KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN-HỌC SINH LẦN THỨ 29

HUẾ, 2-8/4/2023

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM - ĐH HUẾ

HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
SƯ PHẠM - ĐH HUẾ

KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC
SINH VIÊN - HỌC SINH LẦN THỨ 29

Biên tập

Ngô Quốc Anh
Trường ĐH Khoa học Tự nhiên-ĐHQG Hà Nội

Trần Thị Hoàng Anh
Viện Toán học

Đào Phương Bắc
Trường ĐH Khoa học Tự nhiên-ĐHQG Hà Nội

Đoàn Trung Cường
Hội Toán học Việt Nam & Viện Toán học

HUẾ, 2-8/4/2023

GIỚI THIỆU

Kỳ thi Olympic Toán học lần thứ 29 dành cho sinh viên các trường đại học, cao đẳng, học viện và học sinh phổ thông các trường chuyên trong cả nước đã diễn ra tại trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế từ 2-8/4/2023. Quyển kỷ yếu này chủ yếu dành để tập hợp lại một số bài đề xuất của các trường tham dự kỳ thi với mong muốn cung cấp thêm một tài liệu tham khảo cho những người quan tâm. Do thời gian biên tập khá ngắn nên ngoài một số bài được biên tập tương đối kỹ càng, có một số bài chúng tôi giữ nguyên cách trình bày như đề xuất, công tác biên tập trong trường hợp đó là đánh máy lại, kiểm tra tính chính xác về nội dung và chính tả.

Nhóm biên tập

Mục lục

Phần I

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN - HỌC SINH LẦN THỨ 29

Thông tin về kỳ thi

Kỳ thi Olympic Toán học sinh viên có mục tiêu động viên phong trào học toán trong sinh viên và thúc đẩy công tác đổi mới trong giảng dạy, học tập. Kỳ thi đã được Hội Toán học Việt Nam khởi xướng và phối hợp với Bộ Giáo dục và Đào tạo, Liên hiệp các Hội Khoa học - Kỹ thuật Việt Nam, Trung ương Hội Sinh viên Việt Nam thực hiện thành công trong 30 năm qua, hiện nay trở nên càng quan trọng trong bối cảnh thời lượng các môn toán ở phần lớn các trường đại học giảm. Để chuẩn bị cho kỳ thi, nhiều trường đại học, cao đẳng, học viện đã có sự chuẩn bị rất tốt và tích cực tham gia, nhiều sinh viên yêu toán đã rất mong đợi kỳ thi này. Kỳ thi cũng nhận được sự ủng hộ của lãnh đạo các trường, học viện, sự nhiệt tình cuả các thầy cô giáo đã tổ chức, động viên, tham gia bồi dưỡng cho các đoàn dự thi Olympic, những người đã có đóng góp hết sức quan trọng cho việc duy trì và thành công của các kỳ olympic Toán.

Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên và Học sinh lần thứ 29 năm 2023 được tổ chức trong hai khoảng thời gian 18-19/3/2023 cho học sinh và 2-8/4/2023 cho sinh viên. Do điều kiện đi lại khác nhau nên phần thi của học sinh THPT được tổ chức trực tuyến, phần thi của sinh viên được tổ chức trực tiếp tại Trường ĐH Sư phạm - Đại học Huế.

Dưới đây là một số nét chính về chuyên môn của kỳ thi.

1. Đại học:

Năm nay đã có 615 sinh viên đăng ký dự thi với 713 lượt thi, cụ thể 368 sinh viên thi môn Đại số (ĐS), 345 sinh viên thi môn Giải tích (GT). Trong mỗi môn thi, các trường đăng kí theo hai bảng A và B, số lượng cụ thể như:

Ở môn Đại số có 161 em dự thi bảng A và 207 em dự thi bảng B;

Ở môn Giải tích có 168 em dự thi bảng A và 177 em dự thi bảng B.

Kỳ thi đã diễn ra suôn sẻ và nghiêm túc. Năm nay đề thi môn Giải tích tương đối vừa sức sinh viên, kết quả môn Đại số có sự phân hóa mạnh giữa top trên và nhóm dưới.

Điểm cao nhất ở 2 môn Đại số và Giải tích là 28,5 và 30; có 4 sinh viên đạt 2 giải nhất là Ngô Quý Đăng và Trần Ngọc Hiếu (Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội), Nguyễn Mạc Nam Trung (Trường ĐHKHTN, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh), Dương Thanh Tùng (Trường ĐH FPT), trong đó sinh viên Ngô Quý Đăng xuất sắc là thủ khoa đồng thời hai môn Đại số và Giải tích. Có 2 sinh viên nữ xuất sắc đạt giải nhất là Cù Thị Kiều Trang (ĐH Hùng Vương, Đại số, bảng B) và Nguyễn Thị Bích Ngân (ĐH Tài chính-Marketing, Giải tích, bảng B).

Số lượng giải thưởng cho sinh viên: 62 giải nhất, 126 giải nhì, 191 giải ba. Ban Tổ chức cũng trao một số giải Khuyến khích cho những thí sinh có điểm gần giải chính thức hoặc cao nhất đội.

Các đoàn ở mảng đại học có thành tích tốt:

Bảng A: Đại học Bách khoa Hà Nội, Trường ĐH Khoa học Tự nhiên - ĐHQG Hà Nội, Trường ĐH Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh.
Bảng B: Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông, Trường ĐH VINUni, Trường ĐH FPT.
Thời gian gần đây, Ban giám khảo đã có chủ trương ra đề thi mang tính ứng dụng hơn. Bên cạnh những bài toán theo phong cách truyền thống, có thêm những bài toán ứng dụng thực tế, trong đó thí sinh cần xây dựng mô hình toán học, sau đó dùng công cụ toán học để tìm lời giải cho bài toán thực tế.
2. Trung học phổ thông
Mảng thi của THPT được tổ chức từ 18-19/3/2023 theo hình thức trực tuyến. Đã có 46 đoàn tham dự với 380 học sinh. Các học sinh đã làm hai bài thi trong hai buổi. Mỗi bài thi là một chuỗi câu hỏi liên kết chặt chẽ với nhau, giúp các học sinh tìm hiểu một vấn đề của toán sơ cấp có liên quan tới toán cao cấp.
Số lượng giải thưởng cho học sinh: 34 giải nhất, 67 giải nhì, 99 giải ba.
Thủ khoa là em Phạm Gia Hưng (Trường THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, Quảng Bình); Á khoa 1 là em Trần Gia Định (Trường THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình), Á khoa 2 là em Lê Mạnh Khiêm (Trường THPT chuyên Hạ Long, Quảng Ninh).
Các trường đạt thành tích tốt nhất là THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình, THPT chuyên Hà Tĩnh và THPT chuyên Vĩnh Phúc.
Nhân kỳ thi này, gần 1.000 học sinh THPT đã được tham dự một số bài giảng về Hình học, Số học và Đại số do các chuyên gia bồi dưỡng học sinh giỏi dạy trực tuyến.

Olympic Toán học Sinh viên và Học sinh lần thứ 29 đã thành công tốt đẹp về cả chuyên môn lẫn công tác tổ chức.

Phần II

ĐỀ THI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

1 Đại số

1.1 Bảng A

BÀI 1. Ký hiệu $\mathbb{R}[X]_{2023}$ là $\mathbb{R}$-không gian vectơ các đa thức một biến với bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2023. Cho f là ánh xạ đặt tương ứng mỗi đa thức với đạo hàm cấp hai của nó:

$$f : \mathbb{R}[X]_{2023} \to \mathbb{R}[X]_{2023},$$
$$p(X) \mapsto p''(X).$$

Đặt $g = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{870 \text{ lần}}$ là ánh xạ hợp của 870 lần ánh xạ f.

(a) Chứng minh rằng g là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}[X]_{2023}$ vào chính nó.

(b) Tìm số chiều và một cơ sở của không gian ảnh $\mathrm{Im}(g)$ và của không gian hạt nhân $\mathrm{Ker}(g)$.

BÀI 2.

(a) Một thành phố có hai nhà máy: nhà máy điện (E) và nhà máy nước (W). Để nhà máy (E) sản xuất điện thì nó cần nguyên liệu đầu vào là điện do chính nó sản xuất trước đó và nước của nhà máy (W). Tương tự như vậy để nhà máy (W) sản xuất nước thì nó cần đến nước do chính nó sản xuất cũng như điện của nhà máy (E). Cụ thể

- Để sản xuất được lượng điện tương đương 1 đồng, nhà máy (E) cần lượng điện tương đương $0,3$ đồng mà nó sản suất được trước đó và lượng nước tương đương $0,1$ đồng từ nhà máy (W);
- Để sản xuất được lượng nước tương đương 1 đồng, nhà máy (W) cần lượng điện tương đương $0,2$ đồng từ nhà máy (E) và lượng nước tương đương $0,4$ đồng do chính nó sản suất trước đó.

Chính quyền thành phố yêu cầu hai nhà máy trên cung cấp đến được với người dân lượng điện tương đương 12 tỷ đồng và lượng nước tương đương 8 tỷ đồng. Hỏi thực tế mỗi nhà máy cần sản xuất tổng cộng lượng điện và lượng nước tương đương với bao nhiêu tỷ đồng để cung cấp đủ nhu cầu của người dân?

(b) Cho $A = \left(a_{ij}\right)_{2\times 2}$ là ma trận thỏa mãn các phần tử đều là số thực không âm và tổng các phần tử trên mỗi cột của A đều nhỏ hơn 1. Với $d = (d_1, d_2)^T$ là một vectơ cột tùy ý, chứng minh rằng tồn tại duy nhất một vectơ cột $x = (x_1, x_2)^T$ sao cho $x = Ax + d$.

BÀI 3. Cho $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là các số phức thỏa mãn đa thức $x^4 - 2x^3 - 1$ bằng $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$.

(a) Chứng minh rằng các số $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nói trên đôi một khác nhau.

(b) Chứng minh rằng các số $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$ cũng đôi một khác nhau.

(c) Tính giá trị của biểu thức $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3$.

BÀI 4. Với mỗi ma trận vuông A có phần tử là các số phức, ta định nghĩa:

$$\sin A = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}.$$

(Ở đây ma trận giới hạn có phần tử là giới hạn của phần tử tương ứng của các ma trận tổng $S_k = \sum\limits_{n=0}^{k} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$. Ma trận giới hạn này luôn tồn tại.)

(a) Tìm các phần tử của ma trận $\sin A$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Cho x, y là hai số thực bất kỳ, hãy tìm các phần tử của ma trận $\sin A$ với

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

theo x, y.

(c) Tồn tại hay không một ma trận vuông A cấp 2 với phần tử là các số thực sao cho

$$\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

BÀI 5. Ký hiệu P_n là tập hợp tất cả các ma trận khả nghịch A cấp n sao cho các phần tử của A và A^{-1} đều bằng 0 hoặc 1.

(a) Với $n = 3$ hãy tìm tất cả các ma trận thuộc P_3.

(b) Tính số phần tử của P_n với n là số nguyên dương tùy ý.

1.2 Bảng B

BÀI 1.

(a) Cho x là một số thực. Tính định thức của ma trận sau theo x:

$$A = \begin{pmatrix} x & 2022 & 2023 \\ 2022 & 2023 & x \\ 2023 & x & 2022 \end{pmatrix}.$$

(b) Tìm các số thực x sao cho hạng của ma trận A nhỏ hơn 3. Tính hạng của ma trận A với x vừa tìm được.

BÀI 2. Giả sử $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến tính cho bởi:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + \lambda x_2 - x_3 + 2x_4, 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 + 5x_4, x_1 + 10x_2 - 6x_3 + x_4),$$

trong đó $\lambda \in \mathbb{R}$ là tham số.

(a) Với $\lambda = 3$, hãy tìm

(a1) Một cơ sở và số chiều của không gian hạt nhân $\mathrm{Ker}(f)$.

(a2) Một cơ sở và số chiều của không gian ảnh $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Tìm số chiều của không gian ảnh $\mathrm{Im}(f)$ như một hàm số của λ.

BÀI 3. Cho đa thức $P(x) = x^4 - 2x^3 - 1$.

(a) Biết rằng phương trình $P(x) = 0$ có 4 nghiệm phức (kể cả bội), ký hiệu bởi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Chứng minh rằng các nghiệm phức nói trên đôi một phân biệt.

(b) Chứng minh rằng các lũy thừa $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$ cũng là các số đôi một phân biệt.

(c) Tìm một đa thức bậc 4 nhận các số $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$ là nghiệm.

BÀI 4. Với mỗi ma trận vuông A có phần tử là các số phức, ta định nghĩa:

$$e^A = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{A^n}{n!}.$$

(Ở đây quy ước $0! = 1$, A^0 là ma trận đơn vị, ma trận giới hạn ở vế phải có phần tử là giới hạn của phần tử tương ứng của các ma trận tổng $S_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{A^n}{n!}$. Ma trận giới hạn này luôn tồn tại.)

(a) Với A là ma trận
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$
hãy tìm một ma trận khả nghịch C sao cho $C^{-1}AC$ là ma trận đường chéo.

(b) Tìm các phần tử của ma trận e^A với A là ma trận cho ở phần (a).

BÀI 5. Ký hiệu P_n là tập hợp tất cả các ma trận khả nghịch A cấp n sao cho các phần tử của A và A^{-1} đều bằng 0 hoặc 1.

(a) Với $n = 3$ hãy tìm tất cả các ma trận thuộc P_3.

(b) Chứng minh rằng tồn tại một song ánh giữa P_n và tập S_n các hoán vị trên n phần tử. Từ đó hãy tính số phần tử của P_n với n là số nguyên dương tùy ý.

2 Giải tích

2.1 Bảng A

BÀI 1. Cho $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi
$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{4^k}\right) = \left(1+\frac{1}{4^1}\right)\left(1+\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4^n}\right) \quad \forall n \geq 1.$$

(a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > 5/4$.

(b) Chứng minh rằng $u_n \leq 2023$ với mọi số nguyên dương n.

(c) Chứng minh rằng dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và xác định giới hạn của dãy số chính xác đến 1 chữ số sau dấu phẩy thập phân.

BÀI 2. Cho $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức
$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{nếu } x \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}, \\ x & \text{nếu } x \in [-1,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

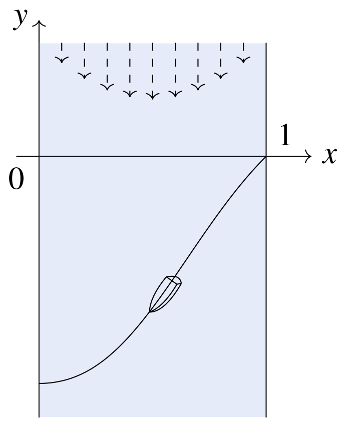
(a) Chứng minh rằng hàm f liên tục tại 0.

(b) Hàm f có khả vi tại 0 không?

(c) Hàm f có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1,1]$ không?

BÀI 3.

Hình vẽ bên cạnh mô tả một phần dòng sông với bờ trái được cho bởi đường thẳng $x = 0$ và bờ phải được cho bởi đường thẳng $x = 1$. Một con thuyền xuất phát từ điểm $(1,0)$ và muốn vượt sông để đến điểm dự kiến $(0,0)$.



Do dòng chảy của sông nên đường đi thực tế của con thuyền trùng khớp phần đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2}$$

với $0 \le x \le 1$.

(a) Con thuyền có đến được điểm $(0,0)$ như dự kiến không?

(b) Trong trường hợp không đến được điểm $(0,0)$ như dự kiến, con thuyền có cập được bờ trái hay không?

(c) Hãy xác định vị trí của con thuyền khi khoảng cách từ nó đến điểm đích $(0,0)$ là ngắn nhất trong cả quá trình chuyển động.

BÀI 4. Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục.

(a) Chứng minh rằng nếu

$$\int_0^1 f(x)\big(P(x)\big)^m dx = 0$$

với mọi số nguyên không âm m và với mọi đa thức bậc hai P thì $f \equiv 0$ trên $[0,1]$.

(b) Kết luận ở ý (a) còn đúng không nếu điều kiện P là đa thức bậc hai được thay bằng điều kiện P là đa thức bậc nhất?

BÀI 5. Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục trên $[0,1]$, khả vi trong $(0,1)$, và có $f(0) = 0$.

(a) Có tồn tại hay không một số thực $d \in (0,1)$ sao cho

$$|f'(d)| \le \big(f(d)\big)^2\,?$$

(Nếu câu trả lời là "có", hãy chứng minh; nếu câu trả lời là "không", hãy chỉ ra ví dụ về một hàm f.)

(b) Chứng minh rằng nếu

$$|f'(x)| \leq \big(f(x)\big)^2 \quad \text{với mọi } x \in (0,1)$$

thì $f \equiv 0$ trên $[0,1]$.

(c) Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho

$$\big(f(c)\big)^2 \leq |f'(c)|.$$

2.2 Bảng B

BÀI 1. Cho $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{4^k}\right) = \left(1+\frac{1}{4^1}\right)\left(1+\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4^n}\right) \quad \forall n \geq 1.$$

(a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > 5/4$.

(b) Chứng minh rằng $u_n \leq 2023$ với mọi số nguyên dương n.

(c) Chứng minh rằng dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.

BÀI 2. Cho $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{nếu } x \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}, \\ x & \text{nếu } x \in [-1,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Chứng minh rằng hàm f liên tục tại 0.

(b) Hàm f có khả vi tại 0 không?

(c) Hàm f có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1,1]$ không?

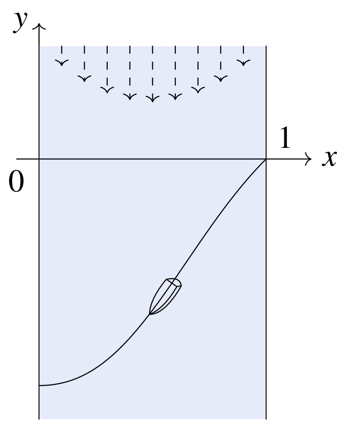
BÀI 3.

Hình vẽ bên cạnh mô tả một phần dòng sông với bờ trái được cho bởi đường thẳng $x=0$ và bờ phải được cho bởi đường thẳng $x=1$. Một con thuyền xuất phát từ điểm $(1,0)$ và muốn vượt sông để đến điểm dự kiến $(0,0)$.

Do dòng chảy của sông nên đường đi thực tế của con thuyền trùng khớp phần đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x^2-1}{x^3+2}$$

với $0 \leq x \leq 1$.



(a) Con thuyền có đến được điểm $(0,0)$ như dự kiến không?

(b) Trong trường hợp không đến được điểm $(0,0)$ như dự kiến, con thuyền có cập được bờ trái hay không?

(c) Hãy xác định vị trí của con thuyền khi khoảng cách từ nó đến điểm đích $(0,0)$ là ngắn nhất trong cả quá trình chuyển động.

BÀI 4. Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục.

(a) Chứng minh rằng nếu

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$$

với mọi hàm số liên tục $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$g(0) = g(1) = 0$$

thì $f \equiv 0$ trên $[0,1]$.

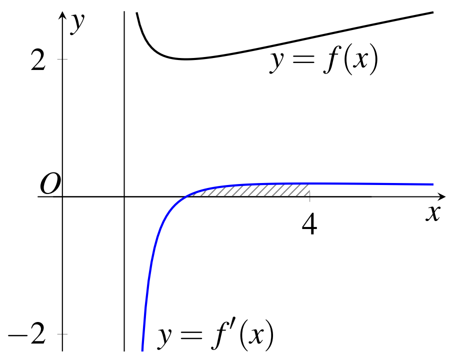
(b) Kết luận ở ý (a) còn đúng không nếu ta thêm điều kiện $g(\frac{1}{2}) = 0$?

BÀI 5.

Hình vẽ bên cạnh thể hiện một phần đồ thị của hàm f được cho bởi

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

và đồ thị của hàm f' (đạo hàm của hàm f).



(b) Không tính f' và không dùng hình vẽ, hãy chứng tỏ rằng phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm trên $(1, +\infty)$.

(c) Tìm công thức tính $f'(x)$ theo x.

(c) Tính diện tích phần mặt phẳng (phần được gạch chéo trên hình) được giới hạn bởi trục Ox, đồ thị hàm f', và đường thẳng $x = 4$.

3 Trung học phổ thông

3.1 Ngày thứ nhất: Đại số

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước trong lời giải của câu sau. Nếu một câu được giải mà không dựa vào kết quả của các câu trước thì có thể dùng để giải các câu trước.

A. Các kết quả cơ bản về đa thức bất khả quy

Ký hiệu $\mathbb{Z}[x]$ và $\mathbb{Q}[x]$ lần lượt là tập hợp các đa thức hệ số nguyên và hệ số hữu tỷ. Một đa thức bậc ≥ 1 trong $\mathbb{Z}[x]$ (tương ứng, $\mathbb{Q}[x]$) được gọi là bất khả quy trong $\mathbb{Z}[z]$ (tương ứng, $\mathbb{Q}[x]$) nếu nó không thể viết được thành tích hai đa thức trong $\mathbb{Z}[x]$ (tương ứng, $\mathbb{Q}[x]$), mỗi đa thức có bậc ≥ 1.

BÀI 1. Chứng minh rằng đa thức

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3) - 1$$

bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$.

BÀI 2. a) Cho số nguyên tố p và hai đa thức hệ số nguyên

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0; \; Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Biết rằng tích $P(x)Q(x)$ là một đa thức có tất cả các hệ số chia hết cho p. Chứng minh rằng một trong hai đa thức $P(x)$, $Q(x)$ có tất cả các hệ số chia hết cho p.
b) Một đa thức hệ số nguyên có bậc lớn hơn 0 được gọi là *đa thức nguyên bản* nếu ước chung lớn nhất của các hệ số của đa thức đó bằng 1 (nói cách khác, các hệ số của nó là một họ các số nguyên nguyên tố cùng nhau). Chứng minh rằng tích của hai đa thức nguyên bản là một đa thức nguyên bản.

BÀI 3. Cho đa thức hệ số nguyên có bậc $n > 0$:

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Giả sử tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn các điều kiện sau:
a) $p \mid a_i$ với mọi $0 \leq i < n$,
b) $p \nmid a_n$,
c) $p^2 \nmid a_0$.
Chứng minh rằng $P(x)$ bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$.

BÀI 4. Chứng minh rằng một đa thức hệ số nguyên bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$ khi và chỉ khi nó bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$.

BÀI 5. Cho đa thức

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

với bậc $n \geq 2$ và $a_0 \neq 0$. Chứng minh rằng nếu $|a_{n-1}| > 1 + |a_{n-2}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$ thì $P(x)$ bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$.

B. Ứng dụng của đa thức bất khả quy

BÀI 6. Chứng minh các đa thức sau bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$:
a) $\dfrac{x^p}{p!} + \dfrac{x^{p-1}}{(p-1)!} + \cdots + \dfrac{x^2}{2!} + x + 1$, với p là một số nguyên tố.
b) $x^{2^n} + 1$, với n là số nguyên dương.

BÀI 7. Cho đa thức hệ số nguyên

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \quad n \geq 1$$

thỏa mãn các điều kiện sau:
a) $|a_0|$ không là số chính phương,
b) $P(x)$ là bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$.
Chứng minh rằng $P(x^2)$ là bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$.

BÀI 8. Chứng minh rằng đa thức

$$(x^2-1)^2(x^2-2)^2\cdots(x^2-2023)^2+1$$

bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$.

BÀI 9. Chứng minh rằng đa thức

$$(x(x+1))^{2^{2023}}+1$$

bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$.

BÀI 10. Chứng minh rằng đa thức

$$(x(x+1)(x+2)(x+3))^{2^{2023}}+1$$

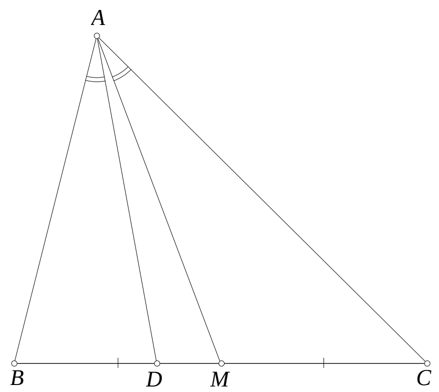
bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$.

3.2 Ngày thứ hai: Hình học

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước để chứng minh bài đang làm.

A. Các đường đối trung của tam giác

Trong tam giác ABC với trung tuyến AM (M là trung điểm BC), lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $\angle DAB = \angle MAC$. Khi đó đường thẳng AD gọi là đường đối trung ứng với đỉnh A của tam giác ABC. Đoạn thẳng AD gọi là đoạn đối trung ứng với đỉnh A. Thuật ngữ "đối trung" là viết tắt của "đối xứng của đường trung tuyến" (qua đường phân giác).



BÀI 1. Cho tam giác ABC với đường đối trung AD (D thuộc cạnh BC). Chứng minh rằng

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

BÀI 2. Chứng minh rằng ba đường đối trung ứng với ba đỉnh tam giác đồng quy tại một điểm; điểm đồng quy đó được gọi là *điểm Lemoine* của tam giác đã cho.

BÀI 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Điểm P nằm trong tam giác sao cho $\angle PBC = \angle PCA$ và M là trung điểm BC. Chứng minh rằng $\angle APB + \angle MPC = 180^\circ$.

BÀI 4. Phải chăng ta luôn có độ dài của đường đối trung không vượt quá độ dài của đường phân giác tại cùng một đỉnh?

B. Một số tính chất định lượng của đường đối trung và điểm Lemoine

Trong phần này, với tam giác ABC, ta đặt $a = BC, b = CA, c = AB$.

BÀI 5. Cho tam giác ABC với điểm Lemoine L. Chứng minh rằng

$$a^2\vec{LA} + b^2\vec{LB} + c^2\vec{LC} = \vec{0}.$$

BÀI 6.

a) Cho tam giác ABC vuông tại A và có đường cao AH (H thuộc cạnh BC). Chứng minh rằng điểm Lemoine của tam giác ABC là trung điểm của AH.

b) Nếu một tam giác có điểm Lemoine là trung điểm của đoạn đối trung thì tam giác đó có nhất thiết phải vuông không, giải thích vì sao?

BÀI 7. Cho tam giác ABC có các đường đối trung BE và CF (E, F lần lượt nằm trên hai cạnh CA, AB) cắt nhau tại điểm Lemoine L. Chứng minh rằng $AB = AC$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $LB = LC$.

b) $BE = CF$.

BÀI 8. Cho tam giác ABC có các đường đối trung AD, BE, CF đồng quy tại điểm Lemoine L (D, E, F lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB). Chứng minh rằng

$$LA + LB + LC \geq 2(LD + LE + LF).$$

BÀI 9. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$. Gọi L và J lần lượt là điểm Lemoine của tam giác ABC và ACD. Chứng minh rằng AC, BD và LJ đồng quy.

BÀI 10. Cho tam giác ABC có điểm Lemoine là L. Lấy các điểm X, Y, Z tương ứng nằm trên các đoạn thẳng LA, LB, LC sao cho

$$\angle XBA = \angle YAB \quad \text{và} \quad \angle XCA = \angle ZAC.$$

Chứng minh rằng $\angle ZBC = \angle YCB$.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: ĐẠI SỐ

MA TRẬN

Bài 0.1 (ĐH Giao thông vận tải, N.H. Hoàng)**.** Cho A là ma trận vuông cấp n hệ số thực thỏa mãn các điều kiện: $A^{2023} = A^{100}$ và $A^{64} = -A^2$. Chứng minh rằng $A^2 = 0$.

Bài 0.2 (ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên, P.H. Nam)**.**

a) Tìm tất cả ma trận vuông cấp 2 với hệ số thực sao cho bình phương của ma trận đó bằng ma trận đơn vị.

b) Tìm tất cả các ma trận vuông A cấp 2 với hệ số thực sao cho A giao hoán với tất cả các ma trận vuông B cấp 2 với hệ số thực, nghĩa là $AB = BA$.

Bài 0.3 (ĐH Kinh tế và Quản trị Kinh doanh - ĐH Thái Nguyên, N. Q. Hoa)**.** Tìm ma trận X thỏa mãn $A = X.B$, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bài 0.4 (ĐH Kinh tế và Quản trị Kinh doanh - ĐH Thái Nguyên, T.N. Bình)**.** Chứng minh rằng với mọi ma trận $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, ta luôn có

$$\det\left((AB - BA)^{1000} + (AB + BA)^{1000}\right) \geq 0.$$

Bài 0.5 (ĐH Kinh tế và Quản trị kinh doanh - ĐH Thái Nguyên, T.N. Bình)**.** Cho $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ thỏa mãn $B^T A = 0$. Chứng minh rằng $\operatorname{rank}(A + B) = \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B$.

Bài 0.6 (ĐH Vinh, D.X. Giáp)**.** Cho ma trận A cấp 3×2 và ma trận B cấp 2×3 thỏa mãn $(AB)^{2022} = 2023(AB)^{2023}$ và $\operatorname{rank}(BA) = 2$. Xác định các phần tử của ma trận BA.

Bài 0.7 (ĐH Vinh, D.X. Giáp)**.** Tìm tất cả các ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp 2023 thỏa mãn $a_{ii} = 2024$ với mọi i và $a_{ij} \in \{-1, 1\}$ với mọi $i \neq j$ và A là suy biến.

Bài 0.8 (ĐH Vinh, D.X. Giáp)**.** Cho ma trận A vuông cấp 2023 với các phần tử thực thỏa mãn $A^T = -A$. Chứng minh rằng ma trận $A + 2023I$ khả nghịch, trong đó I ký hiệu là ma trận đơn vị cấp 2023.

Bài 0.9 (ĐH Công nghệ thông tin - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)**.** Cho ma trận vuông

$$A = \begin{pmatrix} 2015 & -2014 \\ 2014 & -2013 \end{pmatrix}.$$

Hãy xác định số nguyên dương n sao cho tồn tại ma trận vuông cấp hai X với các phần tử nguyên để $X^{2015} + X^n = 2A$. Từ đó hãy chỉ ra X.

Bài 0.10 (ĐH Công nghệ thông tin - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)**.** Cho A, B là các ma trận vuông thực cấp n và các đa thức $p(x), q(x)$ hệ số thực. Chứng minh rằng

$$\det\left(p(A)p(B) + q(A)q(B)\right) = \det(p(B)p(A) + q(B)q(A)).$$

Bài 0.11 (ĐH Công nghệ thông tin - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)**.** Cho $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là các ma trận vuông, thực, cấp n, thỏa mãn $A_1A_2\ldots A_k = 0$. Chứng minh rằng

$$\operatorname{rank}(A_1) + \operatorname{rank}(A_2) + \ldots + \operatorname{rank}(A_k) \leq (k-1)n.$$

Bài 0.12 (ĐH Trà Vinh, T.Q. Hà)**.** Đặt $A(c) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ -\dfrac{1}{c} & -1 \end{pmatrix}$ với mọi số thực $c \neq 0$. Chứng minh rằng

a) $A(c)A(d) = A(d)A(c)$ khi và chỉ khi $c = d$.

b) $(A(c) + A(2c))^{2n}$ không phụ thuộc vào c với mọi $n \in \mathbb{N}$. Tính $(A(c) + A(2c))^{2n}$.

Bài 0.13 (ĐH Trà Vinh, T.Q. Hà)**.** Cho $A \in M_n(K)$ là một ma trận lũy linh. Chứng minh rằng A chéo hóa được khi và chỉ khi $A = 0$.

Bài 0.14 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Cho ma trận

$$A = (a_{ij})_{6\times 6} \text{ trong đó } a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i = j \\ 1 \text{ hoặc } 2023 & \text{nếu } i \neq j. \end{cases}$$

Chứng minh rằng định thức của ma trận A khác 0.

Bài 0.15 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ là ma trận vuông cấp 2 với phần tử thực. Giả sử với mọi ma trận B vuông cấp 2 ta luôn có $AB = BA$. Chứng minh rằng A có dạng $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ với $k \in \mathbb{R}$.

Bài 0.16 (ĐH Mỏ - Địa chất, P.T. Cường)**.** Chứng minh rằng nếu A là ma trận thực cỡ 2×2 thì

$$\det\left(A^2 + A + I\right) \geq \frac{3}{4}(1 - \det A)^2.$$

Bài 0.17 (ĐH Hải Phòng, V.T. Đức)**.**

a) Cho A là ma trận vuông phức cấp 2 khác ma trận không. Chứng minh rằng nếu $\det A = 0$ thì A có thể viết dưới dạng

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix} \text{ hoặc } A = \begin{pmatrix} ka & kb \\ a & b \end{pmatrix},$$

với a, b không đồng thời bằng 0.

b) Tìm tất cả các ma trận vuông phức B cấp hai thỏa mãn phương trình

$$B^2 - 2B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

c) Tìm tất cả ma trận vuông phức C cấp hai thỏa mãn phương trình

$$C^3 - 3C^2 + 3C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1 ĐỊNH THỨC

Bài 1.1 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Phúc)**.** Tính định thức của các ma trận sau:

a) $A = (a_{ij})_{n\times n}$ trong đó $n > 0$ và $a_{ij} = \min\{i, j\}_{1\leq i,j\leq n}$.

b) $B = (b_{ij})_{n\times n}$ trong đó $n > 0$ và $b_{ij} = \max\{i, j\}_{1\leq i,j\leq n}$.

Bài 1.2 (ĐH Giao thông vận tải, N.H. Hoàng)**.** Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})_{n\times n}$ với $n = 2023$ và $a_{ij} = \delta_{ij} + 2^{i+j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, 2023$. Ở đây,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j, \\ 0 & \text{nếu } i \neq j. \end{cases}$$

Hãy tính $\det A$.

Bài 1.3 (ĐH Giao thông vận tải, N.H. Hoàng)**.** Cho M_1, M_2, M_3 là các ma trận vuông cấp 2, có các phần tử nguyên, đôi một giao hoán với nhau và thỏa mãn điều kiện

$$M_1^4 + M_2^4 + M_3^2 = \begin{pmatrix} 2023 & -2012 \\ 2012 & -2001 \end{pmatrix}.$$

Tính $\det(M_1^2M_2^2 + M_2^2M_3^2 + M_3^2M_1^2)$.

Bài 1.4 (ĐH Kinh tế và Quản trị kinh doanh - ĐH Thái Nguyên, N.Q. Hoa)**.** Cho A là ma trận vuông cấp $2n$ thỏa mãn điều kiện: Các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 0, các phần tử nằm ngoài đường chéo chính hoặc bằng 23 hoặc bằng 2023. Chứng minh rằng định thức của A khác 0?

Bài 1.5 (ĐH Công nghệ thông tin, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)**.** Giả sử A, B là các ma trận vuông thực cấp 3 thỏa mãn

$$\det A = \det B = \det(A+B) = \det(A-B) = 0.$$

Chứng minh rằng $\det(xA+yB) = 0$ với mọi cặp số thực x, y.

Bài 1.6 (ĐH Công nghệ thông tin, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)**.** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Tính $\det A$.

Bài 1.7 (ĐH Trà Vinh, T.Q. Hà)**.** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_1+c & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+c & \cdots & a_n \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+c \end{pmatrix}.$$

a) Tính định thức của ma trận A.

b) Khi nào ma trận A khả nghịch?

Bài 1.8 (Đại học Fulbright, N.T. Hiếu)**.** Cho

$$F(x) = \begin{vmatrix} x & 2022 & 2023 & 2024 \\ 2024 & 2023 & 2022 & x \\ 2023 & 2024 & x & 2022 \\ 2022 & x & 2024 & 2023 \end{vmatrix}.$$

Giải phương trình $F(x) = 0$.

2 HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 2.1 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Phúc)**.** Một khẩu phần ăn của công ty thứ nhất cung cấp 100 calo, 3g protein, 21 g carbohydrate và 3 g mỡ. Một khẩu phần ăn của công ty thứ hai cung cấp 100 calo, 2 g protein, 25 g carbohydrate và 1 g mỡ.

a) Lập ma trận A và ma trận cột B để tích AB cho biết lượng calo, protein, carbohydrate và mỡ chứa trong hỗn hợp gồm 3 khẩu phần ăn của công ty thứ nhất và 2 khẩu phần ăn của công ty thứ hai.

b) Tính tỷ lệ phối trộn để được một hỗn hợp chứa 100 calo, 2.25g protein, 24 g carbohydrate và 1.5g mỡ.

Bài 2.2 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Phúc)**.** Tìm các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn hệ phương trình $AX = B$ trong đó

$$A = (a_{ij})_n; a_{ij} \in \mathbb{Z}; X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T; B = \frac{1}{2023}X.$$

Bài 2.3 (ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên, N.T. Sơn)**.** Cho a_i với $i = 1,2,3,4$ là các số thực thuộc khoảng $(0,1)$. Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} a_1x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + a_2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + a_3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + a_4x_4 = 0. \end{cases}.$$

Bài 2.4 (ĐH Vinh, D.X. Giáp)**.** Cho ma trận $A = (a_{ij})$ vuông cấp n, phần tử thực thỏa mãn $A^2 = A$, và cho các số thực b_i, $i = 1,2,\ldots,n$. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (1+a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + (1+a_{22})x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (1+a_{nn})x_n &= b_n. \end{cases}$$

Bài 2.5 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Cho a_1, a_2, a_3, a_4 là bốn số nguyên chia hết liên tiếp cho 3, b_1, b_2, b_3, b_4 là bốn số nguyên chia hết cho 4 liên tiếp. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} (a_1+b_1)^3x + (a_1+b_2)^3y + (a_1+b_3)^3z + (a_1+b_4)^3t = 0 \\ (a_2+b_1)^3x + (a_2+b_2)^3y + (a_2+b_3)^3z + (a_2+b_4)^3t = 0 \\ (a_3+b_1)^3x + (a_3+b_2)^3y + (a_3+b_3)^3z + (a_3+b_4)^3t = 0 \\ (a_4+b_1)^3x + (a_4+b_2)^3y + (a_4+b_3)^3z + (a_4+b_4)^3t = 0. \end{cases}$$

Bài 2.6 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ). Tìm ma trận X thỏa mãn:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 2.7 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ). Một nhà máy sử dụng bốn loại vật liệu để sản xuất bốn loại sản phẩm. Định mức về vật liệu cho các sản phẩm được thể hiện qua bảng sau:

	Vật liệu I	Vật liệu II	Vật liệu III	Vật liệu IV
Sản phẩm A	1	3	2	2
Sản phẩm B	2	2	3	2
Sản phẩm C	1	2	1	2
Sản phẩm D	1	2	2	1

Hãy tìm số lượng các loại sản phẩm A, B, C, D khi nhà máy có số lượng các loại vật liệu loại I, II, III, IV lần lượt là 50, 80, 80, 60.

3 KHÔNG GIAN VÉCTƠ

Bài 3.1 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Phúc,). Cho dãy các không gian vectơ hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{K}$ và các ánh xạ tuyến tính

$$0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \to \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} 0$$

thỏa mãn $\mathrm{Im} f_i = \mathrm{Ker} f_{i+1}$ với mọi $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Chứng minh rằng

$$\dim V_1 - \dim V_2 + \dim V_3 - \cdots + (-1)^{n-1} \dim V_n = 0.$$

Bài 3.2 (ĐH Giao thông vận tải, N.H. Hoàng). Cho $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng nếu u_1, u_2, u_3, u_4 là các phần tử của không gian $\mathbb{R}^n$ sao cho

$$f(u_1 - u_2) = 2u_4;\ f(u_2 - u_3) = 3u_1;\ f(u_3 - u_4) = 4u_2; f(u_4 - u_1) = u_3$$

thì $f(u_2) = \dfrac{1}{10}(18u_1 + 20u_2 + 3u_3)$.

Bài 3.3 (ĐH Giao thông vận tải, N.H. Hoàng).

(a) Cho u_1, u_2, u_3, u_4 là các phần tử khác 0 của một không gian tuyến tính U. Giả thiết rằng ba hệ sau đây

$$\{u_1, u_2, u_3\}, \quad \{u_1, u_2, u_4\}, \quad \{u_1, u_3, u_4\}$$

đều không phải là cơ sở của U. Chứng minh rằng hệ $\{u_2, u_3, u_4\}$ cũng không phải là một cơ sở của U.

(b) Chứng minh rằng trong không gian tuyến tính của các hàm số xác định trên tập hợp số thực $\mathbb{R}$, tập hợp các hàm số $\{\cos^2 x, \cos^2 2x, \ldots, \cos^2 2023x\}$ là một tập độc lập tuyến tính.

Bài 3.4 (ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên, T.Đ. Dũng)**.**

a) Cho V_1 và V_2 là hai không gian con của không gian véctơ V hữu hạn chiều. Chứng minh rằng nếu $\dim(V_1+V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) = 1$ thì $V_1 \cup V_2$ là không gian con của V.

b) Cho V_1, V_2, V_3 là ba không gian con của không gian véctơ V trên trường số thực $\mathbb{R}$ có chiều 2024. Chứng minh rằng nếu $\dim(V_1)+\dim(V_2)+\dim(V_3) > 4048$ thì $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \neq 0$.

Bài 3.5 (ĐH Trà Vinh, D.K. Ngọc)**.** Chứng minh rằng nếu hệ vectơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ độc lập tuyến tính và tồn tại vectơ $v \in \mathbb{R}^n$ không là tổ hợp tuyến tính của hệ vectơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ thì $m \leq n-1$.

Bài 3.6 (ĐH Trà Vinh, D.K. Ngọc)**.** Cho E, F là các không gian vectơ hữu hạn chiều trên trường K và f, g là các ánh xa tuyến tính từ E và F. Chứng minh rằng $\operatorname{rank}(f+g) = \operatorname{rank} f + \operatorname{rank} g$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}, \\ \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E. \end{cases}$$

Bài 3.7 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Cho họ các hàm số

$$\{f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f_n(x) = e^{nx}\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Chứng minh rằng họ $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ là một hệ độc lập tuyến tính trong không gian véc tơ của các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 3.8 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.** Cho A là ma trận vuông cấp n với các phần tử thực. Giả sử A là lũy linh bậc 4, nghĩa là $A^4 = 0$, $A^3 \neq 0$. Chứng minh rằng $\{I, A, A^2, A^3\}$ là hệ độc lập tuyến tính.

4 GIÁ TRỊ RIÊNG

Bài 4.1 (ĐH Vinh, D.X. Giáp)**.** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Tìm tất cả các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận A.
b) Xác định tất cả các phần tử của ma trận A^{2023}.

Bài 4.2 (ĐH Công nghệ thông tin, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)**.** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tìm các giá trị riêng của A và A^{2003}.

Bài 4.3 (ĐH Công nghệ thông tin, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)**.** Cho A, B là các ma trận vuông hệ số thực lũy linh cấp n.

(a) Tìm các giá trị riêng và đa thức đặc trưng của A.

(b) Giả sử $AB + A + B = O_n$ trong đó O_n là ma trận vuông cấp n có mọi hệ số bằng 0. Tính $\det(I_n + 2A + 3B)$.

Bài 4.4 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Cho các dãy số $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ xác định bởi $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ và thỏa mãn

$$\begin{cases} x_{n+1} & = x_n - 3y_n + 3z_n \\ y_{n+1} & = 3x_n - 5y_n + 3z_n \\ z_{n+1} & = 6x_n - 6y_n + 4z_n \end{cases}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Tính $x_{2023}, y_{2023}, z_{2023}$.

5 ĐA THỨC

Bài 5.1 (ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên, N.T. Hằng)**.**

a) Cho đa thức $P(x) = x^2 + px + q$, trong đó p, q là các số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k sao cho $P(k) = P(2022)P(2023)$.

b) Cho $P(x)$ là một đa thức bậc 6 thoả mãn $P(1) = P(-1)$, $P(2) = P(-2)$, $P(3) = P(-3)$. Chứng minh rằng $P(x) = P(-x)$, với mọi x.

Bài 5.2 (ĐH Kinh tế và Quản trị kinh doanh - ĐH Thái Nguyên, T.N. Bình)**.** Cho $P(x)$ là đa thức bậc n với hệ số thực có n nghiệm thực phân biệt khác 0. Chứng minh rằng nghiệm của đa thức $Q(x) = x^2P'(x) + 3xP'(x) + P(x)$ là các số thực và phân biệt.

Bài 5.3 (ĐH Vinh, D. X. Giáp)**.** Cho $P(x)$ là đa thức hệ số thực, có ít nhất 4 nghiệm thực (kể cả nghiệm bội). Chứng minh rằng đa thức

$$Q(x) = 4P(x) - 4P'(x) - 2023P''(x)$$

cũng có ít nhất 4 nghiệm thực (kể cả nghiệm bội).

Bài 5.4 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Tìm tất cả đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn:

$$f(f(x)) + f(f(y)) = 2y + f(x - y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

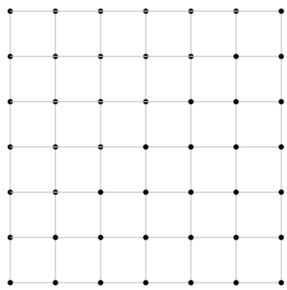
Bài 5.5 (ĐH Ngoại Thương)**.** Cho đa thức $P(x) = x^4 - 2x^3 - 1$.

a) Chứng minh rằng $P(x)$ có 2 nghiệm thực và 2 nghiệm phức.

b) Gọi $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ là 4 nghiệm của $P(x)$. Hãy tính giá trị của $S = \alpha^3 + \beta^3 + \delta^3 + \gamma^3$.

6 TỔ HỢP

Bài 6.1 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Phúc)**.** Cho hình dưới có các điểm bên nằm trên các đỉnh của hình vuông. Mỗi điểm được gán giá trị 0 hoặc 1. Chứng minh tồn tại 1 hình chữ nhật của 4 đỉnh là các điểm đã cho, tổng các giá trị trên 4 đỉnh bằng 0 hoặc 4.



Bài 6.2 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Phúc)**.** Trong Đại hội Toán học, có 2023 thành viên tham gia. Hai thành viên bất kì khi gặp nhau thì bắt tay nhau. Chứng minh rằng luôn tồn tại 2 thành viên trong Đại hội có cùng số bắt tay.

Bài 6.3 (ĐH Giao thông vận tải, N. H. Hoàng)**.** Có 6 sinh viên của đứng chờ tàu điện của tuyến Cát Linh - Hà Đông tại ga Thượng Đình. Khi tàu đến, mỗi sinh viên có thể lựa chọn một toa bất kỳ của đoàn tàu để đi lên. Đoàn tàu có 4 toa. Hãy cho biết có tất cả bao nhiêu phương án lựa chọn khác nhau mà 6 sinh viên này có thể thực hiện sao cho không có toa nào của của đoàn tàu có nhiều hơn 2 sinh viên đi lên.

Bài 6.4 (ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên, D.T. Hồng)**.** Cho tập A gồm 20 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho với mỗi cách lấy ra k số phân biệt bất kỳ từ tập A đều có thể chọn được hai số a, b trong các số được lấy mà $a + b$ là một số nguyên tố.

Bài 6.5 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Trong hình vuông cạnh bằng 1, ta đặt 2023 điểm phân biệt. Chứng minh rằng có ít nhất 25 trong số 2023 điểm đã cho thuộc cùng một hình tròn bán kính $\dfrac{1}{9\sqrt{2}}$.

Bài 6.6 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.** Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ là ma trận vuông cấp 2 với các phần tử thuộc tập $X = \{0,1,2,3,4,5\}$.

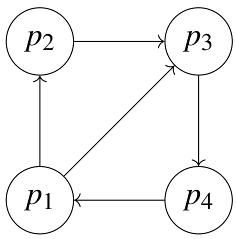
a) Có bao nhiêu ma trận thỏa mãn $|A| = 0$?

b) Một phần tử $a \neq 0$ trong X được gọi là ước của không nếu tồn tại phần tử $b \neq 0$ trong X thỏa mãn ab chia hết cho 6. Có bao nhiêu ma trận A gồm các phần tử là ước của không trong X?

Bài 6.7 (Đại học Fulbright, N.T. Hiếu)**.** PageRank là thuật toán sơ khai của Google dùng để xếp hạng các trang web trên Internet. PageRank sử dụng công thức lặp để dự đoán xác suất mỗi trang web là đích đến khi người dùng bấm ngẫu nhiên vào các đường link. Ban đầu tất cả các trang web p_i được gán cho chung một xác suất $R^{(0)}(p_i) = 1/N$, ở đó N là số trang web. Ở các bước k, $k \geq 1$, tiếp theo:

$$R^{(k)}(p_i) = \frac{1-d}{N} + d \sum_{p_j \in IN(p_i)} \frac{R^{(k-1)}(p_j)}{|OUT(p_j)|}, \tag{1}$$

với $0 \leq d \leq 1$ là hệ số giảm nhẹ, $IN(p_i)$ là tập các trang web có đường link đi tới p_i, $|OUT(p_j)|$ là tổng số đường link đi ra từ trang web p_j. *Nói một cách nôm na, ở mỗi bước: d phần xác suất của mỗi trang được chia đều cho các trang mà nó có đường link đi tới,* $1-d$ *phần còn lại được chia đều cho tất cả các trang*. Thuật toán dừng khi xác suất của các trang không thay đổi hoặc thay đổi rất ít so với giá trị của chúng ở bước trước. Một mô hình đơn giản của mạng Internet với 4 trang web cùng với xác suất của các trang ở bước 0 và 1 với $d = 0.5$ được cho ở bên dưới:



	Bước 0	Bước 1	Bước 2
$R(p_1)$	1/4	4/16	
$R(p_2)$	1/4	3/16	
$R(p_3)$	1/4	5/16	
$R(p_4)$	1/4	4/16	

a) Tính xác suất ở còn thiếu ở bước 2.

b) Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{N} P^{(k)}(p_i) = 1$ với mọi k.

c) Gọi G là ma trận liền kề với $G(i,j)$ là tỷ lệ giữa số đường link từ p_j đến p_i và tổng số đường link đi ra từ p_j. Tìm ma trận A để có thể viết lại (1) dưới dạng:

$$P^k = AP^{(k-1)}, \quad \text{ở đó } P^k = [P^{(k)}(p_1)\ P^{(k)}(p_2) \ldots P^{(k)}(p_N)]^T.$$

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: GIẢI TÍCH

1 DÃY SỐ

Bài 1.1 (ĐH Bách khoa - ĐHQG Tp. HCM, P.T. Thực)**.** Cho $f : (-\infty,+\infty) \to (-\infty,+\infty)$ là một hàm số có đạo hàm liên tục tại mọi điểm và thỏa mãn $f'(x) < 0$ với mọi số thực x. Xét dãy số $\{a_n\}$ như sau:

$$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}, \quad \text{với } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Nếu cho biết rằng $f(x) > 0$ với mọi số thực x. Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

b) Nếu cho biết rằng $f(2023) = 0$, và f có đạo hàm liên tục tới cấp hai sao cho $f''(x) > 0$ với mọi số thực x. Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Bài 1.2 (ĐH Công nghệ Thông tin - ĐHQG Tp. HCM)**.** Cho dãy số $\{u_n\}_n$ thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} u_0 \geq -2, \\ u_n = \sqrt{2+u_{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

a) Chứng tỏ rằng dãy $\{u_n\}_n$ có giới hạn hữu hạn. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

b) Cho hai dãy $\{v_n\}_n$ và $\{w_n\}_n$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} v_n = 4^n|u_n - 2|, \\ w_n = \dfrac{u_1 u_2 \ldots u_n}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$.

Bài 1.3 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh)**.** Xét dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi

$$u_1 = \frac{3}{2}, u_n = 1 + \frac{1}{2}\arctan u_{n-1} \text{ với } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy số $\{u_n\}$ hội tụ.

Bài 1.4 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh)**.** Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi:

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{n^2-1}{a_n} + 2 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng $n \leq a_n \leq n+1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

b) Đặt $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^3$. Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^4}$.

Bài 1.5 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên)**.** Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi

$$a_1 > 0;\ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1},\ \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ giảm và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Bài 1.6 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.** Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0 = \alpha, u_1 = \beta \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2},\ \forall n = 1,2,... \end{cases}$$

a) Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n).
b) Tìm giới hạn của dãy số (u_n).

Bài 1.7 (ĐH Khoa Học - Thái Nguyên, N.T. Hường)**.** Cho dãy số $\{x_k\}$ xác định bởi công thức

$$x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + ... + \frac{k}{(k+1)!}, \quad k \geq 1.$$

Tính giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + ... + x_{2023}^n}.$$

Bài 1.8 (ĐH Mỏ - Địa chất, H.N. Huấn)**.** Tìm giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1^{1^{2021}} \cdot 2^{2^{2021}} \cdots n^{n^{2021}}\right)^{1/n^{2022}}}{n^{1/2022}}.$$

Bài 1.9 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2, H.T. Dũng)**.** Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ được xác định bởi $x_1 \in (0,1)$ và

$$x_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+x_k),\ \forall n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn hữu hạn.

b) Chứng minh rằng
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(x_n - x_{n+1})}{x_n^2} = \frac{1}{2}.$$

Bài 1.10 (ĐH Trà Vinh, P.M. Triển)**.** Cho dãy số (a_n) xác định theo hệ thức sau:
$$a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + a_n,\ n = 1,2,3,...$$

Tính x_{2022}.

Bài 1.11 (ĐH Trà Vinh, P.M. Triển)**.** Cho hai dãy số (x_n) và (y_n) xác định bởi các công thức:
$$x_1 = y_1 = \sqrt{3},\ x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2},\ y_{n+1} = \frac{1}{1+\sqrt{1+y_n^2}},\ n = 1,2,3,\ldots$$

Chứng minh rằng $x_n y_n \in (2;3)$ với $n = 2,3,4,\ldots$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Bài 1.12 (ĐH Vinh, N.V. Đức)**.** Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi
$$x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)...\left(1+\frac{1}{2^n}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $x_n > \dfrac{15}{8}$.

b) Chứng minh $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy hội tụ.

2 CHUỖI SỐ

Bài 2.1 (ĐH Công nghệ Thông tin - ĐHQG Tp. HCM)**.** Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực dương thỏa mãn
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{(2n-1)^2} < 1.$$

Chứng minh rằng
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} \frac{x_n}{k^3} < 2.$$

Bài 2.2 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên)**.** Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi
$$a_1 > 0;\ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1},\ \forall n \geq 1.$$

Tính $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Bài 2.3 (ĐH Mỏ - Địa chất, H.N. Huấn)**.** Gọi S là dãy con của dãy điều hòa

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

và có tổng là hữu hạn. Gọi $c(n)$ là số lượng các phần tử của S có số thứ tự trong dãy mẹ (điều hòa) ban đầu không vượt quá n. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c(n)}{n} = 0.$$

3 HÀM SỐ

Bài 3.1 (ĐH Bách khoa - ĐHQG Tp. HCM, P.T. Thực)**.**

a) Chứng minh rằng tồn tại hàm số $f : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ có đạo hàm liên tục tới cấp hai tại mọi điểm sao cho

$$xf''(x) + 2f'(x) = x^{2023}$$

với mọi số thực x.

b) Giả sử $g : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ là hàm số có đạo hàm liên tục tới cấp hai tại mọi điểm và thỏa mãn

$$xg''(x) + 2g'(x) \geq x^{2023}$$

với mọi số thực x. Chứng minh rằng

$$\int_{-1}^{1} x\left(g(x) + x^{2023}\right) dx \geq \frac{2}{2025}.$$

Bài 3.2 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh)**.** Cho hàm số

$$f(x) = 2(x-1) - \arctan x$$

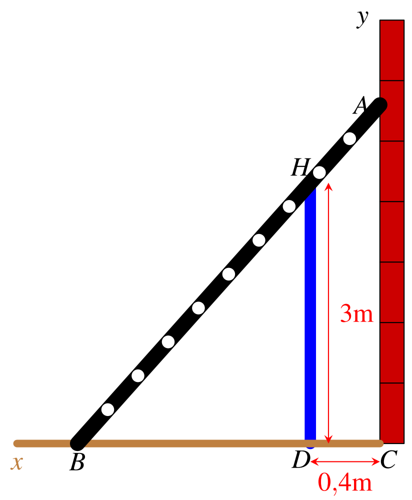
với $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất là $a \in (1, \sqrt{3})$.

Bài 3.3 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh)**.** Luật bình phương nghịch đảo phát biểu rằng: *Mỗi sự gia tăng khoảng cách từ nguồn cho ra kết quả giảm mức độ âm thanh theo tỷ lệ nghịch với bình phương của sự gia tăng khoảng cách.* Sử dụng luật bình phương nghịch đảo, hãy giải quyết bài toán sau: Một người có một mảnh đất lớn có chiều dài mặt tiền là ℓ (mét) ở giữa 2 hai quán karaoke thường phát ra âm thanh có cường độ lần lượt là I_1, I_2. Người này định xây một ngôi nhà nhỏ trên mảnh đất đó nhưng muốn tìm vị trí sao cho chịu ảnh hưởng của âm thanh từ 2 quán karaoke là ít nhất. Bạn hãy giúp người này nếu biết rằng:

a) Cường độ âm thanh $I_1 = I_2$.

b) Cường độ âm thanh $I_1 = 8I_2$.

Bài 3.4 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên)**.** Trong hình vẽ, cho bờ tường Cy và mặt đất Cx. Cắm một cột đỡ DH song song với bờ tường và cách bờ tường một khoảng 0,4m, chiều dài cột đỡ $DH = 3$m. Người ta thiết kế một cái thang AB sao cho nó có thể dựa vào bờ tường Cy và chạm vào mặt đất Cx, dựa vào cột đỡ DH. Tính chiều dài nhỏ nhất của cái thang thỏa mãn yêu cầu trên.



Bài 3.5 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} + \alpha x & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$

a) Tính $f'(x)$ khi $x \neq 0$.

b) Tính $f'(0)$.

c) Chứng minh rằng hàm $f(x)$ không đơn điệu trên mỗi khoảng mở chứa điểm 0.

Bài 3.6 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.** Gia đình bác Nam muốn xây một cái bể hình hộp với đáy là hình vuông có thể tích là $10m^3$. Biết rằng giá thành để xây mỗi mét vuông một mặt đáy là 700000 đồng và một mặt bên là 500000 đồng. Để tổng chi phí xây dựng là nhỏ nhất thì bác Nam nên xây bể với kích thước như thế nào?

Bài 3.7 (ĐH Khoa Học - Thái Nguyên, N.S. Hà)**.** Hãy tìm các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, không đồng nhất 0, thỏa mãn quan hệ hàm sau đây:

$$f(x+y) = 2023^y f(x) + 2023^x f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đó tính các giới hạn

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{\sin(f(x))},$$

và

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{f^{(n)}(0)}.$$

Bài 3.8 (ĐH Mỏ - Địa chất, H.N. Huấn)**.** Tìm

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)+\sin(z^2)}{x^2+y^2+z^2}.$$

Bài 3.9 (ĐH Mỏ - Địa chất, H.N. Huấn)**.** Gọi $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ là nghiệm của phương trình vi phân

$$y''' + a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

và thỏa mãn

$$y_1^2(x)+y_2^2(x)+y_3^2(x) = 1$$

với mọi x. Hãy tìm các hằng số α, β sao cho hàm

$$z = \left(y_1'(x)\right)^2 + \left(y_2'(x)\right)^2 + \left(y_3'(x)\right)^2$$

là nghiệm của phương trình vi phân

$$z' + \alpha a(x)z + \beta c(x) = 0.$$

Bài 3.10 (ĐH Mỏ - Địa chất, H.N. Huấn)**.** Trên hình ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

hãy tìm tất cả những điểm $T=(x_0,y_0)$ thỏa mãn: tam giác bị giới hạn bởi các đường thẳng $x=0, y=0$ và tiếp tuyến với ellipse tại điểm T có diện tích nhỏ nhất.

Bài 3.11 (ĐH Ngoại Thương - Hà Nội)**.** Chứng minh rằng đa thức

$$f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2022}}{2022!}$$

không có nghiệm thực.

Bài 3.12 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2, H.T. Dũng)**.** Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là một hàm số liên tục và $a<b$ là các số thực. Một điểm x được gọi là một *điểm mù* nếu tồn tại một điểm $y\in\mathbb{R}$ với $y>x$ sao cho $f(y)>f(x)$. Giả sử rằng tất cả các điểm thuộc khoảng mở $I=(a,b)$ là những điểm mù và a, b không phải là những điểm mù. Chứng minh rằng $f(a)=f(b)$.

Bài 3.13 (ĐH Trà Vinh, P.M. Triển)**.** Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = x^{x^x}$$

đồng biến trên $(0;+\infty)$ và

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

Bài 3.14 (ĐH Vinh, N.V. Đức)**.** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x^{2023}}\right) & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng hàm số f liên tục tại $x = 0$.

b) Hàm số f có khả vi tại $x = 0$ hay không? Vì sao?

Bài 3.15 (ĐH Vinh, N.V. Đức)**.** Cho hàm số $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ liên tục trên đoạn $[0,1]$, khả vi trên khoảng $(0,1)$ và thỏa mãn $f(0) = 0$ và

$$|f'(x)| \leqslant 2023|f(x)|,\ \forall x \in (0,1).$$

Chứng minh rằng $f(x) = 0,\ \forall x \in [0,1]$.

Bài 3.16 (ĐH Vinh, N.V. Đức)**.** Giả sử $f : (0;+\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm số khả vi trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn hai điều kiện sau:

a) $|f(x)| \leqslant 2023,\ \forall x \in (0;+\infty)$,

b) $f(x)f'(x) \geqslant 2022\cos x,\ \forall x \in (0;+\infty)$.

Hỏi có tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ hay không?

4 PHÉP TÍNH VI PHÂN

Bài 4.1 (ĐH Công nghệ Thông tin - ĐHQG Tp. HCM)**.** Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục đến cấp hai thỏa mãn

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = -2, \quad \text{và } f(1) = 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại số thực $c \in (0;1)$ sao cho

$$f(c)f'(c) + f''(c) = 0.$$

Bài 4.2 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh)**.** Cho f khả vi trên $(a,+\infty)$ với mọi $a>0$ và

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0.$$

Chứng minh rằng

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0.$$

Bài 4.3 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh)**.** Cho f là hàm số có đạo hàm f' đồng biến trên $[0,2]$ và $f(0)=-1$, $f(2)=1$. Chứng minh rằng tồn tại a,b,c phân biệt thuộc $[0,2]$ sao cho

$$f'(a)f'(b)f'(c)=1.$$

Bài 4.4 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên)**.** Cho hàm f khả vi vô hạn lần trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f^{(k)}(0)=0,\ \text{với mọi } k=0,1,2,\cdots$$

và

$$f^{(k)}(x)\geq 0,\ \text{với mọi } k=1,2,\ldots \text{ và } x>0.$$

Chứng minh rằng $f(x)=0$, $\forall x>0$.

Bài 4.5 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.** Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2023]$, khả vi trong khoảng $(1;2023)$ và $f(2023)=0$. Chứng minh rằng tồn tại $c\in(1;2023)$ sao cho

$$f'(c)=\frac{2024-2023c}{1-c}f(c).$$

Bài 4.6 (ĐH Khoa Học - Thái Nguyên, T.M. Tuyên)**.** Giả sử hàm số thực $f(x)\in C^\infty[-1,1]$, $f^{(k)}(0)=0$, $k=0,1,2,\ldots$ và tồn tại một số thực $\alpha\in(0,1)$ sao cho

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f^{(k)}(x)|\leq \alpha^k.k!,\quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng $f(x)\equiv 0$ trên đoạn $[-1,1]$.

Bài 4.7 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2, H.T. Dũng)**.** Cho $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b). Giả sử rằng $f'(x)>0$ với mọi $x\in(a,b)$. Chứng minh rằng với mọi số thực x_1,x_2 thỏa mãn điều kiện $a\leq x_1<x_2\leq b$ và $f(x_1)f(x_2)>0$ thì luôn tồn tại số thực $c\in(x_1,x_2)$ sao cho

$$\frac{x_1f(x_2)-x_2f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}=c-\frac{f(c)}{f'(c)}.$$

5 PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Bài 5.1 (ĐH Công nghệ Thông tin - ĐHQG Tp. HCM)**.** Cho hàm số $f:(-1;1)\to\mathbb{R}$ khả vi đến cấp hai thỏa mãn điều kiện $f(0)=1$ và

$$f''(x)+2f'(x)+f(x)\geq 1,\quad \forall x\in(-1;1).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\int_{-1}^{1} e^x f(x)dx.$$

Bài 5.2 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh)**.** Cho $f:[0,2023]\to(0,+\infty)$ là hàm số khả tích và

$$f(x)f(2023-x)=1$$

với mọi $x\in[0,2023]$. Chứng minh rằng

$$\int_0^{2023} f(x)dx\geq 2023.$$

Bài 5.3 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên)**.** Cho hàm $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c\in(0,1)$ sao cho

$$cf(c)+2023\int_0^c f(x)dx=0.$$

Bài 5.4 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên)**.** Tính tích phân

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(nx)}{(1+2023^x)\sin x}dx.$$

Bài 5.5 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên)**.** Cho hàm f dương, khả tích trên $[a,b]$ và $0<m\leq f(x)\leq M$, $\forall x\in[a,b]$. Chứng minh rằng

$$(b-a)^2\leq\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\leq\frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2.$$

Bài 5.6 (ĐH Khoa Học - Thái Nguyên, M.V. Thuận)**.** Cho hàm số $h(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và

$$\int_0^1 xh(x)dx = \int_0^1 h(x)dx.$$

Chứng minh rằng tồn tại số $\beta \in (0,1)$ sao cho

$$\beta h(\beta^2) = \frac{2023}{2}\int_0^{\beta^2} h(x)dx.$$

Bài 5.7 (ĐH Khoa Học - Thái Nguyên, D.T. Hồng)**.** Cho f là hàm liên tục trên $[0,\pi]$ thỏa mãn $f(0) > 0$ và

$$\int_0^{\pi} f(x)dx < 2.$$

Chứng minh rằng phương trình

$$f(x) = \sin x$$

có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0,\pi)$.

Bài 5.8 (ĐH Mỏ - Địa chất, H.N. Huấn)**.** Cho hai hàm số liên tục $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g : [0,1] \to (0,\infty)$. Trong đó hàm số f không giảm. Chứng minh rằng

$$\int_0^t f(x)g(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx \le \int_0^t g(x)dx \cdot \int_0^1 f(x)g(x)dx, \qquad t \in [0,1].$$

Bài 5.9 (ĐH Mỏ - Địa chất, H.N. Huấn)**.** Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho

$$\int_0^c xf(x)\,dx = 0.$$

Bài 5.10 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2, H.T. Dũng)**.** Gọi $\mathscr{F}$ là lớp tất cả các hàm khả vi $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ sao cho

$$\left|f'(x) - f'(y)\right| \le 2023|x-y|$$

với mọi $x, y, \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu $f \in \mathscr{F}$ thì

$$\left(f'(x)\right)^2 < 4046f(x)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 5.11 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2, H.T. Dũng)**.** Giả sử $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ là hàm số khả vi liên tục cấp 2 sao cho $f(a) \neq -f(b)$ và

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{(b-a)^3}{(f(a)+f(b))^2} \int_a^b \left(f''(x)\right)^2 dx.$$

Bài 5.12 (ĐH Trà Vinh, P.M. Triển)**.** Tính tích phân

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right) dx.$$

Bài 5.13 (ĐH Vinh, N.V. Đức)**.** Cho hàm số f xác định và liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 1,\ \forall x,y \in [0;1].$$

a) Chứng minh rằng $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x},\ \forall x \in (0,1]$.

b) Chứng minh rằng $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \leqslant \frac{\pi}{4}$.

6 PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Bài 6.1 (ĐH Công nghệ Thông tin - ĐHQG Tp. HCM)**.** Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to (0;+\infty)$ khả vi liên tục đến cấp hai thỏa mãn

$$f''(x)f(x) \geq 2(f'(x))^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.2 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.** Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn $f(1) = 2023$ và

$$f(x+y) = 2023^x f(y) + 2023^y f(x) \quad \text{với mọi } x,t \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.3 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.** Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0;1]$ có $f(1) = f(0)$ và thỏa mãn

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \leq 1.$$

Bài 6.4 (ĐH Mỏ - Địa chất, P.T. Cường)**.** Cho r,s là các phân số hữu tỷ. Hãy tìm tất cả các hàm số $f : Q \to Q$ thỏa mãn

$$f(x+f(y)) = f(x+r)+y+s$$

với mọi $x,y \in Q$ (Q là tập hợp các số hữu tỷ).

Bài 6.5 (ĐH Ngoại Thương - Hà Nội)**.** Tìm tất cả các hàm số thực $f : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+f(y)) = xf\Big(1+f(\frac{y}{x})\Big),$$

với mọi $x,y > 0$.

Bài 6.6 (ĐH Trà Vinh, P.M. Triển)**.** Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa điều kiện sau:

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2f(x)+\frac{3}{x-1},\ \forall x \neq 1.$$

Bài 6.7 (ĐH Trà Vinh, P.M. Triển)**.** Xác định hàm số $f(x)$ khả vi liên tục trên đoạn $[0;1]$ mà $f(1) = ef(0)$ và

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \leq 1.$$

Phần III

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

1 Đại số

1.1 Bảng A

BÀI 1. (a) Vì mỗi ánh xạ f đều là ánh xạ tuyến tính, nên hợp thành của nó cũng là ánh xạ tuyến tính. Do đó ánh xạ g là tuyến tính.

(b) Ảnh của g được sinh bởi các vectơ $g(1), g(X), \dots, g\left(X^{2023}\right)$. Nhận thấy

$$g(X^k) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k < 1740, \\ k(k-1)\cdots(k-1739)X^{k-1740} & \text{nếu } k \geq 1740. \end{cases}$$

Do đó một cơ sở của $\mathrm{Im}(g)$ là $\left(1, X, X^2, \dots, X^{283}\right)$. Vậy số chiều $\dim(\mathrm{Im} g) = 284$.

Xét một đa thức $p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_{2023}X^{2023}$ tùy ý. Thế thì $g\,(p)$ có dạng

$$g\,(p)\,(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_{283}X^{283}.$$

Đa thức $p(X) \in \mathrm{Ker}(g)$ khi và chỉ khi $b_0 + b_1X + \cdots + b_{283}X^{283} = 0$, khi và chỉ khi

$$a_{1740} = a_{1742} = \cdots = a_{2023} = 0.$$

Do đó một cơ sở của $\mathrm{Ker}(f)$ là $\left(1, X, X^2, \dots, X^{1739}\right)$. Vậy $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1740$.

BÀI 2. (a) Giả sử x_1, x_2 tương ứng là giá trị (tổng thể) cần sản xuất của hai nhà máy (E) và (W), đo bằng tỷ đồng. Khi đó ta có phương trình

$$\begin{cases} x_1 = 0,3x_1 + 0,2x_2 + 12, \\ x_2 = 0,1x_1 + 0,4x_2 + 8. \end{cases}$$

Thật vậy, nhà máy (E) sản xuất được x_1 (tỷ đồng) giá trị về điện thì nó cần dùng $0,3x_1$ để làm nguyên liệu cho chính nó và chuyển lượng điện tương đương $0,2x_2$ tỷ đồng cho nhà máy (W), và còn lại lượng điện tương đương 12 tỷ phục vụ người dân. Do đó ta có phương trình thứ nhất. Tương tự ta có phương trình thứ hai. Thế thì $x = Ax + d$ trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Do đó

$$x = (I - A)^{-1} d = \begin{pmatrix} 22 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Vậy tổng khối lượng cần sản xuất của nhà máy (E) là 22 tỷ đồng, và của nhà máy (W) là 17 tỷ đồng.

(b) Với $A = \left(a_{ij}\right)_{2\times 2}$, ta có:

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ta chứng minh $I - A$ là một ma trận khả nghịch. Giả sử ngược lại $I - A$ không khả nghịch. Thế thì các hàng của ma trận là phụ thuộc tuyến tính, nghĩa là tồn tại bộ số (a_1, a_2) không đồng thời bằng 0 sao cho

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = (0,0),$$

trong đó α_i là hàng thứ i. Do đó

$$\begin{cases} a_1(1 - a_{11}) - a_2 a_{21} = 0, \\ -a_1 a_{12} + a_2(1 - a_{22}) = 0. \end{cases}$$

Không mất tổng quát giả sử $|a_1| = \max\{|a_1|, |a_2| > 0$. Từ hệ phương trình trên suy ra

$$a_1 = a_1 a_{11} - a_2 a_{21}.$$

Do đó

$$0 < |a_1| \leq |a_1|\,(a_{11} + a_{21}) < |a_1|.$$

Điều này vô lý. Vậy điều giả sử là sai, suy ra $I - A$ khả nghịch. Từ đó suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x = (I - A)^{-1} d$.
(Nhận xét: khẳng định vẫn đúng cho A là ma trận vuông cấp n bất kỳ.)

BÀI 3. (a) Đặt $P(x) = x^4 - 2x^3 - 1$. Nhận thấy đa thức đạo hàm $P'(x) = 4x^3 - 6x^2 = x^2(4x - 6)$ chỉ có hai nghiệm $x = 0$ (bội 2) và $x = \dfrac{3}{2}$ (bội 1). Các nghiệm này đều không phải là nghiệm của phương trình ban đầu $P(x) = 0$. Do đó các nghiệm của $P(x) = 0$ là phân biệt.

(b) Nhận thấy $P(x) = 0$ khi và chỉ khi $x^4 = 2x^3 + 1$. Do đó nếu giả sử $\alpha^3 = \beta^3$ thì $\alpha^4 = \beta^4$. Từ đó suy ra $\alpha = \beta$.

(c) Đặt $y = x^3$, suy ra $x^4 = 2y + 1$. Lũy thừa 3 cả hai vế suy ra $x^{12} = (2y + 1)^3$, suy ra $y^4 = (2y + 1)^3$. Do đó

$$y^4 - 8y^3 - 12y^2 - 6y - 1 = 0.$$

Vậy kết hợp với (b) phương trình $y^4 - 8y^3 - 12y^2 - 6y - 1 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$. Do đó theo Định lý Vieta ta có $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = 8$.

BÀI 4. (a) Nhận thấy A là ma trận chéo hóa được:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Do đó

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tính kết hợp của phép nhân ma trận suy ra

$$\sin(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin 1 & 0 \\ 0 & \sin 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 1 & \sin 1 - \sin 2 \\ 0 & \sin 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Bằng quy nạp ta tính được:

$$A^n = \begin{pmatrix} x^n & nx^{n-1}y \\ 0 & x^n \end{pmatrix}.$$

Do đó

$$\sin \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x & y\cos x \\ 0 & \sin x \end{pmatrix}.$$

(c) Ma trận A cấp 2, phần tử phức, luôn đồng dạng (bởi một ma trận C khả nghịch, phần tử phức) với một trong hai ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Thật vậy nếu A không chéo hóa được, thì đa thức đặc trưng có dạng

$$P_A(X) = (X - \lambda)^2.$$

Chọn α_2 tùy ý không thuộc $V_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_2)$, và $\alpha_1 = (A - \lambda I_2)(\alpha_2)$ ta có

$$\begin{cases} A\alpha_1 = \lambda\alpha_1, \\ A\alpha_2 = \alpha_1 + \lambda\alpha_2. \end{cases}$$

Do đó với C có các cột là α_1, α_2 thì

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ta xét hai trường hợp: A chéo hóa được (trên trường phức) và A không chéo hóa được trên trường phức.

Trường hợp 1: A là chéo hóa được trên trường phức, nghĩa là tồn tại ma trận khả nghịch với các phần từ phức ($C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$) sao cho $C^{-1}AC$ là một ma trận chéo. Thế thì

$$A = C \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \cdot C^{-1},$$

trong đó $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ là ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo bằng λ_1, λ_2. Từ tính kết hợp của phép nhân ma trận suy ra

$$A^k = C \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k) \cdot C^{-1}$$

với mọi số nguyên không âm k. Do đó

$$\sin(A) = C \cdot \mathrm{diag}\left(f(\lambda_1), f(\lambda_2)\right) \cdot C^{-1},$$

trong đó

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Thế thì $\sin(A)$ cũng là ma trận chéo hóa được. Điều này mâu thuẫn vì ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

không chéo hóa được.

Trường hợp 2: A không chéo hóa được trên trường phức. Thế thì đa thức đặc trưng có nghiệm kép λ và tồn tại C khả nghịch với các phần tử phức sao cho

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Vì ma trận A có phần tử là các số thực nên vết của A là thực, do đó $\lambda \in \mathbb{R}$. Theo phần (b) ta có:

$$\sin \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\lambda & \cos\lambda \\ 0 & \sin\lambda \end{pmatrix}.$$

Mặt khác

$$\sin \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = C^{-1} \sin(A) C,$$

suy ra

$$C^{-1} \sin(A) C = \begin{pmatrix} \sin\lambda & \cos\lambda \\ 0 & \sin\lambda \end{pmatrix}.$$

Giả sử tồn tại A sao cho

$$\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

suy ra $\sin\lambda = 1$, kéo theo $\cos\lambda = 0$ suy ra $C^{-1}\sin(A)C = I_2$. Do đó $\sin(A) = I_2$. Điều này vô lý. Vậy không tồn tại ma trận thỏa mãn đề bài.

BÀI 5. (a) Đặt $A = \left(a_{ij}\right)_{3\times 3}$, và $A^{-1} = \left(b_{ij}\right)_{3\times 3}$. Kết hợp với việc A và A^{-1} đều khả nghịch, ta có mỗi hàng cũng như cột của nó có ít nhất một số 1. Với $1 \le k \le 3$ ta có

$$1 = a_{k1}b_{1k} + a_{k2}b_{2k} + a_{k3}b_{3k}.$$

Vậy tồn tại duy nhất $m \in \{1,2,3\}$ sao cho $a_{km} = b_{mk} = 1$. Nói riêng mỗi hàng của A có đúng một số 1. Nếu có hai số 1 thuộc cùng một cột thì sẽ có một cột gồm toàn số 0, suy ra vô lý. Vậy mỗi hàng, mỗi cột của A có đúng một số 1. Nghịch đảo của A lúc đó cũng gồm toàn các số $0,1$. Tập P_3 bao gồm các ma trận sau:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

(b) Ta chỉ ra tồn tại một song ánh giữa P_n và tập S_n các hoán vị trên n phần tử. Đặt $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, và $A^{-1} = \left(b_{ij}\right)_{n\times n}$. Kết hợp với việc A và A^{-1} đều khả nghịch, ta có mỗi hàng cũng như cột của nó có ít nhất một số 1. Với $1 \le k \le n$ ta có:

$$1 = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{jk}. \tag{1}$$

Vậy tồn tại $m \in \{1,2,\dots,n\}$ sao cho $a_{km} = b_{mk} = 1$. Ta chỉ ra số m như vậy là duy nhất. Thật vậy, giả sử có một số $m' \ne m$ sao cho $a_{km'} = 1$. Thế thì từ (1) suy ra $b_{m'k} = 0$. Vì hàng thứ m' của A^{-1} có ít nhất một số 1 nên tồn tại $l \ne k$ sao cho $b_{m'l} = 1$. Do đó $\left(AA^{-1}\right)_{kl} \ge 1$. Điều này vô lý vì $k \ne l$. Vậy số m ứng với k như vậy là duy nhất, ký hiệu bởi $m = \sigma(k)$. Vì mỗi cột của A đều có ít nhất một số 1, nên σ là toàn ánh từ $\{1,2,\dots,n\}$ vào chính nó. Do đó σ (phụ thuộc vào A) là một song ánh (hoán vị) trên $\{1,2,\dots,n\}$. Tương ứng từ $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ vào σ cho bởi $a_{k\sigma(k)}$ là phần tử bằng 1 duy nhất trên hàng thứ k xác định một đơn ánh từ P_n vào S_n. Ta chỉ ra ánh xạ này là một toàn ánh. Thật vậy cho trước hoán vị $\sigma \in S_n$, xét $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ là ma trận mà hàng thứ k bất kỳ có phần tử $a_{k\sigma(k)} = 1$, các phần tử còn lại đều bằng 0. Ký hiệu $B = \left(b_{ij}\right)_{n\times n}$ là ma trận mà hàng thứ k bất kỳ có phần tử $b_{k\sigma^{-1}(k)} = 1$, các phần tử còn lại đều bằng 0. Thế thì B là nghịch đảo của A. Do đó $A \in P_n$. Vậy tương ứng giữa A và σ cho một song ánh giữa P_n và S_n. Do đó số phần tử của P_n bằng $n!$.

1.2 Bảng B

BÀI 1. (a) Đặt $a = 2022$, ký hiệu định thức của ma trận cần tìm là $f(x)$. Cộng hàng 2 và hàng 3 vào hàng 1 suy ra

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x+2a+1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & x \\ a+1 & x & a \end{pmatrix}, \\ &= -(x+2a+1)\left(x^2-(2a+1)x+a^2+a+1\right), \\ &= -(x+4045)\left(x^2-4045x+4090507\right). \end{aligned}$$

(b) Hạng của ma trận nhỏ hơn 3 khi và chỉ khi định thức $f(x) = 0$. Vì biệt thức

$$\Delta = (2a+1)^2 - 4(a^2+a+1) < 0,$$

nên phương trình $x^2-(2a+1)x+a^2+a+1 = 0$ không có nghiệm thực. Do đó có duy nhất một số thực $x = -2a-1 = -4045$ để $f(x) = 0$. Vậy số thực duy nhất để hạng của ma trận nhỏ hơn 3 là $x = -4045$. Lúc đó hạng của ma trận bằng hạng của

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2022 & 2023 & -4045 \\ 2023 & -4045 & 2022 \end{pmatrix}.$$

Vậy hạng của ma trận A khi đó bằng 2.

BÀI 2. Ánh xạ tuyến tính đề bài cho có ma trận trong cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ và $\mathbb{R}^3$ là

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a1) Với $\lambda = 3$, hạt nhân $\operatorname{Ker}(f)$ là không gian nghiệm của phương trình thuần nhất với ma trận hệ số là

$$A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dùng biến đổi sơ cấp suy ra số chiều $\dim\operatorname{Ker}(f) = 2$ với một cơ sở

$$(-8,5,7,0)\,;(-17,1,0,7).$$

(a2) Từ phần (a1), dùng công thức $\dim\operatorname{Im}(f) = n - \dim\operatorname{Ker}(f)$ suy ra số chiều của không gian ảnh bằng $4-2 = 2$.
Mặt khác mỗi vectơ thuộc $\operatorname{Im}(f)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ cột của $A(3)$. Do đó ảnh của ánh xạ f là không gian con sinh bởi các vectơ cột. Chuyển vị

ma trận A rồi dùng các phép biến đổi sơ cấp hàng suy ra một cơ sở của $\mathrm{Im}(f)$ là $(1,2,1),(0,1,-1)$.

(b) Số chiều của ảnh chính là hạng của ma trận:

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}.$$

Dùng biến đổi sơ cấp hàng thu được

$$\begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ 1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ 0 & \lambda-10 & 5 & 1\\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3\\ 0 & \lambda-10 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 10 & -6 & 1\\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3\\ 0 & 0 & \dfrac{(\lambda+5)(\lambda-3)}{21} & \dfrac{\lambda-3}{7}\end{pmatrix}.$$

Vậy $\mathrm{Rank}A=2$ nếu $\lambda=3$, và $\mathrm{Rank}A=3$ nếu $\lambda\neq 3$. Do đó số chiều của không gian ảnh $\mathrm{Im}(f)$ bằng 2 nếu $\lambda=3$, và bằng 3 nếu $\lambda\neq 3$.

BÀI 3. (a) Nhận thấy đa thức đạo hàm $P'(x)=4x^3-6x^2=x^2(4x-6)$ chỉ có hai nghiệm $x=0$ (bội 2) và $x=\dfrac{3}{2}$ (bội 1). Các nghiệm này đều không phải là nghiệm của phương trình ban đầu $P(x)=0$. Do đó các nghiệm của $P(x)=0$ là phân biệt.

(b) Nhận thấy $P(x)=0$ khi và chỉ khi $x^4=2x^3+1$. Do đó nếu giả sử $\alpha^3=\beta^3$ thì $\alpha^4=\beta^4$. Từ đó suy ra $\alpha=\beta$.

(c) Đặt $y=x^3$, suy ra $x^4=2y+1$. Lũy thừa 3 cả hai vế suy ra $x^{12}=(2y+1)^3$, suy ra $y^4=(2y+1)^3$. Do đó

$$y^4-8y^3-12y^2-6y-1=0.$$

Vậy kết hợp với (b) phương trình $y^4-8y^3-12y^2-6y-1=0$ có 4 nghiệm phân biệt $\alpha^3,\beta^3,\gamma^3,\delta^3$.

BÀI 4. (a) Đa thức đặc trưng $P_A(X)=(X-1)(X-2)$. Các giá trị riêng là 1 và 2. Các vectơ riêng tương ứng là $(1,0)^T$, $(-1,1)^T$. Vậy với ma trận

$$C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

thì

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Từ phần (a) suy ra

$$A = C\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}C^{-1}.$$

Cùng với tính kết hợp của phép nhân ma trận suy ra

$$e^A = C\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}C^{-1} = \begin{pmatrix} e & e-e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

BÀI 5. (a) Đặt $A = \big(a_{ij}\big)_{3\times 3}$, và $A^{-1} = \big(b_{ij}\big)_{3\times 3}$. Kết hợp với việc A và A^{-1} đều khả nghịch, ta có mỗi hàng cũng như cột của nó có ít nhất một số 1. Với $1 \le k \le 3$ ta có

$$1 = a_{k1}b_{1k} + a_{k2}b_{2k} + a_{k3}b_{3k}.$$

Vậy tồn tại duy nhất $m \in \{1,2,3\}$ sao cho $a_{km} = b_{mk} = 1$. Nói riêng mỗi hàng của A có đúng một số 1. Nếu có hai số 1 thuộc cùng một cột thì sẽ có một cột gồm toàn số 0, suy ra vô lý. Vậy mỗi hàng, mỗi cột của A có đúng một số 1. Nghịch đảo của A lúc đó cũng gồm toàn các số $0,1$. Tập P_3 bao gồm các ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Ta chỉ ra tồn tại một song ánh giữa P_n và tập S_n các hoán vị trên n phần tử. Đặt $A = \big(a_{ij}\big)_{n\times n}$, và $A^{-1} = \big(b_{ij}\big)_{n\times n}$. Kết hợp với việc A và A^{-1} đều khả nghịch, ta có mỗi hàng cũng như cột của nó có ít nhất một số 1. Với $1 \le k \le n$ ta có:

$$1 = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{jk}. \tag{1}$$

Vậy tồn tại $m \in \{1,2,\dots,n\}$ sao cho $a_{km} = b_{mk} = 1$. Ta chỉ ra số m như vậy là duy nhất. Thật vậy, giả sử có một số $m' \neq m$ sao cho $a_{km'} = 1$. Thế thì từ (1) suy ra $b_{m'k} = 0$. Vì hàng thứ m' của A^{-1} có ít nhất một số 1 nên tồn tại $l \neq k$ sao cho $b_{m'l} = 1$. Do đó $\big(AA^{-1}\big)_{kl} \geq 1$. Điều này vô lý vì $k \neq l$. Vậy số m ứng với k như vậy là duy nhất, ký hiệu bởi $m = \sigma(k)$. Vì mỗi cột của A đều có ít nhất một số 1, nên σ là toàn ánh từ $\{1,2,\dots,n\}$ vào chính nó. Do đó σ (phụ thuộc vào A) là một song ánh (hoán vị) trên $\{1,2,\dots,n\}$. Tương ứng từ $A = \big(a_{ij}\big)_{n\times n}$ vào σ cho bởi $a_{k\sigma(k)}$ là phần tử bằng 1 duy nhất trên hàng thứ k xác định một đơn ánh từ P_n vào S_n. Ta chỉ ra ánh xạ này là một toàn ánh. Thật vậy cho trước hoán vị $\sigma \in S_n$, xét $A = \big(a_{ij}\big)_{n\times n}$ là ma trận mà hàng thứ k bất kỳ có phần tử $a_{k\sigma(k)} = 1$, các phần tử còn lại đều bằng 0. Ký hiệu $B = \big(b_{ij}\big)_{n\times n}$ là ma trận mà hàng thứ k bất kỳ có phần tử $b_{k\sigma^{-1}(k)} = 1$, các phần tử còn lại đều bằng 0. Thế thì B là nghịch đảo của A. Do đó $A \in P_n$. Vậy tương ứng giữa A và σ cho một song ánh giữa P_n và S_n. Do đó số phần tử của P_n bằng $n!$.

2 Giải tích

2.1 Bảng A

BÀI 1. (a) Khẳng định (u_n) đơn điệu tăng. Từ định nghĩa

$$u_{n+1} = \left(1+\frac{1}{4^1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4^{n+1}}\right) > \left(1+\frac{1}{4^1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4^n}\right) = u_n$$

với mọi $n \geq 1$. Vậy ta suy ra $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \geq 1$.
Khẳng định $u_n > 5/4$ với mọi $n \geq 2$. Do $u_1 = 5/4$ nên từ tính đơn điệu của (u_n) ta suy ra $u_n > 5/4$ khi và chỉ khi $n \geq 2$.
(b) Khẳng định $\ln u_n < 1$ với mọi $n \geq 1$. Trước tiên ta nhắc lại bất đẳng thức cơ bản sau $\ln(1+x) < x$ với mọi $x > 0$. Sử dụng bất đẳng thức trên ta thu được

$$\ln\left(1+\frac{1}{4^k}\right) < \frac{1}{4^k} \quad \forall k \geq 1.$$

Vậy ta có đánh giá

$$\ln u_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) < 1 \quad \forall n \geq 1.$$

Khẳng định $u_n \leq 2023$ với mọi $n \geq 1$. Ở bước trên ta đã có $\ln u_n < 1$ với mọi $n \geq 1$. Vậy $u_n < e < 2023$ với mọi $n \geq 1$.
(c) Dãy (u_n) đơn điệu tăng và bị chặn trên nên hội tụ. Ký hiệu L là giới hạn của dãy (u_n). Ta nhắc lại bất đẳng thức cơ bản sau $x - x^2/2 < \ln(1+x) \quad \forall x > 0$. Sử dụng bất đẳng thức trên và bất đẳng thức cơ bản trong ý trước ta thu được

$$\frac{1}{4^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^k}\right)^2 < \ln\left(1+\frac{1}{4^k}\right) < \frac{1}{4^k} \quad \forall k \geq 1.$$

Từ đó ta có

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{4^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^k}\right)^2\right] < \ln u_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} \quad \forall n \geq 1.$$

Chuyển qua giới hạn khi $n \to +\infty$ ta thu được

$$\frac{3}{10} = \frac{1/4}{1-1/4} - \frac{1}{2}\frac{1/16}{1-1/16} \leq \ln L \leq \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}.$$

Vậy $e^{3/10} \leq L \leq e^{1/3}$. Tính gần đúng ta thu được đáp số $1,3$.
Ghi chú. Thí sinh có thể dùng máy tính bỏ túi hoặc xấp xỉ Padé $e^x \approx \dfrac{(x+3)^2+3}{(x-3)^2+3}$ với $|x| \leq 1/2$ để tính gần đúng $e^{3/10} \approx 1,349$ và $e^{1/3} \approx 1,395$.

BÀI 2. (a) Tính giới hạn của f tại 0. Từ định nghĩa của f ta có

$$|f(x)| = \begin{cases} \dfrac{|x|}{2} & \text{nếu } x \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}, \\ |x| & \text{nếu } x \in [-1,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Do đó ta luôn có $0 \le |f(x)| \le |x| \; \forall x \in [-1,1]$. Theo nguyên lý kẹp $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
Khẳng định tính liên tục của f tại 0. Ở bước trước ta đã có $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Dễ thấy $f(0) = 0$ nên f liên tục tại 0.
(b) Chuyển về khảo sát giới hạn của $f(x)/x$ khi $x \to 0$. Xét sự tồn tại của giới hạn

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x+0) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Chỉ ra rằng giới hạn của $f(x)/x$ khi $x \to 0$ là không tồn tại. Từ định nghĩa của f ta thấy

$$\lim_{\mathbb{Q}\ni x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\mathbb{Q}\ni x\to 0} \frac{-x/2}{x} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{\mathbb{Q}\not\ni x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\mathbb{Q}\not\ni x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Vậy giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ là không tồn tại. Từ đó ta kết luận hàm f không khả vi tại 0.
(c) Hàm f không có giá trị lớn nhất trên $[-1,1]$. Phản chứng giả sử f đạt giá trị lớn nhất M tại điểm $x_0 \in [-1,1]$. Nếu $x_0 \notin \mathbb{Q}$ thì $M = f(x_0) = x_0 \le 1$. Nếu $x_0 \in \mathbb{Q}$ thì $|M| = |f(x_0)| = |x_0|/2 \le 1/2$. Vậy ta phải có $M \le 1$. Nếu $M < 1$ thì khi đó bằng cách lấy bất kỳ một số vô tỉ y nằm giữa M và 1 ta thu được $f(y) = y > M$. Điều này trái với giả sử M là giá trị lớn nhất của f trên $[-1,1]$. Vậy ta phải có $M = 1$. Tuy nhiên điều này là không xảy ra vì từ lý luận trên ta phải có $x_0 \notin \mathbb{Q}$, và do đó $x_0 = 1$. Nhưng $1 \in \mathbb{Q}$.
Hàm f không có giá trị nhỏ nhất trên $[-1,1]$. Phản chứng giả sử f đạt giá trị nhỏ nhất m tại điểm $x_0 \in [-1,1]$. Nếu $x_0 \notin \mathbb{Q}$ thì $m = f(x_0) = x_0 \ge -1$. Nếu $x_0 \in \mathbb{Q}$ thì $|m| = |f(x_0)| = |x_0|/2 \le 1/2$. Vậy ta phải có $m \ge -1$. Nếu $m > -1$ thì khi đó bằng cách lấy bất kỳ một số vô tỉ y nằm giữa -1 và m ta thu được $f(y) = y < m$. Điều này trái với giả sử m là giá trị bé nhất của f trên $[-1,1]$. Vậy ta phải có $m = -1$. Tuy nhiên điều này là không xảy ra vì từ lý luận trên ta phải có $x_0 \notin \mathbb{Q}$, và do đó $x_0 = -1$. Nhưng $-1 \in \mathbb{Q}$.
Ghi chú. Thí sinh có thể chứng minh trực tiếp rằng 1 (tương ứng, -1) là cận trên đúng (tương ứng, cận dưới đúng) trên đoạn $[-1,1]$ của hàm số f, nhưng "cận” này không phải là một giá trị của hàm f.

BÀI 3.
(a) Con thuyền đến được điểm $(0,0)$ khi và chỉ khi điểm $(0,0)$ thuộc đồ thị của hàm

số

$$y(x) = \frac{x^2-1}{x^3+2}.$$

Dễ thấy điều này là không xảy ra.

(b) Con thuyền cập được bờ trái khi và chỉ khi hàm số y xác định (với giá trị hữu hạn) tại 0. Dễ thấy

$$y(0) = -\frac{1}{2}$$

và do đó con thuyền cập được bờ trái tại vị trí $(0, -\frac{1}{2})$.

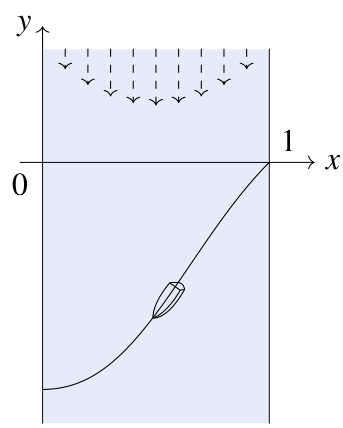
(c)

Trong suốt quá trình chuyển động, vị trí của con thuyền được xác định bởi điểm (x, y) trong đó

$$y = \frac{x^2-1}{x^3+2}$$

với $0 \le x \le 1$. Khoảng cách từ điểm $(0,0)$ đến điểm (x, y) là

$$\sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2-1}{x^3+2}\right)^2}.$$



Xét hàm số f được xác định bởi

$$f(x) = x^2 + \left(\frac{x^2-1}{x^3+2}\right)^2$$

với $0 \le x \le 1$. Trên $[0,1]$ ta có

$$f'(x) = \frac{2x(x^9+6x^6-x^5+16x^3+4x^2-3x+4)}{(x^3+2)^3}.$$

Để ý rằng

$$\begin{aligned} &x^9+6x^6-x^5+16x^3+4x^2-3x+4 \\ &\qquad = x^9+6x^6+x^3(1-x^2)+15x^3+4x^2+3(1-x)+1 > 0 \end{aligned}$$

nên f đồng biến trên $[0,1]$. Vậy f đạt giá trị nhỏ nhất khi $x=0$ và khoảng cách ngắn nhất cần tìm là $1/2$ tương ứng với vị trí của con thuyền khi nó cập bờ trái.

BÀI 4.

(a) Từ tính liên tục của f ta chỉ cần chứng minh $f \equiv 0$ trên $(0,1)$. Giả sử tồn tại $x_0 \in (0,1)$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Ta có thể giả thiết $f(x_0) > 0$. Khi đó ta tìm được

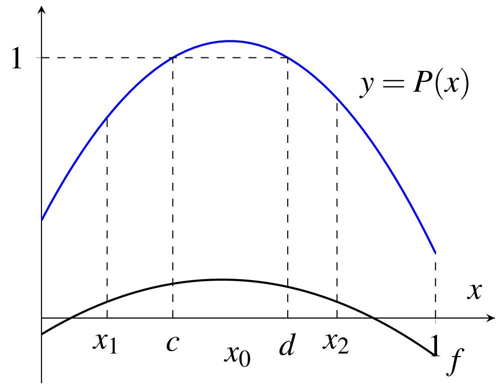
$$0 < x_1 < x_0 < x_2 < 1$$

sao cho $f(x) > 0$ với mọi $x \in [x_1, x_2]$. Đặt

$$c = \frac{x_1 + x_0}{2}, \quad d = \frac{x_0 + x_2}{2}.$$

Ta có $x_1 < c < x_0 < d < x_2$. Xét đa thức

$$P(x) = (x-c)(d-x) + 1.$$



Dễ thấy $P \geq 0$ trên $[0,1]$ và $P \geq 1$ trên $[c,d] \subset [x_1,x_2] \subset (0,1)$. Từ tính đơn điệu của P ta thấy

$$0 \leq P(x) \leq P(x_1) < 1 \quad \forall x \in [0, x_1]$$

và

$$0 \leq P(x) \leq P(x_2) < 1 \quad \forall x \in [x_2, 1].$$

Với đa thức P ở trên ta có đánh giá

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^1 f(x)P(x)^m dx &= \Big(\int_0^{x_1} + \int_{x_1}^{c} + \int_c^d + \int_d^{x_2} + \int_{x_2}^1\Big) f(x)P(x)^m dx \\ &\geq \Big(\int_0^{x_1} + \int_c^d + \int_{x_2}^1\Big) f(x)P(x)^m dx \\ &\geq -P(x_1)^m \int_0^{x_1} |f(x)|dx + \int_c^d f(x)dx \\ &\quad - P(x_2)^m \int_{x_2}^1 |f(x)|dx. \end{aligned}$$

Do $0 \leq P(x_1) < 1$ và $0 \leq P(x_2) < 1$ nên qua giới hạn khi $m \to +\infty$ ta phải có

$$\int_c^d f(x)dx \leq 0.$$

Đây là điều vô lý do f liên tục và $f > 0$ trên $[c,d]$.
(b) Do mọi đa thức $P(x)^m$ đều được viết dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các lũy thừa nguyên không âm của các đa thức bậc 1 nên kết quả của ý (b) vẫn đúng.

BÀI 5. (a) Khẳng định không tồn tại d và đưa ra được 1 ví dụ. Xét hàm số f được cho bởi

$$f(x) = x \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Khi đó f liên tục trên $[0,1]$, khả vi trong $(0,1)$, và có $f(0)=0$.
Kiểm tra được tính đúng đắn của ví dụ. Tính toán ta thấy $|f'(x)| = 1 > x^2 = \big(f(x)\big)^2$ với mọi $x \in (0,1)$.
(b) Do tính liên tục của f nên ta chỉ cần chứng minh $f \equiv 0$ trên $(0,1)$ là đủ. Giả sử tồn tại $x_0 \in (0,1)$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Khi đó tập hợp

$$E = \{x \in [0,x_0] : f(x) = 0\}$$

bị chặn (do $E \subset [0,1]$) và không rỗng (do $0 \in E$). Đặt $x_1 = \sup E$. Dễ thấy $x_1 \in E$ do f liên tục. Điều này có nghĩa là $0 \leq x_1 < x_0$, $f(x_1) = 0$, và $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in (x_1, x_0]$. Từ đó cùng với giả thiết ta thu được

$$-1 \leq \frac{f'(t)}{\big(f(t)\big)^2} \leq 1 \quad \forall t \in (x_1, x_0].$$

Lấy tích phân theo t trên đoạn $[x, x_0]$ ở cả 3 vế của bất đẳng thức kép ta thu được

$$x - x_0 \leq g(x) - g(x_0) \leq x_0 - x,$$

trong đó g là hàm số được cho bởi $g(x) = -1/f(x)$. Từ đây ta thu được

$$|g(x) - g(x_0)| \leq x_0 - x \quad \forall x \in (x_1, x_0].$$

Cho $x \to {x_1}^+$ ta thu được điều vô lý.
(c) Do f liên tục trên $[0,1]$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho $|f(x)| \leq M$ với mọi $x \in [0,1]$. Nếu $f(c) = 0$ với $c \in (0,1)$ nào đó thì c chính là điểm cần tìm và do đó ta chỉ cần xét trường hợp $f \neq 0$ trên toàn $(0,1)$. Do tính liên tục nên ta có thể giả thiết $f > 0$ trên $(0,1)$. Do $f(0) = 0$ nên tồn tại $x_0 \in (0, 1/2)$ sao cho

$$\ln f(x_0) - \ln f(\frac{1}{2}) \leq -\frac{M}{2}.$$

Theo Định lý Lagrange áp dụng cho hàm $\ln f(x)$ ta có

$$-\frac{M}{2} \geq \ln f(x_0) - \ln f(\frac{1}{2}) = \frac{f'(c)}{f(c)}\big(x_0 - \frac{1}{2}\big) \quad \text{với } c \in (x_0, \frac{1}{2}) \text{ nào đó.}$$

Từ đây ta thu được $\dfrac{f'(c)}{f(c)} > 0$ và do đó $-\dfrac{M}{2} \geq -\dfrac{1}{2}\dfrac{f'(c)}{f(c)}$. Vậy $\Big|\dfrac{f'(c)}{f(c)}\Big| = \dfrac{f'(c)}{f(c)} \geq M$.
Ghi chú. Thí sinh có thể giải như sau và vẫn được điểm tối đa. Trong trường hợp $f \equiv 0$, ta có thể chọn $c \in (0,1)$ tùy ý. Trong trường hợp còn lại, nếu kết luận là sai, tức là $\big(f(x)\big)^2 > |f'(x)|$ với mọi $x \in (0,1)$, thì theo kết luận của ý (b) ta phải có $f \equiv 0$, mâu thuẫn.

2.2 Bảng B

BÀI 1. (a) Khẳng định (u_n) đơn điệu tăng. Từ định nghĩa

$$u_{n+1} = \left(1+\frac{1}{4^1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4^{n+1}}\right) > \left(1+\frac{1}{4^1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4^n}\right) = u_n$$

với mọi $n \geq 1$. Vậy ta suy ra $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \geq 1$.
Khẳng định $u_n > 5/4$ với mọi $n \geq 2$. Do $u_1 = 5/4$ nên từ tính đơn điệu của (u_n) ta suy ra $u_n > 5/4$ khi và chỉ khi $n \geq 2$.
(b) Khẳng định $\ln u_n < 1$ với mọi $n \geq 1$. Trước tiên ta nhắc lại bất đẳng thức cơ bản sau $\ln(1+x) < x$ với mọi $x > 0$. Sử dụng bất đẳng thức trên ta thu được

$$\ln\left(1+\frac{1}{4^k}\right) < \frac{1}{4^k} \quad \forall k \geq 1.$$

Vậy ta có đánh giá

$$\ln u_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) < 1 \quad \forall n \geq 1.$$

Khẳng định $u_n \leq 2023$ với mọi $n \geq 1$. Ở bước trên ta đã có $\ln u_n < 1$ với mọi $n \geq 1$.
Vậy $u_n < e < 2023$ với mọi $n \geq 1$.
(c) Dãy (u_n) đơn điệu tăng và bị chặn trên nên hội tụ. Ký hiệu L là giới hạn của dãy (u_n).
Ta nhắc lại bất đẳng thức cơ bản sau $x - x^2/2 < \ln(1+x) \quad \forall x > 0$. Sử dụng bất đẳng thức trên và bất đẳng thức cơ bản trong ý trước ta thu được

$$\frac{1}{4^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^k}\right)^2 < \ln\left(1+\frac{1}{4^k}\right) < \frac{1}{4^k} \quad \forall k \geq 1.$$

Từ đó ta có

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{4^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^k}\right)^2\right] < \ln u_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} \quad \forall n \geq 1.$$

Chuyển qua giới hạn khi $n \to +\infty$ ta thu được

$$\frac{3}{10} = \frac{1/4}{1-1/4} - \frac{1}{2}\frac{1/16}{1-1/16} \leq \ln L \leq \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}.$$

Vậy $e^{3/10} \leq L \leq e^{1/3}$. Tính gần đúng ta thu được đáp số $1,3$.

Ghi chú. Thí sinh có thể dùng máy tính bỏ túi hoặc xấp xỉ Padé $e^x \approx \dfrac{(x+3)^2+3}{(x-3)^2+3}$ với $|x| \leq 1/2$ để tính gần đúng $e^{3/10} \approx 1,349$ và $e^{1/3} \approx 1,395$.

BÀI 2. (a) Tính giới hạn của f tại 0. Từ định nghĩa của f ta có

$$|f(x)| = \begin{cases} \dfrac{|x|}{2} & \text{nếu } x \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}, \\ |x| & \text{nếu } x \in [-1,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Do đó ta luôn có $0 \le |f(x)| \le |x|$ $\forall x \in [-1,1]$. Theo nguyên lý kẹp $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
Khẳng định tính liên tục của f tại 0. Ở bước trước ta đã có $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Dễ thấy $f(0) = 0$ nên f liên tục tại 0.
(b) Chuyển về khảo sát giới hạn của $f(x)/x$ khi $x \to 0$. Xét sự tồn tại của giới hạn

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x+0) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Chỉ ra rằng giới hạn của $f(x)/x$ khi $x \to 0$ là không tồn tại. Từ định nghĩa của f ta thấy

$$\lim_{\mathbb{Q}\ni x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\mathbb{Q}\ni x\to 0} \frac{-x/2}{x} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{\mathbb{Q}\not\ni x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\mathbb{Q}\not\ni x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Vậy giới hạn $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ là không tồn tại. Từ đó ta kết luận hàm f không khả vi tại 0.
(c) Hàm f không có giá trị lớn nhất trên $[-1,1]$. Phản chứng giả sử f đạt giá trị lớn nhất M tại điểm $x_0 \in [-1,1]$. Nếu $x_0 \notin \mathbb{Q}$ thì $M = f(x_0) = x_0 \le 1$. Nếu $x_0 \in \mathbb{Q}$ thì $|M| = |f(x_0)| = |x_0|/2 \le 1/2$. Vậy ta phải có $M \le 1$. Nếu $M < 1$ thì khi đó bằng cách lấy bất kỳ một số vô tỉ y nằm giữa M và 1 ta thu được $f(y) = y > M$. Điều này trái với giả sử M là giá trị lớn nhất của f trên $[-1,1]$. Vậy ta phải có $M = 1$. Tuy nhiên điều này là không xảy ra vì từ lý luận trên ta phải có $x_0 \notin \mathbb{Q}$, và do đó $x_0 = 1$. Nhưng $1 \in \mathbb{Q}$.
Hàm f không có giá trị nhỏ nhất trên $[-1,1]$. Phản chứng giả sử f đạt giá trị nhỏ nhất m tại điểm $x_0 \in [-1,1]$. Nếu $x_0 \notin \mathbb{Q}$ thì $m = f(x_0) = x_0 \ge -1$. Nếu $x_0 \in \mathbb{Q}$ thì $|m| = |f(x_0)| = |x_0|/2 \le 1/2$. Vậy ta phải có $m \ge -1$. Nếu $m > -1$ thì khi đó bằng cách lấy bất kỳ một số vô tỉ y nằm giữa -1 và m ta thu được $f(y) = y < m$. Điều này trái với giả sử m là giá trị bé nhất của f trên $[-1,1]$. Vậy ta phải có $m = -1$. Tuy nhiên điều này là không xảy ra vì từ lý luận trên ta phải có $x_0 \notin \mathbb{Q}$, và do đó $x_0 = -1$. Nhưng $-1 \in \mathbb{Q}$.
Ghi chú. Thí sinh có thể chứng minh trực tiếp rằng 1 (tương ứng, -1) là cận trên đúng (tương ứng, cận dưới đúng) trên đoạn $[-1,1]$ của hàm số f, nhưng "cận" này không phải là một giá trị của hàm f.

BÀI 3.
(a) Con thuyền đến được điểm $(0,0)$ khi và chỉ khi điểm $(0,0)$ thuộc đồ thị của hàm

số

$$y(x) = \frac{x^2-1}{x^3+2}.$$

Dễ thấy điều này là không xảy ra.

(b) Con thuyền cập được bờ trái khi và chỉ khi hàm số y xác định (với giá trị hữu hạn) tại 0. Dễ thấy

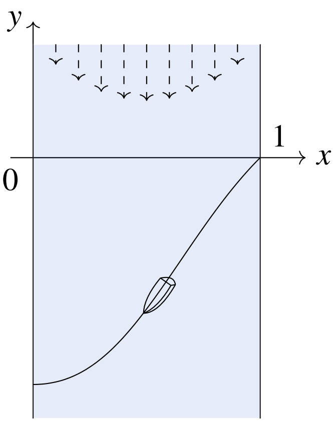
$$y(0) = -\frac{1}{2}$$

và do đó con thuyền cập được bờ trái tại vị trí $(0, -\frac{1}{2})$.

(c)

Trong suốt quá trình chuyển động, vị trí của con thuyền được xác định bởi điểm (x,y) trong đó

$$y = \frac{x^2-1}{x^3+2}$$



với $0 \le x \le 1$. Khoảng cách từ điểm $(0,0)$ đến điểm (x,y) là

$$\sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2-1}{x^3+2}\right)^2}.$$

Xét hàm số f được xác định bởi

$$f(x) = x^2 + \left(\frac{x^2-1}{x^3+2}\right)^2$$

với $0 \le x \le 1$. Trên $[0,1]$ ta có

$$f'(x) = \frac{2x(x^9+6x^6-x^5+16x^3+4x^2-3x+4)}{(x^3+2)^3}.$$

Để ý rằng

$$\begin{aligned} &x^9+6x^6-x^5+16x^3+4x^2-3x+4 \\ &\qquad = x^9+6x^6+x^3(1-x^2)+15x^3+4x^2+3(1-x)+1 > 0 \end{aligned}$$

nên f đồng biến trên $[0,1]$. Vậy f đạt giá trị nhỏ nhất khi $x=0$ và khoảng cách ngắn nhất cần tìm là $1/2$ tương ứng với vị trí của con thuyền khi nó cập bờ trái.

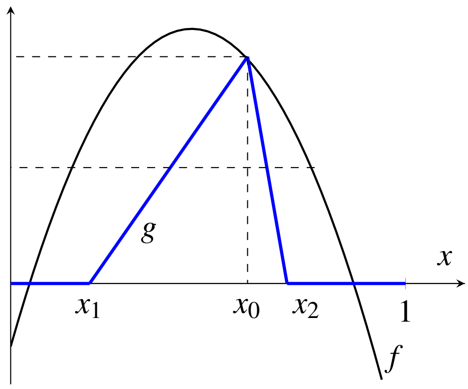
BÀI 4.

(a) Từ tính liên tục của f ta chỉ cần chứng minh $f \equiv 0$ trên $(0,1)$. Giả sử tồn tại $x_0 \in (0,1)$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Ta có thể giả thiết $f(x_0) > 0$. Khi đó ta tìm được

$$0 < x_1 < x_0 < x_2 < 1$$

sao cho

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \quad \forall x \in [x_1, x_2].$$



Xét hàm g trên $[0,1]$ được xác định bởi

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \leq x \leq x_1, \\ \dfrac{f(x_0)}{x_0 - x_1}(x - x_1) & \text{nếu } x_1 \leq x \leq x_0, \\ \dfrac{f(x_0)}{x_2 - x_0}(x_2 - x) & \text{nếu } x_0 \leq x \leq x_2, \\ 0 & \text{nếu } x_2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Khi đó $g \geq 0$, liên tục trên $[0,1]$, và có $g(0) = g(1) = 0$. Với hàm g đó, ta có

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^1 f(x)g(x)dx &= \Big(\int_0^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^1\Big) f(x)g(x)dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)dx \\ &\geq \frac{f(x_0)}{2} \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx \\ &= \frac{f(x_0)}{2} \frac{f(x_0)(x_2 - x_1)}{2} > 0. \end{aligned}$$

Đây là điều vô lý.

(b) Kết luận ở ý (b) vẫn đúng vì lần lượt áp dụng các hàm trong lời giải ý (b) cho đoạn $[0, \frac{1}{2}]$ và cho đoạn $[\frac{1}{2}, 1]$ ta thu được

$$f \equiv 0 \text{ trên } [0, \frac{1}{2}] \text{ và trên } [\frac{1}{2}, 1].$$

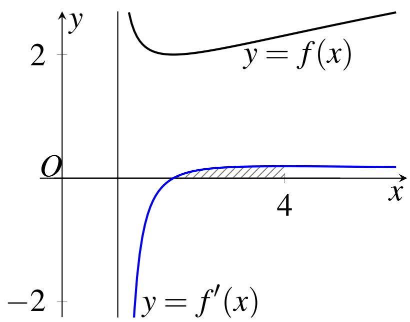
Vậy $f \equiv 0$ trên $[0,1]$.

BÀI 5.

(a) Dễ thấy

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \geq 2$$

với mọi $x > 1$, và dấu bằng đạt được khi $x = 2$. Vậy hàm f đạt được giá trị nhỏ nhất trên $(1, +\infty)$ tại $x = 2$.



Từ đó ta kết luận phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm $x = 2$ trên $(1, +\infty)$.
(b) Tính toán trực tiếp thu được

$$f'(x) = \frac{x-2}{2(x-1)^{3/2}}.$$

(c) Thiết lập công thức tính $\int_2^4 f'(x)dx$. Hoành độ giao điểm giữa đồ thị của hàm f' và đường thẳng $y = 0$ là $x = 2$. Do f đơn điệu tăng (ngặt) trên $(2, +\infty)$ nên $f' \geq 0$ trên $[2, 4]$. Vậy ta có công thức tính diện tích cần tìm

$$\int_2^4 f'(x)dx.$$

Tính tích phân $\int_2^4 f'(x)dx$. Theo công thức Newton–Leibniz ta có

$$\int_2^4 f'(x)dx = f(4) - f(2) = \frac{4}{\sqrt{3}} - 2,$$

và đây là diện tích cần tìm.

3 Trung học phổ thông

3.1 Ngày thứ nhất: Đại số

A. Các kết quả cơ bản về đa thức bất khả quy

BÀI 1. Giả sử đa thức $(x-1)(x-2)(x-3)-1$ khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$, tức là tồn tại các đa thức với hệ số nguyên $P(x)$, $Q(x)$ trong đó $\deg P, \deg Q \geq 1$ mà

$$P(x)\cdot Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)-1 = x^3-6x^2+11x-7.$$

Từ đó có thể giả sử $P(x)$, $Q(x)$ là các đa thức đơn và một trong hai đa thức trên là đa thức bậc nhất, đa thức còn lại có bậc hai. Không mất tính tổng quát, giả sử $P(x) = x+a$ và $Q(x) = x^2+bx+c$, với a, b, c là các số nguyên. Khi đó

$$P(x)\cdot Q(x) = (x+a)(x^2+bx+c) = x^3+(a+b)x^2+(ab+c)x+ac.$$

Cân bằng hệ số ta thu được hệ sau:

$$\begin{cases} a+b & = -6 \\ ab+c & = 11 \\ ac & = -7 \end{cases}$$

Từ phương trình $ac = -7$ ta thu được $(a, c) \in \{(1, -7), (-1, 7), (7, -1), (-7, 1)\}$. Thử từng trường hợp ta không thu được bộ các số nguyên a, b, c thỏa mãn hệ trên. Vậy điều giả sử là sai và ta có điều phải chứng minh.

BÀI 2. a) Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử mệnh đề cần chứng minh sai. Đặt

$$R(x) = P(x).Q(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{m+n}x^{m+n}.$$

Từ giả thiết phản chứng, tồn tại i là chỉ số nhỏ nhất mà a_i không chia hết cho p và tồn tại j là chỉ số nhỏ nhất mà b_j không chia hết cho p. Khi đó, bằng cách xét hệ số của x^{i+j} ta thấy rằng

$$c_{i+j} = a_ib_j + a_{i-1}b_{j+1} + \cdots$$

có số hạng a_ib_j không chia hết cho p và tất cả các số hạng còn lại chia hết cho p, vì thế không chia hết cho p, vô lý. Vậy ta có điều phải chứng minh.
b) Được suy trực tiếp từ a).

BÀI 3. Giả sử $P(x)$ khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$. Khi đó

$$P(x) = G(x)H(x),$$

với

$$G(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_rx^r, \quad r \geq 1,$$

$$H(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_s x^s, \quad s \geq 1.$$

Do $p \mid a_0 = c_0 d_0$ và $p^2 \nmid c_0 d_0$ nên ta có thể giả sử: $p \mid c_0$ và $p \nmid d_0$. Do $p \mid a_1 = c_0 d_1 + c_1 d_0$ nên $p \mid c_1 d_0$. Suy ra $p \mid c_1$. Tương tự từ $p \mid a_2 = c_0 d_2 + c_1 d_1 + c_2 d_0$ ta suy ra $p \mid c_2$. Giả sử $p \mid c_0, c_1, \ldots, c_k$. Khi đó $p \mid a_{k+1} = c_0 d_{k+1} + \cdots + c_k d_1 + c_{k+1} d_0$ nên $p \mid c_{k+1} d_0$. Do $p \mid d_0$ nên $p \mid c_{k+1}$. Lập luận trên dẫn đến $p \mid c_0, c_1, \ldots, c_r$. Suy ra $p \mid a_n = c_r d_s$, mâu thuẫn. Do đó $P(x)$ bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$.

BÀI 4. Hiển nhiên tính bất khả quy trên $\mathbb{Q}[x]$ suy ra tính bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$. Ta cần chỉ ra tính bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$ suy ra tính bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$.
Gọi $P(x)$ là một đa thức hệ số nguyên và bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$. Giả sử $P(x)$ khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$:

$$P(x) = P_1(x) P_2(x)$$

với $P_1(x), P_2(x)$ là các đa thức bậc nhỏ hơn bậc của $P(x)$ và có hệ số hữu tỷ. Bằng cách quy đồng các hệ số rồi đặt nhân tử chung của các hệ số của đa thức ở tử số, ta dễ dàng biểu diễn được

$$P_1(x) = \frac{a_1}{b_1} Q_1(x), P_2(x) = \frac{a_2}{b_2} Q_1(x),$$

với $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}_+$, $\gcd(a_i, b_i) = 1$ và $Q_1(x), Q_2(x)$ là các đa thức nguyên bản. Khi đó

$$P(x) = P_1(x) P_2(x) = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} Q_1(x) Q_2(x) = \frac{p}{q} Q(x),$$

với $(p, q) = 1$ và $Q(x) = Q_1(x) Q_2(x)$. Từ kết quả của 2 suy ra $Q(x)$ là đa thức nguyên bản. Do $P(x)$ là đa thức hệ số nguyên, $Q(x)$ nguyên bản, và $(p, q) = 1$ nên $q = 1$. Suy ra $b_1 b_2 = 1$, dẫn đến $b_1 = b_2 = 1$. Suy ra $P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và do đó $P(x)$ khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$, mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai, do vậy $P(x)$ bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$.

BÀI 5. Trước hết ta chỉ ra $P(x)$ có đúng một nghiệm phức α với môđun $|\alpha| > 1$. Thật vậy, xét α là một nghiệm bất kì của $P(x)$. Khi đó,

$$-a_{n-1} \alpha^{n-1} = \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-2} + \cdots + a_1 \alpha + a_0.$$

Nếu $|\alpha| = 1$ thì $|a_{n-1}| = |\alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-2} + \cdots + a_1 \alpha + a_0| \leq 1 + |a_{n-2}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$, mâu thuẫn với giả thiết bài toán. Do đó $|\alpha| \neq 1$. Gọi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là tất cả các nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt) của $f(x)$. Ta có

$$|a_0| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdots |\alpha_n|.$$

Mà $a_0 \neq 0$ và nguyên nên $|\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdots |\alpha_n| \geq 1$.
Vì $|\alpha_i| \neq 1$ nên sẽ có một nghiệm α_i nào đó có môđun > 1, chẳng hạn, $|\alpha_1| > 1$. Viết

$$P(x) = (x - \alpha_1) p(x),$$

với $p(x) = x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0$. Cân bằng hệ số ta có

$$a_0 = -\alpha_1 b_0, a_1 = b_0 - \alpha_1 b_1, \ldots, a_{n-2} = b_{n-3} - \alpha_1 b_{n-2}, a_{n-1} = b_{n-2} - \alpha_1.$$

Từ giả thiết ta có $|b_{n-2} - \alpha_1| > 1 + |b_{n-3} - \alpha_1 b_{n-2}| + \cdots + |\alpha_1 b_0|$. Suy ra

$$|b_{n-2}| + |\alpha_1| > 1 + |\alpha_1||b_{n-2}| - |b_{n-3}| + \cdots + |\alpha_1||b_1| - |b_0| + |\alpha_1||b_0|.$$

$$\Longrightarrow |\alpha_1| - 1 > (|\alpha_1| - 1)(|b_{n-2}| + |b_{n-3}| + \cdots + |b_0|).$$

Vì $|\alpha_1| > 1$ nên bất đẳng thức này cho thấy

$$|b_{n-2}| + |b_{n-3}| + \cdots + |b_0| < 1.$$

Với mọi số phức x có môđun > 1, ta có

$$\begin{aligned} |p(x)| &= |x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0| \\ &\geq |x|^{n-1} - |b_{n-2}||x|^{n-2} - \cdots - |b_1||x| - |b_0| \\ &\geq 1 - |b_{n-2}| - \cdots - |b_1| - |b_0| > 0. \end{aligned}$$

Như vậy, mọi nghiệm phức của $p(x)$ đều có môđun nhỏ hơn 1, tức là $P(x)$ có đúng một nghiệm α có môđun lớn hơn 1.
Giả sử $P(x)$ khả quy trên $\mathbb{Z}$, khi đó $P(x) = g(x)h(x)$, với $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và $\deg g(x)$, $\deg h(x) \geq 1$. Vì $P(x)$ chỉ có một nghiệm với môđun lớn hơn 1 nên có một trong hai đa thức, chẳng hạn là $g(x)$ có tất cả các nghiệm với môđun nhỏ hơn 1. Gọi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ là tất cả các nghiệm của $g(x) = x^r + c_{r-1}x^{r-1} + \cdots + c_1x + c_0$.Ta có $|c_0| = |\gamma_1| \cdot |\gamma_2| \cdots |\gamma_r| < 1$, mà c_0 là số nguyên nên $c_0 = 0$, suy ra $a_0 = 0$, trái với giả thiết bài toán. Vậy $P(x)$ là bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$.

B. Ứng dụng của đa thức bất khả quy

BÀI 6. a) Ta chỉ cần chứng minh đa thức

$$p!\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^p}{p!}\right) = p! + p!x + \frac{p!}{2!}x^2 + \cdots + px^{p-1} + x^p$$

bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$. Do đó chỉ cần chứng minh $p! + p!x + \frac{p!}{2!}x^2 + \cdots + px^{p-1} + x^p$ bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$. Chú ý là $p \mid p!/k!$ với mọi $k < p$ nên theo 3, áp dụng với số nguyên tố p, ta có $p! + p!x + \frac{p!}{2!}x^2 + \cdots + px^{p-1} + x^p$ bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$.

b) Theo bài 4, ta cần chỉ ra $P(x)$ bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$. Đặt $P(x) = x^{2^n} + 1$. Ta chỉ cần chứng minh $P(x+1)$ bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$. Ta có

$$P(x+1) = (x+1)^{2^n} + 1 = x^{2^n} + \binom{2^n}{2^n - 1}x^{2^n - 1} + \cdots + \binom{2^n}{1}x + 2.$$

Ta chứng minh với mọi số nguyên dương $k < 2^n$ thì $\binom{2^n}{k}$ là số chẵn. Thật vậy, theo hệ thức Pascal,

$$\binom{2^n}{k} = \frac{2^n}{k}\binom{2^n-1}{k-1}.$$

Để ý rằng $\binom{2^n-1}{k}$ là số nguyên và số mũ của 2 trong phân tích ra thừa số nguyên tố của k nhỏ hơn n (vì $k < 2^n$), nên số mũ của 2 vế phải là một số chẵn.
Từ đó, bằng cách áp dụng bài 3 với $p = 2$ suy ra $P(x+1)$ là bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$.
Từ đó, ta dễ dàng chỉ ra được rằng $P(x) = x^{2^n} + 1$ cũng bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$ (và $\mathbb{Q}[x]$).

BÀI 7. Ta chỉ cần chứng minh $P(x^2)$ bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$. Giả sử $P(x^2)$ khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$. Khi đó $P(x^2) = g(x)h(x)$ với $g(x)$, $h(x)$ là các đa thức hệ số nguyên bậc nhỏ hơn bậc của $P(x^2)$. Hơn nữa ta có thể giả sử $g(x)$ bất khả quy (nếu $g(x)$ khả quy ta có thể lấy một nhân tử bất khả quy của $g(x)$) và hệ số cao nhất của các đa thức g và h là 1 (do hệ số cao nhất của $P(x^2)$ là 1). Viết $g(x)$ và $h(x)$ dưới dạng

$$g(x) = G(x^2) + xL(x^2), \quad h(x) = H(x^2) + xT(x^2),$$

với $G(x), L(x), H(x), T(x)$ là các đa thức hệ số nguyên. Khi đó

$$P(x^2) = g(x)h(x) = G(x^2)H(x^2) + x^2L(x^2)T(x^2) + x(G(x^2)T(x^2) + L(x^2)H(x^2)).$$

Suy ra

$$P(x^2) - G(x^2)H(x^2) - x^2L(x^2)T(x^2) = x(G(x^2)T(x^2) + L(x^2)H(x^2)). \qquad (1)$$

Do vế trái của (1) là đa thức của x^2 nên ta phải có

$$P(x^2) - G(x^2)H(x^2) - x^2L(x^2)T(x^2) = 0 = G(x^2)T(x^2) + L(x^2)H(x^2).$$

Suy ra

$$P(x) = G(x)H(x) + xL(x)T(x), \qquad (2)$$

$$G(x)T(x) + L(x)H(x) = 0. \qquad (3)$$

Nếu $L(x)T(x) = 0$ thì $P(x) = G(x)H(x)$; nhưng điều này không thể xảy ra do $P(x)$ bất khả quy. Như vậy, $L(x)T(x) \neq 0$. Do $g(x) = G(x^2) + xL(x^2)$ và $g(x)$ bất khả quy nên $G(x)$ và $L(x)$ nguyên tố cùng nhau trong $\mathbb{Q}[x]$. Từ (3) suy ra $G(x) \mid H(x)$. Đặt $H(x) = G(x)M(x)$ với $M(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Thay vào (3) có

$$G(x)T(x) + G(x)M(x)L(x) = 0.$$

Suy ra $T(x) = -M(x)L(x)$. Từ (2) suy ra

$$P(x) = M(x)(G(x)^2 - xL(x)^2).$$

Do $P(x)$ bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$ nên $M(x)$ phải là là đa thức hằng. Chú ý rằng các đa thức $g(x)$ và $h(x)$ có bậc cùng là chẵn hay cùng lẻ nên hoặc là các hệ số cao nhất của $G(x)$ và $H(x)$ đều bằng 1 hoặc là các hệ số cao nhất của L và T đều bằng 1. Từ đó, vì $H(x) = G(x)M(x)$, $T(x) = -M(x)L(x)$ ta phải có $M(x) = \pm 1$.Suy ra

$$P(x) = \pm(G(x)^2 - xL(x)^2).$$

Do đó $|P(0)| = |G(0)|^2$, là một số chính phương, mâu thuẫn với đề bài. Vậy $P(x^2)$ bất khả quy.

BÀI 8. Trước hết ta có kết quả quen thuộc:
Bổ đề. Cho $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ là các số nguyên khác 0 ($n \geq 2$). Khi đó

$$P(x) = (x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2 + 1$$

bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$.

Chứng minh bổ đề. Theo bài 4, ta chứng minh $P(x)$ bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$. Thật vậy, giả sử $P(x) = g(x)h(x)$ trong đó $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và có bậc nhỏ hơn $2n$. Không giảm tổng quát, ta có thể giả sử $g(x), h(x)$ có hệ số cao nhất bằng 1. Ta có $g(a_i)h(a_i) = 1$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$. Suy ra $g(a_i) = h(a_i) = \pm 1$ với mọi i.
Để ý rằng, nếu có 2 chỉ số $i < j$ mà $g(a_i)$ và $g(a_j)$ trái dấu thì g sẽ có nghiệm thực trong khoảng (a_i, a_j), dẫn đến P có nghiệm thực. Tuy nhiên, dễ thấy $P(x) > 0$ với mọi x, mâu thuẫn. Như vậy,

$$g(a_1) = g(a_2) = \cdots = g(a_n) = h(a_1) = \cdots = h(a_n) = 1$$

hoặc

$$g(a_1) = g(a_2) = \cdots = g(a_n) = h(a_1) = \cdots = h(a_n) = -1$$

Nếu $g(x)$ hoặc $h(x)$ có bậc nhỏ hơn n thì do $g(x) \pm 1, h(x) \pm 1$ có n nghiệm, ta phải có $g(x)$ hoặc $h(x)$ là đa thức hằng, mâu thuẫn. Do vậy, $g(x), h(x)$ là hai đa thức bậc n. Hơn nữa, theo các lập luận trên,

$$g(a_i) - h(a_i) = 0,$$

với mọi $i = 1, \ldots, n$. Mà $g(x) - h(x)$ có bậc $\leq n-1$ (do $g(x), h(x)$ có bậc n và có các hệ số cao nhất bằng 1). Từ đó, $g(x) - h(x) = 0$, hay $g(x) = h(x)$. Do đó

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2 + 1 = (g(x))^2,$$

Dẫn đến

$$(a_1a_2\ldots a_n)^2 + 1 = (g(0))^2.$$

Chú ý phương trình $x^2 + 1 = y^2$ chỉ có nghiệm nguyên $x = 0, y = \pm 1$ nên $a_1a_2\ldots a_n = 0$, vô lý. Vậy $P(x)$ bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$.

Quay trở lại bài toán, chọn

$$P(x) = (x-1)^2(x-2)^2 \dots (x-2023)^2 + 1.$$

Khi đó $P(x)$ bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$ (theo bổ đề). Lại có $P(0) = (2023!)^2 + 1$ không là số chính phương do phương trình $x^2 + 1 = y^2$ chỉ có nghiệm nguyên $x = 0$ và $y = \pm 1$. Nên theo bài 5 ta có $P(x^2)$ bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$.

BÀI 9. Ta chứng minh, một cách tổng quát, với mọi số nguyên dương n thì đa thức $P(x) = (x(x+1))^{2^n} + 1$ bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$. Giả sử ngược lại, $P(x)$ khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$. Khi đó hiển nhiên $4^{2^n}P(x)$ cũng khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$. Do

$$4^{2^n}P(x) = ((2x+1)^2 - 1)^{2^n} + 4^{2^n} = P_1(t^2),$$

với $P_1(t) = (t-1)^{2^n} + 4^{2^n}$ và $t = 2x+1$, nên $P_1(t^2)$ khả quy trong $\mathbb{Q}[t]$. Suy ra $P_1(x^2)$ khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$. Để ý rằng đa thức $P_1(x)$ có $P_1(0) = 1 + 4^{2^n}$ không là số chính phương. Vì thế nên theo bài 5, $P_1(x) = (x-1)^{2^n} + 4^{2^n}$ khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$. Do đó $x^{2^n} + 4^{2^n}$ khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$. Suy ra $(x/4)^{2^n} + 1$ khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$. Nên $x^{2^n} + 1$ khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$, vô lý theo bài 6. Vậy $P(x)$ bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$.
Nhận xét. Có thể lập luận trực tiếp dựa vào việc phân tích thành nhân tử trong $\mathbb{Z}_2[x]$.

BÀI 10. **Bổ đề.** Phương trình $3^{2x} + 4^{2x} = y^2$ chỉ có nghiệm nguyên dương $x = 1$ và $y = 5$.

Chứng minh. Hiển nhiên nếu $x = 1$ thì $y = 5$. Xét $x > 1$. Khi đó

$$(y - 4^x)(y + 4^x) = 3^{2x}.$$

Ta có y lẻ nên $\gcd(y - 4^x, y + 4^x) = 1$. Do $y - 4^x < y + 4^x$ nên phải có $y - 4^x = 1$ và $y + 4^x = 3^{2x}$. Suy ra

$$3^{2x} - 1 = y + 4^x - (y - 4^x) = 2^{2x+1},$$

nhưng điều này không thể xảy ra do với mọi $x > 1$ thì

$$3^{2x} - 1 = 9^x - 1 = (8+1)^x - 1 > 8^x + 1 - 1 = 2^{3x} > 2^{2x+1}.$$

Bổ đề được chứng minh.
Quay trở lại bài toán. Ta chứng minh với mọi số nguyên dương n thì đa thức

$$P(x) = (x(x+1)(x+2)(x+3))^{2^n} + 1$$

bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$. Giả sử ngược lại, $P(x)$ khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$. Ta có

$$\begin{aligned} P(x) &= ((x^2+3x)(x^2+3x+2))^{2^n} + 1 \\ &= \left(\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right)\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right)\right)^{2^n} + 1. \end{aligned}$$

Nên

$$16^{2^n}P(x) = ((2x+3)^2-9)((2x+3)^2-1))^{2^n} + 16^{2^n} = P_1(t^2),$$

với $P_1(t) = ((t-9)(t-1))^{2^n} + 16^{2^n}$ và $t = 2x+3$. Do $P(x)$ khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$ nên $P_1(t^2)$ khả quy trong $\mathbb{Q}[t]$. Do $P_1(0) = 9^{2^n} + 16^{2^n}$ không là số chính phương với mọi số nguyên dương n (phương trình $3^{2x} + 4^{2x} = y^2$ chỉ có nghiệm nguyên dương $x = 1$ và $y = 5$ theo bổ đề), nên theo bài 5, $P_1(t)$ khả quy trong $\mathbb{Q}[t]$. Ta có

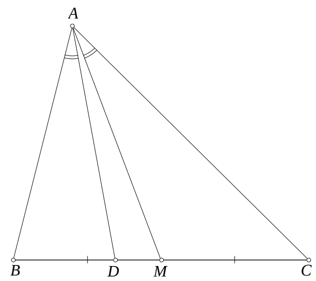
$$P_1(t) = ((t-5)^2-16)^{2^n} + 16^{2^n} = P_2(t-5),$$

với $P_2(t) = (t^2-16)^{2^n} + 16^{2^n}$. Do đó $P_2(t)$ khả quy trong $\mathbb{Q}[t]$. Lại có $P_2(t) = P_3(t^2)$ với $P_3(t) = (t-16)^{2^n} + 16^{2^n}$. Nên $P_3(t^2)$ khả quy trong $\mathbb{Q}[t]$. Do $P_3(0) = 2 \cdot 16^{2^n}$ không là số chính phương, nên theo bài 5, $P_3(t)$ khả quy trong $\mathbb{Q}[t]$. Từ đó $P_3(t + 16) = t^{2^n} + 16^{2^n}$ khả quy trong $\mathbb{Q}[t]$. Suy ra $(t/16)^{2^n} + 1$ khả quy trong $\mathbb{Q}[t]$. Do đó $t^{2^n} + 1$ khả quy trong $\mathbb{Q}[t]$, vô lý theo bài 6. Vậy $P(x)$ bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$.

3.2 Ngày thứ hai: Hình học

A. Các đường đối trung của tam giác

BÀI 1.

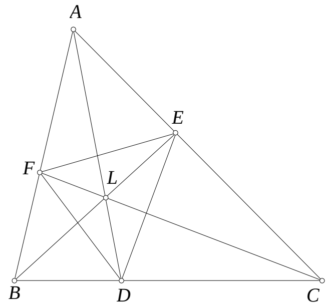


Theo định nghĩa đường đối trung $\angle DAB = \angle MAC$, ta cũng suy ra được $\angle DAC = \angle MAB$. Với chú ý rằng từ $MB = MC$, ta dễ có $S_{MAB} = S_{MAC}$, từ đó ta có biến đổi

$$\frac{DB}{DC} = \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AD \sin\angle BAD}{\frac{1}{2}AC \cdot AD \sin\angle DAC} = \frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{\frac{1}{2}AC \cdot AM \sin\angle MAC}{\frac{1}{2}AB \cdot AM \sin\angle MAB} = \frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{S_{MAB}}{S_{MAC}} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Đó là điều phải chứng minh.

BÀI 2.



Trên cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho AD, BE, CF là ba đường đối trung của tam giác ABC. Theo PT1 thì

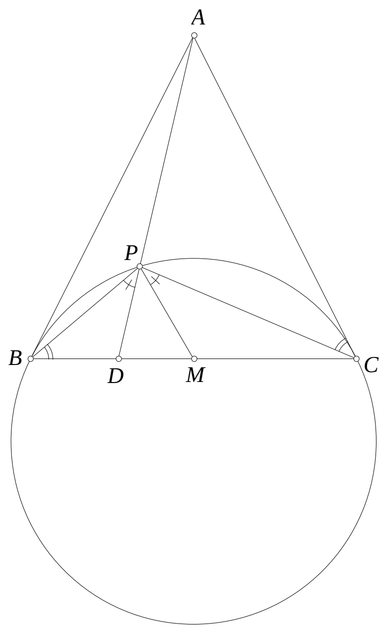
$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB^2}{AC^2},\frac{EC}{EA}=\frac{BC^2}{BA^2},\frac{FA}{FB}=\frac{CA^2}{CB^2}.$$

Vậy

$$\frac{DB}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=\frac{AB^2}{AC^2}\cdot\frac{BC^2}{BA^2}\cdot\frac{CA^2}{CB^2}=1.$$

Với chú ý D, E, F đều nằm trên các cạnh của tam giác ABC, theo định lý Ceva đảo thì AD, BE, CF đồng quy. Đó là điều phải chứng minh.

BÀI 3.

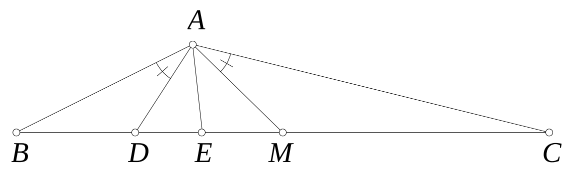


Từ giả thiết $\angle PBC=\angle PCA$ và tam giác ABC cân tại A, dễ suy ra $\angle PCB=\angle PBA$. Gọi giao điểm của PA và BC là D. Ta có biến đổi tỷ số

$$\frac{DB}{DC}=\frac{S_{PAB}}{S_{PAC}}=\frac{\frac{1}{2}BP\cdot BA\sin\angle PBA}{\frac{1}{2}CP\cdot CA\sin\angle PCA}=\frac{BP\sin\angle PCB}{PC\sin\angle PBC}=\frac{PB^2}{PC^2}.$$

Theo bài 1 thì PD là đường đối trung của tam giác PBC, ta thu được $\angle MPC = \angle DPB = 180^\circ - \angle APB$ hay $\angle APB + \angle MPC = 180^\circ$. Đó là điều phải chứng minh.

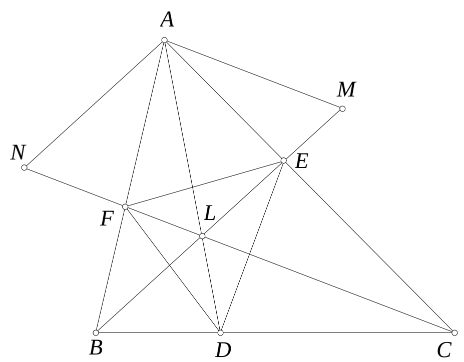
BÀI 4.



Bất đẳng thức không đúng, phản ví dụ như hình vẽ trên. Gọi M là trung điểm BC, theo định nghĩa đường đối trung thì AE là phân giác $\angle DAM$. Trong một tam giác độ dài phân giác vẫn có thể bé hơn hai cạnh tam giác.

B. Một số tính chất lượng của đường đối trung và điểm Lemoine

BÀI 5.



Gọi giao điểm của LA, LB, LC với BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Dựng hình bình hành $AMLN$ với M, N lần lượt nằm trên BE, CF. Theo bài 1 ta đã có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{c^2}{b^2}, \frac{EC}{EA} = \frac{a^2}{c^2}, \frac{FA}{FB} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Từ $AM \parallel LC$ ta có

$$\vec{AM} = \frac{AM}{LC}\vec{LC} = \frac{EA}{EC}\vec{LC} = \frac{c^2}{a^2}\vec{LC}.$$

Tương tự thì

$$\vec{AN} = \frac{b^2}{a^2}\vec{LB}.$$

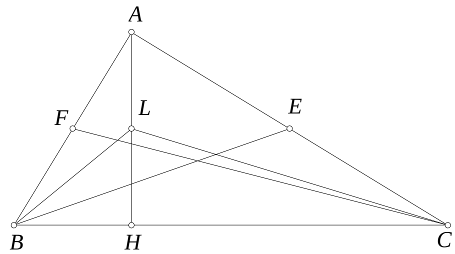
Từ tính chất hình bình hành, ta có

$$\vec{LA} = \vec{LM} + \vec{LN} = -\vec{AN} - \vec{AM} = -\frac{c^2}{a^2}\vec{LC} - \frac{b^2}{a^2}\vec{LB}$$

hay
$$a^2\vec{LA} + b^2\vec{LB} + c^2\vec{LC} = \vec{0}.$$

Đó là điều phải chứng minh.

BÀI 6.



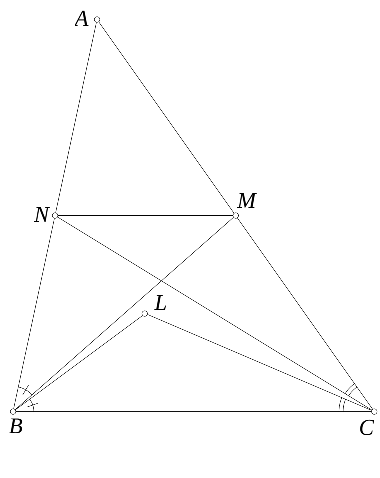
a) Gọi L là trung điểm AH. Gọi E là trung điểm AC. Dễ thấy hai tam giác BAH và BCA đồng dạng (g.g), có trung tuyến tương ứng là BL và BE. Do đó hai tam giác ABL và CBE đồng dạng. Dẫn tới $\angle LBA = \angle EBC$. Vậy BL là đường đối trung của tam giác ABC. Tương tự CL là đường đối trung của tam giác ABC. Vậy L là điểm Lemoine. Đó là điều phải chứng minh.

b) Tam giác đó phải vuông. Thật vậy, xét tam giác ABC có đường đối trung AD và điểm Lemoine L là trung điểm AD. Khi đó từ bài 5 ta có

$$\frac{LD}{LA} = \frac{a^2}{b^2+c^2}.$$

Mà L là trung điểm AD suy ra $b^2+c^2 = a^2$. Theo định lý Pythagorean đảo thì tam giác ABC vuông tại A.

BÀI 7. a) Gọi BM và CN là trung tuyến của tam giác ABC. Theo định nghĩa đường đối trung thì
$$\angle MBA = \angle LBC, \angle NCA = \angle LCB.$$



Nếu $LB = LC$ thì $\angle LBC = \angle LCB$, kết hợp hai đẳng thức trên ta suy ra $\angle MBA = \angle NCA$ hay tứ giác $BCMN$ nội tiếp. Mặt khác $MN \parallel BC$, suy ra $BCMN$ là hình thang cân hay $\angle ABC = \angle ACB$. Từ đó $AB = AC$. Đó là điều phải chứng minh.

b) Từ $\dfrac{EA}{EC} = \dfrac{b^2}{a^2}$ ta suy ra $a^2\vec{EA} + c^2\vec{EC} = \vec{0}$ hay $a^2\vec{BA} + c^2\vec{BC} = (a^2+c^2)\vec{BE}$. Bình phương vô hướng, cho ta

$$(a^2+c^2)^2BE^2 = \left(a^2\vec{BA} + c^2\vec{BC}\right)^2 = a^2c^2(a^2+c^2) + 2a^2c^2\vec{BA}\cdot\vec{BC} = a^2c^2(a^2+c^2+a^2+c^2-b^2).$$

Từ đó ta thu được

$$BE^2 = \frac{2a^2c^2}{a^2+c^2} - \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+c^2)^2}.$$

Tương tự

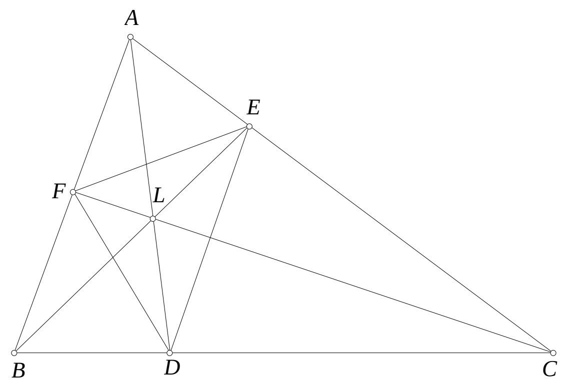
$$CF^2 = \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2} - \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)^2}.$$

Vậy $BE = CF$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}
&\iff \frac{2a^2c^2}{a^2+c^2} - \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+c^2)^2} = \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2} - \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)^2}\\
&\iff 2a^2\left(\frac{c^2}{a^2+c^2} - \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) = a^2b^2c^2\left(\frac{1}{(a^2+c^2)^2} - \frac{1}{(a^2+b^2)^2}\right)\\
&\iff 2a^4\frac{c^2-b^2}{(a^2+c^2)(a^2+b^2)} = a^2b^2c^2\frac{(b^2-c^2)(2a^2+b^2+c^2)}{(a^2+c^2)^2(a^2+b^2)^2}\\
&\iff 2a^2(c^2-b^2)(a^2+c^2)(a^2+b^2) = b^2c^2(b^2-c^2)(2a^2+b^2+c^2)\\
&\iff (c^2-b^2)(2a^2(a^2+c^2)(a^2+b^2) + b^2c^2(2a^2+b^2+c^2)) = 0\\
&\iff b = c.
\end{aligned}$$

Vậy $BE = CF$ thì tam giác ABC cân tại A. Đó là điều phải chứng minh.

BÀI 8.



Từ bài 5 ta có $a^2\vec{LA}+b^2\vec{LB}+c^2\vec{LC}=\vec{0}$, ta suy ra

$$\frac{LD}{LA}=\frac{a^2}{b^2+c^2},\frac{LE}{LB}=\frac{b^2}{c^2+a^2},\frac{LF}{LC}=\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

Vậy bất đẳng thức đề cho tương đương với

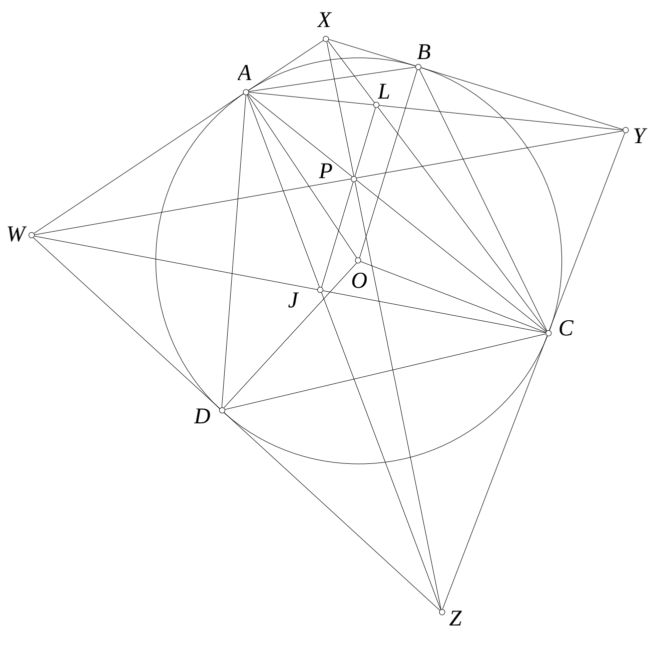
$$\begin{aligned}
&\iff LA+LB+LC\geq 2\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}LA+\frac{b^2}{c^2+a^2}LB+\frac{c^2}{a^2+b^2}LC\right)\\
&\iff LA\frac{b^2+c^2-2a^2}{b^2+c^2}+LB\frac{c^2+a^2-2b^2}{c^2+a^2}+LC\frac{a^2+b^2-2c^2}{a^2+b^2}\geq 0\\
&\iff (b^2-c^2)\left(\frac{LC}{a^2+b^2}-\frac{LB}{c^2+a^2}\right)+(c^2-a^2)\left(\frac{LA}{b^2+c^2}-\frac{LC}{a^2+b^2}\right)\\
&+(a^2-b^2)\left(\frac{LB}{c^2+a^2}-\frac{LA}{b^2+c^2}\right)\geq 0\\
&\iff (b^2-c^2)(CF-BE)+(c^2-a^2)(AD-CF)+(a^2-b^2)(BE-AD)\geq 0
\end{aligned}$$

Không mất tổng quát giả sử $a\geq b\geq c$, theo chứng minh bải 7 thì $AD\leq BE\leq CF$ vậy bất đẳng thức

$$(b^2-c^2)(CF-BE)+(c^2-a^2)(AD-CF)+(a^2-b^2)(BE-AD)\geq 0$$

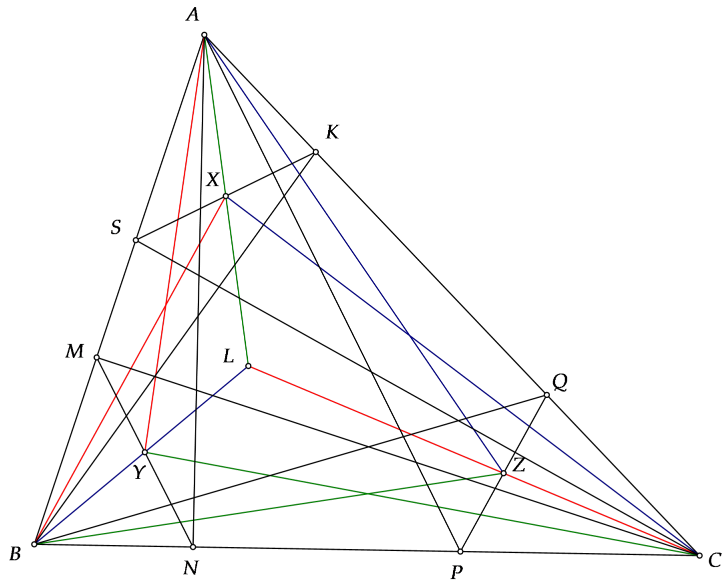
luôn đúng. Đó là điều phải chứng minh.

BÀI 9.



Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Tiếp tuyến qua A, B, C, D của (O) cắt Tiếp tuyến qua B, C, D, A của (O) tại X, Y, Z, W. Theo bài 3 thì L là giao điểm của AY và CX còn J là giao điểm của AZ và CW. Tứ giác $XYZW$ ngoại tiếp nên dễ thấy XZ, YW, AC, BD đồng quy tại P. Từ đó theo định lý Pappus cho hai bộ ba điểm thẳng hàng (W,A,X) và (Z,C,Y) ta dễ thấy J, P, L thẳng hàng. Đó là điều phải chứng minh.

BÀI 10.



Đường đối song qua X cắt các cạnh CA, AB tại K, S; đường đối song qua Y cắt các cạnh AB, BC tại M, N; đường đối song qua Z cắt các cạnh BC, CA tại P, Q.
Dễ thấy các tứ giác $BCKS$, $CAMN$, $ABPQ$ nội tiếp và vì AX, BY, CZ là các đường đối trung nên X, Y, Z là trung điểm của KS, MN, PQ.
Từ $\angle XBA = \angle YAB$ và $\angle ASK = \angle ACB = \angle BMN$ (vì $BCKL$ và $CAMN$ nội tiếp), ta thu được $\triangle AMY \sim \triangle BSX$ (g.g). Nhưng vì X và Y là trung điểm của KS và MN nên $\triangle AMN \sim \triangle BSK$ (c.g.c), vì thế nên $\angle SBK = \angle MAN = \angle MCN$ (vì $CAMN$ nội tiếp). (1)
Tương tự ta có $\angle SCK = \angle QBP$. (2)
Từ $BCKS$ nội tiếp, ta có $\angle SBK = \angle SCK$. (3)
Từ (1), (2), (3), ta nhận được $\angle MCN = \angle QBP$. Mặt khác dễ thấy $\angle QPC = \angle BAC = \angle MNB$ (vì các tứ giác $CAMN$ và $ABPQ$ nội tiếp). Từ đó, $\triangle CMN \sim \triangle BQP$ (g.g), nhưng Y và Z là trung điểm của MN và PQ. Vì thế $\triangle BZP \sim \triangle CYN$ dẫn đến $\angle ZBC = \angle YCB$. Đó là điều phải chứng minh.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: ĐẠI SỐ

1 MA TRẬN

Bài 1.1 (ĐH Giao thông vận tải, N.H. Hoàng)**.** Ta có $A^{64} = -A^2$. Ta có

$$A^{2023} = (A^{64})^{31}A^{39} = (-A^2)^{31}A^{39} = -A^{101}.$$

Do đó $A^{101} = -A^{101}$. Sử dụng $A^{64} = -A^2$, ta có $A^{100} = -A^{38}$, $A^{101} = -A^{39}$ và $A^{38} = -A^{39}$.
Sử dụng $A^{38} = -A^{39}$ ta có $A^{64} = A^{38}.A^{26} = -A^{39}.A^{26} = -A^{65}$.
Hơn nữa, từ $A^{64} = -A^{65}$ ta suy ra $A^2 = -A^3$ và với $k \geqslant 2$ thì $A^k = A^2.A^{k-2} = -A^3.A^{k-2} = -A^{k+1}$. Vì $A^k = -A^{k+1}$ với mọi $k \geqslant 2$ nên ta suy ra được $A^{62} = A^2$.
Như vậy, $A^2 = -A^2$ nên $A^2 = 0$.

Bài 1.2 (ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên, P.H. Nam)**.**

a) Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sao cho $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Khi đó ta có

$$A = \begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2+bc = 1, \\ (a+d)b = 0, \\ (a+d)c = 0, \\ d^2+bc = 1. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình tìm được $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ với $a^2+bc = 1$.

b) Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Vì A giao hoán với mọi ma trận vuông B cấp 2 với hệ số thực nên với $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hoặc $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ta có $AB = BA$.

Với $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ta suy ra $b = c = 0$.

Với $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ta suy ra $a = d$. Do đó $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aI$.

Với mọi ma trận cấp 2 với hệ số thực B ta có

$$AB = aIB = aBI = B(aI) = BA.$$

Vậy $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Bài 1.3 (ĐH Kinh tế và Quản trị kinh doanh - ĐH Thái Nguyên, N.Q. Hoa)**.** Ta có

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = 4I_4.$$

Suy ra

$$(\det A)^2 = \det(A^2) = 4^4 \neq 0.$$

Do đó A khả nghịch. Hơn nữa

$$A^{-1} = \frac{1}{4}A.$$

Vậy $X = BA^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 & 9 & -5 & -3 \\ -3 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 4 & -4 \\ 3 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Bài 1.4 (ĐH Kinh tế và Quản trị Kinh doanh - ĐH Thái Nguyên, T.N. Bình)**.** Với mọi $A \in M_2(\mathbb{R})$, ta có $A^2 - \mathrm{tr}(A).A + \det(A).I = 0$ với I là ma trận đơn vị cấp 2. Ta có

$$\mathrm{tr}(AB - BA) = 0 \Rightarrow (AB - BA)^2 = \alpha I \Rightarrow (AB - BA)^{1000} = \beta^2 I.$$

Đặt $C = (AB + BA)^{500}$ thì $(AB - BA)^{1000} + (AB + BA)^{1000} = \beta^2 I + C^2$, mà

$$\begin{aligned} \det(\beta^2 I + C^2) &= \det(\beta I + iC).\det(\beta I - iC) \\ &= \det(\beta I + iC).\overline{\det(\beta I + iC)} \geq 0. \end{aligned}$$

Nên ta có

$$\det\left((AB - BA)^{1000} + (AB + BA)^{1000}\right) = \det(\beta^2 I + C^2) \geq 0.$$

Bài 1.5 (ĐH Kinh tế và Quản trị Kinh doanh - ĐH Thái Nguyên, T.N. Bình)**.** Giả sử f và g là các tự đồng cấu tuyến tính của $\mathbb{R}$- không gian véctơ V có ma trận lần lượt là A, B với cơ sở nào đó của V ($\dim V = n$).

Khi đó ta có $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(f) = \dim(\operatorname{Im} f)$ và $\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$. Mặt khác ta có

$$\dim(\operatorname{Im}(f+g)) = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Im} g) - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g).$$

Giả sử $y \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g$, khi đó tồn tại $x_1, x_2 \in V$ sao cho $Ax_1 = Bx_2 = y$. Do đó $x_2^T B^T = y^T$.
Vì $B^T A = 0$ nên $x_2^T B^T A x_1 = y^T y = 0$, ta có $y = 0$. Vậy $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = 0$ và

$$\dim(\operatorname{Im}(f+g)) = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Im} g).$$

Vậy $\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.

Bài 1.6 (ĐH Vinh, D.X. Giáp)**.** Nhân bên trái với ma trận B và nhân bên phải với ma trận A vào hai vế của đẳng thức $(AB)^{2022} = 2023(AB)^{2023}$ ta có

$$B\underbrace{(AB)(AB)\ldots(AB)}_{\text{2022 lần}}A = 2023B\underbrace{(AB)(AB)\ldots(AB)}_{\text{2023 lần}}A.$$

Điều này tương đương với

$$(BA)^{2023} = 2023(BA)^{2024} \tag{*}$$

Do ma trận BA có cấp 2×2 và theo giả thiết $\operatorname{rank}(BA) = 2$ ta suy ra ma trận BA khả nghịch. Điều này dẫn tới ma trận $(BA)^{2023}$ khả nghịch. Từ đó nhân hai vế đẳng thức (*) với ma trận $\left((BA)^{2023}\right)^{-1}$ ta thu được $I = 2023(BA)$, hay là $BA = \dfrac{1}{2023}I$ (trong đó I ký hiệu là ma trận đơn vị cấp 2).

Bài 1.7 (ĐH Vinh, D.X. Giáp)**.** Giả sử ta tìm được ma trận A thỏa mãn yêu cầu bài toán. Theo tính chất đồng dư, ta có $\det A \equiv \det B \pmod 2$, trong đó

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{2023 \times 2023}.$$

Bài 1.8 (ĐH Vinh, D.X. Giáp)**.** Giả sử $X = (x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_{2023})^T$ là ma trận cột thỏa mãn

$$(A + 2023I)X = 0. \tag{1}$$

Bằng cách lấy chuyển vị 2 vế của (1) ta có

$$\begin{aligned} X^T(A^T + 2023I) = 0 &\Rightarrow X^T(-A + 2023I) = 0 \\ &\Rightarrow -X^T A + 2023X^T = 0 \\ &\Rightarrow -X^T AX + 2023X^T X = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Mặt khác, (1) kéo theo $AX = -2023X$, đem thế vào (2) ta có

$$-X^T(-2023X) + 2023X^TX = 0 \Leftrightarrow X^TX = 0.$$

Điều này tương đương với $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{2023}^2 = 0$, dẫn tới $x_1 = x_2 = ... = x_{2023} = 0$. Điều này suy ra điều phải chứng minh.

Bài 1.9 (ĐH Công nghệ thông tin - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)**.** Đặt $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ thì phương trình đã cho tương đương

$$X^{2015} + X^n = 2I_2 + 4028M.$$

Ta chỉ ra X thỏa mãn phương trình $MX = XM$ và giải phương trình này để thu được $X = \alpha I_2 + \beta M$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.
Sử dụng $M^2 = 0$ để chỉ ra

$$X^{2015} + X^n = (\alpha^2 015 + \alpha^n)I_2 + (2015\alpha^{2014} + n\alpha^{n-1})M.$$

Từ đó quy về hệ phương trình

$$\begin{cases} \alpha^{2015} + \alpha^n = 2 \\ (2015\alpha^{2014} + n\alpha^{n-1})\beta = 4028 \end{cases}.$$

Từ đây α là ước của 2 nên ta có $\alpha = 1$. Thay $\alpha = 1$ vào phương trình thứ hai, ta thu được

$$(2015 + n)\beta = 4028.$$

Dựa vào $n + 2015$ là ước số của 4028, ta có $n + 2015 = 4028$ hay $n = 2013$ và $\beta = 1$. Vậy $n = 2013$ và $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Bài 1.10 (ĐH Công nghệ thông tin - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)**.** Ta thấy $p(A), q(A)$ giao hoán với nhau, $p(B), q(B)$ giao hoán với nhau. Xét các ma trận

$$M = \begin{pmatrix} p(A) & q(B) \\ -q(A) & p(B) \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} p(B) & q(B) \\ -q(A) & p(A) \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$\det(M) = \det[p(A)p(B) + q(A)q(B)],$$

$$\det(N) = \det[p(B)p(A) + q(B)q(A)].$$

Mà $\det J = -1$, $M = JNJ$ nên $\det M = \det N$ và ta có điều phải chứng minh.

Bài 1.11 (ĐH Công nghệ thông tin - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)**.** Từ bất đẳng thức Sylvester về hạng của ma trận, ta có

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \le \operatorname{rank}(AB) + n$$

nên

$$\begin{aligned}
0 = \operatorname{rank}(A_1A_2\ldots A_k) &\ge \operatorname{rank}A_1 + \operatorname{rank}(A_2\ldots A_k) - n\\
&\ge \operatorname{rank}A_1 + \operatorname{rank}A_2 + \operatorname{rank}(A_3\ldots A_k) - 2n\\
&\ge \cdots\\
&\ge \operatorname{rank}A_1 + \operatorname{rank}A_2 + \ldots + \operatorname{rank}A_k - (k-1)n.
\end{aligned}$$

Bài 1.12 (ĐH Trà Vinh, T.Q. Hà)**.**

a) Ta có

$$\begin{aligned}
&A(c)A(d) = A(d)A(c)\\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} 1-\dfrac{c}{d} & d-c\\ -\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d} & 1-\dfrac{d}{c}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{d}{c} & c-d\\ -\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{c} & 1-\dfrac{c}{d}\end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow &\, c = d.
\end{aligned}$$

b) Ta có $A(c)+A(2c) = \begin{pmatrix} 2 & 3c\\ -\dfrac{3}{2c} & -2\end{pmatrix}$ và

$$(A(c)+A(2c))^2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Do đó $(A(c)+A(2c))^{2n}$ không phụ thuộc vào c với mọi $n \in \mathbb{N}$. Hơn nữa

$$(A(c)+A(2c))^{2n} = \begin{pmatrix} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n & 0\\ 0 & \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}.$$

Bài 1.13 (ĐH Trà Vinh, T.Q. Hà)**.** Giả sử $A \in M_n(K)$ chéo hóa được, nghĩa là tồn tại $P \in M_n(K)$ khả nghịch và ma trận chéo $D \in M_n(K)$ sao cho $A = P^{-1}DP$ với

$$D = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & c_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & c_n\end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$A^m = P\begin{pmatrix} c_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n^m \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Mà A là lũy linh nên $A^m = 0$ nên $D^m = 0$, do đó $c_1^m = c_2^m = \cdots = c_n^m = 0$ hay $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.
Chiều ngược lại của mệnh đề là hiển nhiên.

Bài 1.14 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Xét tính chẵn lẻ của định thức của A, ta có

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \pmod 2$$

$$\equiv 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \equiv -5 \equiv 1 \pmod 2$$

suy ra $\det A$ là một số nguyên lẻ. Vậy $\det A$ khác không.

Bài 1.15 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.** Ta gọi

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Từ giả thiết, ta có

$$AE_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = E_1 A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

suy ra $b = c = 0$. Từ

$$AE_2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = E_1 A = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

suy ra $a = d = k$.

Bài 1.16 (ĐH Mỏ - Địa chất, P.T. Cường)**.** Ta có

$$p(x) = \det(A - xI) = x^2 - ax + b,$$

trong đó $a = \mathrm{Tr}(A)$, $b = \det A$. Đặt $\varepsilon = e^{\frac{i2\pi}{3}}$. Khi đó $\varepsilon + \varepsilon^2 = -1$. Từ đó suy ra

$$\det(A^2 + A + I) = \det(A - \varepsilon I)(A - \varepsilon^2 I) = p(\varepsilon)p(\varepsilon^2).$$

Thay $p(x)$ vào ta được

$$\begin{aligned}
\det(A^2 + A + I) &= (\varepsilon^2 - a\varepsilon + b)(\varepsilon - a\varepsilon^2 + b) \\
&= 1 - a\varepsilon + b\varepsilon^2 - a\varepsilon^2 + a^2 - ab\varepsilon + b\varepsilon - ab\varepsilon^2 + b^2 = \\
&= 1 + (-a + b - ab)(\varepsilon + \varepsilon^2) + a^2 + b^2 = \\
&= 1 + a - b + ab + a^2 + b^2 = a^2 + (1 + b)a + (b^2 - b + 1).
\end{aligned}$$

Tam thức bậc hai đạt giá trị cực tiểu tại điểm

$$a = -\frac{b+1}{2}$$

và có giá trị cực tiểu bằng

$$\frac{3}{4}(1 - b)^2.$$

Vì $b = \det A$ nên đây chính là điều phải chứng minh.

Bài 1.17 (ĐH Hải Phòng, V.T. Đức)**.**

a) Ta có ma trận A khác không và $\det A = 0$ nên A có hạng bằng 1, do đó, nó có ít nhất một dòng khác không. Như vậy A có thể viết dưới dạng:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix} \text{ hoặc } A = \begin{pmatrix} ka & kb \\ a & b \end{pmatrix}$$

với a, b không đồng thời bằng 0.

b) Kí hiệu I_2 là ma trận đơn vị phức cấp 2. Ta có:

$$B^2 - 2B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (B - I_2)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Đặt $A = B - I_2$, ta có $\det A = 0$ và A là ma trận khác không nên nó có dạng $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$, do đó

$$A^2 = (a + kb)\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}.$$

Từ giả thiết suy ra

$$\begin{cases}(a+kb)a=-1,\\(a+kb)b=-1,\\(a+kb)ka=-1,\\(a+kb)kb=-1.\end{cases}$$

Rút gọn ta được

$$\begin{cases}k=-1,\\a=b,\\(a+kb)a=-1.\end{cases}$$

Từ đó ta giải được

$$(a,b)\in\left\{\left(\frac{i}{\sqrt{2}};\frac{i}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{-i}{\sqrt{2}};\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

Khi đó hai ma trận B thỏa mãn yêu cầu đề bài:

$$B=A+I_2\in\left\{\begin{pmatrix}1+\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}}\\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 1+\frac{i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1-\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}}\\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & 1-\frac{i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\}.$$

c) Ta có:

$$C^3-3C^2+3C=\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow(C-I_2)^3=\begin{pmatrix}-1 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}.$$

Đặt $A=C-I_2$, ta có $\det A=0$ và A là ma trận khác không nên nó có dạng:

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ka & kb\end{pmatrix}\Rightarrow A^3=(a+kb)^2\begin{pmatrix}a & b\\ka & kb\end{pmatrix}.$$

Từ giả thiết suy ra

$$\begin{cases}(a+kb)^2a=-1,\\(a+kb)^2b=-1,\\(a+kb)^2ka=-1,\\(a+kb)^2kb=-1.\end{cases}$$

Rút gọn ta được

$$\begin{cases}k=-1,\\a=b,\\(a+kb)^2a=-1.\end{cases}$$

Từ đó ta giải được
$$a = b = \frac{-1}{\sqrt[3]{4}}.$$
Khi đó có duy nhất một ma trận C thỏa mãn yêu cầu đề bài
$$C = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} & \frac{-1}{\sqrt[3]{4}} \\ \frac{-1}{\sqrt[3]{4}} & 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{pmatrix}.$$

2 ĐỊNH THỨC

Bài 2.1 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Phúc)**.**

a) Lấy dòng i trừ dòng $i-1$ với $2 \le i \le n$, ta được
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

b) Lấy dòng i trừ dòng $i+1$ với $1 \le i \le n-1$, ta được
$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -1 & -1 & 0 & ... & 0 \\ -1 & -1 & -1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ n & n & n & ... & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n.$$

Bài 2.2 (ĐH Giao thông vận tải, N.H. Hoàng)**.** Đặt $A = I + B$ với $B = (b_{ij})_{n\times n}$ và $b_{ij} = 2^{i+j}$. Do ma trận B có các hàng tỷ lệ với nhau nên rank$B = 1$ và B có các giá trị riêng $\lambda = 0$ (bội $n-1$) và $\lambda = \text{tr}(B) = \frac{4^{n+1}-4}{3}$ (bội 1). Từ đó ta suy ra đa thức đặc trưng của B là
$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = (-1)^n \lambda^{n-1}\left(\lambda - \frac{4^{n+1}-4}{3}\right).$$
Như vậy $\det A = P_B(-1) = \frac{4^{n+1}-1}{3}$.

Bài 2.3 (ĐH Giao thông vận tải, N.H. Hoàng)**.** Đặt $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Dễ thấy $\begin{pmatrix} 2023 & -2012 \\ 2012 & -2001 \end{pmatrix} = 11I + 2012M$ và $M^2 = 0$. Do M_1, M_2, M_3 đôi một giao hoán với nhau nên

$$M_1(M_1^4 + M_2^4 + M_3^2) = (M_1^4 + M_2^4 + M_3^2)M_1 \Leftrightarrow M_1M = MM_1.$$

Sử dụng $M_1M = MM_1$ ta suy ra được rằng tồn tại hai số nguyên α_1, β_1 để $M_1 = \alpha_1 I + \beta_1 M$. Thật vậy, nếu $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thì

$$M_1M = MM_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & -a-b \\ c+d & -c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -c \\ d = a - 2c \end{cases}.$$

Vậy $M_1M = MM_1$ thì M có dạng

$$M = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a-2c \end{pmatrix} = (a-c)I + cM$$

và đây là biểu diễn đã nói ở trên.
Tương tự, ta có $M_2 = \alpha_2 I + \beta_2 M, M_3 = \alpha_3 I + \beta_3 M$. Sử dụng các biểu điễn này và $M^2 = 0$, ta nhận được

$$M_1^4 + M_2^4 + M_3^2 = (\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^2)I + (4\alpha_1^3\beta_1 + 4\alpha_2^3\beta_2 + 2\alpha_3\beta_3)M.$$

Kết hợp với giả thiết ta có

$$(\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^2)I + (4\alpha_1^3\beta_1 + 4\alpha_2^3\beta_2 + 2\alpha_3\beta_3)M = 11I + 2012M.$$

Do hệ $\{I, M\}$ độc lập tuyến tính nên từ đẳng thức trên ta suy ra:

$$\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^2 = 11 \qquad (1).$$

Từ (1) ta có $\alpha_1^4 \leqslant 11, \alpha_2^4 \leqslant 11$ nên kết hợp với α_1, α_2 nguyên ta suy ra $\alpha_1^4 \leqslant 1, \alpha_2^4 \leqslant 1$. Điều này dẫn tới $11 \geqslant \alpha_3^2 = 11 - \alpha_1^4 - \alpha_2^4 \geqslant 9$ nên $\alpha_3^2 = 9$ (do α_3^2 là một số chính phương). Như vậy $\alpha_4^2 + \alpha_2^4 = 2$ và điều này suy ra $\alpha_1^4 = \alpha_2^4 = 1$ và hệ quả là $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$.
Sử dụng các kết quả phân tích trên ta nhận được:

$$M_3^2 = \alpha_3^2 I + 2\alpha_3\beta_3 M = 9I + a_3 M,$$

với $a_3 = 2\alpha_3\beta_3$. Tương tự ta thu được $M_1^2 = I + a_1 M, M_2^2 = I + a_2 M$ với $a_1 = 2\alpha_1\beta_1, a_2 = 2\alpha_2\beta_2$.
Vậy ta có đẳng thức

$$M_1^2M_2^2 + M_2^2M_3^2 + M_3^2M_1^2 = 19I + (10a_1 + 10a_2 + 2a_3)M.$$

Sử dụng đẳng thức $\det(xI + yM) = \begin{vmatrix} x+y & -y \\ y & x-y \end{vmatrix} = x^2$, ta nhận được

$$\det(M_1^2M_2^2 + M_2^2M_3^2 + M_3^2M_1^2) = 361.$$

Bài 2.4 (ĐH Kinh tế và Quản trị Kinh doanh - ĐH Thái Nguyên, N.Q. Hoa)**.** Nhận xét rằng định thức của A là một số nguyên và nếu thêm hay bớt các phần tử của A đi một số nguyên chẵn thì tính chẵn lẻ của định thức không đổi. Do đó

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ & & & \dots & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} (\bmod 2).$$

Ta có

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ & & & \dots & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2n-1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 2n-1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ & & & \dots & \\ 2n-1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \equiv (2n-1)(-1)^{2n-1} \equiv 1 (\bmod 2).$$

Từ đó suy ra $\det A$ lẻ nên khác 0.

Bài 2.5 (ĐH Công nghệ thông tin - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)**.** Nếu $x = 0$ thì $\det(xA + yB) = \det(yB) = y^3 \det B = 0$.
Nếu $x \neq 0$ thì $\det(xA + yB) = x^3 P(t)$, trong đó $t = \dfrac{y}{x}$ và $P(t) = \det(A + tB)$ là đa thức bậc 3 theo t.
Theo giả thiết, ta có $P(0) = P(1) = P(-1) = 0$ nên $P(t)$ phải có dạng

$$P(t) = \alpha t(t^2 - 1)$$

với α là hằng số. Mặt khác ta có

$$\alpha = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^3} P(t) \lim_{t \to +\infty} \det\left(\frac{1}{t}A + B\right) = \det B = 0.$$

Từ đó ta có $P(t) = 0$ với mọi t.

Bài 2.6 (ĐH Công nghệ thông tin - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)**.** Đặt $D_n = \det A$. Ta biến đổi định thức theo thứ tự:

- Lấy dòng n trừ cho dòng $n-1$.
- Lấy dòng $n-1$ trừ cho dòng $n-2$.

$\dots$

- Lấy dòng 2 trừ cho dòng 1.

Lấy kết quả thu được khai triển theo cột 1. Tiếp theo, ta biến đổi định thức theo thứ tự:

- Lấy cột $n-1$ trừ cho dòng $n-2$.

- Lấy dòng $n-1$ trừ cho dòng $n-2$.

  $\ldots$

- Lấy dòng 2 trừ cho dòng 1.

Đến đây ta thu được D_{n-1}. Do đó $D_n = D_{n-1}$. Vậy ta có $D_n = D_1 = 1$.

Bài 2.7 (ĐH Trà Vinh, T. Q. Hà)**.**

a) Ta có

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1+c & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+c & \cdots & a_n \\ \ldots & \ldots & \cdots & \ldots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+c \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i+c & a_2 & \cdots & a_n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i+c & a_2+c & \cdots & a_n \\ \ldots & \ldots & \cdots & \ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i+c & a_2 & \cdots & a_n+c \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i+c & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \cdots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{vmatrix}.$$

Do đó $\det A = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i + c\right) c^{n-1}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} A \text{ khả nghịch } &\Leftrightarrow \det A \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + c\right) c^{n-1} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i + c \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Bài 2.8 (ĐH Fulbright, N.T. Hiếu)**.** Trước tiên, ta nhận thấy $F(x)$ là một đa thức bậc 4 theo biến x.
Cộng các hàng 2, 3 và 4 vào hàng 1, ta thấy $F(x) = 0$ khi $x + 2022 + 2023 + 2024 = x + 6069 = 0$. Như vậy $x = -6069$ là một nghiệm.
Tương tự, cộng hàng 2 vào hàng 1, ta thấy $x = 2023 + 2022 - 2024 = 2021$ là một nghiệm khác. Cộng hàng 3 vào hàng 1, ta thấy $x = 2024 + 2022 - 2023 = 2023$ là một nghiệm khác. Cộng hàng 4 vào hàng 1, $x = 2024 + 2023 - 2022 = 2025$ là một nghiệm khác.
Do đa thức bậc 4 chỉ có nhiều nhất 4 nghiệm khác nhau, chúng ta đã có đủ bộ nghiệm của phương trình là $\{-6069, 2021, 2023, 2025\}$.

3 HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 3.1 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Phúc)**.**

a) $A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 3 & 2 \\ 21 & 25 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Ta tìm x và y để

$$\begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 3 & 2 \\ 21 & 25 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 2.25 \\ 24 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

Tính được $x = 1/4$, $y = 3/4$.

Bài 3.2 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Phúc)**.** Chuyển cột B của hệ phương trình $AX = B$ sang vế trái và nhân tất cả các phương trình với 2023 ta được hệ $A'X = 0$ trong đó

$$A' = (a'_{ij})_n; a'_{ij} = 2023a_{ij} \text{ và } a'_{ii} = a_{ii} - 1 \text{ với với } 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Chỉ ra $\det A' \neq 0$ và kết luận hệ chỉ có nghiệm tầm thường. Chẳng hạn

$$\det A' \equiv \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n (\bmod 2023)$$

nên $\det A' \neq 0$.

Bài 3.3 (ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên, N.T. Sơn)**.** Gọi D là định thức của ma trận hệ số của hệ phương trình đã cho. Ta có

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Lấy các dòng i, với $i = 2,3,4$ trừ đi dòng 1, rồi đưa các nhân tử chung $(1-a_i)$ ở cột thứ $i = 2,3,4$ ra ngoài ta có

$$D = \prod_{i=1}^{4}(1-a_i) \begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{1-a_1} & \dfrac{1}{1-a_2} & \dfrac{1}{1-a_3} & \dfrac{1}{1-a_4} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Cộng tất cả các cột vào cột 1 ta được

$$D = \prod_{i=1}^{4}(1-a_i) \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=2}^{4} \dfrac{1}{1-a_i} + \dfrac{a_1}{1-a_1} & \dfrac{1}{1-a_2} & \dfrac{1}{1-a_3} & \dfrac{1}{1-a_4} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$= -\prod_{i=1}^{4}(1-a_i)\left(\sum_{i=2}^{4} \frac{1}{1-a_i} + \frac{a_1}{1-a_1}\right) < 0.$$

Từ đó hệ phương trình tuyến tính đã cho có duy nhất nghiệm $(0,0,0,0)$.

Bài 3.4 (ĐH Vinh, D.X. Giáp)**.** Đặt $B = (b_1\ b_2\ ...\ b_n)^T$ và $X = (x_1\ x_2\ ...\ x_n)^T$. Khi đó, hệ đã cho trở thành $MX = B$, trong đó $M = I + A$ với I ký hiệu là ma trận đơn vị cấp n. Ta có

$$M^2 = (A+I)^2 = A^2 + 2A + I = 3A + I = 3(M-I) + I = 3M - 2I.$$

$$\Rightarrow I = M\left(\frac{3}{2}I - \frac{1}{2}M\right) = M\left(\frac{3}{2}I - \frac{1}{2}(A+I)\right) = M\left(I - \frac{1}{2}A\right).$$

Do đó, ma trận M khả nghịch và $M^{-1} = I - \frac{1}{2}A$. Từ đó, hệ đã cho tương đương với

$$X = M^{-1}B = \left(I - \frac{1}{2}A\right)B = B - \frac{1}{2}AB.$$

Do đó

$$\begin{cases} x_1 &= b_1 - \frac{1}{2}(b_1a_{11} + b_2a_{12} + \ldots + b_na_{1n}), \\ x_2 &= b_2 - \frac{1}{2}(b_1a_{21} + b_2a_{22} + \ldots + b_na_{2n}), \\ \ldots & \\ x_n &= b_n - \frac{1}{2}(b_1a_{n1} + b_2a_{n2} + \ldots + b_na_{nn}). \end{cases}$$

Bài 3.5 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Xét định thức của ma trận hệ số của hệ phương trình

$$\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^3 & (a_1+b_2)^3 & (a_1+b_3)^3 & (a_1+b_4)^3 \\ (a_2+b_1)^3 & (a_2+b_2)^3 & (a_2+b_3)^3 & (a_2+b_4)^3 \\ (a_3+b_1)^3 & (a_3+b_2)^3 & (a_3+b_3)^3 & (a_3+b_4)^3 \\ (a_4+b_1)^3 & (a_4+b_2)^3 & (a_4+b_3)^3 & (a_4+b_4)^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^3 & 3a_1^2 & 3a_1 & 1 \\ a_2^3 & 3a_2^2 & 3a_2 & 1 \\ a_3^3 & 3a_3^2 & 3a_3 & 1 \\ a_4^3 & 3a_4^2 & 3a_4 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_4^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 & b_4^3 \end{vmatrix}$$

$$=9(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3)$$
$$\times (b_2-b_1)(b_3-b_1)(b_4-b_1)(b_3-b_2)(b_4-b_2)(b_4-b_3)$$
$$=9.12^2.3^6.4^6 \neq 0.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = z = t = 0$.

Bài 3.6 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.** Đặt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do $\det A \neq 0$ nên ma trận A khả nghịch. Ta có

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 7 & -2 \\ 5 & -10 & 3 \end{pmatrix}.$$

Khi đó $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 7 \\ 11 & 11 & -12 \\ -15 & -15 & 18 \end{pmatrix}$.

Bài 3.7 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.** Gọi x,y,z,t lần lượt là số lượng sản phẩm A, B, C, D. Khi đó ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x+2y+z+t &= 50, \\ 3x+2y+2z+2t &= 80, \\ 2x+3y+z+2t &= 80, \\ 2x+2y+2z+t &= 60. \end{cases}$$

Giải hệ ta được nghiệm là $(0,10,20,10)$. Do đó số lượng sản phẩm A, B, C, D lần lượt là $0,10,20,10$ sản phẩm.

4 KHÔNG GIAN VÉCTƠ

Bài 4.1 (ĐH Đồng Tháp, D.X. Giáp)**.** Vì f_i là các ánh xạ tuyến tính nên ta có $\dim V_i = \dim \mathrm{Im} f_i + \dim \mathrm{Ker} f_i$ $(1 \le i \le n)$. Do đó

$$\dim V_1 - \dim V_2 + \dim V_3 - \cdots + (-1)^{n-1}\dim V_n = \dim \mathrm{Ker} f_1 + (-1)^{n-1}\dim \mathrm{Im} f_n.$$

Mặt khác, ta có $\mathrm{Im} f_0 = 0$ và $\mathrm{Im} f_n = 0$ nên $\dim \mathrm{Ker} f_1 = \dim \mathrm{Im} f_0 = 0$ và $\dim \mathrm{Im} f_n = 0$. Suy ra

$$\dim V_1 - \dim V_2 + \dim V_3 - \cdots + (-1)^{n-1}\dim V_n = 0.$$

Bài 4.2 (ĐH Giao thông vận tải, N.H. Hoàng)**.** Do

$$(u_1-u_2)+(u_2-u_3)+(u_3-u_4)+(u_4-u_1) = 0$$

và f là ánh xạ tuyến tính nên ta suy ra

$$3u_1+4u_2+u_3+2u_4 = 0 \Leftrightarrow u_4 = -\frac{3}{2}u_1 - 2u_2 - \frac{1}{2}u_3.$$

Do đó, $u_3 - u_4 = \frac{3}{2}u_1 + 2u_2 + \frac{3}{2}u_3$ nên $2(u_3-u_4) - 3(u_1-u_2) + 3(u_2-u_3) = 10u_2$. Bởi vậy ta có

$$f(10u_2) = 9u_1 + 8u_2 - 6u_4 = 18u_1 + 20u_2 + 3u_3$$

hay

$$f(u_2) = \frac{1}{10}(18u_1 + 20u_2 + 3u_3).$$

Bài 4.3 (ĐH Giao thông vận tải, N.H. Hoàng)**.**

a) Ta sử dụng chứng minh phản chứng. Giả sử rằng $\{u_2, u_3, u_4\}$ là một cơ sở của U. Khi đó $\dim U = 3$ và u_1 phải biểu diễn được qua cơ sở $\{u_2, u_3, u_4\}$. Giả sử biểu diễn đó là

$$u_1 = x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4.$$

Do $u_1 \neq 0$ nên các hệ số x_2, x_3, x_4 không đồng thời bằng 0. Do vai trò của các hệ số x_2, x_3, x_4 như nhau nên không mất tính tổng quát ta xét trường hợp $x_2 \neq 0$. Từ $x_2 \neq 0$ ta suy ra được hệ $\{u_1, u_3, u_4\}$ độc lập tuyến tính. Thật vậy

$$\lambda_1u_1 + \lambda_3u_3 + \lambda_4u_4 = 0 \Leftrightarrow x_2\lambda_1u_2 + (\lambda_3 + x_3\lambda_1)u_3 + (\lambda_4 + x_4\lambda_1)u_4 = 0$$

Vì hệ $\{u_2, u_3, u_4\}$ là cơ sở sủa U nên $x_2\lambda_1 = \lambda_3 + x_3\lambda_1 = \lambda_4 + x_4\lambda_1 = 0$. Sử dụng $x_2 \neq 0$ ta suy ra $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ và hệ $\{u_1, u_3, u_4\}$ độc lập tuyến tính như đã nêu ra ở trên. Vì $\dim U = 3$ và hệ $\{u_1, u_3, u_4\}$ độc lập tuyến tính nên hệ $\{u_1, u_3, u_4\}$ phải là một cơ sở của U và điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Như vậy, $\{u_2, u_3, u_4\}$ không phải là một cơ sở của U.

b) Đặt $n = 2023$. Xét đẳng thức

$$\lambda_1 \cos^2 x + \lambda_2 \cos^2 2x + \ldots + \lambda_n \cos^2 nx = 0, \tag{1}$$

trong không gian các hàm số. Ở đây, vế phải của (1) là hàm hằng có giá trị 0. Lấy đạo hàm 2 vế của (1) theo biến x, ta nhận được

$$\lambda_1 \sin 2x + 2\lambda_2 \sin 4x + \ldots + n\lambda_n \sin 2nx = 0. \tag{2}$$

Dễ dàng chỉ ra được hệ hàm số $\{\sin 2x, \sin 4x, \ldots, \sin 2kx\}$ là hệ độc lập tuyến tính với mọi $k \geqslant 1$. Sử dụng kết quả này và (2) ta suy ra được $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ và đây là điều cần chứng minh.

Bài 4.4 (ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên, T.Đ. Dũng)**.**

a) Từ giả thiết ta có

$$\dim(V_1 + V_2) - \dim(V_1) + \dim(V_1) - \dim(V_1 \cap V_2) = 1.$$

Mà $\dim(V_1 + V_2) \geq \dim(V_1) \geq \dim(V_1 \cap V_2)$. Do đó

$$\dim(V_1 + V_2) - \dim(V_1) = 0 \text{ hoặc } \dim(V_1) - \dim(V_1 \cap V_2) = 0.$$

Suy ra $V_2 \subseteq V_1$ hoặc $V_1 \subseteq V_2$, nghĩa là $V_1 \cup V_2 = V_1$ hoặc $V_1 \cup V_2 = V_2$.

b) Xét ánh xạ tuyến tính $f : V_1 \times V_2 \times V_3 \to V^2$ với $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_3, x_2 - x_3)$. Khi đó $f(x_1,x_2,x_3) = 0$ khi và chỉ khi $(x_1,x_2,x_3) = (\alpha,\alpha,\alpha)$ với mọi $\alpha \in V_1 \times V_2 \times V_3$.

Do đó $\dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = \dim(\ker f)$ và

$$\begin{aligned} 4049 &\le \dim(V_1) + \dim(V_2) + \dim(V_3) = \dim(V_1 \times V_2 \times V_3) \\ &= \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f). \end{aligned}$$

Ta có

$$4049 \le \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(V^2) = \dim(\operatorname{Ker} f) + 4048.$$

Vì vậy

$$\dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = \dim(\operatorname{Ker} f) \ge 1$$

hay $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \neq 0$.

Bài 4.5 (ĐH Trà Vinh, D.K. Ngọc)**.** Giả sử phản chứng $m > n-1$, suy ra hệ vectơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_m, v\}$ có số vectơ là $m+1 > n$ lớn hơn số chiều của $\mathbb{R}^n$ nên phụ thuộc tuyến tính. Do đó tồn tại $m+1$ số thực $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m + \alpha v = 0.$$

Do v không là tổ hợp tuyến tính của hệ $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ nên $\alpha = 0$. Vậy

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m = 0,$$

hay $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$ do hệ $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ độc lập tuyến tính. Do đó $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$ (mâu thuẫn). Suy ra ta có điều phải chứng minh là $m \le n-1$.

Bài 4.6 (ĐH Trà Vinh, D.K. Ngọc)**.** Từ giả thiết ta có $\dim\operatorname{Im}(f+g) = \dim\operatorname{Im} f + \dim\operatorname{Im} g$. Mặt khác

$$\dim\operatorname{Im}(f+g) \le \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) = \dim\operatorname{Im} f + \dim\operatorname{Im} g - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g).$$

Suy ra $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$. Vậy

$$\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$$

nên $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im}(f+g)$. Do đó với mọi $v \in E$, tồn tại $t \in E$ sao cho $f(v) = (f+g)(t)$. Vì vậy ta có

$$g(t) = f(v) - f(t) = f(v-t) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}.$$

Từ đó $v = (v-t) + t \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$, tức là $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E$.

Ngược lại, từ giả thiết $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E$, ta chứng minh $\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. Thật vậy ta có $\operatorname{Im}(f+g) \subseteq \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. Nếu $f(u) + g(v) \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ thì ta có phân tích $u = x + y$ và $v = z + t$ với $x, z \in \operatorname{Ker} f$ và $y, t \in \operatorname{Ker} g$.
Khi đó $f(u) + g(v) = (f+g)(u+v) \in \operatorname{Im}(f+g)$.

Bài 4.7 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Ta chứng minh mọi tập con hữu hạn $\{e^{n_1x}, e^{n_2x}, \ldots, e^{n_kx}\}$ độc lập tuyến tính.
Xét đẳng thức

$$a_1e^{n_1x} + a_2e^{n_2x} + \ldots + a_ke^{n_kx} = 0$$

với $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$. Đặt $e^x = t$, ta được

$$a_1t^{n_1} + a_2t^{n_2} + \ldots + a_kt^{n_k} = 0$$

suy ra $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$ do vế trái có dạng đa thức.
Vậy họ $\{e^{n_1x}, e^{n_2x}, \ldots, e^{n_kx}\}$ là một hệ độc lập tuyến tính trong không gian véc tơ của các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 4.8 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** Giả sử $x.I + y.A + z.A^2 + t.A^3 = 0$. Nhân cả hai vế với A^3, ta được $x.A^3 = 0$. Do $A^3 \neq 0$ nên $x = 0$. Suy ra $y.A + z.A^2 + t.A^3 = 0$. Nhân cả hai vế với A^2, ta thu được $y = 0$. Tiếp tục quá trình trên, ta thu được $t = 0$. Vậy hệ $\{I, A, A^2, A^3\}$ là hệ độc lập tuyến tính.

5 GIÁ TRỊ RIÊNG

Bài 5.1 (ĐH Vinh, D.X. Giáp)**.** a) Ta có

$$p_A(\lambda \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3.$$

Từ đó suy ra ma trận A có duy nhất giá trị riêng $\lambda = 2$. Ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$, gọi $X = (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$ là vectơ riêng tương ứng. Khi đó, $AX = 2X$. Điều này tương đương với hệ

$$\begin{cases} -2x_1 + x_3 & = 0, \\ -x_1 & = 0, \\ -2x_1 & = 0. \end{cases}$$

Giải hệ ta thu được $x_1 = 0$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 2\alpha$. Từ đó ta suy ra tất cả các vectơ riêng của ma trận A (ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$) là $(0, \alpha, 2\alpha)$ với mọi $\alpha \neq 0$.
b) Ta có $A = B + 2I$ (I ký hiệu là ma trận đơn vị cấp 3), trong đó ma trận

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

thỏa mãn $B^s = 0$ với mọi $s \geq 3$.

Từ đó ta có

$$A^n = (B+2I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (2I)^{n-k} = 2^n.I + n.2^{n-1}.B$$
$$= \begin{pmatrix} 2^n & -n.2^n & n.2^{n-1} \\ -n.2^{n-1} & 2^n & 0 \\ -n.2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Thay $n = 2023$ ta thu được

$$A^{2023} = \begin{pmatrix} 2^{2023} & -2023.2^{2023} & 2023.2^{2022} \\ -2023.2^{2022} & 2^{2023} & 0 \\ -2023.2^{2023} & 0 & 2^{2023} \end{pmatrix}.$$

Bài 5.2 (ĐH Công nghệ thông tin - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)**.** Ta có các giá trị riêng của A là $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 4$. Hơn nữa với

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

thì

$$D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $A = TDT^{-1}$ và

$$A^{2003} = T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3^{2003} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{2003} \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Do đó ta có

$$A^{2003} = \begin{pmatrix} \dfrac{-1+9.4^{2003}}{10} & \dfrac{-3-3.4^{2003}}{10} & \dfrac{-3-3.4^{2003}}{10} \\ \dfrac{-3-3.4^{2003}}{14} & \dfrac{-9-4.3^{2003}+4^{2003}}{14} & \dfrac{-9+10.3^{2003}+4^{2003}}{14} \\ \dfrac{-3-4.3^{2003}+4^{2003}}{35} & \dfrac{-9-10.3^{2003}+4^{2003}}{35} & \dfrac{-9-25.3^{2003}+4^{2003}}{35} \end{pmatrix}.$$

Bài 5.3 (ĐH Công nghệ thông tin - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)**.**

(a) Do A lũy linh nên nó chỉ có giá trị riêng $\lambda = 0$ (kể cả phức). Từ đó suy ra đa thức đặc trưng của ma trận lũy linh A là $p_A(X) = X^n$.

(b) Từ điều kiện $AB + A + B = O_n$, ta có $(I_n + A)(I_n + B) = I_n$, do đó

$$(I_n + B)(I_n + A) = I_n$$

nên $AB = BA$. Suy ra $C = 2A + 3B$ cũng là ma trận lũy linh.

Ta có C chỉ nhận 0 là giá trị riêng, do đó ma trận $C + I_n$ chỉ nhận giá trị riêng là 1. Suy ra $\det(I_n + 2A + 3B) = \det(C + I_n) = 1^n = 1$.

Bài 5.4 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Ta có

$$\begin{pmatrix} x_{2023} \\ y_{2023} \\ z_{2023} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2022} \\ y_{2022} \\ z_{2022} \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}^{2023} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Đặt $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, ta tính A^{2023}.

Đa thức đặc trưng của A

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = -(\lambda - 4)(\lambda + 2)^2.$$

Do đó

$$\det(A - \lambda I) = 0 \text{ khi và chỉ khi} \lambda = 4 \text{ hoặc } \lambda = 2.$$

Với $\lambda = 4$, ta chọn được một vectơ riêng là $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

Với $\lambda = -2$, ta chọn được hai vectơ riêng là $(1,1,0)$ và $(-1,0,1)$.

Chọn ma trận $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, khi đó

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = D.$$

Từ đó ta có

$$A^{2023} = PD^{2023}P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4^{2023} + (-2)^{2023}}{2} & \frac{-4^{2023} + (-2)^{2023}}{2} & \frac{4^{2023} - (-2)^{2023}}{2} \\ \frac{4^{2023} - (-2)^{2023}}{2} & \frac{-4^{2023} + 3(-2)^{2023}}{2} & \frac{4^{2023} - (-2)^{2023}}{2} \\ 4^{2023} - (-2)^{2023} & -4^{2023} + (-2)^{2023} & 4^{2023} \end{pmatrix}.$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} x_{2023} = \dfrac{4^{2023} + (-2)^{2023}}{2} \\ y_{2023} = \dfrac{4^{2023} + (-2)^{2023}}{2} \\ z_{2023} = 4^{2023} \end{cases}.$$

6 ĐA THỨC

Bài 6.1 (ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên, N.T. Hằng)**.**

a) Ta có $P(P(x)+x) = (P(x)+x)^2 + p(P(x)+x) + q$
$= (x^2+px+q+x)^2 + p(x^2+px+q+x) + q$
$= (x^2+px+q)^2 + 2(x^2+px+q) + x^2 + p(x^2+px+q+2) + xp + q$
$= (x^2+px+q)(x^2+px+q+2x+p+1)$
$= (x^2+px+q)((x+1)^2 + p(x+1) + q)$
$= P(x)P(x+1).$

Đặt $k = P(2022) + 2022$.

Vì p, q là các số nguyên nên suy ra $P(x)$ là đa thức hệ số nguyên. Do đó k là số nguyên. Ta suy ra $P(k) = P(2022).P(2023)$.

b) Ta có $P(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, trong đó $a_6 \neq 0$ và các $a_i \in \mathbb{Z}$, với $i = 0, \ldots, 6$.

Xét đa thức $f(x) = P(x) - P(-x)$, ta có

$f(x) = 2a_5x^5 + 2a_3x^3 + 2a_1x$. Do đó ta có $deg f(x) \leqslant 5$.

Dễ thấy $f(1) = 0,\ f(2) = 0, f(3) = 0,\ f(-1) = 0,\ f(-2) = 0,\ f(-3) = 0$.

Do vậy đa thức $f(x)$ có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 5, nhưng lại có 6 nghiệm. Ta suy ra $f(x) \equiv 0$. Vậy $P(x) = P(-x)$, với mọi x. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 6.2 (Đại học Kinh tế và Quản trị kinh doanh - ĐH Thái Nguyên, T.N. Bình)**.**
Đặt $Q(x) = xP(x)$. Vì các nghiệm của $P(x)$ là nghiệm thực phân biệt và khác 0 nên các nghiệm của $Q(x)$ cũng là nghiệm thực và phân biệt. Theo Định lý Rolle, các nghiệm của $Q'(x)$ là thực, phân biệt và khác 0.
Đặt $H(x) = xQ'(x)$. Khi đó nghiệm của $H(x)$ là các số thực và phân biệt, do đó theo Định lý Rolle thì các nghiệm của $H'(x)$ cũng là số thực và phân biệt. Mặt khác, ta có

$$H'(x) = x^2P'(x) + 3xP'(x) + P(x).$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 6.3 (ĐH Vinh, D.X. Giáp)**.** Đặt

$$g(x) = \left(\alpha P(x) - 2023P'(x)\right) e^{\frac{4}{\alpha}x}$$

và $R(x) = \alpha P(x) - 2023P'(x)$. Ta có

$$g'(x) = \left(4P(x) + (\alpha - \frac{8092}{\alpha})P'(x) - 2023P''(x)\right) e^{\frac{4}{\alpha}x}.$$

Số thực α ở trên được xác định khác 0 và thỏa mãn đẳng thức

$$\alpha - \frac{8092}{\alpha} = -4.$$

Với số thực α được chọn ở trên thì $g'(x) = Q(x).e^{\frac{4}{\alpha}x}$.
Đặt $h(x) = -2023P(x).e^{\frac{-\alpha}{2023}x}$, ta có

$$h'(x) = \left(\alpha P(x) - 2023P'(x)\right).e^{\frac{-\alpha}{2023}x} = R(x).e^{\frac{-\alpha}{2023}x}.$$

Từ đó, nếu $P(x)$ có ít nhất 4 nghiệm thực (kể cả nghiệm bội) thì ta xét 2 trường hợp sau.

Trường hợp 1: $\deg P$ là số chẵn.
Theo định lý Rolle ta suy ra $h'(x)$ có ít nhất 3 nghiệm thực, hay $R(x)$ có ít nhất 3 nghiệm thực. Do $\deg R = \deg P$ là số chẵn nên $R(x)$ có ít nhất 3 nghiệm thực thì sẽ có ít nhất 4 nghiệm thực.

Trường hợp 2: $\deg P$ là số lẻ.
Khi đó, $P(x)$ có ít nhất 4 nghiệm thực thì sẽ có ít nhất 5 nghiệm thực. Theo định lý Rolle ta suy ra $h'(x)$ có ít nhất 4 nghiệm thực, hay $R(x)$ có ít nhất 4 nghiệm thực.
Như vậy, ta suy ra $R(x)$ cũng có ít nhất 4 nghiệm thực (kể cả nghiệm bội). Bằng lập luận tương tự và áp dụng định lý Rolle cho hàm số $g(x)$ ta thu được $Q(x)$ cũng có ít nhất 4 nghiệm thực (kể cả nghiệm bội). Đó là điều phải chứng minh.

Bài 6.4 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Phương trình hàm cho bởi

$$f(f(x)) + f(f(y)) = 2y + f(x-y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Đặt $a = f(0)$. Trong (1) cho $y = x$ ta được

$$f(f(x)) = x + \frac{a}{2} \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy (1) trở thành:

$$x + \frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} = 2y + f(x-y)$$

hay

$$f(x-y) = x - y + a, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Từ (2) cho $y = 0$ suy ra $f(x) = x + a, \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào đề bài ta được:

$$x + 2a + y + 2a = 2y + x - y + a, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hay $a = 0$. Vậy có duy nhất một đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.5 (ĐH Ngoại Thương)**.**

a) Lập bảng biến thiên.

b) Đặt $y = x^3$, ta có

$$\begin{aligned} & x^4 - 2x^3 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^4 = 2y + 1 \\ \Leftrightarrow\ & x^{12} = (2y+1)^3 \\ \Leftrightarrow\ & y^4 - 8y^3 - 12y^2 - 6y - 1 = 0 \end{aligned}$$

có 4 có nghiệm là $\alpha^3, \beta^3, \delta^3, \gamma^3$. Do đó theo Định lý Viét thì $S = 8$.

7 TỔ HỢP

Bài 7.1 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Phúc)**.** Ta cần chỉ ra tồn tại 1 hình chữ nhật có 4 đỉnh cùng là 0 hoặc cùng là 1. Gọi S là tập hợp các cặp điểm của hình chữ nhật được đánh cùng số trên cùng cột. Gọi a_i là số điểm được đánh số 0 trên cột i, $1 \le i \le 7$. Khi đó

$$|S| = \sum_{i=1}^{7} \left(\frac{a_i(a_i-1)}{2} + \frac{(7-a_i)(6-a_i)}{2} \right).$$

Mặt khác ta có

$$\frac{a_i(a_i-1)}{2} + \frac{(7-a_i)(6-a_i)}{2} = (a_i-3)(a_i-4) + 9 \ge 9$$

do a_i là số tự nhiên. Do đó $|S| \ge 7.9 = 63$.

Mặt khác, ta có $\dfrac{7.6}{2} = 21$ cặp hàng nên theo Nguyên lý Dirichlet, tồn tại 3 phần tử trong S nằm trên cùng một cặp hàng. Tiếp tục áp dụng Nguyên lý Dirichlet, tồn tại 2 cặp trong số chúng được đánh cùng 1 số. 2 cặp điểm này tạo thành hình chữ nhật thỏa mãn.

Bài 7.2 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Phúc)**.** Số bắt tay của một thành viên trong đại hội có thể nhận giá trị $0,1,\ldots,2022$. Tuy nhiên, nếu có một người không bắt tay với ai thì cũng không có người nào bắt tay với tất cả mọi người (tức là có số bắt tay bằng 2022) và điều ngược lại cũng đúng. Do đó số bắt tay của các thành viên trong đại hội chỉ có thể nhận 2022 giá trị, mà đại hội có 2023 thành viên nên theo Nguyên lý Dirichlet nên tồn tại hai người có cùng số bắt tay.

Bài 7.3 (ĐH Giao thông vận tải, N.H. Hoàng)**.** Ta gọi một phương án lựa chọn của nhóm 6 sinh viên sao cho không có toa nào của đoàn tàu có nhiều hơn 2 sinh viên là một phương án tốt. Dễ thấy rằng, ứng với một phương án tốt có ít nhất 2 toa tàu có 2 sinh viên đi lên. Do đó, ta chia các phương án tốt thành 2 phần. Phần thứ nhất là các phương án có 3 toa mà mỗi toa có 2 sinh viên đi lên và ta gọi các phương án thuộc phần này là phương án loại A. Các phương án của phần còn lại được gọi là phương án loại B và đó là những phương án ứng với 2 toa tàu có 2 sinh viên đi lên và 2 toa còn lại mỗi toa có 1 sinh viên đi lên.
Một phương án loại A có thể thực hiện theo các bước như sau: Gọi X là một trong 6 sinh viên. Bước 1, chọn 1 trong 4 toa để sinh viên X đi lên. Bước 2 chọn 1 trong 5 sinh viên còn lại để đi lên cùng toa với X. Bước 3 chọn 2 trong 3 toa còn lại. Bước 4 chọn 2 trong 4 sinh viên còn lại để đưa lên toa có số thứ tụ nhỏ trong 2 toa được chọn ở bước 3. Bước 5, đưa 2 sinh viên còn lại lên toa có số thứ tụ lớn được chọn ở bước 3. Như vậy số phương án loại A là $n_1 = 4.5.C_3^2.C_4^2.1 = 360$.
Một phương án loại B có thể thực hiện theo các bước như sau: Bước 1, chọn 2 trong 4 toa của đoàn tàu. Bước 2 chọn 1 trong 6 sinh viên để đưa lên toa có số thứ tụ nhỏ trong 2 toa được chọn ở bước 1. Bước 3, chọn 1 trong 5 sinh viên còn lại để đi lên toa có số thứ tụ lớn được chọn ở bước 1. Bước 4, chọn 2 trong 4 sinh viên còn lại để đưa lên toa có số thứ tụ nhỏ trong 2 toa không được chọn ở bước 1. Bước 5, đưa 2 sinh viên còn lại lên toa toa có số thứ tụ lớn trong 2 toa không được chọn ở bước 1. Như vậy số phương án loại B là $n_1 = C_4^2.6.5.C_4^2.1 = 1080$.
Như vậy số lượng phương án tốt là $n_1 + n_2 = 1440$.

Bài 7.4 (ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên, D.T. Hồng)**.** Ta có $k \geqslant 2$. Với $k \leqslant 10$ ta lấy k số chẵn đầu tiên $2,4,6,\ldots,2k$. Tổng của hai số bất kỳ trong k số này hoàn toàn là chẵn và lớn hơn 2, nên không phải là số nguyên tố. Ta suy ra $k \geqslant 11$.
Ta đi chứng minh $k = 11$. Thật vậy, ta phân hoạch A thành 10 cặp (có nhiều cách để thực hiện việc này), chẳng hạn

$$\{1,2\},\ \{3,4\},\{5,6\},\ldots$$

Ta có tổng của hai số trong mỗi cặp này đều là số nguyên tố. Khi lấy 11 cặp số trong tập A, theo nguyên lý Dirichlet, có hai số nằm trong cùng một cặp trên, vì thế chúng có tổng là một số nguyên tố. Vậy $k = 11$ là số nhỏ nhất cần tìm.

Bài 7.5 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Chia mỗi cạnh của hình vuông thành 9 cạnh bằng nhau, từ đó ta chia hình vuông đã cho thánh 81 hình vuông bằng nhau, có độ dài

cạnh bằng $1/9$.
Mỗi điểm đều thuộc ít nhất một hình vuông nhỏ, theo nguyên lý Dirichlet, có ít nhất 25 điểm đã cho thuộc cùng một hình vuông nhỏ, canhhj $1/9$.
Lại có hình vuông cạnh $1/9$ nội tiếp một đường tròn bán kính $\frac{1}{9\sqrt{2}}$, do đó tồn tại ít nhất 25 điểm thuộc cùng một hình tròn bán kính $\frac{1}{9\sqrt{2}}$.

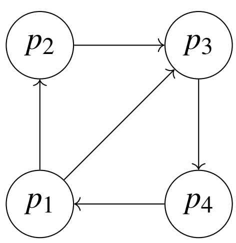
Bài 7.6 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.**

a) Ta có $\det A = 0$ khi và chỉ khi $ad = bc$. Do $a,b,c,d \in \{0,1,2,3,4,5\}$ nên ta có các trường hợp sau.

   TH1. Với $a = b = c = d$. Khi đó có 6 cách chọn ma trận A.
   TH2. Ma trận A có 1 thành phần $x \neq 0$ thuộc X, các thành phần còn lại bằng 0. Khi đó có 5.4 = 20 cách chọn ma trận A.
   TH3. Ma trận A có dạng $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ với x là số khác 0 bất kỳ thuộc tập X. Khi đó có $5.5.4 = 200$ cách chọn ma trận A.
   TH4. Ma trận A có dạng $\begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & x \\ y & x \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} y & y \\ x & x \end{pmatrix}$ với $x, y, x \neq y$ là hai số khác 0 bất kỳ thuộc tập X. Khi đó có $5.4.4 = 80$ cách chọn ma trận A.
   TH5. Ma trận A có $a.d = b.c = 4$, với $a, d \in 1, 2$ và $b = c = 2$ hoặc $b, c \in 1, 2$ và $a = d = 2$. Do đó có 4 cách chọn ma trận A.
   Vậy ta có 210 cách chọn ma trận A thỏa mãn.

b) Ta có các ước của không trong tập X là $2.3, 4$ vì $2.3 = 6, 3.4 = 12$ chia hết cho 6. Do đó a, b, c, d đều có 3 cách chọn. Từ đó có $3^4 = 81$ ma trận thỏa mãn yêu câu đề bài.

Bài 7.7 (ĐH Fulbright, N.T. Hiếu)**.** a) Áp dụng công thức (1), ta có:



	Bước 0	Bước 1	Bước 2
$R(p_1)$	1/4	4/16	8/32
$R(p_2)$	1/4	3/16	6/32
$R(p_3)$	1/4	5/16	9/32
$R(p_4)$	1/4	4/16	9/32

b) Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp.
Rõ ràng đẳng thức cần chứng minh đúng với $k = 0$.

Giả sử đẳng thức đúng với $k-1$, chúng ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với k. Ta có:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} R^{(k)}(p_i) &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1-d}{N} + d \sum_{p_j \in IN(p_i)} \frac{R^{(k-1)}(p_j)}{|OUT(p_j)|} \right) \\
&= (1-d) + d \sum_{i=1}^{N} \sum_{p_j \in IN(p_i)} \frac{R^{(k-1)}(p_j)}{|OUT(p_j)|} \\
&= (1-d) + d \sum_{i=1}^{N} R^{(k-1)}(p_i) \\
&= 1 - d + d = 1.
\end{aligned}$$

Ở đây trong bước gần cuối chúng ta đã sử dụng thực tế là tất cả trang web và tất các đường link đều đã được tính đến trong tổng đôi.
c) Gọi E là ma trận kích thước N gồm toàn số 1. Sử dụng kết quả câu b) ta có:

$$A = (1-d)E + dG.$$

của thuật toán lặp mũ để tìm một vector riêng tương ứng với giá trị riêng lớn nhất của ma trận liền kề đã được chỉnh sửa A.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: GIẢI TÍCH

1 DÃY SỐ

Bài 1.1 (ĐH Bách khoa - ĐHQG Tp. HCM, P.T. Thực)**.**

a) Từ $f(a_n) > 0$ và $f'(a_n) < 0$, ta kết luận được $a_{n+1} > a_n$. Vậy dãy $\{a_n\}$ tăng. Nếu dãy $\{a_n\}$ bị chặn trên thì nó phải hội tụ về một số thực L. Từ công thức của dãy và tính liên tục của f, f', ta suy ra

$$L = L - \frac{f(L)}{f'(L)}.$$

Dẫn đến $f(L) = 0$. Mẫu thuẫn. Như vậy dãy $\{a_n\}$ không bị chặn trên. Tức là $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Ghi chú: Một hàm số f thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) = e^{-x}$.

b) Từ f là hàm giảm ta có $f(a_1) = f(1) > f(2023) = 0$. Sử dụng khai triển Taylor ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a_n) + f'(a_n)(x - a_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - a_n)^2 \\ &\geq f(a_n) + f'(a_n)(x - a_n). \end{aligned}$$

Cho $x = a_{n+1}$ ta được

$$f(a_{n+1}) \geq f(a_n) + f'(a_n)(a_{n+1} - a_n) = f(a_n) - f(a_n) = 0, \forall n \geq 1.$$

Ta kết luận được $f(a_n) \geq 0$ với mọi $n \geq 1$. Từ công thức của dãy ta suy ra dãy $\{a_n\}$ không giảm. Thêm nữa dãy $\{a_n\}$ bị chặn trên bởi 2023 vì

$$f(a_n) \geq 0 = f(2023)$$

và f là hàm giảm. Như vậy dãy $\{a_n\}$ hội tụ về một số thực L. Từ công thức của dãy và tính liên tục của f, f', ta suy ra

$$L = L - \frac{f(L)}{f'(L)}.$$

Vậy $f(L) = 0$. Từ đây dẫn đến $L = 2023$ vì f là hàm giảm. Tức là $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2023$.

Ghi chú: Một hàm số f thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) = e^{-x} - e^{-2023}$.

Bài 1.2 (ĐH Công nghệ Thông tin - ĐHQG Tp. HCM)**.**

a) Xét 3 trường hợp sau:

- Nếu $-2 \le u_0 < 2$: Đặt $u_0 = 2\cos\varphi$ $(0 < \varphi \le \pi)$. Suy ra

$$u_1 = \sqrt{2(1+\cos\varphi)} = \sqrt{2.2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 2\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Dễ chứng minh quy nạp rằng

$$u_n = 2\cos\frac{\varphi}{2^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 2\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\varphi}{2^n} = 2.$$

- Nếu $u_0 = 2$: Ta có $u_1 = \sqrt{2+2} = 2$. Từ đó theo quy nạp dễ thấy $\{u_n\}$ là dãy hằng $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$.

- Nếu $u_0 > 2$: Ta luôn tìm được $\alpha > 0$ thỏa $u_0 = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$.

$$\Rightarrow u_1 = \sqrt{2+\alpha+\frac{1}{\alpha}} = \sqrt{\left(\sqrt{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2} = \sqrt{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Dễ chứng minh theo quy nạp rằng

$$u_n = \sqrt[2^n]{\alpha} + \frac{1}{\sqrt[s^n]{\alpha}}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[2^n]{\alpha}+\frac{1}{\sqrt[2^n]{\alpha}}\right) = \lim_{x\to 1}\left(x+\frac{1}{x}\right) = 2$$

với $x = \sqrt[2^n]{\alpha}$.

Vậy trong mọi trường hợp, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$.

b) Trước tiên ta tính $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

- Nếu $-2 \le u_0 < 2$: Theo câu a): $u_n = 2\cos\dfrac{\varphi}{2^n}$.

$$\Rightarrow v_n = 4^n(2-u_n) = 4^n 2\left(1-\cos\frac{\varphi}{2^n}\right) = 4^{n+1}\sin^2\frac{\varphi}{2^{n+1}}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} 4^{n+1}\sin^2\frac{\varphi}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2^{n+1}}}{\frac{\varphi}{2^{n+1}}}\right)^2 = \varphi^2.$$

- Nếu $-2 \le u_0 < 2$: Dễ thấy $v_n = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.

- Nếu $u_0 > 2$: Theo câu a): $u_n = \sqrt[2^n]{\alpha} + \dfrac{1}{\sqrt[2^n]{\alpha}}$

$$\Rightarrow v_n = 4^n(u_n - 2) = 4^n\Big(\sqrt[2^n]{\alpha} + \frac{1}{\sqrt[2^n]{\alpha}} - 2\Big) = 4^n\Big(\sqrt[2^{n+1}]{\alpha} - \frac{1}{\sqrt[2^{n+1}]{\alpha}}\Big)^2.$$

Đặt $\alpha = x^{2^n} \Rightarrow \ln\alpha = 2^n \ln x \Rightarrow 4^n = \Big(\dfrac{\ln\alpha}{\ln x}\Big)^2$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty}\Big(\sqrt[2^{n+1}]{\alpha} - \frac{1}{\sqrt[2^{n+1}]{\alpha}}\Big)^2$$
$$= \lim_{x\to 1}\Big(\frac{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{\ln x}\Big)^2 \ln^2\alpha$$
$$= \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}\Big)^2 \ln\alpha^2 = \ln^2\alpha.$$

Cuối cùng ta tính $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$.

- Nếu $-2 \le u_0 < 2$: Theo câu a): $u_n = 2\cos\dfrac{\varphi}{2^n}$.

$$\Rightarrow w_n = \frac{1}{2^n}\cos\frac{\varphi}{2}\ldots\cos\frac{\varphi}{2^n} = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}\ldots\cos\frac{\varphi}{2^n}\sin\frac{\varphi}{2^n}}{2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}} = \frac{\sin\varphi}{2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\varphi}{2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\varphi}{2^n}}{\sin\frac{\varphi}{2^n}}\cdot\frac{\sin\varphi}{\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

- Nếu $-2 \le u_0 < 2$: Dễ thấy $w_n = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} w_n = 1$.

- Nếu $u_0 > 2$: Theo câu a): $u_n = \sqrt[2^n]{\alpha} + \dfrac{1}{\sqrt[2^n]{\alpha}}$

$$\Rightarrow w_n = \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\Big(\sqrt[2^k]{\alpha} + \frac{1}{\sqrt[2^k]{\alpha}}\Big)$$
$$= \frac{(\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}})\cdots(\sqrt[2^n]{\alpha} + \frac{1}{\sqrt[2^n]{\alpha}})(\sqrt[2^n]{\alpha} - \frac{1}{\sqrt[2^n]{\alpha}})}{2^n(\sqrt[2^n]{\alpha} - \frac{1}{\sqrt[2^n]{\alpha}})}$$
$$= \frac{\alpha - \frac{1}{\alpha}}{2^n(\sqrt[2^n]{\alpha} - \frac{1}{\sqrt[2^n]{\alpha}})}.$$

Đặt $\alpha = x^{2^n} \Rightarrow \ln\alpha = 2^n \ln x \Rightarrow 2^n = \dfrac{\ln\alpha}{\ln x}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - \frac{1}{\alpha}}{2^n\left(\sqrt[2^n]{\alpha} - \frac{1}{\sqrt[2^n]{\alpha}}\right)} \\
= \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - \frac{1}{x}} \cdot \frac{\alpha - \frac{1}{\alpha}}{\ln\alpha} \\
= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{\alpha - \frac{1}{\alpha}}{\ln\alpha} = \frac{\alpha - \frac{1}{\alpha}}{2\ln\alpha}.
\end{aligned}$$

Bài 1.3 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh)**.** Đặt $f(x) = 2(x-1) - \arctan x$ với $x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2x^2+1}{1+x^2} > 0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ hay f đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta lại có f liên tục trên $[1, \sqrt{3}]$ và $f(1).f(\sqrt{3}) < 0$. Do đó, phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất là $a \in (1, \sqrt{3})$. Ta tiếp tục đặt $g(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\arctan x$ với $x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$g'(x) = \frac{1}{2(x^2+1)} \le \frac{1}{2}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do a là nghiệm duy nhất của $f(x) = 0$, tức là $f(a) = 0$, nên $g(a) = a$. Do đó,

$$\begin{aligned}
|u_n - a| = |g(u_{n-1}) - g(a)| &= |g'(c)|.|u_{n-1} - a| \\
&\le \frac{1}{2}|u_{n-1} - a| \\
&\le \left(\frac{1}{2}\right)^2 |u_{n-2} - a| \le \cdots \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|.
\end{aligned}$$

Do

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$$

nên $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

Bài 1.4 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh)**.**

a) Chứng minh $n \le a_n \le n+1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy, ta có $1 \le a_1 \le 1+1$. Giả sử $k \le a_k \le k+1$ với $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Khi đó

$$k+1 = \frac{k^2-1}{k+1} + 2 \le \frac{k^2-1}{a_k} + 2 = a_{k+1} \le \frac{k^2-1}{k} + 2 \le k+2.$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp ta có $n \le a_n \le n+1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

a) Từ $n \leq a_n \leq n+1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^3 \leq \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3. \tag{1}$$

Mặt khác, ta cũng có:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{2}$$

và

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 - 1. \tag{3}$$

Từ (1), (2) và (3) ta có:

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^3}{n^4} \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^3}{n^4} \leq \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2 - \frac{1}{n^4}.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^3}{n^4} = \frac{1}{4}.$$

Bài 1.5 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên)**.** Theo đề bài, ta có

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_n^2 - a_n + 1} \leq 1$$

(vì $a_n^2 - 2a_n + 1 \geq 0$). Vậy $\{a_n\}$ là dãy đơn điệu giảm. Mặt khác

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1} > 0$$

nên tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l > 0$.

- Nếu $a_1 \geq 1$ thì theo quy nạp $a_n \geq 1, \forall n$ nên $l \geq 1$. Cho $n \to +\infty$, ta có

$$l = \frac{l^2}{l^2 - l + 1} \Leftrightarrow l^3 - 2l^2 + l = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} l = 0 & \text{(loại)} \\ l = 1 & \end{array}\right.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

- Nếu $0 < a_1 < 1$ thì theo quy nạp $a_n < 1, \forall n$. Dãy đơn điệu giảm nên $l < 1$. Cho $n \to +\infty$, ta có

$$l = \frac{l^2}{l^2 - l + 1} \Leftrightarrow l^3 - 2l^2 + l = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} l = 0 & \\ l = 1 & \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Bài 1.6 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.**

a) Ta có $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2}$, $\forall n = 1,2,3,... \Rightarrow 2u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$

$\Rightarrow 2\left(u_{n+1} - u_n\right) = -\left(u_n - u_{n-1}\right) \Rightarrow u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{2}\left(u_n - u_{n-1}\right).$

Đặt $v_n = u_n - u_{n-1}, \forall n = 1,2,....$ Suy ra $v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n$. Ta có

$$u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + ... + (u_1 - u_0) + u_0.$$

Nên $u_n = v_n + v_{n-1} + ... + v_1 + u_0$. Do (v_n) là một cấp số nhân với $q = -\dfrac{1}{2}$ nên ta có:

$$v_1 + v_2 + ... + v_n = \frac{v_1\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}v_1\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right].$$

Thay $v_1 = u_1 - u_0 = \beta - \alpha$ và $u_0 = \alpha$ ta được

$$u_n = \frac{2}{3}(\beta - \alpha)\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] + \alpha.$$

b) Ta có

$$\lim u_n = \lim\left(\frac{2}{3}(\beta - \alpha)\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] + \alpha\right) = \frac{2}{3}(\beta - \alpha) + \alpha = \frac{\alpha + 2\beta}{3}.$$

Bài 1.7 (ĐH Khoa Học - Thái Nguyên, N.T. Hường)**.** Có

$$x_{k+1} - x_k = \frac{k+1}{(k+2)!} > 0.$$

Do đó $x_{k+1} > x_k > 0, \forall k$.
$\Rightarrow x_{2023}^n < x_1^n + x_2^n + ... + x_{2023}^n < 2023.x_{2023}^n$
$\Rightarrow x_{2023} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + ... + x_{2023}^n} < \sqrt[n]{2023}.x_{2023}$
Nhận xét $\dfrac{k}{(k+1)!} = \dfrac{k+1-1}{(k+1)!} = \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}$
$\Rightarrow x_k = \dfrac{1}{1!} - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + ... + \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(k+1)!}$
$\Rightarrow x_{2023} = 1 - \dfrac{1}{2024!}$
$\Rightarrow 1 - \dfrac{1}{2024!} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + ... + x_{2023}^n} < \sqrt[n]{2023}.\left(1 - \dfrac{1}{2024!}\right)$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + ... + x_{2023}^n} = 1 - \dfrac{1}{2024!}$

Bài 1.8 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn)**.** Thay 2021 bằng p và lấy loga biểu thức lấy giới hạn.

$$A_p = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{\left(1^{1^p}\cdot 2^{2^p}\cdots n^{n^p}\right)^{\frac{1}{n^{p+1}}}}{n^{\frac{1}{p+1}}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p \ln k - \frac{\ln n}{p+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p \ln\frac{k}{n} - \left\{\frac{1}{p+1} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\right\}\ln n\right]$$

Lưu ý rằng số hạng đầu tiên chính là tổng tích phân, ta có thể tính nó bằng tích phân từng phần:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p \ln\frac{k}{n} = \int_0^1 x^p \ln x\, dx = -\frac{1}{(p+1)^2}.$$

Xét số hạng thứ hai:

$$\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\right)\ln n \tag{1}$$

Đặt

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

Để tính tổng trên ta sử dụng nhị thức Newton

$$(k-1)^{p+1} = k^{p+1} - C_{p+1}^1 k^p + C_{p+1}^2 k^{p-1} - \ldots + (-1)^p C_{p+1}^p k - (-1)^p$$
$$(k-1)^{p+1} - k^{p+1} = -C_{p+1}^1 k^p + C_{p+1}^2 k^{p-1} - \ldots + (-1)^p C_{p+1}^p k - (-1)^p.$$

Lần lượt thay $k = 1, 2, \ldots n$, sau đó cộng các đẳng thức lại. Vế trái có sự triệt tiêu đáng kể, còn vế phải là tổng $S_l, l \le p$:

$$-n^{p+1} = -C_{p+1}^1 S_p(n) + C_{p+1}^2 S_{p-1}(n) - \ldots + (-1)^p C_{p+1}^p S_1(n) - (-1)^p S_0(n).$$

Từ đây, ta tìm được

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} n^{p+1} + C_{p+1}^2 S_{p-1}(n) - \ldots + (-1)^p C_{p+1}^p S_1(n) - (-1)^p S_0(n) \tag{2}$$

Bằng phương pháp quy nạp, từ (2) ta suy ra được $S_p(n)$ là đa thức bậc $p+1$ của n, trong đó hệ số ứng với số mũ cao nhất là $\frac{1}{p+1}$. Với $k = 0$ thì $S_0(n) = n$, đây là giả thiết quy nạp. Giả sử rằng khẳng định trên đúng với các tổng $S_0(n), S_1(n), \ldots, S_{p-1}(n)$. Khi đó trong vế phải của (2), ta thu được đa thức bậc $p+1$ của n với hệ số bậc cao nhất $\frac{1}{n+1}$. Như vậy khẳng định đúng với $S_p(n)$, đây chính là điều phải chứng minh.

Như vậy với (1), thì khi $n \longrightarrow \infty$:

$$\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} k^p\right)\ln n \sim c\frac{\ln n}{n} \longrightarrow 0$$

Tức là

$$A_p = -\frac{1}{(p+1)^2}.$$

Giới hạn cần tìm bằng

$$e^{-\frac{1}{(p+1)^2}}.$$

Bài 1.9 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2, H.T. Dũng)**.** a) Vì $x_1 > 0$ nên từ công thức truy hồi của dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, ta được $x_n > 0$, $\forall n \geq 1$. Sử dụng bất đẳng thức $\ln(x+1) \leq x$, $\forall x > 0$ và phương pháp quy nạp toán học, ta được

$$x_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+x_k) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k < 1, \ \forall n \geq 1.$$

Như vậy, ta có

$$x_n \in (0,1) \ \forall n \geq 1.$$

Mặt khác, ta thấy rằng

$$0 < x_{n+1} = \frac{\ln(1+x_n)}{n} + \frac{(n-1)x_n}{n} < \frac{x_n}{n} + \frac{(n-1)x_n}{n} = x_n, \forall n \geq 1.$$

Như vậy, dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L \in [0,1)$.

b) Ta thấy rằng

$$n(x_n - x_{n+1}) = x_n - \log(1+x_n), \ \forall n \geq 1. \tag{4}$$

Với $\forall t > 0$, ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} < t - \log(1+t) < \frac{t^2}{2}. \tag{5}$$

Từ (4) và (5), ta được

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} < \frac{1}{2} - \frac{x_n}{3} < \frac{n(x_n - x_{n+1})}{x_n^2} < \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Điều này suy ra

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} < \frac{1}{2} - \frac{x_n}{3} < \frac{n(x_n - x_{n+1})}{x_n^2} < \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Chú ý rằng, từ kết quả trên, ta được

$$\frac{x_n^2}{6n} < x_n - x_{n+1}.$$

Do đó, ta có

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x_n^2}{n} < 6\sum_{n=1}^{N} (x_n - x_{n+1}) = 6(x_1 - x_{N+1}) < 6.$$

Điều này chứng tỏ $L = 0$ vì nếu trái lại thì dãy tổng riêng bị chặn $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{x_n^2}{n} \to \infty$ khi $N \to \infty$ (vô lí!). Kết hợp điều này với (6) cùng nguyên lý kẹp, ta được điều phải chứng minh.

Bài 1.10 (ĐH Trà Vinh, P.M. Triển)**.** Theo giả thuyết ta có:

$$a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + a_n \Rightarrow a_{n+2}a_{n+1} - a_n a_{n+1} = 1, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Do đó dãy số $u_n = a_n a_(n+1)$ là một cấp số cộng với $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$. Khi đó

$$a_{n+2} = \frac{n+1}{a_(n+1)} = \frac{n+1}{n} a_n.$$

Suy ra

$$a_{2023} = \frac{2022}{2021}.\frac{2020}{2019}\ldots.\frac{3}{2}.a_2 = \frac{3.5.7.....2023}{2.4.6.....2021} = \frac{2023!!}{2021!!}.$$

Bài 1.11 (ĐH Trà Vinh, P.M. Triển)**.** Đặt $x_1 = \cot a = \sqrt{3}, a = \frac{\pi}{6}$, ta có

$$x_2 = \cot a + \sqrt{1+\cot^2 a} = \cot a + \frac{1}{\sin a} = \frac{\cos a + 1}{\sin a} = \frac{2\cos^2\frac{a}{2}}{2\sin\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2}}$$
$$= \cot\frac{a}{2} = \cot\frac{\pi}{12} = \cot\frac{\pi}{2^2 3}.$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được rằng

$$x_n = \cot\frac{\pi}{2^n 3}, n \geq 1.$$

Tương tự: Đặt $y_1 = \tan b = \sqrt{3}, b = \frac{\pi}{3}$, ta có

$$y_2 = \frac{\tan b}{1+\sqrt{1+\tan^2 b}} = \frac{\tan b}{1+\frac{1}{\cos b}} = \frac{\sin b}{1+\cos b} = \frac{2\sin\frac{b}{2}.\cos\frac{b}{2}}{2\cos^2\frac{b}{2}} = \tan\frac{b}{2} = \tan\frac{\pi}{3.2}.$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được rằng

$$y_n = \tan\frac{\pi}{2^{n-1}3}, n \geq 1.$$

Từ đó suy ra

$$x_n y_n = \cot\frac{\pi}{2^n 3}\tan\frac{\pi}{2^{n-1}3} = \cot\frac{\pi}{2^n 3}.\frac{2\tan\frac{\pi}{2^n 3}}{1-\tan^2\frac{\pi}{2^n 3}} = \frac{2}{1-\tan^2\frac{\pi}{2^n 3}}, \forall n \geq 1.$$

Ta thấy

$$\tan^2\frac{\pi}{2^n 3} > 0; \quad \tan^2\frac{\pi}{2^n 3} < \tan^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3},$$

nên $x_n y_n \in (2;3)$; $\forall n = 2,3,4,\ldots$ Và

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\tan\frac{\pi}{2^{n-1}3} = 0.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 1.12 (ĐH Vinh, N.V. Đức)**.**

a) Dễ thấy $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} = x_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) > x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy tăng ngặt. Hơn nữa $x_2 = \frac{15}{8}$ nên tập tất cả các số nguyên dương n sao cho $x_n > \frac{15}{8}$ là $\{n \in \mathbb{N}^* : n \geqslant 3\}$.

b) Vì $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy tăng ngặt nên để chứng minh dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ, ta chỉ cần chứng minh dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bị chặn trên. Cụ thể, ta sẽ chứng minh

$$x_n < 3,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{8}$$

Bất đẳng thức (8) tương đương với

$$\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{9}$$

Với $0 < x < 1$ ta có $0 < 1-x^2 < 1$. Điều này kéo theo $1+x < \frac{1}{1-x}, \forall x \in (0,1)$. Áp dụng bất đẳng thức này ta có

$$\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{2^3})\ldots(1-\frac{1}{2^n})}. \tag{10}$$

Áp dụng bất đẳng thức $(1-x)(1-y) > 1-x-y$, $\forall x, y \in (0,1)$ ta có

$$\begin{aligned}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{2^3})...(1-\frac{1}{2^n}) &> 1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-...-\frac{1}{2^n} \\ &= 1-(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^n} > \frac{1}{2}. \qquad (11)\end{aligned}$$

Kết hợp (10) và (11) ta có bất đẳng thức (9). Do đó, bất đẳng thức (8) được chứng minh.

2 CHUỖI SỐ

Bài 2.1 (ĐH Công nghệ Thông tin - ĐHQG Tp. HCM)**.** Đặt

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{x_n}{k^3} = \sum_{1\le n\le k}^{\infty}\frac{x_n}{k^3} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^3}\right).$$

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^3} = \frac{16k}{16k^4} &< \frac{16k}{16k^4-8k^2+1} \\ &= \frac{2(2k+1)^2-2(2k-1)^2}{(2k-1)^2(2k+1)^2} \\ &= \frac{2}{(2k-1)^2}-\frac{2}{(2k+1)^2} \quad (\forall k \ge 1).\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^3} < \sum_{k=n}^{\infty}\left[\frac{2}{(2k-1)^2}-\frac{2}{(2k+1)^2}\right] = \frac{2}{(2n-1)^2}.$$

Suy ra

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^3} < \sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n\frac{2}{(2n-1)^2}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{(2n-1)^2} < 2.$$

Bài 2.2 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên)**.** Ta có

$$a_{n+1}-1 = \frac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}-1 = \frac{a_n-1}{a_n^2-a_n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}-1} = \frac{a_n^2-a_n+1}{a_n-1} = \frac{a_n^2-a_n}{a_n-1}+\frac{1}{a_n-1} = a_n+\frac{1}{a_n-1}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}.$$

Do đó
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_1 - 1}$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_1 - 1}.$$
Từ bài trước ta biết rằng dãy $\{a_n\}$ hội tụ và

- Nếu $a_1 \geq 1$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$;

- Nếu $0 < a_1 < 1$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Vậy

- Nếu $a_1 < 1$ thì
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -1 - \frac{1}{a_1 - 1} = \frac{a_1}{1 - a_1}.$$

- Nếu $a_1 \geq 1$ thì
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$$
(chuỗi phân kỳ).

Bài 2.3 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn)**.** Gọi $S \subseteq Z$ là các phần tử được lựa chọn và gọi
$$d(n) = \frac{1}{n}\#(S \cap [1,n]) = \frac{c(n)}{n}.$$
Khi đó với mỗi $n \geq 1$, ta có
$$1_{n\in S} = n \cdot d(n) - (n-1) \cdot d(n-1),$$
(với $d(0) = 0$). Khi đó
$$\#(S \cap [1,n]) = \sum_{k\leq n} 1_{k\in S}.$$
Xét tổng riêng của chuỗi con
$$s(N) = \sum_{n\leq N} \frac{1_{k\in S}}{n}.$$
Sử dụng đẳng thức trước đó $1_{k\in S}$, ta thu được
$$s(N) = (\sum_{n\leq N} d(n)) - \left(\sum_{n\leq N} \frac{n-1}{n}\right) = d(N) + \sum_{n<N} \frac{d(n)}{n+1}.$$

Theo điều kiện thì $s(N)$ có giới hạn hữu hạn, tức là nó sẽ hội tụ. Từ đây cũng suy ra

$$\sum_{n<N} \frac{d(n)}{n+1}$$

hội tụ vì chuỗi tăng và bị chặn trên. Dãy $d(N)$ hội tụ vì là tổng của hai dãy hội tụ. Ta sẽ chứng minh rằng $\lim_{N\to\infty} d(N) = 0$. Giả sử điều ngược lại, tức là giới hạn này bằng một số dương a nào đó. Khi đó, ta tìm được số $N_1 > 0$ đủ lớn để với mọi $N > N_1$ thì $d(N) > \frac{a}{2}$. Điều đó cũng có nghĩa là dãy

$$\sum_{n<N} \frac{d(n)}{n+1} \to \infty$$

khi $N \to \infty$. Bởi vì chuỗi điều hòa là phân kỳ nên phần dư của nó bắt đầu từ phần tử có số thứ tự là N_1 cũng sẽ phân kỳ. Điều này ngược với giả thiết, tức là $\lim_{N\to\infty} d(N) = 0$.

3 HÀM SỐ

Bài 3.1 (ĐH Bách khoa - ĐHQG Tp. HCM, P.T. Thực)**.**

a) Hàm số f có thể chọn tường minh là

$$f(x) = \frac{x^{2024}}{2024 \times 2025}.$$

Hàm số này có thể nhận được bằng việc giải phương trình vi phân dạng Bernoulli $xf''(x) + 2f'(x) = x^{2023}$.

b) Từ $xg''(x) + 2g'(x) \geq x^{2023}$ ta nhận được

$$[xg(x)]'' \geq \left[\frac{x^{2025}}{2024 \times 2025}\right]''.$$

Từ đó hàm

$$h(x) := xg(x) - \frac{x^{2025}}{2024 \times 2025}$$

có đạo hàm cấp hai không âm. Theo khai triển Taylor ta có

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{1}{2}h''(\xi_x)x^2 \geq h(0) + h'(0)x.$$

Dẫn đến

$$xg(x) \geq \frac{x^{2025}}{2024 \times 2025} + h(0) + h'(0)x.$$

Chú ý tích phân vế phải của bất đẳng thức này trên $[-1,1]$ bằng 0 vì $h(0)=0$ và x hay x^{2025} là các hàm lẻ. Ta nhận được

$$\int_{-1}^{1} x\left(g(x)+x^{2023}\right)dx \geq \int_{-1}^{1} x^{2024}dx = \frac{2}{2025}.$$

Bài 3.2 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh)**.** Ta có

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2x^2+1}{1+x^2} > 0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ hay f đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Ta lại có f liên tục trên $[1,\sqrt{3}]$ và $f(1).f(\sqrt{3}) < 0$. Do đó, phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất là $a \in (1,\sqrt{3})$.

Bài 3.3 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh)**.** Gọi x là khoảng cách từ vị trí dự kiến xây ngôi nhà đến quán karaoke có cường độ âm thanh I_1. Áp dụng luật bình phương nghịch đảo, ta thấy rằng, mức âm thanh từ hai quán karaoke ảnh hưởng đến ngôi nhà là:

$$f(x) = \frac{I_1}{x^2} + \frac{I_2}{(\ell-x)^2} \quad \text{với } 0 < x < \ell.$$

Khi đó

$$f'(x) = \frac{2[I_2x^3 - I_1(\ell-x)^3]}{x^3(\ell-x)^3}.$$

Do đó ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\ell}{1+\sqrt[3]{1+\frac{I_2}{I_1}}}.$$

Hơn nữa, ta cũng có

$$f''(x) = \frac{6I_1}{x^4} + \frac{6I_2}{(\ell-x)^4}.$$

Điều này suy ra rằng

$$x_0 := \frac{\ell}{1+\sqrt[3]{1+\frac{I_2}{I_1}}}$$

là cực tiểu của $f(x)$. So sánh $f(x_0)$ với $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to \ell} f(x)$ ta kết luận $f(x_0)$ là giá trị nhỏ nhất của f trên $(0,\ell)$.

a) Nếu $I_1 = I_2$ thì $x_0 = \dfrac{\ell}{2}$. Khi đó người này nên xây nhà ở chính giữa hai quán karaoke.

b) Nếu $I_1 = 8I_2$ thì $x_0 = \dfrac{2\ell}{3}$. Khi đó người này nên xây nhà cách quán karaoke I_1 khoảng cách bằng $\dfrac{2\ell}{3}$.

Bài 3.4 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên)**.** Gọi khoảng cách từ chân thang đến chân cột đỡ $BD = x$ (m). Ta có $BH = \sqrt{9+x^2}$. Theo định lí Ta - lét, $\dfrac{BH}{AB} = \dfrac{BD}{BC} \Rightarrow AB = \dfrac{BH \cdot BC}{BD} = \dfrac{x+0{,}4}{x} \cdot \sqrt{9+x^2}$. Bài toán trở thành tìm $x > 0$ để $f(x) = AB = \dfrac{x+0{,}4}{x} \cdot \sqrt{9+x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$f'(x) = -\dfrac{0,4\sqrt{9+x^2}}{x^2} + \dfrac{x+0{,}4}{\sqrt{9+x^2}}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}4\left(9+x^2\right) = x^2(x+0{,}4) \Leftrightarrow x^3 = 3{,}6 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3{,}6}$. Ta có bảng biến thiên

x	0		$\sqrt[3]{3{,}6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\sqrt[3]{3{,}6}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy chiều dài nhỏ nhất của cái thang thỏa mãn yêu cầu là $AB_{\min} = f\left(\sqrt[3]{3{,}6}\right) \approx 5{,}9$ m.

Bài 3.5 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.**

a) Khi $x \neq 0$, ta có $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x} + ax$. Khi đó $f'(x) = a + 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$.

b) Khi $x = 0$. Ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x} + \alpha x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x} + \alpha\right).$$

Vì x là một vô cùng bé khi $x \to 0$ và hàm $\sin\dfrac{1}{x}$ là hàm bị chặn nên $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$. Do đó $f'(0) = \alpha$

c) Với mỗi $\alpha > 0$, xét khoảng mở chứa điểm 0 là $(-a;a)$. Ta chứng minh hàm f' đổi dấu trên khoảng $(-a;a)$. Thật vậy

$$f'\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \alpha + 2\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi) - \cos(n\pi) = \alpha - \cos(n\pi) = \alpha + (-1)^{n+1}.$$

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{(n+1)\pi}\right) &= \alpha + 2\frac{1}{(n+1)\pi}\sin((n+1)\pi) - \cos((n+1)\pi) \\ &= \alpha - \cos((n+1)\pi) = \alpha + (-1)^n. \end{aligned}$$

Theo giả thiết $0 < \alpha < 1$ nên tích

$$f'\left(\frac{1}{n\pi}\right) . f'\left(\frac{1}{(n+1)\pi}\right) < 0.$$

Chọn n đủ lớn sao cho

$$\left(\frac{1}{(n+1)\pi}, \ \frac{1}{n\pi}\right) \subset (-a,a).$$

Ta có f' đổi dấu trên $(-a;a)$. Do đó f' đổi dấu trên mỗi khoảng mở chứa 0 nên hàm không đơn điệu trên mỗi khoảng mở chứa 0.

Bài 3.6 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.** Gọi x (mét) là độ dài một cạnh của đáy bể và y (mét) là chiều cao của bể. Điều kiện $x, y > 0$. Theo đề bài ta có $x^2y = 10$. Suy ra $y = \dfrac{10}{x^2}$. Theo đề bài ta có tổng chi phí để xây dựng bể được biểu thị bởi hàm số:

$$f(x) = 2 \cdot x^2 \cdot 700 + 4 \cdot x \cdot \frac{10}{x^2} \cdot 500 = 1\,400x^2 + \frac{20\,000}{x}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được

$$\begin{aligned} f(x) &= 1\,400x^2 + \frac{20\,000}{x} \\ &= 1\,400x^2 + \frac{10\,000}{x} + \frac{10\,000}{x} \\ &\geq 3\sqrt[3]{140x^2 \cdot \frac{10\,000}{x} \cdot \frac{10\,000}{x}} \\ &= 3000\sqrt[3]{14}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt[3]{\dfrac{50}{7}}$. Suy ra $y = 10\sqrt[3]{\dfrac{49}{2500}}$.

Vậy kích thước cạnh đáy là $\sqrt[3]{\dfrac{50}{7}}$ mét và chiều cao là $10\sqrt[3]{\dfrac{49}{2500}}$ mét.

Bài 3.7 (ĐH Khoa Học - Thái Nguyên, N.S. Hà)**.** Đặt $g(x) = 2023^{-x}f(x)$. Ta có $g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Dễ thấy rằng

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

(có dạng phương trình hàm Cauchy loại 1). Suy ra $g(x) = \lambda x$, ở đây λ là hằng số thực. Từ đó suy ra dạng hàm cần tìm là

$$f(x) = \lambda x 2023^x,$$

ở đây λ là hằng số thực khác 0 (vì f không đồng nhất 0). Ta có

$$f'(x) = \lambda(2023^x + x2023^x \ln(2023)); \quad \sin'(f(x)) = f'(x)\cos(f(x))$$

và

$$\lim_{x\to 0} f'(x)\cos(f(x)) = \lambda \neq 0.$$

Sử dụng quy tắc L'Hospital ta có

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{\sin(f(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)e^{f(x)}}{f'(x)\cos(f(x))} = 1.$$

Đặt $u := u(x) = x$ và $v := v(x) = 2023^x$. Ta có

$$u' = 1; u^{(n)} = 0, \forall n \geq 2; v^{(n)} = 2003^x(\ln 2023)^n, \forall n \geq 0.$$

Suy ra

$$f^{(n)}(x) = \lambda[x2003^x(\ln 2023)^n + 2023^{x+1}(\ln 2023)^{n-1}]$$

và vì thế

$$f^{(n)}(0) = \lambda 2023(\ln 2023)^{n-1}.$$

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{f^{(n)}(0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda 2023(\ln 2023)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda 2023(n-1)(\ln 2023)^{n-2}} = 0.$$

(Chú ý $\ln 2023 > 1$).

Bài 3.8 (ĐH Mỏ - Địa chất, H.N. Huấn)**.** Tồn tại hằng số $c > 0$ thỏa mãn $\sin t - t \leq c|t|^3$ với mọi $t \in R$. Nếu $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 > 0$, thì

$$\left| \frac{\sin x^2 + \sin y^2 + \sin z^2}{x^2 + y^2 + z^2} - 1 \right| \leq \frac{|\sin(x^2) - x^2| + \cdots}{r^2} \leq \frac{c(x^6 + y^6 + z^6)}{r^2} \leq$$

$$\leq \frac{cr^6}{r^2} = cr^4 \longrightarrow 0.$$

Vậy giới hạn cần tìm là 1.

Bài 3.9 (ĐH Mỏ - Địa chất, H.N. Huấn)**.** Nhân cả hai vế của phương trình vi phân ban đầu với y, sau đó thay vào phương trình các hàm y_1, y_2, y_3. Tiếp đến lấy các vế của ba phương trình thu được cộng lại với nhau được

$$\begin{aligned}(y_1y_1''' + y_2y_2''' + y_3y_3''') + a(x)(y_1y_1'' + y_2y_2'' + y_3y_3'')\\ + b(x)(y_1y_1' + y_2y_2' + y_3y_3') + c(x)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = 0.\end{aligned}$$

Ta đã biết $y_1^2(x) + y_2^2(x) + y_3^2(x) = 1$. Lấy đạo hàm hai vế của phương trình, ta thu được $(y_1y_1' + y_2y_2' + y_3y_3') = 0$. Lấy đạo hàm thêm một lần nữa và thu được

$$y_1y_1'' + y_2y_2'' + y_3y_3'' = -y_1'^2 - y_2'^2 - y_3'^2.$$

Lấy đạo hàm lần thứ ba, ta thu được

$$(y_1y_1''' + y_2y_2''' + y_3y_3''') + (y_1'y_1'' + y_2'y_2'' + y_3'y_3'') = -z'.$$

Lưu ý là

$$y_1'y_1'' + y_2'y_2'' + y_3'y_3'' = \frac{1}{2}z'.$$

Điều đó có nghĩa là

$$y_1y_1'' + y_2y_2'' + y_3y_3'' = -\frac{3}{2}z'.$$

Thế tất cả các kết quả đã cho vào phương trình đầu, ta có

$$-\frac{3}{2}z' - a(x)z + c(x) = 0.$$

Chia cả hai vế cho $-\frac{3}{2}$, ta thu được phương trình cần tìm, tức là

$$\alpha = \frac{2}{3}, \qquad \beta = -\frac{2}{3}.$$

Bài 3.10 (ĐH Mỏ - Địa chất, H.N. Huấn)**.** Tiếp tuyến tại điểm x_0, y_0 có phương trình là

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Từ đây, ta tìm được giao điểm của nó với các trục tọa độ là $\left(\frac{a^2}{x_0}, 0\right)$ và $\left(0, \frac{b^2}{y_0}\right)$. Diện tích của tam giác vuông là $\frac{a^2b^2}{|x_0y_0|}$. Ta sẽ đi lấy giá trị cực tiểu của mẫu số $|x_0y_0|$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho trung bình cộng và trung bình nhân:

$$\frac{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}{2} \geq \sqrt{\frac{x_0^2}{a^2}\frac{y_0^2}{b^2}} = \frac{|x_0y_0|}{|ab|}.$$

Giá trị lớn nhất đạt được khi $\dfrac{x_0^2}{a^2} = \dfrac{y_0^2}{b^2}$. Nó tương ứng với $\left(x_0^2 + y_0^2\right) = \left(\dfrac{a^2}{2}, \dfrac{b^2}{2}\right)$. Như vậy có tất cả 4 điểm như sau

$$\begin{cases} (x_0, y_0) = \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right), \\ (x_0, y_0) = \left(-\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right), \\ (x_0, y_0) = \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, -\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right), \\ (x_0, y_0) = \left(-\dfrac{a}{\sqrt{2}}, -\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right). \end{cases}$$

Bài 3.11 (ĐH Ngoại Thương - Hà Nội)**.** Ta chứng minh bài toán tổng quát rằng

$$f_n(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

không có nghiệm thực. Hiển nhiên rằng $f_n(x) > 0, \forall x \leq 0$. Với $x > 2n$, ta có:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 1 + \left(\frac{x^2}{2!} - x\right) + \dots + \left(\frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right) \\ &= 1 + \frac{x}{2!}(x-2) + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}(x-2n) \geq 1 > 0. \end{aligned}$$

Với $0 \leq x \leq 2n$ thì hàm số $f_n(x)$ sẽ nhận giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó tại $x = x_0$. Nếu $x_0 = 0$ hoặc $x_0 = 2n$ thì $f(x) \geq f(x_0) \geq 1 > 0$. Nếu $0 < x_0 < 2n$ thì $f_n(x)$ đạt cực tiểu tại đó nên

$$f_n'(x) = 0 \Rightarrow -1 + x_0 - \frac{x_0^2}{2!} + \dots + \frac{x_0^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{x_0^{2n}}{(2n)!} - f_n(x_0) = 0.$$

Suy ra

$$f_n(x_0) = \frac{x_0^{2n}}{(2n)!} > 0.$$

Vậy $f_n(x) > 0, \forall x \in R$.

Bài 3.12 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2, H.T. Dũng)**.** Giả sử rằng tồn tại một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) > f(b)$. Theo định lý Weierstrass, f có một giá trị cực đại m trên $[c, b]$; giá trị này đạt được tại điểm $d \in [c, b]$. Vì

$$f(d) = \max_{[c.b]} f \geq f(c) > f(b)$$

nên ta có $d \neq b$, do vậy $d \in [c,b) \subset (a,b)$. Ta thấy rằng điểm $d \in (a,b)$, là một điểm mù. Điều này chứng tỏ $f(y) > f(d)$ với $y > d$. Kết hợp với các kết quả ở trên, ta được $f(y) > f(d) > f(b)$. Tiếp theo, ta xét hai trường hợp sau.
Trường hợp 1: $y > b$. Khi đó $f(y) > f(b)$ mâu thuẫn với giả thiết b không phải là một điểm mù.
Trường hợp 2: $y \leq b$. Khi đó $y \in (d,b] \subset [c,b]$. Điều này dẫn đến

$$f(y) > f(d) = m = \max_{[c,b]} f \geq f(y),$$

mâu thuẫn với giả thiết. Như vậy, điều giả là sai. Do đó $f(x) \leq f(b)$ với mọi $x \in (a,b)$. Mặt khác, vì $a < b$ và a không phải là điểm mù nên ta có $f(a) \geq f(b)$. Từ tính liên tục tại a ta suy ra

$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) \leq \lim_{x \to a^+} f(b) = f(b)$$

Như vậy, ta có $f(a) \geq f(b)$ và $f(a) \leq f(b)$. Do đó $f(a) = f(b)$.

Bài 3.13 (ĐH Trà Vinh, P.M. Triển)**.** Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{x^x \ln x})' \\ &= x^{x^x}(x^x \ln x)' \\ &= x^{x^x}\left((e^{x\ln x})' \ln x + x^{x-1}\right) \\ &= x^{x^x}\left(x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}\right) \\ &= x^{x^x + x}\left((\ln x + 1)\ln x + \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Nếu $x \geq 1$ thì $\ln x \geq 0$ nên $f'(x) > 0$. Nếu $0 < x < 1$ thì

$$(\ln x + 1)\ln x = \left(\ln x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$$

và $\dfrac{1}{x} > 1$ nên $f'(x) > 0$. Do đó $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Ta có

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x} = 1$$

vì

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0.$$

Vậy $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

Bài 3.14 (ĐH Vinh, N.V. Đức)**.**

a) Ta có
$$0 \leqslant |f(x)| = |\sqrt[3]{x^2} \sin \frac{1}{x^{2023}}| \leqslant \sqrt[3]{x^2},\ \forall x \neq 0.$$
Vì $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x^2} = 0$ nên $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = 0$. Từ đây suy ra $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Vậy hàm số f liên tục tại $x = 0$.

b) Đặt
$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x^2} \sin \frac{1}{x^{2023}}}{x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
Xét dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi
$$x_n = \frac{1}{\sqrt[2023]{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ và
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} g(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x_n^2} \sin \frac{1}{x_n^{2023}}}{x_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x_n^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x_n}} = +\infty. \qquad (1)\end{aligned}$$
Từ (1) ta suy ra không tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, tức là không tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Do đó f không khả vi tại điểm $x = 0$.

Bài 3.15 (ĐH Vinh, N.V. Đức)**.** Ta có nhận xét rằng nếu $|a| \leqslant |b|$ thì $(a - b)b \leqslant 0$. Thật vậy, nếu $b \geqslant 0$ thì từ $|a| \leqslant |b|$ ta suy ra $-b \leqslant a \leqslant b$. Điều này kéo theo $(a - b)b \leqslant 0$. Nếu $b < 0$ thì từ $|a| \leqslant |b|$ ta suy ra $b \leqslant a \leqslant -b$. Điều này cũng kéo theo $(a - b)b \leqslant 0$. Áp dụng nhận xét trên vào bài toán ta có bất đẳng thức sau
$$2023f(x)\left(f'(x) - 2023f(x)\right) \leqslant 0,\ \forall x \in (0, 1). \qquad (2)$$
Xét hàm số $P(x) = e^{-2023x} f(x),\ x \in [0, 1]$. Khi đó P là hàm liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trên $(0, 1)$ và ta có
$$\begin{aligned}P'(x) &= e^{-2023x} f'(x) - 2023e^{-2023x} f(x) \\ &= e^{-2023x}\left(f'(x) - 2023f(x)\right),\ \forall x \in (0, 1). \qquad (3)\end{aligned}$$

Từ (3) ta suy ra

$$\begin{aligned}2P(x)P'(x) &= \frac{e^{-4046x}}{2023}\left(2023f(x)\left(f'(x)-2023f(x)\right)\right)\\ &\leqslant 0,\ \forall x\in(0,1)\ \text{(theo (2))}.\end{aligned}\tag{4}$$

Bất đẳng thức (4) kéo theo

$$\left(P^2(x)\right)' = 2P(x)P'(x) \leqslant 0,\ \forall x\in(0,1).\tag{5}$$

Ta thấy $Q(x)=P^2(x)$ là hàm liên tục trên $[0,1]$, khả vi trên $(0,1)$, không tăng trên $[0,1]$ và $Q(0)=0$. Do đó ta có $Q(x)\leqslant Q(0)=0,\ \forall x\in[0,1]$ hay $P^2(x)\leqslant 0,\ \forall x\in[0,1]$. Điều này kéo theo $P^2(x)=0,\ \forall x\in[0,1]$ hay $f(x)=0,\ \forall x\in[0,1]$.

Bài 3.16 (ĐH Vinh, N.V. Đức)**.** Xét hàm $g(x)=f^2(x)-4044\sin x,\ x\in(0,+\infty)$. Ta có g là hàm khả vi trên $(0,+\infty)$ và

$$\begin{aligned}g'(x) &= 2f(x)f'(x)-4044\cos x\\ &= 2(f(x)f'(x)-2022\cos x)\geqslant 0,\ \forall x\in(0,+\infty).\end{aligned}\tag{6}$$

Điều này chứng tỏ g là hàm tăng trên $(0,+\infty)$. Mặt khác, vì $|f(x)|\leqslant 2023,\ \forall x\in(0,+\infty)$ nên ta có

$$\begin{aligned}|g(x)| &= |f^2(x)-4044\sin x|\\ &\leqslant |f(x)|^2+4044|\sin x|\leqslant 2023^2+4044,\ \forall x\in(0,+\infty).\end{aligned}\tag{7}$$

Do đó g là hàm bị chặn trên $(0,+\infty)$. Như vậy g là hàm tăng ngặt và bị chặn trên $(0,+\infty)$. Từ điều này ta suy ra tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Giả sử tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Khi đó, vì

$$\sin x = \frac{f^2(x)-g(x)}{4044},\ \forall x\in(0,+\infty)$$

nên tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$. Đây là điều vô lý. Do đó, không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4 PHÉP TÍNH VI PHÂN

Bài 4.1 (ĐH Công nghệ Thông tin - ĐHQG Tp. HCM)**.** Đặt

$$g(x)=\frac{1}{2}f^2(x)+f'(x).$$

Suy ra $g(0)=\frac{1}{2}f^2(0)+f'(0)=0$ và $g'(x)=f(x)f'(x)+f''(x)$. Xét hai trường hợp sau đây:

- $f(x)$ không có nghiệm thuộc $(0;1)$: Đặt

$$h(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{2} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{g(x)}{f^2(x)}.$$

Ta có $h(0) = h(1) = -\frac{1}{2}$ nên theo định lý Rolle, tồn tại $a \in (0;1)$ thỏa $h'(a) = 0 \Rightarrow g(a) = 0$. Từ đó, theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (0;a) \subset (0;1)$ thỏa $g'(c) = 0$ (đpcm).

- $f(x)$ có nghiệm $x_0 \in (0;1)$: Áp dụng định lý Lagrange, tồn tại $a \in (0;x_0)$, $b \in (x_0;1)$ sao cho:

$$f'(a) = \frac{f(0) - f(x_0)}{0 - x_0} = -\frac{2}{x_0} < 0$$

và

$$f'(b) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = \frac{1}{1 - x_0} > 0.$$

$$\Rightarrow g(a) = f'(a) < 0 \quad \text{và} \quad g(b) = f'(b) > 0,$$

suy ra $g(x)$ có nghiệm $d \in [a;b]$. Suy ra, theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (0;d) \subset (0;1)$ thỏa $g'(c) = 0$ (đpcm).

Bài 4.2 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh)**.** Lấy $\varepsilon > 0$ bất kì. Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho với mọi $x > M$ ta có

$$\left|f'(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Cố định $x_0 > M$. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x_0)}{x - x_0} = 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x - x_0}{x} = 1$. Do đó, tồn tại $M_1 > M$ sao cho với mọi $x > M_1$ ta có

$$\left|\frac{f(x_0)}{x - x_0}\right| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ và } \left|\frac{x - x_0}{x}\right| < \frac{3}{2}.$$

Ta viết

$$\frac{f(x)}{x} = \Big(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)}{x - x_0}\Big)\Big(\frac{x - x_0}{x}\Big).$$

Với $x > M_1$, theo Định lí Lagrange và giả thiết ta có

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| = |f'(c)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Suy ra
$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{f(x_0)}{x-x_0}\right|\left|\frac{x-x_0}{x}\right| < \left(\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\right).\frac{3}{2} = \varepsilon.$$
Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Bài 4.3 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh)**.** Vì hàm số f có đạo hàm f' đồng biến trên $[0,2]$ nên f liên tục trên $[0,2]$. Áp dụng Định lí Lagrange, tồn tại $c\in(0,2)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = 1$.
Xét hàm $g(x) = f(x)+x-1$ với $x\in[0,2]$. Ta có g liên tục trên $[0,2]$ và
$$g(0)g(2) = -4 < 0.$$
Do đó, theo Định lí Rolle, tồn tại $x_0\in(0,2)$ sao cho $g(x_0) = 0$ hay $f(x_0) = 1-x_0$. Áp dụng Định lí Lagrange, tồn tại $a\in(0,x_0)$ và $b\in(x_0,2)$ sao cho
$$f'(a) = \frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0} = \frac{1-x_0+1}{x_0} = \frac{2-x_0}{x_0}$$
và
$$f'(b) = \frac{f(2)-f(x_0)}{2-x_0} = \frac{1-1+x_0}{2-x_0} = \frac{x_0}{2-x_0}.$$
Suy ra $f'(a)f'(b)f'(c) = 1.\dfrac{2-x_0}{x_0}\dfrac{x_0}{2-x_0} = 1$.

Bài 4.4 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên)**.** Với $x>0$ tùy ý, $\forall k\in\mathbb{N}$, theo công thức Maclaurin, ta có
$$f(x) = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}x^{k-1}+\frac{f^{(k)}(\theta)}{k!}x^k,\ \text{ với } 0<\theta<x.$$
Suy ra,
$$f(x) = \frac{f^{(k)}(\theta)}{k!}x^k.$$
Do $f^{(k+1)}(t)\geq 0$, $\forall t>0$ nên $f^k(t)$ tăng trên $[0,+\infty)$, từ đó $f^{(k)}(\theta)\leq f^{(k)}(x)$. Suy ra
$$f(x)\leq\frac{f^{(k)}(x)}{k!}x^k.$$
Với $x>0$ và $\forall n\in\mathbb{N}$, khai triển Taylor hàm $f(2x)$ tại x, ta được
$$f(2x) = f(x)+\frac{f'(x)}{1!}x+\frac{f''(x)}{2!}x^2+\cdots\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\beta)}{n!}x^n,$$
trong đó $0<x<\beta<2x$. Nên $f(2x)\geq nf(x)$ với mọi $x>0$ và $\forall n\in\mathbb{N}$. Vậy $f(x)=0$, $\forall x>0$.

Bài 4.5 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.** Xét hàm

$$g(x) = (x-1)e^{-2023x}f(x),$$

ta thấy g là hàm liên tục trên đoạn $[1;2023]$, khả vi trong khoảng $(1;2023)$ và $g(1) = g(2023)$. Do đó, theo định lí Rolle, tồn tại $c \in (1;2023)$ sao cho $g'(c) = 0$. Mặt khác,

$$g'(x) = \big(f(x) + (x-1)f'(x) - 2023(x-1)f(x)\big)\, e^{-2023x}.$$

Do đó

$$\big(f(x) + (x-1)f'(x) - 2023(x-1)f(x)\big)\, e^{-2023x} = 0.$$

Suy ra

$$f'(c) = \frac{2024-2023c}{1-c}f(c).$$

Bài 4.6 (ĐH Khoa Học - Thái Nguyên, T.M. Tuyên)**.** Ta có khai triển Mac-Laurin hàm $f(x)$ với số dư dạng Lagrange là

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f"(0)x^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}}{(n+1)!},$$

ở đây $\theta \in (0,1)$. Vì $f^{(k)}(0) = 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ nên

$$f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Từ đó suy ra

$$|f(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \frac{1}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\right|.$$

Do đó

$$|f(x)| = \frac{1}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(\theta x)||x^{n+1}| \le \frac{1}{(n+1)!}\alpha^{n+1}(n+1)! = \alpha^{n+1},$$

với mọi $x \in [-1,1]$ và $\alpha \in (0,1)$. Cho $n \to \infty$ ta có $\alpha^{n+1} \to 0$ (vì $\alpha \in (0,1)$). Vì thế, ta nhận được

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in [-1,1].$$

Đó là điều cần chứng minh.

Bài 4.7 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2, H.T. Dũng)**.** Từ giả thiết ta thấy rằng, f là một hàm đơn điệu tăng trên $[a,b]$. Vì $f(x_1)f(x_2) > 0$ nên $f(x) \neq 0$ trên $[x_1,x_2]$ (trái lại thì $f(x_1) \le 0 \le f(x_2)$). Xét các hàm số

$$F(x) = -\frac{x}{f(x)}, \quad G(x) = -\frac{1}{f(x)}$$

trên $[x_1, x_2]$. Ta có F và G là các hàm liên tục trên $[x_1, x_2]$, và khả vi trên (x_1, x_2). Hơn nữa, ta có

$$G'(x) = \frac{f'(x)}{f^2(x)} \neq 0, \quad \forall x \in (x_1, x_2).$$

Theo định lý Cauchy, tồn tại số thực $c \in (x_1, x_2)$, sao cho

$$\begin{aligned}\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} &= \frac{-\frac{x_2}{f(x_2)} + \frac{x_1}{f(x_1)}}{-\frac{1}{f(x_2)} + \frac{1}{f(x_1)}} \\ &= \frac{F(x_2) - F(x_1)}{G(x_2) - G(x_1)} \\ &= \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{\frac{-f(c)+cf'(c)}{f^2(c)}}{\frac{f'(c)}{f^2(c)}} = c - \frac{f(c)}{f'(c)}.\end{aligned}$$

5 PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Bài 5.1 (ĐH Công nghệ Thông tin - ĐHQG Tp. HCM)**.** Đặt $g(x) = e^x(f(x) - 1)$, suy ra $g(x)$ cũng khả vi đến cấp hai và $g(0) = 0$. Ta có

$$g'(x) = e^x(f'(x) + f(x) - 1)$$

và

$$g''(x) = e^x(f''(x) + 2f'(x) + f(x) - 1) \geq 0, \quad \forall x \in (-1; 1).$$

Suy ra $g(x)$ là một hàm lồi trên khoảng $(-1; 1)$. Đánh giá $g(x)$ thông qua tiếp tuyến tại $x = 0$, ta được

$$g(x) \geq g(0) + g'(0)x = g'(x)x$$

$$\Rightarrow e^x f(x) = g(x) + e^x \geq g'(0)x + e^x$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} e^x f(x)dx \geq \int_{-1}^{1} (g'(0)dx + e^x)dx = e - \frac{1}{e}.$$

Chọn $f(x) = Cxe^{-x} + 1 \Rightarrow f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 1$ thỏa điều kiện đề bài đồng thời

$$\int_{-1}^{1} e^x f(x)dx = \int_{-1}^{1} (Cx + e^x)dx = e - \frac{1}{e}.$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của

$$\int_{-1}^{1} e^x f(x)dx$$

là $e - \dfrac{1}{e}$.

Bài 5.2 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh)**.** Cách 1: Từ giả thiết, ta có

$$\int_0^{2023} f(x)dx = \int_0^{2023} f(2023-x)dx = \int_0^{2023} \frac{1}{f(x)}dx.$$

Do đó, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\Big(\int_0^{2023} f(x)dx\Big)^2 = \int_0^{2023} f(x)dx.\int_0^{2023} \frac{1}{f(x)}dx \geq \Big(\int_0^{2023} dx\Big)^2 = (2023)^2.$$

Suy ra $\displaystyle\int_0^{2023} f(x)dx \geq 2023.$
Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$f(x)+f(2023-x) \geq 2\sqrt{f(x)f(2023-x)} = 2.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned}\int_0^{2023} f(x)dx &= \int_0^{\frac{2023}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{2023}{2}}^{2023} f(x)dx\\ &= \int_0^{\frac{2023}{2}} f(x)dx + \int_0^{\frac{2023}{2}} f(2023-x)dx\\ &= \int_0^{\frac{2023}{2}} (f(x)+f(2023-x))dx\\ &\geq \int_0^{\frac{2023}{2}} 2dx = 2023.\end{aligned}$$

Bài 5.3 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên)**.** Xét hàm $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt, x \in [0,1]$.
Ta có $F(0) = 0$, $F'(x) = f(x)$ và

$$\begin{aligned}F(1) = \int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 xF'(x)dx\\ &= xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)dx = F(1) - \int_0^1 F(x)dx.\end{aligned}$$

Do đó $\displaystyle\int_0^1 F(x)dx = 0 \quad (*)$.
Hàm $F(x)$ liên tục trên $[0,1]$. Ta nhận thấy rằng nếu $F(x) > 0, \forall x \in (0,1)$ thì $\displaystyle\int_0^1 F(x)dx > 0$, nếu $F(x) < 0, \forall x \in (0,1)$ thì $\displaystyle\int_0^1 F(x)dx < 0$, đều trái với $(*)$.
Vậy phải tồn tại $b \in (0,1)$ để $F(b) = 0$.
Lại xét hàm $g(x) = x^2023F(x)$. Ta có $g'(x) = 2023x^{2022}F(x) + x^2023f(x)$, $g(0) = g(b) = 0$.

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0,b) \subset (0,1)$ sao $g'(c) = 0$. Từ đó

$$2023c^{2022}\int_0^c f(x)dx + c^{2023}f(c) = 0 \qquad \text{hay} \qquad cf(c) + 2023\int_0^c f(x)dx = 0.$$

Bài 5.4 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên)**.**

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+2023^x)\sin x}dx &= \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin nx}{(1+2023^x)\sin x}dx + \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+2023^x)\sin x}dx \\
&= -\int_{\pi}^{0} \frac{\sin(-nu)}{(1+2023^{-u})\sin(-u)}du + \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+2023^x)\sin x}dx \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{2023^u \sin nu}{(1+2023^u)\sin u}dxu + \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+2023^x)\sin x}dx \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}dx.
\end{aligned}$$

Ta có $I_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+2023^x)\sin x}dx = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}dx.$

Với $n \geq 2$, thì

$$\begin{aligned}
\sin(nx) &= \sin(nx-2x)\cos 2x + \cos(nx-2x)\sin 2x \\
&= \sin(nx-2x)(1-2\sin^2 x) + 2\cos(nx-2x)\sin x.\cos x \\
&= \sin(nx-2x) + 2\sin x[\cos(nx-2x)\cos x - \sin(nx-2x)\sin x] \\
&= \sin(nx-2x) + 2\sin x\cos(nx-x).
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}dx \\
&= \int_{0}^{\pi} \left(\frac{\sin(nx-2x)}{\sin x} + 2\cos(nx-x)\right)dx \\
&= I_{n-2} + \frac{2}{n-1}\sin(xn-x)\Big|_0^{\pi} = I_{n-2},\ \forall n \geq 2.
\end{aligned}$$

Vậy

$$I_n = \begin{cases} I_0 = 0 & \text{nếu } n = 2k, \\ I_1 = \pi & \text{nếu } n = 2k+1. \end{cases}$$

Bài 5.5 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên)**.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Scharz, ta có:

$$(b-a)^2 = \left(\int_a^b \sqrt{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right)^2 \le \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)}.$$

Vì $0 < m \le f(x) \le M$ nên

$$\frac{(f(x)-m)(M-f(x))}{f(x)} \le 0 \Leftrightarrow f(x)-(m+M)+mM\frac{1}{f(x)} \le 0, \text{ với } a \le x \le b$$

Ta có

$$\int_a^b f(x)dx - (m+M)\int_a^b f(x)dx + mM\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx + mM\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le (m+M)(b-a)$$

$$\Leftrightarrow mM\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le (m+M)(b-a) - \int_a^b f(x)dx.$$

Do đó:

$$mM\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le (m+M)(b-a)\int_a^b f(x)dx - \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2.$$

Xét hàm $f(t) = -t^2 + kt$. Hàm này đạt cực đại tại $t = \frac{k}{2}$ với giá trị cực đại là $\frac{k^2}{4}$.
Với $k = (m+M)(b-a)$ và $t = \int_a^b f(x)dx$ ta có

$$(m+M)(b-a)\int_a^b f(x)dx - \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \le \frac{(m+M)^2(b-a)^2}{4}.$$

Do đó, $mM\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le \frac{(m+M)^2(b-a)^2}{4}$.
Vậy

$$(b-a)^2 \le \int\limits_a^b f(x)dx \int\limits_a^b \frac{dx}{f(x)} \le \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2.$$

Bài 5.6 (ĐH Khoa Học - Thái Nguyên, M.V. Thuận)**.** Đặt

$$g(x) = e^{-2023x}\int_0^{x^2} h(t)dt.$$

Khi đó $g(0) = 0, g(1) = e^{-2023}\int_0^1 h(x)dx$. Đặt

$$H(x) = \int_0^x h(t)dt \Rightarrow g(x) = e^{-2023x}H(x^2).$$

Khi đó

$$\begin{aligned}H(1) = \int_0^1 h(x)dx &= \int_0^1 xh(x)dx \\ &= \int_0^1 xH'(x)dx \\ &= xH(x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 H(x)dx = H(1) - \int_0^1 H(x)dx\end{aligned}$$

Suy ra $\int_0^1 H(x)dx = 0$. Vì $H(x)$ liên tục nên tồn tại số $d \in (0,1]$ sao cho $H(d^2) = 0$. Suy ra $g(d) = 0$. Áp dụng Định lý Rolle cho hàm $g(x)$ trên $[0,d]$, tồn tại số $\beta \in (0,d)$ sao cho $g'(\beta) = 0$. Ta lại có

$$g'(\beta) = e^{-2023x}\left[-2023\int_0^{x^2} h(t)dt + 2xh(x^2)\right].$$

Suy ra

$$g'(\beta) = 0 \Leftrightarrow -2023\int_0^{\beta^2} h(t)dt + 2\beta h(\beta^2) = 0.$$

Từ đó suy ra

$$\beta h(\beta^2) = \frac{2023}{2}\int_0^{\beta^2} h(t)dt.$$

Bài 5.7 (ĐH Khoa Học - Thái Nguyên, D.T. Hồng)**.** Đặt $F(x) = f(x) - \sin x$. Khi đó $F(x)$ liên tục trên $[0;\pi]$. Ta có

$$\begin{aligned}\int_0^\pi F(x)dx &= \int_0^\pi (f(x) - \sin x)dx \\ &= \int_0^\pi f(x)dx - \int_0^\pi \sin x dx \\ &= \int_0^\pi f(x)dx - 2 < 0.\end{aligned}$$

Suy ra, tồn tại $c \in [0;\pi]$ sao cho $F(c) < 0$. Mặt khác, vì $f(0) > 0$ nên suy ra $F(0) > 0$. Do đó, tồn tại $b \in (0;\pi)$ sao cho $F(b) = 0$. Hay phương trình $F(x) = 0$ có nghiệm. Vậy phương trình $f(x) = \sin x$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0;\pi)$.

Bài 5.8 (ĐH Mỏ - Địa chất, H.N. Huấn)**.** Lập một hàm mới $F : (0,1] \longrightarrow R$ như sau

$$F(t) = \frac{\int_0^t f(x)g(x)\,dx}{\int_0^t g(x)\,dx}.$$

Dễ thấy $F(t)$ khả vi trên $(0,1]$ vì f,g liên tục và g không nhận giá trị không (hàm số dương). Lấy đạo hàm của hàm $F(t)$

$$F'(t) = \frac{f(t)g(t)\int_0^t g(x)dx - g(t)\int_0^1 f(x)g(x)\,dx}{\left(\int_0^t g(x)\,dx\right)^2} = g(t)\frac{\int_0^t [f(t)-f(x)]g(x)\,dx}{\left(\int_0^t g(x)\,dx\right)^2}.$$

Điều đó có nghĩa là $F(t)$ là hàm không giảm, tức là $F(t) \leq F(1)$. Đây chính là điều phải chứng minh.

Bài 5.9 (ĐH Mỏ - Địa chất, H.N. Huấn)**.** Đặt $F(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)dt$. F xác định trên đoạn $[0,1]$ và khả vi vì hàm f là liên tục. Theo quy tắc l'Hoopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{1} = 0.$$

Chọn $a \in (0,1)$ và lấy tích phân từng phần:

$$\int_a^1 f(x)dx = \int_a^1 \frac{1}{x}xf(x)dx = \left(\frac{1}{x}\cdot F(x)\right)\Bigg|_a^1 + \int_a^1 F(x)\cdot\frac{1}{x^2}dx.$$

Cho a tiến tới 0. Khi đó, ta thu được

$$0 = \int_0^1 f(x)dx = F(1) + \int_0^1 \frac{F(x)}{x^2}dx.$$

Từ đây suy ra nếu $F(1) > 0$ thì tồn tại $x_0 \in (0,1)$ thỏa mãn $F(x_0) < 0$. Và ngược lại nếu $F(1) < 0$, thì tồn tại $x_0 \in (0,1)$ thỏa mãn $F(x_0) > 0$. Vì $F(x)$ liên tục nên tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $F(c) = 0$. Trong trường hợp $F(1) = 0$, khi đó có hai điểm x_1, x_2 mà tại đó hàm $F(x)$ nhận các giá trị trái dấu. Điều đó có nghĩa là tồn tại điểm c giữa chúng sao cho $F(c) = 0$. Trong trường hợp $F(x) \equiv 0$ thì không có các giá trị trái dấu của hàm $F(x)$.

Bài 5.10 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2, H.T. Dũng)**.** Lấy $x \in \mathbb{R}$ và $\varepsilon > 0$ bất kỳ. Ta chứng minh tồn tại $\delta > 0$ (có thể phụ thuộc vào x và ε) sao cho $|f'(x) - f'(y)| < \varepsilon$ với mọi $y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|x-y| < \delta$. Thật vậy ta lấy $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2023}$. Khi đó với $y \in \mathbb{R}$ bất kỳ thỏa mãn $|x-y| < \delta$ ta sẽ có

$$|f'(x) - f'(y)| \leq 2023|x-y| < 2023\delta = \varepsilon.$$

Điều này chứng tỏ nếu $f \in \mathscr{F}$ thì f' là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó f' là một hàm khả tích. Xét $x \in \mathbb{R}$ là một điểm tùy ý và đặt $d = f'(x)$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng $f(x) > \dfrac{d^2}{4046}$. Nếu $d = 0$ thì bất đẳng thức (**??**) hiển nhiên đúng. Nếu $d > 0$ từ giả thiết của bài toán, ta thấy rằng

$$f'(x-t) \geq d - 2023t > 0,$$

với $0 \leq t < \dfrac{d}{2023}$. Từ đây, ta suy ra

$$f(x) > f(x) - f\left(x - \frac{d}{2023}\right) = \int_0^{\frac{d}{2023}} f'(x-t)dt \geq \int_0^{\frac{d}{2023}} (d - 2023t)dt = \frac{d^2}{4046}.$$

thì từ

$$f'(x+t) \leq d + 2023t = -|d| + 2023t$$

và kết hợp với lập luận tương tự như trên, ta có

$$\begin{aligned} f(x) > f(x) - f\left(x + \frac{|d|}{2023}\right) &= \int_0^{\frac{|d|}{2023}} \left(-f'(x+t)\right) dt \\ &\geq \int_0^{\frac{|d|}{2023}} (|d| - 2023t)dt = \frac{d^2}{4046}. \end{aligned}$$

Ta được điều phải chứng minh.

Bài 5.11 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2, H.T. Dũng)**.** Sử dụng công thức tích phân từng phần kết hợp với giả thiết, ta được

$$\begin{aligned} \int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)dx &= \left[(b-x)(x-a)f'(x)\right]_a^b - \int_a^b (b+a-2x)f'(x)dx \\ &= 0 - \left[(b+a-2x)f'(x)\right]_a^b - 2\int_a^b f(x)dx \\ &= (b-a)(f(a)+f(b)). \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)dx\right)^2 &\leq \int_a^b (b-x)^2(x-a)^2dx \int_a^b \left(f''(x)\right)^2 dx \\ &= \frac{(b-a)^5}{30} \int_a^b \left(f''(x)\right)^2 dx. \end{aligned}$$

Từ đây cùng với kết quả thu được ở trên, ta suy ra

$$A = \int_a^b \left(f''(x)\right)^2 dx \geq 30 \cdot \frac{(f(a)+f(b))^2}{(b-a)^3}.$$

Chú ý rằng đa thức

$$f(x) = 10(x-a)^3(2b-a-x) - 3(b-a)^4$$

có tính chất $\int_a^b f(x)dx = 0, f(a) + f(b) = 4(b-a)^4 \neq 0$ và

$$\frac{(b-a)^3}{(f(a)+f(b))^2} \int_a^b \left(f''(x)\right)^2 dx = 30.$$

Như vậy, $\min A = 30$.

Bài 5.12 (ĐH Trà Vinh, P.M. Triển)**.** Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^{2\pi} \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right) dx \\
&= \int\limits_0^{\pi} \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right) dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right) dx \\
&= \int\limits_0^{\pi} \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right) dx \\
&\quad + \int\limits_0^{\pi} \ln\left(\sin(2\pi - x) + \sqrt{1+\sin^2(2\pi - x)}\right) d(2\pi - x) \\
&= \int\limits_0^{\pi} \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right) dx + \int\limits_0^{\pi} \ln\left(-\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right) dx \\
&= \int\limits_0^{\pi} \ln 1 dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Bài 5.13 (ĐH Vinh, N.V. Đức)**.**

a) Thay $y = x$ ta được $2xf(x) \leqslant 1$. Suy ra $f(x) \leqslant \frac{1}{2x}$, $\forall x \in (0,1]$.

b) Thay $x = \sin t, y = \cos t, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ta có

$$\sin t f(\cos t) + \cos t f(\sin t) \leqslant 1,\ \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]. \tag{1}$$

Từ bất đẳng thức (1) ta suy ra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t f(\cos t) + \cos t f(\sin t))\, dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt. \quad (2)$$

Bất đẳng thức (2) tương đương với

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) d(\cos t) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) d(\sin t) \leqslant \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

hay

$$\frac{\pi}{2} \geqslant -\int_1^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx. \quad (4)$$

Từ bất đẳng thức (4) ta suy ra

$$\int_0^1 f(x)dx \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

6 PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Bài 6.1 (ĐH Công nghệ Thông tin - ĐHQG Tp. HCM)**.** Đặt $g(x) = \arctan f(x)$. Ta có

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

và

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{f''(x)(1+f^2(x)) - 2f(x)(f'(x))^2}{(1+f^2(x))^2} \\ &= \frac{f(x)(f''(x)f(x) - 2(f'(x))^2}{(1+f^2(x))^2} \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $g(x)$ là hàm lồi trên $\mathbb{R}$. Ta chứng minh rằng $g(x)$ là hàm hằng. Thật vậy, giả sử $f(x)$ không là hàm hằng thì tồn tại $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho $g(a) > g(b)$. Vì $g(x)$ là hàm lồi, suy ra

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y), \quad \forall \lambda \in [0;1].$$

Cho $x = \dfrac{a-b}{\lambda} + b$, $y = b$

$$\Rightarrow g(a) \leq \lambda g\Big(\frac{a-b}{\lambda} + b\Big) + (1-\lambda)g(b)$$

$$\Rightarrow \frac{g(a)-g(b)}{\lambda} + g(b) \leq g\Big(\frac{a-b}{\lambda} + b\Big).$$

Cho $\lambda \to 0^+$ thì
$$g\Big(\frac{a-b}{\lambda}+b\Big)+g(b)\to+\infty,$$
suy ra $g(x)$ không bị chặn. Điều này vô lý vì hàm arctan là hàm bị chặn. Vậy $g(x)$ là hàm hằng, kéo theo $f(x)$ cũng là hàm hằng. Ngược lại, nếu $f(x)=C \Rightarrow f'(x)=f''(x)=0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 6.2 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.** Từ giả thiết ta suy ra $2023^{-(x+y)}f(x+y)=2023^{-y}f(y)+2023^{-x}f(x)$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$. Đặt $g(x)=2023^{-x}f(x)$. Ta có
$$g(x+y)=g(x)+g(y),\quad \text{với mọi } x,y\in\mathbb{R}.$$
Đây là phương trình hàm Cauchy, nhờ tính liên tục của hàm $g(x)$ ta có được nghiệm là $g(x)=ax$. Suy ra
$$f(x)=ax\cdot 2023^x.$$
Mặt khác từ điều kiện $f(1)=2023$, ta có $a=1$ và
$$f(x)=2023^x\cdot x.$$
Thử lại ta thấy hàm thỏa mãn đề bài. Vậy hàm cần tìm là $f(x)=2023^x\cdot x$.

Bài 6.3 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ)**.** Ta có
$$0\le\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}-1\right)^2dx=\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx-2\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx+1$$
$$=\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx-2\ln f(x)\Big|_0^1+1=\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx-1.$$
Từ đó ta có
$$\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx\ge 1.$$
Mặt khác, theo giả thiết
$$\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx\le 1.$$
Do đó
$$\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx=1.$$

Do hàm số $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0;1]$ nên ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 1$ với mọi $x \in [0;1]$. Suy ra $f(x) = f'(x), x \in [0;1]$, do đó $f(x) = ce^x,\ c > 0$. Do

$$c = f(0) = f(1) = ce$$

nên ta suy ra $c = 0$. Vậy không có hàm số f nào thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Bài 6.4 (ĐH Mỏ - Địa chất, P.T. Cường)**.** Đặt

$$g(x) = f(x) - r - s$$

Khi đó ta thu được đẳng thức sau

$$\begin{aligned} g(x+g(y)) = g(x+f(y)-r-s) = f((x-r-s)+f(y))-r-s = \\ = f(x-s)+y+s-r-s = g(x-s)+y+s. \end{aligned}$$

Tác động hàm g lên các vế một lần nữa có

$$g^2(x+g(y)) = g(y+s+g(x-s)) = g(y)+x.$$

Điều đó cũng có nghĩa g^2 là phép biến đổi đồng nhất $g^2 = \mathrm{i}d$ với các phần tử dạng $x+g(y)$. Nếu cố định $y = y_0$ thì $g^2 = \mathrm{i}d$ trên tập hợp $\{x+f(y_0)|x \in Q\}$. Tập hợp này trùng với tập Q. Điều đó cũng có nghĩa $g^2 = \mathrm{i}d$ trên toàn bộ Q.

$$g(x+y) = g\Big[x+g(g(y))\Big] = g(x-s)+g(y)+s.$$

Tương tự

$$g(x+y) = g(x)+g(y)-g(0).$$

Giải tương tự bài toán Cauchy, ta thu được

$$g(x) = \lambda x + g(0) = \lambda x + z.$$

Trong đó λ, z là các giá trị hằng. Thay tất cả ngược trở lại điều kiện ban đầu

$$g \cdot g(x+g(y)) = g(x+\lambda y+z) = \lambda x + \lambda^2 y + (\lambda+1)z.$$

Mặt khác

$$g(x+g(y)) = g(x-s)+y+s = \lambda x - \lambda s + z + y + s.$$

Tức là $\lambda^2 = 1$ (hệ số của y), còn $\lambda z + z = -\lambda s + z + s$ (hệ số của hằng số). Tức là $\lambda z = (1-\lambda)s$. Khi đó ta thu được hai nghiệm:

1. $\lambda = 1, \quad z = 0$. Từ đây cho kết quả $g(x) = x$,
2. $\lambda = -1, \quad z = -2s$ và thu được $g(x) = -x - 2s$.

Chúng dẫn tới hai nghiệm

1. $f(x) = x + r + s$ và
2. $f(x) = -x - s + r$.

Dễ dàng kiểm tra hai hàm số này thỏa mãn phương trình ban đầu.

Bài 6.5 (ĐH Ngoại Thương - Hà Nội)**.** Ta có

$$f(x + f(x)) = xf(1 + f(1)) = cx, \quad \forall x > 0 \qquad (1)$$

$(c = f(1 + f(1)))$. Thay x thành $x + f(x)$ vào (1) ta được:

$$f(x + f(x) + f(x + f(x))) = c(x + f(x)), \quad \forall x > 0 \qquad (2).$$

Thế (1) vào (2) ta được:

$$f(x + f(x) + cx) = c(x + f(x)), \quad \forall x > 0.$$

Suy ra

$$f((c+1)x + f(x)) = c(x + f(x)), \quad \forall x > 0 \qquad (3).$$

Mặt khác theo đề bài ta có:

$$f((c+1)x + f(x)) = (c+1)xf\Big(1 + f\big(\frac{1}{c+1}\big)\Big) \qquad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$(c+1)xf\Big(1 + f\big(\frac{1}{c+1}\big)\Big) = c(x + f(x)), \quad \forall x > 0.$$

Suy ra $f(x) = ax, \forall x > 0 \Rightarrow a > 0$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 6.6 (ĐH Trà Vinh, P.M. Triển)**.** Đặt $y = \dfrac{x+1}{x-1} \Rightarrow x = \dfrac{y+1}{y-1}$, $y \neq 1$.
Thay vào phương trình đã cho ta có

$$f(y) = 2f\left(\frac{y+1}{y-1}\right) + \frac{3}{\frac{y+1}{y-1} - 1}$$

hay

$$f(y) = 2f\left(\frac{y+1}{y-1}\right) + \frac{3(y-1)}{2}.$$

Thay y bởi x, ta có

$$f(x) = 2f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \frac{3(x-1)}{2}.$$

Nhân đẳng thức đã cho với 2 rồi cộng với đẳng thức này, ta được:

$$2f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+f(x)=4f(x)+\frac{6}{x-1}+2f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\frac{3(x-1)}{2}.$$

Suy ra

$$3f(x)+\frac{3(x-1)}{2}+\frac{6}{x-1}=0\Leftrightarrow f(x)=\frac{1-x}{2}+\frac{2}{1-x}.$$

Thử lại ta thấy thoả mãn điều kiện. Vậy các hàm số cần tìm là:

$$f(x)=\frac{1-x}{2}+\frac{2}{1-x},\ x\neq 1$$

và $f(1)$ là một số tùy ý.

Bài 6.7 (ĐH Trà Vinh, P.M. Triển)**.** Ta có

$$\begin{aligned}0\leq\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}-1\right)^2dx&=\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx-2\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx+1\\&=\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx-2\ln f(x)|_0^1+1\\&=\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx-2\ln\frac{f(1)}{f(0)}+1\\&=\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx-1.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx\geq 1.$$

Mà theo giả thuyết thì

$$\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)dx\leq 1.$$

Nên ta có

$$\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}-1\right)^2dx=0.$$

Do $f(x)$ khả vi, liên tục trên $[0;1]$, nên ta được $\frac{f'(x)}{f(x)}=1,\ \forall x\in[0;1]$. Suy ra $f'(x)=f(x),\ \forall x\in[0;1]$, $f(x)=ce^x,\ \forall x\in[0;1]$, $c>0$. Thử lại ta thấy hàm này thỏa mãn đề bài.