TS. HOÀNG PHI DŨNG

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Olympic Toán Sinh viên

PTIT

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

TS. Hoàng Phi Dũng

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN

BÀI GIẢNG CHO ĐỘI TUYỂN OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN TOÀN QUỐC - MÔN ĐẠI SỐ

Hà Nội - 2023

LỜI NÓI ĐẦU

Đại số tuyến tính là một ngành cơ bản của Toán học, ngành này có vai trò rất quan trọng trong Toán học cùng với ứng dụng rộng rãi trong nhiều ngành từ khoa học tự nhiên, kỹ thuật, công nghệ đến kinh tế học. Cụ thể hơn, đại số tuyến tính được áp dụng để giải các hệ phương trình tuyến tính trong vật lý, tối ưu hóa trong kinh tế, đến việc phân tích dữ liệu trong khoa học máy tính và trí tuệ nhân tạo. Những bài toán trong trí tuệ nhân tạo hoặc trong kinh tế học được mô hình hoá thành những mô hình tuyến tính, chúng đóng vai trò then chốt trong việc giải quyết các vấn đề khó của các lĩnh vực kể trên. Các khái niệm về lý thuyết ma trận và hệ phương trình tuyến tính rất hữu ích trong khoa học tự nhiên, khoa học máy tính, thống kê và khoa học xã hội và cả kinh tế. Ngoài ra, Đại số tuyến tính không chỉ là một công cụ toán học mạnh mẽ mà còn là một ngôn ngữ chung cho nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật. Khả năng mô hình hóa và giải quyết các vấn đề bằng đại số tuyến tính giúp chúng ta hiểu rõ hơn về thế giới xung quanh và phát triển các công nghệ tiên tiến.

Chính vì nhu cầu ứng dụng rộng rãi của môn Đại số tuyến tính, nhất là những ngành Trí tuệ nhân tạo hay Khoa học dữ liệu, cho nên môn Đại số tuyến tính giờ đây được dạy và học ngày càng sôi nổi ở các trường đại học. Hàng năm, Hội Toán học Việt Nam vẫn tổ chức đều Kỳ thi Olympic Toán Sinh viên toàn quốc, một kỳ thi giàu truyền thống của Toán học Việt Nam diễn ra thường niên từ 1993 đến nay. Tài liệu này được chúng tôi biên soạn dành cho các sinh viên ôn thi Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên toàn quốc và đã được dùng để huấn luyện đội tuyển của Học viện Công nghệ Bưu chính viễn thông.

Trong tài liệu này, chúng tôi sẽ điểm lại một số khái niệm cơ bản của Đại số tuyến tính và soạn thảo một số bài toán cùng một vài phương pháp gợi ý giải của môn đại số tuyến tính. Nội dung tài liệu bao gồm: không gian vector, ma trận, hệ phương trình tuyến tính, không gian vec tơ, các phép biến đổi tuyến tính. Đây là tập tài liệu ôn luyện cho đội tuyển Olympic Đại số của PTIT, được tổng hợp từ nhiều nguồn tham khảo khác nhau, với các nội dung tương ứng kể trên của môn Đại số tuyến tính.

Tài liệu gồm các phần như sau:

Chương 1: Định thức.

Chương 2: Ma trận.

Chương 3: Hệ phương trình tuyến tính và không gian vec tơ.

Chương 4: Ánh xạ tuyến tính.

Do thời gian hạn chế, chắc chắn tài liệu không thể tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được góp ý của độc giả. Xin chân thành cảm ơn.

Mọi góp ý xin gửi về: dunghp@ptit.edu.vn

Hà Nội, năm 2023.

TS. Hoàng Phi Dũng

MỤC LỤC

Chương 1

ĐỊNH THỨC

1.1 Lý thuyết về định thức

1.1.1 Định nghĩa định thức

Định nghĩa 1.1. Cho ma trận A vuông cấp n. Khi đó, đại lượng

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)},$$

trong đó σ là phép thế của n phần tử và $sign(\sigma)$ là dấu của phép thế đó.

1.1.2 Một số tính chất của định thức

Định thức có một số tính chất cơ bản sau:

1. Nếu đổi chỗ hai hàng (hoặc hai cột) của ma trận thì định thức đổi dấu.

2. Định thức có tính chất tuyến tính đối với mỗi hàng, mỗi cột.

3. Nếu định thức của A có hai hàng (hoặc hai cột) tỷ lệ thì $\det A = 0$.

4. Nếu cộng vào một hàng (hoặc một cột) tổ hợp tuyến tính các hàng (hoặc các cột) khác thì định thức không thay đổi.

5. Định thức của ma trận chuyển vị bằng định thức của ma trận đó, tức là $\det A^T = \det A$.

6. Định thức của mọi hệ n vec tơ của không gian vec tơ n chiều bằng 0 nếu và chỉ nếu hệ vec tơ đó là phụ thuộc tuyến tính.

7. Định thức của một tích bằng tích các định thức, tức là $\det(AB) = \det A \det B$.

8. Nếu $\det A \neq 0$ thì
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} B^T,$$
trong đó $B = [A_{ij}]_{n\times n}$ là ma trận phụ hợp của ma trận A, tức là ma trận gồm các phần tử A_{ij} là phần bù đại số của a_{ij}.

Một số phương pháp sau đây thường được sử dụng để tính các định thức:

1. Phương pháp dùng định nghĩa;

2. Phương pháp khai triển theo hàng hoặc cột;

3. Phương pháp biến đổi sơ cấp đưa về ma trận tam giác;

4. Phương pháp truy hồi;

5. Phương pháp sử dụng tính chất định thức;

6. Phương pháp rút các nhân tử tuyến tính;

7. Phương pháp sử dụng căn đơn vị.

1.2 Một số phương pháp tính định thức

1.2.1 Tính định thức theo các phương pháp thông thường

Để tính định thức, ta có thể dùng một số phương pháp như sau:

- Cộng vào một hàng (hoặc một cột) tổ hợp tuyến tính các hàng (hoặc các cột) khác rồi đưa về ma trận tam giác.

- Khai triển định thức theo một hàng (hoặc một cột).

- Sử dụng định thức $\det(A^T A)$.

Ví dụ 1.1. Tính $\det(a_{ij})_{n\times n}$, trong đó $a_{ij} = \min(i,j)$.

Lời giải. Xác định định thức theo $a_{ij} = \min(i,j)$: $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}$. Lần lượt lấy cột 2 trừ cột 1 thay vào cột 2, cột 3 trừ cột 1 thay vào cột 3, ... ta được

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^2 D_{n-1} = \cdots = D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$ □

Một số bài toán tương tự

Bài toán 1.1. Tính định thức $\det\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $a_{ij} = \max(i,j)$

Bài toán 1.2. Tính định thức $\det\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $a_{ij} = |i-j|$

Bài toán 1.3. Tính định thức $\det\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $a_{ij} = \frac{1}{(i+j-1)!}$

Bài toán 1.4. Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $a_{ij} = i+j$. Tính hạng của ma trận A (đề 2006).

Bài toán 1.5. Cho $A = \begin{bmatrix} 1+a_1^2 & -a_2 & -a_3 & a_4 \\ a_2 & 1+a_1^2 & a_4 & a_3 \\ a_3 & -a_4 & 1+a_1^2 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & a_2 & 1+a_1^2 \end{bmatrix}$, với $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \in \mathbb{R}$. Chứng minh tồn tại A^{-1}, tìm $\det\left(A^{-1}\right)$.

Bài toán 1.6. Xét ma trận dạng $A = \begin{bmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_1x_2 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_1x_4 & x_2x_4 & x_3x_4 & 1+x_4^2 \end{bmatrix}$. Chứng minh rằng định thức của A là một đa thức đối xứng theo các biến x_1, x_2, x_3, x_4. Tính định thức của A khi x_1, x_2, x_3, x_4 lần lượt là bộ 4 nghiệm của đa thức $P_4(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 1$.

1.2.2 Tính định thức bằng phương pháp truy hồi

Xét phương trình sai phân thuần nhất: $u_n = a_1u_{n-1} + a_2u_{n-2} + \cdots a_ku_{n-k}$ (1).

Phương trình đặc trưng tương ứng: $x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \cdots - a_k = 0$ (2). Giả sử phương trình đặc trưng (2) có các nghiệm x_1, x_2, ..., x_q với bội k_1, k_2, ..., k_q thì phương trình (1) có nghiệm tổng quát

$$u_n = p_1(n)x_1^n + p_2(n)x_2^n + \cdots + p_q(n)x_q^n.$$

$p_i(n)$ là đa thức theo n bậc $k_i - 1$; $i = 1, ..., q$.

Thông thường, ta sẽ đưa dãy truy hồi trở thành phương trình sai phân:

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}.$$

1. Nếu $q = 0$ thì ta có $D_n = pD_{n-1}, D_{n-1} = pD_{n-2}, \ldots, D_2 = pD_1$. Suy ra $D_n = p^{n-1}D_1$.

2. Nếu $q \neq 0$ thì ta có có phương trình đặc trưng tương ứng:

$$x^2 - px - q = 0 \qquad (3).$$

- Nếu (3) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $D_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$. Cụ thể

$$D_n = \frac{D_2 - x_2D_1}{x_1(x_1 - x_2)}x_1^n + \frac{D_2 - x_1D_1}{x_2(x_2 - x_1)}x_2^n$$

- Nếu (3) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \alpha$ thì

$$D_n = (n-1)\alpha^{n-2}D_2 - (n-2)\alpha^{n-1}D_1.$$

- Nếu (3) có 2 nghiệm phức $x_1 = \rho e^{i\varphi}$, $x_2 = \overline{x_1} = \rho e^{-i\varphi}$ thì

$$D_n = \rho^n (\lambda \cos n\varphi + \mu \sin n\varphi).$$

Từ giá trị cụ thể $n = 1, 2$ suy ra λ, μ.

Nếu phương trình sai phân là không thuần nhất, tức là phương trình đó có dạng

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots a_k u_{n-k} + b,$$

thì phương trình có một nghiệm riêng dạng $u_n = K$ hoặc $u_n = Kn, \ldots$ hoặc $u_n = Kn^{n-1}$.

Ví dụ 1.2. Tính định thức $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Hướng dẫn. Khai triển định thức theo hàng 1, ta có

$$D_n = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= D_{n-1} + (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= D_{n-1} + D_{n-2},$$

với $D_1 = 1, D_2 = 2$.

Xét phương trình đặc trưng của dãy truy hồi $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Từ đó suy ra

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

□

Các bài toán 1.7, 1.8 có thể dùng phương pháp truy hồi để giải.

Bài toán 1.7. Tính các định thức sau:

a) $$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

b) $D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$ c) $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$

d) $D_n = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Bài toán 1.8. Tìm các giá trị riêng của ma trận vuông cấp n:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2.3 Tính định thức bằng cách rút ra các nhân tử tuyến tính

Ví dụ 1.3. Tính định thức $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$

Chứng minh. Quan sát đường chéo chính, suy ra $D(x)$ là một đa thức có bậc tối đa là $n-1$. Theo định nghĩa, chỉ có mỗi tích có bậc đúng bằng $n-1$ là tích các phần tử trên đường chéo chính. Vậy đa thức $D(x)$ có bậc $n-1$ và hệ số đầu là 1.

Nếu thay lần lượt x bởi $1, 2, \dots, n-1$ thì $D(x) = 0$, do đó chúng là các nghiệm của đa thức này. Vậy $D(x)$ chia hết cho $(x-k), k = 1, 2, \dots, n-1$. Kết hợp hệ số đầu, ta được

$$D(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-(n-1)).$$

□

Một số bài tập đề nghị.

Bài toán 1.9. Tính định thức $D = \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

Bài toán 1.10. Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Bài toán 1.11. Tính định thức Vandermonde:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1.2.4 Tính định thức của ma trận xoay vòng bằng cách sử dụng căn đơn vị

Ma trận xoay vòng là ma trận có dạng $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$. Một trong những bài toán về ma trận xoay vòng là bài toán sau đây.

Bài toán 1.12. Tính định thức $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$.

Bài toán này liên quan trực tiếp đến khái niệm căn của một số phức, cụ thể hơn là căn phức bậc n của số 1. Sau đây là một số khái niệm và tính chất về căn bậc n của một số phức.

Định nghĩa 1.2. Cho số phức $z \in \mathbb{C}$, số phức $\omega \in \mathbb{C}$ được gọi là căn bậc n của số phức z nếu

$$\omega^n = z.$$

Dạng đại số của một số phức là $z = x + iy$ trong đó $x, y \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$.

Giả sử $z \neq 0$, biến đổi $z = x + iy = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ và đặt $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ thì ta thu được dạng lượng giác của số phức z là

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Ta thực hiện tính căn bậc n của số phức z theo dạng lượng giác.

Giả sử $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, trong đó ρ và θ lần lượt là mô đun và Argument của số phức ω. Từ định nghĩa, ta có $\omega^n = z$, thay dạng lượng giác vào ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ (\cos\theta + i\cos\theta)^n = \cos\varphi + i\sin\varphi. \end{cases}$$

Áp dụng công thức Moivre, ta có

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \cos n\theta + i\cos n\theta = \cos\varphi + i\sin\varphi. \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta thu được

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \dfrac{\varphi + k2\pi}{n}, k = 0, 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Vì vậy ta suy ra $\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = e^{\frac{2k\pi}{n}}$ với $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Từ những tính toán trên, ta rút ra một số tính chất sau đây:

1. Mọi số phức $z \neq 0$ đều có n căn bậc n khác nhau.

2. Các giá trị của căn bậc n của 1 (còn được gọi là căn đơn vị) là

$$\epsilon_k = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = e^{\frac{2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

3. Đặt $\epsilon = e^{\frac{i2\pi}{n}}, \epsilon_k = e^{\frac{ik2\pi}{n}} = \epsilon^k; k = 1, ..., n-1, n$. Khi đó

$$\epsilon_n = \epsilon^n = e^{\frac{in2\pi}{n}} = 1 = \epsilon^0.$$

4. Tổng các căn bậc n của 1 bằng 0: $\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k = \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^k = \frac{1-\epsilon^n}{1-\epsilon} = 0$.

5. Với mọi $k = 1, ..., n-1$ ta có $\epsilon^k \neq 1$: $\sum_{m=1}^{n-1} \epsilon^{km} = \sum_{m=0}^{n-1} (\epsilon^k)^m = \frac{1-\epsilon^{kn}}{1-\epsilon^k} = 0$.

6. $\forall \epsilon^k \neq 1$: $\epsilon_k + \cdots + \epsilon_k^{n-1} = -(1 + \epsilon_k + \cdots + \epsilon_k^{p-1}) = -\frac{1-\epsilon_k^p}{1-\epsilon_k}$.

7. $f(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$; $\epsilon_k f(x) = a_1 \epsilon_k + \cdots + a_{n-1} \epsilon_k^{n-1} + a_n; \cdots;$ $\epsilon_k^{n-1} f(x) = a_2 + a_3 \epsilon_k + \cdots + a_1 \epsilon_k^{n-1}$.

8. Nếu $(n, p) = 1$ và với mọi $k, j = 1, 2, ..., n-1$; $k \neq j$ thì $\epsilon^{pk} \neq \epsilon^{pj}$. Do đó
$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\epsilon^{pk} - 1}{\epsilon^k - 1} = 1.$$

9. Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có $(1 - \alpha\epsilon_1) \cdots (1 - \alpha\epsilon_n) = 1 - \alpha^n$.

   Phương trình $x^n = 1$ có nghiệm là các căn bậc n của 1, do đó
$$\begin{aligned} x^n - 1 &= (x - \epsilon_1)(x - \epsilon_2) \cdots (x - \epsilon_n) \\ \Rightarrow (1 - \alpha\epsilon_1) \cdots (1 - \alpha\epsilon_n) &= \alpha^n (\frac{1}{\alpha} - \epsilon_1) \cdots (\frac{1}{\alpha} - \epsilon_n) \\ &= \alpha^n (\frac{1}{\alpha^n} - 1) \\ &= 1 - \alpha^n. \end{aligned}$$

Định lý 1.1. *Cho ma trận* $C = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$ *và đa thức* $f(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$. *Khi đó* $\det C = f(\epsilon_1) f(\epsilon_2) \cdots f(\epsilon_n)$, *trong đó* ϵ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *là các căn đơn vị.*

Chứng minh. Đặt ma trận của định thức là ma trận C và $v_k = \begin{bmatrix} 1 \\ \epsilon_k \\ \epsilon_k^2 \\ \vdots \\ \epsilon_k^{n-1} \end{bmatrix}$. Khi đó ta có

$$Cv_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \epsilon_k \\ \epsilon_k^2 \\ \vdots \\ \epsilon_k^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\epsilon_k) \\ \epsilon_k f(\epsilon_k) \\ \epsilon_k^2 f(\epsilon_k) \\ \vdots \\ \epsilon_k^{n-1} f(\epsilon_k) \end{bmatrix}$$

$$= f(\epsilon_k) \begin{bmatrix} 1 \\ \epsilon_k \\ \epsilon_k^2 \\ \vdots \\ \epsilon_k^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= f(\epsilon_k) v_k.$$

Suy ra v_k là các vec tơ riêng và $\lambda_k = f(\epsilon_k)$ là các giá trị riêng của ma trận C. Vì vậy

$$\det C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = f(\epsilon_1) f(\epsilon_2) \cdots f(\epsilon_n).$$

Định lý được chứng minh xong. □

1.2.5 Một số bài tập

Bài toán 1.13. Chứng minh rằng định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2004 & 2005 \\ 2^2 & 3^2 & \cdots & 2005^2 & 2006^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2004^{2004} & 2005^{2004} & \cdots & 2006^{2004} & 2006^{2004} \\ 2005^{2005} & 2006^{2005} & \cdots & 2006^{2005} & 2006^{2005} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Bài toán 1.14. 1. Tìm giá trị lớn nhất của các định thức cấp 3 có các phần tử bằng ± 1.

2. Tìm giá trị lớn nhất của các định thức cấp 3 có các phần tử bằng 0 hoặc 1.

3. Tìm giá trị lớn nhất của các định thức cấp 3 có hai phần tử bằng 4 các phần tử còn lại bằng 1 hoặc -1.

Bài toán 1.15. Cho ma trận cấp n:

$$A = \left[a_{ij}\right] \; ; \; a_{ij} \in \mathbb{Z}, \, , \; a_{ij} = \begin{cases} \text{chẵn nếu } i = j \\ \text{lẻ nếu } i \neq j \end{cases}$$

Chứng minh rằng nếu n chẵn thì tồn tại A^{-1}. Khi n lẻ thì tồn tại A sao cho $\det A = 0$.

Bài toán 1.16. Tính định thức $D_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}$.

Bài toán 1.17. Tính định thức $D_n = \begin{vmatrix} 1 + a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & 1 + a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & 1 + a_n b_n \end{vmatrix}$ biết $a_i, b_i, i = 1, \ldots, n$ thoả mãn điều kiện

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = 1.$$

Bài toán 1.18. Tính định thức $D_n = \begin{vmatrix} 1 + x_1 y_1 & 1 + x_1 y_2 & \cdots & 1 + x_1 y_n \\ 1 + x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & \cdots & 1 + x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + x_n y_1 & 1 + x_n y_2 & \cdots & 1 + x_n y_n \end{vmatrix}$.

Bài toán 1.19. Tính định thức $D_n = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$.

Bài toán 1.20. Tính định thức

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1+y_1 & x_2+y_1 & x_n+y_1 \\ (x_1+y_1)(x_1+y_2) & (x_2+y_1)(x_2+y_1) & (x_n+y_1)(x_n+y_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1+y_1)\ldots(x_1+y_{n-1}) & (x_2+y_1)\ldots(x_2+y_{n-1}) & (x_n+y_1)\ldots(x_n+y_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Bài toán 1.21. Cho các đa thức $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$ có bậc $\leq n-1$. Chứng tỏ rằng định thức sau không phụ thuộc vào biến x:

$$\begin{vmatrix} P_1(x) & P_2(x) & \cdots & P_n(x) \\ P_1'(x) & P_2'(x) & \cdots & P_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^{(n-1)}(x) & P_2^{(n-1)}(x) & \cdots & P_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Bài toán 1.22. Cho các đa thức $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$ có bậc $\leq n-2, n \geq 2$. Tính định thức:

$$\begin{vmatrix} P_1(a_1) & P_1(a_2) & \cdots & P_1(a_n) \\ P_2(a_1) & P_2(a_2) & \cdots & P_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_n(a_1) & P_n(a_2) & \cdots & P_n(a_n) \end{vmatrix}$$

Bài toán 1.23. Cho ma trận cấp n: $A = \left[a_{ij}\right]$; $a_{ij} = ij$. Đặt $f(x) = \det(Ax+I)$, tính $f'(x)$.

Bài toán 1.24. Cho $A = \begin{bmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x_4 \end{bmatrix}$, trong đó x_1, x_2, x_3, x_4

là nghiệm của đa thức $f(x) = x^4 - x + 1 = 0$. Tính $\det A$.

Bài toán 1.25. Cho α, β, γ là nghiệm của đa thức $f(x) = x^3 + px + q = 0$. Tính

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

Bài toán 1.26. Tính tổng $S_n = d_2 + d_3 + ... + d_n$, trong đó d_k là định thức cấp k:

$$d_k = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Bài toán 1.27. Cho $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^{1999} + x^2 - 1$. Tính $\det f(A)$.

Bài toán 1.28. Cho ma trận cấp $2n$: $A_{2n} = \left[a_{ij}\right]$ trong đó

$$a_{ij} = \begin{cases} x, i = j, \\ a, i \neq j, \ \ i + j = 2m, \\ b, i \neq j, \ \ i + j = 2m + 1. \end{cases}$$

Tính $\det A_{2n}$.

Bài toán 1.29. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & \cdots & C_n^0 & C_{n+1}^0 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1 & C_{n+1}^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 & \cdots & C_n^2 & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^n & C_{n+1}^n \end{bmatrix}$.

Đặt D_k là định thức ma trận bỏ cột k của ma trận A. Chứng minh

$$D_k = C_{n+1}^{k-1}\ ,\ k = 1, 2, \dots, n+2.$$

Bài toán 1.30. Tính định thức $D_{n+1} = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \cdots & S_{n-1} & 1 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n & x \\ S_2 & S_3 & S_4 & \cdots & S_{n+1} & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ S_{n-1} & S_n & S_{n+1} & \cdots & S_{2n-2} & x^{n-1} \\ S_n & S_{n+1} & S_{n+2} & \cdots & S_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}$

trong đó $S_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$.

Bài toán 1.31. Cho ma trận cấp n thoả mãn điều kiện $A^{-1} = 3A$. Tính

$$\det\left(A^{1995} - A\right).$$

Bài toán 1.32. Giả sử α là một giá trị riêng của A. Với mọi số tự nhiên $n$và với mọi $a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots,\ a_n\ \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $\det\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k A^k - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \alpha^k I\right) = 0$.

Bài toán 1.33. Cho $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là các số thực khác nhau và khác các số $0, -1, \dots, -n+1$. Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} 1/\lambda_1 & 1/\lambda_2 & \cdots & 1/\lambda_n \\ 1/(\lambda_1+1) & 1/(\lambda_2+1) & \cdots & 1/(\lambda_n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/(\lambda_1+n-1) & 1/(\lambda_2+n-1) & \cdots & 1/(\lambda_n+n-1) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Bài toán 1.34. Cho A là ma trận vuông sao cho trong mỗi cột có đúng 2 phần tử khác 0, trong đó có phần tử trên đường chéo có trị tuyệt đối lớn hơn 1 và phần tử còn lại không ở trên đường chéo bằng ± 1. Ma trận A có suy biến không?

Bài toán 1.35. Cho $A = \left[a_{ij}\right]$ ma trận cấp n. Giả sử $|a_{ii}| > \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|\ ,\ \ \forall i = 1, \dots, n$. Chứng minh $\det A \neq 0$.

Bài toán 1.36. Cho $A,\ B$ là hai ma trận vuông cấp n thoả mãn

$$\det(A+B)\neq 0, \det(A-B)\neq 0.$$

Đặt $M=\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$. Chứng minh $\det M\neq 0$.

Bài toán 1.37. Giả sử $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ là ma trận vuông cấp 2 khả nghịch. Chứng minh rằng, nếu B là ma trận vuông cấp 2 khả nghịch thì ma trận D cấp 4 được xác định bởi hệ thức $D=\begin{bmatrix} aA & bB \\ cA & dB \end{bmatrix}$ cũng khả nghịch.

Bài toán 1.38. Đặt $M=\left\{A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n} \mid a_{ij}=\pm 1\,,\ \forall i,\, j=1,\, ...,\, n\right\}$. Chứng minh rằng với mọi ma trận $B\in M$, $\det B\neq 0$ thì tồn tại $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}\in M$ sao cho $|\det A|=|\det B|$ và $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}\geq 0\,,\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\geq 0\,;\ \forall i,\, j=1,\, ...,\, n$.

Bài toán 1.39. Cho $A=\left[a_{ij}\right]$ ma trận cấp n . Chứng minh rằng nếu $\det A=0$ thì có thể thay thế các phần tử a_{ii} của A bởi 0 hoặc 1, các phần tử khác giữ nguyên để nhận được ma trận mới A^* khả nghịch.

Bài toán 1.40. Tìm tổng tất cả các định thức cấp n thoả mãn điều kiện trong mỗi cột và mỗi hàng chỉ có một phần tử bằng 1, các phần tử còn lại đều bằng 0. Có bao nhiêu định thức như thế.

Bài toán 1.41. Cho các ma trận vuông cấp n $A,\, B,\, C,\, D$ thoả mãn $\det A\neq 0$. Chứng minh $\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\det A\det\left(-CA^{-1}B+D\right)$.

Bài toán 1.42. Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n),$$

trong đó

$$f(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}$$

và ϵ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ là các căn đơn vị.

Bài toán 1.43. Tính định thức

$$D_n = \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & b & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & a & a & b & \cdots & b \\ b & b & \cdots & a & a & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix},$$

trong đó các khối con gồm $p \times p$ và $(n-p) \times (n-p)$.

Bài toán 1.44. Tính định thức

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \cdots & \alpha^{n-1} \\ \alpha^{n-1} & 1 & \alpha & \cdots & \alpha^{n-2} \\ \alpha^{n-2} & \alpha^{n-1} & 1 & \cdots & \alpha^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Chương 2

MA TRẬN

2.1 Lý thuyết về ma trận

2.1.1 Ma trận và các phép toán về ma trận

Ma trận là một bảng số gồm m hàng và n cột như sau:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Phép toán cộng hai ma trận: Nếu $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, thì

- Tổng của A và B, ký hiệu $A + B$, là

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}.$$

Nhân một số với một ma trận:

Nếu $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và k là một số thực (hoặc phức), thì kA là ma trận:

$$kA = [ka_{ij}]_{m\times n}.$$

Phép nhân hai ma trận:

- Cho A và B là hai ma trận lần lượt có cỡ $m \times p$ và $p \times n$. Tích hai ma trận AB là một ma trận cỡ $m \times n$ với các phần tử ở hàng i cột j bằng tổng của các tích các phần tử tương ứng ở hàng thứ i của A và cột thứ j của B.

- Nói cách khác, nếu $AB = [c_{ij}]_{m \times n}$, thì

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

Ngoài một số tính chất thông thường của ma trận, ta còn có một số những tính chất liên quan đến các kiến thức khác

2.1.2 Một số tính chất tổng hợp của ma trận

Ta có một số tính chất sau:

- Tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1} khi và chỉ khi $\det A \neq 0$.

- Nếu $\det A \neq 0$ thì
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} B^T,$$
trong đó $B = [A_{ij}]_{n \times n}$ là ma trận phụ hợp của ma trận A, tức là ma trận gồm các phần tử A_{ij} là phần bù đại số của a_{ij}.

- Hạng của ma trận là cấp cao nhất của định thức con khác 0 của ma trận đó.

- Hạng của ma trận là số vec tơ của một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ vec tơ hàng (hoặc cột).

- Hạng của ma trận bằng số chiều của không gian con sinh bởi hệ vec tơ hàng (hoặc cột) của ma trận đó.

- $r(A^T) = r(A)$.

- Nếu A là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong hai cơ sở tương ứng nào đó thì $r(f) = \dim Imf = r(A)$.

- $\dim\{\mathbb{X} \in \mathbb{R}^n | A\mathbb{X} = 0\} = n - r(A)$.

- Ma trận chuyển cơ sở luôn có định thức khác 0.

2.2 Luỹ thừa của ma trận

Bài toán chính. Cho A là một ma trận vuông cấp k. Tính A^n.

Ta có thể sử dụng một số phương pháp giải sau đây:

1. Phương pháp quy nạp.

2. Phương pháp phân tích thành các ma trận đặc biệt

3. Chéo hóa hoặc chéo hóa trực giao.

4. Phương pháp sai phân.

2.2.1 Phương pháp quy nạp

Thử một loạt các luỹ thừa $n = 1, 2, 3, \ldots$ sau đó tìm ra quy luật. Dự đoán quy luật rồi thực hiện chứng minh bằng quy nạp.

Ví dụ 2.1. Tính $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$.

Hướng dẫn. Thử với $n = 1, n = 2, \ldots$, ta có $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Dự đoán $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$, ta chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Thật vậy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vậy $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. □

Một số bài tập tương tự:

Bài toán 2.1. Tính $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^n$.

Bài toán 2.2. Tính $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n$.

Bài toán 2.3. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, tính A^n.

2.2.2 Phương pháp phân tích thành các ma trận đặc biệt

Nội dung phương pháp như sau:

Viết $A = B + kI$ và sử dụng nhị thức Newton. Tính B^2 có thể có các trường hợp:

1. $B^2 = 0$ hoặc $B^3 = 0\dots$
2. $B^2 = \alpha B \;\Rightarrow\; B^n = \alpha^{n-1}B$
3. $B^2 = -\alpha^2 I$. (chú ý phải có dạng $-\alpha^2 I$)

Lý do phân tích thành tổng của ma trận đặc biệt B và ma trận đơn vị là bởi vì $BI = IB$, khi đó ta có thể sử dụng kết quả sau.

Định lý 2.1. *Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp. Nếu $AB = BA$ thì với mọi số tự nhiên $n > 0$ thì*

$$(A+B)^n = A^n + nA^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}B^2 + \dots + B^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k}B^k.$$

Ví dụ 2.2. Tính $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n$.

Hướng dẫn. Phân tích $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B + I.$

Ta có $B^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}^2 = -2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = -2B$. Do đó theo quy nạp, ta có $B^m = (-2)^{m-1}B$.

Sử dụng kết quả của Định lý 2.1, ta có:

$$A^n = (B+I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k I^{n-k} = I + \sum_{k=1}^{n} C_n^k B^k = I + \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-2)^{k-1} B.$$

Tính $\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k (-2)^{k-1}$.

Ta có $C_n^0(-2)^0 + C_n^1(-2)^1 + \cdots + C_n^n(-2)^n = [1 + (-2)]^n = (-1)^n$. Suy ra

$$C_n^1(-2)^1 + \cdots + C_n^n(-2)^n = [1 + (-2)]^n = (-1) + (-1)^n.$$

Từ đó ta được $\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k (-2)^{k-1} = \frac{(-1)+(-1)^n}{-2} = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$. Kết hợp với đẳng thức của A^n bên trên, ta có

$$A^n = I + \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2} B$$

hay

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, n \geq 2.$$

Có thể kết luận theo hình thức

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{nếu } n \text{ chẵn.} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} & \text{nếu } n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

□

Một số bài tập đề nghị:

Bài toán 2.4. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, tính A^n.

Bài toán 2.5. Cho $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}+1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}-1 \end{bmatrix}$, tính A^{2002}.

Bài toán 2.6. Đặt $A_k = \begin{bmatrix} \cos(2\pi k/n) & -\sin(2\pi k/n) \\ \sin(2\pi k/n) & \cos(2\pi k/n) \end{bmatrix}$. Với mọi số tự nhiên dương m, n hãy tính $S_m = A_0^m + A_1^m + ... + A_{n-1}^m$.

Bài toán 2.7. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, tính A^n.

Bài toán 2.8. Cho $x_0\,,\ y_0\,,\ z_0 \in$. Tìm $x_n\,,\ y_n\,,\ z_n$ thoả mãn

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

Bài toán 2.9. Cho $A = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$, đặt $A^n = \left[a_{ij}(n)\right]$. Chứng minh rằng khi $|1-a-b| < 1$ thì tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} a_{ij}(n)$. Tìm các giới hạn này.

2.2.3 Phương pháp sử dụng chéo hoá

Giả sử A là ma trận chéo hoá được, khi đó tồn tại ma trận khả nghịch T sao cho $T^{-1}AT = \Lambda$ với Λ là ma trận chéo. Với chú ý, luỹ thừa của ma trận chéo là:

$$\Lambda^n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_k^n \end{bmatrix}.$$

Từ $A = T\Lambda T^{-1}$, ta có thể tính luỹ thừa của ma trận A một cách khá đơn giản:

$$A^n = T\Lambda^n T^{-1}.$$

Ví dụ 2.3. Tính $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n$.

Hướng dẫn. Trước tiên, ta chéo hoá ma trận A:

Xét đa thức đặc trưng: $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1$. Vậy ta có các giá trị riêng của A là $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$. Từ đó ta chọn được các vec tơ riêng tương ứng là $v_1 = (1,3), v_2 = (1,1)$. Ta có $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ và $T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Từ đó, ta thu được luỹ thừa của ma trận A là

$$A^n = T\Lambda^n T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (-1)^n & 1 \\ 3(-1)^n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vậy

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (-1)^{n+1} + 3 & (-1)^n - 1 \\ 3(-1)^{n+1} + 3 & 3(-1)^n - 1 \end{bmatrix}.$$

□

Một số bài tập đề nghị

Bài toán 2.10. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, tính A^n.

Bài toán 2.11. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, đặt $A^n = \left[a_{ij}(n)\right]$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{12}(n)}{a_{22}(n)}$.

Bài toán 2.12. Cho $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$; $bc > 0,\ a \neq 0$, đặt $A^n = \left[a_{ij}(n)\right]$.

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{11}(n)}{a_{21}(n)}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{12}(n)}{a_{11}(n)}$.

Bài toán 2.13. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, đặt $A^n = \left[a_{ij}(n)\right]$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)}$.

Bài toán 2.14. Cho $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$, đặt $A^n = \left[a_{ij}(n)\right]$ tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_{ij}(n)$.

2.2.4 Sử dụng phương pháp truy hồi

Nội dung phương pháp: Tính $\left[a_{ij}(n)\right] = \left[a_{ij}\right]\left[a_{ij}(n-1)\right]$ và giải phương trình sai phân.

Ví dụ 2.4. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, đặt $A^n = \left[a_{ij}(n)\right]$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)}$.

Hướng dẫn. Tính $\left[a_{ij}(n)\right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \left[a_{ij}(n-1)\right]$. Ta được hệ phương trình sai phân

$$\begin{cases} a_{11}(n) = 2a_{11}(n-1),\ a_{22}(n) = 3a_{22}(n-1),\ a_{33}(n) = 2a_{33}(n-1) \\ a_{32}(n) = a_{22}(n-1) + 2a_{32}(n-1) \end{cases}$$

$\Rightarrow \ a_{11}(n) = a_{33}(n) = 2^n,\ a_{22}(n) = 3^n.\ a_{32}(n) = 3^{n-1} + 2a_{32}(n-1) \ \Rightarrow a_{32}(n) = 5a_{32}(n-1) - 6a_{32}(n-2)$.

Giải phương trình sai phân: $u(n) = 5u(n-1) - 6u(n-2)$.

Có phương trình đặc trưng: $x^2 - 5x + 6 = 0 = (x-2)(x-3)$. $\Rightarrow \ u(n) = A2^n + B3^n = 3^n - 2^n$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n - 2^n} = 1$. □

Một số bài tập đề nghị.

Bài toán 2.15. Cho $A = \begin{bmatrix} x/1998 & 1999 \\ 0 & x/2000 \end{bmatrix}$, đặt $A^n = \left[a_{ij}(n,x)\right]$ tìm $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ n\to\infty}} a_{ij}(n,x)$.

Bài toán 2.16. Cho $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$, tính $A^n = \left[a_{ij}(n)\right]$.

Bài toán 2.17. Cho $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Chứng minh rằng nếu $A^n = 0$, $n > 2$ thì $A^2 = 0$.

2. Cho $c = 0$. Xác định a, b, d sao cho $A^n = I$.

3. Tìm tất cả các ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ thỏa mãn $A^k = \begin{bmatrix} a^k & b^k \\ c^k & d^k \end{bmatrix}$, $\forall k \geq 1$.

Bài toán 2.18. Chứng minh đẳng thức Wagner đúng với mọi ma trận A, B, C vuông cấp 2: $(AB - BA)^2C - C(AB - BA)^2 = 0$.

Bài toán 2.19. Giả sử A, B là các ma trận vuông cấp $n(n \geq 2)$ thỏa mãn điều kiện $AB + aA + bB = 0$ trong đó a, b là hai số thực khác không. Chứng minh rằng $AB = BA$.

2.3 Một số ma trận đặc biệt: ma trận luỹ linh và luỹ đẳng

2.3.1 Ma trận luỹ linh

2.3.1.1 Khái niệm

Trong một vành hoặc một đại số, phần tử lũy linh luôn là một phần tử đặc biệt của vành. Vì qua phép lấy lũy thừa thì kết quả luôn trở về phần tử trung hòa của vành. Vành các ma trận cũng như vậy, lớp ma trận lũy linh có một vai trò đặc biệt, bởi vì tự đồng cấu lũy linh là luôn chéo hóa được.

Định nghĩa 2.1. Cho A là một ma trận vuông. A được gọi là ma trận lũy linh (nilpotent) nếu tồn tại một số nguyên dương k sao cho $A^k = O$.
Số k nhỏ nhất như trên được gọi là bậc lũy linh của A.

Ví dụ 2.5. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận lũy linh vì $A^2 = O$.

Ví dụ 2.6. $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ là ma trận lũy linh vì $A^2 = O$.

Ví dụ 2.7. $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận lũy linh vì $A^4 = O$.

Ví dụ 2.8. Các ma trận tam giác trên với các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 0 đều là ma trận lũy linh.

2.3.1.2 Một số đặc trưng hóa của ma trận lũy linh

Định lý 2.2. *Cho ma trận A cấp n với các phần tử là các số thực (hoặc phức). Khi đó các điều sau đây là tương đương:*

1. *A là ma trận lũy linh.*
2. *Đa thức tối tiểu của A là λ^k với số nguyên dương $k \leq n$.*
3. *Đa thức đặc trưng của A là λ^n.*
4. *Các giá trị riêng của A đều bằng 0.*
5. $Tr(A^k) = 0, \forall k > 0$.

Định lý trên có vài hệ quả, đó là:

- Bậc của ma trận lũy linh cấp n luôn nhỏ hơn hoặc bằng n.
- Nếu ma trận A là lũy linh thì $\det(A) = 0$ và $Trace(A) = 0$.
- Ma trận chéo hóa của ma trận lũy linh chính là ma trận O.

2.3.1.3 Một số tính chất của ma trận lũy linh

Ta liệt kê một số tính chất, phần chứng minh xem như các bài tập. Ta xem trường K có thể là $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$.

1. Nếu $A \in Mat(n, K)$ và A lũy linh thì $A^n = O$.

2. Cho $A, B \in Mat(n, K)$. Nếu A lũy linh và $AB = BA$ thì AB cũng là ma trận lũy linh.

3. Nếu A_1, A_2 là các ma trận lũy linh cùng cấp và $A_1A_2 = A_2A_1 = O$ thì $A_1 + A_2$ cũng là ma trận lũy linh.

Ví dụ 2.9. Cho A là ma trận vuông cấp n như sau: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tìm tất cả các vec tơ $v \in \mathbb{R}^n$ sao cho hệ vec tơ $\{v, Av, ..., A^{n-1}v\}$ là độc lập tuyến tính.

Giải. Giả sử $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, khi đó ta có $Av = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{bmatrix}$,

$A^2v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots$, tương tự, ta sẽ có $A^{n-1}v = \begin{bmatrix} x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Để hệ vec tơ $\{v, Av, ..., A^{n-1}v\}$ độc lập tuyến tính thì các vec tơ

$$\begin{bmatrix} x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_n \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

phải độc lập tuyến tính, điều này xảy ra khi và chỉ khi định thức

$$\begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & \dots & x_1 \\ 0 & x_n & \dots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $(x_n)^n \neq 0$, hay $x_n \neq 0$. Vậy vec tơ $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ với $x_n \neq 0$ là vec tơ thỏa mãn đề bài. □

2.3.2 Ma trận luỹ đẳng

Đối với ma trận lũy đẳng, qua phép lấy lũy thừa thì kết quả luôn trở về chính ma trận đó, điều này giống như phần tử cyclic của nhóm. Lớp ma trận lũy đẳng cũng là lớp ma trận chéo hóa được. Ngoài ra chúng có một số tính chất khá lý thú.

2.3.2.1 Khái niệm

Định nghĩa 2.2. Cho A là một ma trận vuông. A được gọi là ma trận lũy đẳng (idempotent) nếu $A^2 = A$.

Ví dụ 2.10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận lũy đẳng.

Ví dụ 2.11. $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ là ma trận lũy đẳng.

2.3.2.2 Một số đặc trưng của ma trận lũy đẳng

Định lý 2.3. *Cho ma trận A cấp n với các phần tử là các số thực (hoặc phức). Khi đó các điều sau đây là tương đương:*

1. *A là ma trận lũy đẳng.*

2. *Ma trận $I - A$ là lũy đẳng.*

3. *Với $v \in ImA$ thì $Av = v$.*

4. *$K^n = kerA \oplus ImA$.*

5. *A đồng dạng với $\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.*

2.3.2.3 Một số tính chất của ma trận lũy đẳng

Ta liệt kê một số tính chất, phần chứng minh xem như các bài tập. Ta xem trường K có thể là $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$.

1. Cho $A \in Mat(n, K)$ và A lũy đẳng, khi đó nếu $A \neq I_n$ thì $\det A = 0$ hay A là ma trận suy biến.

2. Nếu A lũy đẳng thì tồn tại số k nguyên dương sao cho $A^k = A$.

3. Ma trận lũy đẳng luôn chéo hóa được và

4. Cho $A, B \in Mat(n, K)$. Nếu A lũy đẳng và $AB = BA$ thì AB cũng là ma trận lũy đẳng.

5. Nếu A_1, A_2 là các ma trận lũy đẳng cùng cấp và $A_1A_2 = A_2A_1 = O$ thì $A_1 + A_2$ cũng là ma trận lũy đẳng.

Ví dụ 2.12 (Olympic VN-1997). Cho $n, p \in \mathbb{N}(p \leq n)$. Xét tất cả các ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ có hạng p thỏa mãn $A^2 = A$. Tính các giá trị có thể có của biểu thức $S = a_{11} + \cdots + a_{nn}$.

Giải. Gọi f là phép biến đổi tuyến tính của không gian véc tơ $\mathbb{R}^n$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là A. Điều kiện $A^2 = A$ suy ra rằng f là một phép chiếu, do đó $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$. Giả sử $\{e'_1, \ldots, e'_p\}$ là một cơ sở của $\operatorname{Im} f$, $\{e'_{p+1}, \ldots, e'_n\}$ là một cơ sở của $\operatorname{Ker} f$ thì $\{e'_1, \ldots, e'_p, e'_{p+1}, \ldots, e'_n\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$.
Gọi P là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở mới. Khi đó

$$S = \operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} P^{-1}AP = p.$$

□

2.3.3 Bài tập về ma trận luỹ linh và luỹ đẳng

Bài toán 2.20. Ma trận A vuông cấp n được gọi là luỹ linh nếu tồn tại số nguyên dương k sao cho $A^k = 0$. Chứng minh rằng A luỹ linh khi và chỉ khi $A^n = 0$.

Bài toán 2.21. Cho A , B là hai ma trận vuông cấp n.

1. Giả sử $A^{2001} = 0$ và $AB = A + B$, tìm $\det B$.

2. Giả sử $A^2 = A$, $B^2 = B$ và $\det(I - A - B) \neq 0$. Chứng minh $r(A) = r(B)$.

Bài toán 2.22. Cho A là ma trận vuông cấp n thoả mãn $A^m = 0$.

1. Chứng minh tồn tại $(I + A)^{-1}$, $(I - A)^{-1}$.

2. Cho A , B là hai ma trận vuông cấp n thoả mãn $AB = BA$; $A^{2004} = 0$, $B^{2005} = 0$. Chứng minh tồn tại $(I + A - B)^{-1}$, $(I - A - B)^{-1}$.

Bài toán 2.23. Chứng minh rằng nếu tồn tại $(I - AB)^{-1}$ thì tồn tại $(I - BA)^{-1}$.

Bài toán 2.24. Cho A , B là hai ma trận vuông cấp n thoả mãn $AB = BA$. Chứng minh rằng tồn tại $(I + A + B)^{-1}$ nếu thoả mãn 1 trong 2 điều kiện sau:

a. $A^m = 0$, $B^k = 0$.

b. $A^m = I$, $B^{2k} = I$ với $k$không chia hết cho 3.

Bài toán 2.25. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Tìm tất cả các ma trận vuông B thoả mãn $AB + BA = 0$.

Bài toán 2.26. Cho A là một ma trận vuông thoả mãn $A^2 = A$. Chứng minh rằng ma trận X thoả mãn $AX - XA = 0$ khi và chỉ khi tồn tại X_0 sao cho $X = AX_0 + X_0A - X_0$.

Bài toán 2.27. Cho hai ma trận vuông cấp n A, B. Đặt $C = AB - BA$, giả sử C giao hoán với A và B. Chứng minh C luỹ linh.

Bài toán 2.28. Cho A là một ma trận lũy linh. Gọi k là cấp cực đại của các khối Jordan của A. Chứng minh rằng $A^k = O$ và $A^{k-1} \neq O$.

Bài toán 2.29. Cho A, B là hai ma trận cấp n. Chứng minh rằng nếu $A + \lambda B$ là một ma trận lũy linh với $n + 1$ giá trị λ phân biệt thì A và B đều là các ma trận lũy linh.

Bài toán 2.30. Cho hai ma trận vuông cấp n là A, B thoả mãn $AB - BA = kA$ và B chéo hoá được.

a, Chứng minh $A^mB - BA^m = mkA^m$.

b, Chứng minh rằng nếu $k \neq 0$ thì A luỹ linh.

Bài toán 2.31. Cho P là một ma trận cấp $m \times n$ $(m \geq n)$ sao cho $P^TP = I_n$, hoặc một cách tương đương, ma trận P là ma trận có các cột là hệ trực chuẩn. Chứng tỏ rằng PP^T là ma trận lũy đẳng.

Bài toán 2.32. Chứng minh rằng với A là một ma trận lũy đẳng đối xứng thì ma trận $I - 2A$ là ma trận trực giao.

Bài toán 2.33 (Olympic VN 2004)**.** Cho P và Q là hai ma trận vuông cấp n lũy đẳng và ma trận $I - (P + Q)$ khả nghịch. Chứng minh rằng $r(P) = r(Q)$.

Bài toán 2.34. Cho A là ma trận đối xứng. Chứng minh rằng với số nguyên $k \geq 1$, $A^{k+1} = A^k$ thì A là lũy đẳng.

2.4 Hạng và vết của ma trận

Bài toán 2.35. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Tìm tất cả các ma trận vuông B thoả mãn $B^2 = A$, $\text{Tr}B = 0$.

Bài toán 2.36. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Tìm tất cả các ma trận vuông X cấp 4 sao cho $AX = XA$.

Bài toán 2.37. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận B có các giá trị riêng dương sao cho $B^2 = A$.

Bài toán 2.38. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp n chỉ đồng dạng với chính nó.

Bài toán 2.39. Cho ma trận A cỡ 3×2, B cỡ 2×3 và $AB = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Chứng minh $BA = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$.

Bài toán 2.40. Cho ma trận $A = [a_{ij}]$ vuông cấp n. Ta gọi tổng các phần tử trên đường chéo chính $\text{Tr}A = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ là vết của A. Chứng minh:

a, $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}A + \text{Tr}B$;

b, $\text{Tr}AB = \text{Tr}BA$ (mặc dù $AB \neq BA$);

c, Nếu $B = P^{-1}AP$ thì Tr$A =$ TrB;

d, Không tồn tại ma trận A, B sao cho $AB - BA = I$.

Bài toán 2.41. Giả sử B là một ma trận vuông cấp n. Khi đó có tồn tại ma trận khả nghịch A thoả mãn điều kiện $AB - BA = A$ không?

Bài toán 2.42. Giả sử A là một ma trận vuông cấp n thoả mãn điều kiện $A^2 = A$ và $rank(A) = r$. Tìm TrA.

Bài toán 2.43. Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $a_{ii} = 0 \ \forall i = 1\,, \ldots, n$. Chứng tỏ rằng tồn tại hai ma trận $B\,,\ C$ thoả mãn điều kiện $BC - CB = A$.

Bài toán 2.44. Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$. Chứng minh rằng nếu $\text{Tr}(AX) = 0$ với mọi ma trận vuông X cấp n, thì $A = 0$.

Bài toán 2.45. Chứng minh các khẳng định sau:

1. A là ma trận cỡ $m \times n$ thì $r(A) \leq \min(m, n)$.

2. $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

3. $A,\ B$ là hai ma trận cấp n. Chứng minh $r(A) + r(B) \leq r(AB) + n$.

4. $A,\ B,\ C$ là ba ma trận cấp n. Chứng minh $r(AB) + r(BC) \leq r(B) + r(ABC)$.

5. A là ma trận cấp n. Chứng minh rằng tồn tai số nguyên dương N sao cho $r\left(A^k\right) = r\left(A^{k+1}\right)$, với mọi $k \geq N$.

Bài toán 2.46. Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $a_{ii} = 0 \ \forall i = 1\,, \ldots, n$, a_{ij} là số nguyên lẻ nếu $i \neq j$. Chứng minh $r(A)$ bằng $n - 1$ hoặc n.

Bài toán 2.47. $A,\ B$ là hai ma trận cấp $2n + 1$. Chứng minh nếu $AB = 0$ thì $\det\left(A + A^t\right) \det\left(B + B^t\right) = 0$.

Bài toán 2.48. Cho A là ma trận vuông cấp n thoả mãn $A^2 = I$. Chứng minh $r(A + I) + r(A - I) = n$.

Bài toán 2.49. Cho ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ cấp $n(n > 1)$ có hạng r. Tìm hạng của ma trận phụ hợp $A^* = [A_{ij}]$, trong đó A_{ij} là phần bù đại số của a_{ij}.

Bài toán 2.50. Cho A là ma trận có 1999 dòng và 2000 cột. Gọi A^t là ma trận chuyển vị của A và B là ma trận phụ hợp của ma trận A^tA. Biết rằng $\det(AA^t) \neq 0$ và $B \neq 0$. Xác định hạng của ma trận B.

Bài toán 2.51. Cho $A,\ B$ là hai ma trận đối xứng cấp n. Chứng minh rằng

$$\mathrm{Tr}\,(ABAB) \leq \mathrm{Tr}\left(A^2B^2\right).$$

2.5 Ma trận nghịch đảo

Bài toán 2.52. Cho ma trận $M = \begin{bmatrix} C_0^0 & 2C_1^0 & 2^2C_2^0 & \cdots & 2^nC_n^0 \\ 0 & C_1^1 & 2C_2^1 & \cdots & 2^{n-1}C_n^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 & \cdots & 2^{n-2}C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^n \end{bmatrix}$, tìm M^{-1}.

Bài toán 2.53. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ . & \dots & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Bài toán 2.54. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ . & \dots & \dots & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Bài toán 2.55. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài toán 2.56. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau

$$\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a \end{pmatrix}.$$

2.6 Một số bài toán trong các kỳ thi quốc tế

Bài toán 2.57 (CIIM 2022)**.** Cho $v \in \mathbb{R}^2$ là một vectơ có độ dài 1 và A là một ma trận 2×2 với các phần tử thực sao cho:

(i) Các vectơ Av, A^2v và A^3v cũng có độ dài 1.

(ii) Vectơ A^2v không bằng $\pm v$ cũng không bằng $\pm Av$.

Chứng minh rằng $A^tA = I_2$.

Bài toán 2.58 (CIIM 2018)**.** Chứng minh rằng tồn tại một ma trận 2×2 bậc 6 với các phần tử hữu tỉ, sao cho tổng các phần tử của nó là 2018.

Lưu ý: Bậc của một ma trận (nếu tồn tại) là số nguyên dương nhỏ nhất n sao cho $A^n = I$, trong đó I là ma trận đơn vị.

Bài toán 2.59 (CIIM 2023)**.** Cho A là ma trận thực đối xứng 3×3, ta định nghĩa $f(A)$ là ma trận 3×3 có cùng các vectơ riêng của A sao cho nếu A có các giá trị riêng a, b, c, thì $f(A)$ có các giá trị riêng $b+c$, $c+a$, $a+b$ (theo thứ tự đó). Ta định nghĩa một dãy các ma trận thực đối xứng 3×3 là dãy $A_0, A_1, A_2, \dots$ sao cho $A_{n+1} = f(A_n)$ với $n \geq 0$. Nếu ma trận A_0 không có phần tử bằng 0, hãy xác định số lượng chỉ số $j \geq 0$ tối đa mà ma trận A_j có thể có phần tử không bất kỳ.

Chương 3

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH VÀ KHÔNG GIAN VEC TƠ

3.1 Tổng quan về hệ phương trình tuyến tính

Hệ phương trình tuyến tính có dạng tổng quát là $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1, \ldots, m$.

Một số kết quả cơ bản

- Định lý Kronecker-Capelli: Hệ $A\mathbb{X} = b$ tồn tại nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(A|b)$.
- Nếu $\det A \neq 0$ thì hệ tồn tại và duy nhất nghiệm (Cramer), hơn nữa
$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$
- $\dim\{\mathbb{X} \in \mathbb{R}^n | A\mathbb{X} = 0\} = n - r(A)$.
- Nghiệm tổng quát của hệ phương trình không thuần nhất bằng nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất tương ứng cộng với nghiệm riêng của hệ không thuần nhất.

3.2 Một số bài toán về hệ phương trình tuyến tính

Bài toán 3.1. Chứng minh rằng nếu $A\mathbb{X} = b$ có nghiệm thì $r(\tilde{A}) = r(A)$.

Bài toán 3.2. Chứng minh rằng nếu $A\mathbb{X} = b$ không có nghiệm thì

$$r(\tilde{A}) = 1 + r(A).$$

Bài toán 3.3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} ax_1 & +bx_2 & +bx_3 & + & ... & +bx_{2002} & = 1 \\ bx_1 & +ax_2 & +bx_3 & + & ... & +bx_{2002} & = 2 \\ ... & ... & ... & & ... & ... & ... \\ bx_1 & +bx_2 & +bx_3 & + & ... & +ax_{2002} & = 2002 \end{cases}$

Tìm a, b để hệ phương trình có nghiệm.

Bài toán 3.4. Cho hệ phương trình có 10 phương trình và 11 ẩn số.

1. Biết bộ số (1992, 1993, ... , 2002) là một nghiệm của hệ phương trình.

2. Khi xoá cột thứ j trong ma trận hệ số của hệ phương trình đã cho thì ta được một ma trận vuông có định thức đúng bằng j $(j = 1,\ 2,\ ...,\ 11)$.

Hãy tìm tất cả các nghiệm của hệ.

Bài toán 3.5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & + & ... & +nx_n & = & 1 \\ x_2 & +2x_3 & +3x_4 & + & ... & +nx_1 & = & 2 \\ ... & ... & ... & & ... & ... & & ... \\ x_n & +2x_1 & +3x_2 & + & ... & +nx_{n-1} & = & n \end{cases}$

Bài toán 3.6. Cho các hệ số a_{ij} thoả mãn điều kiện $a_{ij} + a_{ji} = 0$, với mọi i, $j = 1, ..., n$; n lẻ. Chứng minh rằng hệ phương trình $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = 0$ $i = 1, 2, ..., n$ có nghiệm khác $(0, 0, ..., 0)$.

Bài toán 3.7. Cho $A = \left[a_{ij}\right]$ là ma trận vuông cấp n có các tính chất sau: $a_{ii} = 2007$ và $a_{ij} \in \{4; 20\}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., n$. Giải hệ phương trình $Ax = 0$.

Bài toán 3.8. Cho $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, chứng minh rằng hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 & = & a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + & ... & + a_{1n}x_n \\ \frac{1}{2}x_2 & = & a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + & ... & + a_{2n}x_n \\ ... & & ... & ... & & ... & ... \\ \frac{1}{2}x_n & = & a_{n1}x_1 & + a_{n2}x_2 & + & ... & + a_{nn}x_n \end{cases}$$

luôn có nghiệm.

Bài toán 3.9. Chứng minh rằng nếu $a \neq 0$ thì hệ phương trình

$$\begin{cases} ax & +(1-b)y & +cz & +(1-d)t & = & a \\ (b-1)x & +ay & +(d-1)z & +ct & = & b \\ -cx & +(1-d)y & +az & +(b-1)t & = & c \\ (d-1)x & -cy & +(1-b)z & +at & = & d \end{cases}$$

luôn có nghiệm với mọi $b, \ c, \ d$.

Bài toán 3.10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = \frac{a}{2004} \\ x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = \frac{a+x_1}{2005^2-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \frac{a+x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{2005^n-1} \end{cases}$

3.3 Tổng quan về không gian vec tơ

Trong mục này, sinh viên cần nắm định nghĩa và một số tính chất cơ bản của không gian vec tơ và một số phương pháp để nhận biết một không gian vec tơ.

Để nhận biết một tập hợp V có phải là không gian vec tơ hay không thì ta có thể dùng một số phương pháp, chẳng hạn như: Kiểm tra 8 tiên đề của không gian vec tơ, chứng minh tập V là một không gian vec tơ con của một không gian vec tơ đã biết.

3.4 Một số bài toán về không gian vec tơ

3.4.1 Độc lập tuyến tính, hệ sinh

Bài toán 3.11. Chứng minh rằng nếu $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ là hệ vec tơ độc lập tuyến tính thì hệ vec tơ $\{v_1, v_1 + v_2, \dots, v_1 + v_2 + \cdots + v_n\}$ cũng độc lập tuyến tính.

Bài toán 3.12. Giả sử $U = span\{v_1, \dots, v_k\}, v_i \in \mathbb{R}^n$. Nếu A là ma trận cỡ $m \times n$ thoả mãn $Av_i = 0, \forall i$, thì hãy chứng tỏ rằng $Au = 0, \forall u \in U$.

Bài toán 3.13. Chứng minh rằng nếu $\{u, v_1, \ldots, v_k\}$ là hệ độc lập tuyến tính thì hệ $\{u + v_1, \ldots, u + v_k\}$ cũng là hệ độc lập tuyến tính.

Bài toán 3.14. Chứng minh rằng nếu $\{v_1, \ldots, v_k\}$ là một hệ độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$ và nếu $u \notin span\{v_1, \ldots, v_k\}$ thì $\{v_1, \ldots, v_k, u\}$ độc lập tuyến tính.

Bài toán 3.15. Chứng tỏ rằng trong không gian vec tơ V, nếu $v_1, \ldots, v_n$ là các vec tơ độc lập tuyến tính, thì mỗi vec tơ v có không quá một biểu diễn tuyến tính qua $v_1, \ldots, v_n$.

Bài toán 3.16. Cho n véc tơ khác 0: $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n$ của không gian véc tơ V. Cho ánh xạ tuyến tính $A : V \to V$thoả mãn $Av_1 = v_1,\ Av_k = v_k + v_{k-1}\,;\ k = 2, \ldots, n$. Chứng minh hệ véc tơ $\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\}$ độc lập tuyến tính.

Bài toán 3.17. Giả sử rằng $u_1, \ldots, u_n$ là một hệ vec tơ độc lập tuyến tính và $a_{ij} \in \mathbb{R}; i \leq j \leq n$. Chứng minh rằng các vec tơ

$$\begin{aligned} &v_1 = a_{11}u_1, \\ &v_2 = a_{21}u_1 + a_{22}u_2, \\ &\ldots\ldots \\ &v_n = a_{n1}u_1 + \cdots + a_{nn}u_n, \end{aligned}$$

là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $a_{11} \ldots a_{nn} \neq 0$.

Bài toán 3.18. Giả sử $u_1, \ldots, u_n$ là một hệ vec tơ độc lập tuyến tính và $u = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$. Chứng minh rằng các vec tơ $u - u_1, \ldots, u - u_n$ là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $a_1 + \cdots + a_n \neq 1$.

Bài toán 3.19. Trong không gian $\mathbb{R}^n$, xét hệ vec tơ $v_1 = (v_{11}, \ldots, v_{1n}), \ldots, v_p = (v_{p1}, \ldots, v_{pn}), p \leq n$, có tính chất

$$|v_{ii}| > \sum_{j \neq i} |v_{ij}|.$$

Chứng tỏ rằng hệ này độc lập tuyến tính.

Bài toán 3.20. Chứng tỏ rằng các hệ vec tơ sau đây độc lập tuyến tính trong không gian các hàm liên tục tương ứng dưới đây:

1. $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \ldots, \sin nx, \cos nx\} \subset C_{[-\pi,\pi]}$;

2. $\{e^x, e^{2x}, \ldots, e^{nx}\} \subset C_{(-\infty,+\infty)}$.

Bài toán 3.21. Cho $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ lần lượt là các nguyên hàm nào đó của các hàm số $e^x, \ldots, e^{x^n}, n \geq 1$. Chứng minh rằng các hàm số này độc lập tuyến tính trong không gian $C_{(-\infty,+\infty)}$ các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài toán 3.22. Cho một tập hợp X. Ta trang bị cho không gian $F(X;\mathbb{R})$ cấu trúc $\mathbb{R}$-không gian véctơ cảm sinh từ cấu trúc không gian véctơ của $\mathbb{R}$. Cho $n \geq 1$ phần tử $f_1, \ldots, f_n \in F(X;\mathbb{R})$. Chứng minh rằng $f_1, \ldots, f_n$ là một họ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại n phần tử $x_1, \ldots, x_n \in X$ sao cho ma trận $(f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n}$ là khả nghịch.

Bài toán 3.23. Cho v_0 là vec tơ 0 của $\mathbb{R}^n$. Cho $v_i \in \mathbb{R}^n$ là các vec tơ sao cho chuẩn Euclide $\|v_i - v_j\|$ là các số hữu tỉ với $0 \leq i, j \leq n$. Chứng minh rằng các vec tơ $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ phụ thuộc tuyến tính trên $\mathbb{Q}$.

Bài toán 3.24. Chứng tỏ rằng hệ vec tơ $\{x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n}\}$, trong đó $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ là các số thực khác nhau, là độc lập tuyến tính trong không gian các hàm liên tục $C_{[0,1]}$.

Bài toán 3.25. Cho ma trận $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ và $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}^n$ sao cho hệ $A\mathbb{X} = b_i$ có nghiệm x_i với mọi i. Chứng minh rằng nếu hệ $\{b_1, \ldots, b_k\}$ độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^m$ thì hệ $\{\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_k\}$ cũng độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$.

Bài toán 3.26. Cho ma trận A cỡ $m \times n$ và các vec tơ cột của A là $v_1, \ldots, v_n$. Chứng minh rằng nếu $r(A) = n$ thì $\{A^T v_1, \ldots, A^T v_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$.

3.4.2 Không gian vec tơ, cơ sở và số chiều

Bài toán 3.27. Cho V là không gian con của $\mathbb{R}^n$ gồm các vec tơ thoả mãn $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Hãy tìm cơ sở và chiều của V.

Bài toán 3.28. Tìm cơ sở và số chiều của không gian con của $\mathbb{R}^n$ gồm các vec tơ có toạ độ thoả mãn $x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0$.

Bài toán 3.29. Tìm cơ sở và số chiều của tập các ma trận vuông đối xứng cấp n.

Bài toán 3.30. Tìm cơ sở và số chiều của tập các ma trận vuông phản đối xứng cấp n.

Bài toán 3.31. Tìm toạ độ của đa thức $f(x)$ bậc n trong cơ sở $\{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\}$ của không gian $\mathbb{P}_n[x]$ các đa thức bậc không quá n.

Bài toán 3.32. Với $n \geq 3$. Hãy xem khi nào thì

$$e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_n + e_1$$

lập thành cơ sở của $\mathbb{R}^n$?

Bài toán 3.33. Cho $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

1. Chứng minh rằng $\{A\mathbb{X} = 0\} = \{(UA)\mathbb{X} = 0\}$ với mọi $U \in \mathcal{M}_n$ khả nghịch.

2. Chứng minh rằng $\dim(Null(A)) = \dim(Null(AB)), \forall B \in \mathcal{M}_n$ khả nghịch.

Bài toán 3.34. Cho U và W là hai không gian con của $\mathbb{R}^n$ và giả sử $U \subseteq W$. Chứng minh rằng nếu $\dim W = 1$ thì hoặc $U = \{0\}$, hoặc $U = W$.

Bài toán 3.35. Cho $P_n[x]$ và $P[x]$ là tập các đa thức với hệ số thực bậc không vượt quá n và tập các đa thức với hệ số thực.

a, Chứng minh rằng $P_n[x]$ là một không gian vec tơ trên $\mathbb{R}$ với phép toán cộng và phép nhân với một số của các đa thức.

b, Chứng tỏ rằng $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ và $\{1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\}, a \in \mathbb{R}$ cùng là cơ sở của $P_n[x]$.

c, Tìm tọa độ của $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in P_n[x]$ ứng với cơ sở $\{1, (x - a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\}$.

d, Cho $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ phân biệt. Với $i = 1, \ldots, n+1$, đặt

$$f_i(x) = (x - a_1)\ldots(x - a_{i-1})(x - a_{i+1})\ldots(x - a_{n+1}).$$

Chứng minh rằng $\{f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x)\}$ là một cơ sở của $P_n[x]$.

e, Chứng minh rằng $W = \{f(x) \in P_n[x] | f(1) = 0\}$ là một không gian con $P_n[x]$. Tìm số chiều và cơ sở của không gian con này.

f, Nếu $P[x]$ là một không gian vec tơ trên $\mathbb{R}$ thì $P[x]$ có vô hạn chiều không?

g, Chứng minh rằng $P_n[x]$ là một không gian riêng của $P[x]$.

Chương 4

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

4.1 Lý thuyết về ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa 4.1. Ánh xạ $f : V \to W$ thoả mãn:

$$\forall u, v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \quad \begin{cases} f(u+v) & = f(u) + f(v) \\ f(\alpha u) & = \alpha f(u) \end{cases}$$

được gọi là một ánh xạ tuyến tính từ V vào W.
Khi $V = W$, f được gọi là tự đồng cấu.

Một số kết quả lý thuyết

- Ánh xạ tuyến tính xét trong hai cơ sở cố định của V và W được xác định hoàn toàn bởi một ma trận.

- Mỗi ánh xạ tuyến tính hoàn toàn được xác định bởi ảnh của một cơ sở. Do đó $Imf = span\{f(e_1, \ldots, f(e_n))\}$ với $\{e_1, \ldots, e_n\}$ là cơ sở.

- $\dim Imf = r(A) = n - \dim \ker A$.

- Tự đồng cấu luỹ linh tương ứng với một ma trận luỹ linh.

- Tự đồng cấu luỹ đẳng tương ứng với một ma trận luỹ đẳng.

4.2 Bài tập về ánh xạ tuyến tính và không gian con

Bài toán 4.1. Cho $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

1. Chứng minh rằng $Im(A) = Im(AB), \forall B \in \mathcal{M}_n$ khả nghịch.

2. Chứng minh rằng $\dim ImA = \dim Im(UA), \forall U \in \mathcal{M}_n$ khả nghịch.

Bài toán 4.2. Cho v là một vec tơ thuộc $\mathbb{R}^n$. Xác định $U = \{Av | A \in \mathcal{M}_{m\times n}\}$. Chứng minh rằng:

1. U là một không gian con của $\mathbb{R}^m$.

2. $U = \mathbb{R}^m$ nếu $v \neq 0$.

Bài toán 4.3. Cho $B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ và $AB \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Chứng minh rằng nếu $r(B) = r(AB)$ thì $Null(B) = Null(AB)$.

Bài toán 4.4. Cho $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ với $r(A) = r$. Chứng minh rằng nếu

$$U = \{\mathbb{X} \in \mathcal{M}_n | A\mathbb{X} = 0\}$$

thì $\dim U = n(n-r)$.

Bài toán 4.5. Cho $a, b \in \mathbb{R}$ và $a \neq b$.

1. Chứng minh rằng $\{(x-a), (x-b)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{P}_1[x]$.

2. Chứng minh rằng $\{(x-a)^2, (x-a)(x-b), (x-b)^2\}$ là cơ sở của $\mathbb{P}_2[x]$.

3. Chứng minh rằng

   $$\{(x-a)^n, (x-a)^{n-1}(x-b), \ldots, (x-a)(x-b)^{n-1}, (x-b)^n\}$$

   là cơ sở của $\mathbb{P}_n[x]$.

Bài toán 4.6. Gọi $\mathcal{D}$ là toán tử vi phân trên $P_n[x]$ (các đa thức với hệ số thực có bậc nhỏ hơn n) được xác định như sau: Nếu

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} \in P_n[x]$$

thì

$$\mathcal{D}(p(x)) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + i a_i x^{i-1} + \cdots + (n-1) a_{n-1} x^{n-2}.$$

Chứng minh rằng:

(a) Chứng tỏ rằng $\mathcal{D}$ là một phép biến đổi tuyến tính trên $P_n[x]$.

(b) Tìm giá trị riêng của $\mathcal{D}$ và $\mathcal{I} + \mathcal{D}$.

(c) Tìm ma trận biểu diễn của $\mathcal{D}$ dưới các cơ sở

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\} \text{ và } \{1, x, \frac{x^2}{2}, \ldots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\}.$$

(d) Ma trận biểu diễn của $\mathcal{D}$ có chéo hoá được không?

Bài toán 4.7. Cho một ánh xạ trên $P_n[x]$ xác định như sau:

$$\mathcal{A}(p(x)) = xp'(x) - p(x), p(x) \in P_n[x].$$

(a) Chứng tỏ rằng $\mathcal{A}$ là một phép biến đổi tuyến tính trên $P_n[x]$.

(b) Tìm $Ker\mathcal{A}$ và $Im\mathcal{A}$.

(c) Chứng minh rằng $P_n[x] = Ker\mathcal{A} \oplus Im\mathcal{A}$.

Bài toán 4.8. Cho không gian vec tơ $P_n[x]$ trên $\mathbb{R}$. Đặt:

$$\mathcal{A}f(x) = f'(x), f(x) \in P_n[x]$$

và

$$\mathcal{B}f(x) = xf(x), f(x) \in P_n[x].$$

Chứng minh rằng:

(a) $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ là các phép biến đổi tuyến tính.

(b) $Im\mathcal{A} = P_n[x]$ và $Ker\mathcal{A} \neq \{0\}$.

(c) $Ker\mathcal{B} = \{0\}$ và $\mathcal{B}$ không có ánh xạ ngược.

(d) $\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{I}$.

(e) $\mathcal{A}^k\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}^k = k\mathcal{A}^{k-1}$ với mọi số nguyên dương k.

4.3 Bài tập về ánh xạ tuyến tính và chéo hoá

Bài toán 4.9. Cho ma trận vuông cấp n có dạng $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Tìm véc tơ v sao cho hệ véc tơ $\{v,\ Av,\ \dots,\ A^{n-1}v\}$ độc lập tuyến tính.

2. Nếu A đồng dạng với ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo là $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ thì các phần tử λ_i khác nhau từng đôi một.

Bài toán 4.10. Cho $A,\ B$ là hai ma trận cấp n. Chứng minh tập các giá trị riêng của AB và BA bằng nhau.

Bài toán 4.11. Cho A là ma trận cỡ $m \times n$, B là ma trận cỡ $n \times m$. Tìm biểu thức liên hệ giữa đa thức đặc trưng của AB và BA.

Bài toán 4.12. Cho A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh các khẳng định sau:

1. A không suy biến khi và chỉ khi các giá trị riêng của A khác không.

2. Nếu A không suy biến thì các giá trị riêng của A^{-1} bằng nghịch đảo các giá trị riêng của A.

3. Các giá trị riêng của A^2 bằng bình phương các giá trị riêng của A.

4. Các giá trị riêng của A^m bằng luỹ thừa m các giá trị riêng của A.

5. Giả sử $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của A; $f(x)$ là một đa thức thì các giá trị riêng của $f(A)$ là $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)$.

Bài toán 4.13. Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ xác định như sau $a_{ij} = 0$ nếu $1 \leq i, j \leq p$ hay $p + 1 \leq i, j \leq n$. Chứng minh rằng nếu λ là một giá trị riêng của A thì $-\lambda$ cũng là một giá trị riêng của A.

Bài toán 4.14. Cho ba ma trân vuông cấp n A, B, C giao hoán từng đôi một. Chứng minh tồn tại các số thực α, β, γ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\det(\alpha A + \beta B + \gamma C) = 0.$$

Bài toán 4.15. Cho A là ma trận vuông cấp n.

1. Chứng minh rằng tồn tại đa thức $f(x)$ sao cho $f(A) = 0$. (Đa thức có bậc nhỏ nhất và hệ số ứng với bậc lớn nhất bằng 1 được gọi là đa thức tối tiểu của A).

2. Chứng minh $P(A) = 0$, trong đó $P(\lambda) = |A - \lambda I|$ là đa thức đặc trưng của A.

Bài toán 4.16. Tìm điều kiện cần và đủ để ma trận $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ chéo hoá được.

Bài toán 4.17. Tìm điều kiện để ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & a_2 & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ chéo hoá được.

Bài toán 4.18. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ thoả mãn $a_{12} = a_{21}$ có giá trị riêng là $\lambda_1,\ \lambda_2$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của a_{12}.

Bài toán 4.19. Cho ma trận vuông cấp n $A = \begin{bmatrix} a & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}$.

1. Tính A^m.

2. Tính tổng các phần tử trên hàng thứ nhất của A^m, $m \leq n$.

3. Cho đa thức $f(x)$. Chứng minh $f(A) = \begin{bmatrix} f(a) & \frac{f'(a)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \\ 0 & f(a) & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(a) \end{bmatrix}$

Bài toán 4.20. $P(\lambda) = |A - \lambda I|$ là đa thức đặc trưng của A có một nghiệm λ_0 bội p. Đặt $r = rank\,(A - \lambda_0 I)$, chứng minh $1 \leq n - r \leq p$.

Bài toán 4.21. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$ (ma trận có toàn bộ các phần tử đều bằng 0 trừ đường chéo phụ toàn bằng 1). Chứng minh rằng A chéo hoá được và tìm một ma trận P khả nghịch sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo.

Bài toán 4.22. Tìm các giá trị riêng của ma trận $A^T A$, trong đó $A = (a_1, \ldots, a_n)$.

Bài toán 4.23. Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp. Chứng minh rằng AB và BA có cùng đa thức đặc trưng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Hội Toán học Việt Nam, *Kỷ yếu Olympic Toán toàn quốc*, các năm 2000-2023, Hội Toán học Việt Nam.

[2] Lê Bá Long, *Tài liệu giảng dạy Olympic cho đội tuyển Olympic Toán toàn quốc của Học viện BCVT*, bài giảng, 2015.

[3] Nguyễn Hữu Việt Hưng, *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2001.

[4] Ngô Việt Trung, *Giáo trình đại số tuyến tính*, Bộ sách Viện Toán học, NXB ĐHQG Hà Nội, 2001.

[5] Lê Tuấn Hoa, *Đại số tuyến tính qua các ví dụ & bài tập*, Bộ sách của Viện Toán học, NXB ĐHQG Hà Nội, 2005.

[6] G. Strang, *Introduction to linear algebra*, American Mathematical Society, 146 Providence, RI, 2008.

[7] D. Lay, *Linear algebra and its applications*, Addison-Wesley, 2012.

[8] I. V. Proskuryakov, *Problems in linear algebra*, Mir Publishers, Moscow, 1978.

[9] V. Prasolov, *Problems and theorems in linear algebra*, Notes by the author.

[10] Zhang F., *Linear Algebra : Challenging Problems for Students*, 2nd ed. Johns Hopkins University Press, 2009.