0

Mục lục

Phần I

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN - HỌC SINH LẦN THỨ 30

Phần II

ĐỀ THI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

1 Đại số

1.1 Bảng A

Bài 1. (6 điểm)
Cho a là một số thực, A là ma trận phụ thuộc vào a:

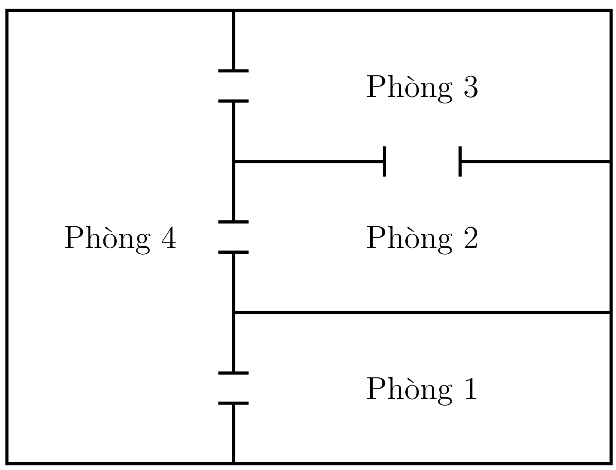
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & a+2 & 0 \\ a+3 & 1 & 0 & a+2 \\ a+2 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm hạng của ma trận A khi $a = -1$.

(b) Tìm tất cả các số thực a sao cho A có định thức dương.

(c) Biện luận số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $AX = 0$ theo a. (Ở đây, X là vectơ cột với các tọa độ lần lượt là x, y, z, t.)

Bài 2. (6 điểm) Có 200 con muỗi trong một căn hộ gồm 4 phòng với hệ thống cửa nối các phòng như hình vẽ.



Biết rằng, mỗi phút, mỗi con muỗi chỉ ở lại trong phòng nó đang ở hoặc bay sang một phòng bên cạnh. Ngoài ra, người ta thống kê được rằng, với mỗi phòng, có 40% số muỗi ở lại phòng đó, còn trong số muỗi bay ra khỏi phòng thì số lượng muỗi bay sang mỗi phòng bên cạnh đó là bằng nhau. Chẳng hạn, trong số các con muỗi bay từ phòng 3 sang phòng khác, thì có một nửa sang phòng 2, một nửa sang phòng 4.

(a) Giả sử sau một phút số muỗi ở các phòng 1, phòng 2, phòng 3 và phòng 4 tương ứng là 24, 50, 52 và 74. Tìm số muỗi ở mỗi phòng tại thời điểm ban đầu.

(b) Gọi trạng thái *ổn định* là trạng thái mà kể từ đó trở đi số muỗi ở mỗi phòng đều không đổi. Tìm số lượng muỗi tương ứng của mỗi phòng tại trạng thái ổn định đó.

Bài 3. (6 điểm)
Cho $P(x)$ là một đa thức với hệ số thực thỏa mãn $(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x)$.

(a) Chứng minh rằng $P(x)$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt.

(b) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện trên.

Bài 4. (6 điểm)
Với x, y, z là các số thực, đặt

$$A(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm một không gian con V của $\mathbb{R}^3$ với $\dim(V) = 2$ thỏa mãn $A(x,y,z) = 0$ với mọi $(x,y,z) \in V$. Tìm một cơ sở của không gian V vừa tìm được.

(b) Tồn tại hay không các số nguyên x, y, z sao cho $A(x,y,z) = 24$?

Bài 5. (6 điểm)
Cặp ma trận thực, vuông cùng cấp (A, B), được gọi là tốt nếu cả hai đều khả nghịch, và thỏa mãn $AB - BA = B^2A$.

(a) Chứng minh rằng nếu (A, B) là một cặp ma trận tốt, thì

$$B = A^{-1}\left(B^2 + B\right)A.$$

(b) Tìm một cặp ma trận tốt (A, B) với cấp của mỗi ma trận đều bằng 2.

(c) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại ít nhất một cặp ma trận tốt (A, B) với cấp của mỗi ma trận đều bằng n.

1.2 Bảng B

Bài 1. (6 điểm)
Cho a là một số thực, A là ma trận phụ thuộc vào a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & a+2 & 0 \\ a+3 & 1 & 0 & a+2 \\ a+2 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm hạng của ma trận A khi $a = -1$.

(b) Tìm tất cả các số thực a sao cho A có định thức dương.

(c) Biện luận số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $AX = 0$ theo a. (Ở đây, X là vectơ cột với các tọa độ lần lượt là x, y, z, t.)

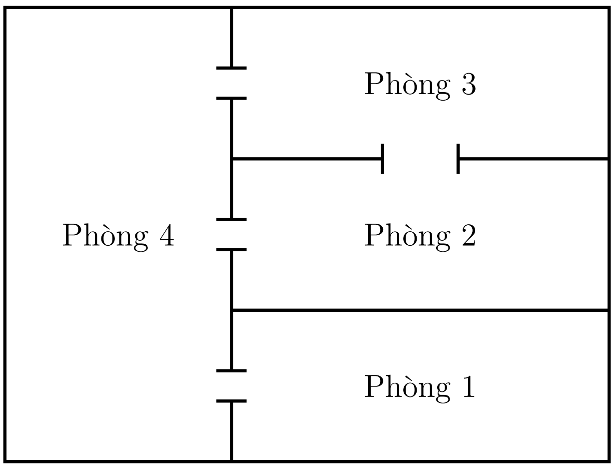
Bài 2. (6 điểm)
Cho A, B là hai ma trận vuông sau:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm một ma trận thực P có cấp bằng 2, sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo.

(b) Tìm một ma trận thực R có cấp bằng 2, định thức bằng 1, sao cho $R^{-1}AR = B$.

Bài 3. (6 điểm) Có 200 con muỗi trong một căn hộ gồm 4 phòng với hệ thống cửa nối các phòng như hình vẽ.



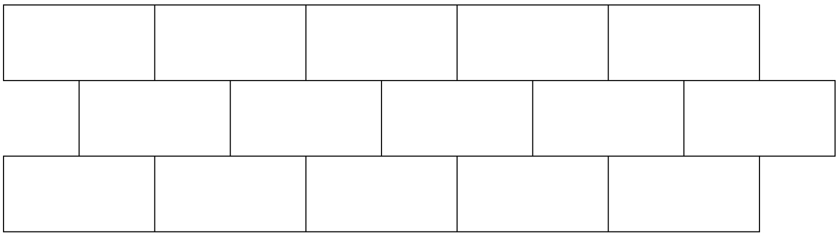
Biết rằng, mỗi phút, mỗi con muỗi chỉ ở lại trong phòng nó đang ở hoặc bay sang một phòng bên cạnh. Ngoài ra, người ta thống kê được rằng, với mỗi phòng, có 40% số muỗi ở lại phòng đó, còn trong số muỗi bay ra khỏi phòng thì số lượng muỗi bay sang mỗi phòng bên cạnh đó là bằng nhau. Chẳng hạn, trong số các con muỗi bay từ phòng 3 sang phòng khác, thì có một nửa sang phòng 2, một nửa sang phòng 4.

(a) Giả sử sau một phút số muỗi ở các phòng 1, phòng 2, phòng 3 và phòng 4 tương ứng là 24, 50, 52 và 74. Tìm số muỗi ở mỗi phòng tại thời điểm ban đầu.

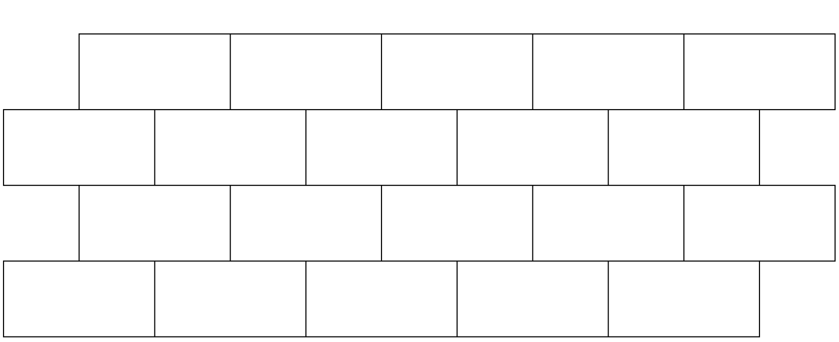
(b) Gọi trạng thái *ổn định* là trạng thái mà kể từ đó trở đi số muỗi ở mỗi phòng đều không đổi. Tìm số lượng muỗi tương ứng của mỗi phòng tại trạng thái ổn định đó.

Bài 4. (6 điểm)

(a) Có bao nhiêu cách chọn ra 3 viên gạch, mỗi viên từ một hàng trong hình sau đây, sao cho không có 2 viên gạch nào được lấy ra nằm kề nhau? (Hai viên gạch được gọi là kề nhau nếu có chung một phần của một cạnh.)



(b) Có bao nhiêu cách chọn ra 4 viên gạch, mỗi viên từ một hàng trong hình sau đây, sao cho không có 2 viên gạch nào được lấy ra nằm kề nhau?



Bài 5. (6 điểm)

Với x, y, z là các số thực, đặt

$$A(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm một không gian con V của $\mathbb{R}^3$ với $\dim(V) = 2$ thỏa mãn $A(x,y,z) = 0$ với mọi $(x,y,z) \in V$. Tìm một cơ sở của không gian V vừa tìm được.

(b) Tồn tại hay không các số nguyên x, y, z sao cho $A(x,y,z) = 24$?

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: ĐẠI SỐ

1 MA TRẬN

Bài 1.1 (ĐH Công nghệ Thông tin)**.** Cho A, B là các ma trận vuông thỏa mãn $A^{2024} = B^{2023} = I$ và $AB = BA$. Chứng minh rằng $A+B+I$ khả nghịch.

Bài 1.2 (ĐH Công nghệ Thông tin)**.** Cho $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ và đặt các ma trận khối

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}; N = \begin{bmatrix} A+B & 0_n \\ 0_n & A-B \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}; Q = \begin{bmatrix} A+iB & 0_n \\ 0_n & A-iB \end{bmatrix}$$

với $i^2 = -1$. Chứng minh rằng M đồng dạng với N và P đồng dạng với Q.

Bài 1.3 (ĐH Công nghệ Thông tin)**.** Tìm tất cả các số thực a, b thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Bài 1.4 (ĐH Giao thông Vận tải)**.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Tính A^{2024}.

Bài 1.5 (ĐH Đồng Tháp)**.** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 1.6 (ĐH Tân Trào)**.** Tính tổng S các phần tử trên đường chéo chính của ma trận A^n, trong đó $1 \leq n \in \mathbb{N}$ và

$$A = \begin{bmatrix} 44 & -25 & 10 \\ 25 & -11 & 15 \\ 30 & -45 & 44 \end{bmatrix}.$$

2 ĐỊNH THỨC

Bài 2.1 (ĐH Mỏ-Địa chất). Tính định thức cấp 2022 có phần tử tổng quát $a_{ij}(i, j = 1, 2, \ldots 2022)$ là số lượng các ước của ước chung lớn nhất của hai số i, j.

Bài 2.2 (ĐH Đồng Tháp). Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1 và $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là các số thực khác không. Chứng minh rằng

$$a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0}}}} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

với

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & -1 & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

Bài 2.3 (ĐH Tân Trào). Tính giá trị định thức

$$D = \begin{vmatrix} 2024 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2023 & 2024 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2022 & 2024 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2024 & 2023 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2024 \end{vmatrix}.$$

Bài 2.4 (ĐH Vinh). Cho ma trận A vuông cấp 2024 có các phần tử trên đường chéo chính đều là 2024, các phần tử còn lại là 2023 hoặc -2023. Chứng minh rằng ma trận A khả nghịch.

Bài 2.5 (ĐH Hải Phòng). Biện luận hạng của ma trận sau theo x:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x+1 & x+2 & 0 \\ x+3 & 1 & 0 & x+2 \\ x+2 & 0 & 1 & x+1 \\ 0 & x+2 & x+3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bài 2.6 (ĐH Trà Vinh). Cho $A \in M_n(\mathbb{K})$. Chứng minh rằng

(a) Nếu $A^{-1} = A$ thì $|\det(I - A)|(|\det(I - A)| - 2^n) = 0$.

(b) Nếu $A^{-1} = 4A$ thì $|\det(A^{2k+1} - A)| = \left(\dfrac{4^k - 1}{2^{2k+1}}\right)^n$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Bài 2.7 (ĐH Trà Vinh)**.** Giả sử có các số tự nhiên mà mỗi số gồm ba chữ số dạng $a_1a_2a_3$, $b_1b_2b_3$, $c_1c_2c_3$ đều chia hết cho 13. Chứng minh rằng định thức

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

chia hết cho 13.

3 HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 3.1 (Đại học Đồng Tháp)**.** Một công ty kinh doanh cây cảnh ở Làng hoa Sa đéc tổng kết hoạt động bốn tháng đầu năm như sau: Trong mỗi tháng công ty trồng thêm 10% tổng số cây xanh hiện có trong tháng trước, đồng thời bán ra được một số cây xanh. Cụ thể trong tháng thứ nhất bán được 100 cây, tháng thứ hai bán được 200 cây, tháng thứ ba bán được 90 cây, tháng cuối cùng bán được 40 cây. Sau bốn tháng, tổng số cây hiện tại trong công ty đã giảm 50 cây so với trước. Hỏi hiện nay công ty có bao nhiêu cây xanh?

Bài 3.2 (Đại học Giao thông Vận tải)**.** Một cửa hàng bán ba loại sản phẩm A, B, C với giá của mỗi sản phẩm là cố định. Có 4 khách hàng đến mua hàng. Số lượng sản phẩm A, B, C mà người thứ hai đã mua tương ứng bằng 1,5 lần, 0,75 lần và 2 lần số sản phẩm người thứ nhất đã mua. Người thứ ba mua một nửa số sản phẩm A mà người thứ nhất đã mua, mua gấp 3 lần số sản phẩm B mà người thứ 2 đã mua và mua số sản phẩm C bằng đúng số lượng sản phẩm C của hai người mua trước cộng lại. Người thứ tư mua 15 sản phẩm A, 30 sản phẩm B và 10 sản phẩm C. Tổng số sản phẩm người thứ nhất mua là 40 và phải trả một số tiền ít hơn người thứ hai 420.000 đồng và cũng ít hơn người thứ ba 1.500.000 đồng. Người thứ tư phải trả số tiền nhiều hơn người thứ hai là 660.000 đồng. Tổng số sản phẩm người thứ 2 mua là 55 và tổng số sản phẩm người thứ 3 mua là 61. Tính số tiền người thứ nhất phải trả khi mua hàng.

4 KHÔNG GIAN VÉCTƠ

Bài 4.1 (Đại học Giao thông Vận tải)**.** Cho M, N, P là ba không gian con phân biệt của không gian tuyến tính $\mathbb{R}^{2024}$ với

$$\dim M = \dim N = \dim P = 2023.$$

(a) Chứng minh rằng $\dim(M \cap N) = 2022$.

(b) Chứng minh rằng nếu $(M \cap N) \neq (N \cap P)$ thì $\dim(M \cap N \cap P) = 2021$.

Bài 4.2 (ĐH Mỏ-Địa chất). Cho các véc tơ trên mặt phẳng u, w, z có độ dài bằng 1. Chứng minh rằng có thể chọn các dấu $+, -$ sao cho $|\pm u \pm w \pm z| \leq 1$.

Bài 4.3 (ĐH Hải Phòng). Kí hiệu V là không gian véctơ các đa thức với hệ số thực gồm đa thức không và các đa thức có bậc không lớn hơn 2. Cho ánh xạ tuyến tính $\varphi : V \to V$ xác định bởi:

$$p(x) \mapsto \varphi(p(x)) = (x - \lambda)(x + 1)p'(x) - 2xp(x),$$

với $\lambda \in \mathbb{R}$ là tham số. Ký hiệu $p'(x)$ là đạo hàm của đa thức $p(x)$.

(a) Với $\lambda = 0$, hãy:

- Tìm số chiều và cơ sở của một không gian hạt nhân $\operatorname{Ker} \varphi$;
- Tìm số chiều và cơ sở của một không gian ảnh $\operatorname{Im} \varphi$;

(b) Với giá trị nào của λ thì φ là một đẳng cấu?

Bài 4.4 (ĐH Trà Vinh). Gọi $C[a, b]$ là tập hợp tất cả các hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$. Định nghĩa các phép toán trên $C[a, b]$ như sau

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t),$$
$$(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$$

với mọi $t \in [a, b]$. Khi đó $C[a, b]$ là một không gian véctơ trên $\mathbb{R}$.

(a) Chứng minh rằng tập các hàm khả vi trên $[a, b]$ thỏa mãn $f' + 4f = 0$ tạo thành một không gian véctơ con của $C[a, b]$.

(b) Tìm một cơ sở và số chiều của không gian này.

5 GIÁ TRỊ RIÊNG

Bài 5.1 (ĐH Tân Trào). Hãy tìm một ma trận Y và một ma trận đường chéo D, sao cho $XY = YD$, trong đó

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}; \; D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \; abc \neq 0, Y \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bài 5.2 (ĐH Vinh). Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -9 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm tất cả các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận A.

(b) Xác định tất cả các phần tử của ma trận A^{2024}.

(c) Tìm tất cả các phần tử của ma trận e^A, trong đó ký hiệu $e^A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$ (ở đây ma trận giới hạn có phần tử là giới hạn của phần tử tương ứng của ma trận tổng $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$).

Bài 5.3 (ĐH Công nghệ Thông tin)**.** Cho ánh xạ $\varphi : P_2[x] \to P_2[x]$ xác định như sau: với mọi $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, ta có

$$\varphi(p(x)) = (7a_0 - 12a_1 - 2a_2) + (3a_0 - 4a_1)x - (2a_0 + 2a_2)x^2$$

(a) Chứng tỏ rằng φ là một toán tử tuyến tính; xác định ma trận A tương ứng của φ đối với cơ sở $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$.

(b) Tìm giá trị riêng, véc tơ riêng của A và xét xem A có chéo hóa được hay không? Nếu được, hãy chéo hóa A và tìm ma trận chuyển T cùng với ma trận T^{-1} tương ứng, sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận đường chéo.

(c) Cho $p(x) = -1 - 2x + 3x^2$. Hãy xác định $\varphi^{2024}(p(x))$.

Bài 5.4 (ĐH Ngoại Thương)**.** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của ma trận A.

(b) Tìm các giá trị riêng của ma trận $20A^5 - 2A^2 + 4I$.

Bài 5.5 (ĐH Trà Vinh)**.** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ma trận A có chéo hóa được trên $\mathbb{R}$ hay không? Nếu chéo hóa được thì chỉ ra ma trận khả nghịch P thỏa mãn $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo rồi tính A^{2024} bằng hai phép toán nhân ma trận.

6 ĐA THỨC

Bài 6.1 (ĐH Giao thông Vận tải)**.** Cho $P(x)$ là một đa thức bậc 2022 với hệ số thực. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất đa thức $Q(x)$ có hệ số thực và thỏa mãn 3 điều kiện sau:

(i) $Q(x)$ là đa thức bậc 2024.

(ii) $P(x) = Q(x+1) + Q(x-1) - 2Q(x) + 7Q"(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(iii) $Q(x)$ nhận số phức $x = 2 + \sqrt{7}\, i$ là một nghiệm.

Bài 6.2 (ĐH Vinh)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x).P(2024x^4) = P(x^{2024} + 8x^4) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.3 (ĐH Vinh)**.** Giả sử đa thức $P(x)$ hệ số thực và không có nghiệm thực. Chứng minh rằng

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(2n)}(x)}{(2n)!}$$

cũng là một đa thức không có nghiệm thực, trong đó $P^{(k)}(x)$ ký hiệu là đạo hàm cấp k của đa thức $P(x)$.

Bài 6.4 (ĐH Công nghệ Thông tin)**.** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Tìm đa thức $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ có bậc nhỏ nhất thỏa mãn $p(A) = 0$.

2. Tìm phần dư khi lấy đa thức $q(x) = x^{2024}$ chia cho đa thức $p(x)$. Sau đó, tính A^{2024}.

3. Tìm cơ sở và chiều của không gian vectơ con

$$V = \{f(A) \mid f \text{ là một đa thức hệ số thực}\}$$

Bài 6.5 (ĐH Trà Vinh)**.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_2(x) \to P_2(x)$ xác định bởi

$$\begin{aligned} f(1+x^2) &= 4 + x + 5x^2 \\ f(1+2x+3x^2) &= 10 + 13x + 23x^2 \\ f(-x+x^2) &= -1 - 2x - 3x^2 \end{aligned}$$

(a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2(x)$.

(b) Xác định m để véctơ $v = 1 + mx - 5x^2$ không thuộc $\operatorname{Im} f$.

7 TỔ HỢP

Bài 7.1 (Đại học Giao thông Vận tải)**.** Người ta cắm 30 lá cờ đỏ và 11 lá cờ xanh thành một hàng dọc. Rõ hơn, các cờ xanh được cắm ở các vị trí $1, 5, 9, \ldots, 41$ của hàng và các vị trí còn lại là cờ đỏ. Một người muốn lựa chọn 1 cờ xanh và 1 cờ đỏ đổi chỗ cho nhau sao cho sau khi đổi chỗ vẫn không có 2 cờ xanh nào được cắm cạnh nhau. Hỏi có bao nhiêu cách mà người đó có thể lựa chọn.

Bài 7.2 (ĐH Tân Trào)**.** Cho một hình chữ nhật (S) có kích thước $2 \times n$, $0 < n \in \mathbb{N}$. Ký hiệu R_n là số cách chia (S) thành các hình chữ nhật có kích thước 2×1, 1×2 và 2×2 và có các cạnh song song với các cạnh của hình chữ nhật (S). Hãy tính các giá trị R_3, R_4 và R_{2024}.

Bài 7.3 (ĐH Vinh)**.** (a) Có 4 cặp đôi yêu nhau tham gia chơi một trò chơi như sau: Tên của mỗi cô gái được ghi vào một tấm thẻ và bỏ vào một phong bì. 4 chàng trai mỗi người chọn một phong bì trong số 4 phong bì nói trên. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra để không có chàng trai nào chọn đúng phong bì có ghi tên người yêu của mình?

(b) Hỏi tương tự câu (a) cho trường hợp 10 cặp đôi yêu nhau tham gia trò chơi.

Phần III

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHÍNH THỨC

1 Đại số

1.1 Bảng A

Bài 1. (6 điểm)
Cho a là một số thực, A là ma trận phụ thuộc vào a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & a+2 & 0 \\ a+3 & 1 & 0 & a+2 \\ a+2 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm hạng của ma trận A khi $a = -1$.

(b) Tìm tất cả các số thực a sao cho A có định thức dương.

(c) Biện luận số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $AX = 0$ theo a. (Ở đây, X là vectơ cột với các tọa độ lần lượt là x, y, z, t.)

Hướng dẫn giải
(a): (2 điểm) Với $a = -1$ thì ma trận A bằng

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hạng của ma trận lúc này bằng 3.

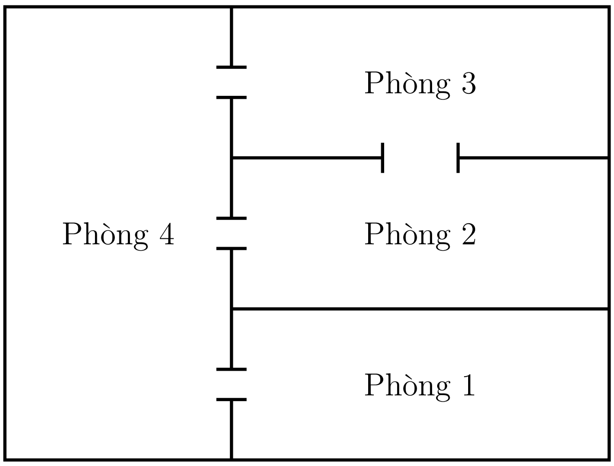
(b): (2 điểm) Dùng biến đổi sơ cấp hàng và khai triển Laplace ta có

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{pmatrix} 1 & a+1 & a+2 & 0 \\ a+3 & 1 & 0 & a+2 \\ 0 & a & a+3 & -1 \\ 0 & a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & a+2 \\ a & a+3 & -1 \\ a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix} - (a+3)\det\begin{pmatrix} a+1 & a+2 & 0 \\ a & a+3 & -1 \\ a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix}, \\
&= 2(a+3) + (a+2)\left[a(a+3) - (a+2)(a+3)\right] - \\
&- (a+3)\left[2(a+3)(a+1) - (a+2)(2a+2)\right], \\
&= 2(a+3) - 2(a+2)(a+3) - (a+3)(2a+2), \\
&= -4(a+1)(a+3).
\end{aligned}$$

Do đó định thức $\det(A) > 0$ khi và chỉ khi $-3 < a < -1$.

(c): (2 điểm) Nếu $a \neq -3, -1$, thì $\det(A) \neq 0$. Do đó trong trường hợp này phương trình chỉ có nghiệm tầm thường, số chiều của không gian nghiệm tương ứng bằng 0.
Với $a \in \{-1, -3\}$, tính cụ thể được $\operatorname{rank}(A) = 3$. Số chiều của không gian nghiệm tương ứng bằng $4 - \operatorname{rank}(A) = 1$.

Bài 2. (6 điểm)
Có 200 con muỗi trong một căn hộ gồm 4 phòng với hệ thống cửa nối các phòng như hình vẽ.



Biết rằng, mỗi phút, mỗi con muỗi chỉ ở lại trong phòng nó đang ở hoặc bay sang một phòng bên cạnh. Ngoài ra, người ta thống kê được rằng, với mỗi phòng, có 40% số muỗi ở lại phòng đó, còn trong số muỗi bay ra khỏi phòng thì số lượng muỗi bay sang mỗi phòng bên cạnh đó là bằng nhau. Chẳng hạn, trong số các con muỗi bay từ phòng 3 sang phòng khác, thì có một nửa sang phòng 2, một nửa sang phòng 4.

(a) Giả sử sau một phút số muỗi ở các phòng 1, phòng 2, phòng 3 và phòng 4 tương ứng là 24, 50, 52 và 74. Tìm số muỗi ở mỗi phòng tại thời điểm ban đầu.

(b) Gọi trạng thái *ổn định* là trạng thái mà kể từ đó trở đi số muỗi ở mỗi phòng đều không đổi. Tìm số lượng muỗi tương ứng của mỗi phòng tại trạng thái ổn định đó.

Hướng dẫn giải

(a): (3 điểm) Gọi a_i là số muỗi ban đầu tương ứng của phòng $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Từ giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 0.4a_1 + 0.2a_4 = 24, \\ 0.4a_2 + 0.3a_3 + 0.2a_4 = 50, \\ 0.3a_2 + 0.4a_3 + 0.2a_4 = 52, \\ 0.6a_1 + 0.3a_2 + 0.3a_3 + 0.4a_4 = 74. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta nhận được nghiệm (a_1, a_2, a_3, a_4) với:

$$a_1 = 20, a_2 = 40, a_3 = 60, a_4 = 80.$$

Vậy thời điểm ban đầu số muỗi của các phòng lần lượt là $20; 40; 60; 80$.

(b): (3 điểm) Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là số muỗi tương ứng của các phòng $1, 2, 3, 4$ ở trạng thái ổn định. Khi đó $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 200$, và sau một phút số muỗi mỗi phòng tương ứng sẽ là x_1', x_2', x_3', x_4' trong đó

$$\begin{cases} x_1' = 0.4x_1 + 0.2x_4, \\ x_2' = 0.4x_2 + 0.3x_3 + 0.2x_4, \\ x_3' = 0.3x_2 + 0.4x_3 + 0.2x_4, \\ x_4' = 0.6x_1 + 0.3x_2 + 0.3x_3 + 0.4x_4. \end{cases}$$

Từ điều kiện trạng thái ổn định $(x_1', x_2', x_3', x_4') = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ta có

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a, a\right),$$

với a là một số nào đó. Kết hợp với điều kiện $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 200$, suy ra số muỗi tương ứng của các phòng $1, 2, 3, 4$ ở trạng thái ổn định là $25; 50; 50; 75$.

Bài 3. (6 điểm)

Cho $P(x)$ là một đa thức với hệ số thực thỏa mãn $(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x)$.

(a) Chứng minh rằng $P(x)$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt.

(b) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện trên.

Hướng dẫn giải

(a): (3 điểm) Thay $x = 1$ vào giả thiết ta có $0 \cdot P(1) = 3 \cdot P(1)$. Do đó $P(1) = 0$. Lại thay $x = 0$ ta có $2 \cdot P(0) = (-1) \cdot P(1)$. Kết hợp với $P(1) = 0$, suy ra $P(0) = 0$. Lại thay $x = -1$ và kết hợp với $P(0) = 0$, suy ra $P(-1) = 0$. Do đó đa thức $P(x)$ có ít nhất ba nghiệm thực là $1, 0, -1$.

(b): (3 điểm) Từ phần (a) suy ra $P(x) = x(x-1)(x+1)G(x)$, với $G(x)$ là một đa thức nào đó với hệ số thực. Thay vào đẳng thức ban đầu ta được:

$$x(x-1)(x+1)(x+2)G(x+1) = (x+2)x(x-1)(x+1)G(x).$$

Từ đó suy ra $G(x) = G(x+1)$ với mọi $x \notin \{0, \pm 1, -2\}$. Do đó $G(x) = c$ là một đa thức hằng số. Từ đó suy ra

$$P(x) = cx(x-1)(x+1),$$

với c là một số thực bất kỳ. Thử lại suy ra tất cả các đa thức thỏa mãn đề bài là $P(x) = cx(x-1)(x+1)$ với $c \in \mathbb{R}$.

Bài 4. (6 điểm)
Với x, y, z là các số thực, đặt

$$A(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm một không gian con V của $\mathbb{R}^3$ với $\dim(V) = 2$ thỏa mãn $A(x,y,z) = 0$ với mọi $(x,y,z) \in V$. Tìm một cơ sở của không gian V vừa tìm được.

(b) Tồn tại hay không các số nguyên x, y, z sao cho $A(x,y,z) = 24$?

Hướng dẫn giải

(a): (3 điểm) Dùng khai triển Laplace ta có

$$\begin{aligned} \det(A) &= -(x^3 + y^3 + z^3) + 3xyz, \\ &= -(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx). \end{aligned}$$

Như vậy $\det(A) = 0$ khi và chỉ khi $x+y+z = 0$ hoặc $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = 0$. Điều kiện sau tương đương $x = y = z$. Do đó không gian con cần tìm V với số chiều 2 là tập nghiệm của phương trình $x + y + z = 0$. Một cơ sở của nó là $((-1,1,0); (-1,0,1))$.

(b): (3 điểm) Giả sử $x, y, z \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $A(x, y, z) = 24$. Thế thì

$$-(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 24.$$

Do đó một trong hai số $x + y + z$ và $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ phải chia hết cho 3. Mặt khác

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = (x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx).$$

Thế thì $x + y + z$ và $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ cùng chia hết cho 3. Lúc này tích của hai số sẽ chia hết cho 9. Tuy nhiên 24 không chia hết cho 9, nên điều này vô lý. Từ đó suy ra không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn đề bài.

Bài 5. (6 điểm)
Cặp ma trận thực, vuông cùng cấp (A, B), được gọi là tốt nếu cả hai đều khả nghịch, và thỏa mãn $AB - BA = B^2A$.

(a) Chứng minh rằng nếu (A, B) là một cặp ma trận tốt, thì

$$B = A^{-1}\left(B^2 + B\right)A.$$

(b) Tìm một cặp ma trận tốt (A, B) với cấp của mỗi ma trận đều bằng 2.

(c) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại ít nhất một cặp ma trận tốt (A, B) với cấp của mỗi ma trận đều bằng n.

Hướng dẫn giải
(a): (2 điểm) Từ giả thiết $AB - BA = B^2A$, ta có

$$A^{-1}\left(B^2 + B\right)A = A^{-1}B^2A + A^{-1}BA = A^{-1}(AB - BA) + A^{-1}BA = A^{-1}AB = B.$$

Do đó $B = A^{-1}\left(B^2 + B\right)A$.

(b): (2 điểm) Ví dụ về một cặp ma trận tốt là

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c): (2 điểm) Ta chỉ ra tồn tại cặp hai ma trận (A, B) là tốt khi và chỉ khi n là một số chẵn. Đầu tiên giả sử tồn tại hai ma trận A, B có cùng cấp n thỏa mãn đề bài với n là một số lẻ. Theo phần (a), B và $B^2 + B$ đồng dạng, suy ra chúng có cùng tập các giá trị riêng. Vì cấp của B lẻ, nên đa thức đặc trưng của B là đa thức bậc lẻ với hệ số thực, suy ra B có ít nhất một giá trị riêng thực λ_1. Do đó $B^2 + B$ có giá trị riêng thực $\lambda_2 = \lambda_1^2 + \lambda_1$. Thật vậy

$$|\left(B^2 + B\right) - \left(\lambda_1^2 + \lambda_1\right)I_n| = |(B - \lambda I_n)| \cdot |(B + \lambda I_n) + I_n| = 0.$$

Theo điều trên B và $B^2 + B$ có cùng tập giá trị riêng, nên B cũng nhận $\lambda_2 = \lambda_1^2 + \lambda_1$ là một giá trị riêng thực. Lặp lại lập luận trên, B cũng nhận $\lambda_3 = \lambda_2^2 + \lambda_2$, $\lambda_4 = \lambda_3^2 + \lambda_3$, ... làm các giá trị riêng. Vì tập giá trị riêng của một ma trận chỉ là hữu hạn, nên dãy $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ tuần hoàn, nghĩa là tồn tại $k \neq l \in \mathbb{Z}^+$ sao cho

$$\begin{cases} \lambda_{k+1} = \lambda_k^2 + \lambda_k, \\ \lambda_{k+2} = \lambda_{k+1}^2 + \lambda_{k+1}, \\ \cdots, \\ \lambda_l = \lambda_{l-1}^2 + \lambda_{l-1}, \\ \lambda_k = \lambda_l^2 + \lambda_l. \end{cases}$$

Thế thì $\lambda_k^2 + \cdots + \lambda_l^2 = 0$, với $\lambda_k, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{R}$. Do đó

$$\lambda_k = \ldots = \lambda_l = 0.$$

Từ đó suy ra B nhận $\lambda = 0$ là một giá trị riêng, suy ra B không khả nghịch, suy ra vô lý. Vậy cặp ma trận cùng cấp lẻ không thể là tốt.

Bây giờ ta chứng minh với mọi n chẵn, luôn tồn tại A, B cấp n thỏa mãn đề bài. Như phần (b), với $n = 2$ ta đã chọn được cặp ma trận tốt

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Với $n = 2k$ là một số chẵn bất kỳ, ta chọn ma trận khối:

$$A = A_2 \oplus \cdots \oplus A_2,$$

$$B = B_2 \oplus \cdots \oplus B_2,$$

với số khối bằng k. Khi đó cặp (A, B) là tốt với cấp của A, B bằng n. Vậy tập các số n thỏa mãn đề bài là n chẵn.

1.2 Bảng B

Bài 1. (6 điểm)
Cho a là một số thực, A là ma trận phụ thuộc vào a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & a+2 & 0 \\ a+3 & 1 & 0 & a+2 \\ a+2 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm hạng của ma trận A khi $a = -1$.

(b) Tìm tất cả các số thực a sao cho A có định thức dương.

(c) Biện luận số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $AX = 0$ theo a. (Ở đây, X là vectơ cột với các tọa độ lần lượt là x, y, z, t.)

Hướng dẫn giải

(a): (2 điểm) Với $a = -1$ thì ma trận A bằng

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hạng của ma trận lúc này bằng 3.

(b): (2 điểm) Dùng biến đổi sơ cấp hàng và khai triển Laplace ta có

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} 1 & a+1 & a+2 & 0 \\ a+3 & 1 & 0 & a+2 \\ 0 & a & a+3 & -1 \\ 0 & a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+2 \\ a & a+3 & -1 \\ a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix} - (a+3)\det \begin{pmatrix} a+1 & a+2 & 0 \\ a & a+3 & -1 \\ a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix}, \\
&= 2(a+3) + (a+2)\left[a(a+3) - (a+2)(a+3)\right] - \\
&\quad - (a+3)\left[2(a+3)(a+1) - (a+2)(2a+2)\right], \\
&= 2(a+3) - 2(a+2)(a+3) - (a+3)(2a+2), \\
&= -4(a+1)(a+3).
\end{aligned}$$

Do đó định thức $\det(A) > 0$ khi và chỉ khi $-3 < a < -1$.

(c): (2 điểm) Nếu $a \neq -3, -1$, thì $\det(A) \neq 0$. Do đó trong trường hợp này phương trình chỉ có nghiệm tầm thường, số chiều của không gian nghiệm tương ứng bằng 0.

Với $a \in \{-1, -3\}$, tính cụ thể được $\operatorname{rank}(A) = 3$. Số chiều của không gian nghiệm tương ứng bằng $4 - \operatorname{rank}(A) = 1$.

Bài 2. (6 điểm)

Cho A, B là hai ma trận vuông sau:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm một ma trận thực P có cấp bằng 2, sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo.

(b) Tìm một ma trận thực R có cấp bằng 2, định thức bằng 1, sao cho $R^{-1}AR = B$.

Hướng dẫn giải

(a): (3 điểm) Hai ma trận A, B cùng có đa thức đặc trưng là $X^2 - 2$, do đó cùng có giá trị riêng $\pm\sqrt{2}$.

Với $\lambda_1 = \sqrt{2}$, một vectơ riêng tương ứng của A là $\left(\sqrt{2}, 1\right)^T$.

Với $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, một vectơ riêng tương ứng của A là $\left(-\sqrt{2}, 1\right)^T$.

Do đó với

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ta có

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(b): (3 điểm) Điều kiện $R^{-1}AR = B$ tương đương $AR = RB$. Đặt

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

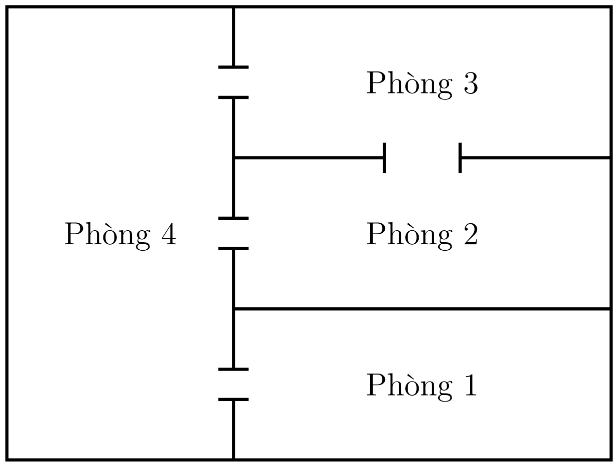
suy ra điều kiện $AR = RB$ trở thành

$$\begin{cases} a = -d, \\ b = -2c. \end{cases}$$

Do đó tất cả các ma trận R thỏa mãn đề bài là: $R = \begin{pmatrix} a & -2c \\ c & -a \end{pmatrix}$, với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $-a^2 + 2c^2 = 1$. Ví dụ về một ma trận như vậy cho bởi $R = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Bài 3. (6 điểm)

Có 200 con muỗi trong một căn hộ gồm 4 phòng với hệ thống cửa nối các phòng như hình vẽ.



Biết rằng, mỗi phút, mỗi con muỗi chỉ ở lại trong phòng nó đang ở hoặc bay sang một phòng bên cạnh. Ngoài ra, người ta thống kê được rằng, với mỗi phòng, có 40% số muỗi ở lại phòng đó, còn trong số muỗi bay ra khỏi phòng thì số lượng muỗi bay sang mỗi phòng bên cạnh đó là bằng nhau. Chẳng hạn, trong số các con muỗi bay từ phòng 3 sang phòng khác, thì có một nửa sang phòng 2, một nửa sang phòng 4.

(a) Giả sử sau một phút số muỗi ở các phòng 1, phòng 2, phòng 3 và phòng 4 tương ứng là 24, 50, 52 và 74. Tìm số muỗi ở mỗi phòng tại thời điểm ban đầu.

(b) Gọi trạng thái *ổn định* là trạng thái mà kể từ đó trở đi số muỗi ở mỗi phòng đều không đổi. Tìm số lượng muỗi tương ứng của mỗi phòng tại trạng thái ổn định đó.

Hướng dẫn giải

(a): (3 điểm) Gọi a_i là số muỗi ban đầu tương ứng của phòng $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Từ giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 0.4a_1 + 0.2a_4 = 24, \\ 0.4a_2 + 0.3a_3 + 0.2a_4 = 50, \\ 0.3a_2 + 0.4a_3 + 0.2a_4 = 52, \\ 0.6a_1 + 0.3a_2 + 0.3a_3 + 0.4a_4 = 74. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta nhận được nghiệm (a_1, a_2, a_3, a_4) với:

$$a_1 = 20, a_2 = 40, a_3 = 60, a_4 = 80.$$

Vậy thời điểm ban đầu số muỗi của các phòng lần lượt là $20; 40; 60; 80$.

(b): (3 điểm) Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là số muỗi tương ứng của các phòng $1, 2, 3, 4$ ở trạng thái ổn định. Khi đó $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 200$, và sau một phút số muỗi mỗi phòng tương ứng sẽ là x_1', x_2', x_3', x_4' trong đó

$$\begin{cases} x_1' = 0.4x_1 + 0.2x_4, \\ x_2' = 0.4x_2 + 0.3x_3 + 0.2x_4, \\ x_3' = 0.3x_2 + 0.4x_3 + 0.2x_4, \\ x_4' = 0.6x_1 + 0.3x_2 + 0.3x_3 + 0.4x_4. \end{cases}$$

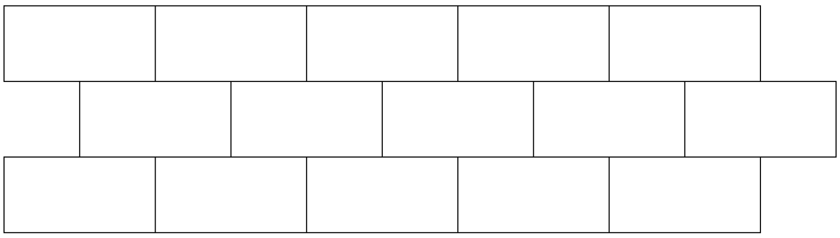
Từ điều kiện trạng thái ổn định $(x_1', x_2', x_3', x_4') = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ta có

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a, a\right),$$

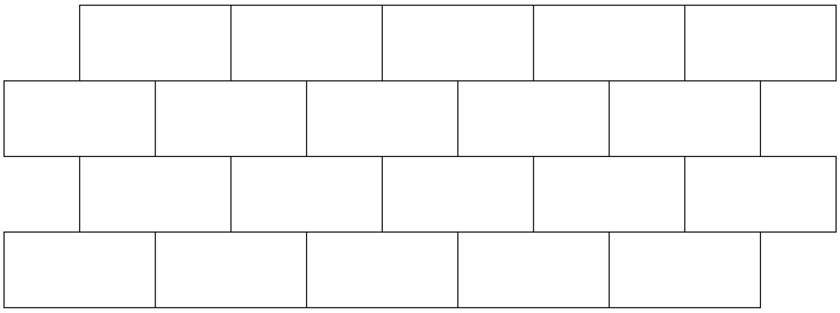
với a là một số nào đó. Kết hợp với điều kiện $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 200$, suy ra số muỗi tương ứng của các phòng $1, 2, 3, 4$ ở trạng thái ổn định là $25; 50; 50; 75$.

Bài 4. (6 điểm)

(a) Có bao nhiêu cách chọn ra 3 viên gạch, mỗi viên từ một hàng trong hình sau đây, sao cho không có 2 viên gạch nào được lấy ra nằm kề nhau? (Hai viên gạch được gọi là kề nhau nếu có chung một phần của một cạnh.)

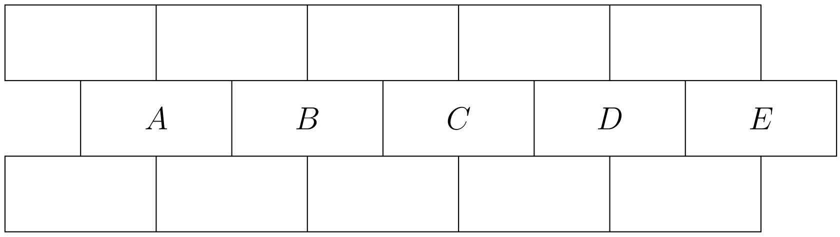


(b) Có bao nhiêu cách chọn ra 4 viên gạch, mỗi viên từ một hàng trong hình sau đây, sao cho không có 2 viên gạch nào được lấy ra nằm kề nhau?



Hướng dẫn giải

(a): (3 điểm) Ký hiệu các viên gạch ở hàng thứ 2 lần lượt là A, B, C, D, E.



Nhận thấy một trong các viên gạch A, B, C, D, E phải được chọn.

Với viên gạch A, có 3 cách chọn một viên gạch ở hàng 1 không kề với A. Tương tự, có 3 cách chọn một viên gạch ở hàng 3 không kề với A. Suy ra có $3 \times 3 = 9$ cách chọn ra ba viên gạch không kề nhau, một từ mỗi hàng, trong đó viên ở hàng 2 là A.

Với viên gạch B, có 3 cách chọn một viên gạch ở hàng 1 không kề với B. Tương tự, có 3 cách chọn một viên gạch ở hàng 3 không kề với B. Suy ra có $3 \times 3 = 9$ cách chọn ra ba viên gạch không kề nhau, một từ mỗi hàng, trong đó viên ở hàng 2 là B.

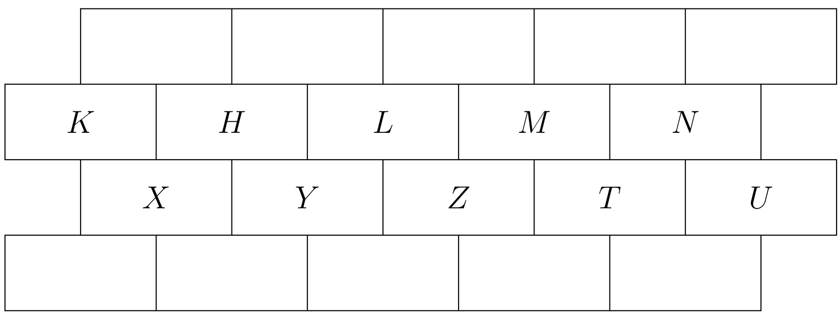
Với các tính toán tương tự,

- Có $3 \times 3 = 9$ cách chọn ba viên gạch không kề nhau, một từ mỗi hàng, trong đó viên ở hàng 2 là C.
- Có $3 \times 3 = 9$ cách chọn ba viên gạch không kề nhau, một từ mỗi hàng, trong đó viên ở hàng 2 là D.
- Có $4 \times 4 = 16$ cách chọn ba viên gạch không kề nhau, một từ mỗi hàng, trong đó viên ở hàng 2 là E.

Vì thế tổng số các cách chọn là

$$9 + 9 + 9 + 9 + 16 = 52.$$

(b): (3 điểm) Ký hiệu các viên gạch ở hàng 2 là K, H, L, M, N và ở hàng 3 là X, Y, Z, T, U.



Để lấy ra các viên gạch ở hàng 2 và hàng 3, ta có các cách sau: $KY, KZ, KT, KU, HZ, HT, HU$, LX, LT, LU, MX, MY, MU, NX, NY, NZ.
Gọi k (tương ứng h, l, m, n) là số cách chọn ra một viên gạch ở hàng 1 không kề với K (tương ứng H, L, M, L).
Tương tự, gọi x (tương ứng y, z, t, u) là số cách chọn ra một viên gạch ở hàng 4 không kề với X (tương ứng Y, Z, T, U).
Khi đó số cách chọn ra 4 viên gạch từ mỗi hàng, trong đó các viên ở hàng $2, 3$ tương ứng là P, Q, với $P \in \{K, H, L, M, N\}$, $Q \in \{X, Y, Z, T, U\}$ bằng pq. (Ví dụ, $P = K$, $Q = Y$, thì số cách chọn là ky.)
Dễ thấy,

$$k = u = 4, h = l = m = n = x = y = z = t = 3.$$

Vì thế số các cách chọn ra 4 viên gạch thỏa mãn bài toán bằng

$$\begin{aligned} &ky + kz + kt + ku + hz + ht + hu + lx + lt + lu + mx + my + mu + nx + ny + nz \\ =&4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + \\ &+ 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \\ =&9 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 81 + 72 + 16 = 169. \end{aligned}$$

Bài 5. (6 điểm)
Với x, y, z là các số thực, đặt

$$A(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm một không gian con V của $\mathbb{R}^3$ với $\dim(V) = 2$ thỏa mãn $A(x, y, z) = 0$ với mọi $(x, y, z) \in V$. Tìm một cơ sở của không gian V vừa tìm được.

(b) Tồn tại hay không các số nguyên x, y, z sao cho $A(x, y, z) = 24$?

Hướng dẫn giải
(a): (3 điểm) Dùng khai triển Laplace ta có

$$\begin{aligned} \det(A) &= -(x^3 + y^3 + z^3) + 3xyz, \\ &= -(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx). \end{aligned}$$

Như vậy $\det(A) = 0$ khi và chỉ khi $x+y+z = 0$ hoặc $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = 0$. Điều kiện sau tương đương $x = y = z$. Do đó không gian con cần tìm V với số chiều 2 là tập nghiệm của phương trình $x + y + z = 0$. Một cơ sở của nó là $((-1, 1, 0); (-1, 0, 1))$.

(b): (3 điểm) Giả sử $x, y, z \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $A(x, y, z) = 24$. Thế thì

$$-(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = 24.$$

Do đó một trong hai số $x+y+z$ và $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ phải chia hết cho 3. Mặt khác

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = (x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx).$$

Thế thì $x+y+z$ và $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ cùng chia hết cho 3. Lúc này tích của hai số sẽ chia hết cho 9. Tuy nhiên 24 không chia hết cho 9, nên điều này vô lý. Từ đó suy ra không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn đề bài.

ĐÁP ÁN CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: ĐẠI SỐ

1 MA TRẬN

Bài 1.1 (ĐH Công nghệ Thông tin)**.** Cho A, B là các ma trận vuông thỏa mãn $A^{2024} = B^{2023} = I$ và $AB = BA$. Chứng minh rằng $A+B+I$ khả nghịch.

Giải. Xét hệ phương trình tuyến tính $(A+B+I)X = 0$ hay $(B+I)X = -AX$. Khi đó

$$-A^2X = A(B+I)X = (AB+A)X = (BA+A)X = (B+I)AX = -(B+I)^2X$$

Tiếp tục quá trình như trên, ta có $(B+I)^kX = (-1)^kA^kX$. Vì $A^{2024} = I$ nên $(B+I)^{2024}X = X$ hay $((B+I)^{2024} - I)X = 0$. Mặt khác $(B^{2023} - I)X = 0$ (vì $B^{2023} = I$).
Xét các đa thức $p(t) = (t+1)^{2024} - 1$ và $q(t) = t^{2023} - 1$. Nghiệm của đa thức $p(t)$ có dạng $-1 + \cos\dfrac{2k\pi}{2024} + i\sin\dfrac{2k\pi}{2024}$ với $k = 0, 1, \ldots, 2023$. Nghiệm của đa thức $q(t)$ có dạng $\cos\dfrac{2m\pi}{2023} + i\sin\dfrac{2m\pi}{2023}$ với $m = 0, 1, \ldots, 2022$. Ta thấy rằng $p(t)$ và $q(t)$ không có nghiệm chung. Như vậy $p(t)$ và $q(t)$ là 2 đa thức nguyên tố cùng nhau. Khi đó tồn tại các đa thức $r(t), s(t)$ sao cho

$$r(t)p(t) + s(t)q(t) = 1.$$

Khi đó $X = (r(B)p(B) + s(B)q(B))X = r(B)(p(B)X) + s(B)(q(B)X) = 0$. Như vậy hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $(A+B+I)X = 0$ chỉ có nghiệm tầm thường. Do đó $A+B+I$ khả nghịch.

Bài 1.2 (ĐH Công nghệ Thông tin)**.** Cho $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ và đặt các ma trận khối

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}; N = \begin{bmatrix} A+B & 0_n \\ 0_n & A-B \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}; Q = \begin{bmatrix} A+iB & 0_n \\ 0_n & A-iB \end{bmatrix}$$

với $i^2 = -1$. Chứng minh rằng M đồng dạng với N và P đồng dạng với Q.

Chứng minh. Ta cần tìm các ma trận S, T sao cho

$$M = S^{-1}NS, P = T^{-1}QT$$

Ta chọn các ma trận

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \text{ và } T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ -iI_n & -I_n \end{bmatrix}.$$ □

Bài 1.3 (ĐH Công nghệ Thông tin)**.** Tìm tất cả các số thực a, b thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Chứng minh. Ta thấy $a = b = 0$ không thỏa mãn bài toán.
Giả sử $a^2 + b^2 \neq 0$, nghĩa là a, b không đồng thời bằng 0. Khi đó

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2}\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

và $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^4 = (a^2 + b^2)^2\begin{bmatrix} \cos 4t & -\sin 4t \\ \sin 4t & \cos 4t \end{bmatrix}$. Suy ra $a^2 + b^2 = \sqrt{2}$ và dẫn đến

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \cos 4t = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có phương trình

$$2(\sqrt{2}a^2 - 1)^2 - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

có nghiệm a, b thỏa mãn

$$a^2 = \frac{2\sqrt{2} + (1 + \sqrt{3})}{4}; b^2 = \frac{2\sqrt{2} - (1 + \sqrt{3})}{4}$$

hoặc

$$a^2 = \frac{2\sqrt{2} - (1 + \sqrt{3})}{4}; b^2 = \frac{2\sqrt{2} + (1 + \sqrt{3})}{4}.$$ □

Bài 1.4 (ĐH Giao thông Vận tải)**.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Tính A^{2024}.

Chứng minh. Đặt $A = 3I + M$ với ma trận M là $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Tính toán trực tiếp ta thu được $M^2 = 0$. Do đó

$$\begin{aligned} A^{2024} &= (3I + M)^{2024} = 3^{2024}I + 3^{2023}2024M = 3^{2023}(3I + 2024M) \\ &= 3^{2023} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2024 & -2024 \\ 0 & -2021 & 0 & -2024 \\ 0 & 2024 & 3 & 2024 \\ 0 & 2024 & 0 & 2027 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Bài 1.5 (ĐH Đồng Tháp)**.** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Chứng minh. Ta có

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Bài 1.6 (ĐH Tân Trào)**.** Tính tổng S các phần tử trên đường chéo chính của ma trận A^n, trong đó $1 \leq n \in \mathbb{N}$ và

$$A = \begin{bmatrix} 44 & -25 & 10 \\ 25 & -11 & 15 \\ 30 & -45 & 44 \end{bmatrix}.$$

Chứng minh. Ta có $A = 24I + 5B, B = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix} \to A^n = (24I + 5B)^n$.

$B^3 = B^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ Dễ thấy, $B^n = B^2$ với mọi $n \geq 2$ (Chứng minh bằng quy nạp theo $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$).

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (24I)^{n-k}(5B)^k = 24^n I + n24^{n-1}5B + B^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 24^{n-k}5^k \\ &= 24^n I + 5n24^{n-1}B + B^2 \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 24^{n-k}5^k - 24^n - 5n24^{n-1} \right] \\ &= 24^n I + 5n24^{n-1}B + (29^n - 24^n - 5n24^{n-1})B^2. \end{aligned}$$

Tổng các phần tử trên đường chéo chính của B, B^2 đều có giá trị là 1. Do đó $S = 29^n + 2 \times 24^n$. □

2 ĐỊNH THỨC

Bài 2.1 (ĐH Mỏ-Địa chất)**.** Tính định thức cấp 2022 có phần tử tổng quát $a_{ij}\,(i, j = 1, 2, \dots 2022)$ là số lượng các ước của ước chung lớn nhất của hai số i, j.

Chứng minh. Giả sử $B = (b_{ij})$, trong đó b_{ij} bằng 1 nếu j là nhân tử của i và bằng 0 trong các trường hợp còn lại. Điều đó có nghĩa là ma trận này là ma trận tam giác với đường chéo chứa các số 1. Khi đó, ma trận $A = (a_{ij})$ sẽ bằng $A = BB^T$, trong đó B^T là ma trận chuyển. Từ đó suy ra $\det A = (\det B)(\det B^T) = (\det B)^2 = 1$. □

Bài 2.2 (ĐH Đồng Tháp)**.** Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1 và $a_0, a_1, \dots, a_n$ là các số thực khác không. Chứng minh rằng

$$a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0}}}} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

với

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & -1 & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

Chứng minh. Khai triển định thức theo dòng cuối để được $\Delta_n = a\Delta_{n-1} + \Delta_{n-2}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 2.3 (ĐH Tân Trào)**.** Tính giá trị định thức

$$D = \begin{vmatrix} 2024 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2023 & 2024 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2022 & 2024 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2024 & 2023 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2024 \end{vmatrix}.$$

Chứng minh. Đặt $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$. Ta có

$$D_n(x) = (x+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & x & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix} = (x+n-1)\Lambda.$$

Thực hiện các biến đổi sơ cấp trên dòng và cột của D, ta có

$$\Lambda = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & x-1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-3 & x-1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-1 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x-1 \end{vmatrix}_{n-1} = D_{n-1}(x-1).$$

Suy ra,

$$D_n = (x+n-1)D_{n-1}(x-1) = (x+n-1)(x+n-3)D_{n-2}(x-2).$$

Do đó, khi $n = 2k$, thì

$$D_{2k} = (x^2-1)(x^2-9)\cdots[x^2-(2k-1)^2].$$

Vậy, với $n = x = 2024$ ta nhận được $D = (2024^2-1)(2024^2-3^2)...(2024^2-2023^2)$.

□

Bài 2.4 (ĐH Vinh)**.** Cho ma trận A vuông cấp 2024 có các phần tử trên đường chéo chính đều là 2024, các phần tử còn lại là 2023 hoặc -2023. Chứng minh rằng ma trận A khả nghịch.

Chứng minh. Từ định nghĩa định thức ta suy ra ma trận vuông có tất cả các phần tử đều là số nguyên thì định thức của ma trận đó cũng là số nguyên. Theo tính chất đồng dư, ta có $\det A \equiv \det B \pmod 2$, trong đó

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & 0 \end{pmatrix}_{2024\times 2024}.$$

Ta kiểm tra được rằng

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2023 & 2022 & ... & 2022 \\ 2022 & 2023 & ... & 2022 \\ ... & ... & ... & ... \\ 2022 & 2022 & ... & 2023 \end{pmatrix}_{2024\times 2024}.$$

Ta có $\det(B^2) \equiv \det(I_{2024}) = 1 \pmod 2$, trong đó I_{2024} ký hiệu là ma trận đơn vị cấp 2024. Hơn nữa, $\det(B^2) = (\det B)^2$ nên ta suy ra $\det B$ là một số nguyên lẻ. Điều này kéo theo $\det A$ cũng là một số nguyên lẻ. Do đó, $\det A \neq 0$, nghĩa là A là ma trận khả nghịch. □

Bài 2.5 (ĐH Hải Phòng)**.** Biện luận hạng của ma trận sau theo x:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x+1 & x+2 & 0 \\ x+3 & 1 & 0 & x+2 \\ x+2 & 0 & 1 & x+1 \\ 0 & x+2 & x+3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Chứng minh. Ta có $\det A = -4x^2 - 16x - 12$. Khi đó

$$\operatorname{rank} A = 4 \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3, -1.$$

- Với $x = -3$ ta có

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank} A = 3.$$

- Với $x = -1$ ta có

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank} A = 3.$$

Vậy

$$\operatorname{rank} A = \begin{cases} 4, & \text{khi } x \neq -3, -1 \\ 3, & \text{khi } x = -3, -1. \end{cases}$$

□

Bài 2.6 (ĐH Trà Vinh)**.** Cho $A \in M_n(\mathbb{K})$. Chứng minh rằng

(a) Nếu $A^{-1} = A$ thì $|\det(I - A)|(|\det(I - A)| - 2^n) = 0$.

(b) Nếu $A^{-1} = 4A$ thì $|\det(A^{2k+1} - A)| = \left(\dfrac{4^k - 1}{2^{2k+1}}\right)^n$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh. (a) Ta có $A^{-1} = A \Rightarrow A^2 = I$. Từ đó

$$(I - A)^2 = A^2 - 2A + I = 2(I - A),$$

dẫn đến $|\det(I - A)|^2 = |\det(2(I - A))| = 2^n|\det(I - A)|$. Từ đây có điều phải chứng minh.

(b) Ta có $A^{2k+1} - A = A(A^{2k} - I)$ nên

$$|\det(A^{2k+1} - A)| = |\det(A)||\det(A^{2k} - I)|.$$

Vì $A^{-1} = 4A$ nên $I = 4A^2$, dẫn đến

$$A^{2k} - I = \left(\frac{1 - 4^k}{4^k}\right) I.$$

Do đó

$$|\det(A^{2k} - I)| = \left(\frac{4^k - 1}{4^k}\right)^n.$$

Mặt khác, vì $A^2 = 4I$ nên

$$|\det(A)| = \frac{1}{2^n}.$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh.

□

Bài 2.7 (ĐH Trà Vinh)**.** Giả sử có các số tự nhiên mà mỗi số gồm ba chữ số dạng $a_1a_2a_3$, $b_1b_2b_3$, $c_1c_2c_3$ đều chia hết cho 13. Chứng minh rằng định thức

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

chia hết cho 13.

Chứng minh. Đặt $a_1a_2a_3 = 13m$, $b_1b_2b_3 = 13n$, $c_1c_2c_3 = 13p$. Ta có

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 100a_1 + 10a_2 + a_3 \\ b_1 & b_2 & 100b_1 + 10b_2 + b_3 \\ c_1 & c_2 & 100c_1 + 10c_2 + c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 13m \\ b_1 & b_2 & 13n \\ c_1 & c_2 & 13p \end{vmatrix} \\ &= 13 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & m \\ b_1 & b_2 & n \\ c_1 & c_2 & p \end{vmatrix} \end{aligned}$$

chia hết cho 13. □

3 HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 3.1 (Đại học Giao thông Vận tải)**.** Một cửa hàng bán ba loại sản phẩm A, B, C với giá của mỗi sản phẩm là cố định. Có 4 khách hàng đến mua hàng. Số lượng sản phẩm A, B, C mà người thứ hai đã mua tương ứng bằng 1,5 lần, 0,75 lần và 2 lần số sản phẩm người thứ nhất đã mua. Người thứ ba mua một nửa số sản phẩm A mà người thứ nhất đã mua, mua gấp 3 lần số sản phẩm B mà người thứ 2 đã mua và mua số sản phẩm C bằng đúng số lượng sản phẩm C của hai người mua trước cộng lại. Người thứ tư mua 15 sản phẩm A, 30 sản phẩm B và 10 sản phẩm C. Tổng số sản phẩm người thứ nhất mua là 40 và phải trả một số tiền ít hơn người thứ hai 420.000 đồng và cũng ít hơn người thứ ba 1.500.000 đồng. Người thứ tư phải trả số tiền nhiều hơn người thứ hai là 660.000 đồng. Tổng số sản phẩm người thứ 2 mua là 55 và tổng số sản phẩm người thứ 3 mua là 61. Tính số tiền người thứ nhất phải trả khi mua hàng.

Chứng minh. Ký hiệu x_1, x_2, x_3 tương ứng là số sản phẩm A, B, C mà người thứ nhất đã mua. Số sản phẩm A, B, C mà người thứ hai đã mua tương ứng là $\frac{3}{2}x_1, \frac{3}{4}x_2, 2x_3$. Tiếp theo số sản phẩm A, B, C mà người thứ ba đã mua tương ứng là $\frac{1}{2}x_1, \frac{9}{4}x_2, 3x_3$. Từ số liệu về tổng sản phẩm mà người thứ nhất, thứ hai và thứ ba đã mua ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 40 \\ \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 + 2x_3 & = & 55 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{9}{4}x_2 + 3x_3 & = & 61 \end{cases}$$

Giải hệ trên theo phương pháp khử Gauss ta thu được $x_1 = 20, x_2 = 12, x_3 = 8$.

Ký hiệu y_1, y_2, y_3 là tương ứng là giá bán của các mặt hàng A, B, C. So sánh sự khác nhau về số lượng từng loại sản phẩm được mua của 4 người ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 10y_1 - 3y_2 + 8y_3 & = & 420.000 \\ -10y_1 + 15y_2 + 16y_3 & = & 1.500.000 \\ -15y_1 + 21y_2 - 6y_3 & = & 660.000 \end{cases}$$

Giải hệ trên theo phương pháp khử Gauss ta thu được $y_1 = 20.000, y_2 = 60.000, y_3 = 50.000$. Do đó ta tính được số tiền người thứ nhất phải trả khi mua hàng là 1.520.000 đồng. □

Bài 3.2 (Đại học Đồng Tháp)**.** Một công ty kinh doanh cây cảnh ở Làng hoa Sa đéc tổng kết hoạt động bốn tháng đầu năm như sau: Trong mỗi tháng công ty trồng thêm 10% tổng số cây xanh hiện có trong tháng trước, đồng thời bán ra được một số cây xanh. Cụ thể trong tháng thứ nhất bán được 100 cây, tháng thứ hai bán được 200 cây, tháng thứ ba bán được 90 cây, tháng cuối cùng bán được 40 cây. Sau bốn tháng, tổng số cây hiện tại trong công ty đã giảm 50 cây so với trước. Hỏi hiện nay công ty có bao nhiêu cây xanh?

Chứng minh. Gọi y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 lần lượt là số cây ban đầu, sau tháng thứ nhất, thứ hai, thứ ba và thứ tư. Ta có hệ

$$\begin{pmatrix} -11 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 10 \\ 10 & 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1000 \\ -2000 \\ -900 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Giải hệ ta được $y_0 = y_1 = 1000, y_2 = y_3 = 900$. Cuối cùng $y_4 = 950$. □

4 KHÔNG GIAN VÉCTƠ

Bài 4.1 (Đại học Giao thông Vận tải)**.** Cho M, N, P là ba không gian con phân biệt của không gian tuyến tính $\mathbb{R}^{2024}$ với

$$\dim M = \dim N = \dim P = 2023.$$

(a) Chứng minh rằng $\dim(M \cap N) = 2022$.

(b) Chứng minh rằng nếu $(M \cap N) \neq (N \cap P)$ thì $\dim(M \cap N \cap P) = 2021$.

Chứng minh. (a) Do $M \neq N$ và $N \subset (M + N)$ nên $M \neq (M + N)$. Kết hợp $M \subset (M+N)$ và $M \neq (M+N)$ ta suy ra $\dim(M+N) > \dim M = 2023$. Mặt khác $(M + N) \subset \mathbb{R}^{2024}$ nên $\dim(M + N) \leqslant 2024$. Kết hợp các phân tích này ta suy ra $\dim(M + N) = 2024$. Sử dụng đẳng thức

$$\dim M + \dim N = \dim(M + N) + \dim(M \cap N)$$

ta suy ra $\dim(M \cap N) = 2022$.

(b) Ta cần chỉ ra $(M \cap N) \not\subset P$. Thực vậy, nếu $(M \cap N) \subset P$ thì kết hợp với $(M \cap N) \subset N$ ta suy ra $(M \cap N) \subset (N \cap P)$. Theo câu a, $(M \cap N)$ là một không gian con 2022 chiều của $\mathbb{R}^{2024}$ và chứng minh tương tự ta cũng có $(N \cap P)$ là một không gian con 2022 chiều của $\mathbb{R}^{2024}$. Như vậy từ bao hàm thức $(M \cap N) \subset (N \cap P)$ ta suy ra $(M \cap N) = (N \cap P)$ nhưng điều này lại trái với giả thiết. Như vậy, ta phải có $(M \cap N) \not\subset P$ như đã nhắc đến ở trên.

Sử dụng $(M \cap N) \not\subset P$ và phân tích tương tự như câu a, ta suy ra được $\dim((M \cap N) + P) = 2024$. Như vậy từ đẳng thức

$$\dim(M \cap N) + \dim P = \dim((M \cap N) + P) + \dim(M \cap N \cap P)$$

ta thu được $\dim(M \cap N \cap P) = 2021$. □

Bài 4.2 (ĐH Mỏ-Địa chất)**.** Cho các véc tơ trên mặt phẳng u, w, z có độ dài bằng 1. Chứng minh rằng có thể chọn các dấu $+, -$ sao cho $|\pm u \pm w \pm z| \leq 1$.

Chứng minh. Đặt các véc tơ có gốc tại tâm O. Nếu các điểm cuối của các véc tơ không tạo thành một tam giác nhọn thì tất cả các mút (điểm cuối của véc tơ) này đều nằm trên nửa đường tròn tâm O bán kính bằng 1. Lấy đối xứng một véc tơ (giả sử lấy véc tơ ở giữa). Khi đó các điểm cuối của hai véc tơ cũ và điểm cuối của véc tơ đối xứng ảnh tạo thành một tam giác nhọn. Giả sử các véc tơ mới là (x, y, z). Trong đó có hai véc tơ cũ từ bộ (u, w, z) – các véc tơ này lấy dấu dương, và một véc tơ lấy đối xứng – véc tơ này lấy dấu âm. Giả sử $h = x + y + z$. Ta đi tìm các tích vô hướng của các cặp véc tơ sau:

$$< h - x, y - z >=< y + z, y - z >= |y|^2 - |z|^2 = 0,$$
$$< h - y, x - z >=< x + z, x - z >= |x|^2 - |z|^2 = 0,$$
$$< h - z, y - x >=< y + x, y - x >= |y|^2 - |x|^2 = 0.$$

Điều đó có nghĩa h chính là véc tơ có gốc ở gốc tọa độ và đỉnh chính là giao điểm của ba đường cao của tam giác, Tức là h nằm trong đường tròn đơn vị với bán kính bằng 1. Đây chính là điều phải chứng minh. □

Bài 4.3 (ĐH Hải Phòng)**.** Kí hiệu V là không gian véctơ các đa thức với hệ số thực gồm đa thức không và các đa thức có bậc không lớn hơn 2. Cho ánh xạ tuyến tính $\varphi : V \to V$ xác định bởi:

$$p(x) \mapsto \varphi(p(x)) = (x - \lambda)(x + 1)p'(x) - 2xp(x),$$

với $\lambda \in \mathbb{R}$ là tham số. Ký hiệu $p'(x)$ là đạo hàm của đa thức $p(x)$.

(a) Với $\lambda = 0$, hãy:

- Tìm số chiều và cơ sở của một không gian hạt nhân $\operatorname{Ker}\varphi$;
- Tìm số chiều và cơ sở của một không gian ảnh $\operatorname{Im}\varphi$;

(b) Với giá trị nào của λ thì φ là một đẳng cấu?

Chứng minh. (a) Với $\lambda = 0$, ta có

$$\varphi(p(x)) = x(x + 1)p'(x) - 2xp(x).$$

Xét đa thức $p(x) = ax^2 + bx + c \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, ta có $\varphi(p(x)) = 0$ hay

$$x(x + 1)(2ax + b) - 2x(ax^2 + bx + c) = 0 \Leftrightarrow (2a - b)x^2 + (b - 2c)x = 0.$$

Suy ra

$$\begin{cases} 2a - b = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = a \end{cases}.$$

Vậy $p(x) = a(x^2 + 2x + 1)$. Ta có $\{x^2 + 2x + 1\}$ là một cơ sở của $\operatorname{Ker}\varphi$ và $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 1$.

Xét đa thức $q(x) = \varphi(p(x)) \in \operatorname{Ker}\varphi$, ta có

$$q(x) = 2ax^2 + b(-x^2 + x) - 2cx.$$

Vậy $\{x^2, -x^2 + x, x\}$ là một hệ sinh của $\operatorname{Im}\varphi$. Dễ thấy $\{x^2, x\}$ là một cơ sở của $\operatorname{Im}\varphi$, do đó $\dim \operatorname{Im}\varphi = 2$.

(b) Xét đa thức $p(x) = ax^2 + bx + c \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, suy ra $\varphi(p(x)) = 0$ hay

$$q(x) = [2(1-\lambda)a - b]x^2 + [-2\lambda a + (1-\lambda)b - 2c]x - \lambda b = 0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra

$$\begin{cases} 2(1-\lambda)a - b = 0 \\ (1-\lambda)b - 2\lambda a - 2c = 0 \\ \lambda b = 0. \end{cases}$$

Vì φ là tự đồng cấu của không gian véctơ hữu hạn chiều nên nó đẳng cấu khi và chỉ khi nó là đơn cấu, nghĩa là $\operatorname{Ker}\varphi = 0$. Điều đó có nghĩa là hệ phương trình trên chỉ có nghiệm tầm thường $a = b = c = 0$, hay định thức của ma trận hệ số khác 0:

$$\begin{vmatrix} 2(1-\lambda) & -1 & 0 \\ -2\lambda & 1-\lambda & -2 \\ 0 & \lambda & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -4\lambda^2 + 4\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0, 1.$$

□

Bài 4.4 (ĐH Trà Vinh)**.** Gọi $C[a,b]$ là tập hợp tất cả các hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$. Định nghĩa các phép toán trên $C[a,b]$ như sau

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t),$$
$$(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$$

với mọi $t \in [a,b]$. Khi đó $C[a,b]$ là một không gian véctơ trên $\mathbb{R}$.

(a) Chứng minh rằng tập các hàm khả vi trên $[a,b]$ thỏa mãn $f' + 4f = 0$ tạo thành một không gian véctơ con của $C[a,b]$.

(b) Tìm một cơ sở và số chiều của không gian này.

Chứng minh. (a) Ký hiệu W là tập đang xét. Rõ ràng $0 \in W$ nên $W \neq \emptyset$. Với $f, g \in W$ ta có

$$(f+g)' + 4(f+g) = (f' + 4f) + (g' + 4g) = 0$$
$$(\alpha f)' + 4(\alpha f) = \alpha(f' + 4f) = 0.$$

Do đó $f + g, \alpha f \in W$. Vậy W là một không gian véctơ con của W.

(b) Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $f' + 4f = 0$ là

$$f(x) = ce^{-4x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Do đó $\{e^{-4x}\}$ là một cơ sở của W và $\dim W = 1$.

□

5 GIÁ TRỊ RIÊNG

Bài 5.1 (ĐH Tân Trào)**.** Hãy tìm một ma trận Y và một ma trận đường chéo D, sao cho $XY = YD$, trong đó

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix};\ D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},\ abc \neq 0, Y \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Chứng minh. Dễ thấy, X có các giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Với $\lambda_1 = 1$, có 1 véctơ riêng là $\alpha_1 = (1; -5; 11)$. Với $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, có một véc tơ riêng, $\alpha_2 = (0; 0; 1)$. Do đó, X không chéo hóa được.
Vận dụng tính chéo hóa của một ma trận, ta chọn Y và D có dạng

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ -5 & 0 & y \\ 11 & 1 & z \end{bmatrix}$$

Theo giả thiết, ta có $XY = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ -5 & 0 & 5x + 2y \\ 11 & 1 & 4x + 3y + 2z \end{bmatrix}, YD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & xc \\ -5 & 0 & yc \\ 11 & 1 & zc \end{bmatrix}.$
Suy ra

$$\begin{cases} x + + = xc \\ 5x + 2y + = yc \\ 4x + 3y + 2z = zc \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ x = 1 \\ y = 5 \\ z = 11 \end{cases} \rightarrow D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -5 \\ 11 & 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

Thử lại $XY = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -5 \\ 11 & 2 & 11 \end{bmatrix} = YD.$

$\square$

Bài 5.2 (ĐH Vinh)**.** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -9 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm tất cả các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận A.

(b) Xác định tất cả các phần tử của ma trận A^{2024}.

(c) Tìm tất cả các phần tử của ma trận e^A, trong đó ký hiệu $e^A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$ (ở đây ma trận giới hạn có phần tử là giới hạn của phần tử tương ứng của ma trận tổng $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$).

Chứng minh. a) Ta có

$$detA = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & -9 \\ 1 & 4-\lambda & -3 \\ 1 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(4-\lambda).$$

Vậy ma trận A có hai giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 4$.

- Ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$, gọi $X = (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$ là vectơ riêng tương ứng. Khi đó, $AX = 2X$. Điều này trở thành:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0. \end{cases}$$

  Hệ tương đương với $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$. Từ đó suy ra tất cả các vectơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ là $(-2\alpha + 3\beta, \alpha, \beta)$ với mọi $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

- Ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 4$, gọi $X = (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$ là vectơ riêng tương ứng. Khi đó, $AX = 4X$. Điều này trở thành:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 0, \\ x_1 - 3x_3 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 0. \end{cases}$$

  Giải hệ này ta thu được tất cả các vectơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 4$ là $(3\alpha, \alpha, \alpha)$ với mọi $\alpha \neq 0$.

b) Với giá trị riêng $\lambda = 2$, chọn 02 vector riêng độc lập tuyến tính $v_1 = (-2, 1, 0)$ và $v_2 = (3, 0, 1)$. Với giá trị riêng $\lambda = 4$, chọn vector riêng $v_3 = (3, 1, 1)$. Ma trận A chéo hóa được $A = P.B.P^{-1}$, trong đó

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 3/2 \\ -1/2 & -1 & 5/2 \\ 1/2 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$A^n = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 3/2 \\ -1/2 & -1 & 5/2 \\ 1/2 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6.4^{n-1} - 2^{n-1} & 3(4^n - 2^n) & 9(2^{n-1} - 2.4^{n-1}) \\ 2.4^{n-1} - 2^{n-1} & 4^n & 3(2^{n-1} - 2.4^{n-1}) \\ 2.4^{n-1} - 2^{n-1} & 4^n - 2^n & 5.2^{n-1} - 6.4^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Thay $n = 2024$ ta thu được

$$A^{2024} = \begin{pmatrix} 6.4^{2023} - 2^{2023} & 3(4^{2024} - 2^{2024}) & 9(2^{2023} - 2.4^{2023}) \\ 2.4^{2023} - 2^{2023} & 4^{2024} & 3(2^{2023} - 2.4^{2023}) \\ 2.4^{2023} - 2^{2023} & 4^{2024} - 2^{2024} & 5.2^{2023} - 6.4^{2023} \end{pmatrix}.$$

c) Sử dụng công thức khai triển Taylor: $e^x = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$ và

$$A^k = \begin{pmatrix} \dfrac{3.4^k - 2^k}{2} & 3(4^k - 2^k) & \dfrac{9(2^k - 4^k)}{2} \\ \dfrac{4^k - 2^k}{2} & 4^k & \dfrac{3(2^k - 4^k)}{2} \\ \dfrac{4^k - 2^k}{2} & 4^k - 2^k & \dfrac{5.2^k - 3.4^k}{2} \end{pmatrix},$$

ta suy ra

$$e^A = \begin{pmatrix} \dfrac{3.e^4 - e^2}{2} & 3(e^4 - e^2) & \dfrac{9(e^2 - e^4)}{2} \\ \dfrac{e^4 - e^2}{2} & e^4 & \dfrac{3(e^2 - e^4)}{2} \\ \dfrac{e^4 - e^2}{2} & e^4 - e^2 & \dfrac{5.e^2 - 3.e^4}{2} \end{pmatrix}.$$

□

Bài 5.3 (ĐH Công nghệ Thông tin)**.** Cho ánh xạ $\varphi : P_2[x] \to P_2[x]$ xác định như sau: với mọi $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, ta có

$$\varphi(p(x)) = (7a_0 - 12a_1 - 2a_2) + (3a_0 - 4a_1)x - (2a_0 + 2a_2)x^2$$

(a) Chứng tỏ rằng φ là một toán tử tuyến tính; xác định ma trận A tương ứng của φ đối với cơ sở $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$.

(b) Tìm giá trị riêng, véc tơ riêng của A và xét xem A có chéo hóa được hay không? Nếu được, hãy chéo hóa A và tìm ma trận chuyển T cùng với ma trận T^{-1} tương ứng, sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận đường chéo.

(c) Cho $p(x) = -1 - 2x + 3x^2$. Hãy xác định $\varphi^{2024}(p(x))$.

Chứng minh. (a) Ta kiểm tra 2 tính chất của φ là:

$$\varphi(p(x) + q(x)) = \varphi(p(x)) + \varphi(q(x))$$
$$\varphi(kp(x)) = k\varphi(p(x))$$

trong đó $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ và $k \in \mathbb{R}$. Ma trận của φ đối với cơ sở $\{1, x, x^2\}$ là

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(b) Đa thức đặc trưng của $A : P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 2)$. Các trị riêng của A là $0, -1, 2$ đều là các trị riêng đơn (bội 1) nên A chéo hóa được.

- Các véc tơ riêng của A tương ứng với $\lambda_1 = 0$ là $[4a\ 3a\ -4a]^T$ với $a \neq 0$.
- Các véc tơ riêng của A tương ứng với $\lambda_2 = -1$ là $[a\ a\ -2a]^T$ với $a \neq 0$.
- Các véc tơ riêng của A tương ứng với $\lambda_3 = 2$ là $[2a\ a\ -a]^T$ với $a \neq 0$

Ma trận $T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ và $T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ và $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) Với $p(x) = -1 - 2x + 3x^2$ và tọa độ của $p(x)$ đối với cơ sở $B = \{1, x, x^2\}$ là $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Khi đó

$$[\varphi^{2024}(p(x))]_B = A^{2024} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 6.2^{2024} \\ 1 + 3.2^{2024} \\ -2 - 3.2^{2024} \end{bmatrix}$$

Như vậy $\varphi^{2024}(p(x)) = (1 + 6.2^{2024}) + (1 + 3.2^{2024})x + (-2 - 3.2^{2024})x^2$. $\square$

Bài 5.4 (ĐH Ngoại Thương)**.** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của ma trận A.

(b) Tìm các giá trị riêng của ma trận $20A^5 - 2A^2 + 4I$.

Chứng minh. Các giá trị riêng của A là $1; -2; 4$, tìm được qua đa thức đặc trưng. Gọi ba véctơ riêng ứng với ba giá trị riêng $1; -2; 4$ là a, b, c. Ta có

$$\begin{aligned} Ba &= (20.1^5 - 2.1^2 + 4)a = 22a, \\ Bb &= (20.(-2)^5 - 2.(-2)^2 + 4)b = -644b, \\ Bc &= (20.4^5 - 2.4^2 + 4)c = 20452c. \end{aligned}$$

Do đó các giá trị riêng của B là $22, -644, 20452$. □

Bài 5.5 (ĐH Trà Vinh)**.** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ma trận A có chéo hóa được trên $\mathbb{R}$ hay không? Nếu chéo hóa được thì chỉ ra ma trận khả nghịch P thỏa mãn $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo rồi tính A^{2024} bằng hai phép toán nhân ma trận.

Chứng minh. Đa thức đặc trưng của A là $x(x+1)(x-2)$ có ba nghiệm phân biệt nên A chéo hóa được. Các giá trị riêng là $0, -1, 2$ và các véctơ riêng tương ứng là $(4, 3, -4)^T$, $(1, 1, -2)^T$, $(2, 1, -1)^T$. Do đó

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$A^{2024} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{2024} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + 2^{2026} & -4 - 2^{2027} & -2 - 2^{2025} \\ 1 + 2^{2025} & -4 - 2^{2026} & -2 - 2^{2024} \\ -2 - 2^{2025} & 8 + 2^{2026} & 4 + 2^{2024} \end{pmatrix}.$$

□

6 ĐA THỨC

Bài 6.1 (ĐH Giao thông Vận tải)**.** Cho $P(x)$ là một đa thức bậc 2022 với hệ số thực. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất đa thức $Q(x)$ có hệ số thực và thỏa mãn 3 điều kiện sau:

(i) $Q(x)$ là đa thức bậc 2024.

(ii) $P(x) = Q(x+1) + Q(x-1) - 2Q(x) + 7Q"(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(iii) $Q(x)$ nhận số phức $x = 2 + \sqrt{7}\, i$ là một nghiệm.

Chứng minh. Ký hiệu U là không gian tuyến tính bao gồm tất cả các đa thức có hệ số thực và có bậc không vượt quá 2024. Ký hiệu V là không gian tuyến tính bao gồm tất cả các đa thức có hệ số thực và có bậc không vượt quá 2022. Với mỗi đa thức $Q(x)$ với hệ số thực, ta đặt

$$\Phi[Q(x)] = Q(x+1) + Q(x-1) - 2Q(x) + 7Q"(x).$$

Nếu $Q(x) = ax + b$ là đa thức có bậc không vượt quá 1 thì tính toán trực tiếp ta thu được $\Phi[Q(x)] = 0$. Nếu $Q(x)$ là một đa thức bậc n nào đấy với $n \geqslant 2$ và có số hạng dẫn là $a_n x^n$ thì $\Phi[Q(x)]$ là một đa thức có số hạng dẫn là $8n(n-1)a_n x^{n-2}$ nên $\Phi[Q(x)] \neq 0$ và có bậc là $n-2$. Từ đây ta suy ra rằng, tương ứng $Q(x) \mapsto \Phi[Q(x)]$ xác định một ánh xạ $\Phi : U \to V$ từ không gian tuyến tính U đến không gian tuyến tính V. Dễ dàng chỉ ra được Φ là một ánh xạ tuyến tính và theo phân tích trên

$$\operatorname{Ker}\Phi = \{ax + b \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Ta nhận được $\dim(\operatorname{Ker}\Phi) = 2$. Sử dụng $\dim(Im\Phi) = \dim U - \dim(\operatorname{Ker}\Phi) = 2025 - 2 = 2023 = \dim V$ ta suy ra được $Im\Phi = V$ và Φ là một toàn cấu. Vậy với đa thức $P(x)$ cho trước có bậc 2022 là phần tử của V, luôn tồn tại đa thức $Q_0(x)$ có bậc 2024 (là phần tử của U) sao cho $\Phi[Q_0(x)] = P(x)$. Nếu $Q(x)$ là một đa thức nào đấy mà $\Phi[Q(x)] = P(x)$ thì $Q(x)$ cũng phải có bậc là 2024 và $Q(x) \in U$. Khi đó, $\Phi[Q - Q_0] = P - P = 0$ nên $Q - Q_0 \in \operatorname{Ker}\Phi$. Như vậy, tập hợp các đa thức Q(x) thỏa mãn yêu cầu $\Phi[Q(x)] = P(x)$ là các đa thức có dạng

$$Q(x) = Q_0(x) + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Đa thức hệ số thực $Q(x)$ nhận số phức $x = 2 + \sqrt{7}\, i$ là một nghiệm thì nó cũng nhận $x = 2 - \sqrt{7}\, i$ là một nghiệm. Điều này tương đương với $Q(x)$ phải chia hết cho đa thức bậc 2

$$T(x) = (x - 2 - \sqrt{7}\, i)(x - 2 + \sqrt{7}\, i) = x^2 - 4x + 11.$$

Dễ dàng chỉ ra được trong tập hợp (1) ở trên chỉ có duy nhất một cặp hệ số thực a, b để $Q(x)$ là bội của đa thức bậc hai $T(x) = x^2 - 4x + 11$. Như vậy, ta đã chỉ ra được điều phải chứng minh. $\square$

Bài 6.2 (ĐH Vinh)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x).P(2024x^4) = P(x^{2024} + 8x^4) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh. Ta có

$$P(x).P(2024x^4) = P(x^{2024} + 8x^4) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

- Đầu tiên, ta xét trường hợp $P(x)$ là đa thức hằng. Thay $P(x) = c$ ta suy ra $c = 0$ hoặc $c = 1$.

- Tiếp theo, ta xét trường hợp $deg(P(x)) \geq 1$. Thay $x = 0$, ta suy ra rằng $P^2(0) = P(0)$. Điều này dẫn tới $P(0) = 0$ hoặc $P(0) = 1$.

Nếu $P(0) = 0$ thì $P(x) = x^s Q(x)$ với $s \geq 1$ và $Q(0) \neq 0$. Thay vào (1) ta có

$$x^s Q(x) 2024^s x^{4s} Q(2024x^4) = (x^{2024} + 8x^4)^s Q(x^{2024} + 8x^4) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Điều này tương đương với

$$x^s Q(x) 2024^s Q(2024x^4) = (x^{2020} + 8)^s Q(x^{2024} + 8x^4) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Thay $x = 0$ ta có $Q(0) = 0$: mâu thuẫn với $Q(0) \neq 0$.
Vậy

$$P(0) = 1. \tag{2}$$

Đạo hàm 2 vế (1) ta được

$$P'(x).P(2024x^4) + P(x).8096x^3.P'(2024x^4) = (2024x^{2023} + 32x^3).P'(x^{2024} + 8x^4). \tag{3}$$

Thay $x = 0$ vào đẳng thức trên ta có $P'(0).P(0) = 0$. Suy ra $P'(0) = 0$ (do (2)). Do đó $P'(x) = x^r.H(x)$ với $r \geq 1$ và $H(0) \neq 0$. Thay vào (3) ta có

$$\begin{aligned} x^r.H(x)P(2024x^4) &+ P(x).8096x^3.2024^r x^{4r}.H(2024x^4) \\ &= (2024x^{2023} + 32x^3).(x^{2024} + 8x^4)^r.H(x^{2024} + 8x^4) \end{aligned}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điều này tương đương với

$$\begin{aligned} H(x)P(2024x^4) &+ P(x).8096x^3.2024^r x^{3r}.H(2024x^4) \\ &= (2024x^{2023} + 32x^3).(x^{2023} + 8x^3)^r.H(x^{2024} + 8x^4) \end{aligned}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay $x = 0$ vào đẳng thức trên ta có $H(0).P(0) = 0$. Điều này mâu thuẫn với $H(0) \neq 0$ và $P(0) = 1$. Do vậy, không tồn tại đa thức $P(x)$ bậc lớn hơn 0 thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Vậy, tất cả đa thức cần tìm là các đa thức hằng $P(x) = 0$ và $P(x) = 1$. $\square$

Bài 6.3 (ĐH Vinh)**.** Giả sử đa thức $P(x)$ hệ số thực và không có nghiệm thực. Chứng minh rằng

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(2n)}(x)}{(2n)!}$$

cũng là một đa thức không có nghiệm thực, trong đó $P^{(k)}(x)$ ký hiệu là đạo hàm cấp k của đa thức $P(x)$.

Chứng minh. Nếu đa thức $P(x)$ bậc m thì $P^{(k)}(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và với mọi $k \geq m+1$. Suy ra $f(x)$ là tổng hữu hạn các đa thức, do đó $f(x)$ là một đa thức.
Theo công thức khai triển Taylor ta có

$$P(x+1) = P(x) + P'(x) + \frac{P''(x)}{2!} + ...$$
$$P(x-1) = P(x) - P'(x) + \frac{P''(x)}{2!} - ...$$

Cộng vế theo vế hai đẳng thức trên ta suy ra

$$\frac{1}{2}\left(P(x+1) + P(x-1)\right) = P(x) + \frac{P''(x)}{2!} + \frac{P^{(4)}(x)}{4!} + ... = f(x).$$

Vì $P(x)$ không có nghiệm thực nên nó giữ nguyên dấu trên $\mathbb{R}$. Điều này dẫn tới $P(x+1)$ và $P(x-1)$ cùng dương hoặc cùng âm với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó, $f(x) > 0$ luôn dương, hoặc luôn âm trên $\mathbb{R}$.
Từ đó, ta có điều phải chứng minh. □

Bài 6.4 (ĐH Công nghệ Thông tin)**.** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Tìm đa thức $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ có bậc nhỏ nhất thỏa mãn $p(A) = 0$.

2. Tìm phần dư khi lấy đa thức $q(x) = x^{2024}$ chia cho đa thức $p(x)$. Sau đó, tính A^{2024}.

3. Tìm cơ sở và chiều của không gian vectơ con

$$V = \{f(A) \mid f \text{ là một đa thức hệ số thực}\}$$

Chứng minh. 1. Đa thức đặc trưng của A là $p_A(\lambda) = -(\lambda-2)^3$. Vì $p_A(A) = 0$ và $p(x)$ là đa thức có bậc nhỏ nhất thỏa mãn $p(A) = 0$ nên $p(x)$ là ước của đa thức đặc trưng. Suy ra $p(x)$ có dạng $x-2, (x-2)^2$ hoặc $(x-2)^3$.

   Lần lượt thay A vào các đa thức, ta hấy $A - 2I \neq 0$ và $(A-2I)^2 = 0$. Vậy $p(x) = (x-2)^2$.

2. Thực hiện phép chia có dư, ta được $x^{2024} = (x-2)^2 m(x) + ax + b$.

   Thay $x = 2$, ta được $2^{2024} = 2a + b$.

   Lấy đạo hàm hai vế của $x^{2024} = (x-2)^2 m(x) + ax + b$ và thay 2 vào các đa thức của 2 vế ta được

$$2024.2^{2023} = a$$

   Suy ra $b = -2023.2^{2024}$. Khi đó $A^{2024} = 2^{2023}(2024A - 4046I)$.

□

Bài 6.5 (ĐH Trà Vinh)**.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_2(x) \to P_2(x)$ xác định bởi

$$\begin{aligned} f(1+x^2) &= 4 + x + 5x^2 \\ f(1+2x+3x^2) &= 10 + 13x + 23x^2 \\ f(-x+x^2) &= -1 - 2x - 3x^2 \end{aligned}$$

(a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2(x)$.

(b) Xác định m để véctơ $v = 1 + mx - 5x^2$ không thuộc $\operatorname{Im} f$.

Chứng minh. (a) Ta có

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{5}{4}(1+x^2) - \frac{1}{4}(1+2x+3x^2) - \frac{1}{2}(-x+x^2) \\ x &= \frac{-1}{4}(1+x^2) + \frac{1}{4}(1+2x+3x^2) - \frac{1}{2}(-x+x^2) \\ x^2 &= \frac{-1}{4}(1+x^2) + \frac{1}{4}(1+2x+3x^2) + \frac{1}{2}(-x+x^2). \end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 - x + 2x^2 \\ f(x) &= 2 + 4x + 6x^2 \\ f(x^2) &= 1 + 2x + 3x^2. \end{aligned}$$

Do đó ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $P_2(x)$ là

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Giả sử có $u = a + bx + cx^2$ thỏa mãn $f(u) = v$. Khi đó $f(a+bx+cx^2) = 1 + mx - 5x^2$, hay

$$a(3 - x + 2x^2) + b(2 + 4x + 6x^2) + c(1 + 2x + 3x^2) = 1 + mx - 5x^2.$$

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 1 \\ -a + 4b + 2c = m \\ 2a + 6b + 3c = -5. \end{cases}$$

Thế thì v không thuộc $\operatorname{Im} f$ khi và chỉ khi hệ phương trình trên vô nghiệm. Ta có

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & m \\ 2 & 6 & 3 & -5 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 14 & 7 & 3m+1 \\ 0 & 0 & 0 & -m-6 \end{array}\right).$$

Do đó hệ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $-m - 6 \neq 0$, tức là $m \neq -6$.

□

7 TỔ HỢP

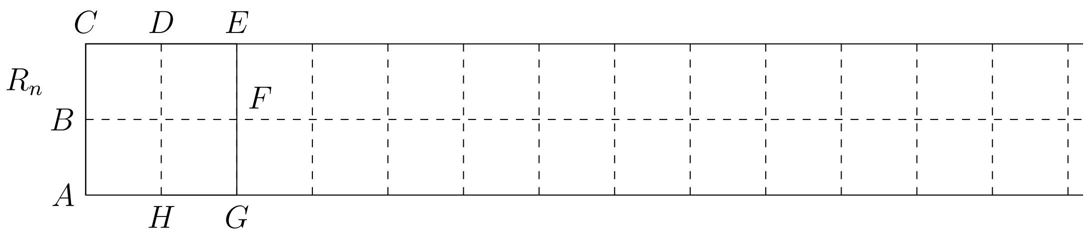
Bài 7.1 (Đại học Giao thông Vận tải)**.** Người ta cắm 30 lá cờ đỏ và 11 lá cờ xanh thành một hàng dọc. Rõ hơn, các cờ xanh được cắm ở các vị trí $1, 5, 9, \ldots, 41$ của hàng và các vị trí còn lại là cờ đỏ. Một người muốn lựa chọn 1 cờ xanh và 1 cờ đỏ đổi chỗ cho nhau sao cho sau khi đổi chỗ vẫn không có 2 cờ xanh nào được cắm cạnh nhau. Hỏi có bao nhiêu cách mà người đó có thể lựa chọn.

Chứng minh. Theo giả thiết, ban đầu các cờ đỏ được cắm từng nhóm 3 cái liên tục và các nhóm được ngăn bởi các cờ xanh. Để thuận tiện ta gọi mỗi nhóm là một khúc và các cờ xanh là điểm tiếp nối của các khúc. Ta thấy rằng lá cờ xanh ở vị trí 1 có thể đổi chỗ cho 2 lá cờ đỏ ở vị trí 2 hoặc 3 trong khúc thứ nhất. Lá cờ xanh ở vị trí 1 chỉ có thể đổi chỗ cho duy nhất một lá cờ đỏ ở giữa trong mỗi khúc mà nó không là điểm tiếp nối. Như vậy ta có tất cả 11 cách đổi chỗ lá cờ xanh ở vị trí số 1. Tương tự lá cờ xanh ở vị trí 41 cũng có 11 cách đổi chỗ. Tiếp theo ta xét các lá cờ xanh còn lại. Mỗi lá cờ xanh như thế là điểm tiếp nối của hai khúc nào đấy và nó có thể đổi chỗ cho 4 cờ đỏ trong 2 khúc này. Trong 8 khúc còn lại mà cờ xanh này không là điểm tiếp nối thì nó chỉ có thể đổi chỗ cho duy nhất lá cờ đỏ ở giữa. Như vậy mỗi lá cờ xanh ở các vị trí 5, 9, ... , 37 có 12 cách đổi chỗ. Tổng số cách đổi chỗ của các lá cờ là $2.11 + 9.12 = 130$ cách.

□

Bài 7.2 (ĐH Tân Trào)**.** Cho một hình chữ nhật (S) có kích thước $2 \times n$, $0 < n \in \mathbb{N}$. Ký hiệu R_n là số cách chia (S) thành các hình chữ nhật có kích thước 2×1, 1×2 và 2×2 và có các cạnh song song với các cạnh của hình chữ nhật (S). Hãy tính các giá trị $R_3,\ R_4$ và R_{2024}.

Chứng minh.



- Dễ dàng thấy rằng $R_1 = 1, R_2 = 3$ và $R_3 = 5, R_4 = 11$.
- Khi chọn hình chữ nhật có kích thước 2×1 để xếp vào ô đầu tiên $ACDH$, thì phần còn lại có R_{n-1} cách chia.
- Khi chọn hình chữ nhật có kích thước 1×2 để xếp vào ô đầu tiên $BCEF$ hoặc $ABFG$, thì phần còn lại có R_{n-2} cách chia.
- Khi chọn hình chữ nhật có kích thước 2×2 để xếp vào ô đầu tiên $ACEG$, thì phần còn lại cũng sẽ có R_{n-2} cách chia.
- Suy ra, theo nguyên lý cộng, số cách chia thỏa mãn yêu cầu bài ra là (công thức truy hồi) $R_n = R_{n-1} + 2R_{n-2}$, trong đó $R_1 = 1,\ R_2 = 3$.
- Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$.

Ta tìm x_1, x_2 sao cho
$$R_n = x_1\lambda_1^n + x_2\lambda_2^n. \tag{4}$$
Thay $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ vào phương trình (1), ta nhận được hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases} \to\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{3}.$$

Suy ra, $\quad R_n = \dfrac{1}{3}\left[(-1)^n + 2^{n+1}\right]$, với $0 < n \in \mathbb{N}$. □

Bài 7.3 (ĐH Vinh). (a) Có 4 cặp đôi yêu nhau tham gia chơi một trò chơi như sau: Tên của mỗi cô gái được ghi vào một tấm thẻ và bỏ vào một phong bì. 4 chàng trai mỗi người chọn một phong bì trong số 4 phong bì nói trên. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra để không có chàng trai nào chọn đúng phong bì có ghi tên người yêu của mình?

(b) Hỏi tương tự câu (a) cho trường hợp 10 cặp đôi yêu nhau tham gia trò chơi.

Chứng minh. (a) Ký hiệu 4 chàng trai là A, B, C, D và 4 cô gái tương ứng theo cặp đôi là a, b, c, d.

Chàng trai A có 3 cách chọn phong bì không ghi tên người yêu mình (là b, c, d).

Không mất tính tổng quát, xét A chọn được phong bì ghi tên cô gái b, ta viết cặp Ab. Khi đó,

- Nếu B chọn phong bì ghi tên a để được cặp Ba thì 02 cặp còn lại sẽ là Cd và Dc.
- Nếu B chọn phong bì ghi tên c để được cặp Bc thì 02 cặp còn lại sẽ là Cd và Da.
- Nếu B chọn phong bì ghi tên d để được cặp Bd thì 02 cặp còn lại sẽ là Ca và Dc.

Vậy, số kết quả có thể xảy ra để không có chàng trai nào chọn đúng phong bì ghi tên người yêu của mình là $3 \times 3 = 9$.

(b) Ta xét bài toán tổng quát cho n cặp đôi và gọi D_n là số kết quả có thể xảy ra để không có chàng trai nào chọn đúng phong bì ghi tên người yêu của mình. Dễ thấy $D_1 = 0$ và $D_2 = 1$.

Giả sử chàng trai thứ i chọn được phong bì thứ a_i ($1 \leq a_i \leq n$, $i = \overline{1, n}$, $a_i \neq i$). Ta sẽ lập công thức truy hồi của D_n:

- a_n có $n-1$ cách chọn từ $\{1, 2, ..., n-1\}$.
- Giả sử $a_n = k$ ($1 \leq k \leq n-1$):
  TH1: $a_k = n$.
  Khi đó $(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_{k+1}, ..., a_{n-1})$ chọn từ tập $\{1, 2, ..., k-1, k+1, ..., n-1\}$. Suy ra số kết quả có thể xảy ra trong trường hợp này là D_{n-2}.
  TH2: $a_k \neq n$.
  Khi đó $(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, ..., a_{n-1})$ lấy từ $\{1.2, ..., n-1\}$. Suy ra số kết quả có thể xảy ra trong trường hợp này là D_{n-1}.

Vì vậy ta có công thức:

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}).$$

Ta xác định D_{10} theo cách truy hồi:

$$\begin{aligned}
D_1 &= 0, D_2 = 1, D_3 = 2(D_1 + D_2) = 2;\\
D_4 &= 3(D_3 + D_2) = 3(2+1) = 9;\\
D_5 &= 4(D_4 + D_3) = 4(9+2) = 44;\\
D_6 &= 5(D_5 + D_4) = 5(44+9) = 265;\\
D_7 &= 6(D_6 + D_5) = 6(265+44) = 1854;\\
D_8 &= 7(D_7 + D_6) = 14833;\\
D_9 &= 8(D_8 + D_7) = 133496;\\
D_{10} &= 9(D_9 + D_8) = 1334961.
\end{aligned}$$

Vậy đáp số là 1334961. $\square$