TRƯỜNG ĐẠI HỌC HỒNG ĐỨC **ĐỀ THI OLYMPIC CẤP TRƯỜNG**

NĂM HỌC 2024 - 2025

MÔN: TOÁN HỌC

Thời gian làm bài: 180 phút

(Đề thi gồm 02 trang)

Câu 1 (2,0 điểm):

a) Trong phép tính định thức của một ma trận vuông cấp n bằng định nghĩa, tổng số các phép toán cộng, trừ và nhân bằng bao nhiêu?

b) Tính định thức cấp n sau:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Câu 2 (2,0 điểm):

a) Cho A là một ma trận vuông cấp n trên trường số thực. Chứng minh rằng tồn tại một đa thức $f(x)$ với các hệ số thực sao cho $f(A) = 0$.

b) Phát biểu định nghĩa ma trận đồng dạng. Hỏi hai ma trận A và B dưới đây có đồng dạng không?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Câu 3 (1,0 điểm): Cho $f(x)$ là một đa thức bậc 2 với các hệ số nguyên. Chứng minh rằng $f(k)$ chia hết cho 5 với mọi số nguyên k khi và chỉ khi tất cả các hệ số của $f(x)$ chia hết cho 5.

Câu 4 (1,0 điểm): Cho dãy số $(x_n)_{n\geq 0}$ xác định bởi

$$x_0 = 1; \quad x_{n+1} = \frac{3+2x_n}{3+x_n}, \ \forall n \geqslant 0.$$

Chứng minh rằng $\lim x_n$ tồn tại và tìm giới hạn đó.

Câu 5 (2,0 điểm):

a) Xét tính khả vi của hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \in \mathbb{Q}, \\ -x^2 & \text{khi } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

b) Cho hàm số f liên tục trên $[0,1]$, khả vi trên $(0,1)$ thỏa mãn $f(1)=0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho

$$c \cdot f'(c) + 2025 = \frac{1}{c^{2024} \cdot e^{f(c)}}.$$

Câu 6 (2,0 điểm):

a) Tính tích phân

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin 2025x}{(1+2^x)\sin x} dx.$$

b) Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục thỏa mãn

$$\int_0^1 f(xt)dt = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f \equiv 0$.

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)