Bài 4.3 (ĐH Hải Phòng)**.** Kí hiệu V là không gian véctơ các đa thức với hệ số thực gồm đa thức không và các đa thức có bậc không lớn hơn 2. Cho ánh xạ tuyến tính $\varphi : V \to V$ xác định bởi:

$$p(x) \mapsto \varphi(p(x)) = (x - \lambda)(x + 1)p'(x) - 2xp(x),$$

với $\lambda \in \mathbb{R}$ là tham số. Ký hiệu $p'(x)$ là đạo hàm của đa thức $p(x)$.

(a) Với $\lambda = 0$, hãy:

- Tìm số chiều và cơ sở của một không gian hạt nhân $\operatorname{Ker}\varphi$;
- Tìm số chiều và cơ sở của một không gian ảnh $\operatorname{Im}\varphi$;

(b) Với giá trị nào của λ thì φ là một đẳng cấu?

Bài 5.3 (ĐH Công nghệ Thông tin)**.** Cho ánh xạ $\varphi : P_2[x] \to P_2[x]$ xác định như sau: với mọi $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, ta có

$$\varphi(p(x)) = (7a_0 - 12a_1 - 2a_2) + (3a_0 - 4a_1)x - (2a_0 + 2a_2)x^2$$

(a) Chứng tỏ rằng φ là một toán tử tuyến tính; xác định ma trận A tương ứng của φ đối với cơ sở $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$.

(b) Tìm giá trị riêng, véc tơ riêng của A và xét xem A có chéo hóa được hay không? Nếu được, hãy chéo hóa A và tìm ma trận chuyển T cùng với ma trận T^{-1} tương ứng, sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận đường chéo.

(c) Cho $p(x) = -1 - 2x + 3x^2$. Hãy xác định $\varphi^{2024}(p(x))$.

Bài 5.1 (ĐH Tân Trào)**.** Hãy tìm một ma trận Y và một ma trận đường chéo D, sao cho $XY = YD$, trong đó

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix};\ D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},\ abc \neq 0, Y \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bài 5.1 (ĐH Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh). Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ và X thỏa $AX + mX = B$. Tìm tất cả các giá trị thực m sao cho X có trị riêng bằng 1.

Bài 3.2 (ĐH Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh). Giả sử có 1000 người sử dụng mạng điện thoại Viettel(V), Mobi(M), Vina(N). Biết rằng sau mỗi tháng, trong số những người dùng V có 10% chuyển sang dùng M và 20% chuyển sang dùng N; trong số những người dùng M có 15% chuyển sang dùng V và 10% chuyển sang dùng N; trong số những người dùng N có 20% chuyển sang dùng V và 5% chuyển sang dùng M.

(a) Giả sử ban đầu cả 1000 người này đều dùng V. Hỏi sau 3 tháng, số lượng khách hàng dùng mỗi loại mạng điện thoại là bao nhiêu?

(b) Hỏi thời điểm ban đầu, số người dùng mỗi loại mạng di động là bao nhiêu để cho qua mỗi tháng, số lượng khách hàng ở mỗi nhà mạng là không đổi? Biết rằng, tổng số khách hàng dùng 3 loại mạng luôn là 1000 và không có khách hàng mới nào và không có khách hàng nào bỏ dùng. Kết quả được làm tròn đến số nguyên.

Câu4. Cho A là ma trận cỡ 6×3 và ma trận B cỡ 3×6 sao cho

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tìm BA.

Câu 5. Cho A là ma trận cấp 4×2, B là ma trận cấp 2×4 sao cho

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}$$

trong đó a, b là các số thực khác không. Xác định BA.

Câu I. Cho M là ma trận cấp 3×2 và N là ma trận cấp 2×3 thoả mãn

$$MN = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tìm ma trận NM?

Câu 2. (5 điểm) Cho A, B là các ma trận vuông cấp n, hệ số thực thỏa mãn $A^2B+BA^2 = 2ABA$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương m sao cho $(AB - BA)^m = 0$.

***Câu 5.*(2 điểm)**
Cho ma trận vuông A thoả mãn : $A^{2012} = 0$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ≥ 1, đều có $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A + A^2 + \ldots + A^n)$.

Câu 2. (ĐHSP Huế) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ký hiệu $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận vuông cấp 3 hệ số thực, $W = \{X \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}) : AX = XA\}$ và $U = \{p(A) : p(x) \in \mathbb{R}[x]\}$. Chú ý rằng nếu $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ thì $p(A) = a_0I_3 + a_1A + \cdots + a_kA^k$, trong đó I_3 là ma trận đơn vị cấp 3.

1. Chứng minh rằng U, W là các không gian các vector con của $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ và $U \subset W$.

2. Chứng minh rằng $\dim W = \dim U = 3$. Từ đó suy ra, nếu $B \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ và $AB = BA$ thì tồn tại $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho $B = p(A)$.