ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Bài 1. Kí hiệu $P_n[x]$ là không gian véc tơ các đa thức với hệ số thực có bậc không vượt quá n. Cho toán tử tuyến tính $f : P_n[x] \to P_n[x]$ được xác định bởi

$$f(x^k) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k,$$

trong đó $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

a) Tìm ma trận A của f theo cơ sở $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ của $P_n[x]$.

b) Chứng minh rằng không tồn tại một cơ sở S của $P_n[x]$ để ma trận của f theo cơ sở S là một ma trận chéo.

Bài 2. Trong không gian vec tơ V, cho $v_1, v_2, \ldots, v_n$ là các vec tơ khác vec tơ 0. Giả sử $f : V \to V$ là một ánh xạ tuyến tính trên không gian vec tơ V sao cho

$$f(v_1) = v_1, f(v_i) = v_i + v_{i-1} \text{ với mọi } i = 2, 3, \ldots, n.$$

Chứng minh rằng hệ vec tơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính.

Bài 3. Cho $f : V \to V$ là một toán tử tuyến tính của không gian vec tơ n chiều V. Giả sử tồn tại các véc tơ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ khác vec tơ 0 trong V thỏa mãn

$$f(v_i) = v_i + v_{i+1} \text{ với mọi } i = 1, 2, \ldots, n-1; f(v_n) = v_n.$$

Chứng minh rằng f là một đẳng cấu tuyến tính.

Bài 4. Ký hiệu $\mathbb{R}[X]_{2023}$ là $\mathbb{R}$-không gian vectơ các đa thức một biến với bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2023. Cho f là ánh xạ đặt tương ứng mỗi đa thức với đạo hàm cấp hai của nó:

$$f : \mathbb{R}[X]_{2023} \to \mathbb{R}[X]_{2023}, f(p(X)) = p''(X).$$

Đặt $g = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{870 \text{ lần}}$ là ánh xạ hợp của 870 lần ánh xạ f.

a) Chứng minh rằng g là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}[X]_{2023}$ vào chính nó.

b) Tìm số chiều và một cơ sở của không gian ảnh $\text{Im}(g)$ và của không gian hạt nhân $\text{Ker}(g)$.

Bài 5. Ký hiệu $\mathbb{R}[x]_n$ là không gian véc tơ các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n. Cho ánh xạ tuyến tính $\Phi : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ xác định bởi

$$\Phi(x^k) = \begin{cases} -x^{k+1} & \text{nếu } 0 \le k \le n-1 \\ 1 & \text{nếu } k = n \end{cases}$$

a) Viết ma trận A của Φ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}[x]_n$.

b) Tìm Φ^{n+1}.

c) Tính $\det(A + I)$ và $\det(I - A + A^2 - \ldots + (-1)^n A^n)$.

Bài 6. Cho α là một số thực khác 0 và giả sử $F, G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là các ánh xạ tuyến tính thỏa mãn $F \circ G - G \circ F = \alpha F$. Chứng minh rằng:

a) $F^k \circ G - G \circ F^k = \alpha k F^k, \forall k \in \mathbb{N}$;

b) tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $F^k = 0$.

Bài 7. Cho A, B là hai ma trận thực vuông cấp n thỏa mãn $AB - BA = A$. Tính $\mathrm{tr}(A^{2024})$.

Bài 8. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất ma trận $C \in \mathcal{M}_n$ sao cho $f(A) = \mathrm{tr}(AC)\ \forall A \in \mathcal{M}_n$.

b) Giả sử $f(AB) = f(BA)\ \forall A \in \mathcal{M}_n$. Chứng minh rằng tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho

$$f(A) = \lambda \mathrm{tr}(A).$$

Bài 9. Kí hiệu $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận thực vuông cấp 3. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Xét phép biến đổi tuyến tính $L : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ xác định bởi $L(X) = \dfrac{1}{2}(AX + XA)$. Tính định thức của L.