ liên tục. Chứng minh tương tự với $\psi(x)$.

Cách 2. $\quad \mathrm{Min}(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|);$

$$\mathrm{Max}(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|).$$

Hơn nữa, hàm trị tuyệt đối $y = |x|$ liên tục, suy ra điều phải chứng minh.

Lưu ý:

(1) Đặc biệt $f^+(x) = \mathrm{Max}(f(x), 0)$; $f^-(x) = \mathrm{Max}(-f(x), 0)$ là những hàm liên tục.

(2) Hơn nữa, nếu f, g liên tục đều thì φ, ψ cũng liên tục đều (xem Bài 2.7.5).

Bài 2.1.2. Chứng minh rằng nếu f: [0; 1] $\to$ [0; 1] là hàm liên tục thì dãy $x_{n+1} = f(x_n)$ hội tụ khi và chỉ khi

$$\lim_{n \to \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Giải. Điều kiện cần là rõ ràng. Để chứng minh điều kiện đủ, ta giả sử rằng $\lim_{n \to \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ và giả sử phản chứng rằng dãy $\{x_n\}$ không hội tụ. Vì $\{x_n\}$ bị chặn, nó phải có ít nhất hai điểm giới hạn, kí hiệu là K, L với $0 \le K < L \le 1$. Từ giả thiết dễ suy ra có phần tử của dãy $\{x_n\}$ rơi vào (K; L), từ đó suy ra có điểm $x_0 \in (K; L)$ để $\varepsilon = \frac{|f(x_0) - x_0|}{2} > 0$ (giả sử ngược lại, $f(x) = x, \forall x \in (K, L)$ thì với $x_N \in (K, L), x_n = x_N, \forall n > N$, vậy dãy $\{x_n\}$ hội tụ tới x_N ($n \to \infty$), mâu thuẫn).

Do $|f(x) - x|$ là hàm liên tục, có $\delta > 0$ đủ nhỏ để

+ $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset (K; L)$; (1)

+ $|f(x) - x| > \varepsilon = \frac{|f(x_0) - x_0|}{2}, \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. (2)

Mặt khác, từ chỗ $\lim_{n \to \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ suy ra với n đủ lớn thì

+ $|x_{n+1} - x_n| < 2\delta$; (3)

$+ \left|f(x_n) - x_n\right| = \left|x_{n+1} - x_n\right| < \varepsilon .$ (4)

Như vậy với n đủ lớn thì $\{x_n\}$ không thể rơi vào $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ (ngược lại, từ (2) suy ra $\left|f(x_n) - x_n\right| > \varepsilon$, mâu thuẫn với (4)) và dãy cũng không thể nhảy qua $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Từ đó các điểm giới hạn của dãy chỉ có thể $\le x_0 - \delta$ (mâu thuẫn với L là một điểm giới hạn) hoặc chỉ có thể $\ge x_0 + \delta$ (mâu thuẫn với K là một điểm giới hạn).

Chú ý: Sử dụng ngôn ngữ dãy là cách tiện lợi để chứng minh hàm số không liên tục tại một điểm x_0 nào đó. Theo cách này, ta khôn khéo chọn ra hai dãy $\{x_n\}$ và $\{t_n\}$ đều dẫn đến x_0, nhưng dãy giá trị tương ứng của hàm số dẫn đến hai giới hạn khác nhau: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda \ne \lambda' = \lim\limits_{n\to\infty} f(t_n)$.

Bài 2.1.3. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{khi} \quad x \ne 0 \\ 0 & \quad\quad\; x = 0. \end{cases}$

gián đoạn loại hai tại x = 0.

Giải. Xét hai dãy $\{x_n\}$ và $\{t_n\}$ với

$$x_n = \frac{1}{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi} \text{ và } t_n = \frac{1}{n\pi}.$$

Khi đó $x_n > 0; t_n > 0$; $x_n \to 0$; $t_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Mặt khác ta có $f(x_n) = \sin\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi = 1 \to 1$ $(n \to \infty)$;

$$f(t_n) = \sin(n\pi) = 0 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Vậy không tồn tại $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, hàm f(x) gián đoạn (loại hai) tại x = 0.

Bài 2.1.4. Xét sự liên tục của hàm số

$$y = \begin{cases} \sin x & \text{nếu x hữu tỉ;} \\ \cos x & \text{nếu x vô tỉ.} \end{cases}$$

Giải. Giả sử $x_0 \in \mathbf{R}$ tùy ý. Do tính trù mật của tập các số hữu tỉ cũng như tập các số vô tỉ, có dãy các số hữu tỉ $\{x_n\}$ và dãy các số vô tỷ $\{y_n\}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$.

Ta biết rằng phương trình sinx = cosx có tập nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$. Xét trường hợp $x_0 \notin \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin x_n = \sin x_0;$$

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \cos y_n = \cos x_0 \neq \sin x_0.$$

Vậy hàm gián đoạn tại x_0.

+ Nếu $x_0 = \frac{\pi}{4} + k\pi,\quad k \in \mathbf{Z}$ và giả sử $\{x_n\}$ là dãy bất kì mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Xét dãy $\{x_n^1\}$ là dãy con gồm tất cả các số hữu tỉ của $\{x_n\}$, và dãy $\{x_n^2\}$ là dãy con gồm tất cả các số vô tỉ của $\{x_n\}$, cũng giả sử cả hai dãy đó đều có vô hạn phần tử. Khi đó rõ ràng $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^1) = \sin x_0 = \cos x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^2)$ và dễ chứng minh đối với dãy xuất phát $\{f(x_n)\}$ ta cũng có $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \sin x_0 = \cos x_0 = f(x_0)$.
Trường hợp một trong hai dãy $\{x_n^1\}, \{x_n^2\}$ chỉ có hữu hạn phần tử là rõ ràng.

Trả lời: Hàm số liên tục tại các điểm $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

§2.2. LIÊN TỤC - GIỚI HẠN TRÁI, PHẢI

Nếu ở lân cận trái và lân cận phải của điểm x_0 hàm số xác định bởi hai biểu thức khác nhau thì chúng ta nên tính riêng giới hạn từng phía

$$f(x_0-) = \lim_{x\to x_0^-} f(x);\ f(x_0+) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

rồi so sánh hai giá trị này với $f(x_0)$.

Trong một số trường hợp thuận lợi, ta không cần tách riêng ra như vậy mà vẫn tìm được giới hạn hoặc khẳng định được giới hạn không tồn tại.

Bài 2.2.1. Xét sự liên tục của hàm số $y = x\left[\frac{1}{x}\right]$.

Giải. Với $k = \pm 1, \pm 2, ...,$ ta có

$$\lim_{x \to \frac{1}{k}-0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1 \,; \qquad \lim_{x \to \frac{1}{k}+0} x\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{k}(k-1)\,.$$

Để tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$, ta đặt $t = \frac{1}{x}$.

Do $t = [t] + r$ với $0 \le r < 1$ nên ta có

$$\lim_{x \to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\,t\,] = \lim_{t \to \infty} \frac{[t]}{[t]+r} = 1\,.$$

Như vậy hàm số gián đoạn loại một tại $x = \frac{1}{k}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ và gián đoạn khử được tại x = 0. Tại các điểm khác có một lân cận đủ nhỏ của điểm đó để $\left[\frac{1}{x}\right]$ không đổi , hàm liên tục.

Bài 2.2.2. Xét sự liên tục của $f(x) = [x]\sin \pi x$.

Giải.

* $x_0 \notin \mathbb{Z}$, tồn tại 1 lân cận của x_0 để [x] là hằng số (chẳng hạn, bằng A) trong lân cận này, do đó y = Asinπx trong lân cận đó, nó liên tục tại x_0.

* $x_0 = n \in \mathbb{N}^*$. Xét $x \in \left[n - \frac{1}{2};\ n + \frac{1}{2}\right]$, ta có

$$(n-1)\,|\sin \pi x| \le |[x]\ \sin \pi x| \le n|\ \sin \pi x|.$$

Theo định lý kẹp, $\lim\limits_{x \to n} [x]\sin \pi x = 0 = f(n)$.

Vậy f(x) liên tục tại $x_0 = n \in \mathbb{N}^*$.

Tương tự tại các điểm khác của $\mathbb{Z}$. Vậy f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$.

§2.3. TÍNH GIỚI HẠN - THAY TƯƠNG ĐƯƠNG - ĐỊNH LÝ L'HÔPITAL

Để tìm giới hạn một cách hiệu quả, ta cần linh hoạt vận dụng các phương pháp:

+ Biến đổi đại số thông thường: - Dùng hằng đẳng thức - Thêm bớt - Nhân cả tử và mẫu với lượng thích hợp - Nhân cả tử và mẫu với lượng liên hợp - Đặt biến mới.

+ Thay tương đương (thận trọng với tổng hai VCL - VCB).

+ Quy tắc L'Hôpital.

+ Kết hợp các phương pháp trên.

Bài 2.3.1. Tính giới hạn

a) $A=\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$; b) $B=\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\left(x^x-1\right)}$.

Giải.

a) $A=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$. Theo quy tắc L'Hôpital ta có

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{t\to +\infty}\left(-\frac{\ln t}{t}\right)=-\lim_{t\to +\infty}\frac{1}{t}=0.$$

Vậy $A=e^0=1$.

b) Ta có $x^{\left(x^x-1\right)}=e^{\left(x^x-1\right)\ln x}$.

Cách 1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^x-1\right)\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\left(x\ln^2 x\right)$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}.\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln^2 x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln(1/x))^2}{(1/x)}$$

Đặt $\frac{1}{x}=t$ và dùng quy tắc L'Hôpital ta được

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln^2 t}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\ln t}{t}=2\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}=0.$$

Suy ra B = 1.

Cách 2. Ta có $\left|x^x-1\right|\left|\ln x\right|\le x^{1-x}\left|\ln x\right|=\dfrac{x\left|\ln x\right|}{x^x}$ (xem Bài 3.6.16).

Theo câu (a), $x^x\to 1\left(x\to 0^+\right)$. Mặt khác, theo quy tắc L'Hôpital ta có $x\ln x\to 0\left(x\to 0^+\right)$, dẫn tới B = 1.

Bài 2.3.2. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x)$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{1/x^2}$.

Giải.

a) Đặt $1-x=u$; $x\to 1^-$ $\Leftrightarrow u\to 0^+$; $x=1-u$ .Vậy

$$A=\lim_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x)=\lim_{u\to 0^+}\ln(1-u)\ln u=\lim_{u\to 0^+}\frac{\ln(1-u)}{u}\,\frac{\ln u}{1/u}$$

$$=-\lim_{u\to 0^+}\frac{\ln u}{1/u}=\lim_{u\to 0^+}\frac{1}{u(+1)}u^2=0.$$

b) Ta biết rằng $\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$. Vậy

$$B=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^{1/x^2}=\lim_{x\to 0}e^{\left(1/x^2\right)\ln\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{-3}{x^2}\ln\left(1-\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)}=e^{-1/3}.$$

Bài 2.3.3. Tìm giới hạn

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\ln(1+x)-\ln(1+\sin x)}{\sin^4\frac{x}{2}}.$$

Giải. Khi thay tương đương các biểu thức có mặt ở tử thức đến bậc khá cao - bậc 5 chẳng hạn, ta nhận thấy chỉ cần thay đến bậc 4 là đủ. Từ chỗ

$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)$; $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o\left(x^4\right)$ ngắt bỏ VCB bậc quá 4, ta được

$$\sin\ln(1+x)-\ln(1+\sin x)=$$

$$=\sin\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o\left(x^4\right)\right)-\ln\left(1+x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o\left(x^4\right)-\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)^3+o\left(x^4\right)$$

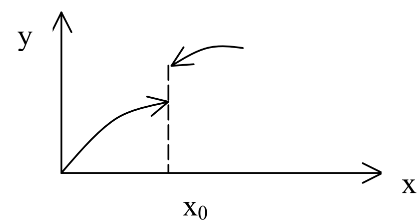
$$-\left[\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3-\frac{1}{4}x^4+o\left(x^4\right)\right]=\frac{x^4}{12}+o\left(x^4\right).$$

Vậy $$A = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{12\sin^4 \frac{x}{2}} = \frac{4}{3}.$$

§2.4. GIỚI HẠN - LIÊN TỤC CỦA HÀM ĐƠN ĐIỆU

Bài 2.4.1. Chứng minh rằng mọi điểm gián đoạn của hàm đơn điệu giới nội đều là gián đoạn loại một.

Giải. Giả sử x_0 là điểm gián đoạn của hàm không giảm giới nội f(x). Khi đó tồn tại các giới hạn



$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0-);\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0+).$$

Vì f(x) không giảm nên $f(x_0-)\le f(x_0)\le f(x_0+)$. $f(x)$ gián đoạn tại x_0 nên $f(x_0-)\ne f(x_0+)$. Vậy x_0 là điểm gián đoạn loại một.

Bài 2.4.2. Chứng minh rằng hàm f(x) xác định, đơn điệu trên $[a;b]$ và nhận tất cả các giá trị giữa f(a) và f(b) là hàm liên tục.

Giải. Không hạn chế tổng quát ta coi f(x) tăng. Giả sử có điểm $x_0\in[a;b]$ để f(x) gián đoạn tại x_0. Theo Bài 2.4.1, x_0 là điểm gián đoạn loại một và $f(x_0-)<f(x_0+)$. Từ đó

$$f(x)\le f(x_0-),\ \forall x\in[a;x_0);$$
$$f(x)\ge f(x_{0+}),\ \forall x\in(x_0;b].$$

Như vậy f(x) không nhận các giá trị $(f(x_0-);f(x_0+))\setminus\{f(x_0)\}$; trái giả thiết.

Bài 2.4.3. Cho f(x) là hàm số xác định và giới nội trên $[a;b]$. Chứng minh rằng các hàm số

$$m(x)=\operatorname*{Inf}_{a\le t<x} f(t);\qquad M(x)=\operatorname*{Sup}_{a\le t<x} f(t)$$

liên tục trái trên $[a;b]$.

Giải. Do f(x) giới nội nên m(x) và M(x) cũng giới nội, hơn nữa dễ thấy m(x) không tăng còn M(x) không giảm trên $[a;b]$. Lấy x_0 bất kỳ trên $(a;b]$, ta được $m(x) \geq m(x_0)\ \forall x < x_0$. Từ đó tồn tại giới hạn hữu hạn

$$m(x_0 -) = \lim_{x \to x_0^-} m(x) = \operatorname{Inf}_{a \leq t < x_0} f(t) = m(x_0).$$

Như vậy m(x) liên tục trái tại x_0.

Tương tự, $M(x) \leq M(x_0)$ với $a \leq x < x_0$, vậy tồn tại giới hạn

$$M(x_0 -) = \lim_{x \to x_0^-} M(x) = \operatorname{Sup}_{a \leq x < x_0} f(x) = M(x_0).$$

Chứng tỏ rằng M(x) liên tục trái tại x_0.

Bài 2.4.4. Chứng minh rằng mỗi đơn ánh (ví dụ, mỗi hàm số có hàm ngược), liên tục trên $(a;b)$ là đồng biến hoặc nghịch biến.

Giải. Chọn 2 số x_1, x_2 tùy ý mà $a < x_1 < x_2 < b$. Giả sử xảy ra $f(x_1) < f(x_2)$. Ta sẽ chứng minh f(x) đồng biến. Giả sử ngược lại, $\exists\, \alpha, \beta$ mà $a < \alpha < \beta < b$ nhưng $f(\alpha) \geq f(\beta)$. Suy ra $f(\alpha) > f(\beta)$ do f(x) đơn ánh.

Phân tích:

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ f(\alpha) > f(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1) - f(x_2) < 0 \\ f(\alpha) - f(\beta) \quad > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x_1, x_2) < 0; \\ F(\alpha, \beta) \ > 0, \end{cases}$$

trong đó $F(x,y) = f(x) - f(y)$ là hàm hai biến liên tục. Ta có ý định nối hai điểm $(x_1;x_2)$ với $(\alpha;\beta)$ bởi một đường cong - rõ ràng đường cong đơn giản nhất như vậy là đoạn thẳng nối hai điểm đó $\begin{cases} x = x_1 + t(\alpha - x_1) \\ y = x_2 + t(\beta - x_2) \end{cases}$, $t \in [0;1]$. Trên đoạn thẳng đó sẽ có điểm trung gian $(y_1; y_2)$ mà $F(y_1, y_2) = 0$, suy ra mâu thuẫn. Cụ thể, ta làm như sau:

Xét $h(t) = f(x_1 + t(\alpha - x_1)) - f(x_2 + t(\beta - x_2))$.

Rõ ràng h(t) liên tục trên $[0;1]$. Hơn nữa ta có

$$\begin{cases} h(0) = f(x_1) - f(x_2) < 0; \\ h(1) = f(\alpha) - f(\beta) > 0. \end{cases}$$

Vậy $\exists\ t_0 \in (0;1)$ để $h(t_0) = 0$ hay $f(x_1 + t_0(\alpha - x_1)) = f(x_2 + t_0(\beta - x_2))$

$\Leftrightarrow x_1 + t_0(\alpha - x_1) = x_2 + t_0(\beta - x_2)$ (do f đơn ánh)

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(1 - t_0) + t_0(\alpha - \beta) = 0$. Mâu thuẫn.

Bài 2.4.5. Cho f(x) là hàm nghịch biến trên $\mathbf{R}$. Chứng minh rằng không tồn tại hàm g(x) liên tục sao cho $g(g(x)) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$.

Giải. Giả sử ngược lại, có hàm g(x) liên tục, $g(g(x)) = f(x)$. Trước hết, do f(x) nghịch biến nên g(x) đơn ánh. Hơn nữa g(x) liên tục nên theo Bài 2.4.4,

+ hoặc là g(x) đồng biến, suy ra g(g(x)) đồng biến, mâu thuẫn;

+ hoặc là g(x) nghịch biến, suy ra g(g(x)) đồng biến, mâu thuẫn.

Lưu ý: Quy tắc xác định tính đồng biến (Đ) và nghịch biến (N) của hợp hai hàm số giống như quy tắc nhân dấu, cụ thể là:

ĐoĐ = Đ;	NoĐ = N;
ĐoN = N;	NoN = Đ.

Bài 2.4.6. Cho f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ liên tục và $f(f(x)) = -x^2, \forall x \in \mathbf{R}$. Chứng minh rằng $f(x) \le 0\ \forall x \in \mathbf{R}$.

Giải.

+ Với $x \le 0$, $\exists\ y \in \mathbf{R}$ sao cho $x = -y^2$.

Vậy $f(x) = f(-y^2) = f(f(f(y))) = -[f(y)]^2 \le 0$.

+ Với x > 0. Trước hết ta chứng minh rằng f(x) đơn điệu thực sự trên R_+. Quả vậy, với $x_1, x_2 > 0$; $x_1 \ne x_2$ giả sử $f(x_1) = f(x_2)$. Khi đó

$-x_1^2 = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = -x_2^2$, suy ra $x_1 = x_2$, vô lí.

Như vậy f(x) đơn ánh. Theo Bài 2.4.4, nó là đơn điệu thực sự (đồng biến hoặc nghịch biến) trên $\mathbf{R}_+$.

Bây giờ ta giả sử phản chứng rằng có $x_0 \in \mathbf{R}_+$ sao cho $f(x_0) > 0$. Do f(x) liên tục nên $\exists\ \varepsilon > 0$ để $f(x) > 0\ \forall x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$.

Vì rằng hợp 2 hàm đơn điệu thực sự là hàm đồng biến, trên $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ hàm f(f(x)) đồng biến, trong khi đó $f(f(x)) = -x^2$ là hàm nghịch biến trên $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$. Bài toán được chứng minh.

Bài 2.4.7. Cho f(x) là hàm đơn điệu không giảm trên (a;b). Đặt $A = \{x \in (a;b), f(x)$ không liên tục tại $x\}$. Chứng minh rằng A là tập không quá đếm được.

Giải. $\forall x \in (a; b)$ đặt

$$c(x) = f(x-) = \lim_{t \to x^-} f(t); \quad d(x) = f(x+) = \lim_{t \to x^+} f(t).$$

Do f(x) không giảm, c(x) và d(x) xác định trên (a; b), ngoài ra $c(x) \le f(x) \le d(x)$.

Hơn nữa, dễ chứng minh $x \in A \Leftrightarrow c(x) < d(x)$.

Gọi $g(x)$ là số hữu tỉ nào đó trên khoảng $(c(x); d(x))$. Do tính không giảm của f(x) suy ra g(x) là đơn ánh từ A vào $\mathbf{Q}$. $\mathbf{Q}$ đếm được vậy A không quá đếm được.

Bài 2.4.8. Cho hàm số f(x) liên tục trên $\mathbf{R}$, sao cho $\forall x \in \mathbf{R}$ có một số dương $\varepsilon(x) > 0$: $f(x) \le f(y) \quad \forall y \in [x; x + \varepsilon(x)]$.

Chứng minh rằng f(x) không giảm trên $\mathbf{R}$, nghĩa là

$$f(a) \le f(b), \quad \forall a < b.$$

Kết quả này còn đúng không khi f(x) không liên tục ?

Giải. *Cách 1.* Giả sử ngược lại, $\exists a, b$ để $a < b$, $f(a) > f(b)$.

Đặt $D = \{t \in \mathbf{R}, a < t < b : f(t) \ge f(a)\}$. Theo giả thiết, D là tập khác trống. Rõ ràng D bị chặn trên bởi b. Vậy tồn tại t_0 = Sup D. Rõ $a < t_0 \le b$.

Theo tính chất của Suprimum, $\exists\, t_n \in D;\ t_n \uparrow t_0 \quad (n \to \infty)$. Do f(x) liên tục ta có $f(t_0) = \lim\limits_{n \to \infty} f(t_n) \ge f(a)$. Vậy $t_0 \in D, t_0 < b$.

Lại theo giả thiết, tồn tại $\varepsilon(t_0)$: $f(t_0) \le f(y), \forall y \in [t_0; t_0 + \varepsilon(t_0)]$. Lấy $\varepsilon_1 = \min\left(\dfrac{b - t_0}{2}, \varepsilon(t_0)\right) > 0$ thì $f(t_0) \le f(t_0 + \varepsilon_1)$, trong khi đó $t_0 + \varepsilon_1 < b$. Vậy $t_0 + \varepsilon_1 \in D$, mâu thuẫn với t_0 = Sup D.

Cách 2. Ta xây dựng hai dãy kề nhau $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ thoả mãn $f(a_n) \ge f(a) > f(b_n)$; $a_n < b_n$, $b_n - a_n = \dfrac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$ như sau:

+ $a_1 = a;\ b_1 = b$.

+ Nếu $f\left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}\right) \ge f(a)$ đặt $a_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2};\ b_2 = b_1$;

+ Nếu $f\left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}\right) < f(a)$ đặt $a_2 = a_1;\ b_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.

+ ....

+ Gọi t_0 là giới hạn chung của 2 dãy.

+ Suy ra mâu thuẫn.

* Xét hàm $f(x)=\begin{cases}1 & \text{khi } -\infty< x <0;\\ 0 & 0\le x.\end{cases}$

§2.5. CÁC PHÉP TOÁN VỚI CÁC HÀM CÓ GIỚI HẠN VÀ VỚI CÁC HÀM LIÊN TỤC

Bài 2.5.1. Giả sử p, q là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau (ƯCLN của p và q là 1) và giả sử rằng $(f(x))^p$ và $(f(x))^q$ là hai hàm liên tục. Chứng minh rằng f(x) liên tục trên (a; b).

Giải. Vì p và q nguyên tố cùng nhau nên có ít nhất một số lẻ trong hai số đó, chẳng hạn p lẻ. Khi đó $f=\sqrt[p]{f^p(x)}, \quad x\in(a;b)$. Vậy f liên tục trên (a;b).

Bài 2.5.2. Tìm một hàm f(x) xác định trên $\mathbf{R}$ sao cho:

a) $f(x),\quad f(f(x))$ gián đoạn tại mọi điểm $x\in\mathbf{R}$;

b) $f(f(f(x)))$ liên tục trên $\mathbf{R}$.

Trả lời . $f(x)=\begin{cases}0 & \text{khi } x\in \mathbf{Q}-\{1\};\\ 2 & \text{khi } x=1;\\ 1 & \text{khi } x=\mathbf{R}-\mathbf{Q}.\end{cases}$

§2.6. HÀM LIÊN TỤC TRÊN ĐOẠN ĐÓNG - ĐỊNH LÍ GIÁ TRỊ TRUNG GIAN

Bài 2.6.1. Cho f(x) liên tục trên (a;b). Chứng minh rằng

$$\forall x_1,\dots,x_n\in(a;b), \exists\xi\in(a;b) \text{ để } f(\xi)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\dots+f(x_n)\right).$$

Giải. Đặt $m=\mathrm{Min}\{f(x_1),\dots,f(x_n)\}$; $M=\mathrm{Max}\{f(x_1),\dots,f(x_n)\}$. Vậy

$\exists i,j\in\{1,\dots,n\}$ để $m=f(x_i)\le\frac{1}{n}[f(x_1)+\dots+f(x_n)]=L\le f(x_j)=M$.

Do f(x) liên tục, $\exists\,\xi$ giữa x_i, x_j để $f(\xi)=L=\frac{1}{n}[f(x_1)+\dots+f(x_n)]$.

Bài 2.6.2. Giả sử f(x) liên tục và giới nội trong $(x_0;+\infty)$. Chứng minh rằng với mỗi T tìm được dãy $\{x_n\}\to+\infty$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(x_n+T)-f(x_n)\right]=0. \qquad (*)$$

Giải. Với T > 0 tùy ý, xét hàm số g(x) = f(x + T) - f(x).

Trường hợp 1: $\exists L>0, \forall x>L, f(x+T)-f(x)$ giữ dấu, ví dụ dương. Khi đó dãy $\{f(L+nT)\}$ tăng (vì $f(L+(n+1)T)-f(L+nT)\geq 0$).

Lại có dãy đó giới nội, từ đó hội tụ, đặt $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty} f(L+nT)$.

Vậy $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left[f(L+(n+1)T)-f(L+nT)\right]=0$.

Trường hợp 2: $\forall L>0, f(x+T)-f(x)$ không giữ dấu. Khi ấy tồn tại $x_L>L$ để $f(x_L+T)-f(x_L)=0$, tức là có dãy $\{x_n\}$: $x_n\to\infty\ (n\to\infty)$ mà $f(x_n+T)-f(x_n)=0$. Như vậy xảy ra (*).

Trường hợp T < 0, thay x + T = t rồi quay lại trường hợp đã xét.

Bài 2.6.3. Giả sử f(x) liên tục trên (a; b) và

$\lambda=\underline{\lim}_{x\to a} f(x); L=\overline{\lim}_{x\to a} f(x)$, λ và L hữu hạn. Chứng minh rằng $\forall\lambda\in[\lambda;L]$, $\exists$ dãy $\{x_n\}$: $x_n\to a\ (n\to\infty)$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lambda$.

Giải. Khẳng định là rõ ràng trong trường hợp $\lambda=L$.

+ Nếu $\lambda<L$, còn $\lambda=\lambda$ hoặc $\lambda=L$ thì khẳng định cũng hiển nhiên đúng.

+ Bây giờ ta xét trường hợp $\lambda<L$ và $\lambda\in(\lambda;L)$. Theo định nghĩa giới hạn $\underline{\lim}, \overline{\lim}$ có hai dãy $\{x_n\},\{y_n\}$đều dần đến $a\ (n\to\infty)$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lambda;\ \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=L$.

Vậy $$\exists N:\forall n>N,\begin{cases}\left|f(x_n)-\lambda\right|\leq\dfrac{\lambda-\lambda}{2};\\[2mm] \left|f(y_n)-L\right|\leq\dfrac{L-\lambda}{2}.\end{cases}$$

Suy ra $$f(x_n)\leq\frac{\lambda+\lambda}{2}<\lambda<\frac{L+\lambda}{2}\leq f(y_n).$$

Do f(x) liên tục, $\exists z_n \in (x_n; y_n)$ để $f(z_n) = \lambda$.

Rõ ràng $z_n \to a$, $f(z_n) \to \lambda$ $(n \to \infty)$.

Bài 2.6.4. Cho f, g: [0;1] → [0;1] liên tục, lên. Chứng minh rằng $\exists\, x_0 \in [0;1]$ để $f(g(x_0)) = g(f(x_0))$.

Giải. Đẳng thức cần chứng minh chính là $f(g(x_0)) - g(f(x_0)) = 0$ hay $h(x_0) = 0$ trong đó $h(x) = f(g(x)) - g(f(x))$.

Xét $g_0 f : [0;1] \to [0;1]$, đây là ánh xạ lên. Từ đó có $a \in [0;1]$ để $g(f(a)) = 0$. Suy ra $h(a) = f(g(a)) \geq 0$ (*)

Bây giờ ta lại xét $f_0 g : [0;1] \to [0;1]$. Đây là ánh xạ lên, vậy có $b \in [0;1]$ để $f(g(b)) = 0$. Và do đó $h(b) = 0 - g(f(b)) \leq 0$ (**)

Từ (*) và (**) có điểm x_0 giữa a và b để $h(x_0) = 0$.

Bài 2.6.5. Cho f(x) liên tục trên $\mathbf{R}$, nhận giá trị khác dấu. Chứng minh rằng tìm được cấp số cộng a, b, c (a < b < c) sao cho $f(a) + f(b) + f(c) = 0$.

Giải. Nhớ đến những "Phân tích" ở Bài 2.4.4 ta có thể giải như sau.

Từ giả thiết f(x) liên tục và nhận giá trị trái dấu nên $\exists \delta > 0$ đủ nhỏ và 2 điểm x_0, x_1 sao cho

$f(x)$ âm tại các điểm $x_0 - \delta; x_0; x_0 + \delta$;

$f(x)$ dương tại các điểm $x_1 - \delta; x_1; x_1 + \delta$.

Đặt
$$F(t) = f(x_0 - \delta + t(x_1 - x_0)) + f(x_0 + t(x_1 - x_0)) + f(x_0 + \delta + t(x_1 - x_0)), \qquad t \in [0; 1]$$

Rõ ràng F(t) liên tục trên [0;1]; F(0) < 0; F(1) > 0. Theo định lí về giá trị trung gian của hàm liên tục, $\exists t \in (0;1)$ để $F(t_0) = 0$. Đặt

$$a = x_0 - \delta + t_0(x_1 - x_0); b = x_0 + t_0(x_1 - x_0); \; c = x_0 + \delta + t_0(x_1 - x_0)$$

ta được điều phải chứng minh.

Bài 2.6.6. Chứng minh rằng nếu f(x) liên tục, không giữ dấu trên $\mathbf{R}_+$ thì tìm được cấp số nhân a, b, c > 0 sao cho f(a) + f(b) + f(c) = 0.

Giải. Từ giả thiết suy ra có x_1, x_2 sao cho $0 < x_1 < x_2$; $f(x_1)$ và $f(x_2)$ trái dấu, chẳng hạn $f(x_1) > 0$; $f(x_2) < 0$. Đặt $t_1 = \ln x_1$; $t_2 = \ln x_2$. Do f(x) và e^x là những hàm liên tục nên có số δ > 0 đủ nhỏ để

$$f\left(e^{t_1-\delta}\right); f\left(e^{t_1}\right); f\left(e^{t_1+\delta}\right) > 0;$$
$$f\left(e^{t_2-\delta}\right); f\left(e^{t_2}\right); f\left(e^{t_2+\delta}\right) < 0.$$

Với $\Delta = t_2 - t_1$ xét hàm số

$$F(t) = f\left(e^{t_1-\delta+t\Delta}\right) + f\left(e^{t_1+t\Delta}\right) + f\left(e^{t_1+\delta+t\Delta}\right).$$

Rõ ràng F(t) liên tục, F(0) > 0; F(1) < 0. Vậy

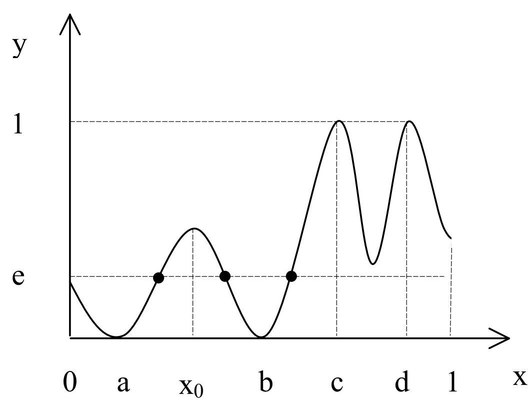
$\exists t_0 \in (0;1)$ để $F(t_0) = 0$. Thế thì

$a = e^{t_1-\delta+t_0\Delta}$; $b = e^{t_1+t_0\Delta}$; $c = e^{t_1+\delta+t_0\Delta}$ là ba số cần tìm.

Bài 2.6.7. Cho $f:[0;1] \to [0;1]$ là ánh xạ liên tục và lên. Chứng minh rằng $\exists e \in [0;1]$ sao cho $f^{-1}(\{e\})$ không có đúng hai phần tử.

Giải. Giả sử $\forall x \in [0;1]$ $f^{-1}\{x\}$ có đúng hai phần tử. Từ đó $\exists a,b,c,d$ sao cho $0 \le a < b \le 1$, $f(a) = f(b) = 0$; $0 \le c < d \le 1$, $f(c) = f(d) = 1$. Nếu a < b < c < d, khi đó:

+ Hoặc f(x) = 0 trên $[a;b]$. Rõ ràng e = 0 cần tìm.

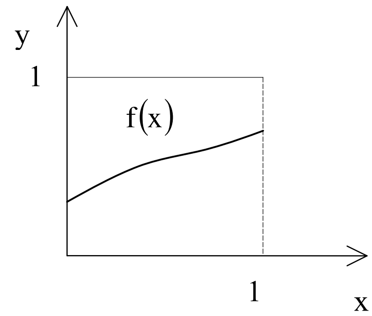


+ Hoặc f(x) ≠ 0 với x_0 nào đó trên $(a; b)$. Khi đó đường thẳng $y = f(x_0)/2$ cắt đồ thị tại ít nhất 3 điểm trên 3 khoảng lần lượt là $(a;x_0)$; $(x_0; b)$; $(b ; c)$; $e = f(x_0)/2$.

Lí luận tương tự cho các trường hợp khác.

Bài 2.6.8. Cho hai hàm số liên tục $f,g:[0;1] \to [0;1]$ thoả mãn điều kiện $f(g(x)) = g(f(x)), \forall x \in [0; 1]$. Biết rằng f(x) là hàm tăng. Chứng minh rằng $\exists a \in [0; 1]$ để $f(a) = g(a) = a$.

Giải. Đặt h(x) = g(x) - x. Khi đó $h(x)$ liên tục trên $[0; 1]$; đồng thời $h(0)=g(0)\geq 0$, $h(1)=g(1)-1\leq 0$ vậy tồn tại $x_0 \in [0; 1]$ để $h(x_0)=0$ hay $g(x_0) = x_0$.



+ Nếu $f(x_0) = x_0$ thì có đpcm.

+ Nếu $f(x_0) \neq x_0$, xét dãy $\{x_n\}$ xác định bởi: $x_1 = f(x_0); x_{n+1} = f(x_n),\ n \geq 1$.

Nếu $x_0 \leq f(x_0)$ suy ra $\{x_n\}$ tăng;

Nếu $x_0 > f(x_0)$ suy ra $\{x_n\}$ giảm.

Rõ ràng $x_n \in [0;1]$. Trong cả hai trường hợp đều tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in [0;1]$.

Hơn nữa ta có $g(x_n) = x_n$ (chứng minh theo quy nạp bằng cách sử dụng $g_0 f = f_0 g$). Cho qua giới hạn ta được

$$f(a) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = a;$$

$$g(a) = g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Bài 2.6.9. Cho f(x) liên tục trên $[0;1]$ thoả mãn $f(0) = f(1)$. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists c \in [0;1]$ để $f(c) = f\left(\dfrac{cn+1}{n}\right)$.

Giải. Hàm số $g(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)$ liên tục trên $\left[0; \dfrac{n-1}{n}\right]$. Hơn nữa

$$g(0) = f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0);\ g\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\ldots$$

$$g\left(\frac{n-1}{n}\right) = f(1) - f\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Cộng vế với vế ta được $g(0) + g\left(\dfrac{1}{n}\right) + \ldots + g\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0$.

Vậy $\exists i, j$: $g\left(\dfrac{i}{n}\right) \leq 0$; $g\left(\dfrac{j}{n}\right) \geq 0$.

Do g(x) liên tục, tồn tại c giữa $\dfrac{i}{n}$ và $\dfrac{j}{n}$ để g(c) = 0, suy ra đpcm.

Bài 2.6.10. Cho $f, g: [a;b] \to [a;b]$ là ánh xạ lên sao cho $h(x) = f(x) - g(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$ và $f(g(x)) = g(f(x))\ \forall x \in [a;b]$.

Chứng minh rằng có điểm $x \in [a;b]$ sao cho $f(x) = g(x)$.

Giải. Giả sử ngược lại, $f(x) \neq g(x), \forall x \in [a;b]$. Khi đó hàm $h(x) = f(x) - g(x)$ liên tục và giữ dấu trên $[a;b]$, chẳng hạn
$f(x) - g(x) > 0,\ \forall x \in [a;b]$.

Đặt
$$c = \underset{x \in [a;b]}{\mathrm{Min}} (f(x) - g(x)) > 0.$$

Lấy điểm s bất kì trên $[a;b]$, ta có $f(s), g(s) \in [a;b]$ hơn nữa:
$$h(f(s)) = f(f(s)) - g(f(s)) \geq c;$$
$$h(g(s)) = f(g(s)) - g(g(s)) \geq c.$$

Cộng hai vế, từ giả thiết $f_0 g = g_0 f$ ta được
$$(f_0 f)(s) - (g_0 g)(s) \geq 2c.$$

Bây giờ, đối với mỗi hàm λ ta kí hiệu $\lambda_{(n)} = \lambda_0\, \lambda_0 \ldots {}_0\lambda$ (n lần), ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng
$$f_{(n)}(s) - g_{(n)}(s) \geq nc,\ \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall s \in [a;b]. \qquad (*)$$

Quả vậy, khẳng định đúng với n = 1, 2. Giả sử (*) đúng với $n \leq k-1$, ta thu được
$$f_{(k)}(s) - f_{(k-1)}(g(s)) = f(f_{(k-1)}(s)) - g(f_{(k-1)}(s)) = h(f_{(k-1)}(s)) \geq c;$$
$$f_{(k-1)}(g(s)) - g_{(k)}(s) = f_{(k-1)}(g(s)) - g_{(k-1)}(g(s)) \geq (k-1)c.$$

Cộng lại ta được $f_{(k)}(s) - g_{(k)}(s) \geq kc$. Vậy (*) đúng $\forall$n.

Vì f, g nhận giá trị trong $[a;b]$ nên

$b - a \geq f_{(n)}(s) - g_{(n)}(s) \geq nc\ \ \forall n \in \mathbf{N}^*$. Mâu thuẫn.

Bài 2.6.11. Cho hàm $f: [a;b] \to [a;b]$ thoả mãn điều kiện
$$|f(x) - f(y)| < |x - y|,\ \forall x, y \in [a;b], x \neq y.$$

Chứng minh rằng phương trình f(x) = x có nghiệm duy nhất trên $[a;b]$.

Giải. Dễ chứng minh f(x) liên tục, từ đó hàm số $g(x) = |f(x) - x|$ là hàm liên tục trên $[a;b]$. Vậy tồn tại $x_0 \in [a;b]$ để $g(x_0) = \min g(x),\ x \in [a;b]$.

Ta sẽ chứng minh $g(x_0)=0$. Giả sử ngược lại, $g(x_0)\neq 0$ hay $f(x_0)\neq x_0$. Từ giả thiết ta có $|f(f(x_0))-f(x_0)|<|f(x_0)-x_0|$. Suy ra $g(f(x_0))<g(x_0)$: Mâu thuẫn với cách xác định x_0.

Bây giờ giả sử phương trình có nghiệm $x_1\neq x_0$. Thế thì $|f(x_1)-f(x_0)|=|x_1-x_0|$ mâu thuẫn với bất đẳng thức đã cho.

Lưu ý: Hàm f(x) đã cho là liên tục Lipschitz (xem mục §2.7), tuy nhiên có thể nó không phải là ánh xạ co, ví dụ $f(x)=2\sqrt{x+1}$, $x\geq 0$. Cũng chưa thể khẳng định f(x) là hàm khả vi.

Bài 2.6.12. Tồn tại hay không hàm liên tục $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ sao cho khi x vô tỉ, f(x) nhận giá trị hữu tỉ còn khi x hữu tỉ, f(x) nhận giá trị vô tỉ.

Giải. Giả sử có hàm f(x) như đòi hỏi. Đặt $g(x)=f(x)-x$. Hàm g(x) liên tục và chỉ nhận giá trị vô tỉ. Nếu g(x) nhận ít nhất hai giá trị g_1, g_2; $g_1<g_2$, do tính trù mật của $\mathbf{Q}$ có số hữu tỉ $g_0: g_1<g_0<g_2$. Từ định lí về giá trị trung gian, g(x) nhận cả giá trị g_0, mâu thuẫn. Vậy g(x) = c với c là hằng số vô tỉ. Như vậy $f(x)=x+c$, từ đó f(c) = 2 c.

f(c) là hữu tỉ trong khi 2c vô tỉ. Mẫu thuẫn này chứng tỏ không có hàm f(x) như đòi hỏi.

Bài 2.6.13. Cho 2 hàm số f(x), g(x) liên tục trên khoảng (a;b) sao cho $(f(x))^2=(g(x))^2\neq 0,\ \forall x\in(a;b)$.

Chứng minh $f(x)=g(x)\ \ \forall x\in(a;b)$ hoặc $f(x)=-g(x)\forall x\in(a;b)$.

Giải. $0=f^2(x)-g^2(x)=(f(x)-g(x))\,(f(x)-(-g(x)))$.

Vậy chỉ có thể là f(x) = g(x) hoặc f(x) = -g(x). Nếu có $x_0\in(a;b)$, sao cho $f(x_0)=g(x_0)$ ta sẽ chứng minh $f(x)=g(x),\forall x\in(a;b)$. Giả sử ngược lại, tồn tại $x_1\in(a;b)$ để $f(x_1)\neq g(x_1)$. Theo trên, $f(x_1)=-g(x_1)$. Từ đó $f(x_0)f(x_1)=-g(x_0)g(x_1)\neq 0$.

+ Nếu $f(x_0)f(x_1)<0$, $\exists x_2$ giữa x_0,x_1 để $f(x_2)=0$, mâu thuẫn.

+ Nếu $f(x_0)f(x_1)>0$, suy ra $g(x_0)g(x_1)<0$. $\exists x_3$ giữa x_0,x_1 để $g(x_3)=0$, mâu thuẫn.

Bài 2.6.14. Cho f(x) là hàm liên tục trên **R** sao cho

$$f(|x|)=|f(x)|>0,\ \forall x.$$

Chứng minh rằng f(x) chẵn.

Giải. Ta có $|f(-x)|=f(|-x|)=f(|x|)=|f(x)|$. Từ đó $(f(-x))^2=(f(x))^2$. Theo Bài 2.6.13 thì f(x) chẵn hoặc lẻ.

Do $f(0)=|f(0)|>0$ nên f(x) không thể là lẻ, vậy f(x) chẵn.

Bài 2.6.15. Cho hai hàm số liên tục f(x), g(x) trên $[a;b]$ thoả mãn $0<g(x)<f(x),\ \forall x\in[a;b]$. Chứng minh rằng tồn tại $\lambda>0$ để

$$(1+\lambda)g(x)<f(x),\ \forall x\in[a;b].$$

Giải. Hàm số $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục trên $[a;b]$, $k(x)>1, \forall x\in[a;b]$. Vậy đạt giá trị nhỏ nhất μ tại x_0:

$$k(x)\geq\mu=\min_{x\in[a;b]}k(x)=k(x_0)>1.$$

Chọn $\lambda=(\mu-1)/2$ thì $(1+\lambda)g(x)<\mu g(x)\leq f(x)\ \forall x\in[a;b]$.

Bài 2.6.16. Cho hai hàm $f,g:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ liên tục và thoả mãn điều kiện $\forall x>0$ mà $g(x)\neq x$ ta luôn có

$f(g(x))=1$ tương đương với $f(x)\neq1$.

Chứng minh rằng phương trình $g(x)=x$ có ít nhất một nghiệm dương.

Giải. Lưu ý rằng mệnh đề $\{f(g(x))=1\Leftrightarrow f(x)\neq1\}$ chính là

$$\left\{\begin{bmatrix} f(x)=1 \ \Rightarrow\ f(g(x))\neq1; \\ f(x)\neq1 \ \Rightarrow\ f(g(x))=1 \end{bmatrix}\right\} \qquad (1)$$

Bây giờ ta giả sử ngược lại: $g(x)\neq x,\ \forall x>0$. Theo giả thiết, xảy ra (1). Đặt $h(x)=f(g(x))-f(x),\ x>0$, thế thì hàm $h(x)$ liên tục và từ (1), $h(x)\neq0,\ \forall x>0$. Vậy

$$\left[\begin{array}{l}\text{hoặc là } h(x)>0,\ \forall x>0;\\ \text{hoặc là } h(x)<0,\ \forall x>0.\end{array}\right. \qquad (2)$$

Lại đặt $g_{(k)}=g_0\cdots{}_0g$ (k hàm g), ta có:

+ Nếu $h(x)>0,\ \forall x$, nghĩa là $f(g(x))>f(x), \forall x>0$ suy ra $f(x)<f(g(x))<f(g_{(2)}(x))<f(g_{(3)}(x)),\ \forall x>0.$ (3)

+ Nếu $h(x)<0, \forall x>0$, nghĩa là $f(g(x))< f(x), \forall x>0$ suy ra $f(x)>f(g(x))>f(g_{(2)}(x))>f(g_{(3)}(x)), \forall x>0$. (4)

Khả năng 1: $f(x)=1$. Theo (1), $f(g(x))\neq 1$.

Lại theo (1), $f(g_{(2)}(x))=1=f(x)$, mâu thuẫn với (3) và (4).

Khả năng 2: $f(x)\neq 1$. Theo (1), $f(g(x))=1$. Lại theo (1), $f(g_{(2)}(x))\neq 1$. Áp dụng (1) một lần nữa, $f(g_{(3)}(x))=1=f(g(x))$, mâu thuẫn với (3) và (4).

Như vậy giả thiết phản chứng đưa ra là sai.

Bài 2.6.17. Cho hai hàm f(x) và g(x) liên tục trên [0;1] và thoả mãn

$$f(0)=g(1)=0;$$
$$f(1)=g(0)=1.$$

Chứng minh rằng $\forall\lambda>0, \exists x\in[0;1]$ để $f(x)=\lambda g(x)$.

Giải. Xét hàm số $h(x)=f(x)-\lambda g(x)$. h(x) liên tục, ngoài ra

$$h(0)=-\lambda g(0)<0;$$
$$h(1)=f(1)-\lambda g(1)=1>0.$$

Vậy tồn tại $x\in(0;1)$ để h(x) = 0 hay $f(x)=\lambda g(x)$.

§2.7. LIÊN TỤC ĐỀU

Lưu ý rằng trong định nghĩa liên tục đều, $\delta>0$ là chung cho mọi cặp x', x'' đủ gần nhau. Để chứng minh hàm f(x) không liên tục đều, ta cố gắng chỉ ra hai dãy $\{x_n\}$, $\{t_n\}$ sao cho $|x_n-t_n|\to 0$ $(n\to\infty)$ nhưng giá trị hàm số tương ứng không đủ gần nhau: $|f(x_n)-f(t_n)|>\varepsilon$. Ta cũng hay sử dụng mệnh đề:

Nếu f(x) liên tục Lipschitz, tức là có hằng số A > 0 để $|f(x)-f(y)|\le A|x-y|, \forall x,y\in X$ thì f(x) liên tục đều trên X.

Bài 2.7.1. Xét sự liên tục đều của $f(x)=e^x\cos\frac{1}{x}$.

Giải. Chọn $x'_n=\frac{1}{2\pi n}$; $x''_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$. Khi đó

$|x'_n-x''_n|\to 0(n\to\infty)$, còn $|f(x'_n)-f(x''_n)|=e^{\frac{1}{2n\pi}}+e^{\frac{1}{(2n+1)\pi}}>2$. Vậy f(x) liên tục không đều.

Bài 2.7.2. Cho f(x) liên tục đều trên $[0;+\infty)$ và thoả mãn $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n)=0, \forall x\geq 0$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Giải. Ý tưởng của chứng minh là ta sẽ "kéo" những điểm x ở xa về đoạn [0;1]. Với $\varepsilon > 0$ tuỳ ý cho trước, do f(x) liên tục đều trên $[0;+\infty)$ nên $\exists\delta>0, \forall x, y\in[0;1], |x-y| \leq \delta$ ta có $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Chọn ra m điểm $x_1,..., x_m$ sao cho $0= x_1 <...< x_m = 1$ và $|x_{i-1}-x_i|<\delta$ với $i=1,...,m$.

Từ giả thiết, $\exists N_i$ để $\forall n > N_i, |f(x_i+n)|< \frac{\varepsilon}{2}$.

Vậy với $n > N = \text{Max}(N_1,..., N_m)$ thì $|f(x_i+n)| <\frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall i=1,...,m.$

Khi đó $\forall x>N$ đặt $n=[x]$ thì $x-n\in[0;1)$. $\exists i\in\{1,...,m\}$ để $|x-(x_i+n)| = |(x-n)-x_i| < \delta$. Dẫn đến

$|f(x)| \leq|f(x)-f(x_i+n)|+|f(x_i+n)| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Bài 2.7.3. Chứng minh nếu f(x) liên tục đều trên (a;b) thì có 1 hàm g(x) liên tục trên [a;b] sao cho f(x) = g(x) $\forall x\in(a;b)$.

Hướng dẫn: Xét dãy $x_n = a+\frac{1}{n}(b-a);\ \ y_n = f(x_n)$.

Do tính liên tục đều của f(x) nên dễ suy ra $\{y_n\}$ bị chặn. Từ bổ đề Bolzano - Weierstrass trích ra dãy con $\{y_n'\}$ hội tụ đến c. Xét hàm

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(a;b);\\ c & x=a.\end{cases}$$

Dùng định nghĩa liên tục đều để chứng minh g(x) liên tục tại a. Tương tự với mút phải b.

Bài 2.7.4. Cho f(x) liên tục đều trên $\mathbf{R}_+$. Chứng minh $\exists\, a, b>0$ để

$$|f(x)| \leq ax+b\ \ \forall x\in\mathbf{R}_+.$$

Giải. Do f(x) liên tục đều, với $\varepsilon=1, \exists n\in \mathbf{N}^*$ sao cho

$$|f(x)-f(y)| \leq 1\ \ \forall x,y\geq 0 \text{ mà } |x-y| \leq \frac{1}{n}.$$

* $\forall x \in \mathbf{R}_+$, xét $y \geq 0 : |y-x| \leq 1$. Đặt

$x_0 = x;\quad x_1 = x + 1\,\dfrac{y-x}{n};\ldots;\ x_n = x + n\dfrac{y-x}{n} = y$. Khi đó

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(x_1)| + |f(x_1)-f(x_2)| + \ldots + |f(x_{n-1})-f(x_n)|$$

$$\leq 1+1+\ldots+1 = n.$$

* Bây giờ với x > 0, đặt $k = [x] \geq 0$ ta có

$$|f(x)| \leq |f(x)-f(k)| + |f(k)-f(k-1)| + \ldots + |f(1)-f(0)| + |f(0)|$$

$$\leq n(k+1) + |f(0)| \leq n(x+1) + |f(0)|$$

$$\leq nx + (n + |f(0)|).$$

Đặt $a = n$, $b = n + |f(0)|$ ta nhận được đpcm.

Cách 2: Chúng ta có thể chứng minh trực tiếp bằng việc chia đoạn $[0;x]$ thành các đoạn có độ dài $\leq \dfrac{1}{n}$. Quả vậy, có duy nhất $k_0 \in \mathbf{N}$ để

$$[x] + \frac{k_0}{n} \leq x < [x] + \frac{k_0+1}{n}.$$

Chia đoạn $[0;x]$ bởi các điểm chia liên tiếp

$$0; \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \ldots; \frac{n}{n}; 1+\frac{1}{n}; 1+\frac{2}{n}; \ldots; [x] + \frac{k_0}{n}; x$$

Như vậy có không quá $[x]n + n + 1 = n[x+1] + 1$ điểm chia.Ta có

$$|f(x)| \leq |f(x)-f(0)| + |f(0)|$$

$$\leq \left|f(x) - f\left([x]+\frac{k_0}{n}\right)\right| + \left|f\left([x]+\frac{k_0}{n}\right) - f\left([x]+\frac{k_0-1}{n}\right)\right|$$

$$+ \ldots + \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right| + |f(0)|$$

$$\leq [x]n + n + |f(0)| \leq xn + (n + |f(0)|).$$

Nhận xét: Từ giả thiết liên tục đều của f(x) nhiều bạn suy ra $\exists L > 0$ để $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$, $\forall x, y$, tức là f(x) liên tục Lipschitz. Thực ra không phải như vậy, xét ví dụ $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0;1]$. Ta chỉ có kết luận: Nếu f(x) liên tục Lipschitz thì liên tục đều.

Bài 2.7.5. Cho f, g là hai hàm liên tục đều trên $I \subset \mathbb{R}$. Chứng minh rằng các hàm số sau đây cũng liên tục đều trên I:

1) $|f(x)|$;

2) $a f(x)+b g(x),\ \forall a, b \in \mathbb{R}$;

3) $\operatorname{Max}(f(x), g(x))$; $\operatorname{Min}(f(x), g(x))$.

Hướng dẫn:

1) $\big|\,|f(x)|-|f(y)|\,\big| \le |f(x)-f(y)|$.

2) $|(a f(x)+bg(x))-(a f(y)+bg(y))|$

$\le |a|\,|f(x)-f(y)|+|b|\,|g(x)-g(y)|$.

3) $\operatorname{Max}(f, g)=\dfrac{1}{2}(f+g+|f-g|)$;

$\operatorname{Min}(f, g)=\dfrac{1}{2}(f+g-|f-g|)$, và sử dụng (1), (2).

Bài 2.7.6. Xét sự liện tục đều của các hàm số sau

a) $y=\sin x^2$; b) $y=\dfrac{\sin x}{x}$ trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

c) $y=\dfrac{|\sin x|}{x}$ trên $(0;1)$; d) $y=\dfrac{|\sin x|}{x}$ trên $[-1;1]\setminus\{0\}$.

Giải.

a) Xét 2 dãy $x_n=\sqrt{2n\pi}$; $t_n=\sqrt{\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi}$.

Ta có $0<t_n-x_n=\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}+\sqrt{\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi}} \to 0\ (n\to\infty)$.

Tuy nhiên $|f(t_n)-f(x_n)|=1,\ \forall n$. Vậy hàm số $y=\sin x^2$ không liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

b) Xét hàm số $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{khi} \quad x\neq 0;\\ 1 & \quad\quad\ \ x=0.\end{cases}$

Dễ thấy g(x) liên tục. Cho trước $\varepsilon>0$ đủ nhỏ: $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$, đặt $n=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+2$; $g(x)$ liên tục trên $[-n;n]$ nên nó liên tục đều trên đó. Vậy tồn tại $\delta_1>0: x', x'' \in [-n;n], |x'-x''|<\delta_1$ thì $|g(x')-g(x'')|<\varepsilon$.

Bây giờ xét x', x'' sao cho x', $x'' \in [-n+1; n-1]$ và $|x' - x''| < \varepsilon$.

Khi đó $\left|f(x') - f(x'')\right| = \left|\dfrac{\sin x'}{x'} - \dfrac{\sin x''}{x''}\right| \le \dfrac{1}{|x'|} + \dfrac{1}{|x''|} < \varepsilon$.

Chọn $\delta = \mathrm{Min}(\delta_1; \varepsilon)$ thì rõ ràng với $|x' - x'| < \delta$ ta được $\left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon$. Vậy f(x) liên tục đều trên $\mathbf{R}$.

c) Dễ thấy hàm số liên tục đều trên (0;1).

d) Xét 2 dãy $x_n = \dfrac{1}{n}$ và $x_n' = -\dfrac{1}{n}$.

Ta có $-1 < x_n' < 0 < x_n < 1$; $x_n \to 0; x_n' \to 0$ $(n \to \infty)$.

Tuy nhiên $\left|f(x_n) - f(x_n')\right| = \dfrac{2\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 2$ $(n \to \infty)$.

Vậy hàm số không liên tục đều trên miền đã nêu.

§2.8. LIÊN TỤC VỚI HÀM NGƯỢC

Bài 2.8.1. Chứng minh rằng tồn tại một hàm liên tục duy nhất $y = y(x), x \in \mathbf{R}$ thoả mãn phương trình Keple

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 \le \varepsilon < 1). \qquad (*)$$

Giải. Coi x là hàm của y, ta được $x = y - \varepsilon \sin y$, $y \in \mathbf{R}$. $x'(y) = 1 - \varepsilon\cos y > 0 \quad \forall y$. Vậy $x = x(y)$ đồng biến. Hàm ngược $y = y(x)$ tồn tại và liên tục, thoả mãn (*).

Do $\lim\limits_{y \to -\infty}(y - \varepsilon \sin y) = -\infty$; $\lim\limits_{y \to +\infty}(y - \varepsilon \sin y) = +\infty$

nên $y = y(x)$ xác định với $-\infty < x < +\infty$.

Bài 2.8.2. Cho $\varphi(t)$ và $\psi(t)$ là hai hàm nghịch biến và là ngược của nhau trên $(0;+\infty)$. Chứng minh rằng phương trình $\varphi(x) = \psi(x)$ có nghiệm.

Giải. Từ giả thiết ta có bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
$\varphi(x)$	$+\infty$ ↘	0
$\psi(x)$	$+\infty$ ↘	0

Như vậy, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ là những hàm giảm, chúng chỉ có thể có điểm gián đoạn loại 1 trên $(\varepsilon;+\infty)$ $\forall\varepsilon>0$, nghĩa là trên $(0;+\infty)$ (xem Bài 2.4.1). Giả sử x_0 là một điểm gián đoạn loại một của $\varphi(x)$. Như vậy, tập giá trị của φ không chứa $(\varphi(x_0+);\ \varphi(x_0-))\setminus\{\varphi(x_0)\}=A\subset(0;\ +\infty)$. Mâu thuẫn.

Từ đó, $\varphi(x)$ liên tục. Tương tự, $\psi(x)$ liên tục. Dễ thấy phương trình $\varphi(x)-x=0$ có nghiệm x = c, nói khác, $\exists\ c>0$ để $\varphi(c)=c$. Suy ra

$c=\ \psi(\varphi(c))=\psi(c)$, chứng tỏ rằng phương trình $\varphi(x)=\psi(x)$ nghiệm đúng tại t = c.

Bài 2.8.3. Cho $f:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ xác định bởi $f(x)=x^5+x-1,\ x\in\mathbf{R}$.

a) Chứng minh rằng f(x) là song ánh.

b) Giải phương trình $f(x)=f^{-1}(x)$.

Giải.

a) $f'(x)=4x^4+1>0$. Vậy f(x) đồng biến, liên tục,

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty;\quad \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Suy ra f là song ánh.

b) $f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(f(x))=x$.

+ Nếu $x<f(x)$ thì $f(x)<f(f(x))$, mâu thuẫn.

+ Nếu $x>f(x)$ thì $f(x)>f(f(x))$, mâu thuẫn.

Vậy suy ra $f(x)=x$.

Ngược lại, giả sử $f(x)=x$. Suy ra $x=f^{-1}(x)$. Từ đó $f^{-1}(x)=f(x)$.

Như vậy ta đã chứng minh phương trình đã cho tương đương với $f(x)=x$, hay $x^5=1\Leftrightarrow x=1$.

Bài 2.8.4. Giả sử f(x) liên tục, dương, tăng thực sự trên $(0;+\infty)$ và $f(x)\sim x\ln x$, $(x\to\infty)$. Gọi $\varphi(x)$ là hàm ngược của hàm $f(x)$. Chứng minh rằng

$$\varphi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \qquad (x \to \infty).$$

Giải. Vì $f(x) \sim x\ln x, \quad (x \to \infty)$ nên $\ln f(x) \sim \ln x + \ln\ln x$

$\sim \ln x, \quad (x \to \infty)$. Vậy $\dfrac{f(x)}{\ln f(x)} \sim x$.

Bây giờ đổi biến $f(x) = y,\ x = \varphi(y)$ ta được

$\varphi(y) \sim \dfrac{y}{\ln y},\ (y \to \infty)$ (Lưu ý $x \to \infty \Leftrightarrow y \to \infty$).

§2.9. LIÊN TỤC VÀ TUẦN HOÀN

Bài 2.9.1. Giả sử $\varphi(x)$ và $\psi(x)$ là hai hàm liên tục, tuần hoàn, xác định trên **R** thoả mãn

$$\lim_{x \to +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0.$$

Chứng minh rằng $\varphi(x) = \psi(x), \forall x \in \mathbf{R}$.

Giải. Gọi T là chu kì của $\varphi(x)$, T' là chu kì của $\psi(x)$. Rõ ràng là

$$\lim_{x \to +\infty} [\varphi(x+T) - \psi(x+T)] = 0.$$

Từ đó ta có $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} [\psi(x+T) - \psi(x)] =$

$$= \lim_{x \to +\infty} [[\psi(x+T) - \varphi(x+T)] + [\varphi(x+T) - \varphi(x)] + [\varphi(x) - \psi(x)]] = 0.$$

Hàm $h(x) = \psi(x+T) - \psi(x)$ là tuần hoàn vì nó là hiệu hai hàm tuần hoàn cùng chu kì T'. Nó có giới hạn 0 khi $x \to \infty$ nên $h(x) \equiv 0$. (Giả sử ngược lại, $\exists x_0$ mà $h(x) \neq 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x_0 + nT') = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x_0) = h(x_0) \neq 0$. Mâu thuẫn).

Vậy $h(x) \equiv 0$ hay $\psi(x+T) = \psi(x), \forall x$, tức là $\psi(x)$ tuần hoàn với cùng chu kì T. Lại áp dụng nhận xét vừa nêu ta thu được $\varphi(x) - \psi(x) \equiv 0$.

Bài 2.9.2. Giả sử f(x) là hàm liên tục trên $[0;1]$; $f(0) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng với α cho trước $\in (0;1)$, tìm được các điểm $x_1, x_2 \in [0;1]$ sao cho

$$f(x_1) = f(x_2);\ x_1 - x_2 = \alpha \ \text{ hoặc } \ x_1 - x_2 = 1 - \alpha.$$

Giải. Ta phải chứng minh $\exists x_1, x_2 \in [0;1]$ để

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 + \alpha:\ f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_2+\alpha) = f(x_2); \\ x_2 = x_1 + \alpha - 1:\ f(x_2) = f(x_1) \Leftrightarrow f(x_1+\alpha-1) = f(x_1). \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\ \exists x \in [0;1] \text{ để } \left[\begin{array}{l} f(x+\alpha) = f(x); \quad x+\alpha \in [0;1]; \\ f(x+\alpha-1) = f(x); \ x+\alpha-1 \in [0;1]. \end{array}\right.$$

Ta thác triển tuần hoàn f(x), chu kì 1. Do $f(0)=f(1)=1$ nên được hàm - vẫn kí nhiệu là f(x) - liên tục trên $\mathbf{R}$. Ta chứng tỏ rằng có $c \in [0;1]$ để $f(c+\alpha) = f(c)$ với f(x) là hàm tuần hoàn.

Xét $g(x)=f(x+\alpha)-f(x)$. Ta có

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x+\alpha)dx - \int_0^1 f(x)dx = \int_\alpha^{1+\alpha} f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Vì g(x) liên tục nên có $c \in [0;1]$, $g(c) = 0$, hay $f(c+\alpha)-f(c)=0$.

+ Nếu $0 \le c+\alpha \le 1$, đặt $x_1 = c$; $x_2 = \alpha + c$.

+ Nếu $1 < c + \alpha < 2$, suy ra $0 < \alpha + c - 1 < 1$.

Lại có $f(c) = f(c+\alpha) = f(c+\alpha-1)$. Vậy đặt $x_1 = c$; $x_2 = c+\alpha-1$.

Bài 2.9.3. Cho f(x) liên tục trên $[0;1]$ và thoả mãn điều kiện $f(0)=f(1)$. Chứng minh rằng phương trình $f(x)=f\left(x+\frac{1}{1000}\right)$ có nghiệm $x \in [0;1]$.

Giải. Thác triển tuần hoàn hàm y = f(x) được hàm y = F(x), $x \in \mathbf{R}$ mà là hàm tuần hoàn, chu kì 1, liên tục và $F(x) = f(x), \forall x \in [0;1]$.

Đặt $$g(x)=F(x)-F\left(x+\frac{1}{1000}\right),\ x \in \mathbf{R}.$$

Dễ thấy g(x) liên tục, ngoài ra $\int_0^1 g(x)dx = 0$.

Vậy có điểm $c \in [0;1]$, $g(c) = 0$.

+ Nếu $c \in \left[0;\frac{999}{1000}\right]$: chọn nghiệm $x_0 = c$;

+ Nếu $c \in \left[\frac{999}{1000};1\right]$: chọn nghiệm $x_0 = 1 - c$.

Bài 2.9.4. Chứng minh $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ liên tục, tuần hoàn chu kì $2T > 0$ thì tồn tại $a \in \mathbf{R}$ để cho $f(a+T) = f(a)$.

Giải. $f(a+T)=f(a)=0 \Leftrightarrow \left(f(x+T)-f(x)\right)\Big|_{x=a}=0$.

Xét hàm số $g(x)=f(x+T)-f(x)$. Ta có

$$g(x+T)=f(x+2T)-f(x+T)=f(x)-f(x+T)=-g(x)$$

hay $g(x)g(x+T)=-(g(x))^2 \le 0$.

Từ đó $\exists a \in [x;x+T]$ để $g(a)=0$ hay $f(a+T)=f(a)$.

Bài 2.9.5. Tìm các đa thức với hệ số thực f(x) sao cho $\cos(f(x)),\ x \in \mathbf{R}$ là hàm tuần hoàn.

Giải. Nếu f(x) bậc 1 thì rõ ràng $\cos(ax+b)$ là hàm tuần hoàn.

Giả sử $f(x)=P_n(x)$, là đa thức bậc $n \ge 2$, còn $g(x)=\cos(P_n(x))$ là hàm tuần hoàn. Từ đó $g'(x)=-(\sin P_n(x))P_n'(x)$ cũng là hàm tuần hoàn.

Vì $P_n'(x)$ là đa thức bậc ≥ 1 nên $\lim\limits_{x\to\infty}\left|P_n'(x)\right|=+\infty$. Mặt khác, vì $P_n(x)$ liên tục, $\lim\limits_{x\to\infty} P_n(x)=\infty$ nên tìm được dãy $x_k \to +\infty\ (k\to\infty)$ và

$$P_n(x_k)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ .$$

Từ đó $\left|g'(x_k)\right|=\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right|\left|P_n'(x_k)\right| \to +\infty\ \ (k\to\infty)$. Điều này trái với khẳng định $g'(x)$ là hàm tuần hoàn liên tục.

Ghi nhớ: Đạo hàm của hàm tuần hoàn, khả vi cũng là hàm tuần hoàn.

§2.10. PHƯƠNG TRÌNH HÀM KHÔNG SỬ DỤNG TÍNH LIÊN TỤC, KHẢ VI

Đối với những bài toán phương trình hàm mà:

- Không gắn gì với các giả thiết liên tục, khả vi;
- Không trực tiếp, không dễ dàng suy ra tính liên tục, khả vi

thì thường ta sử dụng các thủ thuật như:

+ Chọn các giá trị phù hợp của đối số;
+ Đổi biến số (đặt biến mới);
+ Đổi hàm số (xét hàm số mới);

Phép đổi biến, đổi hàm, hoặc cả hai nhằm tạo ra các hàm mà với các biến mới có mối quan hệ đơn giản, thông dụng, quen thuộc.

* $f(x)=f(y)\ \forall x,y \Leftrightarrow f(x)=\text{const}$: Nếu có thể, đưa về một vế chỉ chứa x, vế kia chỉ chứa y.

* Thường chúng ta chỉ thu được điều kiện cần. Ta phải kiểm tra hàm thu được có thoả mãn bài toán hay không.

Bài 2.10.1. Tìm các hàm f(x) và g(x) thoả mãn

$$f(2x+1)+2g(2x+1)=2x\,; \tag{1}$$

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g\left(\frac{x}{x-1}\right)=x\,. \tag{2}$$

Giải. Đặt $u=2x+1$; từ (1) suy ra

$$f(u)+2g(u)=u-1\,. \tag{3}$$

Lại đặt $u=\frac{x}{x-1} \Leftrightarrow x=\frac{u}{u-1}$, từ (2) suy ra

$$f(u)+g(u)=\frac{u}{u-1}\,. \tag{4}$$

Từ (3) và (4) ta được $\begin{cases} f(u)=-\dfrac{u^2-4u+1}{u-1}; \\ g(u)=\dfrac{u^2-3u+1}{u-1}. \end{cases}$

Bài 2.10.2. Cho $a,b\in\mathbf{R}$. Xác định tất cả các hàm số f(x) sao cho

$$f(a-x)+f(x)=b\ ,\ \forall x\in\mathbf{R}.$$

Giải. Ta muốn chuyển đẳng thức đã cho thành đẳng thức đối xứng hơn. Muốn vậy ta đặt $\frac{a}{2}-x=t$ hay $x=\frac{a}{2}-t$, ta được

$$f\left(\frac{a}{2}+t\right)+f\left(\frac{a}{2}-t\right)=b\,.$$

Để cho đối xứng hơn nữa ta tiếp tục biến đổi như sau

$$f\left(\frac{a}{2}+t\right)-\frac{b}{2}=-\left(f\left(\frac{a}{2}-t\right)-\frac{b}{2}\right).$$

hay $g(t)=-g(-t)$ với $g(t)=f\left(\frac{a}{2}+t\right)-\frac{b}{2}$.

Vậy $f(x)=g\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{b}{2}$ với g(x) là hàm lẻ tùy ý. Thử lại thấy đúng.

Bài 2.10.3. Tìm $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ thoả mãn các điều kiện

$$\begin{cases} f(0)=1999\ ;\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2000\ ; \\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y\ ,\ \forall x,y\in\mathbf{R}\ . \end{cases}$$

Giải. Với $x=t-\dfrac{\pi}{2},\ y=\dfrac{\pi}{2}$ ta thu được

$$f(t)+f(t-\pi)=2f\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}=0\ . \qquad (1)$$

Tương tự, với $x=\pi/2$, $y=t-\pi/2$ rồi sau đó $x=0,\ y=t-\pi$ ta được

$$f(t)+f(\pi-t)=2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=2.2000\sin t\ ; \qquad (2)$$

$$f(t-\pi)+f(\pi-t)=2f(0)\cos(t-\pi)=-2.1999\cos t\ . \qquad (3)$$

Nhân (3) với (-1) rồi cộng với (1) và (2)

$$2f(t)=2.2000\sin t+2.1999\cos t$$

hay $f(x)=1999\cos x+2000\sin x\ ,\ \forall x$.

Thử lại thấy đúng.

Bài 2.10.4. Tìm tất cả các hàm số f(x) liên tục trên $\mathbf{R}$ và thoả mãn

$$f(x)f(y)-f(x+y)=\sin x\sin y,\ \forall x,\ y\in\mathbf{R} \qquad (*)$$

Giải. Với x = y = 0 ta thu được

$(f(0))^2-f(0)=0$, suy ra $f(0)=0$ hoặc $f(0)=1$.

+ Nếu $f(0)=0$ thì với $y=0$ ta có $-f(x)=0$. Từ đó $f(x)=0,\ \forall x$.

Thế thì đẳng thức đã cho không xảy ra tại $x=y=\dfrac{\pi}{2}$, mâu thuẫn.

+ Nếu $f(0)=1$, thay $y=-x$ ta đi tới

$f(x)f(-x)=1-\sin^2 x=\cos^2 x$. Chọn $x=\pi/2$ ta được

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, vậy $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ hoặc $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

+ Nếu $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, thay $y=\dfrac{\pi}{2}$ vào (*) ta được

$f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\forall x\Leftrightarrow f(x)=\cos x,\ \forall x.$

+ Nếu $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$, thay $y=-\frac{\pi}{2}$ vào (*) ta được

$$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right), \forall x \Leftrightarrow f(x)=\cos x, \forall x.$$

Vậy f(x) = cosx. Thử lại thấy đúng.

Lưu ý: Tính liên tục của hàm f(x) cho trong giả thiết là thừa.

Bài 2.10.5. Tìm các hàm f(x) trên $\mathbf{R}$ thoả mãn một trong ba điều kiện sau

a) $f(x)f(x^2-1)=\sin x,\ \forall x\in\mathbf{R}$.

b) $f(x+y^2)=f(x^2)+f(y),\ \forall x\in\mathbf{R}$.

c) $f(x+y)-f(x-y)=2y(3x^2+y^2),\ \forall x\in\mathbf{R}$.

Giải.

a) Thay $x=0$ được $f(0)f(-1)=0$

Thay $x=-1$ được $f(-1)f(0)=-\sin 1\neq 0$, mâu thuẫn.

Vậy không có hàm f(x) đòi hỏi.

b) Thay x = y = 0 ta thu được f(0) = 0.

+ Với x = 0, y tùy ý ta được

$f(y^2)=f(0+y^2)=f(0)+f(y)=f(y)$. Từ đó $f(y^4)=f(y^2)$

+ Suy ra $\forall y\in\mathbf{R}, 0=f(-y^2+y^2)=f(y^4)+f(y)$.

Vậy $f(y)=-f(y^4)=-f(y^2)=-f(y)$ hay $f(y)=0$.

Thử lại thấy đúng.

Đáp số $f(x)=0, \forall x$.

c) Đặt $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}(u+v) \\ y=\frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$

Lưu ý rằng ánh xạ $(u,v):\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ xây dựng như trên là song ánh. Khi đó $2y(3x^2+y^2)=u^3-v^3$. Vậy ta dẫn đến điều kiện tương đương sau

$$f(u)-f(v)=u^3-v^3$$

hay $f(u)-u^3=f(v)-v^3\ \forall u,v\in\mathbf{R}$.

Chứng tỏ $f(u) - u^3 = C = \text{const}$, hay $f(u) = u^3 + C$, cũng vậy $f(x) = x^3 + C$, với C là hằng tùy ý. Thử lại thấy đúng.

Bài 2.10.6. Tìm các hàm f(x) xác định, nghịch biến trong $(0;+\infty)$ và thoả mãn điều kiện:

$$f(x + f(y)) = \frac{y}{xy+1}, \forall x, y > 0.$$

Giải. Từ chỗ x + f(y) phải nằm trong tập xác định của hàm f(x), nghĩa là x + f(y) > 0 ∀x, y > 0 suy ra $f(x) > 0$, $\forall x > 0$. Cho a > 0 tùy ý, với $y \geq 2a$ chọn $x = \frac{y-a}{ay}$ ta được $f\left(\frac{y-a}{ay} + f(y)\right) = \frac{y}{\frac{y-a}{ay}y + 1} = a$.

Suy ra $f\left(\frac{y-a}{ay} + f(y)\right) = a = f\left(\frac{x-a}{ax} + f(x)\right), \forall x, y \geq 2a$

Do f(x) nghịch biến trên $\mathbf{R}_+$ ta thu được

$$\frac{y-a}{ay} + f(y) = \frac{x-a}{ax} + f(x), \ \forall x, y \geq 2a.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} + A(a), \forall x \geq 2a.$$

Lưu ý rằng A(a) là hằng số không phụ thuộc a. Quả vậy, giả sử $0 < a_1 < a_2$, ta có

$$f(x) = \frac{1}{x} + A(a_1), \forall x \geq 2a_1;$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + A(a_2), \forall x \geq 2a_2.$$

Suy ra $A(a_1) = A(a_2)$.

Từ đó $$f(x) = \frac{1}{x} + C, \forall x \geq 2a.$$

Do a > 0 tùy ý suy ra $f(x) = \frac{1}{x} + C, \forall x \in \mathbf{R}_+$.

Để $f(x) > 0$ thì C ≥ 0. Thay x = y = 1 vào điều kiện đã cho ta thấy $C = 0$. Vậy $f(x) = \frac{1}{x}$. Thử lại thấy đúng.

Nhận xét: Đối với hàm f(x) đồng biến, hoặc nghịch biến, hoặc đơn ánh nói chung trên I, chúng ta hay sử dụng mệnh đề: $\forall\, a, b \in I,\ f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$.

Bài 2.10.7. Xác định tất cả các hàm f(x) thoả mãn điều kiện

$$f(x+1) - f(x) = 2^{-x},\ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Giải. Để ý rằng $2^{-x} = -2^{-x} + 2^{1-x} = -2^{1-(x+1)} + 2^{1-x}$.

Vậy có thể viết lại điều kiện bài toán dưới dạng

$$f(x+1) + 2^{1-(x+1)} = f(x) + 2^{1-x},\ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Đặt $g(x) = f(x) + 2^{1-x}$ ta được

$$g(x+1) = g(x),\ \ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Kết luận: $f(x) = g(x) - 2^{1-x}$, trong đó g(x) là hàm tuần hoàn chu kì 1.

Lưu ý: Ta không nói g(x) có chu kì cơ sở 1, vì có thể nhỏ hơn, ví như 1/n.

Bài 2.10.8. Tìm các hàm số f(x) trên $\mathbf{R}$ biết rằng

$$f(xy) + f(x-y) + f(x+y+1) = xy + 2x + 1,\ \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

Giải. Cho $y = -1$ ta được $f(-x) + f(x+1) + f(x) = x + 1$.

Cho y = 0 ta được $f(0) + f(x+1) + f(x) = 2x + 1$.

Từ đó ta có $f(-x) - f(0) = -x$ hay $f(t) - t = f(0)$.

Vậy nếu đặt $g(t) = f(t) - t$ thì $g(t) = g(0),\ \forall\, t$. (1)

Mặt khác, từ giả thiết bài toán ta có

$$[f(xy) - xy] + [f(x-y) - (x-y)] + [f(x+y+1) - (x+y+1)] = 0$$

Do đó $g(xy) + g(x-y) + g(x+y+1) = 0$.

Với x = y = 0 ta được $3g(0) = 0$ hay $g(0) = 0$. (2)

Từ (1) và (2) ta được $g(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = t,\ \forall\, t$

$\Leftrightarrow f(x) = x,\ \forall x$. Thử lại thấy đúng.

Bài 2.10.9. Chứng minh rằng tồn tại hàm h(x) trên $\mathbf{R}$ thoả mãn 2 điều kiện sau

i) $\forall x \geq 0$, $\sqrt{x+2} + \sqrt{x} = \sqrt{x+1+h(x+1)} - \dfrac{1}{2\sqrt{x+h(x)}}$;

ii) $\underset{x \geq 0}{\mathrm{Min}}\, h(x) = \dfrac{1}{4}$.

Giải. Hai điều kiện đòi hỏi không liên hệ gì đến giá trị của h(x) tại $x<0$, h(x) không cần phải là hàm liên tục nên ta có thể đặt $h(x)=\varphi_1(x)$ tùy ý trên $(-\infty;0)$. Mặt khác

$$(\mathrm{i}) \Leftrightarrow h(x+1)=\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x+h(x)}}\right)^2-(x+1).$$

Đặt x + 1 = t, ta được $h(t)=\left(\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}+\dfrac{1}{2\sqrt{t-1+h(t-1)}}\right)^2-t$.

Từ đó, ta sẽ xây dựng hàm h(x) trên các khoảng $[0;1)$, $[1;2)$,...,$[n-1;n)$,... theo quy nạp như sau:

* $h(x)=\varphi_2(x),\ \forall x\in[0;1)$, trong đó $\varphi_2(x)$ là hàm tùy ý trên $[0;1)$ thoả mãn $\underset{x\in[0;1)}{\mathrm{Min}}\,\varphi_2(x)=\dfrac{1}{4}$.

* Giả sử ta đã xây dựng được hàm h(x) trên các khoảng $[0;1)$,...,$[k-1;k)$ ta đặt:

$$h(x)=\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+\frac{1}{2\sqrt{x-1+h(x-1)}}\right)^2-x,\ x\in[k,k+1).$$

Dễ thấy h(x) là hàm cần tìm.

Bài 2.10.10. Tìm hàm $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thoả mãn

$$f(f(x))=6x-f(x),\ \forall x>0.$$

Giải. Trước hết ta thử tìm f(x) trong lớp các hàm đa thức. Bắt đầu là đa thức bậc 1, dễ thấy f(x) = 2x.

Bây giờ ta chứng minh f(x) = 2x là hàm duy nhất phải tìm.

Bài toán khá dễ nếu chỉ tìm f(x) trong lớp hàm đa thức. Tuy nhiên, hàm f(x) rất tổng quát, người ta không nói gì kể cả tính liên tục của nó, có lẽ ta chỉ còn dựa vào tính dương của f(x): Nếu $f(x)\neq 2x$, ta sẽ xây dựng một dãy $x_{n+1}=f(x_n)$ mà tới một chỉ số nào đó, x_{n+1} âm.

Giả sử có $x_0>0$ sao cho $f(x_0)=(2-k_0)x_0$ với $0\neq k_0<2$.

Nếu $0<k_0<2$, khi đó

$$f((2-k_0)x_0)=f(f(x_0))=6x_0-f(x_0)=(4+k_0)x_0$$

$\Rightarrow f((4+k_0)x_0) = f(f((2-k_0)x_0)) = 6(2-k_0)x_0 - f((2-k_0)x_0)$

$$=(8-7k_0)x_0 = \left(2-\frac{9k_0}{4+k_0}\right)(4+k_0)x_0.$$

Như vậy, ta đã tìm được $x_1 = (4+k_0)x_0$ và $k_1 = \dfrac{9k_0}{4+k_0}$ để $f(x_1) = (2-k_1)x_1$.

Rõ ràng $k_1 > \dfrac{3}{2}k_0$. Nếu $k_1 \geq 2$ thì $f(x_1) \leq 0$, mâu thuẫn. Nếu $k_1 < 2$, lặp lại kết luận trên, tìm được x_2 sao cho $f(x_2) = (2-k_2)x_2$ và $k_2 > \left(\dfrac{3}{2}\right)k_1 > \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 k_0 \ldots$, đến một lúc nào đó $k_n \geq 2$, mâu thuẫn.

Như vậy, nếu có x_0 sao cho $f(x_0) < 2x_0$ ta suy ra mâu thuẫn.

Nếu ta có thể tìm được x_0 mà $f(x_0) > 2x_0$, khi đó $f(x_0) = (2+k)x_0$ với $k > 0$. Khi đó

$f((2+k)x_0) = f(f(x_0)) = 6x_0 - (2+k)x_0 = (4-k)x_0 < 2(2+k)x_0$.

Nói khác, ta có $x_1 = (2+k)x_0$ và $f(x_1) < 2x_1$, và theo điều đã chứng minh trên, suy ra mâu thuẫn.

Tóm lại, ta phải có $f(x) = 2x, \ \forall x > 0$.

Bài 2.10.11. Tìm các hàm f(x) trên $\mathbf{R}$ thoả mãn

$$f(xy)+f(xz)-2f(x)f(yz) \geq \frac{1}{2}, \forall x, y, z \in \mathbf{R}.$$

Giải.

+ Cho $x=y=z=1$ ta được $2f(1)-2(f(1))^2 \geq \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow (2f(1)-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(1) = \frac{1}{2}.$$

+ Cho x = y = z = 0 ta được

$$2f(0)-2(f(0))^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (2f(0)-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(0) = \frac{1}{2}.$$

+ Cho x = 0, z = 1, y tùy ý ta được

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}f(y) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(y) \leq \frac{1}{2}, \ \forall y.$$

+ Cho y = z = 1, x tùy ta được

$$2f(x)-2f(x)\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow f(x)\ge\frac{1}{2},\ \forall x.$$

Vậy $f(x)=\frac{1}{2}$, $\forall x$. Thử lại thấy đúng.

Bài 2.10.12. Tìm hàm $k:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ số thoả mãn hai điều kiện

1) $k(x)\ge x,\ \forall x\in\mathbf{R}$;

2) $k(x+y)\ge k(x)+k(y),\ \forall x,y\in\mathbf{R}$.

Giải. Từ giả thiết suy ra

$$\begin{cases} e^{k(x)}\ge e^{x};\\ \dfrac{e^{k(x+y)}}{e^{x+y}}\ge\dfrac{e^{k(x)}e^{k(y)}}{e^{x+y}}=\dfrac{e^{k(x)}}{e^{x}}\dfrac{e^{k(y)}}{e^{y}}.\end{cases}$$

Đặt $g(x)=\dfrac{e^{k(x)}}{e^{x}}$, từ trên ta suy ra

$$\begin{cases} g(x)\ge 1\ ; & (1)\\ g(x+y)\ge g(x)g(y). & (2)\end{cases}$$

Cho x = y = 0 ta được

$$\begin{cases} g(0)\ge 1\ ;\\ g(0)\ge[g(0)]^2\Rightarrow g(0)=1.\end{cases}$$

Lại có $\quad 1=g(0)=g(x+(-x))\ge g(x)g(-x)\Rightarrow$

$$g(x)\le\frac{1}{g(-x)}\le 1,\ (\text{ vì } g(-x)\ge 1).$$

Cùng với $g(x)\ge 1$ suy ra $g(x)=1\Rightarrow k(x)=x$. Thử lại thấy đúng.

Nhận xét: Nhiều khi bất phương trình hàm lại chuyển thành phương trình hàm và có thể ta vẫn có nghiệm duy nhất.

Bài 2.10.13. Tìm các hàm $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ thoả mãn hai điều kiện

1) $f(x)\ge e^{x},\ \forall x\in\mathbf{R}$;

2) $f(x+y)\ge f(x)f(y),\ \forall x,y\in\mathbf{R}$.

Giải. Đặt $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{x}}$. Từ đó $f(x)=e^{x}g(x)$. Suy ra các tính chất sau của g(x):

+ $g(x)\ge 1,\ \forall x\in \mathbf{R}$;

+ $g(x+y)\ge g(x)g(y),\ \forall x,y\in \mathbf{R}$.

Quay về (1), (2) ở Bài 2.10.12, suy ra g(x) = 1. Vậy f(x) = e^x.

Bài 2.10.14. Chứng minh rằng không tồn tại hàm $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ sao cho $f^2(x)\ge f(x+y)(f(x)+y)\quad \forall x,y>0$.

Giải. Giả sử tồn tại hàm như vậy. Viết lại bất đẳng thức đã cho dưới dạng

$$f(x)-f(x+y)\ge f(x)-\frac{f^2(x)}{f(x)+y}=\frac{f(x)y}{f(x)+y} \tag{1}$$

Rõ ràng f(x) giảm. Với x > 0 cố định, chọn $n\in\mathbf{N}$ sao cho $nf(x+1)\ge 1$. Với $k=0,1,...,n-1$ ta có

$$n\ge\frac{1}{f(x+1)}\ge\frac{1}{f\left(x+\frac{k+1}{n}\right)}.$$

Suy ra $f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f\left(x+\frac{k+1}{n}\right)\ge\dfrac{f\left(x+\frac{k}{n}\right)}{nf\left(x+\frac{k}{n}\right)+1}\ge\dfrac{1}{2n}$. (2)

Cộng các bất đẳng thức này lại ta được

$f(x+1)\le f(x)-\frac{1}{2}$. Từ đó suy ra rằng $f(x+2m)\le f(x)-m$ với mọi $m\in\mathbf{N}$. Lấy $m\ge f(x)$ ta suy ra mâu thuẫn với điều kiện $f(x)>0$.

Bài 2.10.15. Tìm tất cả các hàm $f:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ thoả mãn hai điều kiện

a) $f(2)=0$; $f(x)\ne 0$ với $0\le x<2$;

b) $f(xf(y))f(y)=f(x+y)\quad \forall x\ge 0, \forall y\ge 0$.

Giải. Vì $f(x+2)=f(xf(2))f(2)=0$ nên $f(x)=0$ với mọi $x\ge 2$.

Lại có $f(y)f((2-y)f(y))=f(2)=0$. Vậy nếu $0\le y<2$ thì $f((2-y)f(y))=0$ và từ đó $(2-y)f(y)\ge 2$ hay $f(y)\ge 2/(2-y)$.

Giả sử rằng với y_0 nào đó trên $[0;2)$ xảy ra $f(y_0)>\dfrac{2}{2-y_0}$. Khi đó, ta có thể tìm được $y_1\in(y_0,2)$ sao cho $f(y_0)=\dfrac{2}{2-y_1}$. Bây giờ đặt $x_1=2-y_1$. Thế thì

$f(x_1 f(y_0)) = f(2) = 0$, suy ra $f(x_1 + y_0) = 0$. Tuy nhiên $x_1 + y_0 < 2$, mâu thuẫn. Vậy cần phải có $f(x) = \dfrac{2}{2-x}$ với mọi $x < 2$.

Ta còn phải kiểm tra hàm f(x) vừa xây dựng thoả mãn các đòi hỏi đặt ra. Hiển nhiên là (a) được thoả mãn, đồng thời (b) cũng được thoả mãn $\forall x \geq 0$ và $\forall y \geq 2$.

Bây giờ giả sử $x \geq 0$, $0 \leq y < 2$. Khi đó $f(x\, f(y)) = f\left(x.\dfrac{2}{2-y}\right)$.

* Nếu $\dfrac{2x}{2-y} \geq 2$ $(\Leftrightarrow x + y \geq 2)$ thì $f(x f(y)) = 0 = f(x+y)$, suy ra (b) nghiệm đúng.

* Nếu $0 \leq \dfrac{2x}{2-y} < 2$ $(\Leftrightarrow 0 \leq x + y < 2)$ thì

$$f(x\, f(y))\, f(y) = \frac{2}{2 - 2x/(2-y)} \frac{2}{2-y} = \frac{2}{2-x-y} = f(x+y)$$

suy ra (b) nghiệm đúng.

Trả lời: $f(x) = \begin{cases} 2/(2-x) & \text{khi } 0 \leq x < 2; \\ 0 & \text{khi } 2 \leq x. \end{cases}$

§2.11. PHƯƠNG TRÌNH HÀM VỚI TÍNH LIÊN TỤC

- Các kĩ thuật về phương trình hàm ở mục trước vẫn được sử dụng.
- Để xuất hiện giới hạn, ta hay chọn các hàm hoặc các giá trị đối số bằng nhau hàng loạt.
- Vì không giả thiết về tính khả vi, ta không được phép đạo hàm hai vế.

Bài 2.11.1. Tìm f(x) xác định trên $\mathbf{R}$ sao cho:

a) $f(3x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, f(x) liên tục tại 0.

b) $f(x) = f\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, f(x) liên tục tại 0.

Giải.

a) $\forall x \in \mathbf{R}$ và $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $f(x) = f\left(\dfrac{x}{3}\right) = f\left(\dfrac{x}{3^2}\right) = \ldots = f\left(\dfrac{x}{3^n}\right)$. Từ tính liên tục tại 0 suy ra $f(x) = f(0) = \text{const}$.

b) Xét hàm $\varphi(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$. Như vậy $f(x)=f(\varphi(x))$. (*)

Lại theo chính (*)

$$f(\varphi(x))=f((\varphi_o\varphi)(x))$$

$$f((\varphi_o\varphi)(x))=f((\varphi_o\varphi_o\varphi)(x)).$$

....

Vậy $$f(x)=f(\varphi_{(n)}(x)) \qquad (**)$$

trong đó $$\varphi_{(n)}(x)=(\varphi_o\ldots{}_o\varphi)(x) \text{ (n hàm } \varphi).$$

Bây giờ với x > 0, ta tính $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{(n)}(x)$. Đây là dãy truy hồi, trước hết ta có

$$\varphi_{(n)}(x)>0, \qquad \forall n.$$

$$\varphi_{(n+1)}(x)-\varphi_{(n)}(x)=\frac{\varphi_{(n)}(x)}{1+\varphi_{(n)}^2(x)}-\varphi_{(n)}(x)=-\frac{\varphi_{(n)}^3(x)}{1+\varphi_{(n)}^2(x)}<0.$$

Vậy $\{\varphi_{(n)}(x)\}$ giảm theo n, nó có giới hạn. Đặt $\psi(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{(n)}(x)$. Chuyển qua giới hạn ta được

$$\frac{\psi(x)}{1+\psi^2(x)}=\psi(x)\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{1+\psi^2(x)}\right)\psi(x)=0\Leftrightarrow\psi(x)=0.$$

Cho $n\to\infty$, từ (**) ta được f(x) = f(0), $\forall x > 0$.

Với $x \le 0$ lập luận tương tự. Từ đó f(x) = f(0) = const.

Bài 2.11.2. Tìm hàm f(x) xác định trên $\mathbf{R}$, liên tục tại 1 và

$$f(x) = -f(x^2), \quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

Giải. Rõ ràng f(x) là hàm chẵn. Với $x \neq 0$, đặt $x^2 = t > 0$ ta được $f(t)=-f(\sqrt{t})=-f\left(t^{1/2}\right)$.

Từ đó, theo quy nạp ta được $f(t)=(-1)^n f\left(t^{1/2^n}\right)$.

Vì $t^{1/2^n}\to 1\ (n\to\infty)$ và từ tính liên tục của hàm f(x) ta được $f\left(t^{1/2^n}\right)\to f(1)$.

Từ đó $$(-1)^n f(x)=f\left(x^{1/2^n}\right)\to f(1)\ (n\to\infty).$$

Mặt khác, nếu f(x) $\neq$ 0 thì $\{(-1)^n f(x)\}$ phân kì, mâu thuẫn. Vậy f(x) = 0, $\forall x \neq 0$.

Hơn nữa do f(x) liên tục nên f(0) = 0. Tóm lại f(x) $\equiv$ 0. Thử lại thấy đúng.

Bài 2.11.3. Tìm các hàm liên tục f(x) trên $\mathbf{R}$ sao cho

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x, y \in \mathbf{R}$$

(Phương trình Cauchy).

Hướng dẫn: Giả sử f(x) phù hợp, sau đây là các bước chứng minh.

1) Chứng minh bằng quy nạp theo n: f(nx) = nf(x), $\forall n \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}$.

2) Từ chỗ nx + (-nx) =0 suy ra $f(nx)=nf(x)\ \forall n \in \mathbf{Z}, \forall x \in \mathbf{R}$.

3) Với $x \in \mathbf{Q}$, $\exists p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^*$ sao cho $x = \dfrac{p}{q}$. Theo (2)

$$\begin{cases} f(p) = f(p.1) = pf(1); \\ f(p) = f\left(q\dfrac{p}{q}\right) = qf\left(\dfrac{p}{q}\right). \end{cases}$$

Suy ra $$f(x)=\frac{p}{q}f(1) = xf(1).$$

4) Với $x \in \mathbf{R}$, vì $\mathbf{Q}$ trù mật trong $\mathbf{R}$ nên có dãy số hữu tỉ $\{u_n\}$, $u_n \to x\ (n \to \infty)$. Do f(x) liên tục nên $f(u_n) \to f(x)\ (n \to \infty)$.

Theo (3), $f(u_n) = u_n f(1)$. Vậy

$f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = \lim\limits_{n \to \infty} u_n f(1) = xf(1) = xa$ với a = const.

Thử lại thấy đúng.

Nhận xét:

(1) Kết quả vẫn đúng nếu thay $\mathbf{R}$ bằng $(-\infty; \alpha]$ hoặc $[\beta; +\infty)$.

(2) Ý tưởng chứng minh giống như xây dựng số thực từ số tự nhiên, số nguyên rồi số hữu tỉ. Bạn đọc nên nắm kĩ bài này cả về phương pháp lẫn kết quả, nó là cơ sở cho một loạt bài tiếp sau.

Bài 2.11.4. Cho $a \in \mathbf{R}$, tìm tất cả các hàm số f(x) xác định và liên tục trên $\mathbf{R}$ sao cho

$$f(x-y) = f(x) - f(y) + axy.$$

Giải. Với x = 1, y = 0 ta được f(0) = 0.

Lại lấy x = 1, y = 1 ta được f(0) = a hay a = 0. Từ đó nếu a ≠ 0 thì không có hàm f(x) đòi hỏi.

Với a = 0, $f(x-y)=f(x)-f(y);\ \forall x, y \in \mathbf{R}$.

Lấy x = 0 ta được f(-y) = -f(y) vậy f(x) là hàm lẻ.

Từ đó $f(x+y)=f(x-(-y))=f(x)-f(-y)=f(x)+f(y)$.

f(x) lại là hàm liên tục, theo Bài 2.11.3, $f(x)=\lambda x \quad (\lambda \in \mathbf{R})$.

Bài 2.11.5. Tìm tất cả các hàm f(x) xác định và liên tục trên $\mathbf{R}$ sao cho $f(x+y)=f(x)\,f(y),\ \forall x,y \in \mathbf{R}$.

Giải. Ta có $f(x)=f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)=\left(f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0,\ \forall x \in \mathbf{R}$. (1)

Trường hợp 1. $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, $f(x_0)=0$. Khi đó

$f(x)=f((x-x_0)+x_0)=f(x-x_0)\,f(x_0)=0, \forall x\in \mathbf{R}$.

Trường hợp 2. $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x)\neq 0$. Theo (1), f(x) > 0.

Đặt g(x) = lnf(x) thì g(x) liên tục trên $\mathbf{R}$. Hơn nữa

$$g(x+y)=\ln f(x+y)=\ln(f(x)f(y))$$
$$=\ln f(x)+\ln f(y)=g(x)+g(y), \forall x,y\in \mathbf{R}.$$

Theo Bài 2.11.3, g(x) = ax, a hằng số. Vậy

$$f(x)=e^{g(x)}=e^{ax}=b^x \text{, với b hằng số dương.}$$

Đáp số f(x) = 0 hoặc $f(x) = b^x$, $0 < b < +\infty$.

Bài 2.11.6. Tìm các hàm liên tục f(x) trên $\mathbf{R}$, thỏa mãn

$$f(1)=1; \qquad f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=f(x)+f(y), \quad \forall x,y \in\mathbf{R}.$$

Giải. Cho x = y = 0 ta được f(0) = 0.

Chọn y = 0, suy ra $f(|x|)=f(x)$. Vậy f(x) là hàm chẵn. Từ đó ta chỉ cần xét trên $\mathbf{R}_+$.

Dễ chứng minh theo qui nạp rằng $f(x_1)+...+f(x_n)=f\left(\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}\right)$. Chọn $x_1=x_2=...=x_n=\sqrt{\dfrac{k}{n}}$ ta được

$$n f\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)=f\left(\sqrt{k}\right)=k f(1)=k .$$

Suy ra $$f\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)=\frac{k}{n}\ ,\ \forall k,n \in \mathbf{N}^{*}.$$

+ Với $x \in \mathbf{Q}_{+}$, $x=\frac{p}{q}$, $p,q \in \mathbf{N}^{*}$ ta có

$$f(x)=f\left(\sqrt{\frac{p^2}{q^2}}\right)=\frac{p^2}{q^2}\ =\ x^2.$$

+ Với $x \in \mathbf{R}_{+}$, $\exists\{r_n\}\subset \mathbf{Q}$, $r_n \to x\ (n\to\infty)$. Do f(x) liên tục,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(r_n)=\lim_{n\to\infty} r_n^2=x^2.$$

Vậy $f(x)=x^2$, $\forall x \in \mathbf{R}_{+}$. Do f(x) chẵn, $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Thử lại thấy đúng.

Bài 2.11.7. Tìm tất cả các hàm f(x) xác định và liên tục trên [0;1] thỏa mãn $f(x f(x))=f(x), \forall x \in[0;1]$.

Giải. Lấy a tùy ý trên (0;1], đặt b = f(a). Từ giả thiết suy ra ab = af(a) phải thuộc tập xác định của f và f(ab) = f(a) = b. Theo quy nạp ta chứng minh được ab^n thuộc tập xác định của f và $f(ab^n) = f(a) = b$.

Nếu b < 0 thì ab < 0, mâu thuẫn. Nếu b > 1 thì $ab^n > 1$ với n đủ lớn, hàm f(x) sẽ không xác định tại ab^n. Vậy $b \in [0;1]$.

Nếu $b \in(0;1)$ thì $b=f(a)=\lim_{n\to\infty} f\left(ab^n\right)=f(0)$.

Như vậy $b \in\{0;1;\ f(0)\}$, tức là hàm f(x) nhận không quá 3 giá trị. Vì f(x) liên tục nên f(x) = c là hằng số. Thử lại thấy đúng. Vậy f(x) = c, với c- hằng số $\in[0;1]$..

Bài 2.11.8. Tìm hàm f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ thỏa mãn các điều kiện

a) $f(x+y)\le f(x)+f(y), \forall x,y\in\mathbf{R}$;

b) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$.

Giải. Cho x = y = 0, từ (a) suy ra $f(0)\le 2f(0)$ hay $f(0) \ge 0$.

Cho $y=-x$ ta được $f(x)+f(-x)\ge f(0)\ge 0$ hay $f(-x)\ge -f(x),\forall x$.

Từ (a) dễ suy ra $f(nx)\le nf(x),\ \forall n\in N^*,\ \forall x\in\mathbf{R}$. Đặt nx = t ta được

$$f(t)\le nf\left(\frac{t}{n}\right) \text{ tức là } \frac{f(x)}{n}\le f\left(\frac{x}{n}\right),\ \forall n,\ \forall x.$$

Từ đó với $x_0>0$ ta thu được

$$\frac{f\left(\frac{x_0}{n}\right)}{\frac{x_0}{n}}\ge\frac{f(x_0)}{n\frac{x_0}{n}}=\frac{-f(x_0)}{-x_0}\ge\frac{f(-x_0)}{-x_0}\ge\frac{f\left(-\frac{x_0}{n}\right)}{-\frac{x_0}{n}}.$$

Cho $n\to\infty$, sử dụng điều kiện (b), theo định lý kẹp ta được

$$\frac{f(x_0)}{x_0}=\frac{f(-x_0)}{-x_0}=1,\ \forall\ x_0>0 \text{ hay } f(x)=x\ \forall x\ne 0.$$

Hơn nữa $0\le f(0)=f(1+(-1))\le f(1)+f(-1)=0$.

Vậy f(0) = 0, từ đó f(x) = x ∀x.

Thử lại thấy đúng.

Bài 2.11.9. Xác định các hàm f(x) liên tục trên $\mathbf{R}_+$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xy)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbf{R}_+$$

Giải. Đặt $x=e^u$, $y=e^v$ và $g(t)=f\left(e^t\right),\ t\in\mathbf{R}$.

Khi đó g(t) là hàm liên tục trên $\mathbf{R}$ và điều kiện đã cho trở thành

$$g(u+v)=g(u)+g(v),\forall u,v\in\mathbf{R}.$$

Theo Bài 2.11.3 thì g(t) = at với a- hằng số.

Từ đó $f(x)=g(\ln x)=a\ln x,\ \ x>0$.

Bài 2.11.10. Tìm các hàm f(x) xác định và liên tục trên $\mathbf{R}_+$ thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y),\ \forall x,y\in\mathbf{R}_+.$$

Giải. Đặt $\frac{x}{y}=t$. Khi đó x = ty và đẳng thức đã cho tương đương với

$$f(t)=f(ty)-f(y)$$

$$\Leftrightarrow\ f(ty)=f(t)+f(y),\ \forall t,y\in\mathbf{R}_+.$$

Theo Bài 2.11.9, f(x) = alnx, với a = const, x > 0.

Bài 2.11.11. Tìm các hàm f(x) xác định, liên tục trên [-1;1] và thỏa mãn điều kiện

$$f(x)+f(y)=f\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right),\ \forall x,y\in[-1;1].$$

Giải.

+ Đặt $x=\sin u,\ y=\sin v,\ u,v\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

thì $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\sin(u+v)$.

Khi đó điều kiện bài toán được viết lại dưới dạng

$$f(\sin u)+f(\sin v)=f(\sin(u+v))$$

hay $$g(u+v)=g(u)+g(v),\ \forall u,v\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], \qquad (*)$$

trong đó $g(u)=f(\sin u)$ là hàm liên tục trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

+ Thác triển hàm g(x) theo quy nạp trên các đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}-n\pi;\ \frac{\pi}{2}+n\pi\right]$ để được hàm $g_n(x)$ vẫn thỏa mãn điều kiện cộng tính $g_n(u+v)=g_n(u)+g_n(v)$, liên tục và $g_n(u)=g(u),\ \forall u\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

+ Thu được hàm $g_\infty(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$, $g_\infty=g$ trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $g(u+v)=g(u)+g(v), \forall u,v\in\mathbf{R}$. Theo Bài 2.11.3 (Phương trình Cauchy), g(u) = au với a- hằng số. Vậy $f(x)=a\arcsin x,\ \forall x\in[-1;1]$. Thử lại thấy đúng.

Lưu ý: Bạn đọc có thể sử dụng phương pháp giống như khi giải phương trình Cauchy (Bài 2.11.3) với một chút điều chỉnh để trực tiếp chỉ ra g(u) = au.

Bài 2.11.12. Tìm các hàm số f(x), xác định và liên tục trên $\mathbf{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}. \qquad (1)$$

Giải. Ta muốn tìm ra một quan hệ nào đó có tính chất cộng tính để sử dụng phương trình Cauchy. Trước hết cho y = 0 ta được

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{f(x)}{2}+\frac{f(0)}{2} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{2}=f\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{f(0)}{2}. \qquad (2)$$

Bây giờ, trừ 2 vế (1) cho f(0) và để ý đến (2) ta được

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)-f(0)=\left(\frac{f(x)}{2}-\frac{f(0)}{2}\right)+\left(\frac{f(y)}{2}-\frac{f(0)}{2}\right)$$

$$=\left(f\left(\frac{x}{2}\right)-f(0)\right)+\left(f\left(\frac{y}{2}\right)-f(0)\right),\ \forall x, y. \qquad (3)$$

Từ đó, nếu ta đặt g(u) = f(u) - f(0) thì g(u) là hàm liên tục và (3) viết lại dưới dạng:

$$g(u+v) = g(u) + g(v).$$

Theo phương trình Cauchy, g(u) = au. Từ đó f(x) = ax + b, $\forall x \in \mathbf{R}$ với a, b 2 hằng số tùy ý.

Thử lại thấy đúng.

Bài 2.11.13. Tìm f(x) xác định và liên tục trên $\mathbf{R}_+$ và thoả mãn điều kiện

$$f\left(\sqrt{xy}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},\ \forall x, y \in \mathbf{R}_+.$$

Giải. Đặt $x=e^u$, $y = e^v$, $g(u)= f\left(e^u\right)$.

Khi đó g(u) liên tục trên $\mathbf{R}$ và thoả mãn

$$g\left(\frac{u+v}{2}\right)=\frac{g(u)+g(v)}{2}, \qquad \forall u, v \in \mathbf{R}.$$

Theo kết quả của Bài 2.11.12, g(u) = au + b.

Từ đó f(x) = alnx + b, $x \in \mathbf{R}_+$ (a, b- hằng số tùy ý).

Chúng ta đã sử dụng các phép biến đổi với đối số. Sau đây ta sẽ sử dụng các phép biến đổi với hàm số, cho phép ta giải một loạt bài tập quan trọng.

Bài 2.11.14. Tìm f(x) xác định và liên tục trên $\mathbf{R}_+$ thoả mãn điều kiện

$$f\left(\sqrt{xy}\right)=\frac{2}{\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}},\ \forall x, y \in \mathbf{R}_+.$$

Giải. Từ giả thiết bài toán suy ra $f(x) \neq 0,\ \forall\ x \in \mathbf{R}_+$.

Ta có

$$\frac{1}{f\left(\sqrt{xy}\right)}=\frac{\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}}{2}.$$

Bây giờ nếu ta đặt $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ thì g(x) liên tục và thoả mãn $g\left(\sqrt{xy}\right)=\frac{g(x)+g(y)}{2},\ \forall x,y\in \mathbf{R}_+$.

Theo Bài 2.11.13, $g(x)=a\ln x+b$. Từ đó $f(x)=\frac{1}{a\ln x+b}$.

Để f(x) liên tục trên $\mathbf{R}_+$ thì a = 0 và b ≠ 0. Vậy f(x) = C với C- hằng số tùy ý khác 0.

Bài 2.11.15. Tìm các hàm f(x) xác định và liên tục trên $R\setminus\{0\}$ thoả mãn điều kiện.

$$f\left(\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\right)=\frac{2}{\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}},\forall x,y\in \mathbf{R},\ x+y\neq 0.$$

Giải. Từ điều kiện bài toán suy ra $f(x)\neq 0\ \forall x\neq 0$.

Đặt $\frac{1}{x}=u$, $\frac{1}{y}=v$, $g(u)=\frac{1}{f\left(\frac{1}{u}\right)}$.

Khi đó g(u) ≠ 0 với mọi u ≠ 0, g(u) liên tục trên $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ và

$$g\left(\frac{u+v}{2}\right)=\frac{g(u)+g(v)}{2},\forall u,v,\ \ u+v\neq 0.$$

Có thể chứng tỏ kết quả của Bài 2.11.12 vẫn đúng trong trường hợp này. Vậy g(u) = au + b.

Hàm g(u) ≠ 0, ∀u ≠ 0 khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} g(u)=au,\ a\neq 0\\ g(u)=b,\ b\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=\frac{x}{a},\ a\neq 0\\ f(x)=\frac{1}{b},\ b\neq 0.\end{array}\right.$$

Thử lại thấy đúng, vậy

$$\left[\begin{array}{ll} f(x)=Ax, & A\neq 0;\\ f(x)=B, & B\neq 0.\end{array}\right.$$

Bài 2.11.16. Tìm hàm f(x) liên tục trên $\mathbf{R}$ và thoả mãn điều kiện

$$f(4x)+f(9x)=2f(6x),\ \ \forall x\in \mathbf{R}. \qquad (1)$$

Giải. Đặt $t = 6x \Leftrightarrow x = t/6$. Ta có

$$f\left(\frac{2}{3}t\right) + f\left(\frac{3}{2}t\right) = 2f(t), \quad \forall t \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \left(f\left(\frac{2}{3}t\right) - f(t)\right) = f(t) - f\left(\frac{3}{2}t\right)$$

hay
$$g\left(\frac{2}{3}t\right) = g(t) \qquad (2)$$

trong đó
$$g(t) = f(t) - f\left(\frac{3}{2}t\right).$$

Từ (2), theo quy nạp dễ suy ra

$$g(t) = g\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n t\right), \ \forall t \in \mathbf{R}\, \forall n \in \mathbf{N}^*. \qquad (3)$$

Do f(x) liên tục suy ra g(x) liên tục, cho $n \to \infty$ ta được

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} g\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n t\right) = g(0) = f(0) - f(0) = 0.$$

Từ đó $\quad f(t) = f\left(\frac{3}{2}t\right), \forall\, t$ hay $f\left(\frac{2}{3}x\right) = f(x), \ \forall\, x.$

Tương tự, dễ thấy $f(x) = f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n x\right) \to f(0)\ (n \to \infty)$.

Vậy f(x) = C, với C- hằng số. Thử lại thấy đúng.

Bài 2.11.17. Cho $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq \pm 1$. Tìm tất cả các hàm số f(x) xác định và liên tục trên $\mathbf{R}_+$ thoả mãn điều kiện

$$f\left(x^\alpha\right) = f(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}_+.$$

Giải.

+ Nếu $|\alpha| < 1$ ta có

$$f(x) = f\left(x^\alpha\right) = f\left(x^{\alpha^2}\right) = \ldots = f\left(x^{\alpha^n}\right), \forall x \in \mathbf{R}_+, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Vậy $\quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(x^{\alpha^n}\right) = f(1), \forall x \in \mathbf{R}_+.$

+ Nếu $|\alpha| > 1$ đặt $\beta = 1/\alpha$ thì $|\beta| < 1$. Từ giả thiết ta có

$f(x) = f\left(x^{1/\alpha}\right) = f\left(x^{\beta}\right), \forall x \in \mathbf{R}$.

Quay trở về trường hợp vừa chứng minh, ta được $f(x) = f(1), \forall x > 0$.

Tóm lại $f(x) = C \ , \forall x \in \mathbf{R}_+$.

Bài 2.11.18. Tìm các hàm f(x) xác định và liên tục trên $\mathbf{R}$ sao cho $f\left(x^2\right)f(x) = 1 \ , \forall x \in \mathbf{R}$.

Giải. Dễ suy ra $f(x) \neq 0 \ , \forall x \in \mathbf{R}; f(0) = \pm 1; f(1) = \pm 1$.

Thay x bởi - x ta được

$$f\left(x^2\right)f(x) = 1 = f\left(x^2\right)f(-x), \forall x \in \mathbf{R}.$$

Vậy $f(-x) = f(x)$ hay f(x) là hàm chẵn.

+ Với $0 \le x < 1$, ta được

$$f(x) = \frac{1}{f\left(x^2\right)} = f\left(x^4\right) = f\left(x^{4.4}\right) = \ldots$$

Cho qua giới hạn dẫn tới $f(x) = f(0) = \pm 1$, v ới $0 \le x < 1$.

+ Với $x \ge 1$, ta có

$$f(x) = \frac{1}{f\left(x^{1/2}\right)} = f\left(x^{1/4}\right) = f\left(x^{\frac{1}{4}.\frac{1}{4}}\right) = \ldots$$

Cho qua giới hạn ta được $f(x) \equiv f(1) = \pm 1, \ \forall x \ge 1$.

Từ giả thiết liên tục và tính chẵn của f(x) ta được f(x) = 1 hoặc $f(x) = -1$. Thử lại thấy đúng.

Đáp số: $f(x) = 1, \forall x \in \mathbf{R}$ hoặc $f(x) = -1, \forall x \in \mathbf{R}$.

Bài 2.11.19. Tìm hàm xác định và liên tục trên $[-1\,;1]$ và thoả mãn

$$f\left(2x^2 - 1\right) = 2x\,f(x), \ \forall x \in [-1;1].$$

Giải. Đặt x = cost ta được f(cos 2t) = 2cost. f(cost).

Vậy $\dfrac{f(\cos 2t)}{\sin 2t} = \dfrac{f(\cos t)}{\sin t}, \quad t \,\bar{\in}\, \pi\mathbf{Z} = \{n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$.

Xét hàm $F(t) = \dfrac{f(\cos t)}{\sin t}$. Như vậy F(t) xác định và liên tục với $t \,\bar{\in}\, \pi\mathbf{Z}$. Rõ ràng F(t) = F(2t), từ đó $F(t) = F\left(2^m t\right), \forall m \in \mathbf{Z}$ (1)

Mặt khác, $F(t) = F(t + 2\pi) \Rightarrow F(t) = F(t + 2n\pi), \ \forall n \in \mathbf{Z}$ (2)

Từ (1) và (2), $F(1)=F\left(2^{m+1}\right)=F\left(2^{m+1}+2n\pi\right)=F\left(1+\frac{n\pi}{2^m}\right)$.

Tập các điểm $\left\{1+\frac{n\pi}{2^m}\ ;\ n\,,m\in\mathbf{Z}\right\}$ là trù mật trong $\mathbf{R}$, vậy F(x) là hằng số trên mỗi khoảng $(n\pi;(n+1)\pi)$.

Dễ thấy $f(-x)=-f(x)\ \ \forall x\in[-1;1]$,

vậy $F(t+\pi)=f(-\cos t)/(-\sin t)=F(t)$. Từ đó các hằng số trên mỗi khoảng mở là như nhau.

Lại có $F(-t)=-F(t)\Rightarrow F(t)=0$ có thể trừ ra những điểm của $\pi\mathbf{Z}\Rightarrow f(x)=0\,,\ \forall x\in(-1;1)$. $f(x)$ liên tục, vậy $f(x)=0,\ \forall x\in[-1;1]$.

Bài 2.11.20. Tìm các hàm f(x) liên tục trên $\mathbf{R}$ thoả mãn điều kiện

$$f(x)=f(\sin x)\ ,\ \forall x\,.$$

Giải. Lấy $x\in\mathbf{R}$ tùy ý. Xét dãy $\{x_n\}$ với $x_1=\sin x,\ x_{n+1}=\sin x_n$.

Từ giả thiết bài toán, $f(x)=f(x_1)=f(x_2)=...$

Nếu $0\le x_1\le 1$ thì $x_1\ge\sin x_1=x_2\ge\sin x_2=x_3\ge...\ge 0$.

Vậy tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0\ge 0$, hơn nữa vì $\sin x$ là hàm liên tục, $\sin x_0=x_0\in[0;1]$, vậy x_0 = 0. Do f(x) liên tục ta có $f(0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$.

Tương tự, nếu $0>x_1\ge -1$, ta có $\{x_n\}$ là dãy tăng, bị chặn trên nên có giới hạn. Từ đó $f(0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$.

Suy ra f(x) = f(0) = C- hằng số. Thử lại thấy thoả mãn.

Bài.2.11.21. Tìm tất cả các hàm $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ và thoả mãn

a) $f(x\,f(y))=y\,f(x)\qquad \forall x>0\,,\forall y>0$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Giải. Trước hết, ta có

$$a>0;f(a)=1\Rightarrow a=1\qquad (1)$$

Điều này suy ra từ chỗ $f(x)=f(x\ f(a))=a\,f(x)$.

Chọn $y=1/f(x)$ ta được $f\left(x\,f\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right)=\frac{1}{f(x)}f(x)=1$. Vậy

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{x}\,;\; f(1) = 1. \qquad (2)$$

Từ đó $f(f(x)) = f(1f(x)) = xf(1) = x$. Vậy

$$f(xy) = f(xf(f(y))) = f(x)f(y). \qquad (3)$$

Bây giờ lưu ý rằng $f(xf(x)) = xf(x)\ \forall x > 0$. Đặt $a = xf(x)$ thì f(a) = a. Ta sẽ chứng minh $a = 1 \forall x > 0$.

Quả vậy theo (3), $f(a^2) = f(a)f(a) = a^2$.

Dễ chứng minh theo quy nạp rằng $f(a^n) = a^n$.

Từ đó, nếu a > 1 thì $\lim\limits_{n\to\infty} f(a^n) = \infty$, mâu thuẫn với (b). Tương tự, không thể xảy ra $a < 1$. Vậy a = 1 và ta nhận được $f(x) = 1/x$, $x > 0$.

Chương III

ĐẠO HÀM

§3.0. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

* *Định nghĩa.* Cho hàm số f(x) xác định trên khoảng (a;b). Ta nói f(x) có đạo hàm tại $c\in(a;b)$ nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm f(x) tại x = c, và được kí hiệu là $f'(c)$ hay $\frac{df}{dx}(c)$.

Nhận xét. Nếu ta đặt $x=c+\Delta x$ hay $\Delta x=x-c\,;\Delta f=f(c+\Delta x)-f(c)$ thì $x\to c\Leftrightarrow \Delta x\to 0$ và định nghĩa được viết lại dưới dạng

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

* $f'(c)$ bằng hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số f(x) tại $M(c;f(c))$.

* $f(x)$ có đạo hàm tại $x=c\in(a;b)$ thì $f(x)$ liên tục tại c.

* $f(x)$ có đạo hàm tại $x=c$ khi và chỉ khi khả vi tại đó, tức là, tồn tại hằng số A để số gia hàm số Δf được viết dưới dạng

$$\Delta f=f(c+\Delta x)-f(c)=A.\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0).$$

Hơn nữa khi đó $A=f'(c)$.

$df=f'(c)\Delta x=f'(c)dx$ được gọi là vi phân của hàm số f(x) tại điểm x = c ứng với số gia Δx của đối số x.

* Các tính chất thông thường của hàm khả vi tại một điểm.

Cho hai hàm số f(x) và g(x) xác định trên (a;b), khả vi tại $x_0\in(a;b)$ còn λ là một số thực. Khi đó:

\+ $f(x)\pm g(x)$ khả vi tại x_0 và $(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$;

\+ $\lambda f(x)$ khả vi tại x_0 và $(\lambda f)'(x_0)=\lambda f'(x_0)$;

\+ $(fg)(x)=f(x)g(x)$ khả vi tại x_0 và

$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0);$$

+ Hơn nữa, nếu $g(x_0) \neq 0$ thì $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ khả vi tại x_0 và

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

* *Mở rộng.* Nếu mỗi hàm số $f_1(x),...,f_n(x)$ khả vi tại $x_0 \in (a;b)$ thì hàm tích $(f_1...f_n)(x) = f_1(x)...\ f_n(x)$ cũng khả vi tại $x_0 \in (a;b)$ và

$$(f_1...f_n)'(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f_1(x_0)...\ f_{k-1}(x_0)\, f_k'(x_0)\, f_{k+1}(x_0)...\ f_n(x_0).$$

* *Đạo hàm của hàm hợp.* Giả sử $g: (a;b) \to (A;B)$ khả vi tại $x_0 \in (a;b)$.

Hơn nữa, giả sử $(A;B) \subset (c;d)$ và $f: (c;d) \to \mathbf{R}$ khả vi tại $g(x_0)$. Khi đó $f_0 g: (a;b) \to \mathbf{R}$ khả vi tại x_0 và

$$(f_0 g)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0).$$

* *Đạo hàm hàm ngược.* Cho $x_0 \in (a;b) = I$; $f: (a;b) \to \mathbf{R}$ là hàm đơn điệu thực sự, liên tục trên $(a;b)$, khả vi tại $x_0, f'(x_0) \neq 0$. Khi đó hàm ngược

$f^{-1}: f(I) \to (a;b)$ khả vi tại $f(x_0)$ và

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

* *Đạo hàm từng phía.* Giả sử hàm số f(x) xác định trên $[a;b)$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn.

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

thì hàm f(x) được gọi là khả vi (phía) phải tại a, giới hạn trên được gọi là đạo hàm (phía) phải tại a của hàm f(x), kí hiệu $f_+'(a)$. Tương tự, chúng ta hãy tự hiểu ý nghĩa của kí hiệu $f_-'(a)$.

Ứng với các đạo hàm phải (trái) ta có các tiếp tuyến phải (trái) (tự hiểu !).

* f(x) khả vi tại $x_0 \in (a;b) \Leftrightarrow \exists f_-'(x_0), \exists f_+'(x_0);\ f_-'(x_0) = f_+'(x_0)$.

Khi đó, $f_-'(x_0) = f_+'(x_0) = f'(x_0)$.

* f(x) được gọi là khả vi trên khoảng (a;b) nếu nó khả vi tại mọi điểm của khoảng đó, f(x) gọi là khả vi trên đoạn [a;b] nếu nó khả vi trên (a;b), khả vi phải tại a và khả vi trái tại b.

* *Đạo hàm vô cùng.* Nếu $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \infty,$ ta nói f(x) có đạo hàm vô cùng tại c, ta viết $f'(c) = \infty$. Khi đó tiếp tuyến với đồ thị tại x = c song song với trục Oy. Lưu ý rằng khi ấy hàm f(x) không khả vi tại x = c.

* Nếu f(x) khả vi trên (a;b) thì $f'(x)$ không có điểm gián đoạn loại I.

Hệ quả. Nếu f(x) có điểm gián đoạn loại I trên (a;b) thì không có nguyên hàm trên đó.

* Giả sử f(x) khả vi tại mọi điểm $x \in (a;b)$. Khi đó $f'(x)$ là một hàm nào đó xác định trên (a;b). Nếu $f'(x)$ khả vi tại $c \in (a;b)$ thì ta nói f(x) khả vi hai lần tại c và đạo hàm của hàm $f'(x)$ tại c được gọi là đạo hàm cấp hai của f(x) tại c, kí hiệu $f''(c)$.

$$f''(c) = \left(f'(x)\right)'\Big|_{x=c} \ldots$$

Quy ước $f^{(0)}(x) = f(x)$.

* Quy tắc Leibnitz tính đạo hàm cấp cao của một tích. Nếu f(x) và g(x) là hai hàm số khả vi tới cấp n thì tích f(x) g(x) cũng khả vi tới cấp n và

$$(fg)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

* Vi phân cấp một bất biến dạng với phép đổi biến số.

* Giả sử f(x) khả vi tại mọi điểm $x \in (a;b)$. Khi đó $df(x) = f'(x)dx, \forall x \in (a;b)$.

Khi dx không đổi, df(x) là một hàm của x, lại có thể nói đến vi phân của nó. Vi phân của vi phân cấp một (của f(x)), nếu tồn tại được gọi là vi phân cấp hai (của f(x)), kí hiệu là $d^2f(x)$, hoặc đơn giản, d^2f.

$$d^2f = d(df) = f''(x)dx^2 \ldots$$

$$d^nf = d\left(d^{n-1}f\right) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

* Điều kiện cần để hàm số có cực trị (Định lý Ferma). Cho f(x) xác định trên khoảng (a;b). Nếu f(x) đạt cực trị tại $c \in (a;b)$ và khả vi tại c thì $f'(c) = 0$.

* *Định lý Rolle.* Giả sử f(x) xác định, liên tục trên [a;b] hữu hạn, khả vi trên (a;b) và f(a) = f(b). Khi đó, tồn tại điểm $c \in (a;b)$ để $f'(c) = 0$.

* *Định lý Lagrange.* Cho f(x) xác định và liên tục trên [a;b], khả vi trên (a;b). Khi đó, tồn tại điểm $c \in (a;b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

hay $\qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad$ (công thức số gia giới nội).

Ta cũng có thể viết công thức số gia giới nội dưới dạng

$$f(x + h) = f(x) + f'(x + \theta h)h \text{ với } 0 < \theta < 1.$$

Lưu ý. Trong hai định lý trên, có thể có nhiều điểm trung gian c như đòi hỏi.

* *Hệ quả.* $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a;b) \Rightarrow f(x)$ tăng trên (a;b);

$f'(x) \geq 0, \forall x \in (a;b)$; xảy ra dấu "=" chỉ tại hữu hạn điểm

$\Rightarrow f(x)$ tăng thực sự trên (a;b);

$f'(x) = 0, \forall x \in (a;b) \Rightarrow f(x)$ là hằng số trên (a;b);

$f'(x)$ đổi dấu khi x qua $x_0 \in (a;b) \Rightarrow x = x_0$ là một điểm cực trị của f(x).

* *Định lý Cauchy.* Cho f(x), g(x) liên tục trên [a;b], khả vi trên khoảng (a;b), ngoài ra $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a;b)$. Khi đó có điểm $c \in (a;b)$ sao cho:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

* Quy tắc L'Hôpital khử dạng bất định $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}$. Giả sử f(x), g(x) khả vi trong một lân cận phải (a;b) nào đó của điểm a, trong đó $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ và $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a;b)$. Hơn nữa giả sử

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0 \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x \to a^+} g(x) = +\infty \text{ hoặc } -\infty.$$

Khi đó, nếu $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$ (hữu hạn hoặc vô hạn) thì $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$.

Lưu ý.

\+ Quy tắc đúng cho cả trường hợp khi $x \to b^-$.

\+ Với $x_0 \in (a;b)$, ta có thể thay $x \to a^+$ bởi $x \to x_0$, với một chút thay đổi: Giả sử f(x), g(x) khả vi trong một lân cận của điểm x_0 có thể trừ ra x_0, giả sử $g'(x) \neq 0$ với mọi x thuộc một lân cận của x_0 có thể trừ ra x_0...

* Hàm số f(x) được gọi là lồi (xuống dưới) trên khoảng mở rộng I nếu $\forall c, d \in I, \forall t \in [0;1]$ luôn có

$$tf(c)+(1-t)f(d) \geq f(tc+(1-t)d).$$

Hàm f(x) được gọi là lõm trên I nếu hàm -f(x) là lồi trên I.

* *Bất đẳng thức Jensen.* Cho f(x) lồi trên I. Khi đó với n nguyên dương tùy ý, $\forall x_1,...,x_n \in I$, $\forall \lambda_1,...,\lambda_n > 0$, $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$ ta có

$$\lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_n f(x_n) \geq f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n).$$

Đặc biệt, $\forall c, d \in I$ thì

$$\frac{f(c)+f(d)}{2} \geq f\left(\frac{c+d}{2}\right). \qquad (*)$$

Nếu hàm f(x) liên tục trên I thì (*) cũng là điều kiện đủ để f(x) lồi.

* Nếu hàm f(x) lồi trên (a;b) thì liên tục trên đó.

* Nếu hàm f(x) lồi trên (a;b) thì f(x) khả vi trái và khả vi phải tại mọi điểm thuộc (a;b). Hơn nữa, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in (a;b): \alpha < \beta < \gamma$ ta có

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \leq f'_-(\beta) \leq f'_+(\beta) \leq \frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}.$$

* Cho hàm f(x) khả vi trên (a;b), khi đó f(x) lồi $\Leftrightarrow f'(x)$ tăng.

Hệ quả. Cho hàm f(x) khả vi 2 lần trên (a;b), khi đó f(x) lồi $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$.

* Công thức (khai triển) Taylor.

Cho hàm số f(x) xác định trên [a;b]. Khi đó $\forall x_0 \in (a;b)$ ta có:

+ Nếu f(x) khả vi liên tục tới cấp n - 1 trên [a;b], khả vi cấp n tại x_0 thì

$$f(x) = f(x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n$$

(Công thức Taylor với phần dư Peano);

+ Nếu f(x) khả vi liên tục tới cấp n trên [a;b], khả vi cấp (n+1) trên (a;b) thì

$$f(x) = f(x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

với c giữa x và x_0,

$$= f(x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \text{ với } 0 < \theta < 1$$

(Công thức Taylor với phần dư Largrange);

+ Nếu f(x) khả vi liên tục đến cấp n + 1 trên [a; b] thì

$$f(x)=f(x_0)+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$

(Công thức Taylor với phần dư tích phân).

Để tiện ứng dụng, chúng ta sẽ gọi n là cấp khai triển, x_0 là điểm khai triển, x là điểm áp dụng.

Nhận xét. Để có thể khai triển đến cấp n, công thức với phần dư Peano cần điều kiện nhẹ nhất, tiếp đến với phần dư Lagrange, sau hết với phần dư tích phân. (Tuy nhiên, lượng thông tin chứa đựng có thể theo chiều ngược lại !).

Hệ quả. Nếu hàm f(x) khả vi đến cấp n + 1 trên [a;b] thì

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^k\right|\le\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{x\in[a;b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

Hệ quả. Với $x_0 = 0$, n = 1, 2,... ta được

$$f(x)=f(0)+x\int_0^1 f'(xt)dt$$

$$=f(0)+f'(0)x+x^2\int_0^1(1-t)f''(xt)dt$$

$$=f(0)+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-t)^n f^{(n+1)}(xt)dt.$$

* Trong trường hợp $x_0 = 0$, công thức có tên là công thức (khai triển) Maclaurin.

* Nếu f(x) khả vi đến cấp cần thiết tại lân cận $x = x_0$ và có khai triển Taylor

$$f(x)= a_0+a_1(x-x_0)+...+a_n(x-x_0)^n+o\,(x-x_0)^n$$

thì $f^{(k)}(x_0)=k!\,a_k$, $k=0,1,2,...,n$.

* Giả sử $f'(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$; $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Khi đó

+ Nếu n lẻ thì x_0 không là điểm cực trị;

+ Nếu n chẵn thì x_0 là cực trị ; $\begin{cases} f^{(n)}(x_0)>0: \ x_0 \text{ là điểm cực tiểu;} \\ f^{(n)}(x_0)<0: \ x_0 \text{ là điểm cực đại.} \end{cases}$

§3.1.TÍNH ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ - ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM

Bài 3.1.1. Tính đạo hàm của hàm ẩn y = y(x) xác định từ phương trình

$$x^y = y^x.$$

Giải. Điều kiện x > 0, y > 0. Phương trình đã cho tương đương với $y\ln x = x\ln y$. Đạo hàm hai vế theo x ta được

$$y'\ln x + \frac{y}{x} = \ln y + x\frac{y'}{y},$$

hay $y'\left[\ln x - \frac{x}{y}\right] = \ln y - \frac{y}{x}$. Vậy $y' = \dfrac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}}$.

Bài 3.1.2. Giả sử f(x) xác định trên $(a;b)$ còn $c \in (a;b)$ sao cho tồn tại $f'(c)$. Hai dãy $\{x_n\},\{y_n\}$ thoả mãn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$;

$a < x_n < c < y_n < b$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = f'(c).$$

Giải. Ta có $$0 \le \left|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} - f'(c)\right|$$

$$\le \left|\frac{f(y_n)-f(c)-f'(c)(y_n-c)}{y_n-x_n}\right| + \left|\frac{f(x_n)-f(c)-f'(c)(x_n-c)}{y_n-x_n}\right|$$

$$\le \left|\frac{f(y_n)-f(c)-f'(c)(y_n-c)}{|y_n-c|}\right| + \left|\frac{f(x_n)-f(c)-f'(c)(x_n-c)}{x_n-c}\right|$$

$$= \left|\frac{f(y_n)-f(c)}{y_n-c} - f'(c)\right| + \left|\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c} - f'(c)\right| \to 0\ (n\to\infty)\ \text{(đpcm)}.$$

Lưu ý. Nếu ta bỏ giả thiết x_n, y_n ở về hai phía của c thì ta phải thêm giả thiết $f'(x)$ liên tục tại c. Quả vậy, khi đó tồn tại một lân cận $(c-\delta; c+\delta)$ của c, trên đó tồn tại $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục tại c. Với n đủ lớn, $c-\delta < x_n < y_n < c+\delta$. Theo định lý Lagrange

$$\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = f'(d_n) \text{ với } d_n \in (x_n; y_n).$$

Khi $n\to\infty$, $d_n \to c$, do tính liên tục của $f'(x)$ suy ra

$$\lim_{n\to\infty} f'(d_n) = f'(c).$$

Bài 3.1.3. Cho f(x) khả vi trên $[a;b]$ và thoả mãn điều kiện

$$(f(x))^2 + (f'(x))^2 > 0, \ \forall x \in [a;b].$$

Chứng minh rằng số các nghiệm của phương trình f(x) = 0 trên $[a;b]$ là hữu hạn.

Giải. Giả sử ngược lại, phương trình f(x) = 0 có vô số nghiệm $x_n \in [a;b], n=1,2,...$ Do dãy $\{x_n\}$ bị chặn, tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ: $x_{n_k} \to \alpha \in [a;b]$, $(k \to \infty)$. Do f(x) liên tục nên $f(\alpha) = 0$. Từ giả thiết suy ra $f'(\alpha) \neq 0$ hay

$$f'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{x - \alpha} \neq 0.$$

Từ đó $f(x) \neq 0$ trong một lân cận nào đó của α không kể đến α, mâu thuẫn với α là giới hạn của dãy nghiệm $\{x_{n_k}\}$.

Bài 3.1.4. Tính đạo hàm hàm số $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n)$, trong đó $a_1, a_2, ..., a_n$ là những số thực khác nhau.

Giải. Với $n=1, y = x - a_1$ nên $y' = 1$.

Với $n=2$, $y = (x - a_1)(x - a_2)$ nên $y' = (x - a_1) + (x - a_2)$.

Ta dễ dàng chứng minh theo quy nạp rằng

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (x - x_j).$$

Chính là $f'(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$,

trong đó

$$f_i(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x - x_i} & \text{khi } x \neq x_i; \\ (x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n) & \text{khi } x = x_i. \end{cases}$$

Khi không sợ hiểu lầm, ta có thể viết

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x)}{x - x_i}$$

với quy ước rằng $\left.\dfrac{f(x)}{x - x_i}\right|_{x = x_i} = \lim\limits_{x \to x_i} \dfrac{f(x)}{x - x_i}$.

Bài 3.1.5. P(x) là đa thức bậc $n \geq 2$, hệ số thực và thoả mãn hai điều kiện:

a) Có n nghiệm thực phân biệt;

b) Đối với mỗi cặp nghiệm phân biệt a, b, $P'(x)$ triệt tiêu tại trung bình cộng (a+b)/2.

Tìm tất cả những đa thức như vậy.

Giải. Ta sẽ chứng minh P(x) là tam thức bậc 2 có 2 nghiệm phân biệt $P(x) = A(x - x_1)(x - x_2)$. Rõ ràng khi ấy, P(x) thoả mãn (a), (b).

Giả sử ngược lại, P(x) có bậc n > 2:

$$P(x) = A(x - x_1)\ldots(x - x_n) \text{ với } x_1 < x_2 < \ldots < x_n.$$

$$\begin{aligned} P'(x) &= A(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n) \\ &+ A(x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n) \\ &+ \ldots + A(x - x_1)\ldots(x - x_{n-2})(x - x_n) \\ &+ A(x - x_1)\ldots(x - x_{n-2})(x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Với $x = (x_{n-1} + x_n)/2$, hai số hạng cuối cùng bằng nhau về giá trị tuyệt đối nhưng trái dấu, vậy tổng của chúng bằng 0. Các số hạng còn lại bằng $-A\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2}\right)^2$ lần tích của (n-3) thừa số dương. Như vậy, tổng là một số khác không (và trái dấu với A), $P'(x) \neq 0$, mâu thuẫn.

Bài 3.1.6. Tính đạo hàm hoặc đạo hàm trái, phải của hàm số

$$f(x) = [x]\sin \pi x.$$

Giải. Với $k \in \mathbb{Z}$ ta có

+ $k < x < k + 1$ thì $f(x) = k\sin \pi x \Rightarrow f'(x) = k\pi\cos \pi x$;

$$+ \quad f'_+(k) = \lim_{x \to k^+} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} = \lim_{x \to k^+} \frac{k\sin \pi x}{x - k}$$

$$= \lim_{x \to k^+} k\frac{\sin(\pi(x - k) + k\pi)}{x - k} = \lim_{x \to k^+} k\pi(-1)^k \frac{\sin(\pi(x - k))}{\pi(x - k)} = k\pi(-1)^k;$$

$$+ \quad f'_-(k) = \lim_{x \to k^-} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} = \lim_{x \to k^-} \frac{(k - 1)\sin \pi x}{x - k}$$

$$= \lim_{x \to k^-} (k - 1)\pi(-1)^k \frac{\sin \pi(x - k)}{\pi(x - k)} = (k - 1)\pi(-1)^k.$$

§3.2. SỰ KHẢ VI

Bài 3.2.1. Cho f(x) và g(x) là hai hàm khả vi liên tục hai lần trên $\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định bởi

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{khi } g(x)\ge 0\,; \\ f(x)+\left(g(x)\right)^3 & \text{khi } g(x)<0. \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng h(x) cũng là hàm khả vi liên tục hai lần trên $\mathbb{R}$.

Giải. Xét hàm $k(x)=\begin{cases} 0 & \text{khi } x\ge 0\,; \\ x^3 & \text{khi } x<0. \end{cases}$

Dễ thấy k(x) khả vi liên tục hai lần trên $\mathbb{R}$. Từ đó $h(x)=f(x)+k\left(g(x)\right)$ cũng khả vi liên tục hai lần trên $\mathbb{R}$.

Bài 3.2.2. Cho $\varphi(x)$ là hàm khả vi trên $\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

$$\varphi'(x)=F\left(\varphi(x)\right)$$

trong đó F(x) xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm mọi cấp. Chứng minh rằng $\varphi(x)$ cũng có đạo hàm mọi cấp.

Giải. Vì $\varphi(x)$ khả vi nên $F\left(\varphi(x)\right)$ khả vi. Theo định nghĩa đạo hàm cấp hai và quy tắc đạo hàm của hàm hợp, $\varphi(x)$ khả vi hai lần và

$$\varphi''(x)=\frac{d}{dx}\left[F\left(\varphi(x)\right)\right]=F'\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x).$$

Ta sẽ chứng minh theo quy nạp rằng $\varphi(x)$ khả vi cấp n và đạo hàm cấp n của nó viết được dưới dạng

$$\varphi^{(n)}(x)=P\left\{F\left(\varphi(x)\right);\, F'\left(\varphi(x)\right);\ldots;F^{(n-1)}\left(\varphi(x)\right);\varphi'(x);\ldots;\varphi^{(n-1)}(x)\right\}\ (*)$$

trong đó P là đa thức (nhiều ẩn) nào đó.

Quả vậy, (*)đúng với n = 1,2. Giả sử (*)đúng với n = k. Do F(x) và đa thức P(x) khả vi vô hạn lần, còn $\varphi(x)$ khả vi cấp k (theo quy nạp) nên có thể đạo hàm hai vế (*) theo x, vậy $\varphi(x)$ khả vi k + 1 lần. Khi đạo hàm vế phải, ta được một đa thức mới của các ẩn

$F\left(\varphi(x)\right);\, F'\left(\varphi(x)\right);\ldots;F^{(k)}\left(\varphi(x)\right);\varphi'(x);\ldots;\varphi^{(k)}(x)$. Vậy biểu thức của nó vẫn là

$\varphi^{(k+1)}(x)=Q\left\{F\left(\varphi(x)\right);\, F'\left(\varphi(x)\right);\ldots;F^{(k)}\left(\varphi(x)\right);\varphi'(x);\ldots;\varphi^{(k)}(x)\right\}$. Như vậy khẳng định (*)đúng với mọi n.

Bài 3.2.3. Khảo sát tính khả vi của hàm số

$$f(x)=|x-1||x-2|...|x-10|.$$

Giải. Đặt $L=\mathbb{R}\setminus\{1;2;...;10\}$.

Tại $x_0\in L, \exists\delta>0$ đủ nhỏ để f(x) là một đa thức trên $(x_0-\delta;x_0+\delta)$(có thể chọn $\delta=\frac{1}{2}\underset{i\in\{1;2;...;10\}}{\text{Min}}|x_0-i|$).

Vậy f(x) khả vi tại x_0, $\forall x_0\in L$.

* Tại $x_0=k\in\{1;2;...;10\}$, $f(x)=|x-k|Q(x)$ trong đó $Q(x)$ là tích mười thừa số $|x-1|, |x-2|,...,|x-10|$ bỏ bớt đi thừa số $|x-k|$.

Trên khoảng $\left(k-\frac{1}{2};k+\frac{1}{2}\right)$ $Q(x)$ là đa thức và không có nghiệm trên khoảng này. Từ đó ta có

$$f'_-(k)=\lim_{x\to k^-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=-Q(k);$$

$$f'_+(k)=\lim_{x\to k^+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=Q(k).$$

Do $Q(k)\neq 0$ nên f(x) không khả vi tại $k\in\{1;2;...;10\}$.

Bài 3.2.4. Chứng minh rằng hàm

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{khi } x=0;\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1}\le x<\frac{1}{n};\\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n}\le x<-\frac{1}{n+1}\end{cases}\quad (n=1,2,...).$$

khả vi tại x = 0.

Giải. Ta sẽ chứng minh $f'(0)=1$.Quả vậy, với $\varepsilon>0$ tồn tại n_0 nguyên dương sao cho $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$.

Xét $\delta=\frac{1}{n_0}$ và $x\in(0;\delta)$. Khi đó có $n>n_0$ để

$$\frac{1}{n+1}\le x<\frac{1}{n}\Leftrightarrow\frac{n+1}{n}\ge\frac{1}{nx}>1.$$ Vậy

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}-1\right|=\left|\frac{1}{nx}-1\right|\le\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

Tương tự, với $-\delta<x<0$, có n > n_0 để

$$-\frac{1}{n}\le x< -\frac{1}{n+1}\Leftrightarrow 1\le-\frac{1}{nx}<\frac{n+1}{n}.$$ Vậy

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}-1\right|=\left|-\frac{1}{nx}-1\right|\le\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

Từ đó, hàm số khả vi tại x = 0 và $f'(0)=1$.

§3.3. TÍNH ĐẠO HÀM CẤP CAO

Tính đạo hàm cấp cao tại một điểm $y^{(n)}(x_0)$.

- *Cách 1:* Tìm (hàm) đạo hàm $y^{(n)}(x)$, rồi thay x = x_0.

- *Cách 2:* Khi biết khai triển Taylor $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$.

Theo công thức Taylor

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\ \Rightarrow f^{(k)}(x_0)=a_k k!.$$

- *Cách 3:* Tính theo công thức truy hồi.

Bài 3.3.1. Tính đạo hàm cấp n của hàm số y = arctgx tại x = 0.

Giải. $$f'=\frac{1}{1+x^2};\ f''=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Nếu đạo hàm tiếp sẽ gặp khó khăn. Ta biến đổi như sau

$$f''=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}=-\frac{2x}{1+x^2}.f'$$ hay

$$(1+x^2)f''+2xf'=0 \tag{1}$$

Lấy đạo hàm cấp n - 2 hai vế, dùng công thức Leibnitz ta được

$$(1+x^2)f^{(n)}+(n-2)(2x)f^{(n-1)}+\frac{(n-2)(n-3)}{2!}2.f^{(n-2)}$$
$$+2xf^{(n-1)}+(n-2)2f^{(n-2)}=0.$$

Cho x = 0 suy ra

$$f^{(n)}(0)+(n-2)(n-3)f^{(n-2)}(0)+2(n-2)f^{(n-2)}(0)=0$$

hay $$f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0). \qquad (2)$$

Rõ ràng $f'(0)=1, f''(0)=0$. Từ đó dễ dàng giải dãy truy hồi (2) theo quy nạp:

$$f^{(2n)}(0)=0 \text{ và}$$

$$f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n(2n)!, \ \forall n\in\mathbf{N}. \qquad (3)$$

Cách 2. Ta chưa biết khai triển Maclaurin của f(x), tuy nhiên $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ lại có khai triển quen biết:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(f')^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Vậy

$$\begin{cases}\dfrac{(f')^{(2n)}(0)}{(2n)!}=(-1)^n;\\ \dfrac{(f')^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}=0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n(2n)!;\\ f^{(2n+2)}(0)=0.\end{cases} \quad (n\in\mathbf{N}).$$

Rõ ràng $y^{(0)}(0)=\operatorname{arctg}(0)=0$, vậy suy ra (3).

Nhận xét. Suy ra khai triển Maclaurin của arctgx.

Bài 3.3.2. Cho $f(x)=\sqrt{x^2-1}$, $x>1$. Chứng minh rằng

$$f^{(2n)}(x)<0;\ f^{(2n-1)}(x)>0 \text{ với } n\in\mathbf{N}^*. \qquad (1)$$

Giải. $y=\sqrt{x^2-1}>0 \Rightarrow 1=x^2-y^2$. Do x > 0, y > 0 nên đây là phương trình phần Hypecbol $x^2-y^2=1$ ở góc phần tư thứ nhất. Đạo hàm liên tiếp ta được

$$f'=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}>0;$$

$$f''=\frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}<0, \ \forall x>1.$$

Ta chứng minh (1) theo quy nạp. Như đã thấy, (1) đúng với n = 1. Giả sử (1) đúng $\forall n\le k-1$, ta có $f^2(x)=x^2-1$.

Đạo hàm hai vế k lần, theo công thức Leibnitz ta có

$$f^{(k)}f + C_k^1 f^{(k-1)} f^{(1)} + \ldots + C_k^{k-1} f^{(1)} f^{(k-1)} + C_k^k f f^{(k)} = 0$$

$$\Rightarrow 2f f^{(k)} = -\left[C_k^1 f^{(k-1)} f^{(1)} + \ldots + C_k^{k-1} f^{(1)} f^{(k-1)}\right]. \qquad (2)$$

Do giả thiết quy nạp, $f^{(1)}f^{(k-1)}$; $f^{(2)}f^{(k-2)}$;...; $f^{(k-1)}f^{(1)}$ cùng dấu và cùng dấu với $f^{(1)}f^{(k-1)}$.

Hơn nữa $f^{(1)} > 0$, vậy các tích này cùng dấu với $f^{(k-1)}$. Nhận thấy rằng $f(x) > 0$. Vậy $f^{(k)}$ cùng dấu với $-f^{(k-1)}$, nói cách khác $f^{(k)}$ trái dấu với $f^{(k-1)}$.

Bài 3.3.3. Cho k, n là hai số nguyên dương. Đặt

$$f(x) = \frac{1}{x^k - 1}; \qquad P(x) = \left(x^k - 1\right)^{n+1} f^{(n)}(x).$$

Tìm $P(1) = \lim\limits_{x \to 1} P(x)$.

Giải. Đặt $P_n(x) = \left(x^k - 1\right)^{n+1} f^{(n)}(x), n = 1, 2, \ldots$ Đạo hàm 2 vế, ta được $P_n'(x) = (n+1)\left(x^k - 1\right)^n kx^{k-1} f^{(n)}(x) + \left(x^k - 1\right)^{n+1} f^{(n+1)}(x)$.

Nhân hai vế với $\left(x^k - 1\right)$ rồi chuyển vế ta được

$$P_{n+1}(x) = \left(x^k - 1\right)P_n'(x) - (n+1)P_n(x)kx^{k-1}.$$

Như vậy theo quy nạp, $P_n(x)$ là đa thức. Lại có

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{\left(x^k - 1\right)^{n+1}}.$$

Đạo hàm hai vế ta được

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(x)\left(x^k - 1\right) - (n+1)\, kx^{k-1} P_n(x)}{\left(x^k - 1\right)^{n+2}}.$$

Từ đó

$$P_{n+1}(x) = \left(x^k - 1\right)^{n+2} f^{(n+1)}(x) = P_n'(x)\left(x^k - 1\right) - (n+1)kx^{k-1}P_n(x).$$

Vậy $P_{n+1}(1) = -(n+1)k\, P_n(1)$.

Từ chỗ $P_1(1) = -k$, theo quy nạp suy ra $P_n(1) = (-1)^n\, n!\, k^n$.

Bài 3.3.4. Cho P(x) là đa thức bậc < 1995 sao cho cả ba giá trị P(0), P(1), P(-1) đều khác không. Viết đạo hàm cấp 1992 của $\frac{P(x)}{x^3-x}$ dưới dạng $\frac{f(x)}{g(x)}$ trong đó f(x) và g(x) là hai đa thức. Hãy tìm bậc nhỏ nhất có thể của f(x).

Giải. Bằng phép chia đa thức và phương pháp hệ số bất định ta luôn tìm được 3 số $a, b, c \in \mathbf{R}$ để

$$h(x)=\frac{P(x)}{x^3-x}=Q(x)+\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}$$

trong đó $Q(x)$ là đa thức có bậc < 1992; a, b, c khác 0 (do 0; ± 1 không là nghiệm của P(x)).

Bây giờ đạo hàm 2 vế 1992 lần, $Q(x)$ sẽ triệt tiêu, ta nhận được

$$\frac{f(x)}{g(x)}=1992\,!\left(\frac{a}{x^{1993}}+\frac{b}{(x+1)^{1993}}+\frac{c}{(x-1)^{1993}}\right).$$

Vậy

$$f(x)=C(x)\left[a\left(x^2-1\right)^{1993}+bx^{1993}(x-1)^{1993}+cx^{1993}(x+1)^{1993}\right]$$

với C(x) là đa thức khác 0. Rõ ràng nên chọn C(x) là hằng, chẳng hạn C =1. Với việc chọn a + b + c = 0, ta có thể bắt lũy thừa bậc cao nhất (bậc 2.1993 = 3986) bằng 0; chọn b = c ≠ 0, lũy thừa bậc gần cao nhất (bậc 3985) bằng 0 (đồng thời các lũy thừa bậc lẻ khác cũng bằng 0).

Bây giờ hệ số của x^{3984} là (-1993a + 1993. 1992b) = 1993. 1994b ≠ 0.

Vậy bậc nhỏ nhất có thể của f(x) là 3984.

Bài 3.3.5. Chứng minh rằng hàm $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{khi } x\neq 0;\\ 0 & x=0,\end{cases}$

khả vi vô hạn tại x = 0.

Giải. Khi x ≠ 0, lấy đạo hàm của f(x) ta được

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}\,e^{-1/x^2}\ ;\ f''(x)=\left(\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4}\right)e^{-1/x^2}\ ;...$$

Dễ chứng minh theo quy nạp rằng $f^{(n)}(x)=Q_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$, trong đó $Q_{3n}(u)$ là đa thức bậc 3n đối với biến u.

Đổi biến $1/x^2 = z$ rồi dùng quy tắc L'Hôpital ta được

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{|x|^m} = \lim_{z\to+\infty}\frac{z^{m/2}}{e^z} = 0, \qquad \forall m \in \mathbf{N}.$$

Đặc biệt, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-1/x^2}}{x} = 0$. Vậy $f'(0)=0$.

Giả sử $f^{(n-1)}(0)=0$, khi đó

$$f^{(n)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} Q_{3n-3+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2} = 0.$$

Theo nguyên lí quy nạp, f(x) khả vi vô hạn lần tại x = 0 và $f^{(n)}(0)=0,\ \forall n \in \mathbf{N}$.

§3.4. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

§3.4a. Tính đơn điệu của hàm số

Bài 3.4.1. Cho hàm f(x) xác định trên $[0;+\infty)$, bị chặn, khả vi hai lần và $f''(x)\ge 0$, $\forall x \ge 0$. Chứng minh rằng f(x) là hàm giảm.

Giải. Ta sẽ chứng minh $f'(x)\le 0\ \ \forall x>0$. Giả sử ngược lại, tồn tại $c > 0$ để $f'(c) > 0$. Do $f''(x)\ge 0$ nên $f'(x)$ tăng, suy ra

$$f'(u) \ge f'(c)>0,\ \forall u \ge c.$$

Lấy x bất kì trên $[c;\infty)$, theo công thức số gia giới nội

$$f(x) = f(c)+(x-c)f'(u), \qquad u \in (c;x).$$

Từ đó $f(x)\ge f(c)+(x-c)f'(c) \to +\infty (x\to\infty)$, mâu thuẫn tính bị chặn của f(x).

Từ đó $f'(x)\le 0, \forall x > 0$, do đó f(x) là hàm giảm.

Bài 3.4.2. Chứng minh rằng mỗi đa thức bất kì có thể biểu diễn được dưới dạng hiệu của hai đa thức đồng biến.

Giải. Giả sử P(x) là đa thức bất kì. Đạo hàm $P'(x)$ của nó cũng là một đa thức. Ta mong muốn biểu diễn $P'(x)$ thành hiệu hai đa thức không âm. Ta có

$$P'(x)=\frac{1}{2}\left[P'(x)-\left(-P'(x)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(P'(x)+\left(P'(x)\right)^2+1\right)-\left(-P'(x)+\left(P'(x)\right)^2+1\right)\right]$$

Vì $\left(P'(x)\right)^2 \pm P'(x)+1>0$, $\forall x$ nên

$$h(x)=\frac{1}{2}\int_0^x\left[\left(P'(t)\right)^2+P'(t)+1\right]dt+P(0)/2 \text{ đồng biến ;}$$

$$k(x)=\frac{1}{2}\int_0^x\left[\left(P'(t)\right)^2-P'(t)+1\right]dt-P(0)/2 \text{ đồng biến.}$$

Rõ ràng h(x), k(x) là những đa thức và

$$h(x)-k(x)=P(0)+\int_0^x P'(t)dt=P(x).$$

Bài 3.4.3. Cho $n\in \mathbf{N}^*$. Chứng minh rằng mỗi hàm số f(x) khả vi liên tục cấp n $(n\geq 1)$ trên $[a;b]$ đều có thể biểu diễn được dưới dạng hiệu của hai hàm tăng và khả vi liên tục cấp n.

Hướng dẫn. Với h(k) và k(x) xác định như ở Bài 3.4.2 (có một chút thay đổi: Cận dưới 0 thay đổi bởi a, P(0) thay bởi P(a)) ta được f(x) = h(x) - k(x); h(x) và k(x) khả vi liên tục cấp n.

Lưu ý. Nếu n = 0 thì khẳng định không đúng. Cụ thể là, mỗi hàm liên tục nói chung không thể biểu diễn được dưới dạng hiệu của hai hàm liên tục, tăng.

Bài 3.4.4. Giả sử f(x) là hàm khả vi liên tục trên khoảng hữu hạn (a; b), $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=-\infty$ và

$$f'(x)+f^2(x)\geq -1 \text{ với } x\in(a;b).$$

Chứng minh rằng $b-a\geq\pi$. Đưa ra ví dụ để $b-a=\pi$.

Giải. Ta sẽ cố gắng biến đổi bất đẳng thức đã cho để suy ra đạo hàm của một hàm nào đó không âm. Thực vậy ta có

$$f'(x)+f^2(x)\geq -1 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)+1}+1\geq 0$$

hay $\left(\operatorname{arctg} f(x)+x\right)' \geq 0$; $\forall x \in (a;b)$.

Vậy hàm arctg f(x) + x tăng trên $(a;b)$. Chuyển qua giới hạn ta được

$$\frac{\pi}{2}+a \leq -\frac{\pi}{2}+b \text{ hay } b-a \geq \pi.$$

Dấu đẳng thức xảy ra với hàm y = cotgx; a = 0, b = π.

§3.4b. Cực trị

Bài 3.4.5. Gọi a, b là hai số thực thoả mãn

$$a^b = b^a,\ 0 < a < b. \qquad (*)$$

Đặt $f_{(a,b)}(x) = |x-a| + |x-b| + |x-2| + |x-3|$.

Chứng minh rằng có duy nhất x_0 để

$$\operatorname{Min} f_{(a,b)}(x) = f_{(a,b)}(x_0),\ \forall a, b \text{ thoả mãn } (*).$$

Giải. $a^b = b^a \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$. Gọi giá trị chung này là m. Điều này tương đương với đường thẳng y = m cắt đồ thị (C) của hàm số $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ tại hai điểm phân biệt với hoành độ a và b.

Ta có $g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$. Thu được bảng biến thiên

x	0		e		+∞
g'(x)		+	0	–	
g(x)	-∞	↗	1/e	↘	0

Từ đó a và b là hoành độ giao điểm của đường thẳng y = m; $m \in \left(0;\frac{1}{e}\right)$ với đồ thị (C).

Rõ ràng $e \in (a;b)$, $\forall a, b$ thoả mãn (*) và e là điểm duy nhất như vậy. Mặt khác hiển nhiên $e \in (2;3)$.

Ta có

$$f_{(a,b)}(x) = |x-a| + |x-b| + |x-2| + |x-3|$$

$$\geq \left|(x-a)+(b-x)\right|+\left|(x-2)+(3-x)\right| = b-a+1.$$

Dấu " = " xảy ra, khi và chỉ khi $x \in [a;b] \cap [2;3]$.

Vậy $\text{Min}\, f_{(a,b)}(x) = f(e)$, $\forall a, b$ thoả mãn (*).

Bài 3.4.6. Cho f(x) là hàm số khả vi trên $[0;1]$ và thoả mãn $f'(0)f'(1) < 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0;1)$ để $f'(c) = 0$.

Giải. Không hạn chế tổng quát coi $f'(0) > 0$; $f'(1) < 0$. Vì f(x) khả vi trên $[0;1]$ nên liên tục trên đó, vậy có $c \in [0;1]$ để $f(c) = \underset{x \in [0;1]}{\text{Max}}\, f(x)$. Ta chứng minh $c \in (0;1)$.

* Khai triển Taylor f(x) tại x = 0, ta được:

$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$.

Do $f'(0) > 0$ nên $f(x) > f(0)$ với x đủ gần 0. Từ đó x = 0 không thể là điểm cực đại.

* Tương tự, khai triển Taylor f(x) tại x = 1, ta được:

$f(x) = f(1) + (-f'(1))(1-x) + o(x-1) > f(1)$ với x đủ gần 1.

Vậy x = 1 cũng không thể là điểm cực đại. Như vậy điểm cực đại c là điểm trong của (0;1), f(x) khả vi nên $f'(c) = 0$.

Lưu ý. Chưa thể sử dụng định lý về giá trị trung gian cho hàm $f'(x)$ vì có thể $f'(x)$ không là hàm liên tục. Thực ra, nghiệm đúng định lý về giá trị trung gian của đạo hàm nên ta suy ngay ra kết luận.

Bài 3.4.7. Cho hàm f(x) khả vi trên $[0;1]$ sao cho $f'(0) < 0 < 1 < f'(1)$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0;1)$ để $f'(c) = c$.

Giải. Viết biểu thức $f'(c) = c$ dưới dạng $f'(c) - c = 0$ hay $\left.\left(f'(x) - x\right)\right|_{x=c} = 0$, ta có thể nghĩ đến xét g(x) là một nguyên hàm của $f'(x) - x$:

$$g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}.$$

Rõ ràng g(x) khả vi trên $[0;1]$; $g'(x) = f'(x) - x$

$$\begin{cases} g'(0) = f'(0) < 0; \\ g'(1) = f'(1) - 1 > 0. \end{cases}$$

Theo Bài 3.4.6, $\exists c \in (0;1)$ để $g'(c) = 0$. Suy ra đpcm.

Bài 3.4.8. Cho hàm f(x) xác định và liên tục trên $[0;+\infty)$, có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ và thoả mãn f(0) = 1; $|f(x)| \le e^{-x}$, $\forall x \ge 0$.

Chứng minh rằng tồn tại $x_0 > 0$ để $f'(x_0) = -e^{-x_0}$.

Giải.

$$f'(x_0) = -e^{-x_0} \Leftrightarrow f'(x_0) + e^{-x_0} = 0 \Leftrightarrow \left(f(x) - e^{-x}\right)'\Big|_{x = x_0} = 0$$

Xét hàm $\varphi(x) = f(x) - e^{-x}$. Ta có $\varphi(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$, khả vi trên $(0;+\infty)$; $\varphi(x) \le 0$; $\varphi(0) = 0$; $\varphi(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

Vậy tồn tại L đủ lớn để trên $[0;+L), \varphi(x)$ có cực tiểu. Suy ra tồn $x_0 \in (0;+L), \varphi'(x_0) = 0$ hay $f'(x_0) = -e^{-x_0}$.

Bài 3.4.9. Tìm đa thức bậc thấp nhất nhận giá trị cực đại là 6 tại x = 1 và giá trị cực tiểu là 2 tại x = 3.

Giải. Giả sử y = P(x) là đa thức phải tìm. Từ giả thiết suy ra $P'(1) = P'(3) = 0$, vậy $P'(x)$ là đa thức có ít nhất hai nghiệm. Từ đó bậc của $P'(x) \ge 2$ hay bậc của $P(x) \ge 3$. Chúng ta hãy thử với đa thức P(x) bậc ba với

$$P'(x) = A(x-1)(x-3) = A\left(x^2 - 4x + 3\right) \text{ (A- hằng số).}$$

Vì $\qquad P''(x)\Big|_{x=1} < 0$; $P''(x)\Big|_{x=3} > 0$ nên A > 0.

$$P(x) = A\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right) + B.$$

$$\begin{cases} P(1) = \frac{4}{3}A + B = 6 \\ P(3) = \qquad B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 2 \end{cases} \Rightarrow P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2.$$

Thử lại thấy đúng.

Bài 3.4.10. Cho $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ và biết rằng f(x) > 0, $\forall x\in \mathbf{R}$. Chứng minh rằng

$$F(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)+f^{(4)}(x)>0,\ \forall x\in \mathbf{R}.$$

Giải. F(x) là đa thức bậc 4, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x)=+\infty$, vậy tồn tại $x_0\in \mathbf{R}$ để $F(x_0)=\operatorname{Min} F(x)\Rightarrow F'(x_0)=0$.

Vì $F'(x)=F(x)-f(x)$ nên $F'(x_0)=0\Leftrightarrow F(x_0)=f(x_0)>0$.

Tóm lại $F(x)\ge F(x_0)=f(x_0)>0$, $\forall x\in \mathbf{R}$.

Bài 3.4.11. Cho f(x) liên tục trên $[a;b]$. Đặt $c=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Chứng minh rằng $\int_a^b |f(x)-c|^2 dx \le \int_a^b |f(x)-d|^2 dx$, $\forall d\in \mathbf{R}$.

Giải. Xét hàm $g(d)=\int_a^b |f(x)-d|^2 dx$

$$=\int_a^b f(x)^2 dx-2d\int_a^b f(x)dx+d^2(b-a),\ d\in \mathbf{R}.$$

g(d) là tam thức bậc 2 của d, đạt cực tiểu tại

$d_0=\int_a^b f(x)\,dx\Big/(b-a)=c$. Suy ra đpcm.

Bài 3.4.12. Cho $f:\mathbf{R}\to \mathbf{R}$ là hàm khả vi đến cấp hai, sao cho ta có thể tìm được hàm $g:\mathbf{R}\to \mathbf{R}_+$ để cho

$$f(x)+f''(x)=-x\,g(x)f'(x),\ \forall x\in \mathbf{R}.$$

Chứng minh rằng f(x) là hàm bị chặn.

Giải. Nhân 2 vế đẳng thức đã cho với $2f'(x)$ ta được

$$2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)=-2x\,g(x)\big(f'(x)\big)^2.$$

Vế trái là đạo hàm của hàm $h(x)=f^2(x)+\big(f'(x)\big)^2$, suy ra $h'(x)\ge 0$ với x < 0 và $h'(x)\le 0$ với x > 0. Vậy h(0) là giá trị lớn nhất của h(x):

$0\le f^2(x)\le h(x)\le h(0)$, suy ra f(x) bị chặn.

§3.4c. Khảo sát đường cong dưới dạng hiện, dạng tham số và trong toạ độ cực

Về nguyên tắc, ta có thể vẽ tập điểm $(x_i, f(x_i))$ đủ dày rồi nối chúng lại, ta sẽ thu được đồ thị hàm số $y=f(x)$. Ngày nay, tính toán theo công thức được thực hiện rất dễ dàng bởi ngay cả những máy tính cầm tay đơn giản. Một số phần mềm như Mathematica, AutoCAD, Excel, ... cho phép vẽ đồ thì hàm số một cách tự động; cả khi chưa biết dạng hàm và lưới điểm $(x_i, f(x_i))$ cũng không cần đủ dày, chúng ta vẫn có những đồ thị đạt yêu cầu. Tuy nhiên, ta rất hay gặp phải trục trặc khi ấn định sai dải biến thiên của ẩn và nhiều khi máy không vẽ được tại lân cận của các điểm tới hạn. Vả lại, bản thân việc khảo sát hàm và đường cong (bằng tay !) cũng là một đối tượng lí thú của Giải tích toán.

Nhìn chung, việc khảo sát hàm số phải được tiến hành ở tất cả các bước như tìm tập xác định, tính chẵn lẻ, tuần hoàn, lập bảng biến thiên,... Tuy nhiên, đối với các hàm vô tỉ, việc tính đạo hàm bậc hai thường rất phức tạp, cho nên trừ trường hợp có những đòi hỏi đặc biệt, ta sẽ bỏ qua khâu khảo sát đạo hàm bậc hai cũng như tìm điểm uốn, cung lồi, lõm. Cần chú ý vào tính toán tiệm cận, giới hạn hàm số và giới hạn của đạo hàm.

Việc khảo sát đường cong dưới dạng tham số được tiến hành như khảo sát hàm thông thường với hai hàm x(t), y(t); có điều ta nên lập bảng biến thiên đồng thời. Đôi khi ta có thể khử tham số t để chuyển về hàm hiện thông thường y = f(x).

Đường cong dưới dạng toạ độ cực là một dạng tham số hoá đặc biệt. Lưu ý rằng trong bảng biến thiên ta nên đưa thêm dòng $\operatorname{tg}V = \dfrac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}$, trong đó V là góc hợp bởi bán kính véc tơ $\overrightarrow{OM}$ với tiếp tuyến dương của đường cong tại điểm M.

Đối với khảo sát hàm ẩn xác định từ một phương trình nào đó, ta khôn khéo đưa về dạng hiện, dạng tham số hay dạng toạ độ cực.

Bài 3.4.13. Đa thức $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+...+\dfrac{x^n}{n}$ có bao nhiêu nghiệm thực ?

Giải. $f'(x)=1+x+...+x^{n-1}$; $f'(1)=n$; với $x \neq 1$, $f'(x)=\dfrac{x^n-1}{x-1}$.

+ Nếu n chẵn, $f'(x)=\dfrac{x^{2k}-1}{x-1}$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	n	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(-1)=(1-1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{2k-2}-\frac{1}{2k-1}\right)+\frac{1}{2k}>0.$$

Vậy phương trình f(x) = 0 vô nghiệm, do đó đa thức đã cho vô nghiệm.

+ Nếu n lẻ, $f'(x)=\dfrac{x^{2k+1}-1}{x-1}>0,\ \forall x$.

Vậy hàm f(x) đồng biến. Lại có $f(-\infty)=-\infty$; $f(+\infty)=+\infty$ nên đa thức đã cho có nghiệm duy nhất.

Trả lời: - Với n chẵn, đa thức vô nghiệm;

- Với n lẻ, đa thức có một nghiệm.

Bài 3.4.14. Tìm tập giá trị của $f(x)=\log_x(100x-99)$.

Giải. Dễ thấy tập xác định D của f(x) là $D=\{0,99<x<1\}\cup\{1<x\}$.

Trên D, $$f(x)=\frac{\ln(100x-99)}{\ln x}.$$

$$f'(x)=\frac{100x\ln x-(100x-99)\ln(100x-99)}{x\ (100x-99)\ln^2 x}=\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Ta thấy $Q(x)=x(100x-99)\ln^2 x>0,\ \forall x\in D$.

Ngoài ra, $P'(x)=100(\ln x-\ln(100x-99))$ cùng dấu với dấu của $x-(100x-99)=99(1-x)$ (do lnx là hàm đồng biến). Ta thu được bảng biến thiên

x	$0,99$		1		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Vậy $P(x)<P(1)=0,\ \forall x\in D\Rightarrow f'(x)<0,\ \forall x\in D$. Lại có bảng

x	0,99		1		$+\infty$
f'		-	||	-	
f	$+\infty$	$\searrow$	100 || 100	$\searrow$	1

Từ đó tập giá trị là $(1;100)\cup(100;+\infty)$.

Bài 3.4.15. Khảo sát và vẽ đồ thì các hàm số sau:

a) $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$;   b) $g(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}$.

Giải.

a) Tập xác định $\mathbf{R}$

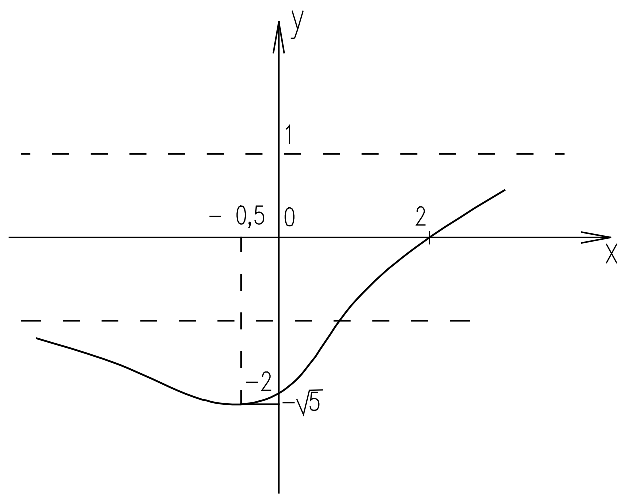
+ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1 \Rightarrow (\Delta_1)$: $y=1$ là tiệm cận ngang.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1 \Rightarrow (\Delta_2)$: $y=-1$ là tiệm cận ngang.

+ $f'(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; $f'=0 \Leftrightarrow x=-1/2$.

Ta nhận được bảng biến thiên và đồ thị như sau:

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\sqrt{5}$	$\nearrow$	1



b) Hàm g(x) lẻ, khả vi trên **R**. Ta chỉ cần khảo sát trên $[0;+\infty)$.

+ $\lim\limits_{x\to\ \infty} g(x) = 0 \Rightarrow$ Trục Ox là tiệm cận ngang.

+ Chiều biến thiên.

$$f'(x) = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\left(\frac{1}{2x} - \text{arctg}x\right).$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 1.$$

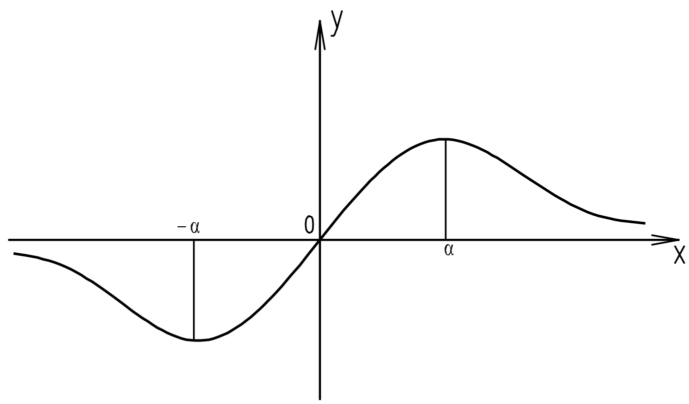
Đặt $h(x) = \dfrac{1}{2x} - \text{arctg}x$, ta có

$$h'(x) = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{1+x^2} < 0.$$

Suy ra h(x) triệt tiêu và đổi dấu tại một số thực $\alpha, \alpha \approx 0{,}765$; $f(\alpha) \approx 0{,}412$.

Nhận được bảng biến thiên và đồ thị như sau:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	1	+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$f_{CĐ}$	↘	0



Bài 3.4.16. Khảo sát đường cong cho dưới dạng tham số:

$$x = \frac{t^2}{t-1}; \qquad y = \frac{t}{t^2-1}.$$

Giải.

+ Tập xác định: $\forall t \neq \pm 1$.

+ Tiệm cận.

Khi $t \to \infty$ thì $x(t) \to \infty$; $y(t) \to 0$, $\Rightarrow$ Tiệm cận ngang y = 0.

Khi $t \to -1$ thì $x(t) \to -\frac{1}{2}$; $y(t) \to \infty$ $\Rightarrow$ Tiệm cận đứng $x = -\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{t \to 1} \left[y(t) - \frac{1}{2}x(t)\right] = -\frac{3}{4} \Rightarrow$ Tiệm cận xiên $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$.

+ Chiều biến thiên.

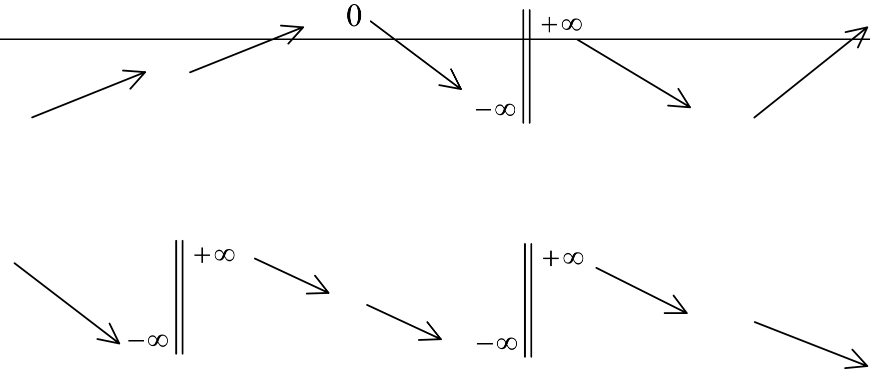
$x'(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$; $x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc t = 2.

$y'(t) = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2} < 0$.

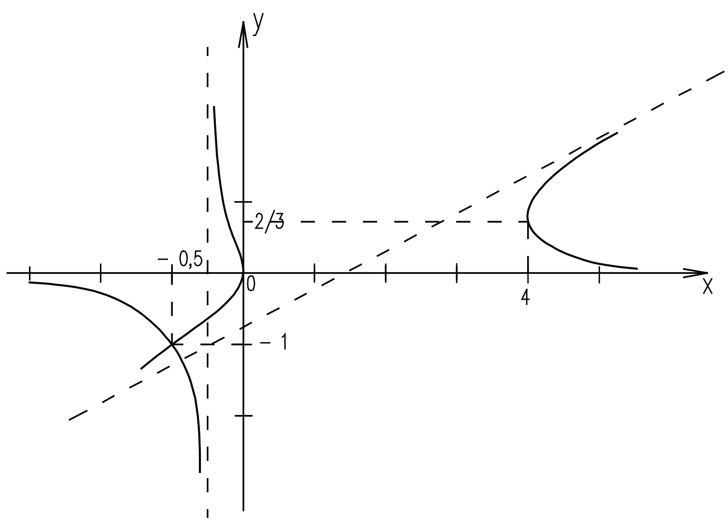
$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{t^2+1}{t(t-2)(t+1)^2}$.

Bảng biến thiên và đồ thị như sau:

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		+		+	0	-	$\Vert$	-	0	+	
$x(t)$					0		$-\infty \Vert +\infty$				$+\infty$



	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$						4		
$y'(t)$		-	‖	-	-1	-	‖	-	$-\frac{5}{9}$	-	
$y(t)$	0				0				$\frac{2}{3}$		0
$y'(x)$		-	‖	-	‖	+	‖	+	‖	-	



Bài 3.4.17. Khảo sát và vẽ đồ thị đường cong cho trong toạ độ cực

$$\varphi = \frac{r}{r-1}\ (r > 1).$$

Phân tích. Việc khảo sát trở nên dễ dàng hơn nếu ta biểu diễn r như là hàm của φ.

Giải. Giải r qua φ ta được $r = \dfrac{\varphi}{\varphi - 1}\ (\varphi > 1)$.

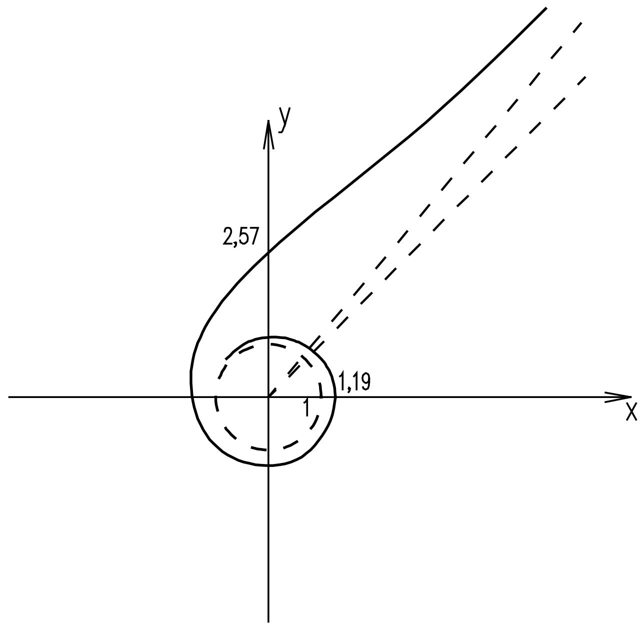
$\lim\limits_{\varphi \to 1^+} r = +\infty$. Vậy tia $\varphi = 1 \left(\approx 57^0 49'\right)$ là tiệm cận (xiên) của đường cong.

$r'(\varphi) = -\dfrac{1}{(\varphi - 1)^2} < 0$;

$$\mathrm{tgV} = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)} = -\varphi(\varphi - 1) < 0 .$$

Bảng biến thiên và đồ thị như sau:

φ	1		$+\infty$
$r'(\varphi)$		-	
$r(\varphi)$	$+\infty$	$\searrow$	1
tgV	0	-	



Khi φ càng lớn, đường cong càng gần với đường tròn r = 1.

Bài 3.4.18. Khảo sát và vẽ đồ thị đường cong trong toạ độ cực

$$r = \varphi \mathrm{tg}\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi .$$

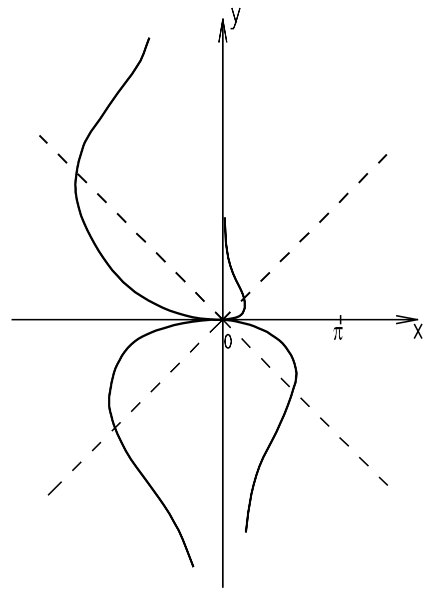
Giải. Tập xác định $[0;2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$.

$$\lim_{\varphi \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} r(\varphi) = +\infty; \qquad \lim_{\varphi \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} r(\varphi) = -\infty;$$

$$\lim_{\varphi \to \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} r(\varphi) = +\infty; \qquad \lim_{\varphi \to \left(\frac{3\pi}{2}\right)^+} r(\varphi) = -\infty.$$

Vậy các tia $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ và $\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$ là các tiệm cận.

φ	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
$r'(\varphi)$		$+$	$\Vert$	$+$		$+$	$\Vert$	$+$	
$r(\varphi)$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0
tgV	0	$+$	$0\Vert 0$	-	0	$+$	$0\Vert 0$	-	0



$$r'(\varphi)=\mathrm{tg}\varphi+\frac{\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{\sin 2\varphi+2\varphi}{2\cos^2\varphi}>0\ ;$$

$$\mathrm{tgV}=\frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}=\frac{\varphi\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi+2\varphi}.$$

Bảng biến thiên và đồ thị như hình vẽ.

Sau đây chúng ta sẽ khảo sát một số đường cong cho dưới dạng tổng quát

$$\Gamma=\{(x,y):\ F(x,y)=0\}.$$

Mỗi đường cong có thể được biểu diễn dưới nhiều dạng tham số khác nhau. Để tham số hoá đường cong, một cách thông dụng đặt $y=h(t,x)$. Hàm $h(t,x)$

được chọn sao cho khi thay biểu thức $y = h(t, x)$ vào phương trình đã cho ta dễ giải ra $x = x(t)$; từ đó suy ra $y = h(t, x(t))$.

Dùng toạ độ cực để biểu diễn đường cong cũng rất hiệu quả: Chỉ việc đặt

$$x = r\cos\varphi\ ;\ y = r\sin\varphi$$

rồi thay vào phương trình đường cong $F(x, y) = 0$; giải ra ta được $\varphi = \varphi(r)$ hoặc $r = r(\varphi)$. Đó là dạng toạ độ cực của đường cong đã cho.

Bài 3.4.19. Khảo sát và vẽ đồ thị đường cong cho bởi phương trình

$$x^y = y^x.$$

Giải. Chúng ta sẽ thành công trong việc tham số hoá đường cong bằng cách đặt $y = (1+t)x\ \ (-1 < t \neq 0)$. Quả vậy, khi đó

$$x^{(1+t)x} = [(1+t)x]^x \Rightarrow x = (1+t)^{1/t} \Rightarrow y = (1+t)^{1+1/t}.$$

Hiển nhiên nếu t = 0 thì hàm số y = x thoả mãn phương trình đã cho. Nhận thấy rằng

$$\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{t\to 0} y(t) = e.$$

$\lim\limits_{t\to +\infty} x(t) = 1\ ;\quad \lim\limits_{t\to +\infty} y(t) = +\infty \Rightarrow$ Tiệm cận đứng x = 1.

$\lim\limits_{t\to -1+0} x(t) = +\infty\ ;\quad \lim\limits_{t\to -1+0} y(t) = 1 \Rightarrow$ Tiệm cận ngang y = 1.

Bằng phương pháp đạo hàm loga ta được

$$x'(t) = x(t)\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}.$$

Bằng phương pháp đạo hàm dễ kiểm tra bất đẳng thức

$$t-(1+t)\ln(1+t) < 0.$$

Vậy $x'(t) < 0$.

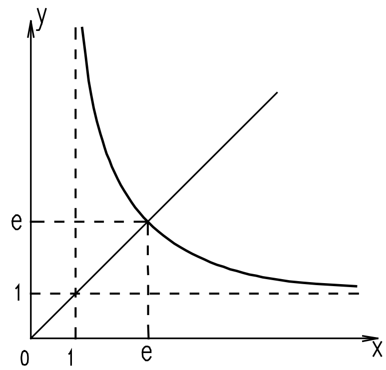
Tương tự, $y'(t) = y(t)\dfrac{t-\ln(1+t)}{t^2} > 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = (t+1)^2\ \frac{t-\ln(1+t)}{t-(1+t)\ln(1+t)} > 0.$$

Bảng biến thiên và đồ thị như sau:

t	-1		0		$+\infty$
$x'(t)$		-	‖	-	

$x(t)$	$+\infty \searrow e$	$\Vert$	$e \searrow 1$
$y'(t)$	$+$	$\Vert$	$+$
$y(t)$	$1 \nearrow e$	$\Vert$	$e \nearrow +\infty$
$y'(x)$	$+$	$\Vert$	$+$



Bài 3.4.20. Khảo sát đường cong Γ cho bởi phương trình

$$x^2y^2 = x^3 - y^3$$

Giải.

Vì mỗi vế là những hàm thuần nhất với hai biến x, y nên ta có thể đặt y = tx, ta được

$$x^2(tx)^2 - x^3 + (tx)^3 = 0 .$$

Vậy $\qquad x = \dfrac{1-t^3}{t^2}$; $\qquad y = \dfrac{1-t^3}{t}$.

Khi $t \to \infty$ thì $x(t) \to \infty ; y(t) \to \infty$;

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\infty} t = \infty .$$

Vậy nhánh đường cong ứng với $t \to \infty$ không có tiệm cận.

Khi $t \to 0$ thì $x(t) \to \infty ; y(t) \to \infty$;

$$\lim_{t\to 0}\frac{y(t)}{x(t)} = 0;\ \lim_{t\to 0}\left[y(t) - 0\ \ x(t)\right] = \infty .$$

Vậy nhánh đường cong ứng với $t \to 0$ không có tiệm cận.

Chiều biến thiên

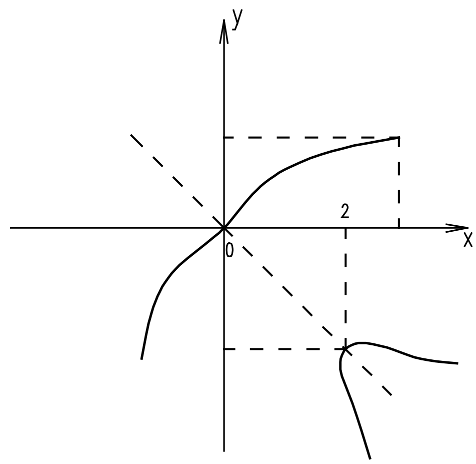
$$x'(t) = -\frac{t^3+2}{t^3}\ ;\ x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\sqrt[3]{2}\ .$$

$$y'(t) = -\frac{2t^3+1}{t^2}\ ;\ y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\ .$$

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{t\left(2t^3+1\right)}{t^3+2}.$$

Bảng biến thiên và đồ thị như hình vẽ

t	$-\infty$		$-\sqrt[3]{2}$		$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		0		$+\infty$
$x'(t)$		-	0	+		+	$\|$	-	
$x(t)$	$+\infty$	↘	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$	↗	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$	↗	$+\infty\ \|\ +\infty$	↘	$-\infty$
$y'(t)$		+		+	0	-	$\|$	-	
$y(t)$	$-\infty$	↗	$-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$	↗	$-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$	↘	$-\infty\ \|\ +\infty$	↘	$-\infty$
$y'(x)$		-	$\|$	+	0	-	$\|$	+	



Bài.3.4.21. Khảo sát và vẽ đồ thị của đường cong cho Γ bởi phương trình:

$$\left(x^2+y^2\right)^2=9\left(x^2-y^2\right). \qquad (*)$$

Giải. Trước hết, nếu (x_0, y_0) thoả mãn (*) thì các điểm ($\pm\ x_0$, $\pm\ y_0$) cũng thoả mãn (*). Vậy đường cong Γ có hai trục đối xứng là trục Ox, trục Oy, tâm đối xứng là O (0,0). Tham gia vào phương trình (*) có các lượng x^2+y^2 và x^2-y^2 nên một cách tiện lợi, ta sẽ chuyển đường cong về dạng toạ độ cực. Muốn vậy ta đặt $x=r\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi$ $(0\le\varphi\le 2\pi)$ ta được

$$r^4=9\left(r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi\right) \text{ hay } r^2=9\cos 2\varphi.$$

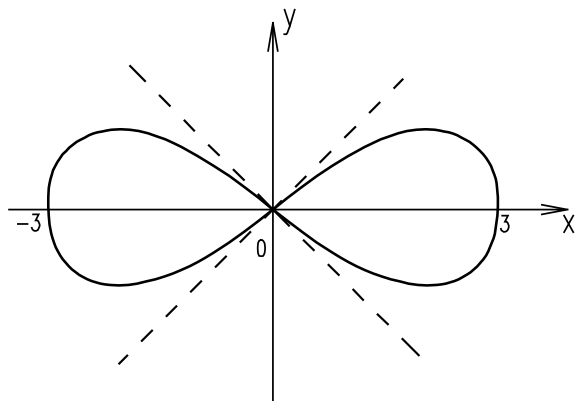
Điều kiện $\cos 2\varphi>0$ hay $\left(-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}\le\varphi\le\frac{5\pi}{4}\right)$.

Ta chỉ cần xét với $x\ge 0$ hay $-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.

$$r=3\sqrt{\cos 2\varphi}\ ;\ r'=-3\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\ ;\quad \operatorname{tg}V=\frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}=-\operatorname{cotg}2\varphi.$$

Bảng biến thiên và đồ thị như sau:

φ	$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$
$r'(\varphi)$		+	0	-	
$r(\varphi)$	0	↗	3	↘	0
tgV	0	+	‖	-	0



§3.4d. Bất đẳng thức - Tính lồi của hàm số

Bài 3.4.22. Chứng minh với mọi $\alpha \le 3$ ta có

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\alpha} \ge \cos x,\ \ \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$

Giải. Dùng đạo hàm dễ chứng minh $0 \le \dfrac{\sin x}{x} < 1$, $\forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Từ đó $\forall \alpha \le 3$, $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\alpha} \ge \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{3}$. (*)

Bài toán đưa về chứng minh bất đẳng thức

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3} \ge \cos x,\ \ \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right). \quad (1)$$

Cách 1. $(1) \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{\cos x} - x^3 \ge 0$, $\forall x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. (2)

Rõ ràng f(x) liên tục và có đạo hàm mọi cấp trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$f'(x) = tg^2 x + 2\sin^2 x - 3x^2;$$

$$f''(x) = 2\left[tgx\,\frac{1}{\cos^2 x} + \sin 2x - 3x\right];$$

$$f'''(x) = \frac{2}{t^2}(t-1)^2(4t+3),\ \text{với}\ t = \cos^2 x \in (0;1).$$

Từ đó $f'''(x) \ge 0$, $\forall x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$(bằng 0 chỉ tại x = 0). Vậy $f''(x)$ đồng biến trên

$\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, suy ra $f''(x) > f''(0) = 0$. Lại suy ra $f'(x)$ đồng biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, nên $f'(x) > f'(0) = 0$. Cuối cùng f(x) tăng và $f(x) > f(0) = 0$, $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, (1) được chứng minh.

Cách 2. Để đạo hàm nhanh chóng hết x, ta khai căn hai vế (1):

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} \geq \sqrt[3]{\cos x} \Leftrightarrow g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x \geq 0.$$

$$g'(x) = \frac{2\cos^2 x - 3\cos x\ \sqrt[3]{\cos x} + 1}{3\cos x\ \sqrt[3]{\cos x}}.$$

Đặt $\cos x = t \in (0;1]$, $2\cos^2 x - 3\cos x\sqrt[3]{\cos x} + 1$

$$= 2t^2 - 3t\sqrt[3]{t} + 1 = h(t).$$

$$h'(t) = 4t - 4t^{1/3} = 4\left(t - \sqrt[3]{t}\right) \leq 0,\ \forall t \in (0;1].$$

Vậy h(t) giảm, suy ra $h(t) \geq h(1) = 0$. Từ đó $g'(x) \geq 0; \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$. Suy ra g(x) tăng, từ đó $g(x) \geq g(0), \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; (1) được chứng minh.

Bài 3.4.23. Cho hàm f(x) khả vi liên tục đến cấp hai trên [0;N] và $\forall x \in [0;N]$, $\left|f'(x)\right| < 1$; $f''(x) > 0$. Giả sử $0 \leq m_0 < m_1 < ... < m_k \leq N$ và đặt $n_i = f(m_i)$, $i = 0,1,...,k$. Kí hiệu $b_i = n_i - n_{i-1}$, $a_i = m_i - m_{i-1}$ với $i = 1, 2, ... k$.

a) Chứng minh rằng

$$-1 < \frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_2} < ... < \frac{b_k}{a_k} < 1.$$

b) Chứng minh rằng với A > 1 cho trước, có không quá N/A chỉ số j sao cho $a_j > A$.

Giải.

a) Với i = 1, 2, ... k theo công thức số gia giới nội ta có

$$b_i = f(m_i) - f(m_{i-1}) = (m_i - m_{i-1})\,f'(x_i),\ x_i \in (m_{i-1};m_i).$$

Suy ra $\frac{b_i}{a_i} = f'(x_i)$, cũng suy ra $-1 < \frac{b_i}{a_i} < 1$.

Từ chỗ $f''(x) > 0$ suy ra $f'(x)$ tăng thực sự. Lại có $x_i < m_i < x_{i+1}$ nên

$$\frac{b_i}{a_i} = f'(x_i) < f'(x_{i+1}) = \frac{b_{i+1}}{a_{i+1}}.$$

b) Đặt $S_A = \{j \in \{0, 1, ..., k\} : a_j > A\}$ và $|S_A|$ là số các phần tử của tập hợp S_A. Ta có

$$N \geq m_k - m_0 = \sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{j \in S_A} a_j > A\,|S_A|.$$

Suy ra $|S_A| < N/A$.

Bài 3.4.24. Cho n là số nguyên dương ≥ 9. Số nào trong 2 số sau lớn hơn

$$\left(\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n+1}};\ \left(\sqrt{n+1}\right)^{\sqrt{n}}.$$

Giải. Ta chứng minh $\left(\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n+1}} > \left(\sqrt{n+1}\right)^{\sqrt{n}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n+1}\ \ln\sqrt{n} > \sqrt{n}\ \ln\sqrt{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\sqrt{n}}{\sqrt{n}} > \frac{\ln\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}. \qquad (*)$$

Xét hàm $y = \frac{\ln x}{x}$. $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$; $y' < 0$ với $x > e$, nói khác hàm số đơn điệu giảm trên $[e; +\infty)$. Vậy khi $\sqrt{n} > e$ hay $n \geq 9$ thì $\sqrt{n+1} > \sqrt{n} > e$ và xảy ra (*).

Bài 3.4.25. Cho n số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ trong khoảng $(0; \pi)$ với trung bình cộng bằng μ. Chứng minh rằng $\prod_{i=1}^{n} \frac{\sin a_i}{a_i} \leq \left(\frac{\sin\mu}{\mu}\right)^n$.

Giải. Logarit hoá ta được

$$\left(\ln\frac{\sin a_1}{a_1} + ... + \ln\frac{\sin a_n}{a_n}\right)\frac{1}{n} \leq \ln\frac{\sin\mu}{\mu}.$$

Bất đẳng thức này sẽ đúng nếu ta chứng minh được hàm $f(x) = \ln\frac{\sin x}{x}$, $x \in (0; \pi)$ lõm, muốn vậy ta chứng minh $f''(x) < 0$.

Ta có $f'(x) = (\ln\sin x - \ln x)' = \cot g\, x - \frac{1}{x}$;

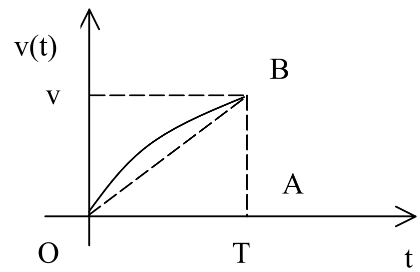
$$f''(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2}$$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < \sin^2 x < x^2$ là bất đẳng thức đúng với $0 < x < \pi$.

Bài 3.4.26. Một chất điểm xuất phát từ trạng thái đứng yên, chuyển động trên đường thẳng với gia tốc giảm dần. Khi đi được quãng đường d nó đạt vận tốc v. Tìm thời gian chuyển động cực đại.

Giải. Vẽ đồ thị vận tốc v(t) theo thời gian t (hình vẽ).

Ta có v(T) = v; gọi diện tích miền phẳng dưới đường cong và giữa hai đường thẳng t = 0, t = T là d.



Từ chỗ gia tốc giảm, đường cong là lõm và từ đó

$d \geq dt(\Delta OAB) = (1/2)vT$.

Vậy $T \leq 2d/v$. Dấu bằng đạt được khi chuyển động với gia tốc hằng số.

Bài 3.4.27. Tìm số a nhỏ nhất để bất đẳng thức

$$(1-a)\sin x + a\,\text{tg}x > x$$

nghiệm đúng với tất cả các giá trị x trên $(0; \pi/2)$.

Giải. Với số a tùy ý chúng ta xét hàm

$$f_a(x) = (1-a)\sin x + a\,\text{tg}x - x.$$

Ta hãy tính các đạo hàm cũng như giá trị của chúng tại 0.

$f_a'(x) = (1-a)\cos x + a(1+\text{tg}^2x) - 1;\ f_a'(0) = 0.$

$f_a''(x) = -(1-a)\sin x + 2a(\text{tg}x + \text{tg}^3x);\ \ f_a''(0) = 0.$

$f_a'''(x) = (a-1)\cos x + 2a(1+4\text{tg}^2x + 3\text{tg}^4x);\ \ f_a'''(0) = 3a-1.$

Từ khai triển Maclaurin của f_a dễ suy ra rằng, nếu $a < \dfrac{1}{3}$ thì hàm f_a nhận giá trị âm với x ở lân cận phải đủ nhỏ của 0 và bất đẳng thức đã cho không nghiệm đúng.

Bây giờ giả sử $a = 1/3$. Với $x \in (0;\ \pi/2)$ xảy ra bất đẳng thức quen biết.

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}; \qquad \text{tg}x > x + \frac{x^3}{3}.$$

Thế thì

$$f_{1/3}(x) = \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\text{tg}x - x > \frac{2}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^3}{3}\right) - x = 0.$$

Điều đó chứng tỏ rằng $a = 1/3$ là số nhỏ nhất cần tìm.

Bài 3.4.28. Chứng minh rằng với $n \in \mathbf{N}^*$ $x_1,...,x_n \in (0;\pi/4)$ xảy ra bất đẳng thức

$$\sqrt[n]{\operatorname{tg}x_1 \ldots \operatorname{tg}x_n} \le \sqrt{\frac{\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \ldots + \sin^2 x_n}{\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \ldots + \cos^2 x_n}}.$$

Giải. Vì $x_i \in (0;\pi/4)$ nên $a_i = \operatorname{tg}^2 x_i \in (0;1)$, đồng thời

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{n} \sin^2 x_i}{\sum\limits_{n=1}^{n} \cos^2 x_i} = \frac{n}{\sum\limits_{n=1}^{n} \cos^2 x_i} - 1 = \frac{n}{\sum\limits_{n=1}^{n} (1+a_i)^{-1}} - 1$$

Vậy cần chứng minh

$$(a_1 \ldots a_n)^{1/n} \le \frac{n}{\sum\limits_{n=1}^{n} (1+a_i)^{-1}} - 1$$

hay $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{n=1}^{n} \dfrac{1}{1+a_i} \le \dfrac{1}{1+(a_1 \ldots a_n)^{1/n}}$.

Đặt $a_i = e^{-ti}$ ($\Leftrightarrow t_i = -\ln a_i > 0$) ta được

$$\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{1+e^{-t_i}} \le \frac{1}{1+e^{-\frac{t_1+\ldots+t_n}{n}}} \qquad (*)$$

Đây là bất đẳng thức Jensen áp dụng cho hàm lõm $f(t) = \dfrac{1}{1+e^{-t}}$ trên $(0;+\infty)$ (dễ kiểm tra $f''(t) < 0$ $\forall t > 0$).

Bài 3.4.29. Cho hàm f(x) xác định trên $[0;1]$. Với $n \in \mathbf{N}^*$ đặt

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

(g(x) được gọi là đa thức Bernstein cấp n của f(x)).

Chứng minh rằng:

a) Nếu f(x) là hàm lồi thì $g(x) \ge f(x)$ $\forall x \in [0;1]$;

b) Nếu hàm f(x) tăng thì hàm g(x) tăng;

c) Nếu hàm f(x) giảm thì hàm g(x) giảm.

Giải.

a) Với $k = 0,1,...,n$ đặt $P_k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \ge 0$.

Theo nhị thức Newton ta có

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x) = (x + (1-x))^n = 1;$$

$$\sum_{k=0}^{n} k P_k(x) = nx \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= nx \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i} x^{i} (1-x)^{(n-1)-i} = nx.$$

Từ đó, sử dụng bất đẳng thưc Jensen với hàm lồi f(x) ta được:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) f\left(\frac{k}{n}\right) \ge f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k\, P_k(x)\right) = f(x).$$

b, c) Rõ ràng hàm g(x) khả vi, hơn nữa

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^{k-1} (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k-1}$$

$$= \ldots = n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] x^k (1-x)^{n-1-k}. \qquad (*)$$

Suy ra:

+ Nếu hàm f(x) tăng thì $g'(x) \ge 0 \quad \forall x \in [0;1]$, vậy hàm g(x) tăng.

+ Nếu hàm f(x) giảm thì $g'(x) \le 0 \quad \forall x \in [0;1]$, vậy hàm g(x) giảm.

Bài 3.4.30. Cho hàm f(x) và g(x) xác định như ở Bài 3.4.29.
Chứng minh rằng nếu f(x) là hàm lồi (lõm) thì g(x) cũng là hàm lồi (lõm).

Giải. Đạo hàm hàm $g'(x)$, áp dụng kết quả (*) Bài 3.4.29 cho đa thức Bernstenin cấp n - 1 của hàm $f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$ ta được:

$$g''(x) = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k} \left[f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)\right] x^k (1-x)^{n-2-k}$$

$\forall x \in [0;1]$, $\forall n = 2,3,...$

Nếu f(x) lồi thì

$$\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{k+2}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \geq f\left[\left(\frac{k+2}{n}+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{2}\right]=f\left(\frac{k+1}{n}\right),$$

vậy $g''(x) \geq 0$ và g(x) là hàm lồi.

Nếu hàm f(x) lõm thì xảy ra bất đẳng thức ngược lại, do đó g(x) là hàm lõm. Trường hợp n = 1 khảo sát đơn giản.

§3.5. ĐỊNH LÝ VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

§3.5a. Định lý Rolle

Định lý. Nếu f(x) liên tục trên [a; b], khả vi trên (a; b), f(a) = f(b) thì tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Hệ quả. f(x) liên tục, khả vi trên (a;b); (a,b có thể là vô hạn) , $f(a+)=f(b-)$. Khi đó $\exists c \in (a;b)$ để $f'(c)=0$.

Bài toán. Chỉ ra sự tồn tại nghiệm của phương trình k(x) = 0 (1)

Phương pháp:

Bước 1. Biến đổi tương đương về dạng f(x) = 0. Ví dụ:

+ Nhân hai vế với thừa số ≠ 0: (1) $\Leftrightarrow k(x)g(x)=0$ với g(x) > 0;

+ Chuyển vế: h(x) = k(x) ⇔ h(x) - k(x) = 0;

+ Chia cho một vế (nếu có thể): h(x) = k(x) $\Leftrightarrow \dfrac{h(x)}{k(x)}-1=0$;

+ Chia cho một vế rồi lấy căn: $h(x)=k(x) \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt[k]{h(x)}}{\sqrt[k]{k(x)}}-1=0$;

+ ...

Bước 2. Dùng một trong các cách sau đây.

Cách 1 (Hàm liên tục nhận giá trị trái dấu ở đầu mút (định lí về giá trị trung gian)):

$$\left.\begin{array}{l} + \text{ f(x) liên tục trên [a; b]} \\ + \text{ f(a) f(b)} \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a;b): f(c)=0.$$

Cách 2 (Định lý giá trị trung bình của tích phân):

$$\left.\begin{array}{l} + \text{ f(x) liên tục} \\ + \int_a^b f(x)dx = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a;b): f(c)=0.$$

Cách 3 (Khảo sát nguyên hàm, dùng định lý Rolle):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Đặt } F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C \\ + \text{ f(x) liên tục, F(b) = F(a)}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a;b) \text{ để } F'(c) = f(c) = 0$$

Cách 4 (Khảo sát nguyên hàm, dùng cực trị):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Đặt } F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C = \int f(x)dt + C \\ + \text{ f(x) liên tục, F(x) có cực trị trong (a;b)}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a;b), F'(c) = f(c) = 0$$

Lưu ý. Có thể nói, cách 4 tổng quát hơn cả ((4) $\Rightarrow$ (1), (2), (3)): Ở đâu áp dụng được cách 1, cách 2 hoặc cách 3, ở đó áp dụng được cách 4. Tuy nhiên cách 3, 4 đòi hỏi tính khả vi liên tục của hàm F(x), trong khi cách 1 chỉ cần f(x) liên tục.

+ Cách 2 $\Leftrightarrow$ Cách 3.

Quy tắc đạo hàm tích của hàm số mũ với hàm bất kì

$$\left(fe^{ax}\right)' = e^{ax}\left(af + f'\right)$$

$$\left(f e^{-ax}\right)' = e^{-ax}\left(-af + f'\right)$$

$$\left(f e^{x}\right)' = e^{x}\left(f + f'\right)$$

$$\left(fe^{-x}\right)' = e^{-x}\left(-f + f'\right).$$

Từ đó, nếu thấy có $f'(c) + af(c) = 0$: Nên nhân hai vế với e^{ax};

$f'(c) - af(c) = 0$: Nên nhân hai vế với e^{-ax}...

Các thừa số nên nhân thêm vào hai vế của phương trình là e^{ax}, $x^2, x^2 + 1, \ldots$

Bài 3.5.1. Giả sử f(x) là hàm khả vi trên $[a;b]$, thoả mãn điều kiện $f(a) = f(b) = 0$; $f(x) \neq 0$, $\forall x \in (a;b)$. Chứng minh tồn tại dãy $\{x_n\}$ với $x_n \in (a;b)$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(x_n)}{\left(\sqrt[n]{e} - 1\right)f(x_n)} = 2002.$$

Giải. Hàm $g(x) = e^{-\left(\sqrt[n]{e}-1\right)2002x} f(x)$ thoả mãn định lý Rolle, vậy tồn tại $x_n \in (a;b)$, $g'(x_n) = 0$. Ta có

$$g'(x) = e^{-\left(\sqrt[n]{e}-1\right)2002x}\left(f'(x) - \left(\sqrt[n]{e} - 1\right)2002 f(x)\right).$$

Từ đó $g'(x_n)=0 \Leftrightarrow f'(x_n)-\left(\sqrt[n]{e}-1\right)2002\,f(x_n)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x_n)}{\left(\sqrt[n]{e}-1\right)f(x_n)}=2002 \to 2002 \;\; (n\to\infty).$$

Bài 3.5.2. Cho f(x) liên tục trên $[0;a]$, khả vi trên $(0;a)$ sao cho $f(a)=0$. Chứng minh rằng tồn tại $c\in(0;a)$ để $f'(c)=f(c)\,\dfrac{c-1}{c}$.

Giải. Hàm số $g(x)=x\,f(x)e^{-x}$ liên tục trên $[0;a]$; g(0) = g(a) = 0; g(x) khả vi trên (0;a). Theo định lý Rolle, $\exists c\in(0;a)$: $g'(c)=0$.

Vì $$g'(x)=e^{-x}\left(-xf(x)+f(x)+xf'(x)\right)$$

nên $g'(c)=0 \Leftrightarrow -c\,f(c)+f(c)+c\,f'(c)=0 \Leftrightarrow f'(c)=\dfrac{c-1}{c}f(c)$.

Bài 3.5.3. Cho f(x) liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, khả vi trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ sao cho $f(0)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ và $f^2(x)+\left(f'(x)\right)^2 \neq 0 \;\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Chứng minh rằng tồn tại $c\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ để:

a) $$\mathrm{tg}c=\frac{f(c)+f'(c)}{f(c)-f'(c)}. \qquad (1)$$

b) $$\cos^2 c=\frac{1}{2}-\frac{f(c)f'(c)}{f^2(c)+f'^2(c)}. \qquad (2)$$

Giải.

a) Xét $g(x)=f(x)(\sin x+\cos x)$. Hàm g(x) liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, khả vi trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $g(0)=g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$. Theo định lý Rolle, $\exists c\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ để $g'(c)=0$. Ta có

$$g'(x)=f'(x)(\cos x+\sin x)+f(x)(\cos x-\sin x).$$

Vậy $g'(c)=0 \Leftrightarrow \cos c\left(f'(c)+f(c)\right)=\sin c\left(f(c)-f'(c)\right)$. (3)

Nếu $f(c)-f'(c)=0$, từ (3) suy ra $f'(c)+f(c)=0$.

Vậy $f(c)=f'(c)=0$, mâu thuẫn.

Chia hai của vế (3) cho $\left(f(c)-f^{'}(c)\right)\cos c \neq 0$ ta được (1).

b) Rõ ràng (2) $\Leftrightarrow$ (1).

Bài 3.5.4. Cho f(x) liên tục trên [0;1], khả vi trên (0;1) và $f(0)=f(1)=0$. Chứng minh rằng tồn tại $c\in(0;1)$ sao cho $f^{'}(c)=f(c)$.

Giải. Xét hàm $g(x)=f(x)e^{-x}$, $x\in[0;1]$. Hàm g(x) khả vi trên (0;1), liên tục trên [0;1], g(0) = g(1). Theo định lý Rolle, $\exists c\in(0;1)$, $g^{'}(c)=0 \Leftrightarrow f^{'}(c)=f(c)$.

Để thu được hàm phụ g(x) hữu ích như các ví dụ trên, ngoài những kiến thức sau, bạn có kinh nghiệm gì không ?

$$\left(f\,e^{ax}\right)' = \left(f^{'}+af\right)e^{ax}\ ;$$

$$\left(f\,e^{-ax}\right)' = \left(f^{'}-af\right)e^{-ax}\ ;$$

$$[f.(\cos ax+\sin ax)]' = \cos ax\left(f^{'}+af\right)+\sin ax\left(f^{'}-af\right).$$

Sau đây là một số gợi ý.

Bài 3.5.5. Cho a, b, c $\neq 0$ thoả mãn

$$\frac{a}{7}+\frac{b}{5}+\frac{c}{3}=0 \qquad (*)$$

Chứng minh đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ luôn cắt trục Ox tại ít nhất một điểm có hoành độ nằm trên khoảng (0; 1).

Giải. Ta phải chứng minh phương trình $ax^4+bx^2+c=0$ có nghiệm trên (0;1).

Việc xét nguyên hàm của vế trái ax^4+bx^2+c không giúp ích gì cho ta vì chưa sử dụng được định lý Rolle. Tuy nhiên, nếu nhân hai vế với lượng khác 0 là x^2, phương trình tương đương với $ax^6+bx^4+cx^2=0$, mà việc khảo sát nguyên hàm ở vế trái rất có ích. Thực thế, xét hàm

$$g(x)=\frac{ax^7}{7}+\frac{bx^5}{5}+\frac{cx^3}{3}.$$

g(x) khả vi liên tục trên [0;1]; g(0) = g(1) = 0. Theo định lý Rolle, $\exists x_0\in(0;1)$ để $g^{'}(x_0)=0 \Leftrightarrow ax_0^4+bx_0^2+c=0$.

Bài 3.5.6. Cho hàm f(x) xác định và liên tục trên [a;b] sao cho $f'(x)$, $f''(x)$ liên tục trên (a;b), $f(a)= f(b)=0$. Chứng minh rằng $\forall x \in [a;b], \exists z(x) \in (a;b)$ để

$$f(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(z(x)). \qquad (*)$$

Giải. Rõ ràng khẳng định đúng với x = a, x = b, nên ta chỉ việc chứng minh cho $x \in (a;b)$. Tất nhiên

$$(*) \Leftrightarrow f(x)-\frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(z(x))=0. \qquad (1)$$

Nếu ta nhìn vế trái của (1) như là giá trị của hàm $f(t)-\frac{(t-a)(t-b)}{2}f''(z(t))$ tại điểm t = x thì việc áp dụng định lý Rolle không thành công bởi vì vẫn còn z(t) trong biểu thức f''.

Ta mong muốn áp dụng định lí Rolle - có thể là nhiều lần - cho hàm g(x) phù hợp. Bây giờ ta nhìn (*) dưới dạng

$$\frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}=f''(z(x)) \text{ hay}$$

$$\left.\left(\frac{-2f(x)}{(x-a)(x-b)}+f''(t)\right)\right|_{t=z(x)}=0$$

Từ đó, hàm g(t) phù hợp (nếu chưa đoán được, hãy lấy nguyên hàm hai lần !) là

$$g(t)=f(t)-(t-a)(t-b)\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}.$$

Quả vậy, g(a) = g(x) = g(b) = 0 nên theo định lí Rolle, $g'(t)$ triệt tiêu tại ít nhất hai điểm $c_1 \in (a;x)$ và $c_2 \in (x;b)$. Lại theo định lý Rolle, $g''(t)$ triệt tiêu tại ít nhất một điểm $z=z(x)\in(c_1;c_2)\subset(a;b)$. Vì

$$g''(t)=f''(t)-2\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}$$

nên $g''(z(x))=0$, hay $f''(z(x))=\frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}$. Suy ra đpcm.

Bài 3.5.7. Cho $P_n(x)=a_0x^n + a_1x^{n-1}+...+a_n \quad (a_0 \neq 0)$ là đa thức bậc n với các hệ số thực và giả sử $P_n(x)$ chỉ có nghiệm thực. Chứng minh rằng đạo hàm mọi cấp của $P_n(x)$ chỉ có nghiệm thực.

Giải.

* Giả sử $P_n(x)$ có n nghiệm thực khác nhau $x_1 < x_2 < ... < x_n$. $P'_n(x)$ là đa thực bậc n - 1, hơn nữa theo định lý Rolle, nó có nghiệm $c_1, c_2, ..., c_{n-1}$ với $c_1 \in (x_1; x_2), ..., c_{n-1} \in (x_{n-1}; x_n)$.

Như vậy $c_1 < c_2 < ... < c_{n-1}$ là tất cả các nghiệm của $P'_n(x)$.

Tương tự với các đạo hàm tiếp theo.

* Bây giờ giả sử $P_n(x)$ có các nghiệm $x_1, ..., x_\lambda$ bội $k_1, ... k_\lambda$ tương ứng: $P_n(x) = (x - x_1)^{k_1} ... (x - x_\lambda)^{k_\lambda}$

với $x_1 < ... < x_\lambda$; $k_i \in N^*; k_1 + ... + k_\lambda = n$.

Theo định lý Rolle, $P'_n(x)$ có λ - 1 nghiệm $c_1, ..., c_{\lambda-1}$ với $c_1 \in (x_1; x_2), ..., c_{\lambda-1} \in (x_{\lambda-1}; x_\lambda)$.

Mặt khác, tại x = x_1 ta có

$$P_n(x) = (x - x_1)^{k_1} Q(x), \qquad Q(x) \text{ là đa thức.}$$
$$P'_n(x) = (x - x_1)^{k_1 - 1} \left[k_1 Q(x) + Q'(x)\right], \ k_1 \geq 1.$$

Suy ra x_1 là nghiệm bội của $P'_n(x)$ với số bội ít nhất bằng $(k_1 - 1)$. Tương tự với $x_2, ..., x_\lambda$.

Vì $(k_1 - 1) + ... + (k_\lambda - 1) + (\lambda - 1) = n - 1$ nên x_i là nghiệm bội của $P'_n(x)$ với số bội đúng bằng $k_i - 1$.

Tóm lại, đa thức $P'_n(x)$ có nghiệm là nghiệm bội của $P_n(x)$ với số bội bớt đi 1 và các nghiệm đơn mới nằm giữa các nghiệm của $P_n(x)$.

Tương tự với các đạo hàm tiếp theo.

Nhận xét. Tất cả các nghiệm của các đạo hàm của $P_n(x)$ đều nằm trong $[x_1; x_\lambda]$.

Bài 3.5.8. Chứng minh tất cả các nghiệm của đa thức Lagrange

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right]$$

đều thực và nằm trong $(-1; 1)$.

Giải. Xét $f(x) = \dfrac{1}{2^n n!} (x^2 - 1)^n = \dfrac{1}{2^n n!} (x - 1)^n (x + 1)^n$.

f(x) là đa thức bậc 2n, cả hai điểm x = 1 và x = -1 đều là nghiệm bội n. Theo Bài 3.5.7, $P_n(x)=f^{(n)}(x)$ có n nghiệm thực phân biệt trong $(-1;1)$(lưu ý ± 1 không là nghiệm của $f^{(n)}(x)$), $P_n(x)$ lại là đa thức bậc n nên n nghiệm đó là toàn bộ các nghiệm của $P_n(x)$.

Bài 3.5.9. Cho đa thức với hệ số thực $P(x)$ bậc n, (n ≥ 1) có m nghiệm thực kể cả bội. Chứng minh rằng đa thức

$$Q(x)=(x^2+1)P(x)+P'(x)$$

có ít nhất m nghiệm thực kể cả bội.

Giải. Xét phương trình

$$Q(x)=(x^2+1)P(x)+P'(x)=0. \qquad (1)$$

$$(1)\Leftrightarrow e^{\left(\frac{x^3}{3}+x\right)}\left[(x^2+1)P(x)+P'(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[e^{\left(\frac{x^3}{3}+x\right)}P(x)\right]'=0 \qquad (2)$$

Số nghiệm của phương trình $e^{\left(\frac{x^3}{3}+x\right)}P(x)=0$ là m, theo định lí Rolle, số nghiệm thực của (2) (cũng chính là của (1)) ít nhất là m - 1 (chứng minh như Bài 3.5.7). Ta sẽ chứng minh thực ra (1) có ít nhất m nghiệm thực.

Trường hợp 1: m chẵn. Nếu n lẻ, đa thức bậc lẻ P(x) có số nghiệm thực kể cả bội là lẻ, nói khác m lẻ, mâu thuẫn. Vậy n phải chẵn. Từ đó Q(x) là đa thức bậc chẵn, vậy số nghiệm thực kể cả bội của nó là chẵn. Nó có ít nhất m -1 nghiệm, trong khi m - 1 là lẻ. Vậy Q(x) có ít nhất m nghiệm.

Trường hợp 2: m lẻ. Nếu n chẵn thì P(x) là đa thức bậc chẵn, nó có số chẵn nghiệm thực kể cả bội, nói khác m chẵn, mâu thuẫn.

Vậy n phải là lẻ. Q(x) là đa thức bậc n + 2 là một số lẻ, nó có số lẻ các nghiệm thực. Lại biết Q(x) có ít nhất m - 1 (là một số chẵn) nghiệm thực. Vậy Q(x) có ít nhất m nghiệm thực kể cả bội.

Bài 3.5.10. Cho n là số nguyên dương bất kì; $a_0 < a_1 < ... < a_n$ là n + 1 số thực tùy ý còn $k_0, k_1, ..., k_n$ là các số thực mà $k_n \neq 0$. Chứng minh rằng phương trình

$$k_0x^{a_0} + k_1x^{a_1} + ... + k_nx^{a_n} = 0$$

có nhiều nhất n nghiệm dương.

Giải. Ta chứng minh theo quy nạp. Lưu ý rằng chỉ xét với x > 0. Với $n = 1$ phương trình trở thành

$$k_0x^{a_0} + k_1x^{a_1} = 0 \Leftrightarrow k_0 + k_1x^{a_1 - a_0} \Leftrightarrow -\frac{k_0}{k_1} = x^{a_1 - a_0}.$$

Phương trình này có nhiều nhất một nghiệm dương (nếu $-k_0/k_1 > 0$ thì nghiệm dương của nó là $(-k_0/k_1)^{1/(a_1 - a_0)}$).

Giả sử khẳng định đúng với số nguyên dương n.

Cho $b_0 < b_1 < ... < b_n < b_{n+1}$ và cho $\lambda_0, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}$ là n + 2 số thực tùy ý với $\lambda_{n+1} \neq 0$, xét phương trình

$$\lambda_0x^{b_0} + \lambda_1x^{b_1} + ... + \lambda_nx^{b_n} + \lambda_{n+1}x^{b_{n+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^{b_0}\left[\lambda_0 + \lambda_1x^{b_1 - b_0} + ... + \lambda_nx^{b_n - b_0} + \lambda_{n+1}x^{b_{n+1} - b_0}\right] = 0$$

Xét x > 0, phương trình này tương đương với

$$\lambda_0 + \lambda_1x^{b_1 - b_0} + ... + \lambda_{n+1}x^{b_{n+1} - b_0} = 0.$$

Đặt vế trái của phương trình này là f(x), f(x) khả vi vô hạn với x >0 và

$$f'(x) = \lambda_1(b_1 - b_0)\,x^{b_1 - b_0 - 1} + ... + \lambda_{n+1}(b_{n+1} - b_0)\,x^{b_{n+1} - b_0 - 1}.$$

Nhận thấy rằng: $\begin{cases} b_1 - b_0 - 1 < ... < b_{n+1} - b_0 - 1; \\ \lambda_{n+1}(b_{n+1} - b_0) \neq 0. \end{cases}$

Theo giả thiết quy nạp, phương trình $f'(x) = 0$ có không quá n nghiệm dương, kí hiệu là $x_1, ... x_N$: $0 < x_1 < ... < x_N$; $N \leq n$.

Theo định lí Rolle, phương trình $f(x) = 0$ chỉ có thể có nhiều nhất một nghiệm trên mỗi nửa khoảng $(0; x_1]$, $(x_1; x_2], ..., (x_N + \infty)$. Nói khác, f(x) có nhiều nhất N + 1 (≤ n+1) không điểm. Vậy khẳng định đúng với n+1, và do đó đúng $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Bài 3.5.11. Chứng minh rằng tồn tại số thực $x \in (0;1)$ sao cho

$$\int_x^1 \frac{t^{2000}dt}{(1+t)(1+t^2)...(1+t^{2001})} = \frac{x^{2001}}{(1+x)(1+x^2)...(1+x^{2001})}.$$

Giải.

Cách 1 (Dùng định lí về sự triệt tiêu của hàm liên tục).

Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng

$$f(x)=\int_x^1 \frac{t^{2000}dt}{(1+t)...(1+t^{2001})}-\frac{x^{2001}}{(1+x)...(1+x^{2001})}=0$$

Rõ ràng f(x) liên tục trên [0;1];

$f(0)=\int_0^1 \frac{t^{2000}dt}{(1+t)...(1+t^{2001})}>0$; $f(1)=\frac{-1}{2^{2001}}<0$. Vậy tồn tại $x\in(0;1)$ để f(x) = 0 (điều phải chứng minh).

Cách 2 (Dùng định lí Rolle).

Đặt $h(t)=\frac{t^{2000}}{(1+t)...(1+t^{2001})}$ là hàm liên tục trên [0;1].

Viết phương trình đã cho dưới dạng

$$\int_x^1 h(t)dt - xh(x)=0 \Leftrightarrow \left(x\int_x^1 h(t)dt\right)'=0$$

Xét hàm $g(x)=x\int_x^1 h(t)dt$.

$g(x)$ khả vi liên tục trên [0;1], g(0) = g(1) = 0. Theo định lí Rolle, $\exists c\in(0;1)$ để $g'(c)=0$ hay $\int_c^1 h(t)dt - ch(c)=0$ (điều phải chứng minh).

Bài 3.5.12. Cho n + 1 số thực $c_0, c_1, ..., c_n$ thoả mãn

$$c_0+\frac{1}{2}c_1+...+\frac{1}{n+1}c_n=0.$$

Chứng minh rằng phương trình $c_0+c_1x+...+c_nx^n=0$ có ít nhất một nghiệm giữa 0 và 1.

Giải. Xét hàm

$$g(x)=c_0x+c_1\frac{x^2}{2}+...+c_n\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Hàm g(x) khả vi liên tục trên [0;1]; g(0) = g(1) = 0. Theo định lí Rolle, $\exists a\in(0;1)$ để $g'(a)=0$ hay $c_0+c_1a^1+...+c_na^n=0$ (đpcm).

Cách 2. Từ giả thiết suy ra

$$\int_0^1 \left(c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n\right) dx = \left(c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + ... + c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_0^1 = 0$$

Theo định lí trung bình về tích phân, (xem mục §4.4), tồn tại $x_0 \in (0;1)$ để

$$c_0 + c_1 x_0 + ... + c_n x_0^n = 0 \text{ (đpcm).}$$

Bài 3.5.13. Cho $a_1, a_2, ..., a_N$ là các số thực và $a_N \neq 0$ còn hàm f(x) cho bởi
$f(x) = a_1 \sin 2\pi x + a_2 \sin 4\pi x + ... + a_N \sin 2N\pi x$.

Chứng minh rằng số nghiệm của phương trình $f^{(n)}(x) = 0$ trên khoảng [0;1) là không giảm theo n và dần đến 2N khi $n \to \infty$.

Giải. Theo định lí Rolle, có ít nhất một không điểm của $f'(x)$ giữa hai không điểm phân biệt của f(x).

Ở đây f(x) tuần hoàn chu kì 1. Vậy số không điểm nói đến trong bài là không giảm theo n.

Đặt $u = e^{2\pi x i}$ là một số phức $\Rightarrow \sin 2k\pi x = \frac{1}{2i}\left(u^k - u^{-k}\right)$.

Vậy $f(x) = \frac{1}{2i}\left(a_1 u^1 + ... + a_N u^N - a_1 u^{-1} - ... - a_N u^{-N}\right)$.

Xét hàm số $F(z) = \frac{1}{2i}\left(a_1 z^1 + ... + a_N z^N - a_1 z^{-1} - ... - a_N z^{-N}\right)$

$= \frac{1}{2iz^N}\left(-a_N - ... - a_1 z^{N-1} + a_1 z^{N+1} + ... + a_N z^{2N}\right)$, $z \in \mathbf{C}$

Dễ thấy $F^{(n)}(z) = \frac{1}{z^{N+n}} Q_{2N}(z)$

trong đó $Q_{2N}(z)$ là đa thức bậc 2N của z. Vậy $F^{(n)}(z)$ có không quá 2N nghiệm phức, suy ra phần thực f(x) của nó có không quá 2N nghiệm thực.

Với n = 4k+1 ta được

$$f^{(n)}(x) = a_1 (2\pi)^n \cos 2\pi x + ... + a_N (2N\pi)^n \cos 2N\pi x .$$

Thấy rằng $\cos 2N\pi x$ đan dấu và bằng ± 1 tại 2N+1 điểm liên tiếp $0 ; \frac{1}{2N} ; ... ; \frac{2N}{2N}$ trên [0;1], vậy tại các điểm này $f^{(n)}(x)$ cùng dấu với số hạng cuối cùng $a_N (2N\pi)^n \cos 2N\pi x$

(vì $2^n |a_1| + 4^n |a_2| + ... + (2(N-1))^n |a_{N-1}| < (2N)^n |a_N|$ với n đủ lớn).

Lại áp dụng định lí Rolle, $f^{(n+1)}(x)$ có ít nhất 2N nghiệm trên (0;1). Suy ra đpcm.

§3.5b. Định lí Lagrăng

Bài 3.5.14. Cho f(x) khả vi liên tục trên [0;1], f(0) = 0 ; f(1) = 1. Chứng minh rằng với mọi $k_1, k_2 > 0, \exists x_1, x_2 :\ 0 \le x_1 < x_2 \le 1$ sao cho $\dfrac{k_1}{f'(x_1)} + \dfrac{k_2}{f'(x_2)} = k_1 + k_2$.

Giải. Chia 2 vế cho $k_1 + k_2$ ta được

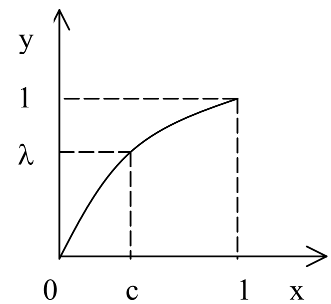
$$\frac{k_1}{(k_1+k_2)f'(x_1)} + \frac{k_2}{(k_1+k_2)f'(x_2)} = 1 \text{ hay } \frac{\lambda}{f'(x_1)} + \frac{1-\lambda}{f'(x_2)} = 1 \qquad (*)$$

trong đó $\lambda = \dfrac{k_1}{k_1+k_2} \in (0;1)$.

Với $c \in (0;1)$ chọn sau, theo định lí Lagrange, $\exists x_1 \in (0;c); x_2 \in (c;1)$ thoả mãn

$$f'(x_1) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(c)}{c};$$

$$f'(x_2) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = \frac{1 - f(c)}{1 - c}.$$



Khi ấy (*) được viết lại dưới dạng

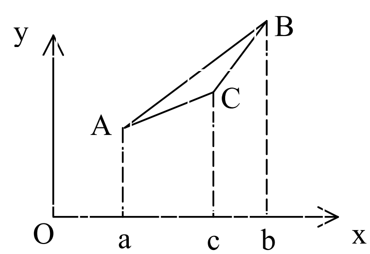
$$\frac{\lambda c}{f(c)} + \frac{(1-\lambda)(1-c)}{1-f(c)} = 1.$$

Ta chỉ cần chọn c mà f(c) = λ. Điều này thực hiện được do f(x) liên tục còn $\lambda \in (0;1)$.

Bài 3.5.15. Giả sử f(x) liên tục và không tuyến tính trên $[a;b]$, có đạo hàm hữu hạn trên (a;b). Chứng minh rằng tồn tại $\xi \in (a;b)$ sao cho

$$|f'(\xi)| > \left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| = k.$$

Giải. Xét đường thẳng (Δ) qua $A(a; f(a)), B(b; f(b))$. Vì f(x) không là hàm tuyến tính nên có điểm c ∈ (a;b) để $C(c; f(c)) \overline{\in} (\Delta)$. Khi đó xảy ra



+ Hoặc là $\left|\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}\right| > \left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| = k$; khi ấy theo định lí Lagrange, $\exists \xi \in (c;b)$ để $\left|f'(\xi)\right| = \left|\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}\right| > k$;

+ Hoặc là $\left|\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}\right| > \left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| = k$; khi ấy theo định lí Lagrange, $\exists \xi \in (a;c)$ để $\left|f'(\xi)\right| = \left|\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}\right| > k$;

Bài 3.5.16. Cho f(x) khả vi trên [a;b], f(a) = 0 và tồn tại A > 0, $\alpha \ge 1$ sao cho $\left|f'(x)\right| \le A\left|f(x)\right|^{\alpha}, \forall x \in [a;b]$.

Chứng minh $f(x) \equiv 0$ trên [a;b].

Giải. Giả sử ngược lại, $\exists x_0 \in (a;b]$ sao cho $f(x_0) \ne 0$. Có thể coi $f(x_0) > 0$. Đặt $E = \{x \in [a;x_0] : f(x) = 0\}$. Rõ E không trống (vì chứa x = a), bị chặn. Đặt $x_1 = \operatorname{Sup}E$. Do f(x) liên tục, dễ thấy $f(x_1) = 0$, đồng thời $x_1 < x_0$;f(x) > 0, $\forall x \in (x_1; x_0]$.

+ Với $\alpha = 1$, xét hàm $g(x) = \ln(f(x)), x \in (x_1;x_0]$.

Theo công thức số gia giới nội, ta có

$$\left|g(x) - g(x_0)\right| = \left|g'(c)\right|\left|x - x_0\right| \le A\left|x - x_0\right| \le A\left|x_1 - x_0\right| \qquad (*)$$

trong khi đó $$\lim_{x \to x_1^+}\left|g(x) - g(x_0)\right| = +\infty \qquad (**)$$

+ Với $\alpha > 1$, xét hàm $g(x) = \dfrac{1}{1-\alpha}(f(x))^{1-\alpha}$, (*) và (**) cũng xảy ra, mâu thuẫn.

Bài 3.5.17. Cho f(x) xác định và khả vi trên $\mathbf{R}$, f(a) = 0 và tồn tại A > 0 sao cho

$$\left|f'(x)\right| \le A\sin^2 f(x), \forall x \in \mathbf{R}.$$

Chứng minh rằng $f(x) \equiv 0$.

Giải. Ta có $\left|f'(x)\right| \le A\sin^2 f(x) \le A(f(x))^2$.

Áp dụng Bài 3.5.16 với $\alpha = 2$.

Bài 3.5.18. Cho f(x) khả vi trên [a; b] sao cho phương trình f(x) = 0 có nghiệm trên [a;b] và $\left|f'(x)\right| \le f(x)$, $\forall x \in [a;b]$.

Chứng minh rằng f(x) = 0, $\forall x \in [a;b]$.

Giải. Ta có thể giải bài này giống như Bài 3.5.16. Sau đây là cách giải khác. Giả sử $x_0 \in [a;b], f(x_0)=0$. Từ công thức số gia giới nội, $\forall x \in [a;b]$ có c giữa x_0 và x để

$$f(x)=f(x_0)+f'(c)(x-x_0)=f'(c)(x-x_0) \qquad (*)$$

Xét đoạn $G=\left[x_0-\frac{1}{2}; x_0+\frac{1}{2}\right]\cap[a;b]$. Vì $|f(x)|$ liên tục trên G nên đạt cực đại trên G, do đó tồn tại $x_1 \in G$:

$$|f(x_1)| = \underset{x\in G}{\mathrm{Max}}|f(x)| \;.$$

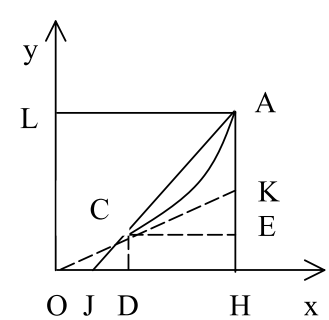
Từ (*), $|f(x_1)| = \left|f'(c_1)(x_1-x_0)\right| \le |f(c_1)|\,|(x_1-x_0)| \le \frac{1}{2}|f(x_1)|$

$$\Rightarrow f(x_1)=0 \;\Rightarrow f(x)=0 \quad \forall x\in G\,.$$

Như vậy, tại một điểm $x_0 \in [a;b]$ mà f(x_0) = 0 thì f(x) = 0 trên toàn bộ lân cận (trong [a;b]) với bán kính 1/2 của nó. Xét dãy điểm x_0 lan dần về hai phía của đoạn [a;b], sau một số hữu hạn bước ta sẽ được f(x) = 0 trên [a;b].

Bài 3.5.19. Cho hàm $f:[0;1]\to[0;1]$ liên tục và là hàm khả vi trong khoảng (0;1); f(0) = 0, f(1) = 1. Chứng minh rằng tồn tại $a, b \in (0;1)$, $a \ne b$ sao cho $f'(a)f'(b)=1$.

Phân tích. Theo định lí Lagrăng, chỉ việc chỉ ra có điểm C trên cung OA sao cho



$$\frac{CD}{OD}\,\frac{AE}{CE}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{KH}{OH}\,\frac{AH}{JH}=1 \Leftrightarrow KH = JH$$

Chọn C là giao điểm cung OA với LH nói khác hoành độ C thoả mãn phương trình f(x) = 1-x hay f(x) + x - 1 = 0

Giải. Xét phương trình f(x) = 1 - x hay g(x) = 0 với $g(x)=f(x)+x-1$. Hàm g(x) liên tục trên [0;1], g(0) g(1) = -1 nên $\exists x_0 \in (0;1), g(x_0)=0$ hay $f(x_0)= 1-x_0$. Từ đó

$$\frac{f(x_0)}{1-x_0}=1;\ \frac{1-f(x_0)}{x_0}=1$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_0)-0}{x_0}\ \frac{1-f(x_0)}{1-x_0}=1.$$

Theo định lí Lagrange, tồn tại $a \in (0;x_0);\ b \in (x_0;1)$ sao cho $f^{'}(a)=\dfrac{f(x_0)-0}{x_0};\quad f^{'}(b)=\dfrac{1-f(x_0)}{1-x_0}$. Như vậy a, b là hai điểm cần tìm.

Bài 3.5.20. Cho hàm f(x) có $f^{'}(x)$ đồng biến trên [a;b] với $f(a)=\dfrac{1}{2}(a-b);\ \ f(b)=\dfrac{1}{2}(b-a)$.

Chứng minh rằng tồn tại α, β, γ phân biệt trong (a;b) sao cho

$$f^{'}(\alpha)\, f^{'}(\beta)\, f^{'}(\gamma)=1.$$

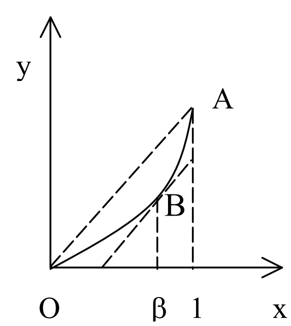
Giải.

Cách 1. Bằng phép đổi biến ta đưa về trường hợp a = 0, b = 1, f(0) = 0; $f(1)=1$, $f^{'}(x)$ đồng biến.

Theo định lí Lagrange, $\exists\, \beta \in (0;1)$ để $f^{'}(\beta)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$.

Đặt $T=\dfrac{f(\beta)-f(0)}{\beta-0}\ \dfrac{f(1)-f(\beta)}{1-\beta}-1$

$=\dfrac{f(\beta)}{\beta}\ \dfrac{f(1)-f(\beta)}{1-\beta}-1$



* Nếu T = 0, theo định lí Lagrange, $\exists \alpha \in (0;\beta), \gamma \in (\beta;1)$ để

$f^{'}(\alpha)=\dfrac{f(\beta)}{\beta};\ f^{'}(\gamma)=\dfrac{f(1)-f(\beta)}{1-\beta}$.

α, β, γ là 3 điểm cần tìm.

* Nếu T > 0, theo định lí Lagrange, $\exists\, \alpha \in (0;\beta)$: $f^{'}(\alpha)=\dfrac{f(\beta)}{\beta}$.

Bây giờ ta đặt $g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\,\dfrac{f(\beta)}{\beta}-1 & \text{khi}\, x \in (\beta;1]; \\ \dfrac{f(\beta)}{\beta}-1 & \text{khi } x=\beta. \end{cases}$

Nhận thấy $g(1) = T > 0$; $g(\beta) = \dfrac{f(\beta)}{\beta} - 1 = f'(\alpha) - 1 < f'(\beta) - 1 = 0$ (do $f'(\beta) = 1$; $f'(x)$ đồng biến); g(x) liên tục. Vậy có $c \in (\beta;1)$ để g(c) = 0

hay $\dfrac{f(c)-f(\beta)}{c-\beta} \; \dfrac{f(\beta)}{\beta} = 1$.

Theo định lí Lagrange, $\exists\gamma \in (\beta;c)$ để $= \dfrac{f(c)-f(\beta)}{c-\beta} = f'(\gamma)$, suy ra $f'(\alpha)f'(\gamma) = 1$.

Ba điểm α, β, γ là 3 điểm cần tìm .

* Nếu T < 0, xét $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} \; \dfrac{f(1)-f(\beta)}{1-\beta} - 1$ trên $[\beta;1]$.

Cách 2. Theo định lí lagrange, $\exists\beta \in (a;b)$ để $f'(\beta) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 1$.

Sử dụng phương pháp trực quan như ở Bài 3.5.19 ta nên xét $g(x) = f(x) + x - \dfrac{a+b}{2}$. Hàm g(x) liên tục trên [a;b], $g(a)g(b) = -(a-b)^2 < 0$, suy ra tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $g(x_0) = 0$ hay $f(x_0) = \dfrac{a+b}{2} - x_0$. Lại áp dụng định lí Lagrange, tồn tại $\alpha \in (a;x_0)$; $\gamma \in (x_0;b)$ (suy ra $\alpha \neq \gamma$) sao cho

$$1 = \frac{f(x_0)-f(a)}{b-x_0} \; \frac{f(b)-f(x_0)}{x_0-a} = \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} \; \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0} = f'(\alpha)f'(\gamma).$$

Từ đó $f'(\alpha)\; f'(\beta)\; f'(\gamma) = 1$

Ta còn phải chứng minh α, β, γ khác nhau. Như đã nói, $\alpha \neq \gamma$. Giả sử $\beta = \gamma \Rightarrow f'(\beta) = f'(\gamma) = 1 \Rightarrow f'(\alpha) = 1$. Do $f'(x)$ đồng biến suy ra $\alpha = \beta = \gamma$, mâu thuẫn. Vậy $\beta \neq \gamma$, tương tự $\beta \neq \alpha$.

Bài 3.5.21. Cho f(x) khả vi trên [a;b] (a <b) và thoả mãn các điều kiện

$$f(a) = \frac{1}{2}(a-b); \quad f(b) = \frac{1}{2}(b-a); \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0.$$

Chứng minh rằng có các điểm α, β, γ phân biệt trong (a;b) sao cho

$$f'(\alpha)\,f'(\beta)f'(\gamma) = 1 .$$

Giải. Làm hoàn toàn như Bài 3.5.20, Cách 2 để chứng minh $\exists\, \alpha, \beta, \gamma$: $f'(\alpha)f'(\beta)f'(\gamma) = 1$.

Bây giờ ta chứng minh α, β, γ khác nhau. Ta có

$f(x_0)=\frac{a+b}{2}-x_0$; $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0 \Rightarrow x_0 \neq \frac{a+b}{2}$. Từ đó

$$f'(\alpha)=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}=\frac{\frac{a+b}{2}-x_0-\frac{1}{2}(a-b)}{x_0-a}=\frac{b-x_0}{x_0-a}\neq 1=f'(\beta).$$

Vậy $\alpha \neq \beta$. Tương tự, $\gamma \neq \beta$.

Bài 3.5.22. Cho hàm f(x) xác định trên (a;b); còn c là một điểm trên khoảng $(a;b)$. Chứng minh rằng nếu $f''(c)$ xác định thì

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h^2}=f''(c).$$

Tìm một ví dụ cho thấy $f''(c)$ không xác định nhưng vẫn có giới hạn ở trên.

Giải. Vì $f''(c)$ xác định nên có một lân cận đủ nhỏ của c, trên đó $f'(x)$ xác định. Với h > 0 đủ nhỏ, theo định lí Lagrange,

$\exists x_h \in (c-h;c); y_h \in (c;c+h)$ để

$$f(c)-f(c-h)=hf'(x_h);\ f(c+h)-f(c)=hf'(y_h).$$

Vậy $$\frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h^2}-f''(c)$$

$$=\frac{1}{h}\left[f'(y_h)-f'(x_h)\right]-f''(c)=\frac{y_h-c}{h}\left[\frac{f'(y_h)-f'(c)}{y_h-c}-f''(c)\right]+$$

$$\frac{c-x_h}{h}\left[\frac{f'(c)-f'(x_h)}{c-x_h}-f''(c)\right]-\left[1-\frac{y_h-x_h}{h}\right]f''(c).$$

Vì $\left|\frac{y_h-c}{h}\right|<1$; $\left|\frac{c-x_h}{h}\right|<1$; $\left|1-\frac{y_h-x_h}{h}\right|\leq 2$;

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(y_h)-f'(c)}{y_h-c}-f''(c)\right]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(c)-f'(x_h)}{c-x_h}-f''(c)\right]=0$$

nên bài toán được giải trong trường hợp $f''(c)=0$.

Trường hợp $f''(c)\neq 0$, thực hiện tương tự như trên với hàm

$$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}f''(c)\,(x-c)^2.$$

Bài 3.5.23. Chứng minh rằng nếu x > 0 thì có hàm $\theta(x)$ thoả mãn

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$

sao cho $\frac{1}{4}\le\theta(x)<\frac{1}{2}$, đồng thời $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)=\frac{1}{4}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

Giải. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}\Leftrightarrow\theta(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{x(1+x)}-x\right)$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}.$$

Vậy $\frac{1}{4}\le\theta(x)<\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 0^+}\theta(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x(1+x)}-x\right)=\frac{1}{4};$$

$$\lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}.$$

Lưu ý. Theo công thức số gia giới nội, ta chỉ biết rằng

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{(1+x)-x}{2\sqrt{x+\theta(x)}}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}\quad\text{với } 0<\theta(x)<1.$$

Tuy nhiên, trong trường hợp cụ thể ở đây, ta có thêm những thông tin về giá trị trung gian $\theta(x)$. Bài sau cho thêm một ví dụ dạng này.

Bài 3.5.24. Giả sử với n > 1, x > 0 ta có

$$(x+1)^{1/n}-x^{1/n}=\frac{1}{n}(x+\theta(x))^{(-1+1/n)},\ 0<\theta(x)<1.$$

Tìm các giới hạn của $\theta(x)$ khi $x\to+0$ và khi $x\to+\infty$.

Giải. Từ giả thiết ta suy ra

$$\theta(x)=\left[\left((1+x)^{1/n}-x^{1/n}\right)n\right]^{\frac{n}{1-n}}-x.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)=n^{\frac{n}{1-n}}$.

Mặt khác theo quy tắc thay VCB tương đương, ta được

$$\theta(x)=\left[\; x^{1/n}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/n}-1\right)n\;\right]^{\frac{n}{1-n}}-x$$

$$=x^{\frac{1}{1-n}}\,n^{\frac{n}{1-n}}\left[1+\frac{1}{nx}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-1\right]^{\frac{n}{1-n}}-x$$

$$=x^{\frac{1}{1-n}}\;n^{\frac{n}{1-n}}\left(\frac{1}{nx}\right)^{\frac{n}{1-n}}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{1}{x}\,\frac{n}{1-n}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]-x$$

$$=x\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{1}{x}\,\frac{n}{1-n}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]-x\to\frac{1}{2}\;\left(x\to+\infty\right).$$

§3.6. KHAI TRIỂN TAYLOR

§3.6a. Phần dư

Bài 3.6.1. Cho $f:[0;+\infty]\to(0;1]$ khả vi vô hạn lần và $(-1)^k f^{(k)}(x)\geq 0,\ \forall k=0,1,...,\ \forall x\geq 0.$

Đặt $$g(x)=\frac{1-f(x)}{x},\ x>0.$$

Chứng minh rằng $(-1)^k g^{(k)}(x)\geq 0;\ \ \forall k\in\mathbf{N}.$

Giải. Rõ ràng khẳng định đúng với k = 0. Lại có

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt\ =f(0)+x\int_0^1 f'(xt)dt\,.$$

Vậy $$g(x)=\frac{1-f(0)}{x}-\int_0^1 f'(xt)dt$$

Do f(x) khả vi vô hạn lần nên ta có thể đạo hàm mọi cấp dưới dấu tích phân, vậy với $k\geq 1$ ta có

$$g^{(k)}(x)=(1-f(0))(-1)(-2)...(-k)x^{-(k+1)}-\int_0^1 t^k f^{(k+1)}(xt)dt\ \ .$$

Từ đó theo giả thiết

$$(-1)^k g^{(k)}(x)=(1-f(0))(-1)^{2k}k!\ x^{-(k+1)}+\int_0^1 t^k(-1)^{k+1}f^{(k+1)}(xt)dt\geq 0\,.$$

(điều phải chứng minh).

Bài 3.6.2. Giả sử $f:\mathbf{R}\to[0;+\infty)$ khả vi vô hạn lần sao cho

i) Tồn tại $L > 0$, $\left|f^{(n)}(x)\right| \le L$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$;

ii) $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Chứng minh rằng $f(x) \equiv 0$.

Giải. Ta sẽ chỉ ra rằng $\forall k \in \mathbf{N}$, $\exists$ dãy $\{x_{ki}, i = 1,2...\}$ (i là chỉ số thứ 2) giảm đến 0, sao cho

$$f^{(k)}(x_{k1}) = f^{(k)}(x_{k2}) = ... = 0 \qquad (*)$$

Quả vậy, do (ii), (*) đúng với k = 0 trong đó $x_{0i} = 1/i$. Bây giờ giả sử (*) đúng với k. Theo định lý Rolle, có các điểm $x_{(k+1)1} \in (x_{k2}; x_{k1})$; $x_{(k+1)2} \in (x_{k3}; x_{k2})$,... để $f^{(k+1)}(x_{(k+1)i}) = 0$. Rõ ràng dãy $\{x_{(k+1)i}\}$ giảm đến 0.

Vậy theo nguyên lí quy nạp, (*) đúng $\forall k \in \mathbf{N}$.

Do tính liên tục của $f^{(k)}(x)$ nên $f^{(k)}(0) = 0$. Từ đó, khai triển Maclaurin của f(x) có dạng

$$f(x) = 0 + ... + 0 + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, (0 < \theta < 1).$$

Từ (i), $\quad |f(x)| \le \frac{L|x|^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

Cho $n \to \infty$ ta được f(x) = 0.

Bài 3.6.3. Giả sử f(x) là hàm chẵn, khả vi 2 lần và $f''(0) \neq 0$. Chứng minh rằng x = 0 là điểm cực trị.

Giải. Từ chỗ f(-x) = f(x) suy ra $-f'(-x) = f'(x)$. Vậy $-f'(0) = 0$. Theo công thức Taylor

$$f(x) = f(0) + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

Nếu $f''(0) > 0$ thì $\frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) > 0$ với x đủ nhỏ, x = 0 là điểm cực tiểu. Tương tự, nếu $f''(0) < 0$ thì x = 0 là điểm cực đại.

§3.6b. Chọn điểm khai triển - điểm áp dụng.

Bài 3.6.4. Giả sử f(x) khả vi 2 lần; $f(0)=f(1)=0$; $\underset{x\in[0;1]}{\text{Min}} f(x)=-1$.

Chứng minh rằng $\underset{x\in[0;1]}{\text{Max}} f''(x)\geq 8$.

Giải. Vì f(x) liên tục nên có điểm $a\in[0;1]$ để $f(a)=\underset{x\in[0;1]}{\text{Min}} f(x)=-1$. Rõ ràng $a\in(0;1)$, từ đó $f'(a)=0$.

Khai triển Taylor tại a ta được

$$f(x)=-1+\frac{f''(a+\theta(x-a))}{2}(x-a)^2\ ,\ \ (0<\theta<1).$$

Với x = 0: $\qquad 0=-1+\dfrac{f''(c_1)}{2}a^2\ ,\ \ 0<c_1<a;$

Với x = 1: $\qquad 0=-1+\dfrac{f''(c_2)}{2}(1-a)^2\ ,\ \ a<c_2<1.$

Từ đó $\qquad f''(c_1)=\dfrac{2}{a^2}$; $f''(c_1)\geq 8$, nếu $a\leq\dfrac{1}{2}$;

$$f''(c_2)=\frac{2}{(1-a)^2};\ f''(c_2)\geq 8,\ \text{nếu } a>\frac{1}{2}.$$

Bài 3.6.5. Cho hàm f(x) khả vi 3 lần trên **R** đồng thời $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)$ dương $\forall x\in\mathbf{R}$.

Chứng minh rằng tồn tại a > 0 sao cho $f(x)>ax^2\ ,\ \forall x>0$.

Giải. Theo công thức Taylor, với x > 0 ta có

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\theta)}{6}x^2\ ,\ \ 0<\theta<x.$$

Từ đó $f(x)>f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2>ax^2$ với $a=\dfrac{f''(0)}{2}$.

Bài 3.6.6. Giả sử P(x) là đa thức bậc n sao cho $\exists a\in\mathbf{R}$ để $P(a)\geq 0,\ P'(a)\geq 0,\ldots,P^{(n)}(a)>0$. Chứng minh rằng mọi nghiệm thực của P(x) đều không lớn hơn a.

Giải. Khai triển Taylor P(x) tại a ta được

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Lưu ý rằng phần dư bằng 0 vì $P^{(n+1)}(x) \equiv 0$. Khi x > a, P(x) > 0, vậy x > a không thể là nghiệm.

Bài 3.6.7. Giả sử P(x) là đa thức không có nghiệm thực. Chứng minh rằng đa thức $P(x) + \frac{P''(x)}{2!} + \frac{P^{(4)}(x)}{4!} + \ldots$ cũng không có nghiệm thực.

Giải. Lưu ý rằng tổng đã nêu chỉ có hữu hạn số hạng khác 0.

Giả sử $x \in \mathbf{R}$ tùy ý, khai triển Taylor P(x) tại điểm x ta được

$$P(x+1) = P(x) + P'(x) + \frac{P''(x)}{2!} + \ldots$$

$$P(x-1) = P(x) - P'(x) + \frac{P''(x)}{2!} - \ldots$$

Suy ra $\frac{1}{2}[P(x+1) + P(x-1)] = P(x) + \frac{P''(x)}{2!} + \frac{P^{(4)}(x)}{4!} + \ldots$

Vì P(x) không có nghiệm thực nên nó giữ dấu trên $\mathbf{R}$. Thế thì $[P(x+1) + P(x-1)]/2$ cũng giữ dấu trên $\mathbf{R}$. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 3.6.8. Đối với hàm f(x) khả vi 3 lần trên $[-1;1]$, chứng minh tồn tại các hằng số A, B, C thoả mãn đẳng thức

$$Af(-h) + Bf(0) + Cf(h) = f'(0)h + O(h^3), (h \to 0).$$

Giải. Khai triển Maclaurin f(x), áp dụng tại x = h và x = -h ta được

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2} + \frac{f'''(0)h^3}{3\,!} + o(h^3);$$

$$f(-h) = f(0) - f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2} - \frac{f'''(0)h^3}{3\,!} + o(h^3).$$

Suy ra $\quad Af(-h) + Bf(0) + Cf(h)$

$$= (A+B+C)f(0) + (A-C)f'(0)h + \frac{1}{2}(A+C)f''(0)h^2 + O(h^3)$$

$$= f'(0)h + O(h^3)$$

nếu ta chọn $A = \frac{1}{2}$; B = 0; C $= -\frac{1}{2}$.

Bài 3.6.9. Cho g(x) là đa thực bậc 1996. Biết rằng $\forall x \in \mathbf{R}$ ta đều có

$$g(x+h) = g(x) + h\,g'(x + h\,\theta(x,h)),$$

trong đó $\theta(x,h)$ bị chặn, $g''(x) \neq 0, \forall x$.

Tìm $\lim\limits_{h\to 0} \theta(x,h)$.

Giải. Với $x \in \mathbf{R}$, khai triển Maclaurin hàm $f(h)=g(x+h)$, $h \in \mathbf{R}$:

$$f(h)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}h+...+\frac{f^{(1996)}(0)}{1996\,!}h^{1996}$$

$$=g(x)+\frac{g'(x)}{1!}h+...+\frac{g^{(1996)}(x)}{1996\,!}h^{1996}.$$

Từ giả thiết $g(x+h) = g(x) + h\,g'(x + h\,\theta(x,h))$ ta suy ra

$$g'(x+h\,\theta(x,h)) = [g(x+h) - g(x)]/h$$

$$=g'(x)+\frac{g''(x)}{2\,!}h+...+\frac{g^{(1996)}(x)}{1996\,!}h^{1995}. \qquad (*)$$

Vế trái là hàm của h, khai triển Maclaurin vế trái đến cấp 1 ta được:

$$g'(x+h\,\theta(x,h)) = g'(x) + g''(x)\,h\theta\,(x,h) + o\,(h\theta\,(x,h)).$$

Thay vào (*), giản ước ta được

$$g''(x)\,\theta\,(x,h)+\frac{o\,(h\theta\,(x,h))}{h}=\frac{g''(x)}{2\,!}+\frac{g'''(x)}{3\,!}h+...+\frac{g^{(1996)}(x)}{1996\,!}h^{1994}.$$

Chuyển qua giới hạn khi $h \to 0$ đi đến

$$\lim_{h\to 0} g''(x)\theta(x,h) = g''(x)\lim_{h\to 0}\theta\,(x,h) = \frac{g''(x)}{2\,!}.$$

Vì $g''(x) \neq 0$ nên $\lim\limits_{h\to 0}\theta\,(x,h) = \dfrac{1}{2}$.

Bài 3.6.10. Cho f(x) khả vi liên tục đến cấp hai trên $[0\,;1]$; $f(0)=f(1)=0$ và $|f''(x)| \le A$, $\forall x \in (0;1)$.

Chứng minh rằng $|f'(x)| \le \dfrac{A}{2}$ với $0 \le x \le 1$.

Giải. Theo công thức Taylor của hàm f(x) khai triển tại x, áp dụng tại 0 và 1 ta được

$$0 = f(0) = f(x) - f'(x)x + \frac{f''(c_1)}{2}x^2 \qquad (0 < c_1 < x);$$

$$0 = f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{f''(c_2)}{2}(1-x)^2 \quad (x < c_2 < 1).$$

Trừ 2 vế ta đi đến

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[f''(c_1)x^2 - f''(c_2)(1-x)^2\right]$$

$$\Rightarrow \left|f'(x)\right| \le \frac{A}{2}\left(2x^2 - 2x + 1\right).$$

Do $2x^2 - 2x + 1 = 2x(x-1) + 1 \le 1$ khi $0 < x < 1$ nên $\left|f'(x)\right| \le \dfrac{A}{2}$.

Nhận xét: Trong các Bài 3.6.7 - 3.6.10 chúng ta đã khai triển Taylor tại các điểm đặc biệt, rồi dùng khai triển đó để tính một số giá trị khác nhau của hàm.

Bài 3.6.11. Giả sử f(x) là hàm khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}$, $f^{(k)}(0) = 0$, $\forall k = 0,1,2,...$ và $f^{(k)}(x) \ge 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x > 0$. Chứng minh rằng f(x) = 0 với x > 0.

Giải. Với x > 0 tùy ý, theo công thức Maclaurin ta có

$$f(x) = 0 + ... + 0 + \frac{f^{(k)}(\theta)}{k!}x^k, \ 0 < \theta < x.$$

Do $f^{(k+1)}(t) \ge 0$, $\forall t > 0$ nên $f^{(k)}(t)$ tăng trên $[0;+\infty]$, từ đó $f^{(k)}(\theta) \le f^{(k)}(x)$.

Vậy $f(x) \le \dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}x^k$.

Bây giờ lại khai triển Taylor hàm f(x) tại x, áp dụng tại 2x ta được

$$f(2x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}x + ... + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}x^n$$

$$\ge n f(x) \quad (x < \theta < 2x), \ \forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vậy $$0 \le f(x) \le \frac{f(2x)}{n}, \ \forall n.$$

Suy ra f(x) = 0, ∀x > 0.

§3.6c. Cấp khai triển

Bài 3.6.12. Giả sử f(x) có đạo hàm liên tục đến cấp n + 1 trên khoảng $(-1;1)$ và $f^{(n+1)}(0) \ne 0$, hơn nữa giả sử $\forall x: 0 < |x| < 1$ ta có công thức Maclaurin

$$f(x)=f(0)+f^{'}(0)x+...+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^{n}\quad (0<\theta<1)$$

Tính $\lim\limits_{x\to 0}\theta$.

Giải. Khai triển Maclaurin đến số hạng chứa x^{n+1}.

$$f(x)=f(0)+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}+\frac{f^{(n+1)}(\theta_1 x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad (0<\theta_1<1).$$

So sánh với giả thiết ta có

$$\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^{n}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}+\frac{f^{(n+1)}(\theta_1 x)}{(n+1)!}x^{n+1}\ . \qquad (1)$$

Mặt khác, theo công thức số gia giới nội áp dụng cho hàm $f^{(n)}(x)$ ta có $f^{(n)}(\theta x)=f^{(n)}(0)+f^{(n+1)}(\theta_2\theta x)\,\theta x \qquad (0<\theta_2<1)$.

Thay vào (1) ta đi đến

$$\frac{f^{(n+1)}(\theta_2\theta x)}{n!}\,\theta x^{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(\theta_1 x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

hay
$$f^{(n+1)}(\theta_2\theta x)\,\theta=\frac{f^{(n+1)}(\theta_1 x)}{n+1}.$$

Cho qua giới hạn

$$f^{(n+1)}(0)\lim_{x\to 0}\theta=\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}\quad \text{hay}\quad \lim_{x\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

Bài 3.6.13. Giả sử $f:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ khả vi liên tục đến cấp 3. Chỉ ra rằng tồn tại $a\in\mathbf{R}$ sao cho

$$f(a)f^{'}(a)f^{''}(a)f^{'''}(a)\geq 0\,.$$

Giải. Nếu mỗi một trong các hàm $f(x);\ f^{'}(x);\ f^{''}(x);\ f^{'''}(x)$ đổi dấu, áp dụng định lý về giá trị trung gian cho hàm đó, nó triệt tiêu tại ít ra một điểm và xảy ra dấu đẳng thức.

Bây giờ giả sử 4 hàm đã nói không đổi dấu, trước hết ta chứng minh $f(x)$ và $f^{''}(x)$ cùng dấu.

* Giả sử $f^{''}(x)>0$. Khai triển Taylor f(x) tại điểm $x_0=0$ đến cấp 2, $\forall x\neq 0$ ta có

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(\theta x)x^2/2$$
$$> f(0) + f'(0)x, \qquad (\theta \in (0;1)).$$

Nếu $f'(0) > 0$ thì $f(0) + f'(0)x > 0$ với x đủ lớn,

Nếu $f'(0) < 0$ thì $f(0) + f'(0)x > 0$ với x đủ nhỏ,

Vậy f(x) mang dấu dương.

* Tương tự, nếu $f''(x) < 0$ ta cũng suy ra f(x) < 0 ∀x. Như vậy $f(x)f''(x) > 0, \forall x$.

Chứng minh tương tự ta có $f'(x)f'''(x) > 0, \forall x$. Suy ra đpcm.

Bài 3.6.14. Giả sử f(x) là hàm khả vi vô hạn lần trên **R** sao cho $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{n^2+1}$ $\forall n = 1, 2, 3,...$

Tính $f^{(k)}(0)$ với $k = 1,2,...$

Giải. Nhận thấy $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}$ phải chăng $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$?

Xét $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Khai triển của hàm này là $1 - x^2 + x^4 - ...$ Vậy
$$g^{(2k+1)}(0) = 0;\ g^{(2k)}(0) = (-1)^k(2k)!.$$

Bây giờ giả sử f(x) là hàm tùy ý thoả mãn đề ra.

Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$. Khi đó h(x) khả vi vô hạn và triệt tiêu tại $x = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3},...$

Ta sẽ chứng tỏ $h^{(k)}(0) = 0, \forall k = 1,2,...$

Giả sử ngược lại, ta sẽ chọn k nhỏ nhất để $h^{(k)}(0) \neq 0$. Do tính liên tục của $h^{(k)}(x)$, tồn tại ε > 0 để $h^{(k)}(x) \neq 0$ với $0 \le x < \varepsilon$.

Chọn n đủ lớn để $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Theo công thức Taylor, ta có

$$h\left(\frac{1}{n}\right) = h(0) + h'(0)\left(\frac{1}{n}\right)^1 + ... + h^{(k-1)}(0)\frac{1}{(k-1)!}\frac{1}{n^{k-1}} + h^{(k)}(\varepsilon')\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}$$

$$= h^{(k)}(\varepsilon')\frac{1}{k!\,n^k} \neq 0 \quad \left(0 < \varepsilon' < \frac{1}{n} < \varepsilon\right).$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ $h^{(k)}(0) = 0,\ \forall k = 1, 2, \ldots$ Vậy tất cả các đạo hàm của g(x) và f(x) là như nhau tại x = 0.

Lưu ý. Tuy nhiên, chưa thể khẳng định được $f(x) \equiv g(x)$: Xét f(x) là tổng của g(x) với hàm cho ở Bài 3.3.5.

§3.6d. Khai triển thành chuỗi Taylor

Bài 3.6.15. Với những số thực c nào thì

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} \le e^{cx^2}, \forall x \in \mathbf{R} \qquad (*)$$

Giải.

Cần. Giả sử (*) đúng $\forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow 0 \le e^{cx^2} - \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Khi xét phần chính ở vế phải đến cấp hai đã gợi ý ta chia hai vế cho x^2:

$$0 \le \left[e^{cx^2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]\frac{1}{x^2}.$$

Theo quy tắc L'Hôpital ta tìm được

$$0 \le \lim_{x \to 0}\left[e^{cx^2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]\frac{1}{x^2} = c - \frac{1}{2} \Rightarrow c \ge \frac{1}{2}.$$

Đủ. Xét $c \ge \dfrac{1}{2}$. Dùng khai triển Maclaurin ta có

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^k}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x^2\right)^n}{2^n\,n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!} = e^{\frac{x^2}{2}} \le e^{cx^2}.$$

Đáp số $c \ge 1/2$.

Bài 3.6.16. Chứng minh rằng với $x \in (0;1)$ thì

$$\left|x^x - 1\right| < x^{1-x}\left|\ln x\right|.$$

Giải. Sử dụng khai triển Maclaurin hàm e^x ta được

$$\left|x^x - 1\right| = \left|e^{x\ln x} - 1\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x\ln x|^n}{n!}$$

$$< |x\ln x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x\ln x|^{n-1}}{(n-1)!} = |x\ln x|\ e^{|x\ln x|}$$

$$= |x\ln x|\ e^{-x\ln x} = |\ln x|\ x^{1-x}.$$

Bài 3.6.17. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n > 1 ta có

$$\frac{1}{e} - \frac{1}{ne} < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{e} - \frac{1}{2ne}.$$

Giải. Nhân 2 vế với e rồi logarit hoá ta được

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 1 + n\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right).$$

Đặt $\frac{1}{n} = x$, ta chỉ cần chứng minh $\forall x \in (0;1)$

$$x\ln(1-x) < x + \ln(1-x) < x\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right).$$

Ta có thể chứng minh các bất đẳng thức này bằng phương pháp đạo hàm. Tuy nhiên, dùng khai triển Maclaurin của hàm $\ln(1+x),\ 0 < |x| < 1$ lại dễ hơn. Quả vậy, cần chứng minh:

$$x\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots\right) < x + \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots\right)$$

$$< x\left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2.2} - \frac{x^3}{3^2.3} - \ldots\right)$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + \ldots > \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots > \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2^2.2} + \frac{x^4}{3^2.3} + \ldots$$

là bất đẳng thức đúng với 0 < x < 1.

§3.7. PHƯƠNG TRÌNH HÀM CÓ SỬ DỤNG ĐẠO HÀM

Ngoài các kĩ thuật thường thấy đối với phương trình hàm (xem §2.10 và §2.11) chúng ta còn sử dụng các kĩ thuật sau:

+ Đạo hàm hai vế với từng biến.

+ Từ giả thiết liên tục, khả vi cấp thấp suy ra khả vi cấp cao. Thậm chí không giả thiết gì về tính liên tục, khả vi ta có thể suy ra tính liên tục khả vi.

Bài 3.7.1. Tìm f(x) xác định trên $\mathbf{R}$ thoả mãn

$$(f(x)-f(y))^2 \le |x-y|^3, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

Giải. $\forall x \ne y$ ta có $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le |x-y|^{1/2}$.

Vậy $$\lim_{y\to x}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| = 0$$

Từ đó f(x) khả vi tại mọi điểm và $f'(x)=0,\ \forall x \Rightarrow f(x)\equiv C$.

Bài 3.7.2. Tìm các hàm f(x) thoả mãn

$$(x-y)\,f(x+y)-(x+y)\,f(x-y)=4xy\left(x^2-y^2\right)\ \forall x, y \in \mathbf{R}$$

Giải. Từ giả thiết, với $x \ne \pm y$ ta có

$$\frac{f(x+y)}{x+y} - \frac{f(x-y)}{x-y} = 4xy .$$

Đặt $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ thì

$$g(x+y) - g(x-y) = 4xy .$$

Chọn $x=a+\dfrac{h}{2};\quad y=\dfrac{h}{2}$ ta được

$$\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = 2a+h .$$

Cho $h\to 0$ suy ra g(x) khả vi tại a và

$$g'(a)=2a,\ \forall a \ne 0 \Rightarrow g(x) = x^2 + C$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + Cx, \qquad \forall x \ne 0 .$$

Cho x = y = 1, từ giả thiết suy ra f(0) = 0, vậy công thức đúng với mọi x. Thử lại thấy đúng.

Cách 2: Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ ta được

$$v f(u) - u f(v) = (u^2 - v^2) uv. \qquad (*)$$

Với $u \neq 0$, $v \neq 0$ ta được $\dfrac{f(u)}{u} - \dfrac{f(v)}{v} = u^2 - v^2$

hay $\dfrac{f(u)}{u} - u^2 = \dfrac{f(v)}{v} - v^2$. Từ đó $\dfrac{f(u)}{u} - u^2 = C$

hay $f(u) = u^3 + Cu, u \neq 0$. Với u = 0, v = 1, từ (*) phải có f(0) = 0, vậy $f(u) = u^3 + Cu,\ \forall u$ hay $f(x) = x^3 + Cx,\ \forall x$. Thử lại thấy đúng.

Bài 3.7.3. Tìm tất cả các hàm $f:\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, khả vi và thoả mãn đồng nhất thức

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

Giải. Cho x = y = 0 ta thu được f(0) = 0.

Mặt khác $\dfrac{f(x+y) - f(x)}{y} = \dfrac{f(y) + 2xy}{y}$.

Vậy $f'(x) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{f(y) + 2xy}{y} = f'(0) + 2x$.

Từ đó $f(x) = x^2 + ax + b$, với a, b - hằng số.

Do f(0) = 0, suy ra b = 0, vì thế $f(x) = x^2 + ax$.

Thử lại, $\forall a \in \mathbf{R}$ ta thấy $f(x) = x^2 + ax$ thoả mãn.

Cách 2. Trừ 2 vế cho $(x + y)^2$ được

$$f(x+y) - (x+y)^2 = f(x) - x^2 + f(y) - y^2 \Leftrightarrow g(x+y) = g(x) + g(y)$$

với $g(x) = f(x) - x^2$. Vậy g(x) thoả mãn phương trình Cauchy (xem Bài 2.11.3) $\Rightarrow g(x) = ax$ hay $f(x) = x^2 + ax,\ a \in \mathbf{R}$.

Bài 3.7.4. Cho f(x) xác định trên $\mathbf{R}$ sao cho $\forall x, \forall h > 0$.

$$|f(x + h) - f(x - h)| < h^2.$$

Chứng minh rằng f(x) là hàm hằng số.

Giải. Dễ thấy bất đẳng thức đã cho đúng cả với h < 0. Đặt $x - h = t \Rightarrow x + h = t + 2h$. Từ giả thiết có $|f(t + 2h) - f(t)| < h^2$. Vậy

$$\left|\frac{f(t+2h)-f(t)}{2h}\right| < \frac{|h|}{2}.$$

Suy ra $f'(t) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(t+2h)-f(t)}{2h} = 0$. Vậy f(x) là hàm hằng số.

Khi $f(x)\equiv c$, hiển nhiên bất đẳng thức đã cho nghiệm đúng.

Bài 3.7.5. Tìm hàm $f:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ khả vi và

$$f(x+f(y)) = f(y+f(x)), \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

Giải. Lần lượt đạo hàm hai vế theo x, y ta được

$$f'(x+f(y)) = f'(y+f(x))\, f'(x)\ ; \tag{1}$$

$$f'(x+f(y))f'(y) = f'(y+f(x)). \tag{2}$$

Nhân hai vế (1) với $\left(-f'(y)\right)$ rồi cộng vào (2) ta được

$$0 = f'(y+f(x))\ \left[-f'(x)f'(y)+1\right]. \tag{3}$$

Trường hợp 1: $\exists x_0$ để $f'(x_0) = 0$. Thay x = x_0 vào (3) ta được

$$f'(y+f(x_0)) = 0, \forall\ y\ .$$ Vậy f(x) = C = const.

Thử lại thấy hàm này thoả mãn bài toán.

Trường hợp 2: $\forall x, f'(x) \neq 0$. Từ (3) suy ra $f'(x)\ f'(y) = 1$. (4)

Vậy $$f'(x) = \frac{1}{f'(y)},\ \forall x, y.$$

Suy ra $f'(x) = c$ hay f(x) = cx + d.

$f'(x) = c;\ \ f'(y) = c$, thay vào (4), c^2 = 1 hay c = ± 1.

Thay vào phương trình đã cho, chỉ nhận c = 1. Vậy

$$\left[\begin{array}{l} y = x+d; \\ y = c. \end{array}\right.$$ với c, d- 2 hằng số tùy ý.

Bài 3.7.6. Tìm hàm f(x) khả vi hai lần trên $\mathbf{R}$ và thoả mãn

$$(x+y)f''(x+y) = f(x)+f(y), \forall x, y \in \mathbf{R}. \tag{*}$$

Giải. Trước hết ta chứng minh f(x) khả vi vô hạn lần với $x \neq 0$. Quả vậy, cho x = y ta được

$$2x f''(2x) = 2f(x).$$

Đặt $2x = t$ ta có $t f''(t) = 2f\left(\frac{t}{2}\right)$. Suy ra

$$f(0) = 0;$$

$$f''(t) = \frac{2}{t} f\left(\frac{t}{2}\right), \text{ với } t \neq 0. \quad (1)$$

Từ giả thiết, vế phải của (1) khả vi hai lần với $t \neq 0$. Vậy f(t) khả vi 4 lần, rồi f(t) khả vi 6 lần, ..., như vậy f(t) khả vi vô hạn lần với $t \neq 0$.

Với $x \neq -y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ đạo hàm hai vế (*) theo x và theo y ta được:

$$\begin{cases} f''(x+y) + (x+y)f'''(x+y) = f'(x); \\ f''(x+y) + (x+y)f'''(x+y) = f'(y). \end{cases}$$

Suy ra $f'(x) = f'(y)$, $\forall x \neq 0,\ y \neq 0, x \neq -y$. Vậy

$$f'(x) = f'(1), \ \forall x \neq -1, x \neq 0.$$

Do tính liên tục của $f'(x)$, đẳng thức cũng xảy ra tại x = 0; x = -1.

Vậy $\qquad f'(x) = f'(1) = \text{const}, \ \forall x.$

Từ đó $f(x) = ax + b$. Thay vào (*) ta đi đến a = b = 0 hay $f(x) \equiv 0$.

Cách 2. Chọn $y = -x$ suy ra f(x) lẻ, vậy f(0) = 0 và $f''(x)$ lẻ.

Chọn y = 0 được $x f''(x) = f(x)$ hay $f''(x) = \frac{f(x)}{x}$ chẵn. Vậy

$$f''(x) = 0 \Rightarrow f(x) = ax + b \Rightarrow f(x) \equiv 0.$$

Bài 3.7.7. Tìm tất cả các hàm liên tục f(x) trên $\mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x) - f(y) = \int_{x+2y}^{2x+y} f(t)dt. \quad (1)$$

Giải. Giả sử f(x) thoả mãn đề ra. Cho y = 0:

$$f(x) = f(0) + \int_{x}^{2x} f(t)dt.$$

Vậy f(x) là hàm khả vi và $f'(x) = 2f(2x) - f(x)$, $\forall x$. (Cũng chính từ đồng nhất thức này, f(x) khả vi hai lần, và theo quy nạp, f(x) khả vi vô hạn lần).

Bây giờ lấy đạo hàm hai vế (1) theo x, sau đó theo y, ta được:

$$f'(x) = 2f(2x+y) - f(x+2y); \qquad (3)$$

$$0 = 2f'(2x+y) - 2f'(x+2y).$$

$$\Rightarrow f'(2x+y) = f'(x+2y).$$

Cho $y = -2x$ ta được $f'(0) = f'(-3x)$ hay $f'(x) = \text{const}$.

Từ đó $f(x) = ax + b$. Thay vào (3) ta được a = b = 0. Vậy $f(x) \equiv 0$.

Thử lại thấy đúng.

Bài 3.7.8. Cho $f: (0; +\infty) \to \mathbf{R}$, khả vi tại 1 và

$$f(xy) + f(1) = f(x) + f(y), \forall x, y > 0.$$

Chứng minh f(x) khả vi và tìm f(x).

Giải. Ta có $f(xy) = f(x) + f(y) - f(1)$.

Cho $x_0 \in (0; +\infty)$ tùy ý. Đặt $x = x_0 t$, $x \to x_0 \Leftrightarrow t \to 1$. Vậy

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{t \to 1} \frac{f(x_0 t) - f(x_0)}{x_0 t - x_0}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{f(x_0) + f(t) - f(1) - f(x_0)}{(t-1)x_0} = \frac{1}{x_0} f'(1) = \frac{a}{x_0}.$$

Vậy $f'(x) = \frac{a}{x}$, $\forall$ x >0 hay f(x) = alnx + b, trong đó a, b là hai hằng tùy ý.

Thử lại thấy đúng.

Bài 3.7.9. Cho $n \in \mathbf{N}^*$, tìm $f: (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ khả vi và thoả mãn điều kiện

$$f\left(\sqrt{\frac{x^n + y^n}{2}}\right) = \sqrt{\frac{f^2(x) + f^2(y)}{2}}, \forall x, y > 0.$$

Giải. Đạo hàm hai vế theo x và theo y ta đi đến

$$\frac{f(x)f'(x)}{x^{n-1}} = \frac{f(y)f'(y)}{y^{n-1}} = \frac{nA}{2}$$

hay $\qquad 2f(x)f'(x) = nAx^{n-1} \Rightarrow f^2(x) = Ax^n + B$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{Ax^n + B}, \ A, B - \text{const}.$$

Để f(x) xác định trên $(0; +\infty)$ và dương trên đó thì A = 0; B > 0 hoặc A > 0; B ≥ 0. Nếu A = 0; B > 0 thì f(x) ≡ B > 0 rõ ràng thoả mãn đề ra. Nếu A > 0; B ≥ 0, thay vào đẳng thức đã cho ta được

$$\sqrt{A\left(\frac{x^n+y^n}{2}\right)^{n/2}+B}=\sqrt{\frac{\left(Ax^n+B\right)+\left(Ay^n+B\right)}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x^n+y^n}{2}\right)^{n/2-1}-1=0,\ \forall x,y>0.\Leftrightarrow n=2.$$

Đáp số:

* $n=2$: $f(x)=\sqrt{Ax+B}$, A, B hằng số $A\geq 0; B>0$;

* $n\neq 2$: $f(x)=B$ - hằng số dương.

Bài 3.7.10. Xác định p(x) thoả mãn điều kiện:

$$p(x+\Delta x)-p(x)=g(x)\Delta x+\alpha(x,\Delta x),\ \forall x\in\mathbf{R},\forall\Delta x \quad (*)$$

trong đó $|\alpha(x,\Delta x)|\leq c|\Delta x|^3$, $c=\text{const}>0$.

Giải. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{p(x+\Delta x)-p(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(g(x)+\frac{\alpha(x,\Delta x)}{\Delta x}\right)=g(x)$.

Vậy p(x) khả vi, $p'(x)=g(x)$ và

$$p(x+\Delta x)-p(x)=p'(x)\Delta x+\alpha(x,\Delta x),\ \forall x,\ \forall\Delta x.$$

Suy ra $p(x)-p(x+\Delta x)=p'(x+\Delta x)(-\Delta x)+\alpha(x+\Delta x,-\Delta x)$.

Cộng 2 vế ta được

$$0=-\left(p'(x+\Delta x)-p'(x)\right)\Delta x+\alpha(x,\Delta x)+\alpha(x+\Delta x,-\Delta x)$$

hay $\frac{p'(x+\Delta x)-p'(x)}{\Delta x}=\frac{\alpha(x,\Delta x)}{(\Delta x)^2}+\frac{\alpha(x+\Delta x,-\Delta x)}{(\Delta x)^2}\to 0\ (\Delta x\to 0)$.

Vậy $p''(x)=0,\ \forall x$. Suy ra p(x) = ax + b.

Thay vào (*) ta được $a=g(x)+\alpha(x,\Delta x)/\Delta x$.

Cho $\Delta x\to 0$ suy ra $g(x)=a,\forall x$. Lại thay vào (*) ta được $\alpha(x,\Delta x)=0\ \forall x,\Delta x$.

Đáp số. $g(x)=a=\text{const}$ và $\alpha(x;\Delta x)\equiv 0$ thì p(x) = ax + b.

Trái lại, không có hàm p(x) đòi hỏi.

Bài 3.7.11. Xác định các hàm số f(x) liên tục trên $[0;1]$ khả vi trên $(0;1)$ và thoả mãn các điều kiện.

a) f(0) = f(1) = 1; (1)

b) $2003f'(x)+2004f(x)\geq 2004,\ \forall x\in(0;1)$. (2)

Giải. (2) $\Leftrightarrow f'(x)+\frac{2004}{2003}f(x)-\frac{2004}{2003}\geq 0.$

$$\Leftrightarrow e^{kx}\left(f'(x)+kf(x)-k\right)\geq 0,\quad \left(k=\frac{2004}{2003}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{kx}\left(f(x)-1\right)\right)'\geq 0,\qquad \forall x\in(0;1).$$

Vậy hàm $g(x)=e^{kx}\left(f(x)-1\right)$ liên tục và tăng trên $[0;1]$.

Mặt khác, $g(0)=g(1)=0$, vậy $g(x)\equiv 0$ hay $f(x)\equiv 1$.

Thử lại thấy đúng.

Bài 3.7.12. Tìm tất cả các hàm $f:(-1;1)\to \mathbf{R}$ khả vi và thoả mãn

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right),\quad \forall x,y\in(-1;1).$$

Giải. Trước hết ta nhận thấy rằng $\forall x,y\in(-1;1)$ thì $\frac{x+y}{1+xy}\in(-1;1)$.

Cho x = y = 0 ta được f(0) = 0.

Đạo hàm hai vế đồng nhất thức theo x và theo y ta được

$$f'(x)=f'\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\frac{1-y^2}{(1+xy)^2}\qquad (1)$$

$$f'(y)=f'\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\frac{1-x^2}{(1+xy)^2}.\qquad (2)$$

Nhân hai vế (1) với $\left(1-x^2\right)$, (2) với $\left(1-y^2\right)$ suy ra

$$\left(1-x^2\right)f'(x)=\left(1-y^2\right)f'(y)\qquad \forall x,y\in(-1;1).$$

Cho y = 0 thu được

$$\left(1-x^2\right)f'(x)=f'(0)\text{ hay } f'(x)=\frac{f'(0)}{1-x^2}.$$

Suy ra $f(x)=-\frac{f'(0)}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

Do f(0) = 0 nên C = 0.

Vậy $f(x)=a\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$; a- hằng số tùy ý.

Dễ kiểm tra thấy f(x) thoả mãn bài ra.

Bài 3.7.13. Tìm các hàm f(x) xác định và khả vi trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện

$$f(x+y)=f(x)f(y), \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Lưu ý: Chúng ta đã gặp bài này ở Bài 2.11.5, ở đó giả thiết đưa ra về f(x) chỉ là liên tục và do đó việc giải khó khăn, phải dùng đến nghiệm của phương trình Cauchy. Khi hàm cần tìm được giả thiết là khả vi, lời giải sẽ dễ dàng hơn.

Giải. Rõ ràng $f(x)\equiv 0$ là một nghiệm.

+ Giả sử tồn tại $x_0\in\mathbb{R}$ để $f(x_0)\neq 0$. Ta có

$$f(x_0)=f(x+(x_0-x))=f(x)f(x_0-x)\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Vậy $f(x)\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

+ Cho x = y = 0 suy ra $f(0)(1-f(0))=0$, vậy f(0) = 1.

+ $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Lần lượt lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức đã cho theo x và y ta được

$$f'(x+y)=f'(x)f(y);$$
$$f'(x+y)=f(x)f'(y).$$

Suy ra $f'(x)f(y)=f(x)f'(y)$ hay $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(y)}{f(y)}$.

Cho y = 0 ta được $(\ln f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(0)}{f(0)}=a$.

Suy ra $f(x)=e^{ax+b}$. Do $f(0)=e^b=1$ nên b = 0.

Vậy $f(x)=e^{ax}$. Thử lại thấy đúng.

Trả lời $f(x)\equiv 0$ hoặc $f(x)=e^{ax}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ (a - hằng số tùy ý).

Bài 3.7.14. Cho $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ khả vi liên tục và nếu f(x) = 0 thì $f'(x)\neq 0$. Chứng tỏ rằng có thể tìm được hàm $g:[a;b]\to\mathbb{R}$ khả vi liên tục sao cho

$$f(x)g'(x)>f'(x)g(x)\quad \forall x\in[a;b].$$

Giải. Trước hết, nếu số không điểm của f(x) là vô hạn và gọi c là một điểm giới hạn của chúng thì theo định lí Rolle, số không điểm của đạo hàm cũng vô hạn, và cũng nhận c làm điểm giới hạn. Từ tính liên tục của $f(x)$ và của $f'(x)$ suy ra $f(c)=f'(c)=0$. Mâu thuẫn này chứng tỏ f(x) chỉ có hữu hạn không điểm, kí hiệu là $x_1,...,x_n$.

Xây dựng đa thức P(x) bậc $n-1$ sao cho

$$P(x_i)=\frac{-1}{f'(x_i)}\ \left(\Leftrightarrow P(x_i)\ f'(x_i)=-1\right). \qquad (1)$$

Ta sẽ chứng minh rằng với k > 0 đủ nhỏ chọn sau, $g(x)=xf(x)+kP(x)$ là hàm phải tìm. Ta có

$$h(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)=f^2(x)+k\left(f(x)P'(x)-f'(x)P(x)\right)\ . \qquad (2)$$

+ Bởi vì $f(x_i)P'(x_i)-f'(x_i)P(x_i)=1\quad \forall i=1,...,n$ nên có $\delta>0$ đủ nhỏ để với $K=\bigcup_{i=1}^{n}(x_i-\delta\,;x_i+\delta)\subset[a;b]$.

$$f(x)\,P'(x)-f'(x)\,P(x)\geq\frac{1}{2}\quad \forall x\in K.$$

Vậy từ (2) suy ra

$$h(x)\geq\frac{1}{2}k>0\,,\ \forall x\in K. \qquad (3)$$

+ Do $f^2(x)$ liên tục dương trên tập đóng, bị chặn $[a;b]-K$ nên tồn tại $\varepsilon>0$ để $f^2(x)\geq\varepsilon\ \ \forall x\in[a;b]-K$.

Do $\left|f(x)P'(x)-f'(x)P(x)\right|$ liên tục trên tập đóng bị chặn $[a;b]-K$ nên tồn tại M > 0 để $\left|f(x)P'(x)-f'(x)P(x)\right|\leq M\quad \forall x\in[a;b]-K$.

Vậy với việc chọn $k<\frac{\varepsilon}{M}$ từ (2) ta có

$$h(x)\geq f^2(x)-k\left|f(x)P'(x)-f'(x)P(x)\right|>\varepsilon-\frac{\varepsilon}{M}M=0\quad \forall x\in[a;b]-K. (4)$$

Từ (3) và (4), $h(x)>0\ \ \forall x\in[a;b]$, suy ra đpcm.

Chương IV
TÍCH PHÂN

§4.0. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Dù định nghĩa sau chưa thật chính xác nhưng cũng đáp ứng được một số mục đích nhất định.

* Định nghĩa. Cho f(x) xác định trên đoạn [a;b]. Xét phép phân hoạch s đoạn [a;b] xác định bởi các điểm chia $x_0, x_1, ..., x_n$ với

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Trên mỗi đoạn con $[x_{i-1}; x_i]$ lấy một điểm ξ_i tùy ý. Tổng

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

được gọi là một tổng tích phân của hàm f(x) ứng với phép phân hoạch s và cách chọn các điểm trung gian (ξ_i).

Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\lambda = \underset{1 \le i \le n}{\mathrm{Max}}\, \Delta x_i \to 0$ mà S_n có giới hạn I hữu hạn, không phụ thuộc vào phép phân hoạch đoạn [a;b] và cách chọn các điểm (ξ_i) thì giới hạn I được gọi là tích phân (xác định) của hàm f(x) trên [a;b] và được kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int\limits_{[a;b]} f(x)dx$.

Khi đó hàm f(x) được gọi là khả tích trên đoạn [a;b].

* Quy ước $\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

* Tính khả tích và giá trị (nếu có) của tích phân không thay đổi nếu ta thay đổi giá trị của hàm số tại một số hữu hạn điểm.

* Hàm khả tích trên [a;b] thì giới nội trên đó.

* Hàm $f: [a;b] \to \mathbf{R}$ thoả mãn một trong các tính chất sau thì khả tích:

+ Liên tục;

+ Bị chặn, có một số hữu hạn điểm gián đoạn;

+ Đơn điệu và bị chặn.

Hệ thức Chasles. Hàm f(x) khả tích trên [a;b] khi và chỉ khi nó khả tích trên mỗi đoạn con bất kì. Khi đó

$$\forall c \in [a;b],\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\ .$$

Mở rộng. Cho $a_0, a_1, ..., a_N \in \mathbf{R}$ còn f(x) là hàm khả tích trên đoạn lớn nhất trong các đoạn với đầu mút $a_0, a_1, ..., a_N$. Khi đó ta có

$$\int_{a_0}^{a_N} f(x)dx = \int_{a_0}^{a_1} f(x)dx + ... + \int_{a_{N-1}}^{a_N} f(x)dx\ .$$

Tính chất đại số. Giả sử f(x) và g(x) là hai hàm khả tích trên [a;b] còn α và β là hai số thực tùy ý. Khi đó $\alpha f(x) + \beta g(x)$ cũng khả tích trên [a;b] và

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx\ .$$

Tính khả tích của hàm hợp.

* Cho $f: [a;b] \to [A;B]$ khả tích;

$g: [A;B] \to \mathbf{R}$ liên tục.

Khi đó hàm hợp $g_0 f : [a;b] \to \mathbf{R}$ khả tích.

* Hệ quả. Nếu f(x) và g(x) là hai hàm khả tích trên [a;b] thì tích f(x) g(x) và hàm trị tuyệt đối $|f(x)|$ cũng khả tích trên [a;b].

Tính chất liên quan đến thứ tự.

* f(x) không âm và khả tích trên [a;b] thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

* Cho f(x) và g(x) khả tích trên [a;b], ngoài ra $\forall x \in [a;b], f(x) \leq g(x)$. Khi đó $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

* Hệ quả. Cho f(x) khả tích [a;b]. Đặt $m = \inf\limits_{x \in [a;b]} f(x)$; $M = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ ta có

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

* Tính dương của tích phân. Cho f(x) không âm và khả tích trên [a;b]. Giả sử có $x_0 \in [a;b]$ sao cho f(x) liên tục tại x_0 và $f(x_0) > 0$. Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx > 0\ .$$

* Hệ quả. Cho f(x) không âm, liên tục trên [a;b] và $\int_a^b f(x)dx = 0$. Khi đó $f(x) \equiv 0$.

* Hệ quả. f(x) liên tục trên [a;b] và $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ thì $f(x) \equiv 0$.

* Hệ quả. f(x) liên tục trên [a;b] và $\int_a^b |f(x)|dx = 0$ thì $f(x) \equiv 0$.

Bất đẳng thức Cauchy - Bunhiacopski - Schwarz (C-B-S) đối với tích phân.

* Cho f(x) và g(x) là hai hàm liên tục từng khúc trên [a;b], khi đó

$$\int_a^b (f(x)g(x))^2 dx \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx .$$

* (Trường hợp xảy ra dấu bằng). Hơn nữa, giả sử f(x), g(x) liên tục. Khi đó xảy ra dấu " = " ở bất đẳng thức vừa nêu, tức là:

$$\int_a^b (f(x)g(x))^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

khi và chỉ khi có hai số $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ không đồng thời bằng 0 để cho

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \equiv 0 . \qquad (*)$$

(Khi xảy ra (*), f(x) và g(x) gọi là phụ thuộc tuyến tính trên [a;b]).

Giá trị trung bình tích phân.

* Cho f(x) khả tích trên $[a;b]$, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm f(x) trên [a;b].

Nếu hàm f(x) liên tục trên [a;b] thì có điểm $c \in (a;b)$ để

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx .$$

* Định lí về giá trị trung bình của tích phân. Nếu f(x) và g(x) là hai hàm khả tích trên [a;b], còn g(x) giữ dấu trên [a;b] thì có điểm $\mu \in [m;M]$ với

$$m = \operatorname*{Inf}_{x \in [a;b]} f(x); \quad M = \operatorname*{Sup}_{x \in [a;b]} f(x)$$

sao cho $$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx .$$

Đặc biệt, nếu f(x) và g(x) liên tục trên [a;b], $g(x) \ge 0$ thì có $c \in (a;b)$ để

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx .$$

Nguyên hàm - Tích phân theo cận trên.

* Hàm số F(x) được gọi là nguyên hàm của hàm f(x) trên khoảng (a;b) nếu $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a;b)$.

Khi đó, biểu thức F(x) + C, với C là hằng số tùy ý, sẽ là họ nguyên hàm (hay tích phân bất định) của f(x) trên (a;b) và được kí hiệu là $\int f(x)dx$.

* Cho f(x) là hàm khả tích trên [a;b], đặt

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \ , \ x \in [a;b].$$

Khi đó:

+ F(x) là hàm liên tục trên [a;b];

+ Nếu f(x) liên tục tại $x_0 \in [a;b]$ thì F(x) khả vi tại x_0 và

$$F'(x_0)=f(x_0);$$

+ Nếu f(x) liên tục trên [a;b] thì F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên [a;b] và thu được công thức tính đạo hàm theo cận trên.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x), \ \forall x \in [a;b].$$

Hơn nữa, họ nguyên hàm của f(x) trên [a;b] là

$$F(x)+C = \int_a^x f(t)\,dt + C \text{ , với C- hằng số tùy ý.}$$

* Tổng quát. Nếu $f(x), \varphi'(x), \psi'(x)$ là các hàm liên tục thì

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x).$$

* Công thức Newton - Leibnitz. Cho f(x) liên tục trên [a;b] còn $\Phi(x)$ là một nguyên hàm của nó trên đoạn này, khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a).$$

* Phép đổi biến.

1. Để tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$, ta cố gắng biến đổi f(x) thành dạng $g(\varphi(x))\varphi'(x)$. Khi đó

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_a^b g(\varphi(x))\,d\varphi(x)$$

$$= G(u)\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = G(\varphi(x))\Big|_a^b,$$

trong đó G(u) là một nguyên hàm của hàm g(u).

Điều kiện:

+ g(x) liên tục trên 1 đoạn [A;B] nào đó;

+ $\varphi'(x)$ liên tục và giữ dấu, hoặc chỉ được phép đổi dấu hữu hạn lần trên [a;b];

+ Tập giá trị $\varphi([a;b])$ của hàm $\varphi(x)$ chứa trong [A;B], trên đó hàm g(x) liên tục.

2. Để tìm tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$ ta có thể đặt $x=x(t),\ t\in[\alpha;\beta]$ sao cho:

+ $x'(t)$ liên tục và giữ dấu trên $[\alpha;\beta]$ hoặc chỉ được phép đổi dấu một số hữu hạn lần;

+ Tập giá trị $x([\alpha;\beta])$ của hàm $x(t)$ nằm trong miền liên tục của hàm f(x) (miền trên đó f(x) liên tục);

+ $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$.

Khi đó $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt$.

* Tích phân từng phần.

Khi cần tính $\int_a^b f(x)dx$ ta cố gắng viết hàm f(x) dưới dạng $f(x)=u(x)v'(x)$ trong đó $u(x),\ v(x)$ là những hàm khả vi liên tục. Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b u(x)v'(x)dx=\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du.$$

Như thế, ở giai đoạn đầu của quá trình lấy tích phân, ta đã tìm cách đưa một thừa số của hàm dưới dấu tích phân vào dấu vi phân d(.). Thực tế, ta đã lấy tích phân chỉ riêng thừa số này. Ý nghĩa của thuật ngữ "tích phân từng phần" chính là như vậy.

Lưu ý.

* Có thể ta không phải đưa bất kì thừa số nào vào dấu d(.), nói khác, ta đặt $u=f(x)$, $v=x$. Đôi khi điều này rất hiệu quả.

* Đối với đổi biến 1 cũng như đối với tích phân từng phần, chúng ta đều tìm cách đưa một thừa số vào dấu vi phân d(.). (Như đã nói, đây thực chất là một lần lấy tích phân). Tuy nhiên ở giai đoạn tiếp sau đó ta phải cân nhắc để dùng đổi biến hay tích phân từng phần có lợi hơn.

Tích phân suy rộng loại I.

* Cho hàm số $f:[a;+\infty)\to\mathbf{R}$ khả tích trên [a; A], ∀A > a. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn hay vô hạn)

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$

thì giới hạn đó được gọi là tích phân suy rộng (loại I) của hàm f(x) trên $[a;+\infty)$, kí hiệu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Nếu giới hạn trên là hữu hạn, ta nói tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ; trái lại, khi không tồn tại giới hạn hoặc giới hạn vô hạn, ta nói tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kì.

* Dễ định nghĩa tương tự cho tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$.

* Nếu với $a \in \mathbf{R}$ nào đó, cả hai tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, ta nói tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và giá trị của nó được tính bởi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Trái lại, nếu ít nhất một trong hai tích phân $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ hoặc $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kì, ta nói tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ phân kì. Định nghĩa này không phụ thuộc vào việc chọn điểm trung gian a.

* Công thức Newton - Leibnitz. Nếu f(x) liên tục trên $[a;+\infty)$ và F(x) là một nguyên hàm của nó thì

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a),$$

trong đó $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

* Cho f(x) không âm và khả tích trên [a; A], ∀A > a. Khi đó:

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ $\Leftrightarrow \int_a^{A} f(x)dx$ bị chặn (theo A).

* Tiêu chuẩn so sánh. Cho f(x) và g(x) là hai hàm khả tích trên [a; A], ∀A > a, ngoài ra $0 \le f(x) \le g(x)$.

+ Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ ;

+ Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kì thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kì.

+ Đặc biệt, giả sử rằng $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k > 0$.

Khi đó các tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Bởi vì $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}$ hội tụ $\Leftrightarrow \lambda>1$, người ta hay so sánh f(x) với $\frac{1}{x^{\lambda}}$:

Nếu $f(x)\sim\frac{1}{x^{\lambda}}$ (khi $x\to+\infty$) thì $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ $\Leftrightarrow\lambda>1$.

* Hội tụ tuyệt đối. Giả sử f(x) khả tích trên [a; A], $\forall A>a$. Nếu tích phân $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ cũng hội tụ và ta nói tích phân $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối.

Trái lại, nếu tích phân $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ còn tích phân $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ không hội tụ, ta nói tích phân $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ là bán hội tụ hay hội tụ không tuyệt đối.

Tích phân suy rộng loại II.

* Giả sử f(x) xác định trên $[a;b)$, không giới nội lại lân cận điểm b và khả tích trên $[a;b-\eta]$, $\forall\eta>0$ đủ nhỏ. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn hay vô hạn)

$$\lim_{\eta\to0^+}\int_a^{b-\eta}f(x)dx,$$

thì giới hạn đó được gọi là tích phân suy rộng (loại II) của hàm f(x) trên [a;b], kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_{[a;b)}f(x)dx$.

Nếu giới hạn đó hữu hạn, ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ; trái lại, nếu giới hạn đó vô hạn hay không tồn tại, ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ phân kì.

* Nếu f(x) khả tích thông thường trên [a;b] thì

$$\lim_{\eta\to0^+}\int_a^{b-\eta}f(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

Trong trường hợp này, tích phân suy rộng (chúng ta đã lạm dụng từ này) chính là tích phân thông thường.

* Tương tự, ta có thể định nghĩa tích phân suy rộng (loại II) cho hàm f(x) không bị chặn tại mút trái a của [a;b].

* Cho hàm f(x) xác định trên (a;b), không giới nội tại lân cận điểm a cũng như lân cận điểm b. Nếu có điểm $c\in(a;b)$ sao cho cả hai tích phân $\int_a^c f(x)dx$ và $\int_c^b f(x)dx$ hội tụ, ta nói tích phân suy rộng (loại II) $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ và giá trị của nó bằng

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \ .$$

Trái lại, nếu ít nhất một trong hai tích phân ở trên phân kì, ta nói tích phân suy rộng (loại II) $\int_a^b f(x)dx$ phân kì.

Định nghĩa này không phụ thuộc vào việc chọn điểm trung gian c.

* Ta còn có thể định nghĩa tích phân suy rộng cho trường hợp điểm bất thường trong khoảng (a;b), hay trường hợp có một số điểm bất thường cũng như tích phân suy rộng hỗn hợp cả loại I và II.

* Các phép đổi biến và tích phân từng phần vẫn áp dụng được cho tích phân suy rộng, song ta phải điều chỉnh ý nghĩa của chúng ít nhiều.

* Nếu f(x) liên tục trên $[a;b)$ và $f(x)=O\left(\frac{1}{b-x}\right)^{\lambda}$ (khi $x \to b^-$) thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ với $\lambda < 1$ và phân kì với $\lambda \geq 1$.

§4.1. TÍCH PHÂN, ĐẠO HÀM THEO CẬN TRÊN

Yêu cầu chúng ta nắm chắc quy tắc đạo hàm hàm hợp, thậm chí đạo hàm hàm hợp hàm nhiều biến.

Bài 4.1.1. Chứng minh các đẳng thức

a) $\int_{e^{-1}}^{tgx} \frac{t}{1+t^2}dt + \int_{e^{-1}}^{\cot gx} \frac{dt}{t\left(1+t^2\right)} = 1, \quad \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right).$

b) $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}.$

Giải.

a) Gọi vế trái của đẳng thức cần chứng minh là F(x), ta có

$$F'(x) = \frac{tgx}{1+tg^2x}\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cot gx\left(1+\cot g^2x\right)}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

$$= tgx - \frac{1}{\cot gx} = 0, \quad \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow F(x) = \text{const}.$$

Lấy $x = \frac{\pi}{4}: F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{e^{-1}}^{1} \frac{tdt}{1+t^2} + \int_{e^{-1}}^{1} \frac{dt}{t\left(1+t^2\right)}$

$$=\int_{e^{-1}}^{1}\frac{t^2+1}{t\left(1+t^2\right)}dt = \ln t\Big|_{e^{-1}}^{1} = 1.$$

Suy ra $\qquad F(x)=F\left(\frac{\pi}{4}\right)=1, \qquad \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right).$

b) Gọi F(x) là hàm ở vế trái của đẳng thức. Dễ thấy F(x) là hàm liên tục, tuần hoàn chu kì $\frac{\pi}{2}$. Với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ ta có

$$F'(x)=\arcsin(\sin x)2\sin x\cos x+\arccos(\cos x)2\cos x(-\sin x)=0$$

Vậy $\quad F(x)=C=\text{const}, \qquad \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^{1/2}\left(\arcsin\sqrt{t}+\arccos\sqrt{t}\right)dt=\frac{\pi}{4}.$$

Suy ra $\quad F(x)=\frac{\pi}{4}, \ \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Từ đó $F(x)=\frac{\pi}{4}, \ \forall x.$

Bài 4.1.2. Cho $0<f(z)<\frac{1}{2z}$, trong đó f(z) là hàm liên tục trên $[0;+\infty)$. Chứng minh rằng $g(x)=\int_0^x z^2 f(z)dz-\left(\int_0^x zf(z)dz\right)^2$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Giải. $\qquad g'(x)=x^2f(x)-2\left(\int_0^x zf(z)dz\right)xf(x)$

$$= xf(x)\left[x-2\int_0^x zf(z)dz\right]=xf(x)\int_0^x[1-2zf(z)]dz.$$

Từ giả thiết suy ra $0<2zf(z)<1$. Vậy

$\int_0^1[1-2zf(z)]dx>0, \forall x>0.$ Từ đó $g'(x)>0$ và suy ra g(x) đồng biến.

Bài 4.1.3. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$

Giải. Thông qua giới hạn hàm số và áp dụng quy tắc L'Hôpital ta giải bài toán này dễ dàng. Ta có

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_1^t \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx}{\sqrt{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=2.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = 2$.

Bài 4.1.4. Cho $a > 0$; $f:[0;a] \to \mathbf{R}$ là hàm khả vi liên tục sao cho $\forall x \in [0;a],\ f'(x) > 0$; $f(0) = 0$. Xét hàm ngược

$$f^{-1}(x):\ [0;f(a)] \to [0;a].$$

a) Chứng minh rằng $\forall x \in [0;a]$

$$\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = x\,f(x).$$

b) Từ đó suy ra $\forall x \in [0;a]$, $\forall y \in [0;f(a)]$

$$\int_0^x f(t)dt + \int_0^y f^{-1}(t)dt \ \geq xy.$$

Giải.

a) Xét $g(x)=\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - x\,f(x),\ \forall x \in [0;a]$. Rõ ràng g(x) khả vi liên tục, đồng thời:

$$g'(x)=f(x)+f^{-1}(f(x))f'(x)-x\,f'(x)-f(x)$$

$$=f(x)+ x\,f'(x)- x\,f'(x)-f(x)= 0.$$

Vậy g(x) = C = const. Ngoài ra g(0) = 0, suy ra $g(x)\equiv 0$ trên [0;a].

b) BĐT $\Leftrightarrow g(x,y)=\int_0^x f(t)dt + \int_0^y f^{-1}(t)dt - xy \geq 0$.

Xét $S_x(y)=g(x,y)$, trong đó x là tham số. Trước hết theo câu (a), $S_x(f(x)) = 0$. Đạo hàm theo y ta được

$$S'_x(y)=f^{-1}(y)-x.$$

Vì f(x) đồng biến nên $f^{-1}(x)$ cũng đồng biến, nhận được bảng biến thiên

y	0		$f(x)$		$f(a)$
$S'_x(y)$		-	0	+	
$S_x(y)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, $S_x(y) \geq S_x(f(x))= 0$.

Bài 4.1.5. Tìm giới hạn sau

$$I(a)=\lim_{x\to 1^-}(1-x)^a\int_0^x \frac{t}{\ln^2 t}dt.$$

Giải. Dễ thấy $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\ln^2 t}=0$.

Như vậy, ta có thể coi hàm $\frac{t}{\ln^2 t}$ liên tục trên $[0;1)$ và khả tích trên $[0;x]$, $\forall x\in(0;1)$.

* Với a = 1, một mặt ta có $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{-1}=+\infty$.

Mặt khác,

$$\frac{t}{\ln^2 t}=\frac{t}{\ln^2(1+(t-1))}\sim\frac{1}{(t-1)^2}\text{(khi } t\to 1);$$

$$\int_0^1\frac{dt}{(t-1)^2}=+\infty,\text{suy ra } \lim_{x\to 1}\int_0^x\frac{t}{\ln^2 t}dt=\infty.$$

Từ đó, theo quy tắc L'Hôpital ta có

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\int_0^x\frac{t}{\ln^2 t}dt=\lim_{x\to 1^-}\frac{\int_0^x\frac{t}{\ln^2 t}dt}{(1-x)^{-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{x}{\ln^2 x}}{(1-x)^{-2}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x(1-x)^2}{\ln^2(1+(1-x))}=1.$$

* Với $a\neq 1$, $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^a\int_0^x\frac{t}{\ln^2 t}dt$

$$=\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{a-1}\left[(1-x)\int_0^x\frac{t}{\ln^2 t}dt\right]=\begin{cases}0 & \text{khi } a>1;\\ +\infty & \text{khi } a<1.\end{cases}$$

Đáp số: $I(a)=\begin{cases}+\infty & \text{khi } a<1;\\ 1 & \text{khi } a=1;\\ 0 & \text{khi } a>1.\end{cases}$

Bài 4.1.6. Cho $f(z)=\int_0^z\sqrt{x^4+(z-z^2)^2}\,dx$.

Tìm giá trị lớn nhất của f(z) trên đoạn [0;1].

Giải. Rõ ràng hàm dưới dấu tích phân dương.

$$f'(z)=\left(z^4+\left(z-z^2\right)^2\right)^{1/2}+z(1-z)(1-2z)\int_0^z\left(x^4+z^2(1-z)^2\right)^{-1/2}dx.$$

* Với $0<z\le\frac{1}{2}$, $f'(z)>0$.

* Với $\frac{1}{2}<z\le 1$, vì $\frac{1}{\sqrt{x^4+z^2(1-z)^2}}<\frac{1}{z(1-z)}$ suy ra tích phân nhỏ hơn $\frac{1}{1-z}$ $\Rightarrow f'(z)>\sqrt{z^4+z^2(1-z)^2}-z(2z-1)>0$ với $\frac{1}{2}<z<1$.

Từ đó $\operatorname{Max} f(z)=f(1)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$.

Bài 4.1.7. Chứng tỏ rằng hàm số

$$F(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t},\ x>1$$

là đơn điệu và tìm tập giá trị của nó.

Giải. $F'(x)=\frac{x-1}{\ln x}>0$, $(x>1)$.

Vậy F(x) là đồng biến và nó là hàm đơn điệu, tập giá trị là $(F(1+);F(+\infty))$. Vì $\frac{1}{\ln t}$ là nghịch biến, ta có

$F(x)\ge\left(x^2-x\right)\frac{1}{\ln x^2}\to\infty\ (x\to\infty)$. Vậy $F(+\infty)=+\infty$.

Để tính $F(1+)$, đặt $t=e^v$ ta được $F(x)=\int_{\ln x}^{2\ln x}\frac{e^v}{v}dv$. Từ đó

$$F(x)<e^{2\ln x}\int_{\ln x}^{2\ln x}\frac{dv}{v}=x^2\ln 2.$$

Tương tự $F(x)>e^{\ln x}\int_{\ln x}^{2\ln x}\frac{dv}{v}=x\ln 2$.

Theo định lí kẹp, $F(1+)=\ln 2$. Suy ra tập giá trị là $(\ln 2;+\infty)$.

§4.2. ĐỔI BIẾN SỐ

Các phép đổi biến với tích phân bất định đều sử dụng được với tích phân xác định. Tuy nhiên với tích phân xác định còn có 3 phép đổi biến sau rất hiệu quả.

i) Đổi biến "tráo cận"

* $\int_0^a f(x)dx$ Đặt $x = a - t\ (\Leftrightarrow t = a - x\ ;\ t:\ a \to 0)$.

* $\int_{-a}^a f(x)dx$ Đặt $x = -t\ (\Leftrightarrow t = -x\ ;\ t:\ a \to -a)$.

* $\int_a^b f(x)dx$ Đặt $x = (a+b) - t\ (\Leftrightarrow t = (a+b) - x\ ;\ t: b \to a)$.

* $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ Đặt $x = \frac{1}{t}\left(\Leftrightarrow t = \frac{1}{x}; t\ :\ +\infty \to 0\right)$.

ii) Đổi biến "tịnh tiến". Đối với tích phân $\int_a^b f(x)dx$,

+ Nếu muốn đưa cận trên về 0, ta đặt $t = x - b$;

+ Nếu muốn đưa cận dưới về 0, ta đặt $t = x - a$;

+...

iii) Đổi biến "hàm ngược"

Giả sử $f: [a; b] \to [A; B]$ với $[f(a); f(b)] = [A; B]$ có hàm ngược $x = f^{-1}(y)$: $[A; B] \to [a; b]$ khả vi liên tục. Khi đó, đổi biến $x = f^{-1}(y)$ được $\int_a^b f(x)dx = \int_A^B y\left(f^{-1}(y)\right)' dy$.

Bài 4.2.1. Chứng minh rằng $\forall x \geq 0$, phương trình

$$z^3 + xz = 8$$

luôn có 1 nghiệm dương duy nhất $z = z(x)$. Hãy tính

$$A = \int_0^7 z^2(x)dx.$$

Giải. $\forall x \geq 0$, đặt $\varphi(z) = z^3 + xz - 8$, $z \geq 0$ (x là tham số), ta được $\varphi'(z) = 3z^2 + x > 0$. Vậy $\varphi(z)$ đồng biến với bảng biến thiên

z	0	$+\infty$
φ'	$+$	
φ	-8 $\nearrow$	$+\infty$

Từ đó, với $x \geq 0$, phương trình $\varphi(z) = 0$ luôn có một nghiệm dương duy nhất, kí hiệu là z = z(x). Gọi hàm ngược của nó là x = x(z). Ta có thể tìm được công thức cho x(z). Quả vậy, từ chỗ $z^3 + xz - 8 = 0$. Suy ra

$$x = x(z) = \frac{8 - z^3}{z},\ z > 0\ ;\ x = 0 \Leftrightarrow z = 2;\ \ x = 7 \Leftrightarrow z = 1;\ dx = \frac{-2z^3 - 8}{z^2}dz.$$

Bây giờ, đối với tích phân đã cho, đổi biến x = x(z) ta được

$$A = \int_0^7 z^2(x)dx = \int_2^1 z^2 \frac{-2z^3 - 8}{z^2}dz = \frac{31}{2}.$$

Bài 4.2.2. Chứng minh rằng tích phân $\int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)(1 + x^\alpha)}$ không phụ thuộc vào $\alpha \in \mathbf{R}$.

Giải. $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2)(1 + x^\alpha)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)(1 + x^\alpha)} = I_1 + I_2$.

Đối với tích phân thứ nhất, đặt $t = \frac{1}{x}$; $t : \infty \to 1$ ta được

$$I_1 = \int_\infty^1 \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\left(1 + \frac{1}{t^\alpha}\right)}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_1^\infty \frac{t^\alpha\, dt}{(1 + t^2)(1 + t^\alpha)}.$$

Vậy $I = I_1 + I_2 = \int_1^\infty \frac{1 + t^\alpha}{(1 + t^2)(1 + t^\alpha)}dt = \int_1^\infty \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{4}$.

Nhận xét. Ta đã tách miền lấy tích phân [0;+∞] thành hai đoạn: [0;1] và [1; + ∞], sau đó giữ nguyên một tích phân, dùng đổi biến ở tích phân kia để đưa về cùng cận.

Cách 2. Đổi biến tráo cận $x = \frac{1}{t}$.

Bài 4.2.3. Tính $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\mathrm{tg}x)^{\sqrt{2}}}$.

Giải. Đặt $t = \mathrm{tg}x$, $\qquad I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)\left(1 + t^{\sqrt{2}}\right)}$.

Bây giờ xử lý tương tự như Bài 4.2.2, ta được $I = \frac{\pi}{4}$. Cũng có thể đổi biến tráo cận $x = \frac{\pi}{2} - t$ (xem thêm Bài 4.2.11).

Bài 4.2.4. Chứng minh rằng nếu f(x) là hàm liên tục, tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và bằng I thì $\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right)dx$ cũng hội tụ và bằng I.

Giải. Đặt

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right)dx = \int_{-\infty}^{0} f\left(x - \frac{1}{x}\right)dx + \int_{0}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right)dx = J_1 + J_2.$$

Đặt biến mới $t = x - \frac{1}{x}$.

* Với J_1, $x < 0$. Khi đó $x = \frac{t - \sqrt{t^2+4}}{2}$,

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt.$$

* Với J_2, $x > 0$. Khi đó $x = \frac{t + \sqrt{t^2+4}}{2}$,

$$J_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt.$$

Vì tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn tương đương, tích phân

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}dt$ hội tụ. Cộng J_1 với J_2 ta được đpcm.

Lưu ý. Sẽ không hợp lệ nếu ta dùng đổi biến $t = x - \frac{1}{x}$ cho tích phân J vì khi đó, t chạy "2 lần" trên $(-\infty; +\infty)$ khi x biến thiên từ $-\infty$ đến $+\infty$.

Bài 4.2.5. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos a \cos x}$, với $a \in (0; \pi)$.

Giải. Đặt $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, khi đó $t: 0 \to 1$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $x = 2\mathrm{arctg}t$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Từ đó ta có

$$I=\int_0^1\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+\cos a\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2+\cos a-t^2\cos a}$$

$$=2\int_0^1\frac{dt}{\left(t^2+\frac{1+\cos a}{1-\cos a}\right)(1-\cos a)}=\frac{1}{\sin^2\frac{a}{2}}\int_0^1\frac{dt}{t^2+\cot g^2\frac{a}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sin^2\frac{a}{2}}\;\frac{1}{\cot g\frac{a}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\cot g\frac{a}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{a}{\sin a}.$$

Bài 4.2.6. Tính $A=\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^n x\,dx$.

Giải. Đặt $a_n=n\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^n x\,dx$. Đổi biến $t=\operatorname{tg}x$ ta được

$$a_n=n\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt=n\int_0^1\frac{t^{n-2}}{1+t^2}\left(1+t^2-1\right)dt$$

$$=n\int_0^1 t^{n-2}dt-n\int_0^1\frac{t^{n-2}}{1+t^2}dt=\frac{n}{n-1}-\frac{n}{n-2}a_{n-2},\ n>2.$$

Nếu tồn tại giới hạn $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ thì bằng cách cho qua giới hạn, ta được $A=1-A\Leftrightarrow A=\frac{1}{2}$. Từ đó chúng ta xét độ lệch $\left|a_n-\frac{1}{2}\right|$. Ta có

$$\left|a_n-\frac{1}{2}\right|=\left|n\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt-\frac{n}{2}\int_0^1 t^{n-1}dt\right|$$

$$=n\int_0^1\frac{t^{n-1}(1-t)^2}{2\left(1+t^2\right)}dt\le\frac{n}{2}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^2dt$$

$$=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\to 0\ (n\to\infty).$$

Vậy A = 1/2.

Cách 2. Ta có ý định làm trội và làm non hàm dưới dấu tích phân của tích phân a_n. Muốn vậy trước hết ta nhận thấy $\frac{1}{2}<\frac{1}{1+t^2}<\frac{1}{2t}$. Từ đó

$$n\frac{t^n}{2} < n\frac{t^n}{1+t^2} < n\frac{t^{n-1}}{2}, \text{ (với } 0 < t < 1).$$

Lấy tích phân hai vế trên [0;1] ta được

$$\frac{n}{2(n+1)} < a_n < \frac{1}{2}. \text{ Suy ra } A = \frac{1}{2} \text{ theo định lí kẹp.}$$

Bài 4.2.7. Giả sử f(x) liên tục, tuần hoàn chu kì T. Chứng tỏ rằng $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \quad \forall a \in \mathbf{R}$.

Giải. $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$. (1)

Đổi biến tịnh tiến t = x - T đối với tích phân thứ ba ở vế phải, lưu ý đến tính tuần hoàn của f(x), ta được:

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx.$$

Thay vào (1) ta được đpcm.

Bài 4.2.8. Chứng tỏ rằng hàm số $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$, trong đó f(x) là hàm liên tục, tuần hoàn chu kì T, là tổng của hàm tuyến tính và hàm tuần hoàn chu kì T.

Giải. Bằng cách đổi biến t = Tu, ta chỉ cần chứng minh khẳng định cho trường hợp chu kì T = 1. Với x > 0, ta có

$$F(x) = \int_{x_0}^0 f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt + \ldots + \int_{[x]-1}^{[x]} f(t)dt + \int_{[x]}^x f(t)dt$$

$$= A + B[x] + J, \qquad (1)$$

trong đó $A = \int_{x_0}^0 f(t)dt$; $B = \int_0^1 f(t)dt$; $J = \int_{[x]}^x f(t)dt \ ([x] \le x < [x]+1)$.

Đối với tích phân J, dùng dổi biến tịnh tiến $u = t - [x]$, kể đến f(x) là hàm tuần hoàn chu kì 1, ta được

$$J = \int_0^{x-[x]} f(u+[x])du = \int_0^{x-[x]} f(u)du = \int_0^{R(x)} f(u)du \qquad (2)$$

trong đó $R(x) = \{x\} = x - [x]$ (phần phân của x).

Thay (2) vào (1)

$$F(x) = A + Bx - BR(x) + \int_0^{R(x)} f(u)du. \qquad (3)$$

Lưu ý rằng, $-BR(x)+\int_0^{R(x)} f(u)du$ là hàm tuần hoàn chu kì 1 (do R(x) tuần hoàn), ta thu được khẳng định với $x \ge 0$.

Tương tự, trường hợp $x < 0$ công thức (3) vẫn nghiệm đúng.

Bài 4.2.9. Tính $I=\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

Giải. Đổi biến tráo cận $x=(2\pi+\pi)-t=3\pi-t$ ta được

$$I=\int_{2\pi}^{\pi} \frac{(3\pi-t)\sin(3\pi-t)}{1+\cos^2(3\pi-t)}(-dt)=\int_{\pi}^{2\pi} \frac{(3\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

$$=\int_{\pi}^{2\pi} \frac{3\pi\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}-\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

Vậy $$2I=3\pi\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}=-3\pi\int_{\pi}^{2\pi} \frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x}$$

$$=-3\pi\int_{-1}^{1} \frac{du}{1+u^2}=\frac{-3\pi^2}{2} \Rightarrow I=-\frac{3\pi^2}{4}.$$

Bài 4.2.10. Tính

a) $I=\int_0^{2\pi} \sin(2002x+\sin x)\,dx$;

b) $J=\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x+\cos x}dx$.

Giải.

a) Dùng đổi biến tráo cận $t=2\pi-x$ ta được:

$$I=\int_{2\pi}^{0} \sin(2002(2\pi-t)+\sin(2\pi-t))(-dt)$$

$$=\int_0^{2\pi} \sin(-2002t-\sin t)\,dt=-\int_0^{2\pi} \sin(2002x+\sin x)\,dx$$

$$\Rightarrow I=0.$$

b) Dùng đổi biến tráo cận $t=\frac{\pi}{2}-x$ ta được

$$J=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x+\cos x}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Bài 4.2.11. Cho a > 0, còn f(x) là hàm liên tục trên (0;a) và $\forall x \in (0;a)$,

$$\begin{cases} f(x) \neq -1; \\ f(x)\, f(a-x) = 1. \end{cases}$$

Tính $\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$.

Áp dụng, tính $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+tg^{2000}x}$.

Giải. Dùng đổi biến tráo cận $t = a - x$, ta được

$$\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \int_a^0 \frac{-dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{dt}{1+\frac{1}{f(t)}} = \int_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)}dx.$$

$$\Rightarrow \ 2I = \int_0^a \left[\frac{1}{1+f(x)} + \frac{f(x)}{1+f(x)}\right]dx = a \Rightarrow I = \frac{a}{2}.$$

Rõ ràng tgx có tính chất đã nêu, từ đó

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+tg^{2000}x} = \frac{\pi}{4}.$$

Bài 4.2.12. Cho $U = [-100;-10] \cup \left[\frac{1}{101};\frac{1}{11}\right] \cup \left[\frac{101}{100};\frac{11}{10}\right]$.

Chứng minh rằng $\int\limits_U \frac{(x^2-x)^2}{(x^3-3x+1)^2}dx$ là một số hữu tỉ.

Giải. Sẽ rất khó khăn khi ta dùng phương pháp hệ số bất định để phân tích hàm dưới dấu tích phân thành tổng các phân thức đơn giản.

Phân tích kĩ hơn, mẫu số có 3 không điểm cạnh -2; 1/2 và 3/2 mà không nằm trên mỗi đoạn lấy tích phân. Cần nhớ rằng, ta lấy tích phân trên ba đoạn, thế thì phải chăng sẽ là tiện lợi nếu ta dùng phép đổi biến phù hợp để biến các đoạn này thành đoạn kia ? Một trong các đổi biến đề nghị là $t = \frac{1}{1-x}\left(\Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{t}\right)$, nó biến đoạn $\left[\frac{1}{101};\frac{1}{11}\right]$ thành $\left[\frac{101}{100};\frac{11}{10}\right]$, $\left[\frac{101}{100};\frac{11}{10}\right]$ thành $[-100;-10]$. Ngoài ra,

$$\frac{(x^2-x)^2}{(x^3-3x+1)^2} = \frac{(t^2-t)^2}{(t^3-3t+1)^2}; \qquad dx = \frac{1}{t^2}dt. \text{ Từ đó}$$

$$* \ I_2 = \int_{1/101}^{1/11} f(x)dx = \int_{101/100}^{11/10} \frac{\left(t^2-t\right)^2 dt}{\left(t^3-3t+1\right)^2 t^2}.$$

$$* \ I_2 + I_3 = \int_{101/100}^{11/10} \frac{\left(x^2-x\right)^2}{\left(x^3-3x+1\right)^2}\left[1+\frac{1}{x^2}\right]dx$$

$$= \int_{-100}^{-10} \frac{\left(x^2-x\right)^2}{\left(x^3-3x+1\right)^2}\,\frac{2x^2-2x+1}{x^2(x-1)^2}dx = \int_{-100}^{-10}\frac{2x^2-2x+1}{\left(x^3-3x+1\right)^2}dx$$

$$* \ I = I_1 + I_2 + I_3 = \int_{-100}^{-10}\frac{\left(x^2-x+1\right)^2}{\left(x^3-3x+1\right)^2}dx.$$

Một dạng đề nghị cho nguyên hàm là $\dfrac{ax^2+bx+c}{x^3-3x+1}$.

Đạo hàm hàm này, ta sẽ thành công với a = -1, b = 1, c = 0.

Vậy $I = \left.\dfrac{-x^2+x}{x^3-3x+1}\right|_{-100}^{-10}$, rõ ràng là số hữu tỉ.

Bài 4.2.13. Cho f(x) là hàm liên tục trên $[0;T]$ còn g(x) là hàm liên tục và tuần hoàn với chu kì T. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)g(nx)dx = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx\int_0^T g(x)dx.$$

Giải. Bằng phép đổi biến $nx = t \Leftrightarrow x = t/n$, ta được

$$I_n = \int_0^T f(x)g(nx)dx = \frac{1}{n}\int_0^{nT} f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)T}^{kT} f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)dt.$$

Đối với các tích phân $\int_{(k-1)T}^{kT} f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)dt$, dùng đổi biến tịnh tiến $u = t-(k-1)T$, từ tính tuần hoàn của g(x) ta có:

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^T\left[f\left(\frac{u}{n}\right)+f\left(\frac{u}{n}+\frac{T}{n}\right)+...+f\left(\frac{u}{n}+\frac{n-1}{n}T\right)\right]g(u)du.$$

Do f(x) liên tục trên $[a;T]$ nên

$$\frac{T}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{u}{n}+\frac{(k-1)}{n}T\right) \rightrightarrows \int_0^T f(t)dt \quad (n\to\infty).$$

Lại do g(x) liên tục trên $[a;b]$ nên dãy hàm $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{u}{n}+\frac{k-1}{n}T\right)g(u)\right\}$ hội tụ đều. Chuyển qua giới hạn dưới dấu tích phân ta được

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{T}\int_0^T\left(\int_0^T f(t)dt\right) g(u)du = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx\int_0^T g(x)dx.$$

Bài 4.2.14. Tính $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+3\cos^2 nx}\,dx$.

Giải. Ta có

$$\int_0^\pi \sin x dx = 2;\ \int_0^\pi\left(1+3\cos^2 x\right)^{-1} dx = 2\int_0^{\pi/2}\left(1+3\cos^2 x\right)^{-1} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Theo Bài 4.2.13, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin x dx}{1+3\cos^2 nx}\,dx = \frac{1}{\pi}2\frac{\pi}{2} = 1.$$

Bài 4.2.15. Giả sử $f:[0;1]\to \mathbf{R}$ liên tục sao cho

$$x f(y)+y f(x)\le 1,\ \forall x,y\in[0;1].$$

a) Chứng minh rằng $I=\int_0^1 f(x)dx \le \frac{\pi}{4}$.

b) Liệu có thể xảy ra dấu " = " ở câu (a).

Giải.

a) Đổi biến $x=\sin t$ và sau đó $x=\cos t$ ta được

$$I=\int_0^{\pi/2} f(\sin t)\cos t\, dt;$$

$$I=\int_{\pi/2}^{0} f(\cos t)(-\sin t)dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos t)\sin t\, dt \ .$$

Từ điều kiện hàm f suy ra

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[f(\sin t)\cos t + f(\cos t)\sin t\right]dt \le \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1dt = \frac{\pi}{4}\ .$$

b) Xảy ra dấu " = ", chẳng hạn với hàm $y=\sqrt{1-x^2}$. (Đặt $x=\sin\theta$, $y=\sin\varphi$ thì $x f(y)+y f(x) = \sin(\theta+\varphi)\le 1$).

Bài 4.2.16. Tính tích phân $I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x}\,dx$

thông qua tích phân $J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$.

Giải. Xét phép đổi biến tráo cận x = - t ta có

$$I_n = \int_{\pi}^{-\pi} \frac{\sin(-nt)}{(1+2^{-t})\sin(-t)}(-dt) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2^x \sin nx}{(1+2^x)\sin x}dx$$

Vậy $2I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+2^x)\sin nx}{(1+2^x)\sin x}\,dx = J_n$ hay $I_n = \frac{1}{2}J_n$.

Lưu ý. Sử dụng công thức Euler $\sin nx = \frac{1}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right)$ có thể tìm được $J_n = 0$ nếu n chẵn, $J_n = 2\pi$ nếu n lẻ.

Cũng nhận thấy $J_n - J_{n-2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx - \sin(n-2)x}{\sin x}dx$

$$= 2\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-1)x\,dx = 0$$ và suy ra giá trị của J_n.

Bài 4.2.17. Giả sử f(x) khả vi liên tục trên (a;b) sao cho

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty \text{ và}$$

$$f'(x) + f^2(x) \ge -1, \qquad \forall x \in (a;b).$$

Chứng minh rằng $b - a \ge \pi$. Cho một ví dụ để $b - a = \pi$.

Giải. Từ giả thiết ta có

$f'(x) \ge -\left(1 + f^2(x)\right) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} \ge -1, \forall x \in (a;b)$. Lấy tích phân 2 vế

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \operatorname{arctg} f(x)\Big|_a^b = -\pi \ge -1\,(b-a) \text{ hay } \pi \le b-a.$$

Dấu " = " xảy ra, chẳng hạn khi $b = -a = \frac{\pi}{2}$; $f(x) = -\operatorname{tg} x$.

Bài 4.2.18. Tính $\int_0^1 \left(x - x^2\right)^{3/2} \arccos(1-2x)dx$.

Giải. Đặt $t = \arccos(1-2x)$; $t: 0 \to \pi$. Khi đó

$$x = \frac{1-\cos t}{2}\;;\; x - x^2 = \frac{\sin^2 t}{4}. \text{ Từ đó } I = \frac{1}{16}\int_0^{\pi} t\sin^4 t\,dt.$$

Hạ bậc $\sin^4 t$ rồi tích phân từng phần ta thu được $I = \dfrac{3\pi^2}{256}$.

Bài 4.2.19. Tính tích phân $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{2+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$.

Giải. Vì hàm dưới dấu tích phân chẵn nên $I = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{2+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$.

Đặt $x = \sin t \Leftrightarrow t = \arcsin x; t: 0 \to \dfrac{\pi}{2}$ ta được

$$I = 2\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t\; dt}{2+\sqrt{\left(\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}\right)^2}}$$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{2\cos^2\frac{t}{2}-1}{1+\cos\frac{t}{2}}dt = \int_0^{\pi/2}\left(2\cos\frac{t}{2}-2+\frac{1}{2\cos^2(t/4)}\right)dt \qquad = 4\sqrt{2}-\pi-2.$$

Bài 4.2.20. Chứng tỏ rằng $\forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$; $\forall y \in \mathbf{R}$ thì

$$y = \int_0^x \frac{dt}{\cos t} \Leftrightarrow x = \int_0^y \frac{du}{\operatorname{ch} u} \quad \left(\operatorname{ch} u = \left(e^u + e^{-u}\right)/2\right).$$

Giải. Xét hàm $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\cos t} = \ln\frac{1+\sin x}{\cos x}$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right)$

với bảng biến thiên

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
$f'(x)=\dfrac{1}{\cos x}$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$-\infty$

Như vậy, tồn tại hàm ngược khả vi liên tục $x = f^{-1}(y),\ y \in (-\infty; +\infty)$ của hàm $y = f(x)$. Đối với tích phân $\int_0^y \frac{du}{\operatorname{ch} u}$, xét phép đổi biến $u = f(x)$.

$$du = f'(x)dx = \frac{1}{\cos x}dx;\ \frac{1}{\operatorname{ch} u} = \frac{1}{\operatorname{ch}(f(x))} = \cos x.$$ Vậy

$$\int_0^y \frac{du}{\operatorname{ch} u} = \int_0^{f^{-1}(y)} \frac{1}{\cos x}\cos x\,dx = f^{-1}(y).$$

* Nếu $x = \int_0^y \frac{du}{\operatorname{ch} u}$ thì $x = f^{-1}(y)$ hay $y = f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cos t}$;

* Nếu $y = \int_0^y \frac{dt}{\cos t}$ thì $y = f(x)$ hay $x = f^{-1}(y) = \int_0^y \frac{du}{\operatorname{ch} u}$.

§4.3. TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Bài 4.3.1. Xét đa thức Lagrange

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right], n \in \mathbf{N}^*.$$

Chứng minh rằng, nến f(x) là đa thức bậc m ($m < n$) thì

$$\int_{-1}^1 f(x)P_n(x)dx = 0.$$

Giải. Trước hết, theo công thức Leibnitz, dễ chứng minh rằng

$$\left.\frac{d^k}{dx^k}\left(x^2-1\right)^n\right|_{-1}^1 = 0,\ \forall k = 0,1,\dots,n-1.$$

Bây giờ, lấy tích phân từng phần nhiều lần, ta được

$$\int_{-1}^1 f(x)P_n(x)dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^1 f(x)d\left(\frac{d^{(n-1)}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{2^n n!}f(x)\frac{d^{(n-1)}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n\Bigg|_{-1}^1 - \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^1 \frac{d^{(n-1)}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n f'(x)dx$$

$$= -\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^1 \frac{d^{(n-1)}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n f'(x)dx$$

$$= \dots = (-1)^n\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^1 \left(x^2-1\right)^n f^{(n)}(x)dx = 0\ \left(\text{do } f^{(n)}(x) \equiv 0\right).$$

Nhận xét. Lưu ý rằng đối với tích phân $\int_a^b h(x)k(x)dx$, bằng cách đưa nhân tử k(x) vào dấu vi phân d(.) rồi lấy tích phân từng phần, ở tích phân tạo thành, nhân tử k(x) sẽ "được lấy tích phân", nhân tử h(x) còn lại sẽ "bị lấy đạo hàm". Như vậy, trong trường hợp cả hai nhân tử là đa thức, một nhân tử có bậc được nâng lên, một nhân tử có bậc bị hạ xuống. Nếu lấy tích phân từng phần nhiều lần, một nhân tử sẽ có bậc bằng 0. Nhận xét này cũng có ích đối với bài tập sau.

Bài 4.3.2. Cho m, n là hai số nguyên không âm sao cho m + n = 12. Đặt

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx.$$

Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của $I_{m,n}$.

Giải. Tích phân từng phần ta được

$$I_{m,n} = \frac{1}{m+1}\int_0^1 (1-x)^n dx^{m+1}$$

$$= \frac{1}{m+1}(1-x)^n x^{m+1}\Big|_0^1 + \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx$$

$$= \frac{n}{m+1} I_{m+1,\ n-1}.$$

Áp dụng liên tiếp công thức này dẫn tới

$$I_{m,n} = \frac{n}{m+1}\,\frac{n-1}{m+2}\, I_{m+2,n-2} = \ldots = \frac{n}{m+1}\,\frac{n-1}{m+2}\cdots\frac{1}{m+n} I_{m+n,0}.$$

Ta có

$$I_{m+n,0} = \int_0^1 x^{m+n}dx = \frac{1}{m+n+1}.$$

Suy ra $I_{m,n} = \dfrac{n!\ m!}{(n+m)!\ (m+n+1)} = \dfrac{1}{(m+n+1)C_{m+n}^n} = \dfrac{1}{13\ C_{12}^n}$.

Trong dãy $C_{12}^0, C_{12}^1, ..., C_{12}^{12}$, lớn nhất là C_{12}^6, bé nhất là $C_{12}^0 = C_{12}^{12} = 1$. Vậy

$$\text{Max } I_{m,n} = I_{0,12} = I_{12,0} = \frac{1}{13}.$$

$$\text{Min } I_{m,n} = I_{6,6} = \frac{1}{13.\ C_{12}^6} = \frac{1}{12012}.$$

Bài 4.3.3.

a) Tìm $I = \int_0^{\pi} \sin^{n-1}x\,\cos(n+1)x\,dx$, $n \in \mathbf{N}^*$;

b) Tìm $J = \int_0^{\pi} \cos^{n-1}x\,\sin(n+1)x\,dx$, , $n \in \mathbf{N}^*$.

Giải. $I = \int_0^{\pi} \sin^{n-1}x\,\cos nx\,\cos x dx - \int_0^{\pi} \sin^{n-1}x\,\sin nx\,\sin x dx$

Tích phân từng phần với số hạng thứ nhất ta được

$$I = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx\, d\left(\sin^n x\right) - \int_0^{\pi} \sin^n x\,\sin nx\,dx\ .$$

$$= \frac{1}{n}\cos nx\,\sin^n x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin^n x\,\sin nx\,dx - \int_0^{\pi} \sin^n x\,\sin nx\,dx = 0\,.$$

b) Tương tự J = 0.

Bài 4.3.4. Giả sử p(x) là đa thức với hệ số thực và có bậc ≥ 1. Chứng minh rằng chỉ có một số hữu hạn giá trị α sao cho

$$\int_0^{\alpha} p(x)\sin x dx = \int_0^{\alpha} p(x)\cos x dx = 0\,.$$

Giải. Lấy tích phân từng phần liên tiếp ta được

$$\int p(x)\sin x dx = \left(-p(x) + p''(x) - p^{(4)}(x) + \ldots\right)\cos x$$
$$+\left(p'(x) - p'''(x) + p^{(5)}(x) - \ldots\right)\sin x + C$$
$$= -d(x)\cos x + d'(x)\sin x + C.$$

trong đó $d(x) = p(x) - p''(x) + p^{(4)}(x) - \ldots$ là đa thức cùng bậc với p(x).

Từ đó

$$\int_0^{\alpha} p(x)\sin x\,dx = -d(\alpha)\cos\alpha + d'(\alpha)\sin\alpha + d(0). \qquad (1)$$

Tương tự

$$\int_0^{\alpha} p(x)\cos x\,dx = d(\alpha)\sin\alpha + d'(\alpha)\cos\alpha - d'(0). \qquad (2)$$

Từ (1), (2) và giả thiết ta đi đến

$$d(\alpha) = d'(0)\sin\alpha + d(0)\cos\alpha\ . \qquad (3)$$

Rõ ràng $|d(\alpha)| \le |d'(0)| + |d(0)| = K$.

Vì d(x) cùng bậc với p(x) nên $|d(x)| > K \ \forall |x| > K'$ nào đó. Nói khác, mọi nghiệm α của (3) phải nằm trong đoạn $[-K'; K']$.

Mặt khác, trên đoạn hữu hạn $[-K'; K']$; p(x) cũng như sinx có hữu hạn nghiệm, do đó p(x) sinx chỉ có hữu hạn nghiệm. Theo định lí Rolle, $\int_0^x p(t)\sin t dt$ cũng chỉ có hữu hạn nghiệm. Tương tự đối với $\int_0^x p(t)\cos t\, dt$.

Lưu ý. Từng phương trình riêng biệt - chẳng hạn $\int_0^\alpha p(x)\sin x\, dx = 0$ - có vô số nghiệm trên **R**.

Bài 4.3.5. Tính $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(\pi x) - \operatorname{arctg}x}{x} dx$.

Giải. Tích phân từng phần ta được

$$I = \int_0^\infty (\operatorname{arctg}(\pi x) - \operatorname{arctg}x) d(\ln x)$$

$$= (\operatorname{arctg}(\pi x) - \operatorname{arctg}x)\ln x\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(\frac{\pi}{1+(\pi x)^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)\ln x dx. \qquad (*)$$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{arctg}(\pi x) - \operatorname{arctg}x)\ln x$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg}(\pi x)}{x} - \frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)x\ln x = (\pi - 1)\lim_{x\to 0} x\ln x = 0.$$

Mặt khác, theo quy tắc L'Hôpital ta có

$$\lim_{x\to\infty}(\operatorname{arctg}(\pi x) - \operatorname{arctg}x)\ln x = \lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}(\pi x) - \operatorname{arctg}x}{x^{-1}}\,\frac{\ln x}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{1+(\pi x)^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)(-x^2)\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \left(1 - \frac{1}{\pi}\right)0 = 0.$$

Như vậy, số hạng thứ nhất ở vế phải (*) bằng 0. Đối với số hạng thứ hai, đặt $t = \pi x$ ta được

$$\int_0^\infty \frac{\pi}{1+(\pi x)^2}\ln x dx = \int_0^\infty \frac{\ln(t/\pi)}{1+t^2}dt = \int_0^\infty \frac{\ln x - \ln\pi}{1+x^2}dx.$$

Từ đó

$$-\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{1+\pi^2 x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)\ln x dx = \ln\pi\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\ln\pi.$$

Tóm lại, $I = \frac{\pi}{2}\ln\pi$.

Bài 4.3.6. Cho đa thức P(x) thoả mãn điều kiện P(a) = P(b) = 0 với a < b. Đặt $M = \underset{a \le x \le b}{Max}\left|P''(x)\right|$. Chứng minh rằng

$$\left|\int_a^b P(x)dx\right| \le \frac{1}{12}M(b-a)^3.$$

Giải. Tích phân từng phần ta được

$$\int_a^b P(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b P(x)d\big((x-a)+(x-b)\big)$$

$$= \frac{1}{2}\big((x-a)+(x-b)\big)P(x)\Big|_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b\big((x-a)+(x-b)\big)P'(x)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_a^b P'(x)\,d(x-a)(x-b) = \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)P''(x)dx.$$

Vậy $\left|\int_a^b P(x)dx\right| \le \frac{1}{2}\int_a^b\left|(x-a)(x-b)P''(x)\right|dx$

$$\le \frac{M}{2}\int_a^b\left|(x-a)(x-b)\right|dx = \frac{M}{12}(b-a)^3.$$

Bài 4.3.7. Tính tích phân $\int_0^{\pi/2}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$.

Giải.

$$I = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos x}e^x dx + \int_0^{\pi/2}\frac{\sin x\, e^x}{1+\cos x}dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{e^x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx + \int_0^{\pi/2}tg\frac{x}{2}e^x dx.$$

$$= \int_0^{\pi/2}e^x d\left(tg\frac{x}{2}\right) + \int_0^{\pi/2}tg\frac{x}{2}e^x dx = e^x tg\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi/2} = e^{\pi/2}.$$

Cũng có thể nhận được kết quả bằng cách biểu diễn sinx, cosx qua $tg\frac{x}{2}$ rồi dùng đẳng thức

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+1+2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\cos^2(x/2)}+\mathrm{tg}\frac{x}{2}.$$

Bài 4.3.8. Tính $\int_{3\pi/4}^{\pi}\left(\mathrm{tg}^2x-\mathrm{tg}x\right)e^{-x}dx$.

Giải.

$$I=\int_{3\pi/4}^{\pi}\mathrm{tg}^2x\,e^{-x}dx-\int_{3\pi/4}^{\pi}\mathrm{tg}x\,e^{-x}dx=I_1-I_2.$$

Dùng tích phần từng phần với số hạng thứ hai ta được

$$I_2=\int_{3\pi/4}^{\pi}\mathrm{tg}x\;e^{-x}dx=-\int_{3\pi/4}^{\pi}\mathrm{tg}x\,de^{-x}$$

$$=-\;\mathrm{tg}x\;e^{-x}\Big|_{3\pi/4}^{\pi}+\int_{3\pi/4}^{\pi}e^{-x}\left(1+\mathrm{tg}^2x\right)dx=-e^{-\pi}+I_1.$$

Vậy $I=e^{-\pi}$.

Bài 4.3.9. Tính $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^n\int_0^{\pi}\cos^n x\cos nx\,dx\right)$.

Giải.

Đặt $u_n=\int_0^{\pi}\cos^n x\cos nx\,dx$, tích phân từng phần ta được

$$u_n=\frac{1}{n}\cos^n x\sin nx\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\sin nx\sin x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\left[\cos(n-1)x-\cos(n+1)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\left[\cos(n-1)x-\cos nx\cos x+\sin nx\;\;\sin x\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[u_{n-1}-u_n-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\;d\left(\cos^n x\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[u_{n-1}-u_n-\frac{1}{n}\sin nx\;\cos^n x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos^n x\;\cos nx dx\right]=\frac{1}{2}u_{n-1}.$$

Vậy $u_n=\frac{1}{2}u_{n-1}=\frac{1}{2^2}u_{n-2}=...=\frac{1}{2^{n-1}}u_1=\frac{\pi}{2^n}$.

Từ đó, giới hạn cần tìm là $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\frac{\pi}{2^n}=\pi$.

§4.4. ĐỊNH LÍ VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Bài 4.4.1. Cho f(x) liên tục trên $[a;b]$ sao cho $\forall[\alpha;\beta]\subset[a;b]$ ta có

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| \le M|\beta-\alpha|^{1+\delta}, \text{ với } M>0;\ \delta>0.$$

Chứng minh rằng $f(x)\equiv 0$ trên $[a;b]$.

Giải. $\forall x_0 \in [a;b]$ chọn $h \in \mathbf{R}$ đủ bé để $x_0+h\in[a;b]$. Khi đó, theo định lí trung bình tích phân, tồn tại c giữa x_0 và x_0+h để

$$|f(c)h| = \left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\right|dx \le M|h|^{1+\delta}.$$

Suy ra $|f(c)| \le M|h|^{\delta}$.

Cho $h\to 0$ ta được $|f(x_0)|\le 0,\ \forall x_0\in[a;b]$, nói khác $f(x)\equiv 0$ trên $[a;b]$.

Bài 4.4.2. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln^2 t}dt$.

Giải. Theo định lí trung bình tích phân, tồn tại $c\in(x;x^2)$ sao cho

$$I_x=\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln^2 t}=\frac{1}{\ln^2 c}\left(x^2-x\right)\ge\frac{x(x-1)}{\ln^2 x^2}\ge\frac{1}{8}\left(\frac{x}{\ln x}\right)^2\to+\infty\ (x\to+\infty).$$

Bài 4.4.3. Tìm a > 0 để tích phân sau hội tụ

$$\int_1^{\infty}\left(\sqrt{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}-\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}\right)dx\ .$$

Giải. *Cách 1*. Nhân liên hợp, hàm dưới dấu tích phân chính là

$$f(x)=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}}-\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}\right)}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}}.$$

+ Với $a\ne 1$ thì $f(x)\sim\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{x}}\quad(x\to\infty)$, từ đó tích phân kì.

+ Với a = 1, $I_n=\int_1^n\sqrt{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\,dx-\int_1^n\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}\,dx$.

Đổi biến x -1 = t ở tích phân thứ hai ta được

$$I_n = \int_1^n \sqrt{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\,dx - \int_0^{n-1}\sqrt{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\,dx$$
$$= \int_{n-1}^n \sqrt{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\,dx - \int_0^1 \sqrt{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\,dx.$$

Theo định lí trung bình tích phân, tồn tại $c \in (n-1; n)$ sao cho

$$\int_{n-1}^n \sqrt{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\sqrt{c+1}-\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{c+1}+\sqrt{c}}} \to 0\ (n\to\infty).$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = -\int_0^1 \sqrt{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\,dx$.

Tóm lại, tích phân hội tụ với a = 1, phân kì với $0 < a \neq 1$.

Cách 2. Áp dụng công thức $\sqrt{1+t} = 1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+o\left(t^2\right) \quad (t\to 0)$.

$$f(x) = x^{1/4}\left(\sqrt{\sqrt{1+\frac{a}{x}}-1} - \sqrt{1-\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\right)$$

$$= \ldots = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt[4]{x}}}\left[\left(\sqrt{a}-1\right) - \frac{a^{3/2}+1}{8x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right].$$

* Với $a \neq 1$, $f(x) \sim \left(\sqrt{a}-1\right)/\left(\sqrt{2\sqrt[4]{x}}\right)$; tích phân phân kì.

* Với a = 1, $f(x) \sim -\frac{1}{4\sqrt{2}\, x^{5/4}}$; tích phân hội tụ.

§4.5. BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

§4.5a. Đánh giá hàm dưới dấu tích phân

* Phương pháp làm trội. Để chứng minh $\int_a^b f(x)dx \le L$, ta cần "nâng" hàm f(x) thành hàm g(x) một cách thoả đáng. Cụ thể cần tìm hàm g(x) thoả mãn:

$$\begin{cases} f(x) \le g(x); \\ \int_a^b g(x)dx \le L. \end{cases}$$

Sau đây là những gợi ý để tìm hàm g(x).

a) $g(x) = \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$;

b) + Phân tích f(x) thành tích hai nhân tử, trong đó có ít nhất một nhân tử dương: $f(x) = h(x)k(x),\ h(x) \ge 0$.

+ Bây giờ "nâng" nhân tử thứ hai k(x) lên thành K(x) một cách thoả đáng, cụ thể, tìm K(x) thoả mãn:

$$\begin{cases} k(x) \le K(x); \\ \int_a^b h(x)K(x)dx \le L. \end{cases}$$

* Sử dụng định lí về giá trị trung bình của tích phân. Nếu f(x), g(x) liên tục trên $[a;b]$; $g(x) \ge 0$, khi đó tồn tại $c \in [a;b]$:

$$I = \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx \in \left[m\int_a^b g(x)dx; M\int_a^b g(x)dx \right]$$

với $m = \underset{x\in[a;b]}{\text{Min}} f(x)$; $M = \underset{x\in[a;b]}{\text{Max}} f(x)$.

Bài 5.5.1. Chứng minh rằng $0{,}9 < \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} < 1$.

Giải. Do $x > 3 > e$ nên $\frac{x}{e} > \ln x > 1$ hay $\frac{e}{x} < \frac{1}{\ln x} < 1$.

Vậy $\left(\frac{e}{x}\right)^{1/3} < \frac{1}{(\ln x)^{1/3}} < 1$. Từ đó

$$\int_3^4 e^{1/3}\, x^{-1/3} dx < \int_3^4 \frac{dx}{(\ln x)^{1/3}} < 1$$

$$\Leftrightarrow 0{,}9206 = \sqrt[3]{e}\,\frac{3}{2}\left(4^{2/3} - 3^{2/3}\right) < I < 1.$$

Bài 4.5.2. Cho f(x) khả vi liên tục trên $[1;+\infty)$, $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ $\forall x \ge 1$. Chứng minh rằng nếu một trong hai hàm

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{f(t) + f'(t)},\ G(x) = \int_1^x \frac{dt}{f(t)}$$

có giới hạn hữu hạn khi $x \to +\infty$ thì hàm số còn lại cũng có giới hạn hữu hạn khi $x \to +\infty$.

Giải. Rõ ràng F(x), G(x) là những hàm đồng biến. Đặt $U(x) = G(x) - F(x)$, ta có đánh giá sau

$$0 < U(x) = \int_1^x \left(\frac{1}{f(t)} - \frac{1}{f(t) + f'(t)}\right)dt = \int_1^x \frac{f'(t)dt}{f(t)\left(f(t) + f'(t)\right)}.$$

Vậy U(x) đồng biến, ngoài ra

$$U(x) \le \int_1^x \frac{f'(t)}{f^2(t)}dt = \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{f(1)}.$$

Từ đó tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} U(x) < +\infty$. Suy ra:

+ Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) < +\infty$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (U(x)+F(x)) < +\infty$.

+ Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) < +\infty$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (G(x)-U(x)) < +\infty$.

Bài 4.5.3. Cho f(x) là hàm số dương, liên tục trên $[0;+\infty)$, khả vi liên tục trên $(0;+\infty)$ sao cho $f'(x) \ge 0 \ \forall x > 0$.

a) Với p > 1, chứng minh rằng tích phân $\int_0^\infty \frac{f'(x)}{f^p(x)}dx$ hội tụ.

b) Với $q > \frac{1}{2}$, chứng minh hai tích phân

$$\int_0^\infty \frac{dt}{f^q(t)}; \qquad \int_0^\infty \frac{dt}{f^q(t)+f'(t)}$$

cùng hội tụ hoặc cùng phân kì

Giải.

a) $f'(x) \ge 0 \Rightarrow f(x)$ tăng. Vậy tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in (0;+\infty]$.

Mặt khác $\int_0^A \frac{f'(x)}{f^p(x)}dx = \int_0^A \frac{df(x)}{f^p(x)} = \frac{1}{1-p}\left(f^{1-p}(A) - f^{1-p}(0)\right)$

(lưu ý f(x) > 0 nên f(0) > 0, từ đó $f^{1-p}(0)$ xác định).

Vậy với p > 1, tồn tại $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{f'(x)}{f^p(x)}dx = \frac{1}{1-p}\left(L^{1-p} - f^{1-p}(0)\right)$

hữu hạn, nói khác, tích phân hội tụ.

b) Xảy ra các bất đẳng thức sau

$$0 \le \frac{1}{f^q(t)+f'(t)} \le \frac{1}{f^q(t)}. \qquad (*)$$

Suy ra $0 \le \frac{1}{f^q(t)} - \frac{1}{f^q(t)+f'(t)} = \frac{f'(t)}{f^q(t)\left(f^q(t)+f'(t)\right)} \le \frac{f'(t)}{f^{2q}(t)}$

từ đó $$0 \le \frac{1}{f^q(t)} \le \frac{1}{f^q(t)+f'(t)} + \frac{f'(t)}{f^{2q}(t)}. \qquad (**)$$

* Nếu $\int_0^\infty \frac{dt}{f^q(t)}$ hội tụ thì từ (*) suy ra $\int_0^\infty \frac{dt}{f^q(t)+f'(t)}$ hội tụ.

* Từ phần (a), $\int_0^\infty \frac{f'(t)}{f^{2q}(t)}dt$ hội tụ. Vậy nếu $\int_0^\infty \frac{dt}{f^q(t)+f'(t)}$ hội tụ thì từ (**) suy ra $\int_0^\infty \frac{dt}{f^q(t)}$ hội tụ.

Sự phân kì là mệnh đề phản đảo của khẳng định vừa chứng minh.

Lưu ý. Ở cả hai bài trên chúng ta đều nỗ lực chứng minh rằng hai tích phân đã cho khác nhau một tích phân hội tụ.

(Hai tích phân khác biệt nhau một tích phân hội tụ sẽ cùng hội tụ hay cùng phân kì).

Bài 4.5.4. So sánh 2 tích phân sau
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ và } \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Giải. Bằng phương pháp đạo hàm dễ chứng minh các bất đẳng thức sau
$$\begin{cases} \sin x \le x \\ \cos x \ge 1-\dfrac{x^2}{2} \end{cases} \quad \text{với } x \in [0;1).$$

Từ đó ta có
$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx \le \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = 1;$$
$$I_2 = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx > \int_0^1 \frac{1-\frac{x^2}{2}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Dùng phép đổi biến $x = \sin t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ta được
$$\int_0^1 \frac{1-\frac{x^2}{2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2-\sin^2 t}{2\cos t}\cos s dt = \frac{3\pi}{8} > 1.$$ Tóm lại $I_2 > I_1$.

Bài 4.5.5. Chứng minh rằng $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0$.

Giải. Đổi biến $x^2 = t$ ta được

$$I = \int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx = \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} .$$

Để đưa 2 cận của tích phân thứ hai về các cận tương ứng của tích phân thứ nhất, ta dùng phép đổi biến tịnh tiến: $u = t - \pi$ hay $t = u + \pi$:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt + \int_0^{\pi} \frac{\sin(u+\pi)}{2\sqrt{u+\pi}} du$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2\sqrt{t+\pi}} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin t \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t+\pi}} \right) dt > 0 .$$

Bài 4.5.6. Cho $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{khi } 0 < x \le 1; \\ 1 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$

Chứng minh rằng $\dfrac{17}{18} < \int_0^1 f(x) dx < \dfrac{1703}{1800}$.

Giải.

Từ chỗ $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots$, ta sẽ lấy phần chính của sinx đến cấp cần thiết, đó là cấp 3 và cấp 5. Cụ thể, ta xét hai hàm:

$$g(x) = x - \frac{x^3}{3}; h(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} .$$

Bằng phương pháp đạo hàm, dễ chứng minh:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \quad \text{khi } x \in (0;1).$$

Vậy

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{6} \right) dx < \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx < \int_0^1 \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} \right) dx$$

hay $\qquad \dfrac{17}{18} < \int_0^1 \dfrac{\sin x}{x} dx < \dfrac{1703}{1800}$ (đpcm).

Bài 4.5.7. Cho $I_n = \int_0^{\pi/4} x^n \operatorname{tg}x\,dx$, $n = 1, 2, ...$

Chứng minh rằng $I_n > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+2} \frac{1,15}{n+3}$.

Giải.

Bởi vì $\operatorname{tg}x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...$ khi $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

ta sẽ lấy một vài số hạng đầu ở chuỗi vế phải để làm non tgx. Khó có thể "đoán" cần mấy số hạng, song rõ ràng một số hạng là chưa đủ, ta hãy thử với hai số hạng đầu. Ta có

$$\operatorname{tg}x > x + x^3/3 > 0 \text{ với } 0 < x < \pi/4. \qquad (*)$$

((*) cũng có thể được chứng minh trực tiếp bằng đạo hàm). Nhân các vế (*) với x^n rồi lấy tích phân ta được

$$I_n = \int_0^{\pi/4} x^n \operatorname{tg}x\,dx > \int_0^{\pi/4} \left(x^{n+1} + x^{n+3}/3\right) dx$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+2} \left[\frac{1}{n+2} + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \frac{1}{3(n+4)}\right] > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+2} \frac{1,15}{n+3} \text{ (đpcm)}.$$

Bài 4.5.8. Cho m,n nguyên $m \geq 2$, $n \geq 1$, chứng minh rằng

$$\int_0^{1/n} \left[\sum_{k=1}^{n} (\cos x)^{km} + n \sin x\right] dx < \frac{5}{4}.$$

Giải.

Với $m \geq 2$, $n \geq 1$, ta có

$$(\cos x)^{km} \leq \cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \ \forall x \in \left[0; \frac{1}{n}\right].$$

Vậy $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (\cos x)^{km} + n \sin x \leq n - n\sin^2 x + n \sin x$

$$= n\left(\frac{5}{4} - \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2\right) < \frac{5}{4} n.$$

Từ đó $I < \int_0^{1/n} \frac{5}{4} n\,dx = \frac{5}{4}$.

Bài 4.5.9. Cho $I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Tìm $A = \lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

b) Đặt $S_n = I_0 + I_1 + ... + I_n$.

Tính $B = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ thông qua $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

Giải.

a) Với $x \in [0;1]$, $0 \le \sin \pi x \le 1$; suy ra $0 \le x^n \sin \pi x \le x^n$. Vậy

$$0 \le I_n \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \Rightarrow A = \lim_{n \to \infty} I_n = 0.$$

b) $S_n = \int_0^1 \left(1 + x + ... + x^n\right) \sin \pi x \, dx = \int_0^1 \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \sin \pi x \, dx$.

Vì $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{1 - x} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin \pi(1 - x)}{\pi(1 - x)} \pi = \pi$ nên có thể xem $\frac{\sin \pi x}{1 - x}$ là hàm liên tục trên $[0;1]$. Đặt $M = \sup\limits_{x \in [0;1]} \frac{\sin \pi x}{1 - x}$.

$$0 \le \int_0^1 x^{n+1} \frac{\sin \pi x}{1 - x} dx \le M \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{M}{n+2} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Từ đó $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1 - x} dx - \lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 x^{n+1} \frac{\sin \pi x}{1 - x} dx$

$$= \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1 - x} dx = \int_0^1 \frac{\sin \pi u}{u} du = I.$$

Lưu ý. Theo định lí trung bình ta cũng thu được

$$\int_0^1 x^{n+1} \frac{\sin \pi x}{1 - x} dx = \frac{\sin \pi \theta}{1 - \theta} \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{\sin \pi \theta}{1 - \theta} \frac{1}{n+2} \le \frac{M}{n+2} \to 0 \ (n \to \infty). \ (0 < \theta < 1).$$

Bài 4.5.10. Cho dãy $\{I_n\}$ xác định bởi

$$I_n = \int_{n-1}^{n} \frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} dx, \ n = 1, 2, ...$$

Chứng minh rằng dãy $\{I_n\}$ hội tụ.

Giải. Rõ ràng $\{I_n\}$ bị chặn dưới bởi 0. Ta sẽ chứng minh $\{I_n\}$ là dãy giảm. Xét hiệu

$$I_{n-1} - I_n = \int_{n-2}^{n-1} \frac{x^{n-2}+1}{x^{n-1}+1}dx - \int_{n-1}^{n} \frac{x^{n-1}+1}{x^n+1}dx .$$

Để biến các cận của tích phân I_{n-1} thành các cận tương ứng của tích phân I_n, ta dùng phép đổi biến tịnh tiến x = t - 1 đối với I_{n-1}.

$$I_{n-1} - I_n = \int_{n-1}^{n} \frac{(t-1)^{n-2}+1}{(t-1)^{n-1}+1}dt - \int_{n-1}^{n} \frac{x^{n-1}+1}{x^n+1}dx$$

$$= \int_{n-1}^{n} \left(\frac{(x-1)^{n-2}+1}{(x-1)^{n-1}+1} - \frac{x^{n-1}+1}{x^n+1} \right) dx$$

$$= \int_{n-1}^{n} \frac{(x-1)^{n-2}\left(x^{n-1}-x+2\right)+x^{n-1}(x-1)}{\left((x-1)^{n-1}+1\right)\left(x^n+1\right)} dx > 0$$

(do hàm dưới dấu tích phân > 0 với $x \in [n-1;n]$).

Vậy $\{I_n\}$ là dãy giảm. Từ đó $\{I_n\}$ hội tụ.

Cách 2. Hàm $f(x) = \dfrac{x^{n-1}+1}{x^n+1}$ có $f'(x) < 0$ nên nghịch biến.

Theo định lí về giá trị trung bình của tích phân, $I_n = f(c)$ với $n-1 < c < n$. Từ đó

$$0 < I_n = f(c) < f(n-1) = \frac{(n-1)^{n-1}+1}{(n-1)^n+1} < \frac{2(n-1)^{n-1}}{(n-1)^n} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Bài 4.5.11. Cho f(x) là hàm liên tục trên $[0; e]$, tìm giới hạn của dãy $\{J_n\}$ xác định bởi

$$J_n = n\int_1^{1+\frac{1}{n}} f\left(x^n\right)dx, \ n = 1,2,...$$

Giải. Dùng phép đổi biến $t = x^n$ ta được

$$J_n = \int_1^{u_n} \frac{t^{\frac{1}{n}} f(t)}{t}dt, \ \text{ với } u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Từ đó

$$\left| J_n - \int_1^{u_n} \frac{f(t)}{t}dt \right| = \int_1^{u_n} \left(t^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \frac{f(t)}{t} dt .$$

Từ bất đẳng thức $e^x - 1 \le 2x, \forall x \in [0;\ln 2]$ mà có thể dễ dàng chứng minh bằng phương pháp đạo hàm, ta có:

$$0 \le t^{\frac{1}{n}} - 1 \le e^{\frac{1}{n}} - 1 \le \frac{2}{n}.$$

Vậy $\left| J_n - \int_1^{u_n} \frac{f(t)}{t} dt \right| \le \frac{2}{n} \int_1^{u_n} \left| \frac{f(t)}{t} \right| dt \le \frac{2}{n} \int_1^{e} \left| \frac{f(t)}{t} \right| dt \to 0 \ (n \to \infty)$.

Từ đó $\lim\limits_{n \to \infty} J_n = \int_1^e \frac{f(t)}{t} dt$.

Bài 4.5.12.

a) Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbf{N}^*$, tồn tại duy nhất đa thức $P_n(x)$ sao cho

$$x^{4n}(1-x)^{4n} = \left(1 + x^2\right) P_n(x) + (-1)^n\ 4^n.$$

b) Đặt $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{4^{n-1}} \int_0^1 P_n(x) dx$, chứng minh rằng

$$|\pi - a_n| < \frac{1}{4^{5n-1}}, \qquad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Giải. a) Viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng

$$A_n(x) = x^{4n}(1-x)^{4n} + (-1)^{n+1}\ 4^n = \left(1 + x^2\right) P_n(x).$$

Ta chỉ việc chứng minh $\pm i$ là nghiệm của đa thức $A_n(x)$. Quả vậy

$$A_n(i) = i^{4n}(1-i)^{4n} + (-1)^{n+1}\ 4^n = (1+i)^{4n} + (-1)^{n+1} 4^n$$

$$= \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^{4n} + (-1)^{n+1}\ 4^n = 4^n \left[e^{i\pi n} + (-1)^{n+1} \right]$$

$$= 4^n \left((-1)^n + (-1)^{n+1} \right) = 0.$$

Tương tự, $A_n(-i) = 0$.

Vậy $A_n(x) = (x-i)(x+i)\, P_n(x) = \left(x^2 + 1\right) P_n(x)$

trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc 8n-2. Dễ thấy $P_n(x)$ là duy nhất.

b) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{4^{n-1}} \int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n} + (-1)^{n+1} 4^n}{1+x^2} dx$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{4^{n-1}} \int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{1+x^2} dx + 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Vì $4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 4 \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \pi$ nên ta có đánh giá

$$|a_n - \pi| = \frac{1}{4^{n-1}}\int_0^1 \frac{[x(1-x)]^{4n}}{1+x^2}dx \le \frac{1}{4^{n-1}}\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{4n}}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{4^{5n-1}}\,\frac{\pi}{4} < \frac{1}{4^{5n-1}}$$

(do $x(1-x) < \frac{1}{4}, \forall x \in (0;1)$).

Bài 4.5.13. Chứng minh bất đẳng thức

$$1 - \int_0^1 x^2 e^{-x}dx < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2e^{-x}} < 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2e^{-x}dx \ .$$

Giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\int_0^1 \left(1 - x^2e^{-x}\right)dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2e^{-x}}dx < \int_0^1\left(1 - \frac{1}{2}x^2e^{-x}\right)dx \ . \qquad (*)$$

Lưu ý rằng $x \in (0;1)$ thì $u = x^2e^{-x} \in (0;1)$; ngoài ra $\forall u \in (0;1)$ xảy ra bất đẳng thức $1 - u < \frac{1}{1+u} < 1 - \frac{1}{2}u$. Ta đi đến

$$1 - x^2e^{-x} < \frac{1}{1+x^2e^{-x}} < 1 - \frac{1}{2}x^2e^{-x}, \ \forall x \in (0;1).$$

Lấy tích phân ta được (*).

Bài 4.5.14. Cho $f:[a;b] \to \mathbf{R}$ là hàm liên tục từng khúc, $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x); \quad m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x) > 0$. Chứng minh rằng

$$2\sqrt{\frac{m}{M}}(b-a) \le \frac{1}{M}\int_a^b f(x)dx + m\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \le \left(1 + \frac{m}{M}\right)(b-a).$$

Giải. Khẳng định hiển nhiên đúng khi $0 < m = M$. Với $0 < m < M$ ta có

$$\frac{1}{M}\int_a^b f(x)dx + m\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx = \int_a^b\left(\frac{f(x)}{M} + \frac{m}{f(x)}\right)dx \ .$$

Vì $m \le f(x) \le M$, để có thể đánh giá tích phân này, xét hàm

$$g(t) = \frac{t}{M} + \frac{m}{t}, \ t \in [m;M].$$

Ta có $g'(t) = \frac{t^2 - mM}{Mt^2}$. Lưu ý rằng m > 0, ta nhận được bảng biến thiên

t	m		$\sqrt{mM}$		M
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$	$1+\dfrac{m}{M}$	$\searrow$	$2\sqrt{\dfrac{m}{M}}$	$\nearrow$	$1+\dfrac{m}{M}$

Từ đó, $\forall x \in [a;b]$, $2\sqrt{\dfrac{m}{M}} \le \dfrac{f(x)}{M} + \dfrac{m}{f(x)} \le 1 + \dfrac{m}{M}$.

Lấy tích phân ta nhận được kết quả đòi hỏi.

Lưu ý. Với bất đẳng thức thứ nhất có thể chứng minh như sau:

$$\int_a^b \left(\frac{f(x)}{M} + \frac{m}{f(x)}\right) dx \ \ge 2\int_a^b \sqrt{\frac{m}{M}}\, dx \ = 2\sqrt{\frac{m}{M}}\,(b-a).$$

Bài 4.5.15. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^n \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x/n}}$.

Giải. Đặt $x = nt \Rightarrow dx = n\,dt$.

$$I_n = \int_0^n \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x/n}} = n\int_0^1 e^{-nt}\frac{e^t}{1+e^t}dt.$$

Với $0 < t < 1$ ta có

$$\frac{1}{2} \le \frac{e^t}{1+e^t} \le \frac{e^t}{2} \quad \Rightarrow \frac{n\,e^{-nt}}{2} \le n\,e^{-nt}\frac{e^t}{1+e^t} \le n\,e^{-nt}\frac{e^t}{2}.$$

Lấy tích phân ta được

$$\frac{n}{2}\int_0^1 e^{-nt}dt \le I_n \le \frac{n}{2}\int_0^1 e^{-(n-1)t}dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1-e^{-n}\right) \le I_n \le \frac{n}{2(n-1)}\left(1-e^{-(n-1)}\right).$$

Theo định lí kẹp, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \dfrac{1}{2}$.

Bài 4.5.16. Cho $f(n) = ((2n+1)/e)^{(2n+1)/2}$. Chứng minh rằng

$$f(n-1) < 1.3.5...(2n-1) < f(n) \quad \text{với } n > 0.$$

Giải. Logarit hoá, ta phải chứng minh

$$(2n-1)(\ln(2n-1)-1) < 2(\ln 3 + ... + \ln(2n-1)) < (2n+1)(\ln(2n+1)-1). \quad (*)$$

Một mặt, lưu ý rằng lnx là hàm tăng, suy ra

$$\int_1^{2n-1} \ln x\,dx = \int_1^3 \ln x\,dx + \int_3^5 \ln x\,dx + \ldots + \int_{2n-3}^{2n-1} \ln x\,dx$$
$$< 2\left(\ln 3 + \ln 5 + \ldots + \ln(2n-1)\right).$$

Mặt khác, $\int_1^{2n-1} \ln x\,dx = \left(x\ln x - x\right)\Big|_1^{2n-1} = (2n-1)\left(\ln(2n-1)-1\right)+1$,

từ đó ta thu được bất đẳng thức thứ nhất của (*). Tương tự,

$$\int_3^{2n+1} \ln x\,dx = \int_3^5 \ln x\,dx + \ldots + \int_{2n-1}^{2n+1} \ln x\,dx > 2\left(\ln 3 + \ldots + \ln(2n-1)\right).$$

Lại có

$$\int_3^{2n+1} \ln x\,dx = x\left(\ln x - 1\right)\Big|_3^{2n+1}$$
$$= (2n+1)\left(\ln(2n+1)-1\right) + 3(1-\ln 3) < (2n+1)\left(\ln(2n+1)-1\right).$$

Vậy, bất đẳng thức (2) của (*) cũng được chứng minh.

Bài 4.5.17. Cho f(x) là hàm liên tục trên $[a;b]$ và

$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \le \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. Chứng minh rằng

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

Giải. Vì f(x) liên tục, điều kiện đã cho chính là f(x) lồi trên $[a;b]$ hay

$$f\left(tc+(1-t)d\right) \le t f(c) + (1-t) f(d),\ \forall t \in [0;1];\ \forall [c;d] \subset [a;b].$$

Để chứng minh bất đẳng thức thứ hai, dùng đồng nhất thức quen biết

$x = a\dfrac{b-x}{b-a} + b\dfrac{x-a}{b-a}$, ta được

$$f(x) = f\left(a\frac{b-x}{b-a} + b\frac{x-a}{b-a}\right) \le f(a)\frac{b-x}{b-a} + f(b)\frac{x-a}{b-a}.$$

Suy ra $\int_a^b f(x)dx \le \dfrac{1}{b-a}\left[f(a)\int_a^b (b-x)dx + f(b)\int_a^b (x-a)dx\right]$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

Để chứng minh bất đẳng thức thứ nhất, dùng phép đổi biến tráo cận $x = a+b-t$ ta được

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(a+b-t)(-dt) = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

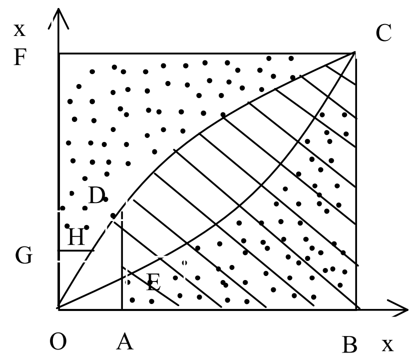
$$\Rightarrow 2\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(f(x) + f(a+b-x)\right) dx$$

$$\geq \int_a^b 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$ Suy ra đpcm.

Bài 4.5.18. Cho f(x) xác định, liên tục, đồng biến trên $[0;1]$ và hàm ngược của nó là g(x); ngoài ra f(0) = 0; f(1) = 1. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{9}\left(f\left(\frac{k}{10}\right)+g\left(\frac{k}{10}\right)\right) < 9{,}9.$$

Giải. Vì f(x) liên tục và đồng biến nên ta cũng có g(x) liên tục và đồng biến, g(0) = 0; g(1) = 1; đồ thị của g(x) đối xứng với đồ thị f(x) qua phân giác OC (hình vẽ). Ta có



$$\frac{1}{10}\left[f\left(\frac{k}{10}\right)+g\left(\frac{k}{10}\right)\right] < \int_{k/10}^{(k+1)/10}\left(f(x)+ g(x)\right)dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{9}\left[f\left(\frac{k}{10}\right)+g\left(\frac{k}{10}\right)\right] < \int_{1/10}^{1}\left[f(x)+ g(x)\right]dx$$

$$= dt(ABCD) + dt(ABCE)$$

$$= dt(ABCD) + dt(GFCH) \leq 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 0{,}99$$

(dt (ABCD) là diện tích thang cong ABCD...). Suy ra đpcm.

§4.5b. Tách miền lấy tích phân thành các đoạn thích hợp

Định lí: f(x) ≥ 0 liên tục trên [a;b]. Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f(x)dx, \text{ với } [\alpha;\beta]\subset[a;b].$$

+ Yêu cầu phải chọn ra đoạn $[\alpha;\beta]$ thích hợp.

+ Nhiều khi ta phải tách đoạn lấy tích phân thành nhiều đoạn, ví dụ thành hai đoạn

$$\int_a^b = \int_a^L + \int_L^b \text{ với } L\in(a;b).$$

Trên $[a;L]$, chọn $f_1(x)$ để $f(x) \geq f_1(x)$;

Trên $[L;b]$, chọn $f_2(x)$ để $f(x) \geq f_2(x)$.

Chẳng những để chứng minh các bất đẳng thức, người ta còn sử dụng biện pháp tách thành đoạn thích hợp để tính tích phân khi hàm cho bởi nhiều biểu thức.

Bài 4.5.19. Cho f(x) là hàm giảm và liên tục trên $[0;1]$, khi đó $\forall\ \alpha \in (0\ ;\ 1)$ta luôn có

$$\int_0^\alpha f(x)dx \geq \alpha\int_0^1 f(x)dx\ .$$

Giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\int_0^\alpha f(x)dx \geq \alpha\int_0^\alpha f(x)dx + \alpha\int_\alpha^1 f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow (1-\alpha)\int_0^\alpha f(x)dx \geq \alpha\int_\alpha^1 f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(x)dx \geq \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 f(x)dx \quad \Leftrightarrow f(c_1) \geq f(c_2)$$

trong đó $c_1 \in (0;\alpha)$, $c_2 \in (\alpha;1)$(định lí trung bình thứ nhất).

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do f(x) là hàm giảm.

Cách 2. Ở tích phân vế trái đặt

$$x = \alpha t;\ \text{BĐT} \Leftrightarrow \alpha\int_0^1 \big(f(\alpha x) - f(x)\big)dx \geq 0\,.$$

Bài 4.5.20. Cho f(x) là hàm liên tục trên $[0;1]$. Tìm

$$\lim_{p\to+\infty}\left[\int_0^1 |f(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Giải. Do $|f(x)|$ liên tục trên $[0;1]$ nên tồn tại $x_0 \in [0;1]$ để $|f(x_0)| = \underset{x\in[0;1]}{\text{Max}}|f(x)| = M$.

+ Với $p > 0$, $\left[\int_0^1 |f(x)|^p dx\right]^{1/p} \leq \left[\int_0^1 M^p dx\right]^{1/p} = M$.

+ Mặt khác, $\forall\varepsilon > 0$ cho trước, $\exists\delta > 0$, để với $|x - x_0| < \delta, x \in (0;1)$ thì $|f(x)| > M - \frac{\varepsilon}{2}$. Xét 2 số $\alpha, \beta \in [0;1]$ sao cho $0 \leq \alpha \leq x_0 \leq \beta \leq 1$ và $0 < |\alpha - \beta| < \delta$. Ta có

$$\left[\int_0^1 |f(x)|^p dx\right]^{1/p} \geq \left[\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx\right]^{1/p} \geq \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\beta - \alpha)^{1/p} \geq M - \varepsilon$$

với p đủ lớn.

Vậy $\lim\limits_{p \to +\infty} \left[\int_0^1 |f(x)|^p dx\right]^{1/p} = M.$

Bài 4.5.21. Cho f(x) là hàm liên tục, có đạo hàm trên [0;2] và thoả mãn f(0) = f(2) = 1, $|f'(x)| \leq 1$ với $x \in [0;2]$. Chứng minh rằng

$$\int_0^2 f(x)dx > 1.$$

Giải. Lấy $x \in (0;2)$, theo công thức số gia giới nội, $\exists \theta_1 \in (0;x)$ để $f(x) - f(0) = x f'(\theta_1)$ hay $f(x) = 1 + x f'(\theta_1)$.

Do $f'(x) \geq -1 \Rightarrow f(x) \geq 1 - x, \forall x \in (0;1)$ (1)

Tương tự, $\exists \theta_2 \in (x;2)$ để

$$f(x) - f(2) = (x-2) f'(\theta_2) \text{ hay } f(x) = 1 + (x-2) f'(\theta_2).$$

Do $f'(x) \leq 1 \Rightarrow f(x) \geq x - 1, \forall x \in (1;2).$ (2)

Từ (1) và (2) ta được

$$\int_0^2 f(x)dx \geq \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{khi } 0 \leq x \leq 1; \\ x - 1 & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

Tuy nhiên hàm này lại không khả vi tại 1, vậy không xảy ra dấu "=".

Bài 4.5.22. Chứng minh rằng đối với hàm khả vi liên tục f(x) trên [a;b]; f(a) = f(b) = 0 xảy ra bất đẳng thức

$$M = \max_{x \in [a;b]} |f'(x)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx.$$

Giải. Với $x \in (a;b)$, theo công thức số gia giới nội,

$f(x) - f(a) = f'(c_1)(x-a)$ hay $f(x) = f'(c_1)(x-a)$ với $c_1 \in (a;x)$;

$f(x) - f(b) = f'(c_2)(x-b)$ hay $f(x) = f'(c_2)(x-b)$ với $c_2 \in (x;b)$.

Suy ra

$$\left|f(x)\right| = \left|f'(c_1)\right| \left|x-a\right| \le M(x-a), \qquad \forall x \in [a;b] \;;$$

$$\left|f(x)\right| = \left|f'(c_2)\right| \left|x-b\right| \le M(b-x), \qquad \forall x \in [a;b] \;.$$

Ta đi đến

$$\int_a^b \left|f(x)\right| dx = \int_a^{(a+b)/2} \left|f(x)\right| dx + \int_{(a+b)/2}^b \left|f(x)\right| dx$$

$$\le M\int_a^{(a+b)/2}(x-a)\,dx + M\int_{(a+b)/2}^b (b-x)\,dx = M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

Vậy $\dfrac{4}{(b-a)^2}\int_a^b \left|f(x)\right| dx \le M$.

Bài 4.5.23. Giả sử f(x) liên tục sao cho

$\int_a^b x^n f(x)dx = 0$ với n = 0, 1, ..., N. Chứng minh rằng trên [a;b], f(x) triệt tiêu ít nhất N + 1 lần.

Giải. Từ giả thiết suy ra

$$\int_a^b P_n(x)f(x)dx = 0 \qquad (*)$$

đối với mọi đa thức $P_n(x)$ bậc $n \le N$.

Xét các không điểm của f(x) trên [a;b] sao cho tại đó f(x) đổi dấu. Bằng phản chứng, dễ chứng minh có ít nhất một không điểm như vậy. Giả sử số không điểm này là hữu hạn, sắp xếp chúng lại để được dãy tăng:

$$a \le x_1 < x_2 < ... < x_m \le b.$$

Ta sẽ chứng tỏ $m \ge N+1$. Quả vậy, giả sử ngược lại: $m \le N$. Xét đa thức bậc m

$$P_m(x) = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_m).$$

Khi đó f(x) $P_m(x)$ cùng dấu khi x qua x_i, chẳng hạn cùng dấu dương. Ta được

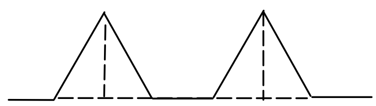
$$\int_a^b f(x)P_n(x)\,dx = \int_a^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + ... \int_{x_m}^b > 0,$$ mâu thuẫn với (*).

Bài 4.5.24. Có tồn tại hàm liên tục, không âm trên $[0;+\infty]$ sao cho $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ nhưng f(x) không dần đến 0 khi $x \to +\infty$?

Giải. Ta biết rằng $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Từ đó ta xây dựng hàm f(x) như sau

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{tại } x = 2, 3, \dots ;\\ 0 & \text{ngoài các đoạn } I_k=\left[k-\dfrac{1}{k^2}\,;\,k+\dfrac{1}{k^2}\right];\\ \text{tuyến tính trên } \left[k-\dfrac{1}{k^2}\,;\,k\right] \text{ và } \left[k\,;\,k+\dfrac{1}{k^2}\right]. & \end{cases}$$



Trả lời: Tồn tại hàm số như đòi hỏi.

Bài 4.5.25. Cho n nguyên dương, chứng minh rằng

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Giải. Dễ chứng minh rằng với $0 < x < 1$ thì $(1-x)^n \geq 1-nx$, từ đó

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx = 2\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx \geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}}\left(1-x^2\right)^n dx$$

$$\geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}}\left(1-nx^2\right)dx=\frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ba khẳng định sau liên hệ chặt chẽ với nhau, như một dạng *"cần và đủ"*.

Bài 4.5.26.

a) Cho f(x) liên tục trên $[0;+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\neq 0$.

Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$.

b) Xét hàm f(x) xác định và liên tục trên $[0;+\infty)$ và thoả mãn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\neq 0$. Tính $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx$.

c) Cho f(x) tăng trên $[0;+\infty)$, khả tích trên [0;T], $\forall T>0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}=c$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=c$.

Giải.

a) Đặt $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. Do f(x) liên tục, F(x) khả vi liên tục. Dễ thấy $F(x)\to\infty\ (x\to\infty)$. Quả vậy, giả sử A > 0; $\exists L$ để $\forall x>L, f(x)\geq\frac{A}{2}$. Khi đó $F(x)=\int_0^L f(t)dt+\int_L^x f(t)dt\geq\int_0^L f(t)dt+\frac{A}{2}(x-L)\to+\infty(x\to+\infty)$.

X ét tương tự khi A < 0.

Theo quy tắc L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{1}=A.$$

b) Đổi biến nx = t   ta đưa về (a).

c Do f(x) tăng, ta có đánh giá

$$\frac{1}{x/2}\int_{x/2}^{x} f(t)dt\leq f(x)\leq\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)dt,\qquad x>0.$$

Theo giả thiết ta có

$$\frac{1}{\frac{x}{2}}\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt=2\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}-\frac{\int_0^{x/2} f(t)dt}{\frac{x}{2}}\to 2c-c=c\ (x\to+\infty);$$

$$\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)dt=2\frac{1}{2x}\int_0^{2x} f(t)dt-\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\to 2c-c=c\ (x\to+\infty).$$

Theo định lí kẹp, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=c$.

Lưu ý.

+ (a) và (c) như là điều kiện cần và đủ của nhau, song không đầy đủ.

+ Khi giải câu (a), nhiều bạn áp dụng ngay quy tắc L'Hôpital. Điều đó không hợp lệ vì ta chưa biết tử thức có dần ra ∞ hay không.

Bài 4.5.27. Tìm $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx$.

Giải. Giả sử $\varepsilon\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ cho trước,

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx=\int_0^{\pi/2-\varepsilon/2}\sin^n x dx+\int_{\pi/2-\varepsilon/2}^{\pi/2}\sin^n x dx=I_1+I_2.$$

* $I_2 = \int_{\pi/2-\varepsilon/2}^{\pi/2} \sin^n x dx \le \int_{\pi/2-\varepsilon/2}^{\pi/2} 1dx = \frac{\varepsilon}{2}$.

* Theo định lí trung bình tích phân

$$0 \le I_1 = \int_0^{\pi/2-\varepsilon/2} \sin^n x dx = \left(\sin^n \theta\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ với } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}$$

Vậy $I_1 \le \left(\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\frac{\pi}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$ với n đủ lớn.

Từ đó $0 \le I \le I_1 + I_2 \le \varepsilon$ với n đủ lớn, suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

Lưu ý:

+ $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^n x = 0, \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ song $\sin^n x$ không hội tụ đều đến 0 trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên ta không áp dụng định lí chuyển qua giới hạn dưới dấu tích phân được.

+ Tuy nhiên, lại có thể áp dụng định lí hội tụ đơn điệu mà không trình bày ở đây.

Bài 4.5.28. Cho f(x) liên tục trên $[0;1]$ sao cho với mỗi hàm bậc thang không giảm g(x) trên $[0;1]$ ta đều có $\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$. Chứng minh rằng $f(x) \equiv 0$.

Giải. Giả sử ngược lại, $\exists x_0 \in (0;1)$ để $f(x_0) \ne 0$, chẳng hạn $f(x_0) > 0$. Do f(x) liên tục, tồn tại $\delta > 0$ đủ nhỏ để

$[x_0 - \delta; x_0 + \delta] \subset [0;1], \forall x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ đều có $f(x) \ge \frac{1}{2}f(x_0)$.

Xét hàm bậc thang $e(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad 0 \le x \le x_0 - \delta; \\ 1 & \quad\quad x_0 - \delta < x \le x_0 + \delta; \\ 0 & \quad\quad x_0 + \delta < x \le 1. \end{cases}$

Suy ra $\int_0^1 f(x)e(x)dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \ge \frac{1}{2}f(x_0)2\delta > 0$. (*)

Tuy nhiên, ta chưa suy ra mâu thuẫn vì e(x) chưa phải là hàm không giảm. Bây giờ xét hai hàm bậc thang không giảm sau:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad 0 \le x \le x_0 - \delta; \\ 1 & \quad\quad x_0 - \delta < x \le 1; \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad 0 \le x \le x_0 + \delta; \\ 1 & \quad\quad x_0 + \delta \le x \le 1. \end{cases}$$

Thế thì e(x) = h(x) - k(x). Theo giả thiết

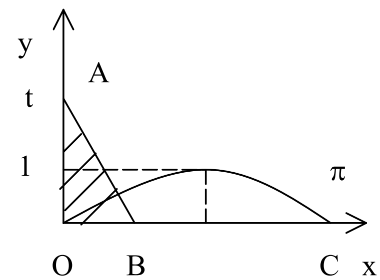
$$\int_0^1 f(x)e(x)dx = \int_0^1 f(x)h(x)dx - \int_0^1 f(x)k(x)dx = 0.$$

Điều này mâu thuẫn với (*).

Bài 4.5.29. Cho a > 0, gọi L_α là họ các hàm $\alpha(x)$ không âm, liên tục trên $[0;\pi]$, và $\int_0^\pi \alpha(x)dx = a$.

Tìm $m = \underset{\alpha \in L_a}{\text{Inf}} \int_0^\pi \alpha(x)\sin x dx$.

Giải. $\forall \varepsilon > 0$ cho trước, xét hai điểm $A(0;t)$ và $B\left(\frac{2a}{t};0\right)$, $t > 0$ chọn sau. Khi đó diện tích $\Delta AOB = a$.



Xét $\alpha(x)$ là hàm mà đồ thị là đường gấp khúc ABC, $\alpha(x)$ thuộc họ L_α. Ta có

$$0 \le \int_0^\pi \alpha(x)\sin x\, dx = \int_0^{2a/t} \alpha(x)\sin x\, dx \le t\int_0^{2a/t} \sin x\, dx$$

$$\le t\int_0^{2a/t} x\, dx = \frac{2a^2}{t} = \varepsilon$$

nếu ta chọn $t = \frac{2a^2}{\varepsilon}$. Vậy m = 0.

Bài 4.5.30. Cho A > 0; $a \ge 0$ còn $L_{a,A}$ là họ các hàm $\alpha(x)$ không âm; liên tục từng khúc trên $[0;\pi]$; $\int_0^\pi \alpha(x)dx = a$ và

$$0 \le \alpha(x) \le A, \quad \forall x \in [0;\pi].$$

Tìm $m = \underset{\alpha \in L_{a,A}}{\text{Min}} \int_0^\pi \alpha(x)\sin x\, dx$.

Giải. Từ giả thiết, $a = \int_0^\pi \alpha(x)dx \le A\pi$, vậy $\frac{a}{A} \le \pi$.

Để cực tiểu hoá $I(\alpha) = \int_0^\pi \alpha(x)\sin x\, dx$, ta xây dựng hàm $\alpha(x)$ theo nguyên tắc: sinx càng nhỏ thì $\alpha(x)$ càng lớn và ngược lại, sinx càng lớn thì $\alpha(x)$ càng nhỏ.

Đặt $x_0 = \frac{a}{2A} \le \frac{\pi}{2}$. Xét hàm

$$\alpha_0(x) = \begin{cases} A & 0 \le x \le x_0; \\ 0 & x_0 < x \le \pi - x_0; \\ A & \pi - x_0 < x \le \pi. \end{cases}$$

$\alpha_0(x)$ là hàm liên tục từng khúc, $0 \le \alpha_0(x) \le A$; $\int_0^{\pi} \alpha_0(x)dx = a$.

Ngoài ra có thể chứng minh $I(\alpha_0) = \int_0^{\pi} \alpha_0(x)\sin x dx = \min\limits_{\alpha \in L_{a,A}} I(\alpha)$.

Vậy $m = I(\alpha_0) = 2\int_0^{x_0} A\sin x dx = 4A\sin^2 \frac{a}{4A}$.

Bài 4.5.31. Chứng minh rằng đối với mỗi đa thức f(x) bậc 1999 ta luôn có

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|dx \ge |f(0)|/3000^{2000}.$$

Giải. Không hạn chế tổng quát, coi hệ số của x^{1999} trong đa thức f(x) bằng 1. Giả sử $x_1, ..., x_{1999}$ là các nghiệm của f(x). Khi đó

$$f(x) = (x - x_1)...(x - x_{1999}); \; f(0) = -x_1...x_{1999}.$$

Nếu có chỉ số i để $x_i = 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Nếu $x_i \ne 0 \; \forall i$, cần chứng minh.

$$\int_{-1}^{1} \frac{|x - x_1|}{|x_1|} ... \frac{|x - x_{1999}|}{|x_{1999}|} dx \ge (1/3000)^{2000}.$$

Bây giờ ta sẽ đánh giá các tỉ số $\frac{|x - x_i|}{|x_i|}$. Chia đoạn $[-1;1]$ thành 2000 đoạn con bằng nhau, mỗi đoạn dài 1/1000. Có một đoạn con K sao cho không có nghiệm x_i nào mà phần thực của nó rơi vào K. Lại chia đều K thành 3 đoạn nhỏ, gọi K' là đoạn ở giữa. Khi ấy, mỗi điểm của K' cách mỗi nghiệm x_i một đoạn ít nhất là 1/3000. Xét x tùy ý trên K'.

* Giả sử $|x_i| \ge 1$; vì $|x| < 1 - \frac{1}{3000}$ nên

$$|x - x_i| \ge |x_i| - |x| \ge |x_i| - 1 + 1/3000.$$

Dễ suy ra $|x - x_i|/|x_i| \ge |x_i| \ge 1/3000$.

* Giả sử $|x_i| < 1 \Rightarrow |x - x_i|/|x_i| \ge |x - x_i| \ge 1/3000$.

Vậy $\int_{-1}^{1}\frac{|x-x_i|}{|x_i|}\cdots\frac{|x-x_{1999}|}{|x_{1999}|}dx \ge \int\limits_{K'}\frac{1}{(3000)^{1999}}\,dx = \frac{1}{(3000)^{2000}}$.

Bài 4.5.32. Xét đa thức P(x) với hệ số thực thoả mãn điều kiện $P(0)=P(1)=0$; $\int_0^1|P'(x)|dx=1$.

Chứng minh rằng $|P(x)|\le\frac{1}{2}\quad\forall x\in[0;1]$.

Giải. Giả sử ngược lại, tồn tại $x_0\in[0;1]$ để $|P(x_0)|>\frac{1}{2}$ .Vì $P'(x)$ là hàm liên tục, ta có

$$\int_0^1|P'(x)|dx=\int_0^{x_0}|P'(x)|dx+\int_{x_0}^1|P'(x)|dx$$

$$\ge\left|\int_0^{x_0}P'(x)dx\right|+\left|\int_{x_0}^1P'(x)dx\right|=|P(x_0)-P(0)|+|P(1)-P(x_0)|$$

$$=2|P(x_0)|>1,\text{ mâu thuẫn.}$$

Nhận xét. Khẳng định vẫn còn dúng khi ta thay cụm từ "đa thức P(x) với hệ số thực" bởi "hàm P(x) khả vi liên tục".

Bài 4.5.33. Gọi g(x) là khoảng cách từ x đến số nguyên gần nhất. Biết rằng

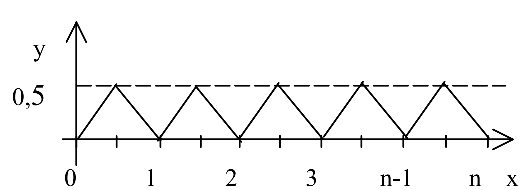
$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n}{2n+1}=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n}{2n+1}=\frac{\pi}{2}\ .$$

Hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^n g\left(\frac{n}{x}\right)dx$.

Giải. đổi biến $n/x=t\ (\Leftrightarrow x=n/t)$ ta được

$$I_n=\frac{1}{n}\int_1^n g\left(\frac{n}{x}\right)dx=\int_1^n\frac{1}{t^2}g(t)dt\ .$$

Đồ thị g(t) như hình vẽ.



Tách đoạn [1;n] thành các đoạn $\left[1;\frac{3}{2}\right];\left[\frac{3}{2};2\right];\ldots$ ta được

$$I_n = \int_1^{3/2} \frac{t-1}{t^2}dt + \int_{3/2}^{2} \frac{2-t}{t^2}dt + \int_2^{5/2} \frac{t-2}{t^2}dt + \int_{5/2}^{3} \frac{3-t}{t^2}dt + \dots$$

$$+ \int_{n-1}^{n-1/2} \frac{t-(n-1)}{t^2}dt + \int_{n-1/2}^{n} \frac{n-t}{t^2}dt$$

$$= \ln t\Big|_1^{3/2} - \ln t\Big|_{3/2}^{2} + \ln t\Big|_2^{5/2} - \dots + \ln t\Big|_{n-1}^{n-1/2} - \ln t\Big|_{n-1/2}^{n}$$

$$+\left(\frac{1}{t}\Big|_1^{3/2} - \frac{2}{t}\Big|_{3/2}^{2}\right) + \left(\frac{2}{t}\Big|_2^{5/2} - \frac{3}{t}\Big|_{5/2}^{3}\right) + \dots + \left(\frac{n-1}{t}\Big|_{n-1}^{n-1/2} - \frac{n}{t}\Big|_{n-1/2}^{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{3}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{4}\,\frac{5}{6}\dots\frac{2n-1}{2n-2}\,\frac{2n-1}{2n}\right) + 0$$

$$= -\ln\left(\frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\dots\frac{2n-2}{2n-3}\,\frac{2n-2}{2n-1}\,\frac{2n}{2n-1}\,\frac{1}{2}\right)$$

$$\to -\ln\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{4}{\pi}\ \ (n\to\infty).$$

Bài 4.5.34. Tìm các giới hạn

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} \frac{n e^{-x^2}\sin x}{1+n^2x^2}dx$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n+e^x}dx$.

Giải.

a) Tách miền lấy tích phân $[0;+\infty)$ thành $[0;1]$ và $[1;+\infty)$ rồi đánh giá hàm dưới dấu tích phân ta được

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{n e^{-x^2}\sin x}{1+n^2x^2}dx\right| \le \int_0^{+\infty} \frac{n e^{-x^2}|\sin x|}{1+n^2x^2}dx$$

$$\le \int_0^{+\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2}e^{-x^2}dx = \int_0^1 + \int_1^{+\infty} \le \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}dx + \int_1^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{nx}dx$$

$$= \frac{\ln(1+n^2)}{2n} + \frac{1}{n}\int_1^{\infty}\frac{e^{-x^2}}{x}dx \to 0\ \ (n\to\infty).$$

b) Trước hết, tìm giới hạn của dãy $f_n(x) = \frac{1}{x^n+e^x}$ ta được

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{khi } 0\le x<1;\\ \frac{1}{1+e} & x=1;\\ 0 & x>1.\end{cases}$$

Hy vọng giới hạn là

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 e^{-x}dx = 1-e^{-1} .$$

Quả vậy, tách miền lấy tích phân và đánh giá như câu (a), ta có:

$$\left|\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx - \left(1-e^{-1}\right)\right| = \left|\int_0^1\left(\frac{1}{x^n+e^x}-\frac{1}{e^x}\right)dx\right| + \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^n+e^x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n}{\left(x^n+e^x\right)e^x}dx + \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^n+e^x}\,dx \le \int_0^1 x^n dx + \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^n}\,dx$$

$$= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1} \to 0\ (n\to\infty).$$

Vậy giới hạn cần tìm là $1-e^{-1}$.

Bài 4.5.35. Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x/n}}{1+x^2}dx.$

Giải. Dãy hàm $f_n(x)=\frac{e^{-x/n}}{1+x^2}$ hội tụ điểm đến $\frac{1}{1+x^2}$. Nếu ta đánh giá $\left|\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-x/n}}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx\right|$ bằng cách tách miền lấy tích phân $[0;+\infty)$ thành $[0;1]$ và $[1;+\infty)$ thì việc đánh giá tích phân trên $[1;+\infty)$ sẽ khó khăn. Ta hãy tách $[0;+\infty)$ một cách "động", cụ thể là, viết $[0;+\infty)=\left[0;\sqrt{n}\right]\cup\left[\sqrt{n};+\infty\right)$, ta có

$$0 \le \left|\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-x/n}}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx\right| = \int_0^{\sqrt{n}} + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} = I_n + J_n$$

trong đó

$$0 \le I_n = \int_0^{\sqrt{n}}\frac{1-e^{-x/n}}{1+x^2}\,dx \le \int_0^{\sqrt{n}}\frac{1-e^{-\sqrt{n}/n}}{1+x^2}\,dx$$

$$=\left(1-e^{-1/\sqrt{n}}\right)\operatorname{arctg}\sqrt{n} \to 0 \qquad (n\to\infty);$$

$$0 \le J_n = \int_{\sqrt{n}}^{+\infty}\frac{1-e^{-x/n}}{1+x^2}\,dx \le \int_{\sqrt{n}}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{n} \to 0\ (n\to\infty).$$

Vậy giới hạn cần tìm là $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$.

Lưu ý. Có thể giải Bài 4.5.34 và 4.4.35 bằng cách áp dụng định lí hội tụ đơn điệu hoặc định lí hội tụ bị chặn.

§4.5c. Tích phân từng phần để tăng bậc của hàm dưới dấu tích phân.

Nhiều khi rất khó khăn trong việc đánh giá hàm số dưới dấu tích phân. Khi ấy bằng tích phân từng phần, có thể ta sẽ làm tăng lên bậc VCB (hoặc VCL) hàm dưới dấu tích phân, điều đó giúp ta dễ dàng hơn trong việc đánh giá.

Bài 4.5.36. Tìm giới hạn $A = \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\cos x^n dx$.

Giải. Nhận thấy rằng $x^n \to 0$ (khi $n\to\infty$) với $0 < x < 1$. Điều đó gợi ý chúng ta tách miền lấy tích phân thành hai đoạn $[0;1]$ và $[1;\pi]$:

$$I_n = \int_0^{\pi}\cos x^n dx = \int_0^1\cos x^n dx + \int_1^{\pi}\cos x^n dx .$$

Trước hết, ta sẽ chứng minh $A_n = \int_0^1 \cos x^n dx \to 1\ (n\to\infty)$. Quả vậy,

cho trước $\forall\varepsilon > 0$, lại tách $[0;1]$ thành $\left[0;1-\frac{\varepsilon}{2}\right]$ và $\left[1-\frac{\varepsilon}{2};1\right]$ ta có

$$0 \le 1 - A_n = \int_0^1\left(1-\cos x^n\right)dx = \int_0^{1-\varepsilon/2}\left(1-\cos x^n\right)dx + \int_{1-\varepsilon/2}^1\left(1-\cos x^n\right)dx .$$

Ta thấy $0 \le \int_{1-\varepsilon/2}^1\left(1-\cos x^n\right)dx \le \frac{\varepsilon}{2}$. Ngoài ra, từ bất đẳng thức $1-\cos x \le \frac{x^2}{2}$ với $0 < x < 1$ mà dễ dàng chứng minh bằng phương pháp đạo hàm, ta có

$$0 \le \int_0^{1-\varepsilon/2}\left(1-\cos x^n\right)dx \le \int_0^{1-\varepsilon/2}\frac{x^{2n}}{2}dx \le \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

với n đủ lớn. Từ đó $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\cos x^n dx = 1$.

Với tích phân $B_n = \int_1^{\pi}\cos x^n dx$, dùng đổi biến $t = x^n \Leftrightarrow x = t^{1/n}$

ta nhận được $B_n = \frac{1}{n}\int_1^{\pi^n} t^{\frac{1}{n}-1}\cos t\, dt$.

Hàm dưới dấu tích phân chưa đủ nhỏ. Dùng tích phân từng phần ta có

$$B_n = \frac{1}{n}\int_1^{\pi^n} t^{\frac{1}{n}-1}\, d(\sin t) = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} \sin t \Big|_1^{\pi^n} + \frac{n-1}{n^2}\int_1^{\pi^n} t^{\frac{1}{n}-2} \sin t\, dt\ .$$

Số hạng thứ nhất dần về 0 khi $n\to\infty$; đánh giá số hạng thứ hai dễ dàng:

$$\frac{n-1}{n^2}\left|\int_1^{\pi^n} t^{\frac{1}{n}-2} \sin t\, dt\right| \le \frac{n-1}{n^2}\int_1^{\infty} t^{\frac{1}{n}-2}\, dt = \frac{1}{n} \to 0\ (n\to\infty).$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = 0$. Từ đó $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \cos x^n dx = 1$.

Bài 4.5.37. Cho $\varepsilon > 0$ cố định, tìm

$$A = \lim_{x\to+\infty} x^{1-\varepsilon}\int_x^{x+1} \sin t^2\, dt\ .$$

Giải.

Đặt $t^2 = u \Leftrightarrow t = \sqrt{u}$ ta được

$$A_x = x^{1-\varepsilon}\int_x^{x+1} \sin t^2\, dt = x^{1-\varepsilon}\int_{x^2}^{(x+1)^2} \sin u \frac{1}{2\sqrt{u}}\, du\ .$$

Vì hàm dưới dấu tích phân chưa đủ nhỏ, dùng tích phân từng phần:

$$A_x = -x^{1-\varepsilon}\int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{1}{2\sqrt{u}}\, d(\cos x)$$

$$= -\frac{x^{1-\varepsilon}}{2}\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\Big|_{x^2}^{(x+1)^2} + \frac{x^{1-\varepsilon}}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2} (-\cos u)\frac{1}{2u^{3/2}}\, du\ .$$

$$* -\frac{x^{1-\varepsilon}}{2}\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\Big|_{x^2}^{(x+1)^2} = \frac{\cos x^2}{2x^{\varepsilon}} - \frac{x^{1-\varepsilon}}{2(x+1)}\cos(x+1)^2 \to 0\ (x\to+\infty);$$

$$* \frac{x^{1-\varepsilon}}{4}\left|\int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{-\cos u}{u^{3/2}} du\right|$$

$$\le \frac{x^{1-\varepsilon}}{4}\int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{1}{2x^{\varepsilon}(x+1)} \to 0\ (x\to+\infty)\ .$$

Vậy A = 0.

Bài 4.5.38. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 [\ln(1+x)]^n dx \sim \frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n} \text{ khi } n \to \infty.$$

Giải. Nếu đơn thuần làm trội, ta chỉ thu được đánh giá

$$0 < I_n = \int_0^1 \ln^n(1+x)dx < \int_0^1 \frac{2}{1+x}\ln^n(1+x)dx = 2\,\frac{\ln^{n+1}2}{n+1} \qquad (1)$$

mà chưa thể nói đã hoàn thành chứng minh. Bây giờ tích phân từng phần, ta được:

$$I_n = \int_0^1 \ln^n(1+x)d(1+x) = (1+x)\ln^n(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 n\ln^{n-1}(1+x)dx$$

$$= 2\ln^n 2 - nI_{n-1}.$$

Vậy $\quad nI_{n-1} = 2\ln^n 2 - I_n \;$ hay $\; \dfrac{I_{n-1}}{\dfrac{2\ln^n 2}{n}} = 1 - \dfrac{I_n}{2\ln^n 2}. \qquad (2)$

Từ (1) ta có

$$0 \le \frac{I_n}{2\ln^n 2} \le \frac{\ln 2}{n+1} \to 0 \;(n \to \infty).$$

Từ đó $I_{n-1} \sim \dfrac{2\ln^n 2}{n}$, suy ra $\quad I_n \sim \dfrac{2\ln^{n+1}2}{n}$.

Nhận xét. Ta đã sử dụng phương pháp đánh giá hai lần (xem §1.15).

Bài 4.5.39. Tính giới hạn

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{(2n+1)\pi/2} \sin t \ln\frac{1}{t}dt$;

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} \cos t \ln\frac{1}{t}dt$.

Giải.

b) Tích phân từng phần ta được

$$I_n = \int_0^{n\pi}(-\ln t)d\sin t = -(\sin t)\ln t\Big|_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}dt$$

$$= \lim_{t\to 0}(\sin t\,\ln t) + \int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}dt \to \int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}\;(n\to\infty).$$

a) Phương pháp tương tự.

Bài 4.5.40. Chứng minh rằng tồn tại giới hạn

$$A = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \sin x \sin x^2 dx.$$

Giải. Viết $A(n)= \int_0^1 \sin x \sin x^2 dx + \int_1^n \sin x \sin x^2 dx$, tích phân từng phần đối với số hạng thứ 2 ta được

$$B(n)= \int_1^n \sin x \sin x^2 dx = -\int_1^n \frac{\sin x}{2x} d\left(\cos x^2\right)$$

$$= \left.\frac{-\cos x^2 \sin x}{2x}\right|_1^n + \int_1^n \frac{\cos x^2 \cos x}{2x} dx - \int_1^n \frac{\cos x^2 \sin x}{2x^2} dx \qquad (*)$$

* $\left.\frac{-\cos x^2 \sin x}{2x}\right|_1^n \to \frac{\sin 2}{4} (n\to\infty).$

* $\int_1^\infty \frac{\cos x^2 \sin x}{2x^2} dx$ hội tụ tuyệt đối do $\left|\cos x^2 \frac{\sin x}{2x^2}\right| \le \frac{1}{2x^2}$ và $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ hội tụ.

Vậy $\int_1^n \frac{\cos x^2 \sin x}{2x^2} dx \to \int_1^\infty \frac{\cos x^2 \sin x}{2x^2} dx \ (n\to\infty).$

* Đối với số hạng thứ hai ở (*), lấy tích phân từng phần lần nữa ta được

$$\int_1^n \frac{\cos x^2 \cos x}{2x} dx = \int_1^n \frac{\cos x}{4x^2} d\left(\sin x^2\right)$$

$$= \left.\frac{\sin x^2 \cos x}{4x^2}\right|_1^n + \int_1^n \frac{\sin x^2 \sin x}{4x^2} dx + \int_1^n \frac{\sin x^2 \cos x}{8x^3} dx.$$

Số hạng thứ nhất rõ ràng hội tụ. Tích phân thứ hai và thứ ba cũng hội tụ khi so sánh các hàm dưới dấu tích phân với $\frac{1}{4x^2}$ và $\frac{1}{8x^3}$ tương ứng.

§4.5d. Bất đẳng thức Cauchy - Bunhiacopski - Schwarz (C-B-S)

Để áp dụng hiệu quả bất đẳng thức C-B-S, ta cần tách hàm dưới dấu tích phân thành hai nhân tử thích hợp: $f(x)=g(x)h(x)$.

Bài 4.5.41. Cho f(x) là hàm có đạo hàm liên tục trên [a;b], f(a) = 0. Chứng minh rằng

$$\left(\operatorname*{Max}_{x\in[a;b]} f(x)\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f'^2(x)dx .$$

Giải. $\forall x \in [a;b]$ theo bất đẳng thức C-B-S, ta có

$$(b-a)\int_a^b f'^2(x)dx \ge (x-a)\int_a^x f'^2(t)dt = \int_a^x 1^2dt\int_a^x f'^2(t)dt$$

$$\ge \left(\int_a^x 1f'(t)dt\right)^2 = (f(x)-f(a))^2 = f^2(x).$$

Vậy $(b-a)\int_a^b f'^2(x)dx \ \ge \ \operatorname*{Max}_{x\in[a;b]} f^2(x) \ \ge \ \left(\operatorname*{Max}_{x\in[a;b]} f(x)\right)^2$.

Bài 4.5.42. Cho f(x) là hàm có đạo hàm liên tục trên [0;1], f(1) - f(0) = 1. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx \ \ge 1 .$$

Giải. Theo bất đẳng thức C-B-S, ta có

$$\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx = \int_0^1 f'^2(x)dx\int_0^1 1^2\,dx$$

$$\ge \left(\int_0^1 f'(x)1\,dx\right)^2 = (f(1)-f(0))^2 = 1 .$$

Bài 4.5.43. Cho $f:[0;1]\to[-1;1]$ là hàm liên tục từng khúc, chứng minh rằng

$$\int_0^1 \sqrt{1-f^2(x)}dx \ \le \sqrt{1-\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2} .$$

Giải. Dễ thấy các căn thức có nghĩa. Theo bất đẳng thức C-B-S, ta có:

$$+ \ \left(\int_0^1 1\sqrt{1-f^2(x)dx}\right)^2 \le \int_0^1 1^2\,dx \ \int_0^1 \left(1-f^2(x)\right)dx = 1-\int_0^1 f^2(x)dx \ ;$$

$$+ \ \left(\int_0^1 1f(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 1^2\,dx \ \int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 f^2(x)dx \ .$$

Từ đó $1-\int_0^1 f^2(x)dx \le 1-\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$.

Cả hai vế đều không âm, suy ra đpcm.

Bài 4.5.44. Chứng minh rằng với mọi x > 0, ta có

$$e^x - 1 < \int_0^x \sqrt{e^{2t}+e^{-t}dt} < \sqrt{\left(e^x-1\right)\left(e^x-\frac{1}{2}\right)}.$$

Giải. Để chứng minh bất đẳng thức thứ nhất, nhìn vế trái dưới dạng tích phân: $e^x - 1 = \int_0^x e^t dt$ sẽ rất có lợi. Quả vậy, ta có

$$e^t < \sqrt{e^{2t}+e^{-t}},\ \forall t > 0.$$ Vậy

$$e^x - 1 = \int_0^x e^t dt < \int_0^x \sqrt{e^{2t}+e^{-t}}\,dt.$$

Đối với bất đẳng thức thứ hai, sử dụng bất đẳng thức C-B-S ta được

$$\left(\int_0^x \sqrt{e^{2t}+e^{-t}}\,dt\right)^2 = \left(\int_0^x e^{\frac{t}{2}} \sqrt{e^t+e^{-2t}}\,dt\right)^2$$

$$\le \int_0^x e^t dt \int_0^x \left(e^t + e^{-2t}\right)dt$$

$$= \left(e^x-1\right)\left(e^x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) < \left(e^x-1\right)\left(e^x-\frac{1}{2}\right).$$

Lấy căn bậc hai hai vế, ta được đpcm.

Bài 4.5.45. Cho u(x) là hàm liên tục, dương trên $[0;+\infty)$ và $\int_0^\infty \frac{dx}{u(x)} < \infty$. Chứng minh rằng

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a^2}\int_0^a u(x)dx = \infty.$$

Giải. Với b > a > 0, theo bất đẳng thức C-B-S ta có

$$\int_0^b u(x)dx \int_a^b \frac{dx}{u(x)} \ge \int_a^b \left(\sqrt{u(x)}\right)^2 dx$$

$$\ge \left(\int_a^b \sqrt{u(x)\frac{1}{u(x)}dx}\right)^2 = (b-a)^2.$$

Chọn b = 2a ta được

$$\frac{4}{(2a)^2}\int_0^{2a} u(x)dx \int_a^{2a} \frac{dx}{u(x)} \geq 1. \qquad (*)$$

Từ giả thiết suy ra $\lim\limits_{a\to\infty}\int_a^{2a}\frac{dx}{u(x)}=0$, vậy từ (*) dẫn tới

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{(2a)^2}\int_0^{2a} u(x)\,dx = +\infty .$$

Bài 4.5.46. Cho f(x) liên tục từng khúc trên [a;b] và

$$0 < m = \inf_{x\in[a;b]} f(x) \leq M = \sup_{x\in[a;b]} f(x) < +\infty .$$

Chứng minh rằng

$$(b-a)^2 \leq \int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leq (b-a)^2\,\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

Giải. Để chứng minh bất đẳng thức thứ nhất, chỉ việc áp dụng bất đẳng thức C-B-S

$$\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geq \left(\int_a^b \sqrt{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right)^2 = (b-a)^2 .$$

Đối với bất đẳng thức thứ hai, một mặt theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\left(\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right)^{1/2} = \left(\int_a^b \frac{f(x)}{M}dx \int_a^b \frac{m}{f(x)}dx\right)^{1/2}\sqrt{\frac{M}{m}}$$

$$\leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}}\left[\int_a^b \frac{f(x)}{M}dx + \int_a^b \frac{m}{f(x)}dx\right]. \qquad (1)$$

Mặt khác, theo kết quả Bài 4.5.14,

$$\int_a^b \frac{f(x)}{M}dx + \int_a^b \frac{m}{f(x)}dx \leq \left(1+\frac{m}{M}\right)(b-a) . \qquad (2)$$

Thay (2) và (1) rồi bình phương hai vế ta được đpcm.

§4.5e. Tính dương của tích phân.

Bài 4.5.47. Cho $f:[0;1]\to[0;1]$ liên tục, $f(x)$ không đồng nhất bằng 0 và $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f^2(x)dx$. Chứng minh rằng $f(x)\equiv 1$.

Giải. Từ giả thiết, $\int_0^1 f(x)(1-f(x))dx = 0$ .Lại có $f(x)(1-f(x)) \geq 0$, suy ra $f(x)(1-f(x)) \equiv 0$. Vậy $\forall x \in [0;1]$, hoặc là f(x) = 0 hoặc là f(x) = 1. Từ giả thiết, tồn tại $x_0 \in [0;1]$, $f(x_0) \neq 0$. Từ đó $f(x_0) = 1$.

Giả sử tồn tại $x_1 \in [0;1]$ để $f(x_1) = 0$. Do f(x) liên tục, $\exists x_2 \in [0;1]$ để $f(x_2) = (f(x_1) + f(x_0))\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, mâu thuẫn.

Bài 4.5.48. Cho $f_1(x),...,f_n(x)$ là các hàm liên tục, không âm trên [0;1] với

$$a_k = \int_0^1 f_k(x)dx, \qquad k = 1,2,..., n.$$

Chứng minh rằng tồn tại $x \in [0;1]$ sao cho $f_1(x)... f_n(x) \leq a_1 ... a_n$.

Giải. Giả sử $\exists k_0 \in \{1,...,n\}$ để $a_{k_0} = 0$. Từ tính dương của tích phân suy ra $f_{k_0}(x) \equiv 0$, khẳng định hiển nhiên đúng.

Giả sử $a_k > 0, \forall k = 1,...,n \Rightarrow \int_0^1 \frac{f_k(x)}{a_k}dx = 1$.

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\int_0^1 1dx = 1 = \int_0^1 \frac{1}{n}\left[\frac{f_1(x)}{a_1} + ... + \frac{f_n(x)}{a_n}\right]dx \geq \int_0^1 \sqrt[n]{\frac{f_1(x)...f_n(x)}{a_1...a_n}}dx \quad .$$

Từ tính dương của tích phân, $\exists x \in [0;1]$ để

$$\sqrt[n]{\frac{f_1(x)...f_n(x)}{a_1...a_n}} \leq 1, \text{ suy ra đpcm.}$$

Bài 4.5.49. Giả sử f(x) là hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sao cho tồn tại $c \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ để

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in (0;c) \ \& \ f(x) < 0, \quad \forall x \in \left(c;\frac{\pi}{2}\right).$$

Chứng minh rằng

$$\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\cos x\, dx\right)^2 + \left(\int_0^{\pi/2} f(x)\sin x\, dx\right)^2 > 0.$$

Giải. Gải sử ngược lại, $\int_0^{\pi/2} f(x)\cos x\, dx = \int_0^{\pi/2} f(x)\sin x\, dx = 0$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(x)[k\cos x + \sin x]\,dx = 0, \quad \forall \text{ hằng số } k.$$

Đặt k = tgα, α chọn sau, ta được

$$\int_0^{\pi/2} f(x)[\sin\alpha\cos x + \cos\alpha\sin x]\,dx = \int_0^{\pi/2} f(x)\sin(x+\alpha)dx = 0.$$

Bây giờ ta chọn α = - c, khi đó

Với $0 < x < c \Rightarrow f(x) > 0; \sin(x-c) < 0;$

$$c < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) < 0; \sin(x-c) > 0.$$

Vậy $\int_0^{\pi/2} f(x)\sin(x+\alpha)dx = \int_0^c + \int_c^{\pi/2} < 0$, vô lí.

Mâu thuẫn này chứng minh khẳng định.

Bài 4.5.50. Cho hàm f(x) không âm, liên tục từng khúc trên [a;b] và $\int_a^b f(x)dx = 0$. Chứng minh rằng f(x) = 0 trên [a;b] có thể trừ ta một số hữu hạn điểm.

Giải. Theo định nghĩa hàm liên tục từng khúc, tồn tại phép phân hoạch đoạn [a;b]: $a \le x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ để f(x) liên tục trên các khoảng (x_i, x_{i+1}) và tồn tại các giới hạn $f(x_i -), f(x_i +)$. Đặt

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{khi} \quad x \in (x_i; x_{i+1}); \\ f(x_i +) & \qquad\quad x = x_i; \\ f(x_{i+1} -) & \qquad\quad x = x_{i+1}. \end{cases}$$

Rõ ràng g(x) xác định, không âm và liên tục trên $[x_i; x_{i+1}]$. Lại có

$$0 \le \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Vậy $\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\,dx = 0$. g(x) không âm và liên tục nên g(x) = 0. Từ đó f(x) = 0, $\forall\, x \in (x_i; x_{i+1})$. Điều này đúng $\forall i$, vậy f(x) chỉ có thể khác không tại $x_1, ..., x_n$.

Bài 4.5.51. Cho a, b là hai số dương sao cho a + b < 1, còn $f: [0;+\infty) \to [0;+\infty)$ là hàm không giảm và

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^{ax} f(t)dt + \int_0^{bx} f(t)dt, \quad \forall x \ge 0. \qquad (*)$$

Chứng minh rằng $f(x) = 0, \ \forall x \ge 0$.

Giải. Đối với tích phân thứ nhất, thứ hai ở vế phải (*), lần lượt đặt $t = au$ và $t = bu$ suy ra $\int_0^x f(t)dt = a\int_0^x f(at)dt + b\int_0^x f(bt)dt$

hay $\int_0^x [f(t) - af(at) - bf(bt)]dt = 0, \quad \forall x \geq 0.$ (1)

Do $a, b \in (0;1)$ và f(x) không giảm nên $f(at) \leq f(t);\ f(bt) \leq f(t)$, từ đó

$$h(t) = f(t) - af(at) - bf(bt) \geq f(t)(1-(a+b)) \geq 0,\ \forall t > 0. \quad (2)$$

Nếu hàm f(t) liên tục, thì chứng minh nhanh chóng kết thúc. Ở đây f(t) được giả thiết không giảm, ta tiến hành như sau. Giả sử $t_0 \in [0;+\infty)$ bất kì, xét $x > t_0$, từ (1) và (2) ta có:

$$0 = \int_0^x h(t)dt \geq (1-(a+b))\int_0^x f(t)dt$$

$$\geq (1-(a+b))\int_{t_0}^x f(t)dt \geq (1-(a+b))(x-t_0)f(t_0) \geq 0$$

Vậy $f(t_0) = 0$, $\forall t_0 \geq 0$ hay $f(x) \equiv 0$.

Bài 4.5.52. Cho f(x), g(x), là các hàm dương, liên tục trên [0;1] còn K(x,y) là hàm dương, liên tục trên $[0;1]\times[0;1]$; đồng thời $\forall x \in [0;1]$

$$\int_0^1 f(y)K(x,y)dy = g(x);$$

$$\int_0^1 g(y)K(x,y)dy = f(x).$$

Chứng minh rằng f(x) = g(x) trên [0;1].

Giải. Đặt $h = \mathrm{Min}\left\{\frac{f(x)}{g(x)},\ x \in [0;1]\right\}$,

$$k = \mathrm{Min}\left\{\frac{g(x)}{f(x)},\ x \in [0;1]\right\}.$$

Giả sử $h \leq k$. Khi đó $\forall x, \frac{g(x)}{f(x)} \geq k \geq h$ hay $g(x) - hf(x) \geq 0$.

Vì f(x)/g(x) liên tục trên [0;1] nên tồn tại $x_0 \in [0;1]$ để $f(x_0)/g(x_0) = h$ hay $f(x_0) - hg(x_0) = 0$. Vậy

$$0 = f(x_0) - hg(x_0) = \int_0^1 K(x_0, y)(g(y) - hf(y))dy.$$

Do K(x,y) > 0; g(y) - hf(y) liên tục, không âm nên từ tính dương của tích phân, g(y) - hf(y) = 0 hay g(y) = hf(y), $\forall y$.

Lại có $f(x)=\int_0^1 K(x,y)g(y)dy = h\int_0^1 K(x,y)f(y)dy$

$$=h\,g(x)=h^2 f(x)\Rightarrow h=1\Rightarrow \quad f(x)=g(x),\ \forall x\in[0;1].$$

§4.6. SỐ GIA HÀM SỐ QUA TÍCH PHÂN - KHẢO SÁT NGUYÊN HÀM

Trong nhiều trường hợp, các công thức đơn giản sau rất có ích (giả sử các hàm f', g liên tục):

$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$: Nhìn hàm số dưới dạng nguyên hàm của đạo hàm;

$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx$: Nhìn số gia hàm số dưới dạng tích phân của đạo hàm;

$g(x)=\left(\int_a^x g(t)dt\right)'$: Khảo sát nguyên hàm nếu cần thiết.

Bài 4.6.1. Cho $\varphi(x)$ khả vi hai lần trên $[0;+\infty)$. Biết rằng $\varphi(x)>0, \varphi'(x)>0$ và $\frac{\varphi(x)\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^2}\le 2\quad \forall x\in[0;+\infty)$, chứng minh

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}=0.$$

Giải. Một nguyên hàm của $\frac{-\varphi'(x)}{(\varphi(x))^2}$ là $f(x)=\frac{1}{\varphi(x)}$.

Ta thấy f(x) khả vi hai lần trên $[0;+\infty)$; f(x) > 0,

$$f'(x)=-\frac{\varphi'(x)}{(\varphi(x))^2}<0,\ \forall x\ge 0.$$

$$f''(x)=\frac{-\varphi''(x)\varphi(x)+2\varphi'^2(x)}{\varphi^3(x)}\ge 0$$

Vậy $f'(x)$ tăng. Từ đó tồn tại $c=\lim_{x\to+\infty} f'(x)\le 0$. Ta chứng minh c = 0.

Giả sử, ngược lại c < 0: $f'(x)\le c<0$. Suy ra

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt+f(0)\le cx+f(0).$$

Vậy f(x) < 0 với x đủ lớn, mâu thuẫn.

Ta có thể trình bày lời giải trên dưới hình thức khác.

Đặt $g(x) = \frac{\varphi'}{\varphi^2} > 0$; $g' = \frac{\varphi''\varphi - 2\varphi'^2}{\varphi^3} \leq 0$ (từ giả thiết).

Vậy g dương và đơn điệu giảm, suy ra $\exists c = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) \geq 0$.

Nếu c > 0, $g(x) \geq c > 0, \forall x > 0$. Khi đó

$$\int_0^x g(t)dt \geq cx \text{ hay } -\frac{1}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(0)} \geq cx.$$

Tuy nhiên, do $\varphi(x) > 0$, bất đẳng thức này không xảy ra với x đủ lớn.

Bài 4.6.2. Giả sử A là lớp các hàm f(x) khả vi liên tục trên $[0;1]$, f(0) = 0, f(1) = 1. Chứng minh rằng

$$\operatorname*{Inf}_{f \in A} \left\{ \int_0^1 \left| f'(x) - f(x) \right| dx \right\} = \frac{1}{e}.$$

Giải. Khó có thể sử dụng nguyên hàm của $f'(x) - f(x)$. Tuy nhiên, nhân hiệu này với e^{-x} thì được $e^{-x}\left(f'(x) - f(x)\right)$ với nguyên hàm là $g(x) = e^{-x} f(x)$.

$$g'(x) = e^{-x}\left(f'(x) - f(x)\right); g(0) = 0;\ g(1) = \frac{1}{e}$$

$$f'(x) - f(x) = e^x g'(x).$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left| f'(x) - f(x) \right| dx = \int_0^1 e^x \left| g'(x) \right| dx \geq \int_0^1 \left| g'(x) \right| dx$$

$$\geq \int_0^1 g'(x) dx = g(1) - g(0) = \frac{1}{e}.$$

Để chứng tỏ cận dưới cần tìm là 1/e, xét dãy hàm $\{f_n(x)\}$ với hàm g_n tương ứng như sau:

$$g_n(x) = \frac{1 - (1-x)^n}{e},\ n = 1, 2, \ldots$$

$$g'_n(x) = \frac{n}{e}(1-x)^{n-1}.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left| f'_n(x) - f_n(x) \right| dx = \int_0^1 g'_n(x) e^x\, dx = \frac{n}{e} \int_0^1 e^x (1-x)^{n-1} dx$$

$$= n \int_0^1 e^{-x} x^{n-1} dx \to \frac{1}{e} (n \to \infty).$$

Bài 4.6.3. Giả sử f(x) có đạo hàm liên tục trên [0;1]. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 |f(x)|dx \le \max\left(\int_0^1 |f'(x)|dx ; \left|\int_0^1 f(x)dx\right|\right).$$

Giải.

* Nếu f(x) không đổi dấu trên [0;1], khẳng định là rõ ràng.

* Nếu f(x) đổi dấu trên [0;1], từ tính liên tục của f(x) và $|f(x)|$ suy ra tồn tại $x_1 \in (0;1)$, $x_2 \in (0;1)$ để $f(x_1) = 0$; $|f(x_2)| = \max\limits_{x \in [0;1]} |f(x)|$.

$$|f(x)| \le |f(x_2)| = |f(x_2) - f(x_1)|$$

$$= \left|\int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx\right| \le \int_{x_1}^{x_2} |f'(x)dx| \le \int_0^1 |f'(x)|dx .$$

Lấy tích phân hai vế trên [0;1] ta được đpcm.

Bài 4.6.4. Cho f(x) là hàm số xác định và liên tục trên đoạn [1;2] và thoả mãn điều kiện

$$\int_{x_1}^{x_2} f^2(x)dx \le \frac{x_2^3 - x_1^3}{3} \qquad \forall x_1, x_2 \in [1;2], x_1 \le x_2. \qquad (*)$$

Chứng minh rằng $\int_1^2 f(x)dx \le \frac{3}{2}$.

Giải.

Nhìn vế phải bất đẳng thức (*) dưới dạng

$\left.\frac{x^3}{3}\right|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} x^2\, dx$, (*) được viết lại như sau:

$$\int_{x_1}^{x_2} f^2(x)dx \le \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} \left(f^2(x) - x^2\right) dx \le 0 .$$

Từ tính dương của tích phân suy ra tồn tại $c \in [x_1, x_2]$ để $f^2(c) - c^2 \le 0$. Do hàm $h(x) = f^2(x) - x^2$ liên tục trên [1;2] nên $f^2(x) - x^2 \le 0, \forall x \in [1;2]$ (chứng minh bằng phản chứng). Từ đó $f^2(x) \le x^2$ hay $|f(x)| \le x, \quad \forall x \in [1;2]$

$$\int_1^2 f(x)dx \le \int_1^2 |f(x)|dx \le \int_1^2 x\, dx = \frac{3}{2}.$$

Bài 4.6.5. Cho $f, g: [0;+\infty) \to [0;+\infty)$ là hai hàm liên tục, không âm. Giả sử tồn tại C > 0 sao cho

$$f(x) \le C + \int_0^x f(t)g(t)dt, \qquad \forall x > 0. \tag{1}$$

Chứng minh rằng $f(x) \le C\ e^{\int_0^x g(t)dt}$, $\forall x > 0$. (2)

Giải. Từ (1), ta chỉ việc chứng minh

$$C + \int_0^x f(t)g(t)dt \le C\ e^{\int_0^x g(t)dt} \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(C + \int_0^x f(t)g(t)dt\right) - \ln C \le \int_0^x g(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(C + \int_0^y f(t)g(t)dt\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x} \le \int_0^x g(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x \frac{f(u)g(u)}{C + \int_0^u f(t)g(t)dt} du \le \int_0^x g(u)du. \tag{4}$$

Kể đến $g(x) \ge 0$, (4) được suy ra từ (1).

Nhận xét. Thành công của lời giải chủ yếu là ở chỗ, chúng ta đã thấy số gia hàm số:

$$\ln\left(C + \int_0^x f(t)g(t)dt\right) - \ln C = \ln\left(C + \int_0^y f(t)g(t)dt\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x}$$

bằng tích phân của đạo hàm $\int_0^x \left[\ln\left(C + \int_0^u f(t)g(t)dt\right)\right]' du$.

Bài 4.6.6. Cho hàm số f(x) xác định và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbf{R}$ và thoả mãn điều kiện $f(x) + f''(x) \ge 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Chứng minh rằng

$$f(x) + f(x+\pi) \ge 0, \quad \forall x \in \mathbf{R} \tag{*}$$

Giải. Gắn hằng số π "vu vơ" với các hàm lượng giác, để ý điến công thức nói đến ở đầu mục này, ta nhìn vế trái (*) dưới dạng

$$g(x) = f(x) + f(x+\pi) = f(x)\cos 0 - f(x+\pi)\cos\pi$$

$$= -f(x+t)\cos t\Big|_{t=0}^{t=\pi} = -\int_0^\pi \left(f(x+t)\cos t\right)' dt.$$

Bây giờ mọi chuyện đã dễ dàng, biến đổi tiếp như sau:

$$g(x)=\int_0^{\pi}\left[f(x+t)\sin t-f'(x+t)\cos t\right]dt$$

$$=\int_0^{\pi}f(x+t)\sin t\,dt-\int_0^{\pi}f'(x+t)d(\sin t)$$

$$=\int_0^{\pi}f(x+t)\sin t\,dt-f'(x+t)\sin t\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}f''(x+t)\sin t\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}\left[f(x+t)+f''(x+t)\right]\sin t\,dt\geq 0.$$

Nhận xét. Đối với bất đẳng thức cuối cùng ở lời giải trên, ta cần bổ sung giả thiết $f''(x+t)\sin t$ khả tích trên $[0;\pi], \forall x\in\mathbf{R}$ (điều này thoả mãn nếu $f''(x)$ liên tục). Khi phát hiện ra điều này, các bạn có thể bổ sung vào giả thiết của đề ra.

Lời giải sau đây khắc phục được nhược điểm đã nêu:

Xét hàm $g(t)=\sin t\,f'(x+t)-\cos t\,f(x+t)\in[0;\pi]$($x\in\mathbf{R}$ là tham số). Rõ ràng g(t) khả vi trên $[0;\pi]$ và

$$g'(t)=\sin t\left[f(t+x)+f''(t+x)\right]\geq 0,\ \forall t\in[0;\pi].$$

Vậy g(t) không giảm, từ đó $g(\pi)\geq g(0)$ hay

$$f(x+\pi)\geq -f(x)\Leftrightarrow f(x+\pi)+f(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbf{R}.$$

Chương V
SƠ LƯỢC VỀ HÀM NHIỀU BIẾN

§5.0. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

* Chuẩn trên $\mathbf{R}^n$. Đó là ánh xạ $N : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ thoả mãn:

+ $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $N(x) \geq 0$; $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

+ $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

+ $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Thường người ta hay kí hiệu một chuẩn trên $\mathbf{R}^n$ là $\|.\|$.

* Mỗi chuẩn $\|.\|$ xác định một khoảng cách ρ trên $\mathbf{R}^n$, đó là ánh xạ

$\rho : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ xác định bởi $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Khoảng cách ρ có 3 tính chất:

+ $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

+ $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall\ x, y \in \mathbf{R}^n$;

+ $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z) \ \forall\ x, y, z \in \mathbf{R}^n$.

* Mọi chuẩn trên $\mathbf{R}^n$ đều tương đương theo nghĩa: Với $\|.\|_1$ và $\|.\|_2$ bất kì trên $\mathbf{R}^n$, tồn tại hai số dương C_1, C_2 để

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1,\ \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

Để dễ hiểu, hầu hết các nội dung chương này đều trình bày trong $\mathbf{R}^2$. Nhiều kết quả còn đúng trong $\mathbf{R}^n$ với một số thay đổi nhất định về kí hiệu.

* Ba chuẩn thông dụng trên $\mathbf{R}^2$. Với $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, kí hiệu

$\|u\|_1 = \|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$;

$\|u\|_2 = \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ (chuẩn Euclide);

$\|u\|_\infty = \|(x, y)\|_\infty = \mathrm{Max}(|x|, |y|)$ (chuẩn Max).

Sự tương đương của ba chuẩn này thể hiện ở hệ bất đẳng thức

$$\|u\|_\infty \le \|u\|_1 \le 2\,\|u\|_\infty\ ;$$
$$\|u\|_\infty \le \|u\|_2 \le \sqrt{2}\,\|u\|_\infty .$$

Hình cầu mở tâm a, bán kính r đối với chuẩn $\|.\|$ kí hiệu là $B_{\|.\|}(a,r)$, được xác định bởi

$$B_{\|.\|}(a,r)=\left\{u\in\mathbf{R}^2:\|u-a\|<r\right\}.$$

Tập con D của $\mathbf{R}^2$ được gọi là mở nếu $\forall x\in D$, $\exists r>0: B_{\|.\|_\infty}(x,r)\subset D$.

Lưu ý: Ba hình cầu mở $B_{\|.\|_i}(a,r), i=1,2,\infty$ là khác nhau, trong khi đó - do các chuẩn trên $\mathbf{R}^2$ là tương đương - một tập là mở theo chuẩn này cũng là mở theo chuẩn kia và ta có thể thay $\|.\|_\infty$ ở định nghĩa của tập mở nêu trên bằng $\|.\|_1$ hoặc $\|.\|_2$.

Cũng vậy, các khái niệm tô pô liên quan như lân cận, điểm trong, điểm biên, điểm giới hạn, tập đóng, tập bị chặn, sự hội tụ, tập compắc... là tương đương đối với các chuẩn này. Khi trình bày, người ta hay trình bày với $\|.\|_\infty$, song cũng có thể áp dụng cho các chuẩn khác.

* Sự hội tụ của dãy điểm. Giả sử $a\in\mathbf{R}^2$ còn $\{u_n\}$ là một dãy trong $\mathbf{R}^2$. Nếu

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbf{N}, \forall n>N \text{ suy ra } \|u_n-a\|_\infty<\varepsilon,$$

thì ta nói dãy $\{u_n\}$ hội tụ đến a, và ta viết $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$ hoặc $u_n\to a\ (n\to\infty)$.

* $u_n=(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)\Leftrightarrow x_n\to x_0;\ y_n\to y_0 \quad (n\to\infty)$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}\to 0\ \ (n\to\infty).$$

* Điểm a được gọi là điểm giới hạn của tập hợp $D\subset\mathbf{R}^2$ nếu có một dãy $\{u_n\}$ các phần tử khác a của D hội tụ đến a.

* Cho $D\subset\mathbf{R}^2$, a = (x_0,y_0) là một điểm giới hạn của D, $f: D\to\mathbf{R}^2$ và $k\in\mathbf{R}$. Ta nói f có giới hạn k tại a (hoặc: khi x tiến đến a) nếu:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall u\in D: 0<\|u-a\|_\infty<\delta \text{ thì } |f(u)-k|\le\varepsilon .$$

Điều này tương đương với: Với mọi dãy $\{(x_n,y_n)\}$ các phần tử của D, $(x_n,y_n)\ne(x_0,y_0)$, $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$ thì $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=k$.

Hệ quả. Nếu $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=k$ thì khi (x,y) dần đến (x_0,y_0) theo một đường cong tùy ý trong D, f(x,y) dần đến k.

Các định lí về giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số, định lí kẹp vẫn còn đúng trong trường hợp hàm nhiều biến.

* Cho $D \subset \mathbf{R}^2$, $f: D \to \mathbf{R}$ và $a \in D$. Ta nói rằng hàm f liên tục tại a nếu:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u \in D: \|u-a\|_\infty \le \delta$ thì $|f(u)-f(a)| \le \varepsilon$.

* Nếu a là điểm cô lập của D thì theo định nghĩa này, mọi ánh xạ $f: D \to \mathbf{R}$ đều liên tục tại a. Nếu a là điểm giới hạn của D và $a \in D$ thì f(x) liên tục tại a nếu và chỉ nếu $f(u) \to f(a)$ khi $u \to a$.

Các định lí cơ bản về sự liên tục của tổng, hiệu, tích, thương, hợp các hàm liên tục, tính liên tục đều của hàm liên tục trên tập compắc đối với hàm một biến vẫn còn bảo toàn cho trường hợp hàm nhiều biến.

* Đạo hàm theo hướng. Cho D là tập mở trên $\mathbf{R}^2$; $f: D \to \mathbf{R}$; $a \in D$; $\upsilon \in \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Ta nói f có đạo hàm (cấp một) tại a theo hướng vectơ υ khi và chỉ khi hàm một biến t $\varphi_\upsilon(t) = f(a + t\upsilon)$ khả vi tại 0. Khi đó

$$\varphi'_\upsilon(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t\upsilon) - f(a)}{t}$$

được gọi là đạo hàm theo hướng υ của f tại a và được kí hiệu là $\frac{\partial f}{\partial \vec{\upsilon}}(a)$ hoặc $\frac{\partial f}{\partial \upsilon}(a)$ hoặc $D_\upsilon f(a)$.

* Đạo hàm riêng. Cho U là tập mở trên $\mathbf{R}^2$, $f: U \to \mathbf{R}$ với $(x,y) \to f(x,y), a = (x_0,y_0) \in U$. Nếu hàm một biến $f(x, y_0)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng (cấp một) của f theo biến x (biến thứ nhất) tại (x_0,y_0) và được kí hiệu là $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ hay $f'_x(x_0,y_0)$.

Tương tự, ta định nghĩa được $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$.

* Đạo hàm riêng $f'_x(x_0,y_0)$ (tương ứng $f'_y(x_0,y_0)$) chính là đạo hàm theo hướng véc tơ (1,0) (tương ứng (0,1)) của f tại (x_0,y_0).

* Sự khả vi. Cho D là tập mở trên $\mathbf{R}^2$, $f: D \to \mathbf{R}$; $a = (x_0, y_0) \in U$. Giả sử với $(x, y) = (x_0 + h, y_0 + k)$ với h, k đủ nhỏ, chúng ta có thể biểu diễn số gia toàn phần $\Delta f = f(x_0 + h, y_0 + k) - (x_0, y_0)$ của hàm số dưới dạng

$$\Delta f = Ah + Bk + \|(h, k)\| \varepsilon(h, k)$$

trong đó A, B là những hằng số chỉ phụ thuộc vào (x_0, y_0) còn $\varepsilon(h,k) \to 0$ khi $(h, k) \to (0,0)$. Khi đó ta nói rằng hàm f khả vi tại (x_0, y_0) và biểu thức $A\Delta x + B\Delta y$ được gọi là vi phân toàn phần của f tại (x_0, y_0) ứng với số gia Δx của đối số x, số gia Δy của đối số y và được kí hiệu là $df(x_0, y_0)$ hay df .

Hàm f được gọi là khả vi trên D (mở) nếu nó khả vi tại mọi điểm $(x_0, y_0) \in D$.

* Nếu hàm f khả vi tại (x_0, y_0) thì liên tục tại đó, đồng thời tồn tại các đạo hàm riêng f'_x , f'_y tại (x_0,y_0), hơn nữa

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Chúng ta còn viết ngắn gọn biểu thức này dưới dạng

$$df = f'_x dx + f'_y dy.$$

* Nếu hàm f có các đạo hàm riêng tại lân cận điểm (x_0, y_0) và các đạo hàm riêng đó liên tục tại (x_0, y_0) thì f khả vi tại (x_0, y_0).

* Đạo hàm của hàm hợp. Cho D, Δ là các tập mở của $\mathbf{R}^2$, $\varphi: D \to \Delta$ xác định bởi

$$\varphi(x, y) = (u(x, y),\ v(x, y))$$

sao cho $u(x, y)$, $v(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên D. Cho $f: \Delta \to \mathbf{R}$ có các đạo hàm riêng liên tục trên Δ.

Khi đó hàm hợp $F = f_0\varphi: D \to \mathbf{R}$ xác định bởi $F(x, y) = f(u(x, y),\ v(x, y))$ có các đạo hàm riêng liên tục trên D, được tính theo công thức

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x, y),\ v(x, y))\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x, y),\ v(x, y))\frac{\partial v}{\partial x}(x, y);$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x, y),\ v(x, y))\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x, y),\ v(x, y))\frac{\partial v}{\partial y}(x, y).$$

* Quy tắc vi phân với các phép toán.

Cho u, v là các hàm nhiều biến khả vi, khi đó:

$$d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$d(uv) = vdu + udv;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}\quad (v\neq 0).$$

* Đạo hàm riêng cấp cao. Giả sử D là tập mở trên $\mathbf{R}^2$ còn $f: D\to\mathbf{R}$ có các đạo hàm riêng cấp một f'_x, f'_y tại(x,y) $\forall(x,y)\in D$. Cho (x,y) thay đổi trong D, $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ là những hàm số. Các đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp một này - nếu tồn tại - được gọi là các đạo hàm riêng cấp hai. Có cả thảy 4 đạo hàm riêng cấp hai có thể: f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy} $\left(f''_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);...\right)$.

* Định lí Schvartz. Cho D là tập mở trên $\mathbf{R}^2$, $f: D\to\mathbf{R}$, $a=(x_0,y_0)\in D$. Nếu f có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên D, f''_{xy}, f''_{yx} tồn tại trên D và liên tục tại (x_0,y_0) thì $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

* Công thức Taylor. Giả sử hàm u = f(x,y) có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp n trong một lân cận D nào đó của $a=(x_0,y_0)$. Giả sử $\Delta x,\Delta y$ đủ nhỏ sao cho $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in D$. Khi đó

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}d^1f(x_0,y_0)+...+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+o\left(\left\|(\Delta x,\Delta y)\right\|_\infty^n\right),$$

trong đó $d^kf(x_0,y_0)=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\frac{\partial^k f}{\partial x^i\,\partial y^{k-i}}(x_0,y_0)\Delta x^i\,\Delta y^{k-i}$.

$d^kf(x_0,y_0)$ được kí hiệu bởi luỹ thừa tượng trưng $\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(x_0,y_0)$.

* Định lí hàm ẩn. Cho D là tập mở trong $\mathbf{R}^2, (x_0,y_0)\in D, f: D\to\mathbf{R}$ thoả mãn

+ $f(x_0,y_0)=0$;

+ f có các đạo hàm riêng liên tục trên D;

+ $f'_y(x_0,y_0)=0$.

Khi đó tồn tại hai khoảng mở $J=(x_0-\delta;x_0+\delta)$ và $K=(y_0-\gamma;\ y_0+\gamma)\ (\delta,\gamma>0)$; $J\times K\subset D$ và:

Tồn tại một và chỉ một hàm số khả vi liên tục $\varphi: J\to K$, sao cho $\forall(x,y)\in J\times K,\ f(x,y)=0\Leftrightarrow y=\varphi(x)$.

Hơn thế, nếu giả thiết rằng f có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp k trên D thì φ cũng khả vi liên tục đến cấp k trên J.

+ Trên thực tế, khi các điều kiện của định lí thoả mãn, để tính đạo hàm $\varphi'(x)$ ta đạo hàm hai vế theo x hệ thức $f(x,\varphi(x))=0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0, \forall x \in J$$

rồi suy ra $\varphi'(x)$.

(*) Cực trị địa phương. Giả sử $D \subset \mathbf{R}^2$, $a=(x_0,y_0)\in D, f: D\to \mathbf{R}$. Ta nói f có cực đại (địa phương) tại a nếu có một r - lân cận đủ nhỏ B(a,r) của a sao cho $\forall(x,y)\in D \cap B(a,r),\ \ f(x,y)\le f(x_0,y_0)$.

Ta gọi (x_0,y_0) là điểm cực đại (địa phương) của hàm f. Chúng ta hãy tự hiểu ý nghĩa của cực tiểu địa phương.

Các điểm cực đại, cực tiểu được gọi chung là các điểm cực trị.

Ta nói f đạt giá trị lớn nhất (hay cực đại toàn cục) tại (x_0,y_0) nếu

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0)\ \ ,\forall(x,y)\in D .$$

Nếu xảy ra bất đẳng thức ngược lại, ta nói f đạt giá trị nhỏ nhất (cực tiểu toàn cục) tại (x_0, y_0).

* Điều kiện cần của cực trị. Cho D là một tập mở của $\mathbf{R}^2$, $(x_0,y_0)\in D$. Giả sử $f: D\to \mathbf{R}$ có cực trị địa phương tại (x_0,y_0) và tại đó các đạo hàm riêng $f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)$ tồn tại. Khi đó

$$f'_x(x_0,y_0)= f'_y(x_0,y_0)=0 .$$

* D là tập mở trong $\mathbf{R}^2$, $(x_0,y_0)\in D$, $f: D\to\mathbf{R}$.

Ta nói (x_0,y_0) là một điểm dừng của f nếu

$$f'_x(x_0,y_0)= f'_y(x_0,y_0)=0 .$$

Điểm dừng hoặc điểm tại đó không tồn tại ít nhất một trong hai đạo hàm riêng f'_x, f'_y được gọi chung là điểm tới hạn.

* *Hệ quả*. Chỉ việc tìm các điểm cực trị địa phương tại các điểm tới hạn.

* Điều kiện đủ của cực trị. Cho D là một tập mở trong $\mathbf{R}^2$. Giả sử $f: D\to\mathbf{R}$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một lân cận nào đó của $(x_0,y_0)\in U$ và

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Đặt $$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0);\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0);$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0);\ \Delta = B^2 - AC.$$

Nếu $\Delta < 0; A > 0$ thì f đạt cực tiểu tại $M(x_0, y_0)$;

Nếu $\Delta < 0; A < 0$ thì f đạt cực đại tại $M(x_0, y_0)$;

Nếu $\Delta > 0$ thì f không đạt cực trị tại $M(x_0, y_0)$.

Nếu $\Delta = 0$ thì chưa có kết luận.

§5.1. GIỚI HẠN

Kỹ thuật chúng ta rất hay dùng là áp dụng định lý kẹp cũng như sự tương đương của các chuẩn. Các bạn cũng cần vận dụng tốt các kiến thức về giới hạn hàm một biến.

Bài 5.1.1. Khảo sát sự tồn tại và tính giá trị nếu có của giới hạn tại (0,0) của hàm f(x,y) cho bởi

a) $\dfrac{x^3y^2}{x^6 + y^4}$;   b) $\dfrac{x^4y^3}{x^6 + y^8}$.

Giải.

a) Vì $\lim\limits_{x \to 0} f(x, 0) = 0$;

$$\lim_{x \to 0} f\left(x, x^{3/2}\right) = \frac{1}{2} (\neq 0)$$

nên hàm số không có giới hạn tại (0,0).

b) Đặt $u = |x|^3$; $v = y^4$; $h = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Ta có $h \to 0$ khi $(x, y) \to (0, 0)$. Hơn nữa $|u| \le h$; $|v| \le h$ nên

$$0 \le |f(x, y)| = \frac{u^{4/3}v^{3/4}}{u^2 + v^2} \le h^{4/3}h^{3/4-2} = h^{1/12}.$$

Vậy $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$.

Bài 5.1.2. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos\sqrt{\left|(x^2+x)y\right|}}{|y|}$.

Giải. Vì $1-\cos t \sim \dfrac{t^2}{2}$ nên có $\alpha\in[0;1]$ đủ nhỏ để với $|t|\le\alpha$ thì $0\le 1-\cos t\le t^2$. Khi đó với x, y: $|x|\le\alpha/2;\ 0<|y|\le\alpha$ thì $\left|(x^2+x)y\right|\le\alpha^2$ nên

$$0\le|f(x,y)|\le\frac{\left|x^2+x\right||y|}{|y|}=\left|x^2+x\right|.$$

Vậy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}=0$.

Bài 5.1.3. Tìm các giới hạn

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty;\infty)} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$;   b) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty;+\infty)} \dfrac{x^2+y^2}{x^2\ln y+y^2\ln x}$.

Giải.

a) Với $x\neq 0,\ y\neq 0$ ta có

$$x^2-xy+y^2\ \ge|xy|>0.$$

Vậy $0\le|f(x,y)|\le\dfrac{|x+y|}{|xy|}\ \le\ \dfrac{1}{|y|}+\dfrac{1}{|x|}$.

Theo định lí kẹp, giới hạn cần tìm bằng 0.

b) Với x > 1, y > 1 ta có

$$0<f(x,y)=\frac{x^2}{x^2\ln y+y^2\ln x}+\frac{y^2}{x^2\ln y+y^2\ln x}<\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{\ln y}.$$

Vậy giới hạn cần tìm là 0.

Bài 5.1.4. Tìm các giới hạn

$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2/(x+y)}$;   b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y}{|x|+|y|}$.

Giải.

a) $f(x,y)=e^{\frac{1}{1+\frac{y}{x}}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}\to e$ khi $x\to\infty$, $y\to a$.

b) $\operatorname{sh}t = t + o(t)$. Vậy với t đủ nhỏ, $|\operatorname{sh}t| < 2|t|$.

(Có thể chứng minh khẳng định này theo phương pháp đạo hàm). Khi đó ta có

$$0 \le |f(x,y)| \le \frac{4|x||y|}{|x|+|y|} \le |x|+|y|.$$

với x, y đủ nhỏ. Vậy giới hạn cần tìm là 0.

Bài 5.1.5. Có tồn tại đa thức hai biến thực với các hệ số thực sao cho tập giá trị của nó là tập tất cả các số thực dương.

Giải. Có tồn tại đa thức như vậy. Ví dụ:

$$P(x,y) = x^2 + (1-xy)^2.$$

Đa thức này chỉ nhận các giá trị dương (bởi vì x và 1 - xy không thể đồng thời bằng không). Từ đồng nhất thức $P\left(x, \frac{1}{x}\right) = x^2$ suy ra rằng mỗi số thực dương nằm trong tập giá trị của P.

§5.2. LIÊN TỤC

Để chứng minh hàm f không liên tục tại (x_0, y_0) ta hãy chọn ra một đường cong, chẳng hạn $\{y = \varphi(x)\}$, sao cho khi điểm $(x, \varphi(x))$ trên đường cong dần đến (x_0, y_0), giá trị $f(x, \varphi(x))$ tương ứng của hàm không dần đến $f(x_0, y_0)$; nói khác, hàm một biến $f(x, \varphi(x))$ gián đoạn tại x_0. Cũng có thể xét với dãy.

Nhiều thủ thuật giải bài toán liên tục đều cho hàm một biến vẫn được áp dụng, ví dụ:

Nếu hàm f thoả mãn điều kiện Lipschitz trên D, tức là tồn tại hằng số C > 0 để với hai điểm (x,y), (x', y') tùy ý trên D luôn có

$$|f(x,y) - f(x',y')| \le C\,\|(x,y) - (x',y')\|$$

thì f liên tục đều trên D.

Bài 5.2.1. Chứng minh rằng hàm hai biến

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{nếu } (x,y) \ne (0,0); \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

liên tục tại (0,0) trên mỗi tia qua (0,0) nhưng không liên tục tại (0,0).

Giải. Với y = kx, k = const ta có

$$f(x,kx)=\frac{x^2kx}{x^4+k^2x^2}=\frac{kx}{x^2+k^2}\to 0\ (x\to 0).$$

Trên trục Oy ta cũng có $f(0,y)=0\to (y\to 0)$.

Vậy $f(x,y)$ liên tục tại (0,0) trên tia bất kỳ qua (0,0).

Bây giờ chọn $y=x^2\neq 0$, ta được

$$f\left(x,x^2\right)=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}\neq 0\ (x\to 0).$$

Vậy f(x,y) không liên tục tại (0,0).

Bài 5.2.2. Chứng minh rằng đối với hàm $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$, cả hai giới hạn lặp

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)\right)$ và $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)\right)$ đều không tồn tại, nhưng lại tồn tại giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$.

Giải.

* Đối với $y\neq 0$ tùy ý, xét hai dãy dần đến không $x_n=\frac{1}{n\pi}$ và $x'_n=\frac{2}{(4n+1)\pi}$.

Khi đó $f(x_n,y)=0\to 0\ (n\to\infty)$;

$f\left(x'_n,y\right)=\left(x'_n+y\right)\sin\frac{1}{y}\to y\sin\frac{1}{y}\quad (n\to\infty)$.

$y\sin\frac{1}{y}\neq 0$ với y đủ nhỏ và $y\neq\frac{1}{k\pi}, k\in\mathbf{Z}$. Vậy, không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$ với y đủ nhỏ $y=\neq\frac{1}{k\pi}, k\in\mathbf{Z}$, do đó cũng không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)\right)$. Tương tự trường hợp còn lại.

* Với $x\neq 0$ và $y\neq 0$ thì

$$0\le |f(x,y)|\le |x+y|\to 0 \text{ khi } (x,y)\to(0,0).$$

Bài 5.2.3. Tìm các điểm gián đoạn của hàm $u = \dfrac{x+y}{x^3+y^3}$.

Giải. $u = \dfrac{x+y}{(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}$.

Vì $u = x^2 - xy + y^2 > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$, theo các định lý cơ bản, hàm liên tục trên $G = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y): y = -x\}$.

* Bây giờ, với $y_0 = -x_0 \neq 0$, ta có

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,-x_0)\\(x,y)\in G}} u(x,y) = 1/\left(x_0^2 - x_0y_0 + y_0^2\right).$$

Vậy với $x_0 \neq 0$, $(x_0, -x_0)$ là điểm gián đoạn khử được.

* Tại $(x_0, y_0) = (0,0)$ ta có

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} u(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty .$$

Vậy u gián đoạn tại (0,0).

Bài 5.2.4. Cho $f,g:[0;1]\to\mathbf{R}$ là hai hàm số bị chặn, còn hàm hai biến $M:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ xác định như sau:

$$M(x,y) = \sup_{t\in[0;1]} \left(xf(t), yg(t)\right).$$

Chứng minh rằng $M(x,y)$ liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

Giải. Lấy $(x,y) \in \mathbf{R}^2$; $\left(x',y'\right) \in \mathbf{R}^2$. $\forall t \in [0;1]$, ta có

$$\begin{aligned}[xf(t)+yg(t)] - \left[x'f(t)+y'g(t)\right] &= \left(x-x'\right)f(t) + \left(y-y'\right)g(t)\\ &\leq \left|x-x'\right| \operatorname{Sup}|f(t)| + \left|y-y'\right| \operatorname{Sup}|g(t)|.\end{aligned}$$

Vậy $xf(t)+yg(t) \leq x'f(t)+y'g(t) + \left|x-x'\right| \operatorname{Sup}|f(t)| + \left|y-y'\right| \operatorname{Sup}|g(t)|$.

Chuyển qua cận trên khi t chạy trên [0;1] ta được

$$M(x,y) \leq M\left(x',y'\right) + \left|x-x'\right| \operatorname{Sup}|f(t)| + \left|y-y'\right| \operatorname{Sup}|g(t)| .$$

Thay đổi vai trò của (x,y) và $\left(x',y'\right)$, ta đi tới

$$\left|M(x,y)-M(x',y')\right| \le \left|x-x'\right| \operatorname{Sup}|f(t)|+\left|y-y'\right| \operatorname{Sup}|g(t)|,$$

chứng tỏ M(x,y) liên tục.

Bài 5.2.5. Xác định miền liên tục của hàm hai biến sau:

a) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy} & \text{khi } xy \ne 0;\\ 0 & \text{khi } xy=0.\end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases}x^4 & \text{khi } y > x^2;\\ y^2 & \text{khi } y \le x^2.\end{cases}$

Giải.

a) Lấy (x_0,y_0) bất kỳ.

* Nếu $x_0y_0 \ne 0$, tồn tại lân cận V đủ nhỏ của (x_0,y_0) để trên đó $xy \ne 0$. Trên V, f(x,y) là hàm sơ cấp nên liên tục tại (x_0,y_0).

* Nếu $x_0 \ne 0;\ y_0 = 0$ thì hàm một biến

$$f(x_0,y)=\begin{cases}(x_0^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x_0y} & \text{khi } y \ne 0;\\ 0 & \text{khi } y=0\end{cases}$$

không có giới hạn tại y = 0 (chúng ta dễ chứng minh được điều này !). Vậy f(x,y) không liên tục tại $(x_0,0)$ với $x_0 \ne 0$. Tương tự, hàm f(x,y) cũng gián đoạn tại $(0,y_0)$ với $y_0 \ne 0$.

* Nếu $x_0 = y_0 = 0$, ta có

$$|f(x,y)| \le x^2+y^2 \to 0 = f(0,0)\ \left((x,y)\to(0,0)\right).$$

Tóm lại, miền liên tục là $E=\{(x;y): xy \ne 0\}\cup\{(0;0)\}$.

b) Hướng dẫn. Xét sự liên tục của hàm f tại (x_0,y_0) trong các trường hợp $y_0 > x^2$; $y_0 < x^2$; $y_0 = x^2$.

Trả lời: $\mathbf{R}^2$.

Bài 5.2.6. Hàm hai biến $f: D=[a;b]\times[c;d]\to\mathbf{R}$ được gọi là liên tục theo biến y đều theo biến x nếu:

$\forall y_0 \in [c;d], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in D: |y-y_0| < \delta$, thì

$\left|f(x,y)-f(x,y_0)\right| < \varepsilon$.

Chứng minh rằng nếu hàm $f(x,y)$, $(x,y)\in D$ liên tục theo biến x, liên tục theo biến y đều theo biến x thì liên tục trên D.

Giải. Lấy (x_0, y_0) tùy ý trên D, lấy $\varepsilon > 0$ tùy ý. Từ giả thiết, tồn tại $\delta_1 > 0$ để $\forall(x,y)\in D$, sao cho $|y-y_0| < \delta$ thì $\left|f(x,y)-f(x,y_0)\right| < \varepsilon/2$.

Mặt khác, từ chỗ f(x,y_0) liên tục theo biến x, tồn tại $\delta_2 > 0$ để với $x\in[a;b]: |x-x_0| < \delta_2$ thì $\left|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\right| < \delta_2$.

Chọn $\delta = \mathrm{Min}(\delta_1,\delta_2)$, với $(x,y)\in D: |x-x_0| < \delta;\ |y-y_0| < \delta$ ta có

$$\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right| \le \left|f(x,y)-f(x,y_0)\right| + \left|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vậy f(x,y) liên lục tại (x_0, y_0) tùy ý trên D.

Bài 5.2.7. Xét sự liên tục đều của hàm

$$f(x,y) = \sin\frac{\pi}{1-x^2-y^2} \quad \text{với } x^2+y^2 < 1.$$

Phân tích. Khi (x,y) dần ra biên của hình tròn $C = \{(x,y): x^2+y^2 \le 1\}$, hàm số nhận những giá trị "rất khác nhau". Có lẽ chúng ta sẽ nhận được câu trả lời phủ định.

Chuyển sang toạ độ cực $x = r\sin\varphi$, $y = r\cos\varphi$ ta được $f(x,y) = \sin\frac{\pi}{1-r^2}$. Chỉ cần chọn $\varphi = \varphi_0 = \mathrm{const}, r_n \to 1, r_n' \to 1$ sao cho $\pi/\left(1-r_n^2\right) \approx 2n\pi;\ \pi/\left(1-r_n'^2\right) \approx 2n\pi + \frac{\pi}{2}$.

Giải. Với $\varphi\in(0;\pi/2)$ cố định, xét hai dãy điểm

$$(x_n, y_n) = \left(\sqrt{1-\frac{1}{2n}}\cos\varphi,\ \sqrt{1-\frac{1}{2n}}\sin\varphi\right);$$

$$(x_n', y_n') = \left(\sqrt{1-\frac{2}{4n+1}}\cos\varphi,\ \sqrt{1-\frac{2}{4n+1}}\sin\varphi\right).$$

Một mặt ta có

$$(x_n'-x_n)^2 + (y_n'-y_n)^2 = \left(\sqrt{1-\frac{1}{2n}} - \sqrt{1-\frac{2}{4n+1}}\right)^2 \to 0 \ (n\to\infty).$$

Mặt khác, $\left|f\left(x_n^{'}, y_n^{'}\right) - f\left(x_n, y_n\right)\right| = 1 \to 1 > 0 \quad (n \to \infty)$.

Vậy hàm số không liên tục đều trên miền đã cho.

Bài 5.2.8. Xét sự liên tục đều của hàm số $f(x,y) = \sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ trên miền:

a) $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 \geq 1\}$;

b) $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Giải. a) Với $(x,y) \in C$, $\left(x', y'\right) \in C$ ta có

$$\left|f(x,y) - f\left(x', y'\right)\right| \leq 2\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)\frac{1}{2}\right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right| = \frac{\left|\left(x'^2 - x^2\right) + \left(y'^2 - y^2\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}\left(\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x'^2+y'^2}\right)}$$

$$\leq \left|x - x'\right| + \left|y - y'\right|.$$

Vậy hàm số liên tục Lipschitz trên C, do đó liên tục đều trên C.

b) Trả lời: f không liên tục đều trên D.

§5.3. ĐẠO HÀM RIÊNG

Bài 5.3.1. Khảo sát tính liên tục, sự tồn tại và liên tục của các đạo hàm riêng cấp một của hàm hai biến

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{x^2 + (y-x)^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Giải. $\forall (x_0, y_0) \neq (0,0)$ có một lân cận của (x_0, y_0) để $f(x,y) = x^6 / \left[x^2 + (y-x)^2\right]$ mà là hàm sơ cấp. Vậy f có các đạo hàm riêng liên tục tại lân cận này, và do đó tại (x_0, y_0). Ta chỉ việc xét tại (0,0).

+ Vì $f(x,y) \leq x^4 \to 0 = f(0,0)\ ((x,y) \to (0,0))$

nên f liên tục tại (0,0).

+ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|^3}{2}=0\Rightarrow f'_x(0,0)=0$.

+ $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0\Rightarrow f'_y(0,0)=0$.

+ $\forall x\neq 0,\ y\neq 0$ ta có

$$f'_x(x,y)=\frac{6x^5\left(x^2+(y-x)^2\right)-x^6\left(2x-2(y-x)\right)}{\left(x^2+(y-x)^2\right)^2}=\frac{T(x,y)}{M(x,y)}.$$

Đặt $v=\mathrm{Max}(|x|,|y|)$ thì $|T(x,y)|\leq 36v^7$.

Nếu $|x|\geq|y|$ thì $M(x,y)\geq v^4\geq v^4/4$;

Nếu $|x|<|y|$ thì $M(x,y)=\left[2\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{y^2}{2}\right]^2\geq\dfrac{y^4}{4}=\dfrac{v^4}{4}$.

Vậy $f'_x(x,y)\leq 144v^3\to 0\ \left((x,y)\to(0,0)\right)$.

Từ đó đạo hàm riêng f'_x liên tục trên $\mathbf{R}^2$. Tương tự với f'_y.

Bài 5.3.2. Cho φ(x) là hàm số khả vi liên tục hai lần trên $\mathbf{R}$.
Chứng minh rằng hàm hai biến f(x,y) xác định bởi

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} & \text{khi } y\neq x;\\ \varphi'(x) & \text{khi } y=x\end{cases}$$

khả vi liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

Giải. Đặt $\Delta=\{(x,y):x=y\}$, dễ thấy f khả vi liên tục trên $\mathbf{R}^2\setminus\Delta$. Bây giờ giả sử x_0 tùy ý trên $\mathbf{R}$, ta có:

$$\frac{f(x_0+h,x_0)-f(x_0,x_0)}{h}=\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)-h\varphi'(x_0)}{h^2}\to\frac{1}{2}\varphi''(x_0)\,(h\to 0).$$

Vậy tồn tại $f'_x(x_0,x_0)=\frac{1}{2}\varphi''(x_0)$; tương tự, $f'_y(x_0,x_0)=\frac{1}{2}\varphi''(x_0)$.

Bây giờ ta xét tính liên tục của các đạo hàm riêng cấp một. Rõ ràng

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{-\varphi'(x)(y-x)+\varphi(y)-\varphi(x)}{(y-x)^2} & \text{khi } x\neq y;\\ \dfrac{1}{2}\varphi''(x) & \text{khi } x=y.\end{cases}$$

Từ đó, với $x \neq y$, áp dụng công thức Taylor

$$\varphi(y) = \varphi(x) + \varphi'(x)(y-x) + \varphi''(\xi)(y-x)^2/2$$

suy ra $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)= \dfrac{\varphi''(\xi)}{2}$

(ξ giữa x và y).

Do $\varphi''(x)$ liên tục, chúng ta nhận được

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)= \frac{\varphi''(x_0)}{2}=f'_x(x_0,x_0).$$

Vậy f'_x liên tục. Tương tự với f'_y, suy ra f(x,y) khả vi liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

Lưu ý:

a) Nếu chỉ cần suy ra kết luận, rằng f(x,y) liên tục trên $\mathbf{R}^2$ thì chứng minh sẽ dễ dàng hơn. Quả vậy, rõ ràng f liên tục trên $U=\mathbf{R}^2\setminus\{(x,x), x\in\mathbf{R}\}$. Lấy $(x_0,x_0)\bar{\in} U$, $\varepsilon>0$. Vì φ' liên tục tại x_0 nên tồn tại $\delta>0$ sao cho

$$\forall t\in\mathbf{R}, |t-x_0|\le\delta: |\varphi'(t)-\varphi'(x_0)|\le\varepsilon.$$

Bây giờ cho $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ sao cho $|x-x_0|\le\delta$, $|y-x_0|\le\delta$.

Nếu x = y thì $|f(x,y)-f(x_0,x_0)|=|\varphi'(x)-\varphi'(x_0)|\le\varepsilon$.

Nếu $x\neq y$, theo định lý số gia hữu hạn, tồn tại t giữa x và y sao cho $[\varphi(x)-\varphi(y)]/(x-y)=\varphi'(t)$; rõ ràng $|t-x_0|\le\delta$, do đó

$$|f(x,y)-f(x_0,x_0)|=|\varphi'(t)-\varphi'(x_0)|\le\varepsilon,$$

suy ra f liên tục tại (x_0, x_0). Tóm lại, f liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

b) Mệnh đề đảo "một phần" cũng đúng. Thực vậy, $\varphi'(x)$ là hợp của hai hàm liên tục $\psi(x)=(x,x)$ và $f(x,y)$.

Bài 5.3.3. Cho hàm f(x) liên tục trên $\mathbf{R}$ và khả vi tại 0. Xét hàm hai biến F trên $\mathbf{R}^2$ như sau:

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{xy} f(t)dt & \text{khi } x\neq 0;\\ (y-1)f(0) & \text{khi } x=0.\end{cases}$$

a) Tìm các đạo hàm riêng cấp một F'_x, F'_y.

b) Chứng minh các đạo hàm riêng cấp một đó liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

Giải.

a) Với $x\neq 0$, đạo hàm theo cận trên ta được

$$F'_x(x,y)=-\frac{1}{x^2}\int_x^{xy} f(t)dt+\frac{1}{x}\left[yf(xy)-f(x)\right]; \qquad (1)$$

$$F'_y(x,y)=f(xy).$$

Rõ ràng các đạo hàm riêng này liên tục trên $\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}=\{(x,y): x\neq 0\}$.

Bây giờ, chúng ta tính các đạo hàm riêng $F'_x(0,y_0)$, $F'_y(0,y_0)$ với $y_0\in\mathbf{R}$. Với mọi $h\neq 0$, ta có

$$\frac{F(h,y_0)-F(0,y_0)}{h}=\frac{1}{h}\left[\frac{1}{h}\int_h^{hy_0} f(t)dt-(y_0-1)f(0)\right]=\frac{1}{h^2}\int_h^{hy_0}\left[f(t)-f(0)\right]dt.$$

Vì f khả vi tại 0 nên $f(t)=f(0)+f'(0)t+to(1)$. (2)

Suy ra $\displaystyle\frac{1}{h^2}\int_h^{hy_0}\left[f(t)-f(0)\right]dt=\frac{1}{2}\left(y_0^2-1\right)f'(0)+\frac{1}{h^2}\int_h^{hy_0} to(1)dt$

$$\to\frac{1}{2}\left(y_0^2-1\right)f'(0)\ (h\to 0).$$

Vậy $F'_x(0,y_0)=\dfrac{1}{2}\left(y_0^2-1\right)f'(0)$.

Lại có $F(0,y)=(y-1)f(0)$ nên $F'_y(0,y_0)=f(0)$.

b) Thay (2) vào (1) ta được

$$F'_x(x,y)=\frac{1}{2}\left(y^2-1\right)f'(0)+yo(xy)-o(1)-\frac{1}{x^2}\int_x^{xy} to(1)dt$$

$$\to\frac{1}{2}\left(y_0^2-1\right)f'(0)=F'_x(0,y_0)\ \left(\text{khi } (x,y)\to(0,y_0)\right).$$

Vậy F'_x liên tục tại $(0,y_0)\ \forall y_0\in\mathbf{R}$. Từ đó F'_x liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

Dễ thấy F_y' liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

Bài 5.3.4. Cho $\varphi(x)$ là hàm khả vi liên tục hai lần trên $\mathbf{R}$, $\varphi(0)=0$, $\varphi''(0)\neq 0$ và hàm hai biến f(x,y) trên $\mathbf{R}^2$ xác định bởi:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\varphi(y)-y\varphi(x)}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{khi } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Chứng minh rằng f liên tục trên $\mathbf{R}^2$ nhưng các đạo hàm riêng cấp một không liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

Giải.

* Theo các định lý cơ bản, f liên tục trên tập mở $\mathbf{R}^2\setminus\{(0;0)\}$. Bây giờ xét tại (0,0).

Từ giả thiết, tồn tại $M=\underset{t\in[-1;1]}{\mathrm{Max}}\left|\varphi''(t)\right|/2$, hơn nữa

$$\left|\varphi(t)-\left(\varphi(0)+t\varphi'(0)\right)\right|\leq Mt^2, \forall t\in[-1;1].$$

Từ đó, $\forall(x,y)\in[-1;1]\times[-1;1]\setminus\{(0,0)\}$ ta có

$$|f(x,y)|=\frac{1}{x^2+y^2}\left|x\left(\varphi(y)-\varphi(0)-y\varphi'(0)\right)-y\left(\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)\right)\right|$$

$$\leq M\frac{|xy|}{x^2+y^2}\left(|x|+|y|\right)\leq\frac{1}{2}M\left(|x|+|y|\right)\to 0=f(0,0) \text{ khi } (x,y)\to(0,0).$$

Suy ra f liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

* Với $(x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus\{(0;0)\}$ ta có:

$$f_x'(x,y)=\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}\left[\left(\varphi(y)-y\varphi'(x)\right)\left(x^2+y^2\right)-2x\left(x\varphi(y)-y\varphi(x)\right)\right].$$

Đặc biệt:

+ $f_x'(x,0)=0\to 0\ (x\to 0)$;

+ $f_x'(0,y)=\dfrac{\varphi(y)-y\varphi'(0)}{y^2}=\dfrac{1}{2}\varphi''(0)+o(1)\to\dfrac{1}{2}\varphi''(0)\neq 0\quad (y\to 0)$.

Điều đó chứng tỏ rằng f_x' không liên tục tại (0,0), do đó f_x' không liên tục trên $\mathbf{R}^2$. Tương tự, f_y' không liên tục tại (0,0).

Bài 5.3.5. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+\left(y-x^2\right)^2} & \text{khi } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{khi } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

liên tục trên $\mathbf{R}^2$ nhưng các đạo hàm riêng cấp một không liên tục tại (0,0).

Giải.

* Theo các định lý cơ bản, f liên tục trên $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

+ Thực hiện phép đổi biến $X=x,\ Y=y-x^2$ (lưu ý rằng $(x,y)\to(0,0)$ thì $(X,X)\to(0,0)$) rồi chuyển qua toạ độ cực $X=r\cos\varphi,\ Y=r\sin\varphi$ ta được

$$|f(x,y)|=r|\cos\varphi|\left(\sin\varphi+r\cos^2\varphi\right)^2\leq r(1+r)^2\to 0 \text{ (khi } (x,y)\to(0,0)\text{)}.$$

Từ đó f liên tục tại (0,0). Suy ra f liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

* Lại có f(x,0) = 0, vậy $f'_x(0,0)=0$.

f'_x liên tục trên $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, trên đó

$$f'_x(x,y)=\frac{y^2\left[x^2+\left(y-x^2\right)^2-x\left(2x-4x\left(y-x^2\right)\right)\right]}{\left(x^2+\left(y-x^2\right)^2\right)^2}.$$

Thế thì $\quad f'_x(x,2x)=\dfrac{4\left(3+4x-3x^2\right)}{\left(5-4x+x^2\right)^2}\to\dfrac{12}{25}\quad(x\to 0).$

Vậy f'_x không liên tục tại (0,0) (do đó nó không liên tục trên $\mathbf{R}^2$).

Tương tự, f'_y không liên tục tại (0,0).

Bài 5.3.6. Cho hàm hai biến f xác định bởi

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{khi } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Chứng minh rằng f có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên $\mathbf{R}^2$, có các đạo hàm riêng cấp hai theo hai biến trên $\mathbf{R}^2$ và

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Giải. Rõ ràng f'_x, f'_y liên tục trên $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

+ Lại có $f(x,0) = 0 \Rightarrow \exists f'_x(0,0)=0$. Tương tự $f'_y(0,0)=0$.

+ Với $(x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^5 - x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

Ký hiệu $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ ta có

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq 2\rho \to 0 \quad ((x,y) \to (0,0)).$$

Điều này chứng tỏ rằng $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ tồn tại và liên tục tại (0,0).

+ Với $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3x^3y^2 + xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, như trên, $\frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục tại (0,0).

Dễ thấy $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ tồn tại và liên tục trên $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Ta xét tại (0,0).

+ $\frac{1}{y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right] = 1 \to 1 (y \to 0)$, vậy $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = 1$.

+ $\frac{1}{x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right] = 0 \to 0 (x \to 0)$, vậy $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = 0$.

Chứng tỏ rằng $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$.

Bài 5.3.7. Cho hàm $f(x,y) = \mathrm{Max}\left(x^2, y^2\right)$.

Nghiên cứu sự liên tục của f, sự tồn tại và liên tục của các đạo hàm riêng cấp một của f.

Giải. Lưu ý rằng hàm Max(x,y) liên tục nên theo các định lý cơ bản, suy ra f(x,y) liên tục trên $\mathbf{R}^2$. Cũng có thể thấy điều này trực tiếp từ đồng nhất thức

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + \left|x^2 - y^2\right|\right).$$

+ Đặt $U=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 : x^2 \neq y^2\}$; lấy (x_0,y_0) tùy ý trên U. Có một lân cân U_δ đủ nhỏ của (x_0,y_0) nằm trọn trong U. Trên U_δ, f(x,y) là hàm sơ cấp nên các đạo hàm riêng f'_x, f'_y liên tục tại (x_0,y_0). Từ đó f'_x, f'_y liên tục trên U.

+ Xét (x_0,y_0) sao cho $x_0^2 = y_0^2$.

Nếu $y_0 = 0$, hàm một biến $f(x,y_0)= f(x,0)=x^2 \Rightarrow f'_x(0,0)=0$.

Nếu $y_0 \neq 0$, hàm một biến $f(x,y_0)= \mathrm{Max}\left(x^2, y_0^2\right)$ không khả vi tại $\pm y_0$.

Điều này chứng tỏ rằng, tập xác định của f'_x là $U\cup\{(0;0)\}$.

Bây giờ với $(x,y)\in U\cup\{(0;0)\}$ dễ thấy

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}0 & \text{khi } x^2<y^2, \text{ hoac } x=y=0;\\ 2x & \text{khi } x^2>y^2.\end{cases}$$

Từ đó $f'_x(x,y)\to 0 = f'_x(0,0)$ khi $(x,y)\to(0,0)$.

Vậy f'_x liên tục trên tập xác định $U\cup\{(0;0)\}$. Cũng như vậy với f'_y.

Bài 5.3.8. Xét hàm hai biến

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{\sqrt{x^2+y^4}} & \text{khi } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{khi } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Chứng minh rằng f liên tục tại (0,0).

b) Chứng tỏ rằng với bất kỳ $\upsilon=(a,b)\in\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, hàm f có đạo hàm (cấp một) theo hướng υ.

c) Chứng tỏ rằng f không khả vi tại (0,0).

Giải.

a) Trước hết f liên tục trên $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ theo các định lý cơ bản. Lại có $0\le |f(x,y)|\le |y|$. Vậy $f(x,y)\to 0 = f(0,0)$ khi $(x,y)\to(0,0)$.

Từ đó f(x,y) cũng liên tục tại (0,0).

b) Cho trước $\upsilon=(a,b)\in\mathbf{R}^2$ Nếu $a\neq 0$,

$$\left|\frac{f(t\upsilon)-f(0,0)}{t}\right| = \frac{\left|b^3t^2\right|}{\sqrt{a^2t^2+b^4t^4}} \le \left|\frac{b^3}{a}\right|\,|t| \to 0\ (t\to 0).$$

Nếu a = 0, $\dfrac{f(t\upsilon)-f(0,0)}{t}=b\to b\,(t\to 0)$.

Vậy f có đạo hàm cấp một theo hướng υ và $\dfrac{\partial f}{\partial \upsilon}(0,0)=\begin{cases}0 & \text{khi } a\neq 0;\\ b & \text{khi } a=0.\end{cases}$

c) Với $(h,k)\neq(0,0)$ xét $\varepsilon(h,k)$:

$$\varepsilon(h,k)=\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left[f(h,k)-f(0,0)-f'_x(0,0)h-f'_y(0,0)k\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left[\frac{k^3}{\sqrt{h^2+k^4}}-k\right].$$

Ta cần khôn khéo chọn h, k thế nào đó để $(h,k)\to(0,0)$ nhưng $\varepsilon(h,k)\not\to 0$. Chỉ việc chọn $h=k^2$, quả vậy

$$\varepsilon\left(k^2,k\right)=\frac{1}{|k|\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)k\to\frac{1}{\sqrt{2}}-1\neq 0 \text{ (khi } k\to 0^+).$$

Vậy f không khả vi tại (0,0).

Bài 5.3.9. Hàm số $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ có khả vi tại (0,0) hay không ?

Giải.

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=1;$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=1.$$

Với $(h,k)\neq(0,0)$, ta có

$$\varepsilon(h,k)=\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left[f(h,k)-f(0,0)-f'_x(0,0)h-f'_y(0,0)k\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left[\sqrt[3]{h^3+k^3}-h-k\right]$$

Đặc biệt, với k = h > 0 ta nhận được:

$$\varepsilon(h,h)=\frac{h\left(\sqrt[3]{2}-2\right)}{h\sqrt{2}}\to\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}}\neq 0\ (h\to 0).$$

Vậy f(x,y) không khả vi tại 0.

Bài 5.3.10. Cho a, b là hai số thực, xét ánh xạ $f_{a,b}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ xác định bởi

$$f_{a,b}(x,y)=(u(x,y);\ v(x,y))$$

với $u(x,y)=x+a\sin y$; $v(x,y)=y+b\sin x$.

a) Chứng minh rằng $f_{a,b}$ là toàn ánh $\forall$a, b.

b) Tìm điều kiện cần và đủ để $f_{a,b}$ là đơn ánh.

c) Tìm điều kiện cần và đủ để định thức Jacobi $\det J_{f_{a,b}}(x,y)=\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ khác 0 với mọi $(x,y)\in\mathbf{R}^2$.

Giải.

a) Lấy (X, Y) bất kì thuộc $\mathbf{R}^2$. Phương trình $f_{a,b}(x,y)=(X,Y)$ tương đương với $\begin{cases}x+a\sin y=X\\ y+b\sin x=Y\end{cases}$ hay $\begin{cases}y=Y-b\sin x;\\ x+a\sin(Y-b\sin x)-X=0.\end{cases}$

Hàm $\varphi(x)=x+a\sin(Y-b\sin x)-X$ liên tục trên $\mathbf{R}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$.

Từ đó, theo định lý về giá trị trung gian, tồn tại $x\in\mathbf{R}$ sao cho $\varphi(x)=0$, tiếp đến $y=Y-b\sin x$. Vậy $f_{a,b}$ là toàn ánh.

b) Rõ ràng $\varphi(x)$, khả vi liên tục, ngoài ra

$$\varphi'(x)=1-ab\cos x\ \cos(Y-b\sin x).$$

* Trường hợp $|ab|\le 1$. Khi đó $\varphi'(x)\ge 0$; $\varphi'(x)=0$ chỉ có thể tại các điểm $k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$. Vậy φ đồng biến, nó là song ánh, suy ra không điểm x của nó duy nhất và $y=Y-b\sin x$ cũng vậy. Trường hợp này $f_{a,b}$ là đơn ánh.

* Trường hợp $|ab|>1$. Chọn Y = 0, $x_1=n\pi$ với n là số nguyên nào đó sao cho $\cos x_1=\mathrm{sgn}(ab)$. Khi đó $\varphi'(x_1)=1-|ab|<0$. Vậy φ nhận giá trị $\varphi(x_1)$ ít nhất 3 lần và $f_{a,b}$ không là đơn ánh.

Tóm lại, $f_{a,b}$ là đơn ánh khi và chỉ khi $|ab|\le 1$.

c) $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & a\cos y\\ b\cos x & 1\end{vmatrix}=1-ab\cos x\cos y\ne 0\qquad\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2\Leftrightarrow|ab|<1.$

Lưu ý. Đây cũng là điều kiện cần và đủ để $f_{a,b}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ là C^1- vi phôi, tức là một song ánh, có các đạo hàm riêng liên tục và ánh xạ ngược cũng có các đạo hàm riêng liên tục.

Bài 5.3.11. Cho $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ xác định bởi

$$f(x,y)=\left(x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2},\ \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(\ y+\sqrt{1+y^2}\right)\right).$$

a) Chứng minh rằng f có các đạo hàm riêng liên tục trên $\mathbf{R}^2$ và tìm định thức Jacobi của nó tại điểm (x,y) tùy ý.

b) Tìm miền ảnh f($\mathbf{R}^2$) và chứng tỏ f không phải là đơn ánh.

Giải.

a) Theo các định lý cơ bản, f'_x và f'_y liên tục trên $\mathbf{R}^2$. Để tính định thức Jacobi của f, ta có thể tiến hành theo cách thông thường bằng cách tính các đạo hàm riêng của các thành phần của f. Tuy nhiên nếu nhìn f như là hợp của hai ánh xạ, sẽ tiện lợi hơn nhiều. Quả vậy, xét phép đổi biến:

$u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\text{arcshx} \Leftrightarrow x=\text{shu}$, suy ra $\sqrt{1+x^2}=\text{chu}$;

$v=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=\text{arcshy} \Leftrightarrow y=\text{shv}$, suy ra $\sqrt{1+y^2}=\text{chv}$.

Vậy $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=\text{shu}\,\text{chv}+\text{shv}\,\text{chu}=\text{sh}(u+v)$;

$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+x^2}\right)=e^u e^v=e^{u+v}.$$

Từ đó $f(x,y)=\left(\text{sh}(u+v);\ e^{u+v}\right)=g_0\varphi(x,y)$

trong đó $\varphi(x,y)=\left(u(x,y),\ v(x,y)\right)$;

$g(u,v)=\left(\text{sh}(u+v),\ e^{u+v}\right)$.

Khi đó $\det\left(J_f(x,y)\right)=\det\left(J_g(\varphi(x,y))\right)\det\left(J_\varphi(x,y)\right)=0$

(Vì $\det\left(J_g(u,v)\right)=\begin{vmatrix}\text{ch}(u+v) & \text{ch}(u+v)\\ e^{u+v} & e^{u+v}\end{vmatrix}=0$).

b) Cách đổi biến trên còn có ưu điểm khác. Khi (x,y) nhận giá trị trên $\mathbf{R}^2$ thì u + v nhận tất cả các giá trị trên $\mathbf{R}$. Vậy

$$f\left(\mathbf{R}^2\right)=\left\{\left(\text{sh}\,s,\ e^s\right),\ s\in\mathbf{R}\right\}=\left\{\left(\frac{t^2-1}{2t},t\right);\ t>0\right\}.$$

Đây là đồ thị hàm số $x=\dfrac{y^2-1}{2y},\ y>0$

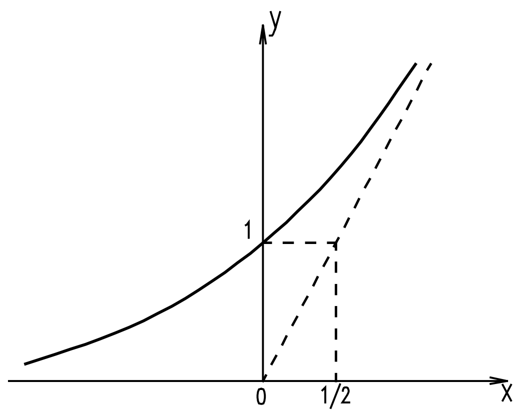
(coi x là hàm, y là biến !).

Vì f(0,1) = f(1,0) = (1,2) nên f không là đơn ánh.

Lưu ý: $\operatorname{arcsh}x = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

$ch^2x - sh^2x = 1$;

$sh(x+y) = shx\,chy + chx\,shy$.



Bài 5.3.12. Chứng minh rằng nếu f(x, y,z) là hàm khả vi, thuần nhất cấp $p \in \mathbf{N}^*$ thì các đạo hàm riêng của nó là những hàm thuần nhất cấp p-1.

Giải. Từ các giả thiết ta có $f(tx,ty,tz) = t^p f(x,y,z)$.

Đạo hàm hai vế theo x ta được

$$f'_x(tx,ty,tz)\,t = t^p f'_x(x,y,z)$$

hay $$f'_x(tx,ty,tz) = t^{p-1} f'_x(x,y,z);$$

Nói khác, f'_x là hàm thuần nhất cấp p-1. Tương tự với f'_y, f'_z.

Bài 5.3.13. Cho $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng các đạo hàm riêng f'_x, f'_y liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

b) Chứng minh rằng $f''_{xy}(0,0)$, $f''_{yx}(0,0)$ tồn tại và bằng nhau.

c) Chứng minh rằng f''_{xy} và f''_{yx} đều không liên tục tại (0,0).

Giải.

a) Theo các định lí cơ bản, các đạo hàm riêng mọi cấp của f liên tục trên $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

* $f(x,0) = 0 \Rightarrow f'_x(0,0) = 0.$

$f(0,y) = y^2 \Rightarrow f'_y(0,0) = 0.$

* Đặt $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, với $(x,y) \neq (0,0)$ ta có:

$$\left|f'_x(x,y)\right| = \left|\frac{2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right| \leq 2\rho,$$

$$\left|f'_y(x,y)\right| = \left|\frac{2y^3\left(2x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right| \leq 4\rho.$$

Vậy $f'_x(x,y) \to 0$; $f'_y(x,y) \to 0$ khi $(x,y) \to (0,0)$.

Từ đó f'_x, f'_y liên tục tại (0,0) và do đó trên $\mathbf{R}^2$.

b) $f'_x(0,y) = 0 \Rightarrow f''_{xy}(0,0) = 0$;

$f'_y(x,0) = 0 \Rightarrow f''_{yx}(0,0) = 0$.

c) $\forall (x,y) \neq (0,0)$ ta có

$$f''_{yx}(x,y) = -\frac{8x^3y^3}{\left(x^2+y^2\right)^3};$$

$$f''_{xy}(x,y) = -\frac{8x^3y^3}{\left(^2+y^2\right)^3}.$$

Đặc biệt, $f''_{yx}(x,x) = -1 \to -1 \neq 0 \quad (\text{khi}\,(x,y) \to (0,0))$

$f''_{xy}(x,x) = -1 \to -1 \neq 0 \quad (\text{khi}\,(x,y) \to (0,0)).$

Vậy f''_{xy}, f''_{yx} không liên tục tại (0,0).

Bài 5.3.14. Khai triển Maclaurin hàm số sau đến các số hạng bậc hai

$$f(x,y) = (1+x)^m \,(1+y)^n.$$

Giải. Ta sẽ sử dụng công thức

$$f(\Delta x,\Delta y)=f(0,0)+df(0,0)+\frac{1}{2!}d^2f(0,0)+...$$

trong đó f(0,0) = 1.

$$d^1f(0,0)=f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y=m\Delta x+n\Delta y,$$

$$d^2f(0,0)=f''_{xx}(0,0)\Delta x^2+2f''_{xy}(0,0)\Delta x\Delta y+f''_{yy}(0,0)\Delta y^2$$

$$=m(m-1)\Delta x^2+2mn\Delta x\Delta y+n(n-1)y^2.$$

Chọn $\Delta x = x$, $\Delta y = y$ chúng ta đi đến

$$f(x,y)=1+mx+my+\frac{1}{2}\left[m(m-1)x^2+2mnxy+n(n-1)y^2\right]+...$$

Cách 2. Khai triển Maclaurin các hàm $(1+x)^m$, $(1+y)^n$, áp dụng quy tắc ngắt bỏ các VCB bậc cao ta có:

$$f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n=$$

$$=\left[1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right]\left[1+ny+\frac{n(n-1)}{2}y^2+o\left(y^2\right)\right]$$

$$=1+mx+ny+\frac{1}{2}\left[m(m-1)x^2+2mnxy+n(n-1)y^2\right]+o\left(x^2+y^2\right).$$

Bài 5.3.15. Giả sử i, j, k là các số nguyên không âm tùy ý, đặt:

$(d^*x)^i=i!(dx)^i$;

$(d^*y)^j=j!(dy)^j$;

$(d^*z)^k=k!(dz)^k$.

Chứng minh rằng đối với đa thức P(x, y, z) thuần nhất bậc n ($n\in\mathbf{N}^*$) ta có

$$d^nP(x,y,z)=P((d^*x),(d^*y),(d^*z)).$$

Giải.

a) Trước hết xét trường hợp đa thức có một số hạng:

$P(x,y,z)=Ax^i\ y^j\ z^k$ với i, j, k là những số nguyên không âm, có tổng bằng n và A là hằng số. Khi đó, với $\lambda + p + q = n$ ta có

$$\frac{\partial^nP}{\partial x^\lambda\partial y^p\partial z^q}(x,y,z)=\begin{cases}A\,i!\,j!\,k! & \text{khi } (\lambda,p,q)=(i,j,k);\\ 0 & \text{khi } (\lambda,p,q)\neq(i,j,k).\end{cases}$$

Suy ra $d^nP(x,y,z)=A\,i!\,j!\,k!\,(dx)^i(dy)^j(dz)^k$

$$=A(d^*x)^i(d^*y)^j(d^*z)^k=P((d^*x),(d^*y),(d^*z)).$$

b) Giả sử $P(x,y,z)=\sum_{i+j+k=n} A(i,j,k)x^i y^j z^k$.

Chúng ta chỉ việc áp dụng (a) cho từng số hạng $A(i,j,k)\ x^i\ y^j z^k$.

§5.4. HÀM ẨN

Bài 5.4.1. Chứng tỏ rằng phương trình

$$\sin(x+y)+\cos(x-y)-1=0 \qquad (1)$$

xác định $y=\varphi(x)$ như một hàm ẩn của x trên một lân cận của (0,0). Tìm khai triển Maclaurin đến cấp 4 của $\varphi(x)$.

Giải. Hàm số $f(x,y)=\sin(x+y)+\cos(x-y)-1$

khả vi liên tục trên $\mathbf{R}^2$. Xét tại (x_0,y_0) = (0,0):

$f(0,0) = 0$;

$f'_y(0,0)=(\cos(x+y)|+\sin(x-y))\Big|_{(0,0)}=1\neq 0$.

Theo định lí hàm ẩn, tồn tại lân cận $J=(-\delta,\delta)$ của $x_0 = 0$ và $K=(-\gamma,\gamma)$ của y_0 = 0 sao cho $\forall x\in(-\delta,\delta),\ \exists! y\in K: f(x,y)=0$.

Vậy hệ thức trên xác định duy nhất $y=\varphi(x)$ như là hàm ẩn của đối số x trong lân cận $(-\delta,\delta)\times(-\gamma,\gamma)$ của (0,0).

Vì f(x,y) khả vi vô hạn nên $\varphi(x)$ cũng khả vi vô hạn; nó có khai triển mọi cấp. Tồn tại các số A, B, C, D, E để

$$\varphi(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+o(x^4). \qquad (2)$$

Nhận thấy $\varphi(0)=y_0=0=A$.

Thay (2) vào (1), sử dụng các khai triển của sinx và cosx cũng như quy tắc ngắt bỏ các VCB bậc cao ta đi tới

$$\begin{aligned}
0&=f(x,\varphi(x))=\sin(x+\varphi(x))+\cos(x-\varphi(x))-1\\
&=\sin\left((1+B)x+Cx^2+Dx^3+Ex^4+o(x^4)\right)\\
&\quad+\cos\left((1-B)x-Cx^2-Dx^3-Ex^4+o(x^4)\right)-1.\\
&=(1+B)x+Cx^2+Dx^3+Ex^4-\frac{1}{6}\left[(1+B)^3x^3+3(1+B)^2Cx^4\right]\\
&\quad-\frac{1}{2}\left[(1-B)^2x^2+C^2x^4-2(1-B)Cx^3-2(1-B)Dx^4\right]+\frac{1}{24}(1-B)^4x^4+o(x)^4.
\end{aligned}$$

Do tính duy nhất của khai triển suy ra

$$B = -1\,;\ C = 2; D = -4; E = 28/3\text{. Từ đó}$$

$$\varphi(x) = -x + 2x^2 - 4x^3 + (28/3)x^4 + o(x^4).$$

Lưu ý: Ta đã dùng "Phương pháp hệ số bất định" để xác định các hệ số của khai triển hàm ẩn.

Bài 5.4.2. Hai biến x và y liên hệ với nhau bởi biểu thức

$$e^{x-y} = 1 + x + y.$$

Cho x "dần" tới 0; chứng minh rằng khi đó $\frac{y}{x^2}$ có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Giải. Viết lại phương trình dưới dạng

$$f(x,y) = e^{x-y} - x - y - 1 = 0 \qquad (*)$$

Tương tự Bài 5.4.1, f(x,y) khả vi vô hạn lần,

$$f(0,0) = 0;\ f'_y(0,0) = \left(-e^{x-y} - 1\right)\Big|_{(0,0)} = -2 < 0\,.$$

Theo định lý hàm ẩn, trong lân cận của điểm (0,0) có duy nhất hàm $y = \varphi(x)$, $\varphi(0) = 0$ và thoả mãn (*), $\varphi(x)$ khả vi vô hạn lần. Giả sử $\varphi(x)$ có khai triển

$$\varphi(x) = Ax + Bx^2 + o(x^2).$$

Thay vào (*), sử dụng các khai triển của e^x, dùng các quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao ta nhận được A = 0; B = 1/4.

Vậy $\qquad \varphi(x) = \dfrac{x^2}{4} + o(x^2).$

Từ đó $\qquad \lim\limits_{x\to 0} = \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{1}{4}.$

Lưu ý: Cũng từ chứng minh trên ta suy ra hàm $\varphi(x)$ có một cực tiểu (địa phương) tại x = 0.

Bài 5.4.3. Chứng minh rằng hệ thức $x^2 - x + y + \sin y = 0$ xác định $y = \varphi(x)$ như là hàm ẩn của x trên $\mathbf{R}$, đồng thời $\varphi(x)$ khả vi vô hạn lần trên $\mathbf{R}$.

Giải. Đặt $f(x,y) = x^2 - x + y + \sin y$.

Với $x \in \mathbf{R}$ cố định, hàm $f(x,.) : y \to f(x,y)$ đồng biến (do $f'_y = 1 + \cos y \geq 0$),

$$\lim_{y \to -\infty} f(x,y) = -\infty; \ \lim_{y \to +\infty} f(x,y) = +\infty.$$

Vậy tồn tại duy nhất $y = \varphi(x), x \in \mathbf{R}$ là hàm số, thoả mãn $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Bây giờ lấy $x_0 \in \mathbf{R}$ tùy ý. Áp dụng định lí hàm ẩn, tại lân cận $(x_0, \varphi(x_0))$, có tồn tại một khoảng $I_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ và hàm số $\varphi_{x_0} : I_{x_0} \to \mathbf{R}$, khả vi vô hạn sao cho:

$\forall x \in I_{x_0}, f(x, \varphi_{x_0}(x)) = 0$.

Do tính duy nhất của $\varphi(x)$ (với x đã cho như trên) ta thấy φ_{x_0} chính là thu hẹp của φ trên I_{x_0}.

Từ đó, φ khả vi vô hạn tại lân cận đủ nhỏ của x_0 bất kì, nói khác, φ khả vi vô hạn trên $\mathbf{R}$.

Bài 5.4.4. Biết rằng trong một miền G nào đó của $\mathbf{R}^3$, phương trình

$$\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y} + 1$$

xác định z như là hàm ẩn của 2 biến (x , y). Tính dz ; d^2z.

Giải. Chúng ta có thể tính các đạo hàm riêng cấp một, cấp hai của hàm z theo biến x, y rồi áp dụng công thức đã biết để tìm dz, d^2z. Tuy nhiên, dùng trực tiếp công thức vi phân của tổng, hiệu, tích, thương sẽ thuận lợi hơn nhiều.

Coi $z = z(x,y)$, thay vào phương trình rồi lấy vi phân hai vế ta được

$$\frac{zdx - xdz}{z^2} = \frac{y}{z}\frac{ydz - zdy}{y^2}$$

$$\Rightarrow \ yzdx - xydz - yzdz + z^2dy = 0 \qquad (*)$$

$$\Rightarrow dz = \frac{z(ydx + zdy)}{y(x+z)} \quad (x \neq -z).$$

Lấy vi phân hai vế (*) (lưu ý đến z = z(x,y) và x, y là hai biến độc lập) rồi rút gọn ta được

$$d^2z = -\frac{z^2(ydx - xdy)^2}{y^2(x+z)^3} \qquad (x \neq -z).$$

§5.5. CỰC TRỊ

Bài 5.5.1. Tìm cực tiểu toàn cục của hàm

$$f(x,y)=(x-y)^2+\left(\sqrt{2-x^2}-\frac{9}{y}\right)^2$$

trên nửa dải vô hạn $G=\{(x,y): 0<x<\sqrt{2}\ ;\ y>0\}$.

Giải.

$$\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y)+2\left(\sqrt{2-x^2}-\dfrac{9}{y}\right)\dfrac{-x}{\sqrt{2-x^2}}=0 & (1) \\ -2(x-y)+2\left(\sqrt{2-x^2}-\dfrac{9}{y}\right)\dfrac{9}{y^2}=0 & (2) \end{cases}$$

Nhân hai vế (1), (2) lần lượt với $\sqrt{2-x^2}/x,\ y^2/9$ rồi cộng lại ta được

$$2(x-y)\left[\frac{\sqrt{2-x^2}}{x}-\frac{y^2}{9}\right]=0\ .$$

+ Nếu y = x, thay vào (1) dẫn đến $x^4-2x^2+81=0$: vô nghiệm.

+ Nếu $\dfrac{\sqrt{2-x^2}}{x}=\dfrac{y^2}{9}$, thay $\sqrt{2-x^2}=\dfrac{xy^2}{9}$ vào (1) giải ra ta được $y=3 \Rightarrow x=1$. Đây là điểm dừng duy nhất, giá trị tương ứng của f là 8.

+ Để chứng minh đây là giá trị nhỏ nhất của f, trước hết thác triển hàm f lên $G^*=\{(x,y): 0\le x\le\sqrt{2}\ ;\ y>0\}$. Dễ nhận thấy f không thể nhận giá trị nhỏ nhất trên tia $\{x=0; y>0\}$. Quả vậy

$$f(0,y)=y^2+\left(\frac{9}{y}-\sqrt{2}\right)^2 > y^2 > 8 \text{ với } y>2\sqrt{2}\ .$$

Cũng vậy, f(0,y) > 8 trên các khoảng (0;2]; [2;2,5]; [2,5; $2\sqrt{2}$].

Tương tự, f không thể nhận giá trị nhỏ nhất trên tia $\{x=\sqrt{2}\ ;\ y>0\}$.

Lại có $f(x,y)>8$ với y đủ lớn hoặc y đủ nhỏ, chẳng hạn y > 10 hoặc 0 < y < 0,1.

Vậy giá trị nhỏ nhất đạt được trên hình chữ nhật

$E=\{(x,y): 0\ \le\ x\ \le\ \sqrt{2}\ ;\ 0{,}1\le y\le 10\}$

đồng thời không thể đạt được trên biên, như vậy chỉ có thể đạt được tại điểm dừng. Nói khác x = 1, y = 3 là điểm tại đó hàm đạt giá trị nhỏ nhất.

Trả lời: $\mathrm{Min}\, f(x,y)=8$.

Bài 5.5.2. Cho hàm $f:[0;1]\times[0;1]\to\mathbf{R}$ xác định bởi

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} & \text{khi} \quad (x,y)\neq(1,1);\\ 0 & \text{khi} \quad (x,y)=(1,1).\end{cases}$$

a) Chứng minh rằng f(x,y) liên tục trên $[0;1]\times[0;1]$.

b) Xác định $\sup\limits_{[0;1]\times[0;1]} f(x,y)$.

Giải.

a) Rõ ràng f(x,y) liên tục trên tập $[0;1]^2 \setminus \{(1;1)\}$.

Để xét sự liên tục tại (1,1) trước hết nhận thấy

$$(1-x)(1-y)\leq\left(1-\sqrt{xy}\right)^2. \qquad (1)$$

Quả vậy, (1) $\Leftrightarrow$ $1-x-y+xy\leq 1-2\sqrt{xy}+xy$

$\Leftrightarrow x+y\geq 2\sqrt{xy}$ là bất đẳng thức đúng.

Từ đó

$$0\leq|f(x,y)|\leq xy\frac{\left(1-\sqrt{xy}\right)^2}{\left(1-\sqrt{xy}\right)\left(1+\sqrt{xy}\right)}=\frac{xy\left(1-\sqrt{xy}\right)}{1+\sqrt{xy}}.$$

Vậy $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)=0=f(1,1)$, hàm liên tục tại (1,1).

b) Trên biên, hàm nhận giá trị 0. Giải hệ $f'_x=f'_y=0$ ta nhận được điểm dừng duy nhất $x_0=y_0=\left(\sqrt{5}-1\right)/2$.

Lại có $f(x_0,y_0)=\dfrac{5\sqrt{5}-11}{2}>0$.

Vậy $\operatorname{Sup} f(x,y)=\operatorname{Max} f(x,y)=\dfrac{5\sqrt{5}-11}{2}$.

Bài 5.5.3. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của hàm

a) $f(x,y)=x^2+(x+y-1)^2+y^2$;

b) $f(x,y)=x^3+xy^2-x^2y-y^3$.

Giải. a) $f'_x=2x+2(x+y-1)$;

$f'_y=2y+2(x+y-1)$.

Hệ $f'_x = f'_y = 0$ cho ta nghiệm duy nhất $x_0 = y_0 = \frac{1}{3}$. Tại đây $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

Lại có $f''_{xx} = f''_{yy} = 4 > 0$; $f''_{xy} = 2$;

$\Delta = \left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2 - f''_{xx}(x_0,y_0)\, f''_{yy}(x_0,y_0) = -12 < 0.$

Vậy (x_0, y_0) là điểm cực tiểu (địa phương).

Để xét giá trị nhỏ nhất, đặt $h = x - 1/3;\ k = y - 1/3$
hay $x = h + 1/3;\ y = k + 1/3$ ta được

$$f(x,y) = \left(h + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(h + k - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(k + \frac{1}{3}\right)^2$$

$$= h^2 + k^2 + (h+k)^2 + \frac{1}{3} \ge \frac{1}{3} = f(x_0,y_0) \quad \forall (h,k) \ne (0,0).$$

Vậy giá trị nhỏ nhất là 1/3, đạt được tại $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} (x,0) = +\infty$ nên không có giá trị lớn nhất.

b) Cách 1. Giải hệ $f'_x = f'_y = 0$ cho ta điểm dừng duy nhất $x_0 = 0$; $y_0 = 0$.

Lại có $f(x,0) - f(0,0) = x^3$ dương khi $x > 0$, âm khi $x < 0$. Vậy (0,0) không là điểm cực trị địa phương. Hàm số không có cực trị toàn cực.

Cách 2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x,0) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x,0) = -\infty$.

Vậy hàm số không có cực trị toàn cục.

Bài 5.5.4. Chứng tỏ rằng hàm số

$$f(x,y) = x^2 (1+y)^3 + y^4$$

có một điểm dừng duy nhất, cũng là điểm cực tiểu địa phương, nhưng hàm số không đạt được giá trị nhỏ nhất.

Giải. Hệ $f'_x = f'_y = 0$ cho ta nghiệm $x = y = 0$, vậy (0,0) là điểm dừng duy nhất. Có thể xét dấu của A và Δ để khẳng dịnh (0,0) là cực tiểu địa phương nhưng ta còn có thể giải sơ cấp hơn như sau:

$$f(x,y) - f(0,0) = x^2 (1+y)^3 + y^4 \ge 0$$

$\forall x$ và $\forall y \geq -1$. Vậy (0,0) là điểm cực tiểu địa phương.

Mặt khác , $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x,x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^5\left[\left(\frac{1}{x}+1\right)^3 + \frac{1}{x}\right] = -\infty$

nên f không có giá trị nhỏ nhất. Rõ ràng f cũng không có giá trị lớn nhất.

Bài 5.5.5. Xác định cực trị địa phương và toàn cục của hàm

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2-2x+4}{x^2+y^2+2x+4}.$$

Giải. Vì $M = x^2+y^2+2x+4 = (x+1)^2+y^2+3 \geq 3 > 0 \ \forall x, y$ nên hàm số xác định trên $\mathbf{R}^2$. Lại có $T = x^2+y^2-2x+4 = (x-1)^2+y^2+3 > 0$ nên $f(x,y) > 0 \ \forall x, y$.

Giải hệ $f'_x = f'_y = 0$ cho ta hai nghiệm

$x_1 = 2; y_1 = 0$ và $x_2 = -2; y_2 = 0$. Vậy ta có hai điểm dừng (2, 0) và (-2,0) với $f(2,0) = \frac{1}{3}; f(-2,0) = 3$.

Ta sẽ chứng tỏ (2,0) là điểm cực tiểu toàn cục. Việc tính các đạo hàm cấp hai không giúp ta thực hiện điều đó. Ta có

$$f(x,y) - f(2,0) = \frac{x^2+y^2-2x+4}{x^2+y^2+2x+4} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\frac{(x-2)^2+y^2}{x^2+y^2+2x+4} \geq 0, \ \forall x, y.$$

Dấu bằng đạt được tại x = 2, y = 0.

Vậy $\operatorname{Min} f(x,y) = f(2,0) = \frac{1}{3}$.

Mặt khác $f(-x,y) = \frac{1}{f(x,y)} > 0$ nên

$\operatorname{Max} f(x,y) = f(-2,0) = 3$.

(Hiển nhiên (± 2,0) cũng là các điểm cực trị địa phương).

Bài 5.5.6. Xét cực trị hàm $f(x,y) = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Giải. $f'_x = 4y - \frac{1}{x^2}$;

$f'_y = 4x - \frac{1}{y^2}$.

Hệ $f'_x = f'_y = 0$ cho ta $x_0 = y_0 = 1/\sqrt[3]{4}$. Hơn nữa

$A = f''_{xx}(x_0, y_0) = 8 > 0;\ C = f''_{yy}(x_0, y_0) = 8;$

$B = f''_{xy}(x_0, y_0) = 4\ ;\ \Delta = B^2 - AC = -48 < 0,$

Vậy (x_0, y_0) là điểm cực tiểu địa phương.

Tuy nhiên ta thấy $f(x,x) = 4x^2 + \dfrac{2}{x}$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,x) = +\infty;\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x,x) = -\infty$

nên (x_0, y_0) không là điểm cực tiểu toàn cục.

Bài 5.5.7. Xét cực trị hàm

$$f(x,y) = (x+y)^2 - \left(x^4 + y^4\right).$$

Hướng dẫn. Giải hệ $f'_x = f'_y = 0$ cho ta ba điểm dừng $(-1,-1);(0,0);(1;1)$.

Với $A = f''_{xx}(x_0, y_0);\ B = f''_{xy}(x_0, y_0);\ C = f''_{yy}(x_0, y_0);\ \Delta = B^2 - AC$, ta thấy:

+ Tại $\pm(1,1)$; $A = C = -10 < 0; B = 2; \Delta = -96 < 0$:
suy ra $\pm(1,1)$ là điểm cực đại địa phương; $f_{CĐ} = 2$.

+ Tại (0,0), $\Delta = 0$: chưa có kết luận.

Tuy nhiên

$$f(x,0) = x^2 - x^4 > 0 \text{ với } |x| < 1;$$

$$f\left(x, -x + x^2\right) = -\left(x - x^2\right)^2 < 0 \qquad \forall x.$$

Vậy (0, 0) không là cực trị địa phương (ở đây, nó là điểm yên ngựa).

+ Lại có:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + 2xy + y^2 - x^4 - y^4 \\ &\le 2x^2 + 2y^2 - x^4 - y^4 \\ &= 2 - \left(x^2 - 1\right)^2 - \left(y^2 - 1\right)^2. \qquad (*) \end{aligned}$$

Vậy $f(x,y) \le 2,\ \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$. Từ đó $\operatorname{Max} f(x,y) = 2$, đạt được tại $(-1,-1)$ và (1,1).

Cũng từ (*), $\lim\limits_{(x,y) \to (\infty,\infty)} f(x,y) = -\infty$ nên không có giá trị nhỏ nhất.

Bài 5.5.8. Cho n điểm $x_1, x_2, ..., x_n \in [0;1]$. Đặt

$$S(x_1, ..., x_n) = \sum_{1 \le i < j \le n} |x_j - x_i|.$$

Tìm $$f(n) = \text{Max}\{S(x_1, ..., x_n) : x_i \in [0;1], i = 1, ..., n\}.$$

Giải. Việc thử với một vài giá trị n nhỏ gợi ý ta chứng minh rằng $f(2k) = k^2$ với một nửa số điểm chọn tại 0, một nửa số điểm chọn tại 1; $f(2k+1) = k^2 + k$ với k + 1 điểm chọn tại 0, k điểm chọn tại 1.

Như ta vừa nói, xảy ra dấu bằng tại bộ các điểm đã nêu. Ta chỉ còn phải chứng tỏ không thể làm tốt hơn các giá trị đó.

Trường hợp n = 2, 3 là tầm thường. Giả sử khẳng định đúng với n. Ta hãy lấy n + 2 điểm tùy ý trên [0;1] rồi sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần:

$$0 \le x_0 \le x_1 \le ... \le x_n \le x_{n+1} \le 1.$$

$$S(x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = S(x_1, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{n} [(x_i - x_0) + (x_{n+1} - x_i)] + (x_{n+1} - x_0)$$

$$\le f(n) + (x_{n+1} - x_0)(n+1) \le f(n) + (n+1).$$

Suy ra

$$f(n+2) \le f(n) + (n+1).$$

Từ đó, theo giả thiết quy nạp ta có

* Với $n = 2k$, $\quad f(2k+2) \le k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$.

* Với $n = 2k+1$, $\quad f(2k+3) \le (k^2 + k) + (2k+1) + 1 = (k+1)^2 + (k+1)$.

Vậy khẳng định đúng với n + 2, theo nguyên lí quy nạp, đúng với mọi n.

Bài 5.5.9. Cho 3 số thực α, β, γ với $0 < \alpha < \beta < \gamma$. Đặt

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^\beta + y^\beta + z^\beta = 1 \ \& \ x, y, z \ge 0\}.$$

Xét hàm f: $K \to \mathbf{R}$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = x^\alpha + y^\beta + z^\gamma.$$

Tại điểm nào của K, hàm f nhận giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất ?

Giải. Rõ ràng $\forall (x, y, z) \in K$ thì $0 \le x, y, z \le 1$. Từ đó $x^\alpha \ge x^\beta$. Thực ra $x^\alpha - x^\beta$ bằng 0 tại x = 0, tăng lên đến cực đại tại $x = (\alpha/\beta)^{1/(\beta-\alpha)}$ rồi lại giảm đến 0 tại x = 1 (chứng minh bằng đạo hàm).

Tương tự, $z^{\gamma} - z^{\beta}$ không dương với cực tiểu đạt được tại $z = (\beta/\gamma)^{1/(\gamma-\beta)}$.

Để nhận được cực đại cho f(x,y,z) ta chỉ cần xét những điểm $(x, y, z) \in K$ với z = 0. Quả vậy, $x^{\alpha} + y^{\beta} + z^{\gamma} = x^{\alpha} + y^{\beta} + (z^{\gamma} - z^{\beta}) + z^{\beta}$

$$\le x^{\alpha} + y^{\beta} + z^{\beta}$$

$$= x^{\alpha} + (1 - x^{\beta}) = x^{\alpha} + y_1^{\beta} + 0^{\gamma}$$

với $y_1 = (1 - x^{\beta})^{1/\beta} \in [0;1]$.

Từ chỗ $x^{\beta} + y_1^{\beta} = 1$, suy ra $(x, y_1, 0) \in K$, và $F(x, y, z) \le F(x, y_1, 0)$.

Bây giờ, với z = 0, $x^{\beta} + y^{\beta} = 1$, suy ra $y^{\beta} = 1 - x^{\beta}$. Từ đó

$f(x, y, z) = x^{\alpha} + 1 - x^{\beta}$ đạt được cực đại tại $x = (\alpha/\beta)^{1/(\beta-\alpha)}$.

Khi đó $y = (1 - x^{\beta})^{1/\beta} = \left(1 - (\alpha/\beta)^{\beta/(\beta-\alpha)}\right)^{1/\beta}$;

$z = 0$.

Tương tự, để nhận được giá trị nhỏ nhất thì x phải bằng 0,... đạt được tại

$x = 0$; $y = \left(1 - (\beta/\gamma)^{\beta/(\gamma-\beta)}\right)^{1/\beta}$; $z = (\beta/\gamma)^{1/(\gamma-\beta)}$.

Bài 5.5.10. Cho n là một số nguyên dương lớn hơn 1. Tìm các điểm dừng và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i)\right), \quad (x_i > 0).$$

Giải. Hàm $f(x_1, \ldots, x_n)$ khả vi liên tục trên $(0; +\infty)^n$; ta có

$$f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j \ne i}(1 + x_j)\left(-\frac{1 + x_i}{x_i^2} + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j}\right).$$

a) Tìm điểm dừng. Xét hệ $f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) = 0, i = 1, 2, \ldots, n$ ta nhận được

$$\frac{1 + x_1}{x_1^2} = \ldots = \frac{1 + x_n}{x_n^2} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j}. \qquad (*)$$

Vì hàm $f(t) = \dfrac{1 + t}{t^2}$ nghịch biến, ta đi tới $x_1 = \ldots = x_n$.

Thay trở lại (*), ta được $x_1 = ... = x_n = \frac{1}{n-1}$. Vậy điểm dừng duy nhất là $\left(\frac{1}{n-1},...,\frac{1}{n-1}\right)$, tại đó $f\left(\frac{1}{n-1},...,\frac{1}{n-1}\right) = \frac{n^{n+1}}{(n-1)^{n-1}}$; kí hiệu giá trị này là M_n.

b) Tìm Max, Min. Ta sẽ chứng minh M_n là giá trị nhỏ nhất. Trước hết $f(x_1,...,x_n) \geq \frac{1}{x_i}, \forall i$. Ngoài ra

$$f(x_1,...,x_n) \geq \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)(1+x_1)(1+x_2) \geq (1+x_1)\left(1+\frac{1}{x_2}\right) \geq (1+x_1).$$

Tương tự, $f(x_1,...,x_n) \geq (1+x_i), \forall i$.

Xét hình hộp $P_n = \left[\frac{1}{M_n+1}; M_n\right]^n$. Mỗi điểm $(x_1,...,x_n)$ ở ngoài hình hộp này sẽ có ít nhất một toạ độ thứ i nào đó không nằm trên $\left[\frac{1}{M_n+1}; M_n\right]$, nói khác hoặc là $x_i < \frac{1}{M_n+1}$ hoặc là $x_i > M_n$; suy ra $f(x_1,...x_n) > M_n + 1$.

Mặt khác, hàm $f(x_1,...,x_n)$ liên tục trên tập compắc P_n, vậy nó đạt được cận dưới đúng trên đó. Rõ ràng trên biên của P_n thì $f(x_1,...x_n) \geq M_n + 1$. Dễ thấy $\left(\frac{1}{n-1},...,\frac{1}{n-1}\right) \in P_n$, theo phần (a)

$$\min_{(x_1,...,x_n)\in P_n} f(x_1,...,x_n) = f\left(\frac{1}{n-1},...,\frac{1}{n-1}\right) = M_n.$$

Tóm lại, giá trị nhỏ nhất của hàm f là M_n, đạt được tại $\left(\frac{1}{n-1},...,\frac{1}{n-1}\right)$.

Vì $f(x_1,...x_n) \geq \frac{1+x_1}{x_2} \to \infty$ khi $x_2 \to 0$ nên hàm f không có giá trị lớn nhất.

Bài 5.5.11. Cho hàm hai biến $z = x^2y^3(6-x-y)$.

a) Tìm các điểm cực trị (địa phương) trên miền $(0;6)\times(-1;6)$.

b) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên miền $[0;6]\times[0;6]$.

c) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên miền $[0;+\infty]\times[0;+\infty]$.

Giải.

a) $z'_x = xy^3(12-3x-2y)$;

$z'_y = x^2y^2(18-3x-4y)$.

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2;\ y = 3; \\ y = 0;\ \ x\ \text{tuy ý}. \end{array}\right.$$

* Tại (2; 3) thì $A = z''_{xx}(2,3) = -162$;

$B = z''_{xy}(2,3) = -108$; $C = z''_{yy}(2,3) = -104$; $\Delta = B^2 - AC < 0$

suy ra (2,3) là điểm cực đại, tại đó z(2,3) = 108.

Tại $(x_0;0)$ với $x_0 \in (0;6)$ ta có $z(x_0;0) = 0$. Tuy nhiên tại đó, các đạo hàm riêng cấp hai của z bằng không nên ta phải dùng nghiên cứu khác.

Với $\varepsilon > 0$ đủ bé thì:

$$z(x_0,\varepsilon) = x_0^2\varepsilon^3(6 - x_0 - \varepsilon) > 0 = z(x_0,0);$$

$$z(x_0,-\varepsilon) = -x_0^2\varepsilon^3(6 - x_0 + \varepsilon) < 0 = z(x_0,0).$$

Vậy $(x_0,0)$ không là điểm cực trị, $\forall x_0 \in (0;6)$.

b) Như đã thấy ở phần (a), (2,3) là điểm dừng duy nhất. Bây giờ ta xét hàm z trên biên của miền đã cho.

* $x = 0 \Rightarrow z(0,y) = 0$.

* $y = 0 \Rightarrow z(x,0) = 0$.

* $x = 6 \Rightarrow z(6,y) = -6^2y^4 \in [-6^6;0]$.

* $y = 6 \Rightarrow z(x,6) = -6^3x^3 \in [-6^6;0]$.

Vậy $\text{Max}z = \text{Max}\{-6^6, 0, 108\} = 108 = z(2,3)$;

$\text{Min}z = \text{Min}\{-6^6, 0, 108\} = -6^6 = z(6,6)$.

c) Với x > 6, y ≥ 0 thì

$$z = x^2y^3(6-x-y) = x^2y^3(6-x) - x^2y^3y \le 0.$$

Tương tự, với x ≥ 0, y > 6 thì

$$z = x^2y^3(6-x-y) = x^2y^3(6-y) - x^2y^3x \le 0.$$

Vậy $\underset{\{x\ge 0;\, y\ge 0\}}{\text{Max}} z(x,y) = \underset{\{0\le x\le 6;\, 0\le y\le 6\}}{\text{Max}} z(x,y) = z(2,3) = 108$.

Lại có $\lim\limits_{y\to+\infty} z(1,y) = -\infty$.

Vậy không tồn tại giá trị nhỏ nhất của z trên $[0;+\infty)\times[0;+\infty)$.

Bài 5.5.12. Cho $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ xác định bởi $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2}$.

a) Tìm các điểm dừng, các điểm cực đại, cực tiểu.

b) Chứng tỏ rằng các điểm cực đại, cực tiểu địa phương ở câu (a) cũng chính là điểm cực đại toàn cục, cực tiểu toàn cục.

Giải.

a) $f'_x = 2x\, e^{-x^2-y^2}(1 - x^2 + y^2)$;

$f'_x = 2x\, e^{-x^2-y^2}(1 - x^2 + y^2)$;

Hệ $f'_x = f'_y = 0$ cho ta các điểm dừng $(0,0)$; $(0,\pm1)$; $(\pm1,0)$.

Dễ thấy (0,0) là điểm yên ngựa.

Tính đạo hàm bậc hai, ta có thể chứng tỏ $(0,\pm1)$ là các điểm cực tiểu địa phương và $(\pm1,0)$ là các điểm cực đại địa phương.

b) Trước hết xét tại (0,1) với $f(0,1) = -1/e$. Ta sẽ chứng minh đây là điểm cực tiểu toàn cục, nói khác $f(x;y) \ge f(0;1)$ hay

$$e^{x^2+y^2} + ex^2 \ge ey^2, \qquad \forall x, y \in \mathbf{R} \qquad (*)$$

Để chứng minh (*) ta chỉ cần chứng minh

$$e^{y^2-1} \ge y^2, \quad \forall y \in \mathbf{R}. \qquad (**)$$

Tuy nhiên (**) là hệ quả của bất đẳng thức $e^x \ge 1 + x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

+ Do $f(x,-y) = f(x,y)$ nên $(0,-1)$ cũng là điểm cực tiểu toàn cục.

+ Bởi vì $f(y,x) = -f(x,y)$ nên $(\pm1,0)$ là các điểm cực đại toàn cục.

Cách khác. Chuyển về toạ độ cực bằng cách đặt $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ được

$$z = (\cos 2\varphi)\, te^{-t} \text{ với } 0 \le \varphi < 2\pi;\ t = r^2 \ge 0.$$

Bởi vì hàm số $h(t) = te^{-t}$ đạt giá trị lớn nhất e^{-1} tại t = 1, suy ra:

$\operatorname{Max} z = e^{-1}$, đạt được tại $\varphi = 0$ hoặc $\varphi = \pi, t = r^2 = 1$ hay $x = \pm1$; $y = 0$.

$\operatorname{Min} z = -e^{-1}$, đạt được tại $\varphi = \pi/2, \varphi = 3\pi/2, t = r^2 = 1$ hay $x = 0$; $y = \pm1$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Trần Lưu Cường - Toán Olympic cho sinh viên - Tập 1 - Nxb Giáo dục - 2000.

[2] Nguyễn Quý Dy và … Tuyển tập 200 bài thi Vô địch toán - Tập 3: Giải tích - Nxb Giáo dục - 2001.

[3] Dương Minh Đức - Phương pháp mới học toán đại học - Tập 1 - Nxb Giáo dục - 2001.

[4] W.J.Kaczkor và ….- Bài tập giải tích 1 - Nxb Đại học Sư phạm - 2003 (Tiếng Việt).

[5] Nguyễn Bá Kim và … - Phương pháp dạy học môn Toán - Nxb Giáo dục - 2003.

[6] Lê Ngọc Lăng và… - Ôn thi học kì và thi vào giai đoạn 2 - Nxb Giáo dục - 1997.

[7] Y.Y.Liasko và…- Giải tích toán học, các ví dụ và các bài toán - Nxb Đại học và THCN - 1978 (Tiếng Việt).

[8] Jean-M.Monier - Giáo trình Toán - Tập 1, 2, 4 - Giải tích 1, 2, 4 - Nxb Giáo dục (Tiếng Việt).

[9] Nguyễn Văn Mậu - Phương trình hàm - Nxb Giáo dục - 1999.

- Một số vấn đề chọn lọc về tích phân - Nxb Giáo dục - 2004.

và... - Giới hạn dãy số và hàm số - Nxb Giáo dục - 2004.

[10] Pôlya.G - Toán học và những suy luận có lí - Nxb Giáo dục - 1968 (Tiếng Việt).

[11] Nguyễn Duy Tiến - Bài giảng giải tích - Tập 1- Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội - 2001.

[12] M.I.Abell và … - Mathematica by example, Academic Press, New York - 1997.

[13] W.Rudin, Principles of mathematical analysis, McGraw - Hill, New York - 1964.

[14] Б.П.ДЕМИДОВИЧ, СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗИ. “НАУКА”, МОСКВА. 1977

[15] В. А. САДОВНИЧИЙ И…, ЗАДАЧИ СТУДЕНЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОПИМПИАД, ИЗ. МОС. УНИВ.

[16] Delta, http: // www. Mimuw.edu.pl/detta.

[17] Americal Mathematical Monthly, 1965 - 1980.

[18] Putnam Problem, http: //kalvo Deman. co.uk 1945 - 2003.