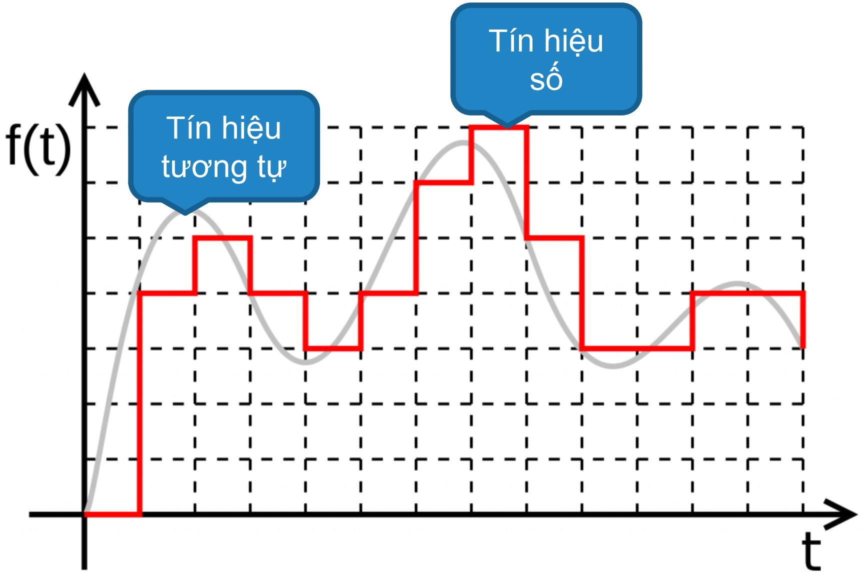
XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ

Xử lý tín hiệu số

- **Tín hiệu**: là một mô tả về sự biến thiên của một hiện tượng vật lý.
  - Thời tiết được mô tả bởi nhiệt độ
  - Âm thanh được tạo ra bởi sự co giãn áp suất trong không gian
  - Cường độ ánh sáng được mã hóa và ghi lại thành mức xám trên giấy
- **Xử lý**: là nơi chúng ta hiểu được thông tin được mô tả bởi tín hiệu.
  - *Phân tích (analysis)*: Chúng ta muốn hiểu được thông tin được mang trong tín hiệu và có thể trích xuất một số mô tả ở mức cao hơn.
  - *Tổng hợp (synthesis)*: nơi tạo ra hiện tượng vật lý chứa một lượng thông tin nào đó mà chúng ta muốn đưa ra bên ngoài. Ví dụ khi truyền thông tin bằng hệ thống điện thoại hoặc radio hoặc khi tạo âm thanh với bộ tổng hợp âm nhạc.

Tín hiệu số

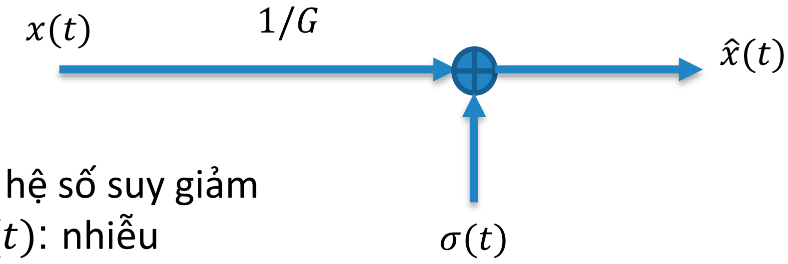
- Tín hiệu tương tự:
  - Biến số liên tục
  - Giá trị hàm số liên tục
- Tín hiệu số:
  - Biến số rời rạc
  - Giá trị hàm số rời rạc

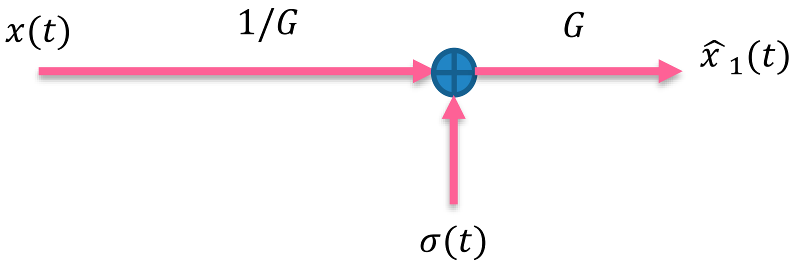


Ưu điểm của tín hiệu số

- Với sự rời rạc của biến số và giá trị biên độ, dữ liệu giờ đây chỉ là một tập hợp các số nguyên và điều này trở nên quan trọng và dễ dàng cho:
  - **Lưu trữ**: bất kỳ bộ nhớ nào có thể lưu trữ số nguyên giờ đây có thể lưu trữ tín hiệu (ví dụ bộ nhớ máy tính).
  - **Xử lý:** hoàn toàn trở nên độc lập với bản chất của tín hiệu, chỉ cần bộ xử lý có thể làm việc với các số nguyên là đủ (ví dụ CPU máy tính).
  - **Truyền dẫn**: truyền dẫn tín hiệu số rất hiệu quả trong việc chống lại nhiễu và tối đa hóa khả năng của kênh truyền thông.

Truyền dẫn tín hiệu tương tự



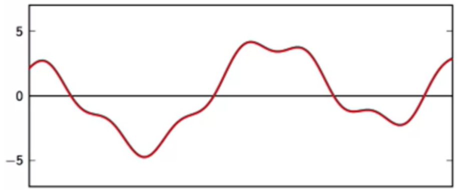


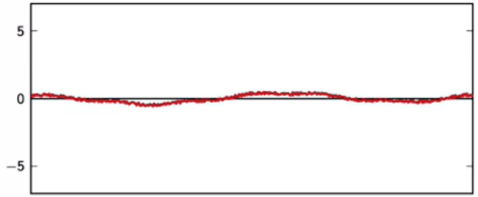
G: hệ số suy giảm

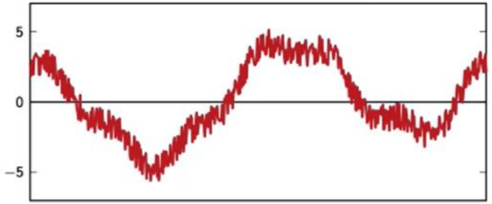
$\sigma(t)$: nhiễu

$$\hat{x}(t) = x(t)/G + \sigma(t)$$

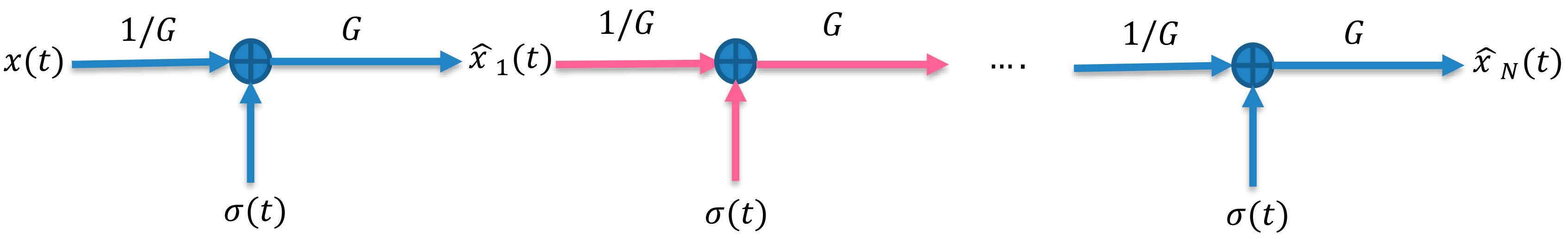
$$\hat{x}_1(t) = x(t) + G\sigma(t)$$



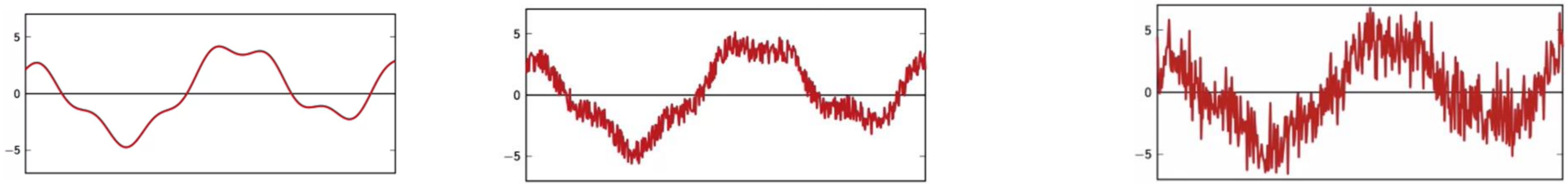




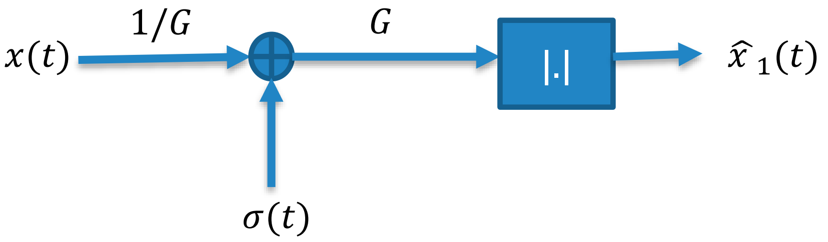
Khi truyền dẫn khoảng cách dài



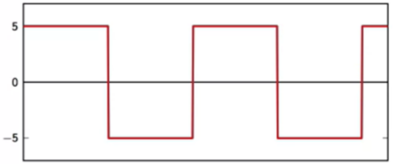
$$\boldsymbol{\hat{x}_N(t) = x(t) + \mathrm{NG}\sigma(t)}$$



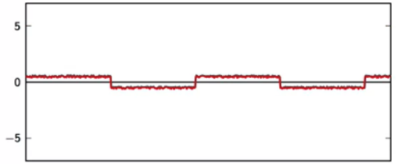
Truyền dẫn tín hiệu số



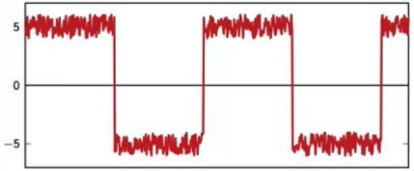
$\hat{x}_1(t) = \text{sgn}[x(t) + G.\sigma(t)]$



$x(t)$



$x(t)/G{+}\sigma(t)$



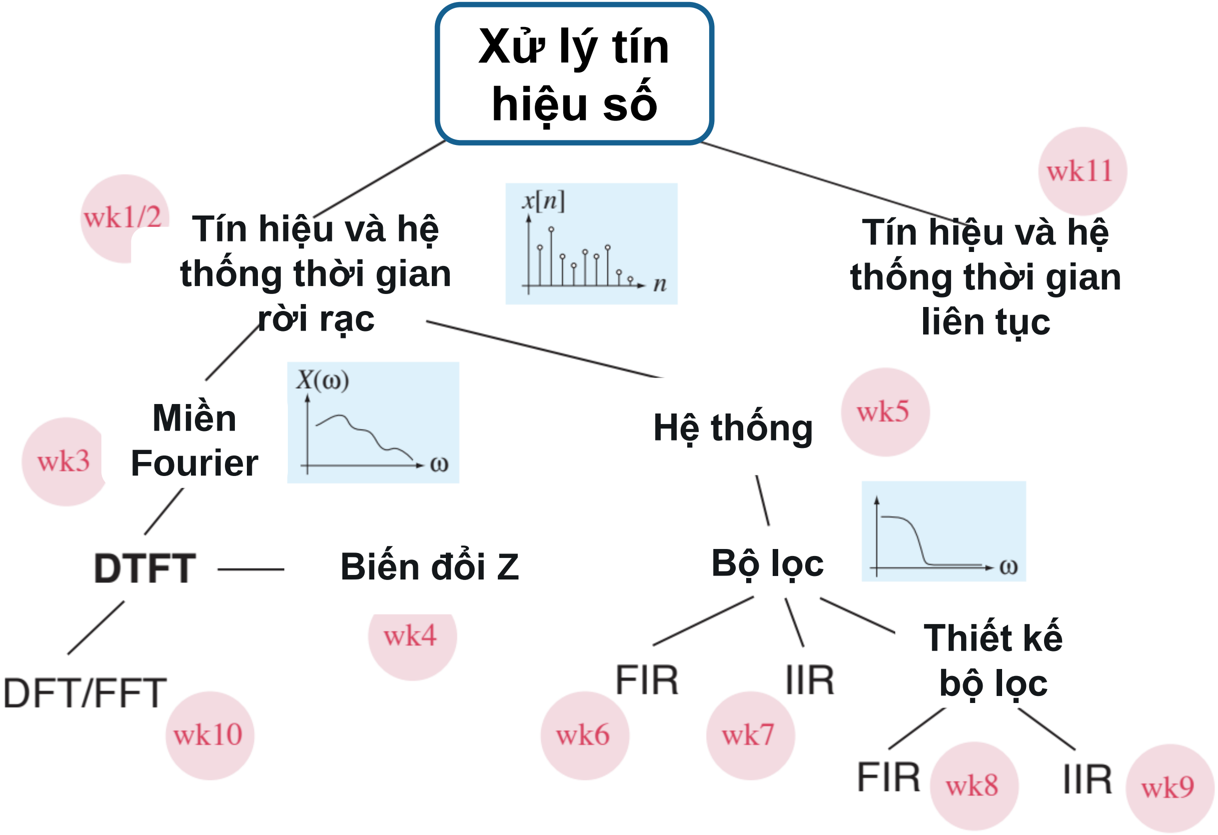
$G[x(t)/G{+}\sigma(t)] = x(t) + \text{G}\sigma(t)$

Phân ngưỡng

$\hat{x}_1(t) = \text{sgn}[x(t) + G.\sigma(t)]$

Kết luận

- Với sự rời rạc hóa thời gian:
  - Một tập các mẫu sẽ thay thế các mô hình vật lý được lý tưởng hóa.
  - Trong quá trình xử lý, giải tích được thay thế bằng toán học đơn giản.
- Với sự rời rạc hóa giá trị hàm số (biên độ):
  - Có thể sử dụng các bộ nhớ mục đích chung cho tất cả các loại dữ liệu.
  - Xử lý bằng các bộ xử lý mục đích chung (CPU).
  - Có thể kiểm soát nhiễu hiệu quả.


Xử lý tín hiệu số
Tín hiệu và hệ thống thời gian rời rạc
wk1/2
x[n]
n
Tín hiệu và hệ thống thời gian liên tục
wk11
Miền Fourier
wk3
X(ω)
ω
Hệ thống
wk5
DTFT
Biến đổi Z
wk4
Bộ lọc
ω
DFT/FFT
wk10
FIR
wk6
IIR
wk7
Thiết kế bộ lọc
FIR
wk8
IIR
wk9

Câu hỏi

- Chọn (các) câu trả lời đúng:
  a. Trong hệ thống truyền dẫn, tín hiệu số chống nhiễu hiệu quả hơn các tín hiệu tương tự.
  b. Tín hiệu số là tín hiệu rời rạc về thời gian và biên độ.

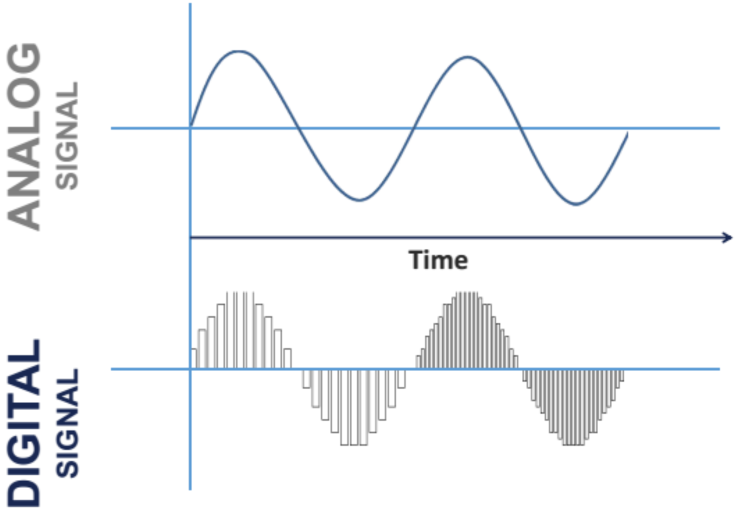
Chương 1. Tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền thời gian rời rạc n

Tín hiệu tương tự và tín hiệu số

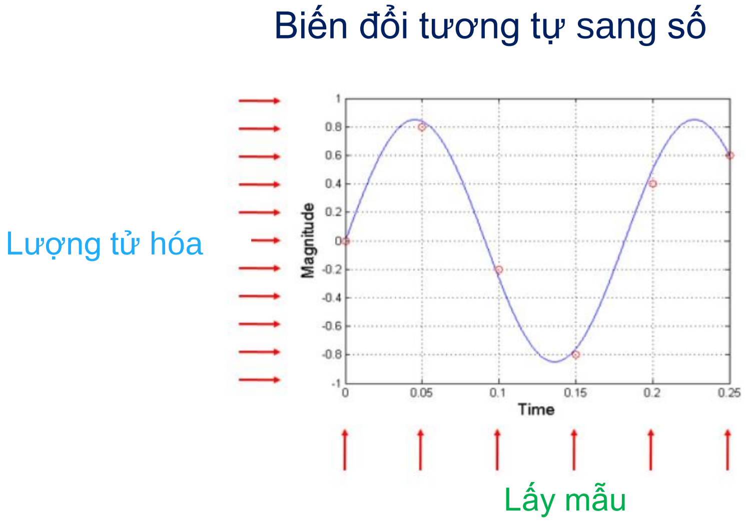
- Hầu hết các tín hiệu trong hệ thống vật lý là các tín hiệu thời gian liên tục

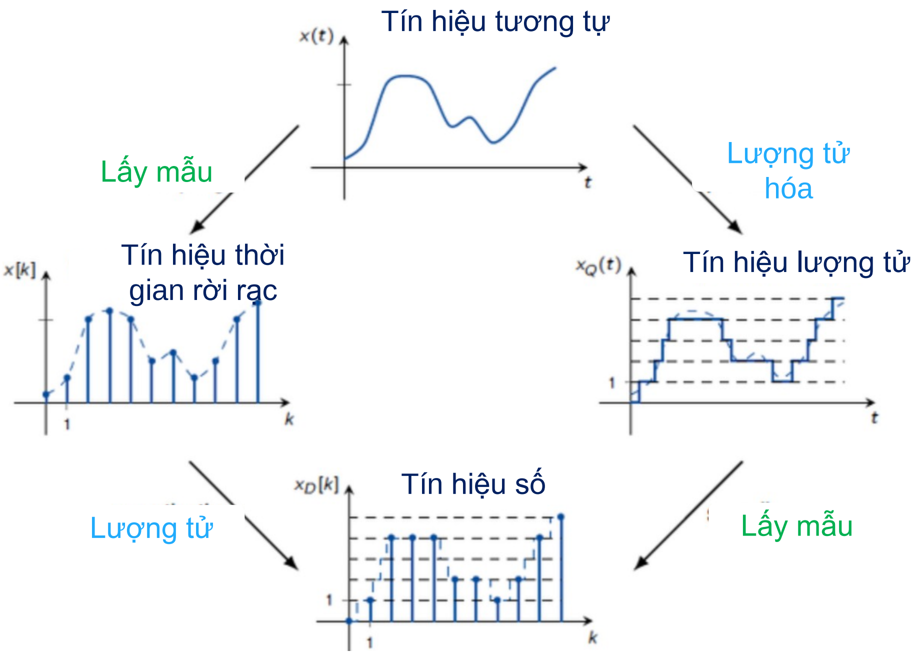
→ cần thực hiện rời rạc hóa tín hiệu để xử lý trên các hệ thống số.

- Khi **lấy mẫu**, lấy giá trị của tín hiệu liên tục tại các điểm rời rạc.
  - Cần lấy mẫu ở tốc độ nào?
  - Gía trị của mỗi điểm là bao nhiêu?
- **Lượng tử** quyết định giá trị của mỗi mẫu.



Biến đổi tín hiệu tương tự sang tín hiệu số



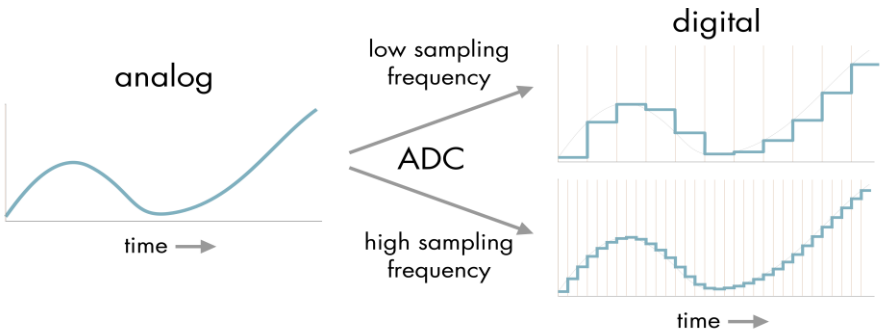


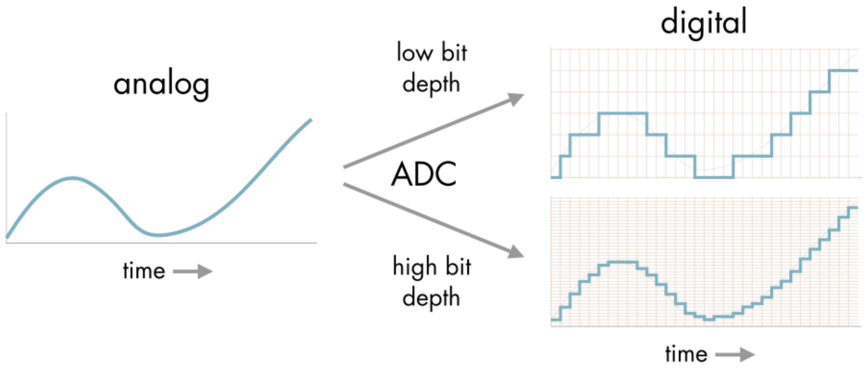
Tốc độ lấy mẫu và độ sâu bit

- Chất lượng biến đổi ADC phụ thuộc vào tốc độ lấy mẫu và độ sâu bit.
- Tốc độ lấy mẫu càng cao sẽ biểu diễn tín hiệu tốt hơn.
- Độ sâu bit để chỉ chiều dài của số được sử dụng để biểu diễn mỗi giá trị mẫu.

Số lượng bit	Số lượng các mức
8	256
12	4096
16	65536

- Độ sâu bit càng lớn thì biểu diễn tín hiệu càng chính xác.



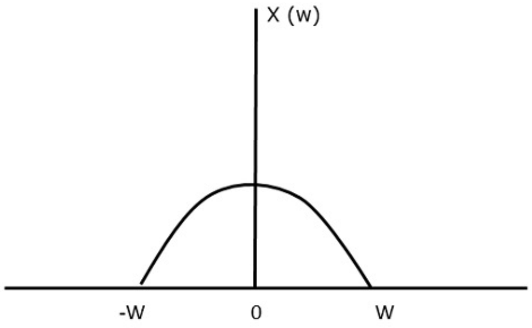


Định lý lấy mẫu Nyquist

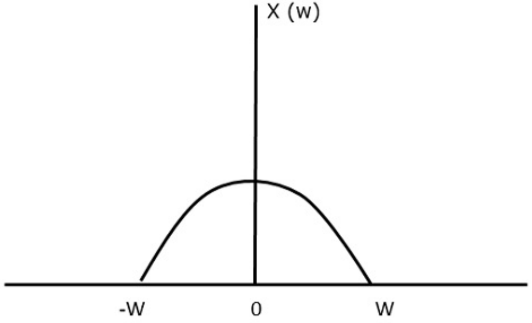
- Tín hiệu thời gian liên tục có độ rộng băng tần hạn chế có thể được lấy mẫu và tái tạo lại một cách hoàn hảo từ các mẫu của nó nếu dạng sóng được lấy mẫu với tốc độ f_s gấp hai lần so với thành phần tần số cao nhất (W) của nó.

$$f_s \geq 2W$$

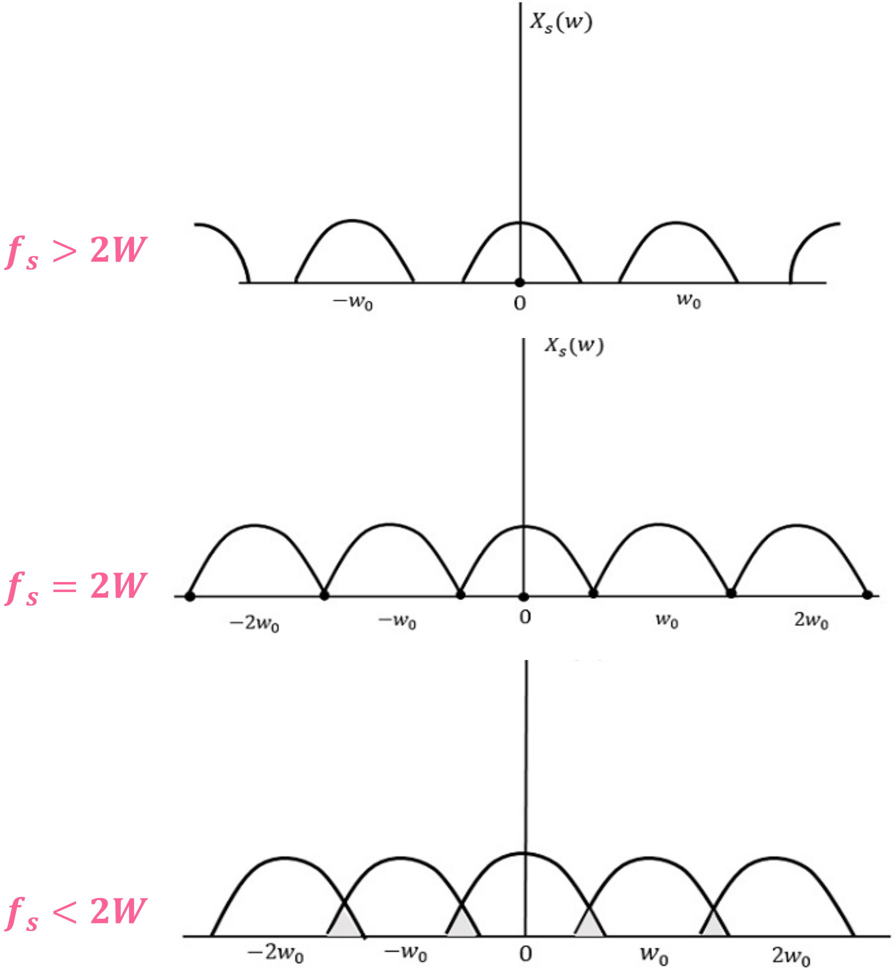
- Tín hiệu có độ rộng băng tần hữu hạn là tín hiệu có giá trị khác 0 trong khoảng từ -W đến W (Hz)



Band limited signal

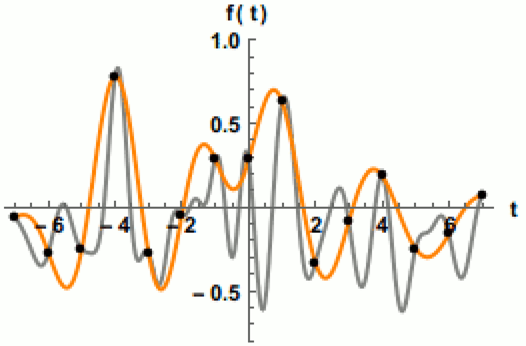


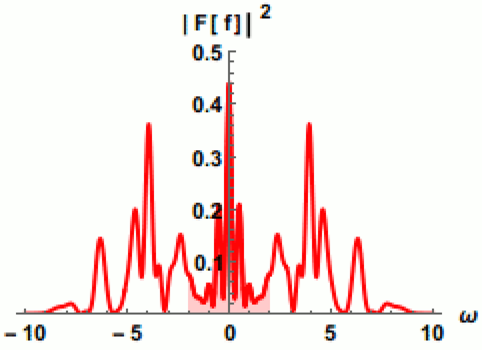
Band limited signal



f_s: tốc độ lấy mẫu
W: tần số cao nhất

Định lý Nyquist



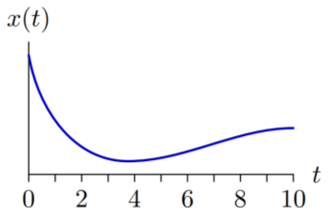


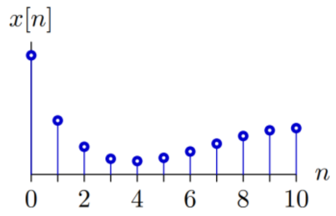
- Hình bên trái cho thấy một hàm (màu xám/đen) đang được lấy mẫu và tái tạo (bằng màu vàng) với mật độ mẫu tăng dần đều, trong khi hình bên phải hiển thị phổ tần số của hàm màu xám/đen, không thay đổi. Tần số cao nhất trong phổ là ½ chiều rộng của toàn bộ phổ. Chiều rộng của bóng hồng tăng đều bằng tỷ lệ mẫu. Khi nó bao trùm toàn bộ phổ tần số, nó lớn gấp đôi tần số cao nhất và đó là khi dạng sóng được tái tạo khớp với dạng được lấy mẫu.

Biểu diễn tín hiệu rời rạc

Tín hiệu rời rạc

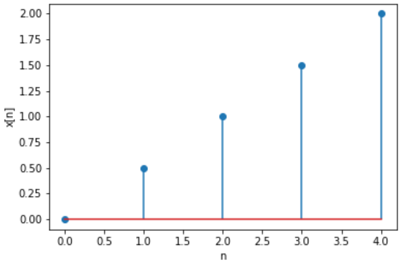
- Tín hiệu rời rạc là hàm theo biến số rời rạc:
  $x(t) \rightarrow x(n.T_s) \rightarrow x(n)$





- Công thức toán học: $x[n] = \begin{cases} n/2 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n\ khác \end{cases}$

- Vẽ đồ thị tín hiệu:



- Liệt kê dãy giá trị:

$$x[n] = \{\vec{0}, 1/2, 1, 3/2, 2\}$$

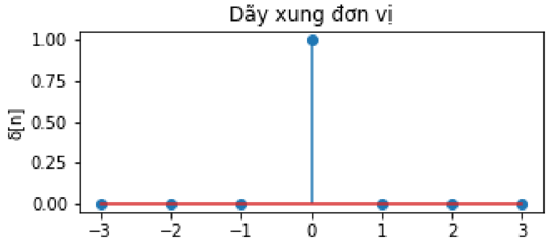
Một số tín hiệu rời rạc cơ bản

- Tín hiệu delta (dãy xung đơn vị)
- Dãy nhảy đơn vị (unit step)
- Dãy chữ nhật
- Dãy dốc đơn vị
- Dãy hàm mũ thực

Một số tín hiệu rời rạc cơ bản

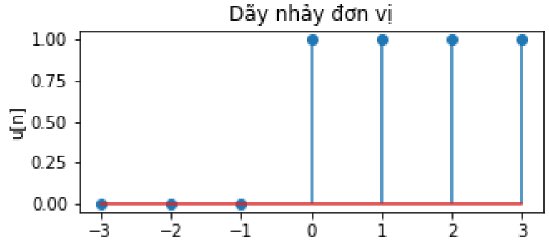
- Dãy xung đơn vị:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$



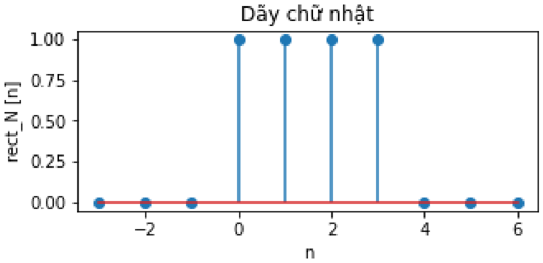
- Dãy nhảy đơn vị:

$$\mathrm{u}[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



- Dãy chữ nhật:

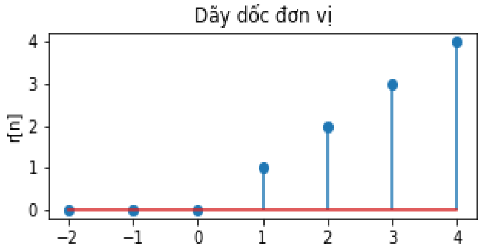
$$rect_N[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$



Một số tín hiệu rời rạc cơ bản

- Dãy dốc đơn vị:

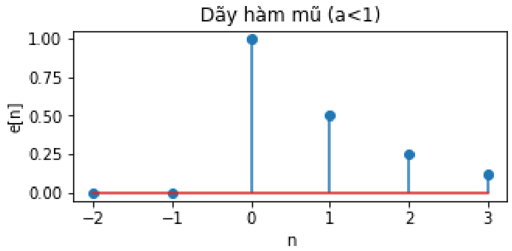
$$\mathrm{r}[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

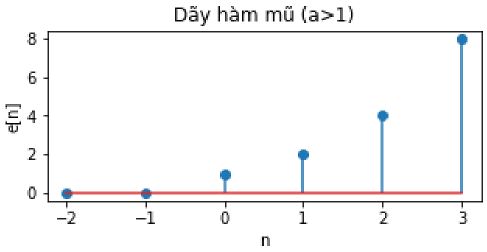


- Dãy hàm mũ:

$$\mathrm{e}[n] = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n \leq 0 \end{cases}$$

Với a là tham số





Các phép toán cơ bản với tín hiệu rời rạc

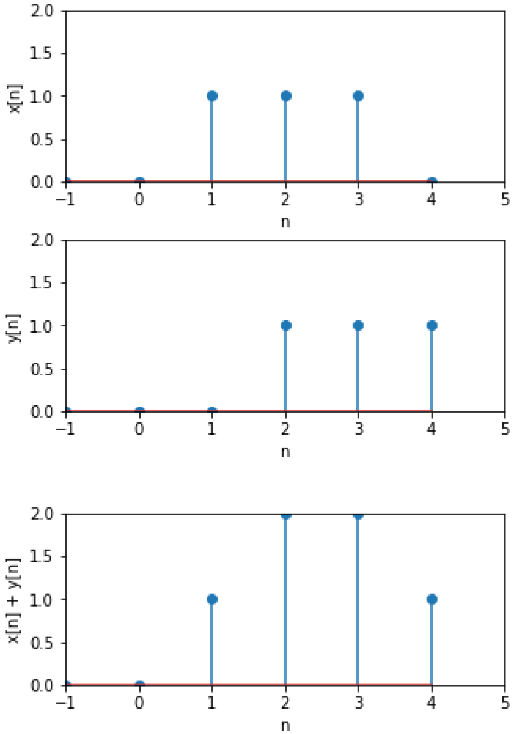
Các phép toán cơ bản đối với tín hiệu rời rạc

- Tổng của hai dãy
- Tích của hai dãy
- Tích của dãy với hằng số
- Trễ của tín hiệu
- Phép nội suy và phân chia tín hiệu
- Phép tương quan tín hiệu

Các phép toán cơ bản đối với tín hiệu rời rạc

- Tổng của 2 dãy:

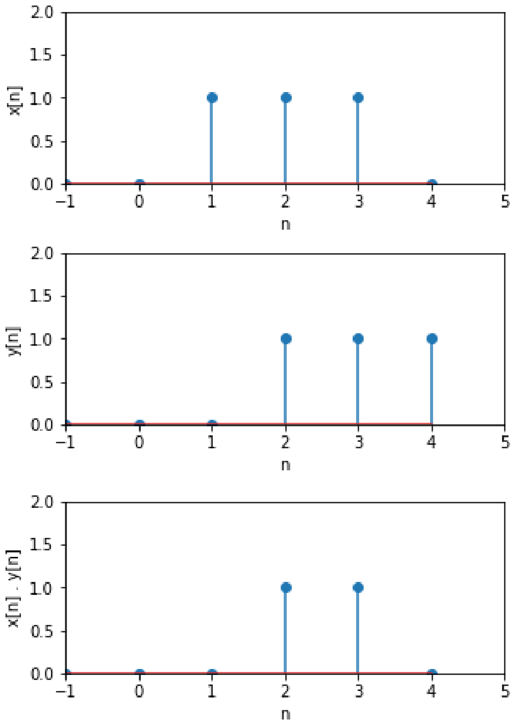
Tổng của 2 dãy nhận được bằng cách cộng từng đôi một các giá trị mẫu đối với cùng một trị số của biến độc lập.



Các phép toán cơ bản đối với tín hiệu rời rạc

- Tích của 2 dãy:

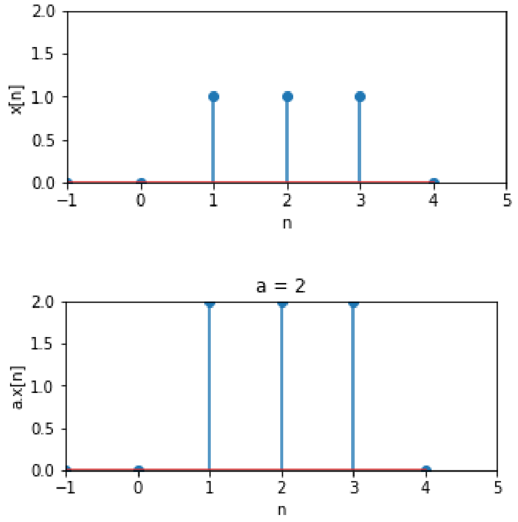
Tích của 2 dãy nhận được bằng cách nhân từng đôi một các giá trị mẫu đối với cùng một trị số của biến độc lập.



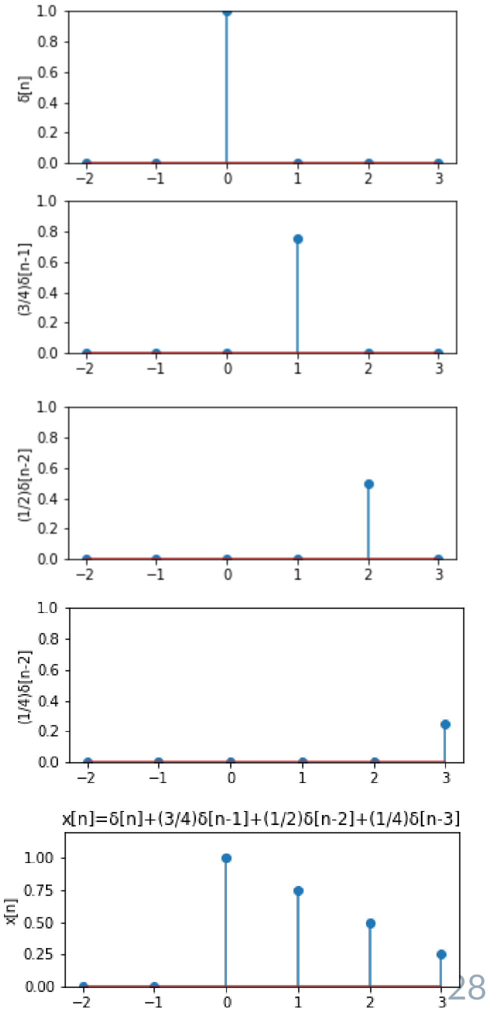
Các phép toán cơ bản đối với tín hiệu rời rạc

- Tích của dãy với hằng số:

Tích của một dãy với hằng số nhận được bằng cách nhân tất cả các giá trị mẫu của dãy số với hằng số đó.



Các phép toán cơ bản đối với tín hiệu rời rạc



- Trễ:

Dãy $x_2[n]$ là dãy lặp lại trễ của dãy $x_1[n]$ nếu:

$x_2[n] = x_1[n - n_0]$(n_0 nguyên)

$$x[n] = \delta[n] + (3/4)\delta[n-1] + (1/2)\delta[n-2] + (1/4)\delta[n-3]$$

$$x[n] = \begin{cases} 1 - \dfrac{n}{4} & 0 \le n \le 4 \\ 0 & n \ne \end{cases}$$

Mọi dãy x[n] bất kỳ đều có thể biểu diễn dưới dạng:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

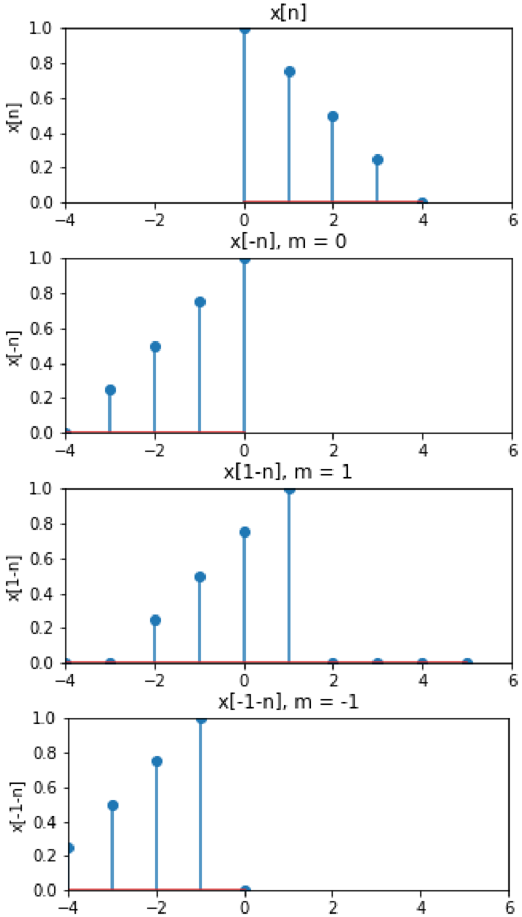
Các phép toán cơ bản đối với tín hiệu rời rạc

- Đảo ngược thời gian rời rạc:

Đảo ngược thời gian rời rạc của dãy x[n] được một dãy biểu diễn thay n bằng –n:

$$x[n] \rightarrow x[-n]$$

- $x[m-n]$ là kết quả của đảo ngược thời gian và trễ.



Tương quan tín hiệu

- **Tương quan chéo** của hai tín hiệu giá trị thực có năng lượng hữu hạn $x[n]$ và $y[n]$ được xác định bằng:

  $R_{xy}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[m-n]$ với $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

  Tương quan tín hiệu được sử dụng để so sánh sự giống nhau giữa các tín hiệu.

$R_{xy}[0] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[m]$; $R_{xy}[1] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[m-1]$

- **Tự tương quan** của tín hiệu giá trị thực $x[n]$ được xác định bằng:

  $R_{xx}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]x[m-n]$ với $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

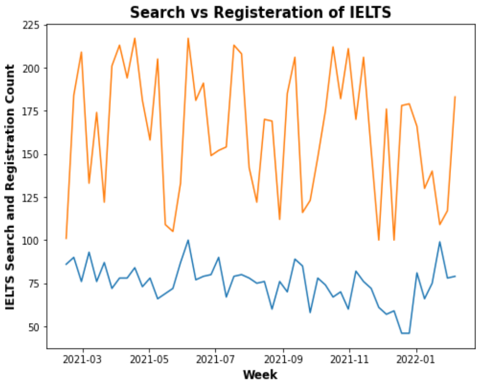
Ta có: $R_{xx}[n] = R_{xx}[-n]$

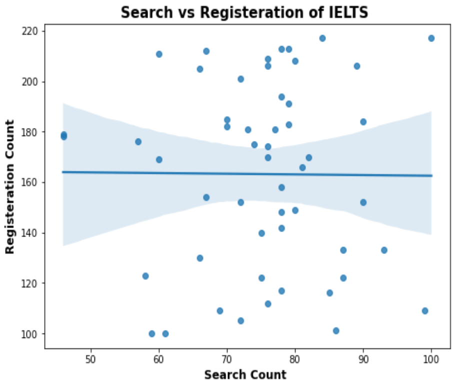
$R_{xx}[0] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]x[m] = E_x$

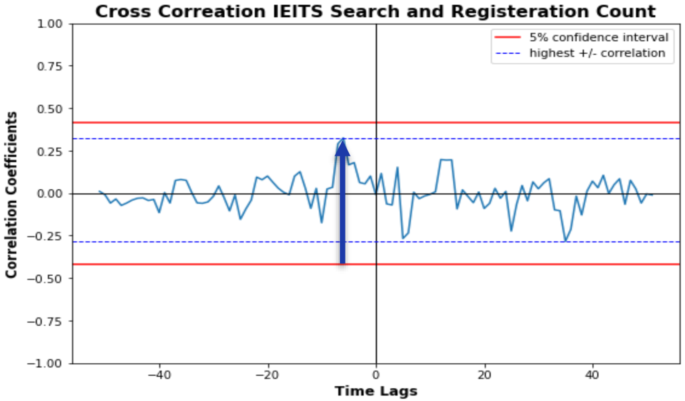
$R_{xx}[n] \leq R_{xx}[0]$

Ứng dụng của tương quan chéo

- Gỉa sử có 2 chuỗi dữ liệu là Dữ liệu tìm kiếm Ielts trên Google Trends và dữ liệu đăng ký thi Ielts. Khi biểu diễn trên đồ thị hoặc biểu đồ phân tán, hai chuỗi dữ liệu không có xu hướng rõ ràng hoặc thể hiện bất cứ đặc điểm nổi bật nào.







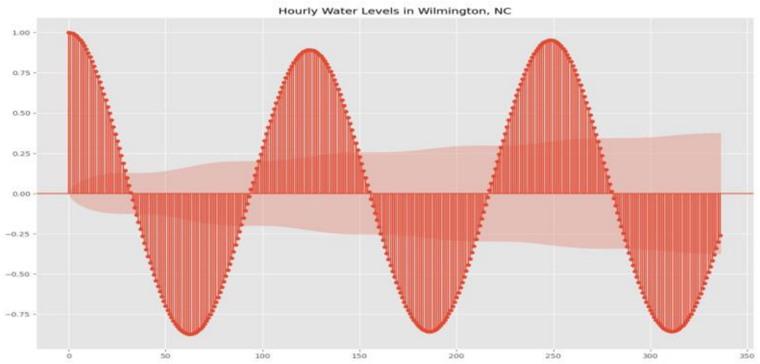
- Trong biểu đồ tương quan chéo: Dữ liệu tìm kiếm Ielts là trục X, hệ số bên trái của 0 là các giá trị mà X đi trước Y và ngược lại. Hệ số dương tương quan cao nhất là 0.32 tương ứng với độ trễ -8 (tuần). Có thể kết luận rằng mọi người có xu hướng tìm kiếm IELTS 8 tuần trước khi đăng ký.

Ứng dụng của tự tương quan

- 01: Lag (Độ trễ) – số lượng quan sát trước đó được đo trong quá trình tự tương quan.
- 02: Positive correlation (Tương quan dương) – Một mối quan hệ trong đó sự gia tăng của một giá trị dự đoán sự gia tăng của một giá trị khác.
- 03: Negative (Tương quan âm) – Một mối quan hệ trong đó giá trị tăng của một giá trị dự đoán giá trị khác sẽ giảm.

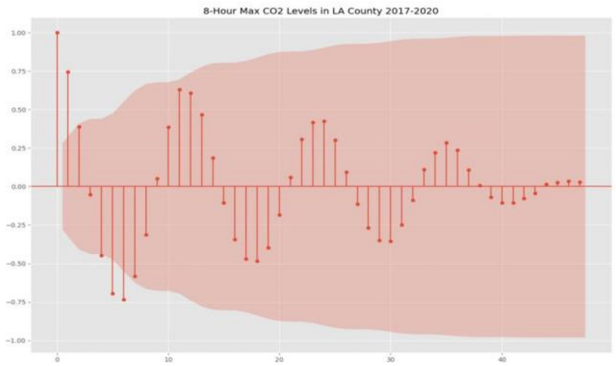
a. Dữ liệu thủy triều

Dưới đây là dữ liệu thủy triều được đo cứ sau sáu phút:



b. Ô nhiễm không khí.

Biểu đồ dưới đây mô tả mức CO_2 tối đa quan sát được trong 8 giờ đối với Quận Los Angeles, California từ năm 2017-2020



Các phép toán cơ bản đối với tín hiệu rời rạc

- Phép nội suy (giãn – tăng tần số lấy mẫu (upsampling)):

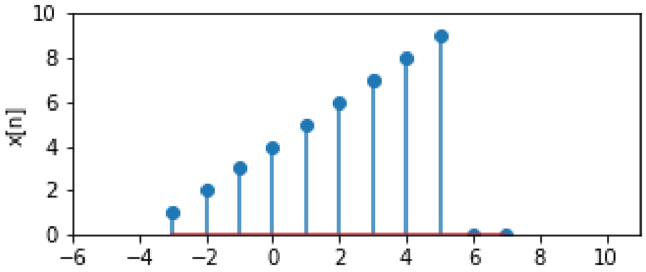
Tăng tần số lấy mẫu A lần (còn gọi là giãn với tỷ số A ($A \in Z$) là nội suy A-1 mẫu giữa hai mẫu liên tiếp của x[n].

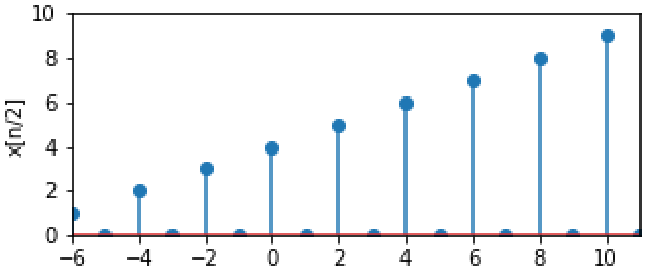
Nói cách khác $x[n/A]$ được suy ra từ $x[n]$ khi thêm A – 1 số 0 vào giữa các phần tử của nó.

Ví dụ: $x[n] = \{1,2,3,\vec{4},5,6,7,8,9\}$

$$\mathrm{y[n]} = x[n/2] = \{1,0,2,0,3,0,\vec{4},0,5,0,6,0,7,0,8,0,9\}$$

$$\mathrm{y[n]} = x[n/3] = \{1,0,0,2,0,0,3,0,0,\vec{4},0,0,5,0,0,6,0,0,7,0,0,8,0,0,9\}$$





Các phép toán cơ bản đối với tín hiệu rời rạc

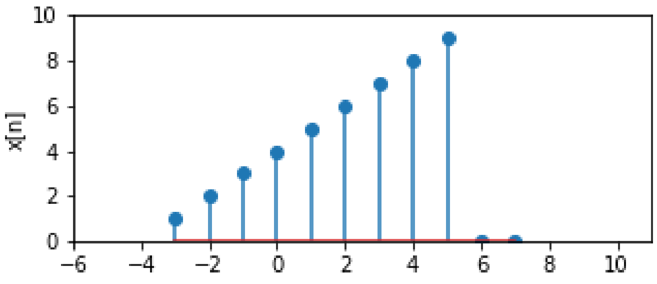
- Phép phân chia (nén – giảm tần số lấy mẫu (downsampling)):

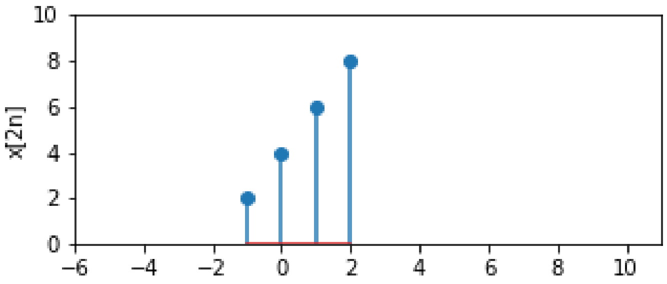
Gỉam tần số lấy mẫu A lần (còn gọi là nén với tỷ số A ($A \in Z$) là lấy các giá trị mẫu cách nhau A của $x[n]$ và bỏ qua những mẫu còn lại

Nói cách khác $x[nA]$ được suy ra từ $x[n]$ khi chỉ giữ lại các vị trí mà chỉ số chia hết cho A.

Ví dụ: $x[n] = \{1,2,3,\vec{4},5,6,7,8,9\}$

$y[n] = x[2n] = \{2,\vec{4},6,8\}$





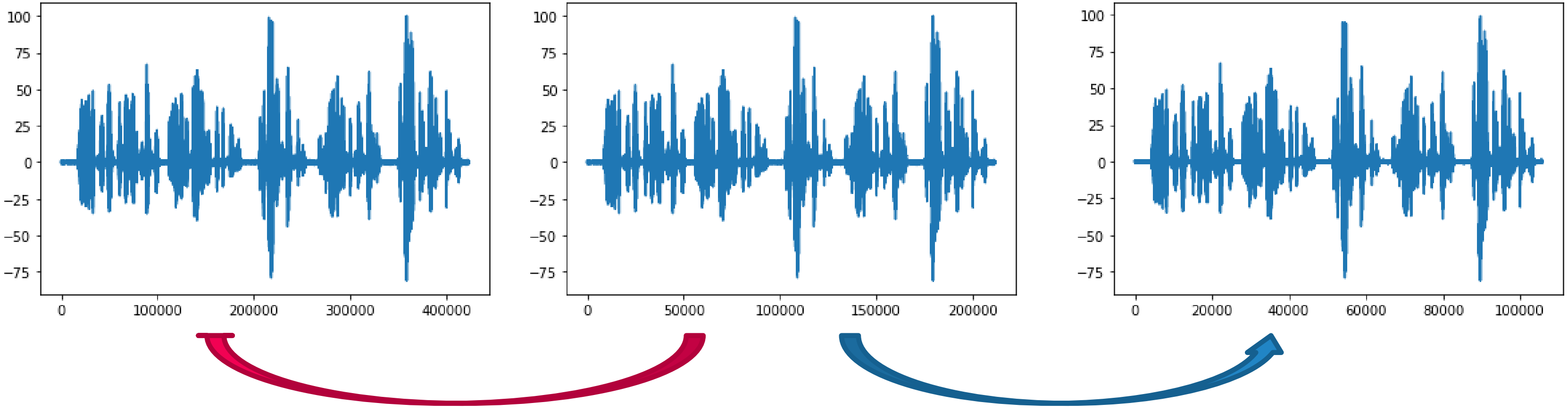
Ví dụ downsample và upsample đối với ảnh

Ảnh gốc (359 x 479)

Ảnh downsample mỗi chiều đi 2 lần (180 x 240)

Ảnh upsample mỗi chiều lên 2 (359 x 479)

Ví dụ downsample và upsample đối với âm thanh



upsample

File gốc

downsample

Phân loại tín hiệu rời rạc

Phân loại tín hiệu rời rạc

- Tín hiệu năng lượng
- Tín hiệu công suất
- Tín hiệu tuần hoàn
- Tín hiệu có chiều dài hữu hạn

Tín hiệu năng lượng và tín hiệu công suất

- Năng lượng của một tín hiệu $x[n]$ được xác định bằng:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

- Nếu năng lượng E_x của tín hiệu $x[n]$ thỏa mãn $0 < E_x < \infty$ thì $x[n]$ được gọi là *tín hiệu năng lượng*.
- Công suất của một tín hiệu $x[n]$ được xác định bằng:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^{N} |x[m]|^2$$

- Nếu công suất P_x của tín hiệu $x[n]$ thỏa mãn $0 < P_x < \infty$ thì $x[n]$ được gọi là *tín hiệu công suất*.

Ví dụ

1. Tìm năng lượng và công suất của tín hiệu rời rạc sau: $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

Ta có: $\mathrm{E} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\left(\frac{1}{4}\right)^n\right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\left(\frac{1}{16}\right)^n\right| = \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{16}{15}$

- Vì $0 < E_x < \infty$ nên $x[n]$ là *tín hiệu năng lượng*, P = 0

2. Tìm năng lượng và công suất của tín hiệu rời rạc $x[n] = e^{10jn}u[n]$

Công thức Euler: $e^{jx} = cosx + jsinx$ suy ra $\left|e^{jx}\right| = 1$

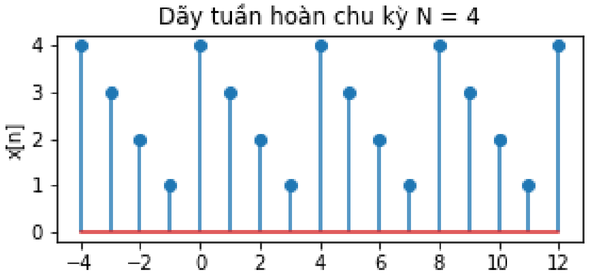
Ta có: $\mathrm{E} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left|e^{10jn}\right|^2 = \infty$

P= $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^{N} |x[m]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{m=0}^{N} |e^{10jn}|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2}$

Vậy tín hiệu $x[n]$ là *tín hiệu công suất*.

Tín hiệu tuần hoàn

- Tín hiệu $x[n]$ được gọi là tín hiệu tuần hoàn nếu và chỉ nếu $\exists N \in Z^+$ sao cho $x[n] = x[n+N] = x[n+kN]$ với mọi n, ký hiệu $\tilde{x}(n)_N$:
  - Gía trị N nhỏ nhất thỏa mãn được gọi là chu kỳ của tín hiệu.



- *Ví dụ*: Cho biết tín hiệu nào sau đây tuần hoàn theo thời gian và nếu có tuần hoàn với chu kỳ nào:
  - $\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$
  - $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}n\right)$
  - $\cos(\sqrt{2}\pi n)$

Ví dụ

- Gỉa sử $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$ tuần hoàn với chu kỳ N nghĩa là $\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}(n+N)\right)$

  Mặt khác $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n + 2\pi.k\right)$ với $k \in Z$

  Suy ra: $\frac{2\pi}{3}(n+N) = \frac{2\pi}{3}n + 2\pi.k \Rightarrow N = 3k; N_{min} = 3$

  Vậy $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$ tuần hoàn với chu kỳ N =3.

- Gỉa sử $y[n] = \cos(\sqrt{2}\pi n)$ tuần hoàn với chu kỳ N nghĩa là $\cos(\sqrt{2}\pi n) = \cos(\sqrt{2}\pi(n+N))$

  $y[n] = \cos(\sqrt{2}\pi n) = \cos(\sqrt{2}\pi n + 2\pi k)$ với $k \in Z$

  Suy ra $\sqrt{2}\pi n + 2\pi k = \sqrt{2}\pi(n+N)$; $N = \sqrt{2}.k$ → không tồn tại N và k nguyên thỏa mãn.

  Vậy y[n] không phải là tín hiệu tuần hoàn.

Tín hiệu có chiều dài hữu hạn và tín hiệu chiều dài vô hạn

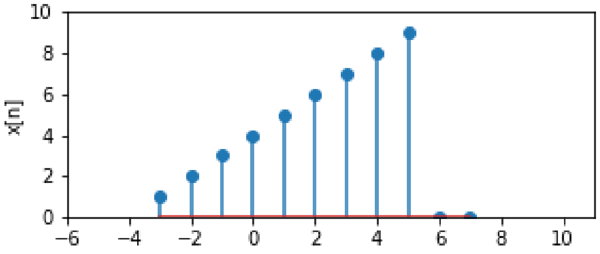
- Tín hiệu có chiều dài hữu hạn :

Tín hiệu $x[n]$ được xác định với số hữu hạn N mẫu (giá trị các mẫu khác không) thì được gọi là dãy có chiều dài hữu hạn.

Khi đó N là chiều dài của tín hiệu.

Ví dụ: $x[n] = \begin{cases} a^n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$

$L\{x[n]\} = N$

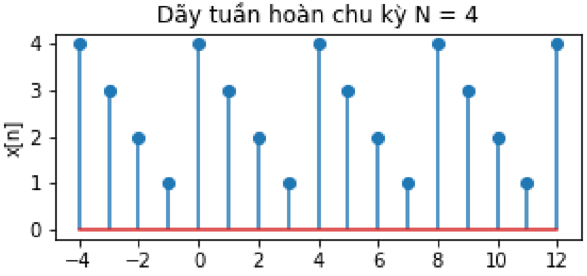


$L\{x[n]\} = 9$

- Tín hiệu có chiều dài vô hạn :

Tín hiệu $x[n]$ không phải là dãy có chiều dài hữu hạn thì được gọi là dãy có chiều dài vô hạn.

Ví dụ: Tín hiệu tuần hoàn.



Hệ thống rời rạc

Hệ thống rời rạc

- Hệ thống tuyến tính
- Hệ thống tuyến tính bất biến
- Hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả
- Hệ thống tuyến tính bất biến và ổn định

Hệ thống rời rạc

- Một hệ thống (xử lý tín hiệu) mà tín hiệu đầu vào và tín hiệu đầu ra là các tín hiệu rời rạc thì được gọi là hệ thống rời rạc.
  - Tín hiệu vào của hệ thống gọi là tín hiệu kích thích
  - Tín hiệu ra của hệ thống gọi là tín hiệu đáp ứng

$$x[n] \xrightarrow{T} y[n]$$

Hệ thống rời rạc tuyến tính bất biến

- Tuyến tính:
  - $\boldsymbol{T[ax_1 + bx_2] = aT[x_1] + bT[x_2]}$
- Bất biến (thời gian):
  - $\mathbf{y}[\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{T}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{n})] \Rightarrow \mathbf{y}[\boldsymbol{n} - \boldsymbol{m}] = \boldsymbol{T}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{m})]$

- *Hệ thống tuyến tính bất biến (TTBB) (LTI, Linear Time Invariant; LSI – Linear Shift Invariant)*

Đáp ứng xung của hệ thống TTBB (LTI)

- Bất biến:

$$\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{n}] \xrightarrow{\quad \mathbf{T} \quad} \mathbf{y}[\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{T}\big[\boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{n}]\big] = \boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}]$$

$$\boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}] \xrightarrow{\quad \mathbf{T} \quad} \boldsymbol{T}\big[\boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}]\big] = \mathbf{h}[\mathbf{n}-\mathbf{k}]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$\mathrm{y}[n] = T\big[x[n]\big] = T[\textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T[\delta[n-k]]$$

$$\mathrm{y}[n] = \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$\boldsymbol{y}[\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}] * \boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}] \text{ (phép chập)}$$

- $h[n]$ được gọi là đáp ứng xung của hệ thống TTBB.
- *$h[n]$ có chiều dài hữu hạn gọi là hệ thống FIR (Finite Impulse Response)*
- *$h[n]$ có chiều dài vô hạn gọi là hệ thống IIR (Infinite Impulse Response)*

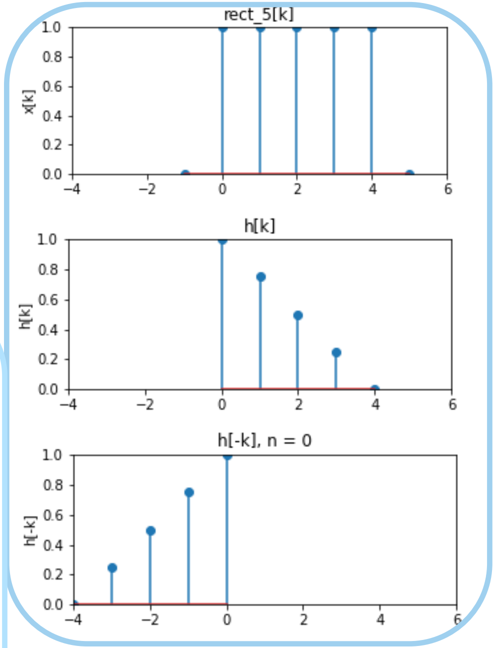
Tính tích chập bằng đồ thị

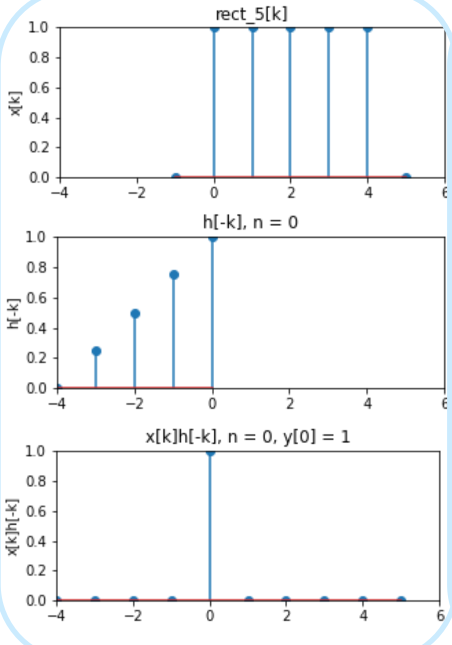
- Bước 1. Đổi biến n thành biến k, $x[n] \to x[k], h[n] \to h[k]$, cố định $h[k]$
- Bước 2. Quay $h[k]$ đối xứng qua trục tung để được $h[-k]$
- Bước 3. Dịch chuyển $h[-k]$ theo từng giá trị n, dịch chuyển về bên phải nếu n > 0 và dịch chuyển về bên trái nếu n < 0 để thu được $h[n-k]$
- Bước 4. Thực hiện phép nhân $x[k].\ h[n-k]$ theo từng mẫu đối với tất cả các giá trị của k.
- Bước 5. Cộng các giá trị thu được ta có một giá trị của $\mathrm{y}[n]$. Tổng hợp các kết quả ta có dãy $\mathrm{y}[n]$ cần tìm.

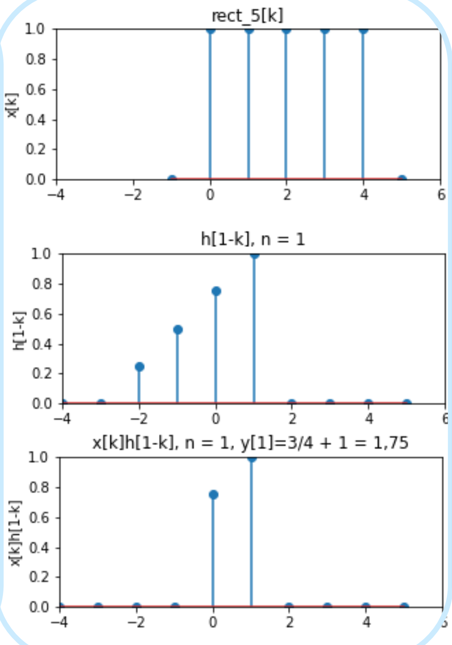
Ví dụ

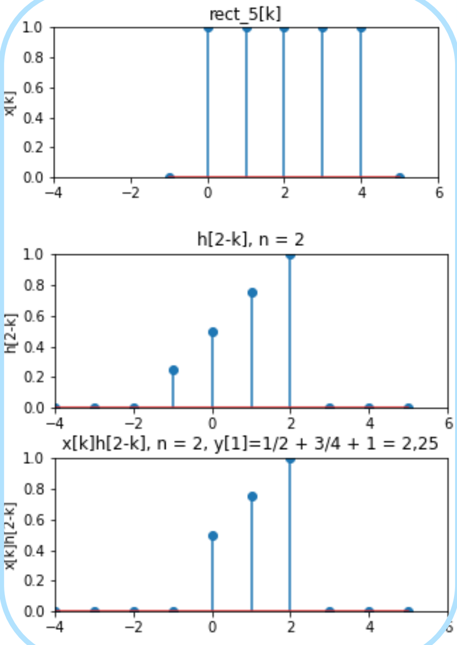
$$\mathbf{y}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

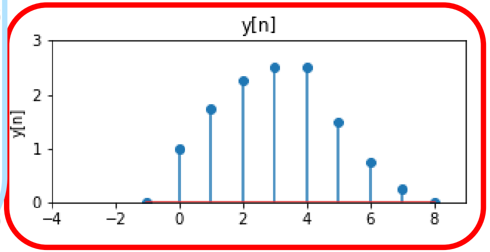
- Cho một HTTTBB có: $x[n] = rect_5[n]; h[n] = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \le n \le 4 \\ 0 & n \ne \end{cases}$
- Tìm đáp ứng ra của hệ thống $\mathrm{y}[n]$







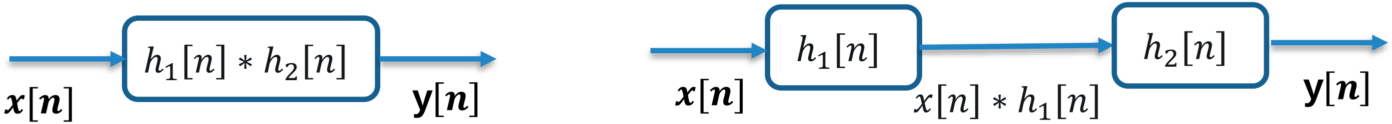




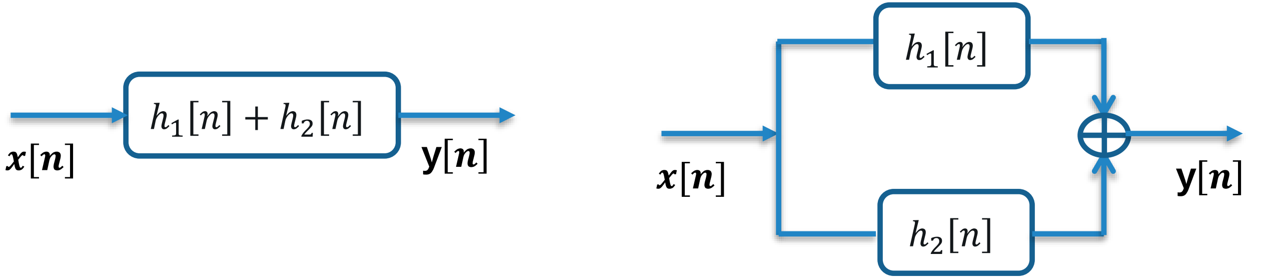
Tính chất của phép chập

- Tính giao hoán: $y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$

- Tính kết hợp: $y[n] = x[n] * [h_1[n] * h_2[n]] = [x[n] * h_1[n]] * h_2[n]$



- Tính phân phối: $y[n] = x[n] * [h_1[n] + h_2[n]] = [x[n] * h_1[n]] + [x[n] * h_2[n]]$



Hệ thống TTBB và nhân quả

- *Định nghĩa*: Một hệ thống TTBB được gọi là nhân quả nếu đáp ứng ra của nó ở thời điểm bất kỳ $n = n_0$ hoàn toàn độc lập với kích thích của nó ở các thời điểm tương lai, $n > n_0$.

- *Định lý*: Đáp ứng xung của hệ thống TTBB và nhân quả phải bằng 0 với n < 0 ($h[n] = 0 \text{ với } \forall n < 0$)

Một dãy x[n] được gọi là nhân quả nếu x[n]=0 với n < 0.

Hệ thống TTBB và ổn định

- *Định nghĩa*: Một hệ thống TTBB được gọi là ổn định nếu ứng với dãy vào bị chặn ta cũng có dãy ra bị chặn.

$$|x[n]| < \infty \ \rightarrow |y[n]| < \infty$$

  Hệ thống này còn được gọi là hệ thống BIBO.

- *Định lý*: Đáp ứng xung của hệ thống TTBB được gọi là ổn định nếu và chỉ nếu đáp ứng xung h[n] của nó thỏa mãn điều kiện sau đây:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Ví dụ

- Xét sự ổn định của các hệ thống có đáp ứng xung sau:
- $h_1[n] = u[n];$
- $h_2[n] = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$
- Ta có: $S_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_1[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |1| = \infty \Rightarrow$ hệ thống không ổn định.
- $S_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_2[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ nếu $a < 1 \Rightarrow$ hệ thống ổn định
- $= \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \rightarrow \infty$ nếu $a \geq 1 \Rightarrow$ hệ thống không ổn định

Một số công thức

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} a^n = \frac{a^k}{1-a}, \quad |a| < 1$$

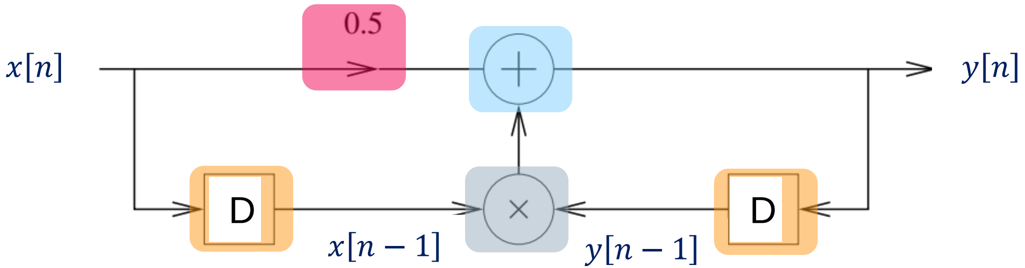
$$\sum_{n=m}^{N} a^n = \frac{a^m - a^{N+1}}{1-a}, \quad a \neq 1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} \dfrac{1-a^N}{1-a}, & |a| \neq 1 \\ N, & a = 1 \end{cases}$$

Phân tích hệ thống trong miền thời gian

Các phần tử thực hiện

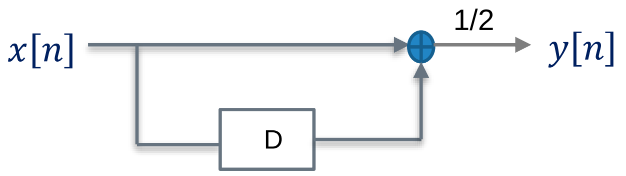
- Để thực hiện một hệ thống số cần các khối cơ bản: *bộ cộng, bộ nhân hằng số, bộ nhân tín hiệu, thành phần trễ*.

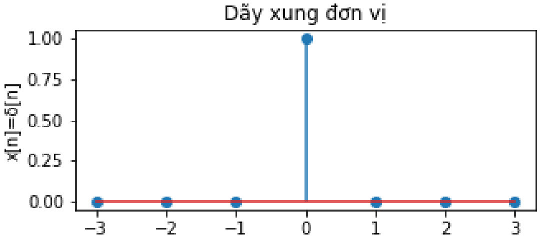


- $y[n] = 0{,}5.\,x[n] + x[n-1].\,y[n-1]$

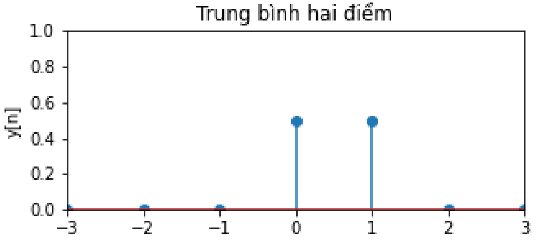
Ví dụ: Trung bình hai điểm

- Trung bình cục bộ: $y[n] = \frac{x[n]+x[n-1]}{2}$
- *Với* $x[n] = \delta[n]$

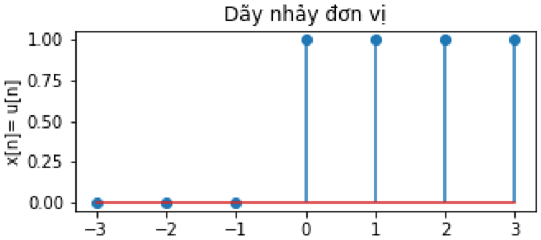




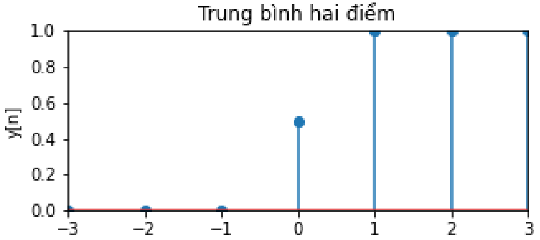
$$y[n] = \frac{\delta[n] + \delta[n-1]}{2}$$



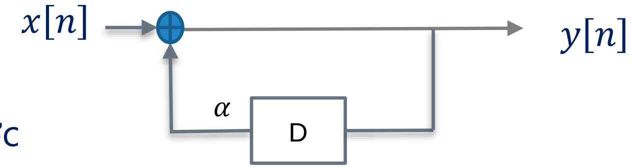
- *Với* $x[n] = u[n]$



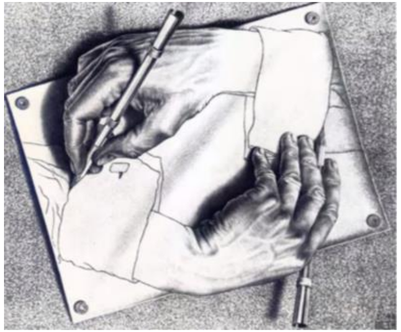
$$y[n] = \frac{u[n] + u[n-1]}{2}$$



Nếu đảo ngược vòng lặp?



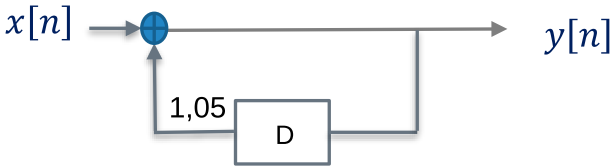
- $y[n] = x[n] + \alpha y[n-1]$
- Đầu ra hiện thời được tính dựa vào đầu ra trước đó được gọi là thuật toán đệ quy.
- Vấn đề là làm thế nào giải quyết vấn đề con gà-quả trứng?
- Cách giải quyết: Thiết lập các điều kiện ban đầu bằng 0
    - Thiết lập thời gian bắt đầu (thông thường n_0 = 0)
    - Gỉa định đầu vào và đầu ra đều bằng 0 trong tất cả các khoảng thời gian trước n_0.



Mô hình đơn giản cho việc gửi tiết kiệm

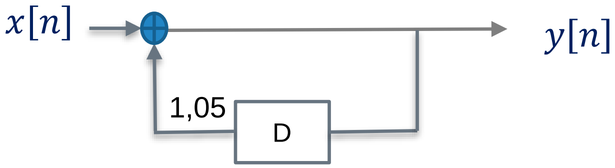
- Mô hình đơn giản mô tả việc tính lãi suất:
  - Lãi suất tiết kiệm 5% mỗi năm
  - Lãi suất được tính vào ngày 31/12
  - Số tiền gửi/rút trong năm n: $x[n]$
  - Số dư một năm, n, sẽ bằng 1,05 lần số vốn bạn có trong tài khoản ngân hàng của mình trong năm trước cộng với số dư tiền gửi và tiền rút
  - Số tiền trong tài khoản ngân hàng năm n:

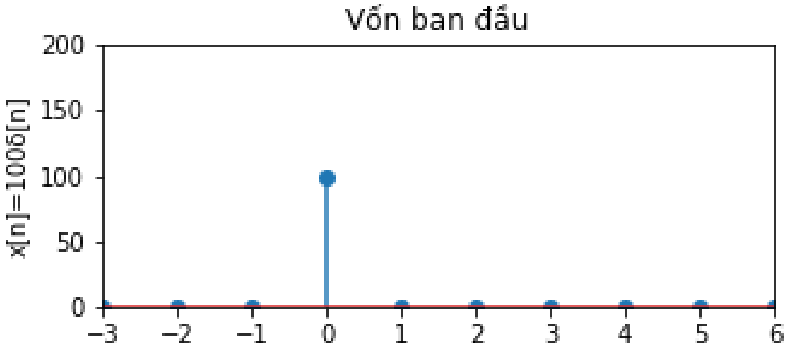
$$y[n] = 1{,}05 . y[n-1] + x[n]$$

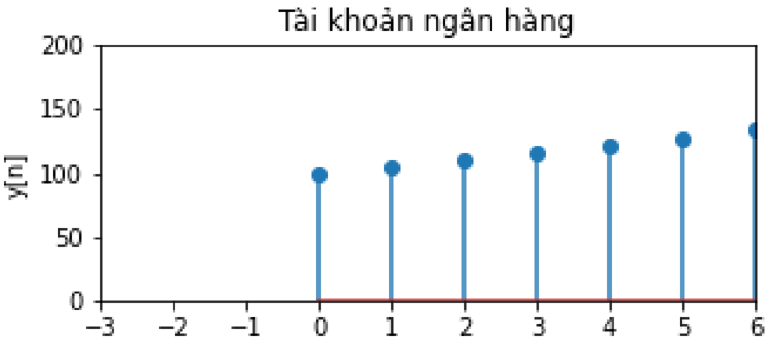


Ví dụ: Đầu tư một lần

$x[n] = 100\delta[n]$
$y[0] = 100$
$y[1] = 105$
$y[2] = 110{,}25$; y[3] =115,7825…
Tổng quát: $y[n] = (1{,}05)^n.100u[n]$



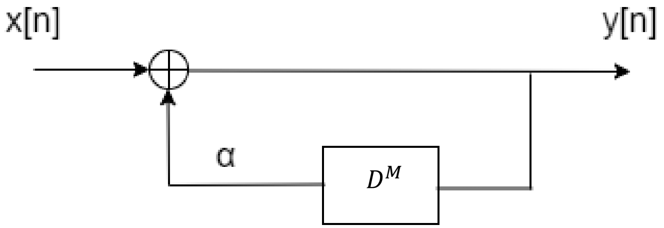


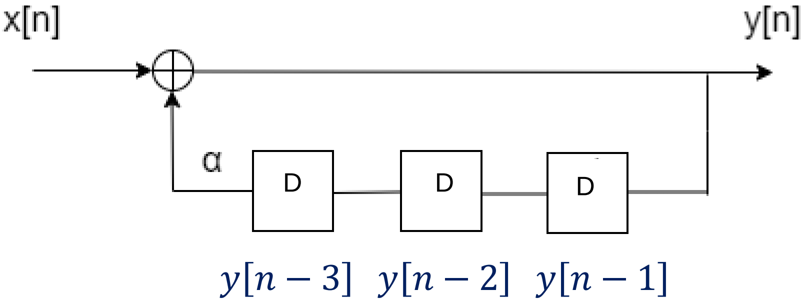


Mô hình tổng quát

- $x[n] = \delta[n]$
- $y[n] = \alpha y[n-3] + x[n]$
- $\alpha = 1$

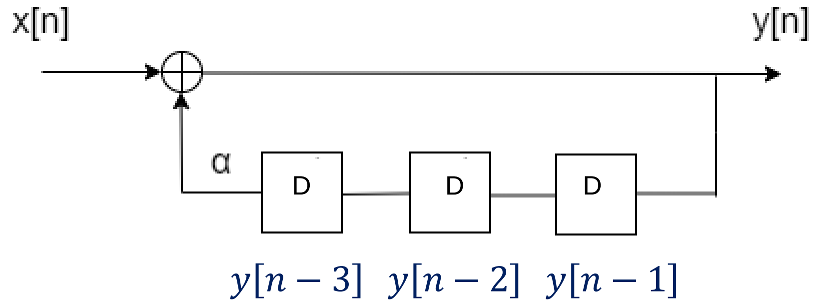
n	$x[n]$	$y[n]$	$y[n-1]$	$y[n-2]$	$y[n-3]$
-1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	1
3	0	1	1	0	0
…					

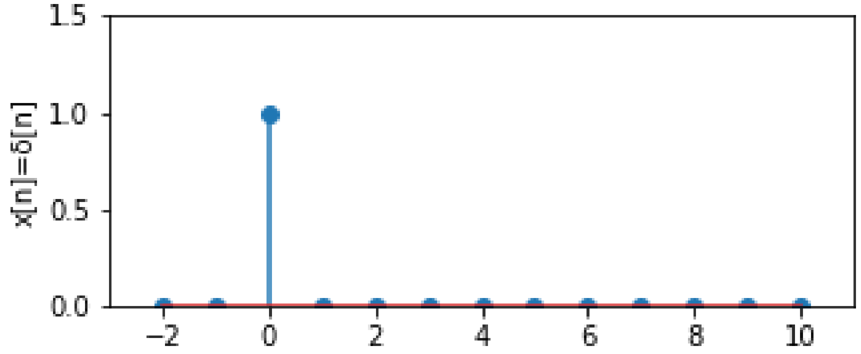


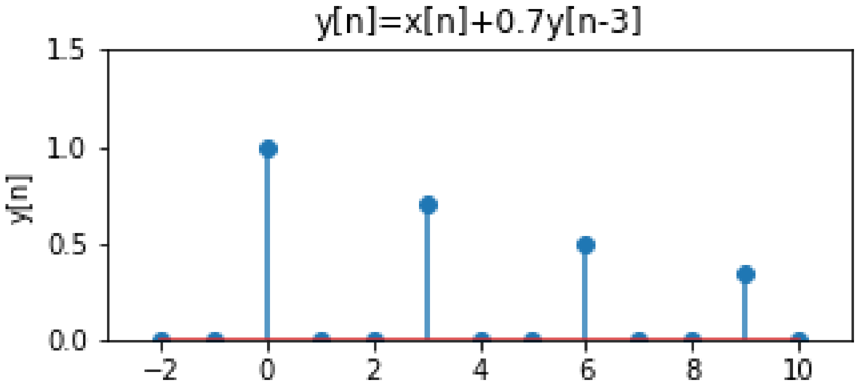


Mô hình tổng quát

- $x[n] = \delta[n]$; M = 3; $\alpha = 0.7$
- $y[n] = \alpha y[n-3] + x[n]$
- $y[0] = 1; y[1] = 0; y[2] = 0$
- $y[3] = 0.7; y[4] = 0; y[5] = 0$
- $y[6] = 0.7^2; y[7] = 0; y[8] = 0 \ldots.$







Phương trình sai phân tuyến tính

Phương trình sai phân tuyến tính

- Một hệ thống TTBB về mặt toán học được mô tả bởi phương trình sai phân (PTSP) tuyến tính hệ số hằng dạng tổng quát sau:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$$

a_k, b_r là các hệ số hằng; N là bậc của phương trình.

- Đáp ứng ra y[n] được xác định bởi PTSP tương đương với đáp ứng ra được xác định theo phép chập:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Giải PTSP tuyến tính: Phương pháp thế

Cho PTSP tuyến tính hệ số hằng: $y[n] = Ay[n-1] + x[n]$.

Tìm đáp ứng xung h[n] của hệ thống với điều kiện $y[-1] = 0$

Giải:

Cho $x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = h[n]$

Ta có: $\mathrm{h}[n] = Ah[n-1] + \delta[n]$

- n = 0; $\mathrm{h}[0] = Ah[-1] + \delta[0] = 0 + 1 = 1$
- n = 1; $\mathrm{h}[1] = Ah[0] + \delta[1] = \mathrm{A}.1 + 0 = \mathrm{A}$
- n = 2; $\mathrm{h}[2] = Ah[1] + \delta[2] = \mathrm{A}.\mathrm{A} + 0 = A^2$
- n = 3; $\mathrm{h}[3] = Ah[2] + \delta[3] = \mathrm{A}.A^2 + 0 = A^3 \ldots$
- $h[n] = \begin{cases} A^n & n \geq 0 \\ 0 & n \neq \end{cases}$

Giải PTSP tuyến tính: Phương pháp nghiệm tổng quát

- Nghiệm tổng quát của PTSP: $y[n] = y_0[n] + y_p[n]$
- $y_0[n]$: nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$ (1)
- $y_p[n]$: nghiệm riêng của PTSP

Bước 1: Tìm $\boldsymbol{y_0[n] = \mathrm{A}.z^n}$. Thay vào (1): $\sum_{k=0}^{N} a_k z^{n-k} = 0$

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_N z^{n-N} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N = 0 \quad (2)$$

- Nếu (2) có **N nghiệm đơn: $\boldsymbol{z_1, z_2, \ldots, z_N}$** thì:

$$y_0[n] = A_1 z_1^n + A_2 z_2^n + \cdots + A_N z_N^n = \sum_{k=1}^{N} A_k z_K^n$$

- Nếu (2) có **nghiệm $\boldsymbol{z_1}$ là nghiệm bội $\boldsymbol{r}$** thì:

$$y_0[n] = z_1^n \sum_{j=1}^{r} A_j n^{j-1} + A_{r+1} z_{r+1}^n + \cdots + A_N z_N^n$$

Ví dụ: z_1 là nghiệm bội $r = 2$ thì: $y_0[n] = z_1^n(A_1 + A_2 n) + A_3 z_3^n + \cdots + A_N z_N^n$

Giải PTSP tuyến tính: Phương pháp nghiệm tổng quát

Bước 2: Tìm $\boldsymbol{y_p[n]}$ là nghiệm riêng của PTSP ($x[n] \neq 0$). Chọn $y_p[n]$ có dạng giống $x[n]$.

- Nếu dạng đầu vào: $x[n] = \beta^n$ ($\beta \neq z_k$) ta đặt $y_p[n] = B.\beta^n$
- Nếu dạng đầu vào: $x[n] = \beta^n$ mà $\beta = z_k$ ta đặt $y_p[n] = B.n.\beta^n$

Thay $y_p[n]$ vào PTSP để tìm B.

Bước 3: Xác định nghiệm tổng quát $y[n]$

$$y[n] = y_0[n] + y_p[n] = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} A_k z_K^n + B.\beta^n & (\beta \neq z_k) \\ \sum_{k=1}^{N} A_k z_K^n + B.n.\beta^n & (\beta = z_k) \end{cases}$$

Các hệ số A_k được xác định dựa vào điều kiện đầu.

Ví dụ

Cho hệ thống được mô tả bởi PTSP: $y[n] + 0{,}5y[n-1] = x[n]$. Xác định đáp ứng ra $y[n]$ $(n \geq 0)$ của hệ thống với đầu vào $\mathrm{x}[n] = (-0{,}8)^n u[n]$ và điều kiện đầu $y[-1] = 0$.

<u>Giải:</u>

Phương trình thuần nhất: $y[n] + 0{,}5y[n-1] = 0$.

Chọn $y_0[n]$= Az^n ta có: $z^n + 0{,}5z^{n-1} = 0 \Rightarrow z = -0{,}5$. Vậy $y_0[n]$= $\mathrm{A}(-0{,}5)^n$.

Nghiệm riêng $y_p[n]$ có dạng giống $\mathrm{x}[n]$: $y_p[n] = B.(-0{,}8)^n$.

Thay vào PTSP: $B.(-0{,}8)^n + 0{,}5.B(-0{,}8)^{n-1} = (-0{,}8)^n$

$$\Rightarrow -0{,}8\mathrm{B} + 0{,}5\mathrm{B} = -0{,}8 \Rightarrow B = 8/3 \Rightarrow y_p[n] = \frac{8}{3}(-0{,}8)^n$$

Vậy: $y[n] = y_0[n] + y_p[n] = \mathrm{A}(-0{,}5)^n + \frac{8}{3}(-0{,}8)^n$

$y[-1] = 0$ nên khi n = 0; $y[0] + 0{,}5y[-1] = (-0{,}8)^0 u[0] = 1 \Rightarrow y[0]$ =1.

$y[0] = \mathrm{A}(-0{,}5)^0 + \frac{8}{3}(-0{,}8)^0 = A + \frac{8}{3} = 1 \Rightarrow A = -5/3$. Vậy: $y[n] = \frac{-5}{3}(-0{,}5)^n + \frac{8}{3}(-0{,}8)^n$

Ví dụ

Cho hệ thống được mô tả bởi PTSP: $y[n]-3y[n-1]-4y[n-2]=x[n]+2x[n-1]$

Xác định đáp ứng ra $y[n]\ (n\geq 0)$ của hệ thống với đầu vào $\mathrm{x}[n]=4^n$ và điều kiện đầu $y[-1]=y[-2]=0$.

<u>Giải:</u>

Chọn $y_0[n]$= $\mathrm{A}z^n$ ta có: $z^2-3z-4=0\ \Rightarrow z_1=-1; z_2=4$. Vậy $y_0[n]$= $A_1(-1)^n+A_2(4)^n$.

Vì $z_2=4$ trùng với x[n] nên nghiệm riêng $y_p[n]=Bn.(4)^n$.

Thay vào PTSP: $B.n.4^n-3.B(n-1)4^{n-1}-4B(n-2)4^{n-2}=4^n+2.4^{n-1}$

$$\Rightarrow 16\mathrm{Bn}-12\mathrm{B}(\mathrm{n}-1)-4\mathrm{B}(\mathrm{n}-2)=16+8\Rightarrow B=6/5\Rightarrow y_p\ [n]=\frac{6}{5}n4^n$$

Vậy: $y[n]=y_0[n]+y_p[n]=A_1(-1)^n+A_2(4)^n+\frac{6}{5}n4^n$

$y[-1]=y[-2]=0.$ Thay vào ta có: $y[0]=1; y[1]=3y(0)+4+2=9$

$$\begin{cases} y[0]=A_1+A_2=1 \\ y[1]=A_1(-1)^1+A_2(4)^1+\frac{6}{5}(1)4^1=9 \end{cases}\Rightarrow A_1=\text{-}1/25;;A_2=26/25$$

$$y[n]=[(-1/50)\,(-1)^n+(26/25)(4)^n+\frac{6}{5}n4^n]u(n)$$

Thực hiện HTTTBB từ phương trình sai phân

Hệ thống không đệ quy

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$$

- Nếu N = 0:

$$y[n] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r] = F\{x[n], x[n-1], \dots, x[n-r]\}$$

Đáp ứng ra $y[n]$ chỉ phụ thuộc vào kích thích vào ở thời điểm hiện tại và quá khứ. Hệ thống này gọi là **hệ thống không đệ quy**.

$$y[n] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k] = h[n] * x[n]$$

- $h[n]$ nhân quả vì $h[n] = 0, mọi\ n < 0$; $L\big[h[n]\big] = [0, M] = M + 1$

Hệ thống không đệ quy chính là hệ thống có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn, ký hiệu FIR (Finite Impulse Response)

- Tính ổn định: $S = \sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| < \infty$ nên hệ thống luôn ổn định.

Hệ thống đệ quy

- Nếu N > 0:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$$

$$y[n] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

Đáp ứng ra $y[n]$ phụ thuộc vào kích thích vào ở thời điểm hiện tại và quá khứ và cả đáp ứng ra ở thời điểm quá khứ. Hệ thống này gọi là **hệ thống đệ quy**.

- Trong ví dụ trước, hệ thống có PTSP: $y[n] = Ay[n-1] + x[n]$ có $h[n] = \begin{cases} A^n & n \geq 0 \\ 0 & n \neq \end{cases}$

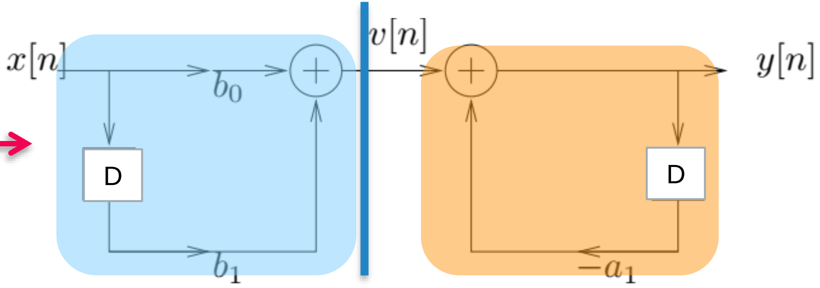
  $L\left[h[n]\right] = \infty$, đáp ứng xung có chiều dài vô hạn nên hệ thống đệ quy này còn gọi là hệ thống có đáp ứng xung chiều dài vô hạn, ký hiệu IIR (Infinite Impulse Response).

- Tính ổn định: $S = \sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| = \begin{cases} \frac{1}{1-A} & A < 1 \quad \textit{hệ thống ổn định} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-A^{n+1}}{1-A} \to \infty & A \geq 1 \quad \textit{hệ thống không ổn định} \end{cases}$

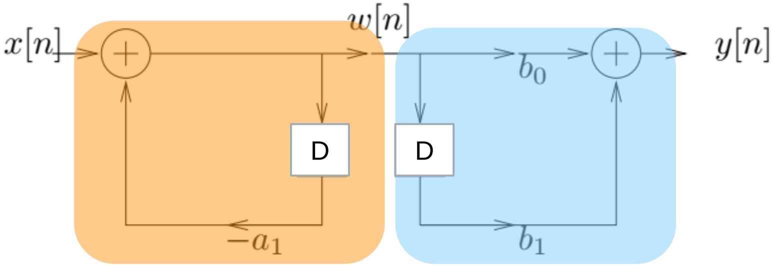
Thực hiện hệ thống – Dạng chuẩn tắc 1&2

$$y[n] = -a_1\, y[n-1] + b_0\, x[n] + b_1\, x[n-1]$$

Dạng chuẩn tắc 1

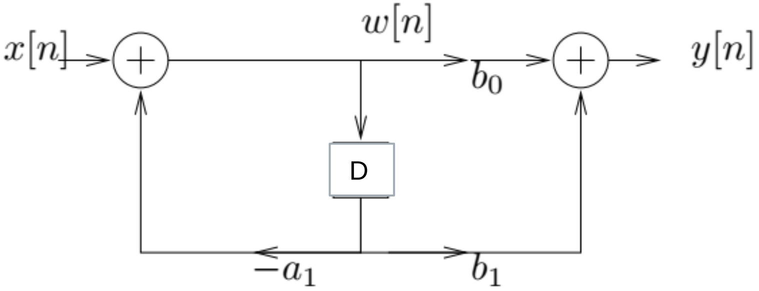


$$\begin{aligned} y[n] &= -a_1\, y[n-1] + v[n] \\ v[n] &= b_0\, x[n] + b_1\, x[n-1] \end{aligned}$$



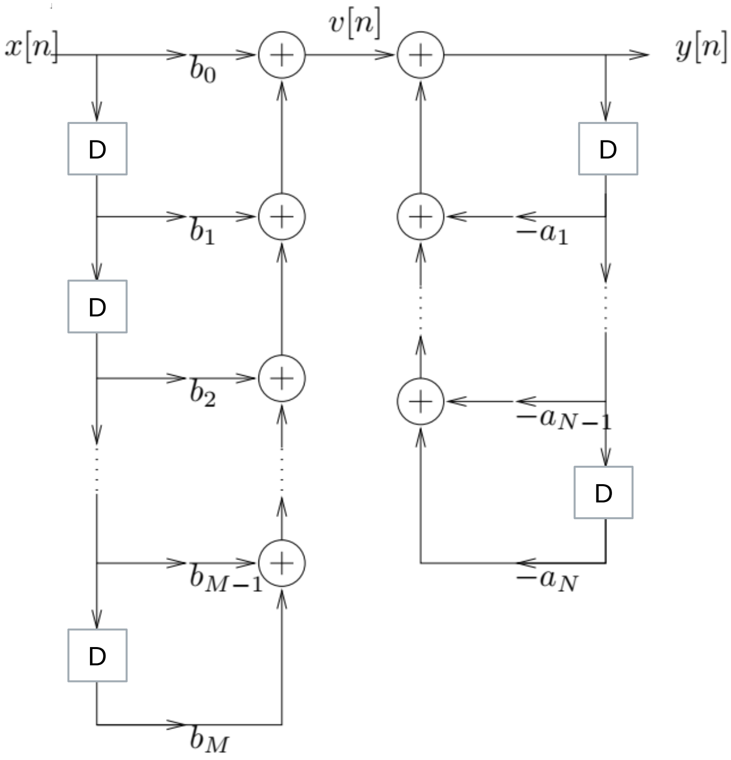
$$\begin{aligned} w[n] &= -a_1\, w[n-1] + x[n] \\ y[n] &= b_0\, w[n] + b_1\, w[n-1] \end{aligned}$$

Dạng chuẩn tắc 2



Thực hiện hệ thống – Dạng chuẩn tắc 1&2

Dạng chuẩn tắc 1



Dạng chuẩn tắc 2