Toán rời rạc 1

Discrete mathematics 1

Bài 3: Bài toán đếm

Nội dung Bài 3

1. Giới thiệu bài toán đếm
2. Các nguyên lý đếm cơ bản
3. Quy về bài toán con
4. Hệ thức truy hồi
5. Phương pháp hàm sinh
6. Bài tập

Giới thiệu bài toán đếm

- Bài toán đếm
  - Là bài toán đếm xem có bao nhiêu cấu hình tổ hợp có thể được tạo ra với những quy tắc đã nêu?
  - Lời giải thường phụ thuộc vào một số tham số ban đầu và người ta cố gắng biểu diễn những phụ thuộc này bằng những công thức toán học
- Phương pháp chung giải bài toán đếm
  - Để đếm các cấu hình đã cho, người ta tìm cách đưa về các cấu hình quen thuộc bằng cách thiếp lập một quan hệ 1-1 giữa chúng
- Ứng dụng của bài toán đếm trong khoa học máy tính
  - Ước lượng số phép toán thực hiện trong một giải thuật, chương trình máy tính
  - Ước lượng độ phức tạp thời gian và không gian của giải thuật

Các phương pháp giải quyết bài toán đếm

- Sử dụng các nguyên lý đếm cơ bản: nguyên lý cộng, nguyên lý nhân, nguyên lý bù trừ
- Qui về các bài toán con: Phân tích lời giải bài toán đếm phức tạp thành những bài toán con. Trong đó, mỗi bài toán con có thể giải được bằng các nguyên lý đếm cơ bản
- Sử dụng hệ thức truy hồi: Xây dựng công thức tính số nghiệm tổng quát bất kỳ dựa vào biểu diễn các số hạng biết trước
- Phương pháp hàm sinh: Sử dụng hàm sinh của một dãy số để đếm các cấu hình tổ hợp

Nội dung Bài 3

1. Giới thiệu bài toán đếm
2. Các nguyên lý đếm cơ bản
3. Quy về bài toán con
4. Hệ thức truy hồi
5. Phương pháp hàm sinh
6. Bài tập

Nguyên lý cộng (nhắc lại)

- Nếu A và B là hai tập rời nhau thì:

  $|A \cup B| = |A| + |B|$

- Nếu $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ là một phân hoạch của tập X thì:

  $|X| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|$

- Nếu có K việc, việc thứ i thực hiện bằng n_i cách và thực hiện một cách tuần tự.

  Khi đó sẽ có $n_1 + n_2 + \ldots + n_K$ cách lựa chọn thực hiện một việc bất kỳ trong K việc nêu trên.

- Ví dụ: Chọn 1 vận động viên - VĐV hoặc nam hoặc nữ cho vị trí VĐV tiêu biểu của năm, nữ có 3 lựa chọn từ 3 VĐV nữ xuất sắc, nam có 7 lựa chọn từ 7 VĐV nam xuất sắc.

  Vậy có 10 khả năng chọn VĐV tiêu biểu của năm.

Ví dụ 1 Nguyên lý cộng

- Đặt bài toán: Giả sử N, M là hai số tự nhiên đã xác định giá trị. Hãy cho biết giá trị của S sau khi thực hiện đoạn chương trình sau:

$$S = 0;$$

$$\text{for } (i = 1; i <= N; i++)$$
$$S++;$$

$$\text{for } (j = 1; j <= M; j++)$$
$$S++;$$

Sum Rule Principle:

Suppose some event E can occur in m ways and a second event F can occur in n ways, and suppose both events cannot occur simultaneously. Then E or F can occur in $m + n$ ways.

Ví dụ 1 Nguyên lý cộng

- Đặt bài toán: Giả sử N, M là hai số tự nhiên đã xác định giá trị. Hãy cho biết giá trị của S sau khi thực hiện đoạn chương trình sau:

  $S = 0;$

  for $(i = 1; i <= N; i++)$

  $\quad S++;$

  for $(j = 1; j <= M; j++)$

  $\quad S++;$

- Lời giải: Gọi số phép toán thực hiện trong vòng lặp thứ nhất là T_1, số phép toán thực hiện trong vòng lặp thứ hai là T_2. Vì hai vòng lặp thực hiện độc lập nhau nên theo nguyên lý cộng, giá trị của $S = T_1 + T_2 = N + M$.

Nguyên lý nhân (nhắc lại)

- Giả sử một nhiệm vụ nào đó được tách ra làm hai việc. Việc thứ nhất có thể thực hiện bằng n_1 cách, việc thứ hai thực hiện bằng n_2 cách sau khi việc thứ nhất đã được thực hiện.
  Khi đó, sẽ có $n_1 n_2$ cách thực hiện nhiệm vụ nêu trên.
- Nếu mỗi thành phần a_i của bộ có thứ tự k thành phần $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ có n_i khả năng chọn, thì số bộ được tạo ra sẽ là tích các khả năng $n_1 n_2 \dots n_k$
- Hệ quả:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \times |A_2| \dots |A_k|$$

$$|A^k| = |A|^k$$

Ví dụ 2 Nguyên lý nhân

- Bài toán: Giả sử n_1, n_2 là hai số nguyên dương đã xác định giá trị. Hãy cho biết giá trị của S sau khi thực hiện đoạn chương trình dưới đây?

```
int S = 0;
for (int i = 1; i <= n1; i++)
    for (int j = 1; j <= n2; j++)
        S++;
```

Ví dụ 2 Nguyên lý nhân

- Bài toán: Giả sử n_1, n_2 là hai số nguyên dương đã xác định giá trị. Hãy cho biết giá trị của S sau khi thực hiện đoạn chương trình dưới đây?

  $\text{int } S = 0;$

  $\text{for (int } i = 1;\ i <= n_1;\ i++)$

  $\quad \text{for (int } j = 1;\ j <= n_2;\ j++)$

  $\qquad S++;$

- Lời giải: Với mỗi giá trị của $i = 1, 2, \ldots, n_1$ thì S được cộng n_2 đơn vị. Do vậy, theo nguyên lý nhân, sau n_1 vòng lặp giá trị của $S = n_1 n_2$.

Ví dụ 3 Nguyên lý nhân

- Bài toán: Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số không chứa chữ số 1 và không có 2 chữ số nào giống nhau?
- Lời giải:

Xét số có 5 chữ số $a_1a_2a_3a_4a_5$

- a_1 có 8 cách chọn (trừ 0 và 1)
- a_2 có 8 cách chọn (trừ a_1 và 1)
- a_3 có 7 cách chọn (trừ a_1, a_2, và 1)
- a_4 có 6 cách chọn (trừ a_1, a_2, a_3, và 1)
- a_5 có 5 cách chọn (trừ a_1, a_2, a_3, a_4, và 1)

Vậy có 8×8×7×6×5 số thỏa mãn

Ví dụ 4 Nguyên lý nhân

- Bài toán: có bao nhiêu tên biến trong ngôn ngữ lập trình C có độ dài 8 ký tự và chỉ chứa hai chữ cái a, b và bắt đầu bởi aaa hoặc bbb?
- Lời giải: Tập các biến thỏa mãn đề bài được phân hoạch làm 2 tập: một tập gồm các biến bắt đầu bằng aaa, tập kia gồm các biến bắt đầu bằng bbb. Mỗi tên biến độ dài 8 bắt đầu bằng aaa (hoặc bbb) có thể được xây dựng như sau:
  - Chọn ký tự thứ 4, chọn ký tự thứ 5, …, chọn ký tự thứ 8.
  - Mỗi ký tự có 2 cách chọn: a hoặc b
  - Có tất cả $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ cách

  Toàn bộ có: $32 + 32 = 64$ biến

Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp (nhắc lại)

- Số hoán vị - số cách sắp xếp thứ tự vị trí của n phần tử: $n \times n - 1 \ldots 2 \times 1 = n!$
- Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử - số bộ sắp xếp thứ tự có lặp k phần tử trong n phần tử: n^k
- Số chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử - số bộ sắp xếp thứ tự không lặp:

$$n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Số tổ hợp chập k của n phần tử - số bộ sắp xếp không tính đến thứ tự, không lặp:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$n = 3, k = 4 \Rightarrow C_{3+4-1}^{4} = 15$$

Tổ hợp lặp

- Bài toán: Có bao nhiêu cách chọn 4 quả từ một hộp quả chứa táo, cam và lê nếu không xét thứ tự các loại quả được chọn, một loại quả có thể được chọn hơn 1 lần, và có ít nhất 4 quả mỗi loại sẵn trong hộp để chọn?

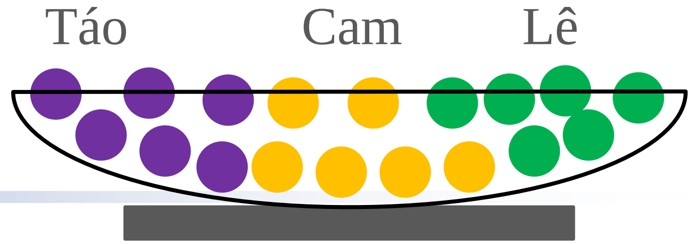
Định lý: Tổ hợp lặp

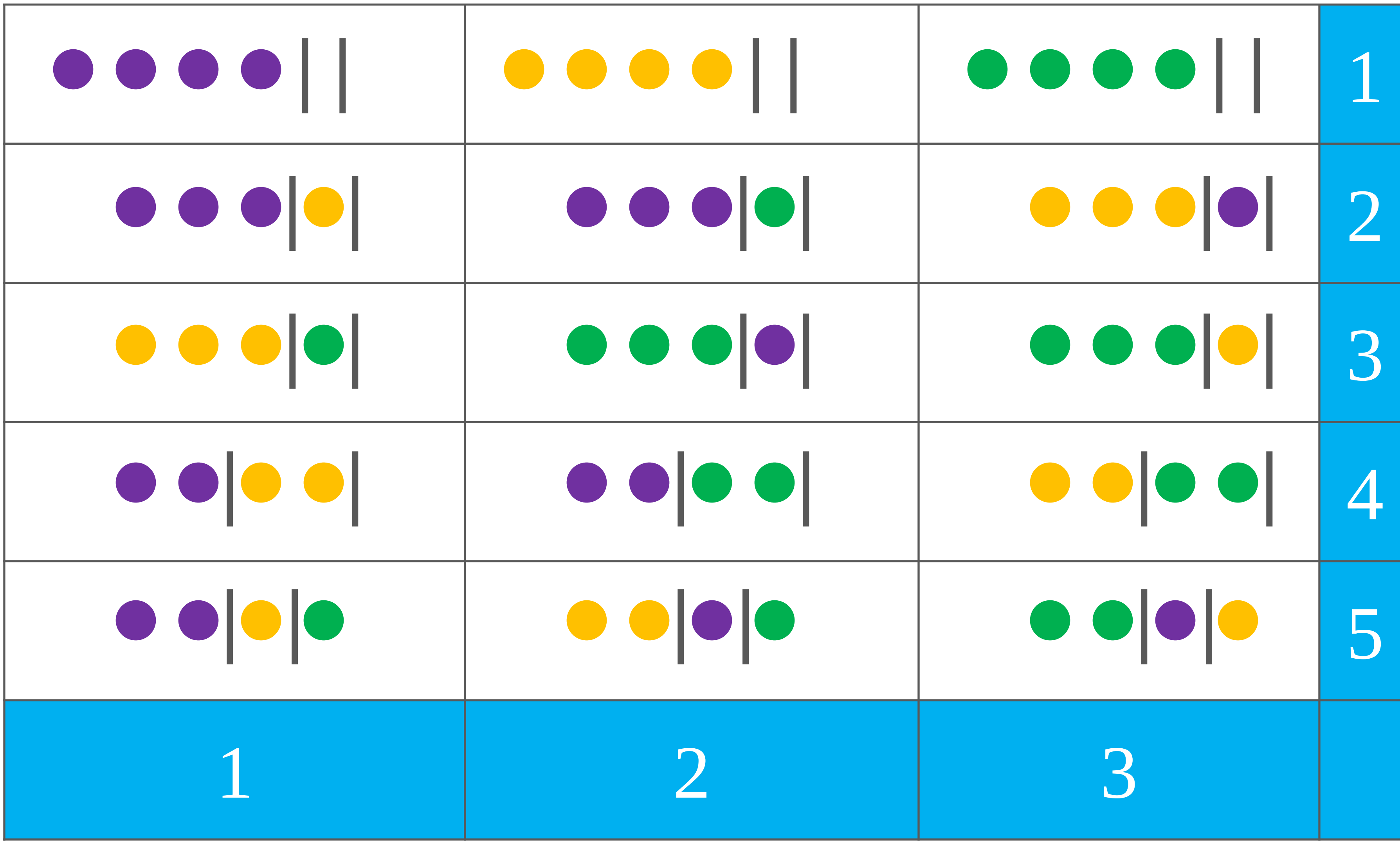
- Trường hợp tổ hợp lặp chập k phần tử của n phần tử có thể được tính như sau:

$$C(n + k - 1, k) = C(n + k - 1, n - 1)$$

Xem thêm: Kenneth Rosen 2018 *Discrete Math. & Its Applications*

Tổ hợp lặp





$$C_{13}^{11} = \frac{13 \times 12}{2} = 78$$

Ví dụ 5 Tổ hợp lặp

- Bài toán: Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?
- Gợi ý:
  - Số nghiệm nguyên không âm của phương trình bằng số cách chọn 11 phần tử từ 3 tập khác nhau chứa các số 1.
  - Ta biểu diễn 11 phần tử bằng 11 dấu * trên một đường thẳng, sử dụng 2 dấu | để chia 11 phần tử này ra thành 3 nhóm – nhóm số 1 thứ nhất, nhóm số 1 thứ hai và nhóm số 1 thứ ba.

    ** | **** | *****

  - Số dấu * trong 1 nhóm tương ứng với các nghiệm x_1, x_2, x_3.

    Các dấu * và dấu | được đánh số tạo nên 1 tập 13 vị trí khác nhau.
  - Như vậy số nghiệm của phương trình chính là số cách chọn 11 vị trí để đánh dấu * trong một dãy 13 vị trí (đánh * & |).

Ví dụ 6 Tổ hợp lặp

- Bài toán: Phương trình $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?
- Gợi ý:
  - Tương tự Ví dụ 5 ta sẽ có số nghiệm nguyên không âm của phương trình theo định lý đã nêu

$$C_{n-1+k}^{k} = \frac{(n-1+k)!}{k!\,(n-1)!}$$

hoặc

$$C_{n-1+k}^{n-1} = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)!\,k!}$$

Ví dụ 7 Tổ hợp lặp

- Bài toán: Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3$.
- Gợi ý:
  - Phương trình tương đương: $(x_1 - 1) + (x_2 - 2) + (x_3 - 3) = 5$
  - Đặt $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 - 2, y_3 = x_3 - 3$
  - Phương trình trở thành: $y_1 + y_2 + y_3 = 5$
  - Theo Ví dụ 6, số nghiệm nguyên không âm là

$$C_{3-1+5}^{5} = C_7^5 = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

Ví dụ 8 Tổ hợp lặp

- Bài toán: Phương trình $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $x_1 \geq m_1, \ldots, x_n \geq m_n$?
- Lời giải:
  - Chuyển phương trình về dạng tương đương $(x_1 - m_1) + \cdots + (x_n - m_n) = k - (m_1 + \cdots + m_n)$
  - Đặt $m = k - (m_1 + \cdots + m_n)$
  - Bài toán quy về tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình: $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = m$
  - Theo Ví dụ 6 ta có số nghiệm nguyên không âm thỏa mãn điều kiện đã cho là:

$$C_{n-1+m}^{m}$$

Ví dụ 9 Tổ hợp lặp và Nguyên lý cộng

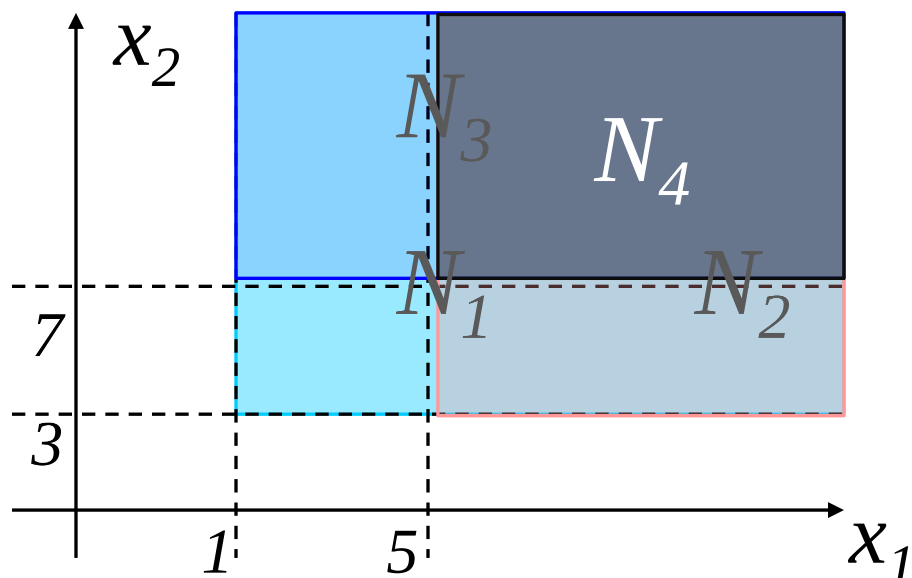
- **Bài toán**: Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn: $1 \le x_1 \le 5,\ 3 \le x_2 \le 7$?
- **Gợi ý**:
  - Gọi N_1, N_2, N_3, N_4 là số các nghiệm nguyên không âm của phương trình (1), (2), (3), (4) dưới đây.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \ge 1, x_2 \ge 3 \end{cases} \quad (1)$$

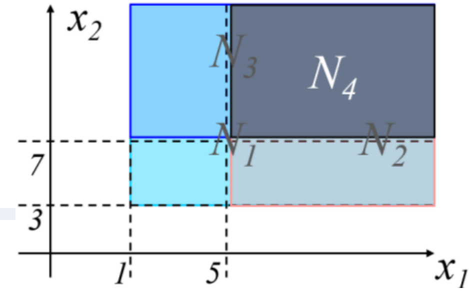
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \ge 6, x_2 \ge 3; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \ge 1, x_2 \ge 8; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \ge 6, x_2 \ge 8; \end{cases} \quad (4)$$



Ví dụ 9 Tổ hợp lặp và Nguyên lý cộng



- Bài toán: Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn: $1 \le x_1 \le 5,\ 3 \le x_2 \le 7$?
- Gợi ý:
  - Gọi N_1, N_2, N_3, N_4 là số các nghiệm nguyên không âm của phương trình (1), (2), (3), (4) dưới đây.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \ge 1, x_2 \ge 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \ge 6, x_2 \ge 3; \end{cases} \quad (2)$$

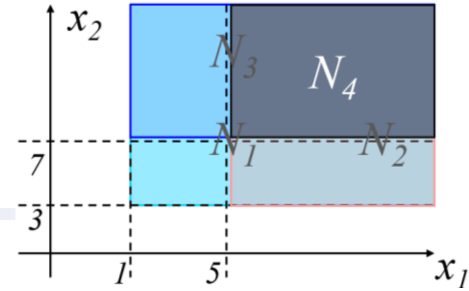
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \ge 1, x_2 \ge 8; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \ge 6, x_2 \ge 8; \end{cases} \quad (4)$$

Theo Ví dụ 8 ta có:

$$N_1 = C_{6-1+20}^{20} = C_{25}^{20} = 53130$$
$$N_2 = C_{6-1+15}^{15} = C_{20}^{15} = 15504$$
$$N_3 = C_{6-1+15}^{15} = C_{20}^{15} = 15504$$
$$N_4 = C_{6-1+10}^{10} = C_{15}^{10} = 3003$$

Ví dụ 9 Tổ hợp lặp và Nguyên lý cộng



- Bài toán: Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn: $1 \le x_1 \le 5,\ 3 \le x_2 \le 7$?
- Gợi ý:
  - Gọi N_1, N_2, N_3, N_4 là số các nghiệm nguyên không âm của phương trình (1), (2), (3), (4) dưới đây.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \ge 1, x_2 \ge 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \ge 6, x_2 \ge 3; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \ge 1, x_2 \ge 8; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \ge 6, x_2 \ge 8; \end{cases} \quad (4)$$

Vì vậy số nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$N = N_1 - N_2 - N_3 + N_4$

$= 53130 - 15504 - 15504 + 3003$

$= 25125$

Bài tập 1 Nguyên lý cơ bản

Một đợt phát hành xổ số mỗi tấm vé số gồm 2 phần:

- Phần chữ gồm 2 chữ cái nhận giá trị từ A đến Z - 26 phần tử
- Phần số gồm 4 chữ số nhận giá trị từ 0 đến 9 - 10 phần tử.

Mỗi đợt phát hành như vậy có 1 giải đặc biệt, 2 giải nhất, 5 giải nhì, và 10 giải ba.

Tính xác suất 1 tấm vé số trúng giải từ giải ba trở lên trong 2 trường hợp sau:

a. Phần chữ đứng trước phần số trong mỗi tấm vé số.

b. Phần chữ đứng tùy ý trong mỗi tấm vé số.

Bài tập 1 Nguyên lý cơ bản

Gợi ý:

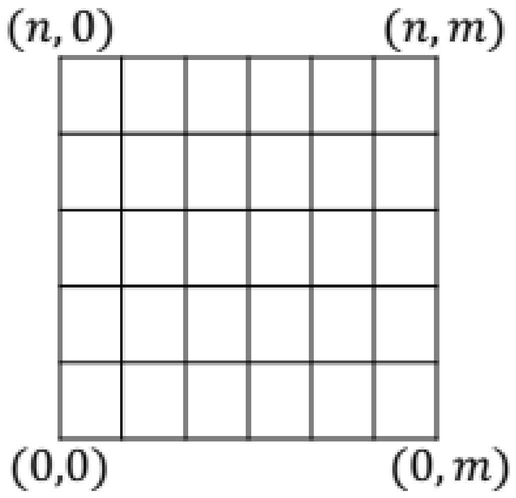
- Trường hợp a), mỗi vé số có dạng: $X_1X_2N_1N_2N_3N_4$ với
  $X_1, X_2 \in \{A\ldots Z$, 26 phần tử$\}$; $N_1, N_2, N_3, N_4 \in \{0\ldots 9$, 10 phần tử$\}$.
  X_1, X_2 lần lượt có 26 lựa chọn; $N_1\ldots N_4$ lần lượt có 10 lựa chọn.
  Tổng số bộ vé số: $S_a = 26\times 26\times 10\times 10\times 10\times 10$.
  Tổng số khả năng một vé số trúng giải từ giải 3 trở lên: 1+2+5+10 = 18.
  Do đó khả năng trúng 1 giải từ giải 3 trở lên trong trường hợp a là: $18/S_a$
- Trường hợp b) xuất phát từ trường hợp a) trong đó:
  X_1, X_2 có thêm các lựa chọn khác nhau về vị trí từ 1 đến 6.
  Khi X_1 đã chọn 1 trong 6 khả năng lựa chọn vị trí thì X_2 còn 5 khả năng.
  Khi đó ứng với mỗi bộ X_1, X_2 được lựa chọn sẽ có số khả năng tạo thêm 6×5 vị trí khác nhau.
  Tuy nhiên do tính chất đối xứng lên tổng số các vị trí khác nhau chỉ là $(1/2) \times 6 \times 5$. Vì thế tổng số bộ vé số:
  $S_b = 26\times 26\times 10\times 10\times 10\times 10\times (1/2)\times 6\times 5$.
  Do đó khả năng trúng 1 giải từ giải 3 trở lên trong trường hợp b là: $18/S_b$

Bài tập 2 Nguyên lý cơ bản

- Tính số trận đấu tại mỗi vòng chung kết World Cup bóng đá?
- Gợi ý:
  - Quy định hiện tại: 32 đội, 8 bảng vòng đầu, mỗi bảng 4 đội thi đấu vòng tròn nên có C_4^2 = 6 trận trong 1 bảng → 48 trận vòng bảng, lấy 16 đội nhất, nhì bảng.
  - Vòng 16 thi đấu loại trực tiếp các cặp Nhất – Nhì của 2 bảng xác định trước → 8 trận vòng 16, lấy 8 đội → Tổng: 56 trận.
  - Vòng 8 đội tiếp tục đấu loại trực tiếp với 4 trận theo các cặp đã xác định theo quy đinh, lấy 4 đội → Tổng: 60 trận.
  - Vòng 4 đội tiếp tục thi đấu 2 trận chọn 2 đội thắng để tranh nhất nhì, 2 đội nhì tranh giải 3, 4 → Tổng: 62 trận.
  - Thêm 2 trận cuối cùng (3, 4 và chung kết) → Tổng: 64 trận.

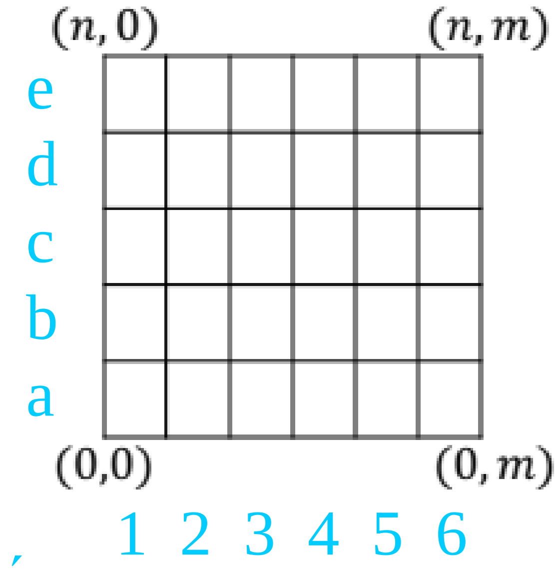
Bài tập 3

- Bài toán: Cho lưới như hình vẽ. Đánh số cột từ 0 tới m (theo chiều từ trái sang phải) và các hàng từ 0 tới n (theo chiều từ dưới lên trên).
  Có bao nhiêu cách di chuyển từ vị trí (0,0) tới vị trí (n,m) nếu ta chỉ di chuyển dọc theo cạch các ô theo chiều từ trái sang phải và theo chiều từ dưới lên trên?



Bài tập 3

- Gợi ý:
  - Ví dụ một cấu hình thỏa mãn đường đi từ (0,0) đến (n,m) phải luôn gồm tập hợp các phần tử {a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4, 5, 6} như vậy số cách đi sẽ bằng số tổ hợp (không lặp, không kể thứ tự) các cách phân phối n bước lên trên trong số n+m bước cả lên trên và bước ngang – hay cũng chính bằng số cách phân phối m bước ngang trong số n+m bước.



$$C_{n+m}^{n} = C_{m+n}^{m} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

Nguyên lý bù trừ

- Nhiều bài toán đếm phức tạp hơn có thể giải bằng nguyên lý bù trừ
- Về bản chất, nguyên lý bù trừ là trường hợp tổng quát của nguyên lý cộng
- Nguyên lý bù trừ:
  - Nếu A và B là hai tập hợp, khi đó:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

  - Tổng quát, nếu A_1, A_2, … , A_k là các tập hợp hữu hạn, khi đó:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = N_1 - N_2 + \ldots + (-1)^{k-1} N_k$$

    Trong đó, N_i là tổng của tất cả các giao của i tập lấy từ k tập đã cho

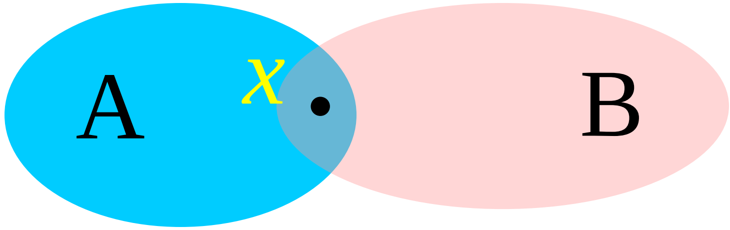
Nguyên lý bù trừ tổng quát

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{1 \le i \le n} N(A_i) - \sum_{1 \le i,j \le n} N(A_i \cap A_j)$$
$$+ \sum_{1 \le i,j,k \le n} N(A_i \cap A_j \cap A_k) \; - \ldots + (-1)^{n-1} N(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

n = 2

x: 2 lần

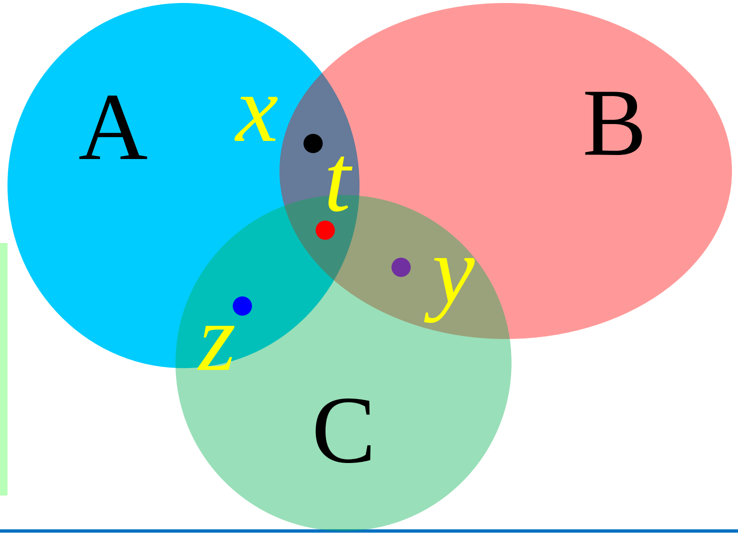
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



n = 3

x, y, z: 2 lần
t: 3 lần

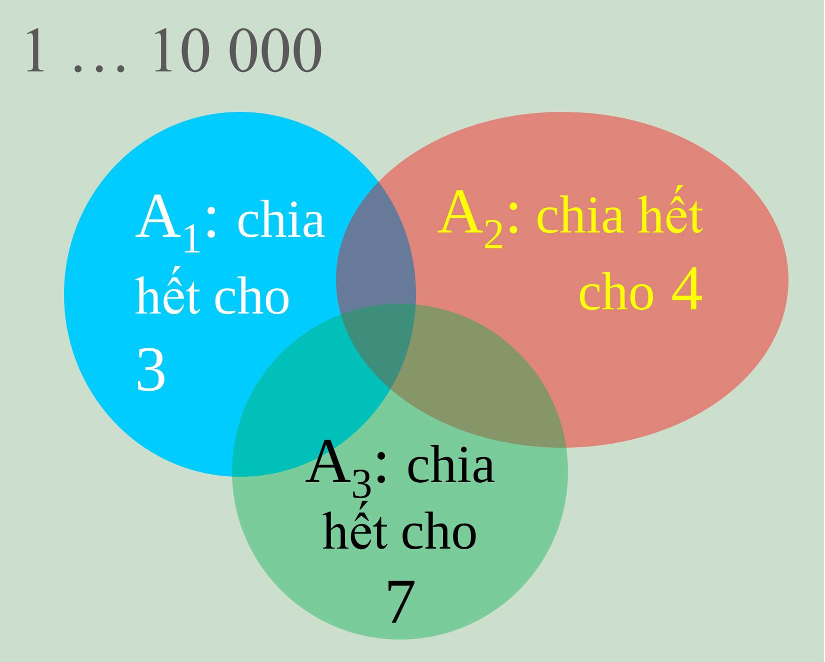
$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C)$$
$$-N(A \cap B) - N(B \cap C) - N(C \cap A)$$
$$+N(A \cap B \cap C)$$



Ví dụ 10 Nguyên lý bù trừ

- Bài toán: Trong tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 10\,000\}$ có bao nhiêu số không chia hết cho bất kỳ số nào trong các số 3, 4, 7?

- Gợi ý:
  - Gọi A_1 là tập các số thuộc X và chia hết cho 3
  - A_2 là tập các số thuộc X và chia hết cho 4
  - A_3 là tập các số thuộc X và chia hết cho 7



Khi đó

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Có thể hiểu là đếm từ 1 đến 3333 = [10000/3] rồi đem nhân với 3 thì được tất cả các số chia hết cho 3

Ví dụ 10 Ng

- Tính toán trực tiếp các giá trị ta có:

$$N_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| = \boxed{[10000/3]} + [10000/4] + [10000/7]$$
$$= \boxed{3333} + 2500 + 1428 = 7261.$$

$$N_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|$$
$$= [10000/(3*4)] + [10000/(3*7)] + [10000/(4*7)]$$ - Tìm BSCNN
$$= 833 + 476 + 357 = 1666.$$

$$N_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = [10000/(3*4*7)] = 119$$ - Tìm BSCNN

- Từ đó ta có số các số hoặc chia hết cho 3, hoặc chia hết cho 4, hoặc chia hết cho 7 là

$$N = N_1 - N_2 + N_3 = 7261 - 1666 + 119 = 5714$$

- Vậy, số các số không chia hết cho bất kỳ số 3, 4, 7 là:

$$K = 10000 - N = 4286.$$

Ví dụ 11 Nguyên lý bù trừ

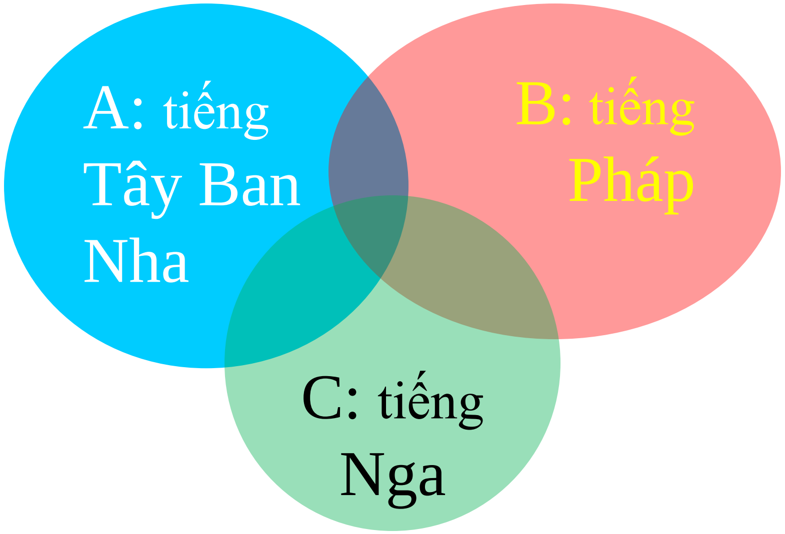
- Bài toán:
  - Biết rằng có 1232 sinh viên học tiếng Tây Ban Nha, 879 sinh viên học tiếng Pháp và 114 sinh viên học tiếng Nga, 103 sinh viên học cả tiếng Tây Ban Nha và tiếng Pháp, 23 sinh viên học tiếng Tây Ban Nha và tiếng Nga, 14 sinh viên học cả tiếng Pháp và tiếng Nga.

    Nếu tất cả có 2092 sinh viên theo học ít nhất một ngoại ngữ thì có bao nhiêu sinh viên học cả ba thứ tiếng?

Ví dụ 11 Nguyên lý bù trừ

- Bài toán:
  - Biết rằng có 1232 sinh viên học tiếng Tây Ban Nha, 879 sinh viên học tiếng Pháp và 114 sinh viên học tiếng Nga, 103 sinh viên học cả tiếng Tây Ban Nha và tiếng Pháp, 23 sinh viên học tiếng Tây Ban Nha và tiếng Nga, 14 sinh viên học cả tiếng Pháp và tiếng Nga.

    Nếu tất cả có 2092 sinh viên theo học ít nhất một ngoại ngữ thì có bao nhiêu sinh viên học cả ba thứ tiếng?



$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C)$$
$$-N(A \cap B) - N(B \cap C) - N(C \cap A)$$
$$+N(A \cap B \cap C)$$

2092 = 1232 + 879 + 114 - 103 - 23 – 14 + N(sinh viên học 3 thứ tiếng)

Ví dụ 12 Nguyên lý bù trừ (BT15/591Rosen)

- Bài toán bỏ thư:
  - Có n lá thư bỏ vào n phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các lá thư vào các phong bì. Hỏi xác suất để xảy ra không một lá thư nào bỏ đúng địa chỉ là bao nhiêu?
- Gợi ý:
  - Gọi A_i là tập các cách bỏ thư thỏa mãn lá thư thứ i đúng địa chỉ. Số cách bỏ thư thỏa mãn yêu cầu:

    $$N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = N - N_1 + N_2 - \ldots - (-1)^{n-1} N_n$$
  - Trong đó $N = n!$ là số cách bỏ thư có thể có; N_k là số tất cả các cách bỏ thư sao cho có k lá thư bỏ đúng địa chỉ.
  - Có C_n^k cách chọn ra k lá thư đúng địa chỉ, với mỗi cách chọn ra k lá thư đúng địa chỉ lại có $(n-k)!$ cách bỏ các lá thư còn lại. Do vậy $N_k = C_n^k(n-k)! = n! / k!$
  - Xác suất: $[N - N_1 + N_2 - \ldots - (-1)^{n-1} N_n] / N$

Bài tập 1 Các nguyên lý đếm cơ bản

- Có bao nhiêu cách xếp 5 người, A, B, C, D, E, đứng thành một hàng ngang sao cho A không đứng cạnh B?
- Gợi ý:
  - Cách xếp 5 người vào 5 ghế hàng ngang là một hoán vị với tổng số cách là 5!
  - Số cách sắp xếp để A và B đứng cạnh nhau là 2×4. Ứng với mỗi trường hợp A đứng cạnh B lại có 3! hoán vị cách sắp xếp C, D, E do đó tổng số cách sắp xếp khác nhau mà A và B đứng cạnh nhau là: 2×4×3!
  - Như vậy số cách sắp xếp để A và B không đứng cạnh nhau bằng:

    5! - 2×4×3!

Bài tập 2 Các nguyên lý đếm cơ bản

- Tính số lượng số có 5 chữ số sao cho có ít nhất hai chữ số giống nhau?
- Gợi ý:
  - Số lượng số có 5 chữ số là: 9×10^4
  - Tập số có 5 chữ số có ít nhất 2 chữ số giống nhau là phần bù của tập các số có 5 chữ số khác nhau trong tập các số có 5 chữ số. Như vậy cần tính số lượng các số có 5 chữ số khác nhau.
  - Số các số có 5 chữ số khác nhau được tính bằng: 9 lần chỉnh hợp không lặp của 4 chữ số (các hàng đơn vị, chục, trăm, nghìn) trong 9 chữ số từ 0 đến 9 trừ bớt chữ số hàng chục nghìn. Số lượng là: $9 \times 9!/(9-4)! = 9 \times 9!/5! = 9 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$
  - Vậy số lượng các số theo yêu cầu là: $9 \times 10^4 - 9 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$

Nội dung Bài 3

1. Giới thiệu bài toán đếm
2. Các nguyên lý đếm cơ bản
3. Quy về bài toán con
4. Hệ thức truy hồi
5. Phương pháp hàm sinh
6. Bài tập

Quy về bài toán con – bài toán đơn giản hơn

- Một phương pháp khác để giải bài toán đếm là quy về các bài toán con đơn giản hơn
- Điều này không phải lúc nào cũng dễ dàng vì ta cần phải phân tích sâu sắc các cấu hình cần đếm

Ví dụ 13 Quy về bài toán con

- Bài toán: Trong các số tự nhiên có 7 chữ số hãy đếm số các số thuận nghịch (số đối xứng) có tổng các chữ số là 18?
- Xét lời giải sau:
  - Một số thỏa mãn đề bài có dạng $x_1x_2x_3x_4x_3x_2x_1$ $(x_1 \geq 1)$ và $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x4 = 18$
  - Vì $2x_1$, $2x_2$, $2x_3$ là những số chẵn nên x_4 cũng phải là một số chẵn. Do đó x_4 có thể nhận các giá trị 0, 2, 4, 6, 8.
  - Gọi N_0, N_2, N_4, N_6, N_8 là số nghiệm của phương trình ứng với các trường hợp x_4 nhận giá trị 0, 2, 4, 6, 8. Theo nguyên lý cộng số cần tìm là $N = N_0 + N_2 + N_4 + N_6 + N_8$

Ví dụ 13 Quy về bài toán con

- Ta có N_0, N_2, N_4, N_6, N_8 là số nghiệm của các pt tương ứng:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0 = 18 \\ x_i \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_i \ge 1 \end{cases} \Rightarrow N_0$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2 = 18 \\ x_i \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_i \ge 1 \end{cases} \Rightarrow N_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4 = 18 \\ x_i \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_i \ge 1 \end{cases} \Rightarrow N_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6 = 18 \\ x_i \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_i \ge 1 \end{cases} \Rightarrow N_6$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8 = 18 \\ x_i \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_i \ge 1 \end{cases} \Rightarrow N_8$$

Nội dung Bài 3

1. Giới thiệu bài toán đếm
2. Các nguyên lý đếm cơ bản
3. Quy về bài toán con
4. Hệ thức truy hồi
5. Phương pháp hàm sinh
6. Bài tập

Hệ thức truy hồi

- Định nghĩa:
  Hệ thức truy hồi đối với dãy số $\{a_n\}$ là công thức biểu diễn a_n qua một hay nhiều số hạng đi trước của dãy, cụ thể là $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, với n nguyên và $n \geq n_0$ nào đó
  trong đó n_0 là một số nguyên không âm.
- Dãy số được gọi là lời giải hay nghiệm của hệ thức truy hồi nếu các số hạng của nó thỏa mãn hệ thức truy hồi này.

Ví dụ 14 Hệ thức truy hồi

- Cho $\{a_n\}$ là dãy số thỏa mãn hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$, với $n \geq 2$, và giả sử $a_0 = 3$, $a_1 = 5$. Tìm a_2 và a_3?
- Lời giải:
  - Từ hệ thức truy hồi ta có:

    $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2,$

    $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3.$

Mô hình hóa hệ thức truy hồi

- Sử dụng hệ thức truy hồi, ta có thể mô hình hóa được lớp rất rộng trong thực tế.
- Mỗi bài toán cụ thể ta có một phương pháp mô hình hóa khác nhau.
- Xem xét một số ví dụ áp dụng điển hình tiếp theo đây:

Ví dụ 15 Hệ thức truy hồi

- Bài toán dân số.
  - Giả sử năm 1995, dân số thế giới là 7 tỉ người. Mỗi năm, dân số thế giới tăng 3%. Hỏi dân số thế giới năm 2020?
- Lời giải:

  Gọi dân số thế giới sau n năm là P_n. Do dân số năm thứ n bằng 1.03 dân số thế giới năm thứ n-1 trước đó. Từ đó ta có công thức truy hồi cho dãy $\{P_n\}$ như sau:

  $P_n = 1.03P_{n-1}$, với $n \geq 1$ và $P_0 = 7$.

  Để tính P_n ta có thể sử dụng phương pháp lặp như sau:

  $$P_1 = 1.03 \times P_0 = 1.03.\ 7$$
  $$P_2 = 1.03 \times P1 = 1.03^2 \times 7$$
  $$\cdots$$
  $$P_n = 1.03 \times P_{n-1} = 1.03^n \times 7$$

  Từ đó ta có $P_{25} = 1.03^{25} \times 7$

Ví dụ 16 Hệ thức truy hồi

- Bài toán "lãi kép":
  - Một người gửi *X* đô la vào tài khoản của mình tại ngân hàng với lãi suất kép 11% một năm.
  - Hỏi sau 30 năm người đó có bao nhiêu tiền trong tài khoản?
- Gợi ý:
  - Số tiền trong tài khoản sau từng năm như sau

    Sau 1 năm: $X + 0.11 \times X = 1.11 \times X$

    Sau 2 năm: $1.11 \times X + 0.11 \times 1.11 \times X = 1.11 \times X \times (1 + 0.11) = 1.11^2 \times X$

    …

    Sau n năm: $1.11^n \times X$

  Với $n = 30$ ta có $1.11^{30} \times X \sim 23 \times X$

Ví dụ 17 Hệ thức truy hồi

- Họ nhà thỏ và số Fibonacci:

  Một cặp thỏ (một con đực và một con cái) được nhốt trên một hòn đảo.

  Giả sử một cặp thỏ chưa sinh sản được trước khi đầy hai tháng tuổi.

  Từ khi chúng đầy hai tháng tuổi, mỗi tháng chúng đẻ được một cặp thỏ.

  Hãy tìm công thức truy hồi tính số cặp thỏ sau *n* tháng?

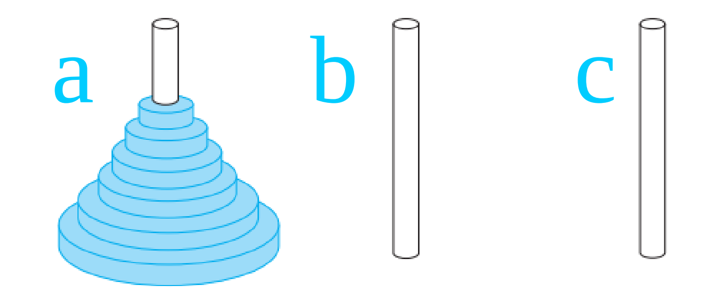
Ví dụ 17 Hệ thức tru

Số Fibonacci xuất hiện nhiều trong tự nhiên, gồm số cánh của 1 bông hoa, số hạt của một một chùm hạt như lúa, mỳ, các loài hạt chùm v.v..

- Gợi ý: Gọi f_n là số cặp thỏ sau n tháng. Dãy f_n với $n = 0, 1, 2, \ldots$ là dãy Fibonacci. Vì sau hai tháng một cặp thỏ mới sinh sản được, do vậy số thỏ của tháng hiện tại bằng số thỏ của tháng trước f_{n-1} cộng với số thỏ mới đẻ là f_{n-2}. Do vậy, dãy $\{f_n\}$ thỏa mãn hệ thức $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$; $n \geq 2$ với $f_0 = 0$, $f_1 = 1$.

		1	0	1	1
		2	0	1	1
		3	1	1	2
		4	1	2	3
		5	2	3	5
		6	3	5	8

Ví dụ 18 Hệ thức truy hồi



- Bài toán tháp Hà Nội – The Tower of Hanoi:

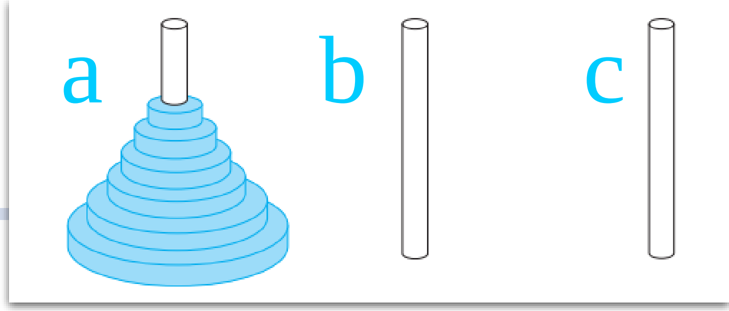
  Có ba cọc (a), (b), (c). Trên cọc (a) có n (n = 64) chiếc đĩa có đường kính giảm dần từ dưới lên.

  Cần phải dịch chuyển chồng đĩa từ cọc (a) sang cọc (c) tuân thủ theo qui tắc: mỗi lần chỉ được phép di chuyển một đĩa và chỉ được xếp các đĩa có đường kính nhỏ hơn lên đĩa có đường kính hơn.

  Trong quá trình dịch chuyển được phép sử dụng cọc (b) làm cọc trung gian.

  Bài toán đặt ra là, tìm số lần dịch chuyển ít nhất cho bài toán tháp Hà Nội?

Ví dụ 18 Hệ thức truy hồi



- Lời giải:
  - Gọi H_n là số lần dịch chuyển đĩa ít nhất từ a) sang c). Ta xây dựng công thức đệ qui để tính H_n. Rõ ràng, $H_1 = 1$. Giả sử $n \geq 2$. Khi đó việc di chuyển được thực hiện như sau:
    - (i) Chuyển $(n - 1)$ đĩa từ cọc (a) đến cọc (b) sử dụng cọc (c) làm cọc trung gian;
    - (ii) Chuyển 1 đĩa có đường kính lớn nhất từ cọc (a) đến cọc (c);
    - (iii) Chuyển $(n - 1)$ đĩa từ cọc (b) đến cọc (c) sử dụng cọc (a) làm cọc trung gian;
    - Bước (i), (iii) ta cần giải bài toán Tháp Hà Nội với với $(n - 1)$ đĩa. Bước (ii) cần dịch chuyển 1 lần. Do vậy, dãy $\{H_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi: $H_n = 2H_{n-1} + 1$. Ta có thể dùng phương pháp lặp để giải hệ thức truy hồi trên. $H_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 = 2^n - 1$.

    Nếu lấy $n = 64$ khi đó ta cần trên 500 tỉ năm mới có thể giải xong bài toán tháp Hà Nội!!!!!!!!!!!!!

Ví dụ 19 Hệ thức t

End with a 1:	Any bit string of length $n-1$ with no two consecutive 0s	1	a_{n-1}
End with a 0:	Any bit string of length $n-2$ with no two consecutive 0s	1 0	a_{n-2}
		Total:	$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

- Gọi a_n là số xâu nhị phân độ dài n không có 2 số 0 liên tiếp. Xây dựng công thức truy hồi cho a_n và tính a_6.
- Gợi ý:
  - Xét với $n \geq 3$, ta chia a_n xâu ra làm 2 trường hợp:

    1) Xâu nhị phân độ dài n kết thúc bằng số 1 thỏa mãn yêu cầu bài ra. Hơn thế, số thứ (n - 1) có thể là 0 hoặc 1.

    2) Xâu nhị phân độ dài n kết thúc bằng số 0 thỏa mãn yêu cầu bài ra, suy ra số thứ ($n-1$) phải là 1.
  - Trường hợp 1) có a_{n-1} xâu vì trước ký tự 1 có n - 1 bít và có thể kết thúc với 0 hoặc 1 ≡ Bài toán mới, xâu độ dài n - 1.
  - Trường hợp 2) có a_{n-2} xâu với lý luận như Trường hợp 1)

Vậy $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ với $a_1 = 2$; $a_2 = 3$;

Ví dụ 20 Hệ thức truy hồi

- Tính số từ mã:
  - Một hệ máy tính coi một xâu các chữ số hệ thập phân là một từ mã hợp lệ nếu nó chứa một số chẵn chữ số 0.
    Ví dụ từ 168304073 là hợp lệ, từ 103203044 là không hợp lệ.
  - Hãy tìm hệ thức truy hồi cho các từ mã hợp lệ có độ dài n?
- Gợi ý:
  - Gọi số từ mã hợp lệ độ dài n là a_n. Xét với $n \geq 2$, các từ mã gồm 2 trường hợp:

    1) Xâu $(n-1)$ chữ số đầu tiên là từ mã hợp lệ, suy ra chữ số cuối cùng khác 0. Vậy có $9a_{n-1}$ (vì ký tự cuối cùng có 9 khả năng)

    2) Xâu $(n-1)$ chữ số đầu tiên không là từ mã hợp lệ, suy ra chữ số cuối cùng là 0. Khả năng của 1 vị trí là 10, có *n - 1* vị trí, tổng khả năng số từ mã độ dài *n* - 1 cả hợp lệ, cả không hợp lệ là 10^{n-1}. Số sai = $10^{n-1} - a_{n-1}$
  - Vậy có $a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}) = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$

Bài tập

a) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân có độ dài n có ít nhất một dãy hai số 0 liên tiếp?

b) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu tìm số các xâu nhị phân có độ dài n không có dãy ba số 1 liên tiếp?

c) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu tìm số các xâu nhị phân có độ dài n không có dãy bốn số 1 liên tiếp?

d) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu tìm số các xâu nhị phân có độ dài n có ít nhất một dãy ba số 1 liên tiếp?

e) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu tìm số các xâu nhị phân có độ dài n có ít nhất một dãy bốn số 1 liên tiếp?

f) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu tìm số các xâu nhị phân có độ dài n không có dãy k số 1 liên tiếp?

g) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu tìm số các xâu nhị phân có độ dài n có ít nhất một dãy k số 1 liên tiếp?

a) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân có độ dài n có ít nhất một dãy hai số 0 liên tiếp?

Gợi ý: Gọi b_n là số xâu nhị phân có độ dài *n* và có ít nhất 1 dãy 2 số 0 liên tiếp. Điều kiện $n \geq 3$. Ta thấy:

- Nếu xâu kết thúc bằng bít 1 thì xâu $n – 1$ bít đứng trước, có chứa ít nhất 2 số 0 liên tiếp, hoàn toàn có thể kết thúc có thể kết thúc với bất kỳ bít 0 hoặc bít 1: Trường hợp này có b_{n-1} xâu như vậy

- Nếu xâu kết thúc bằng bít 0 thì cần xem xét đến bít $n – 1$:
  - Nếu xâu $n – 1$ kết thúc bằng bít 1 thì lý luận giống trên, có bn-2 xâu như vậy.
  - Nếu xâu $n – 1$ kết thúc bít 0 thì trường hợp này xâu *n* bít đương nhiên thỏa mãn và đếm luôn có 2^{n-2} xâu như vậy.

- Số xâu nhị phân dài *n*, có ít nhất 2 bít 0 liên tiếp là:

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + 2^{n-2} \text{ với } b_1 = 0; b_2 = 1;$$

0	0	1	1	1
0	0	1	0	2
1	0	0	1	3
1	1	0	0	4
0	1	0	0	5
0	0	0	1	6
1	0	0	0	7
0	0	0	0	8

Kiểm tra; $b_3 = 3$/đ; $b_4 = 8$/đ; …

Bài tập Hệ thức truy hồi

g) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu tìm số các xâu nhị phân có độ dài *n* có ít nhất một dãy *k* số 1 liên tiếp?

Gợi ý: Gọi b_n là số xâu nhị phân có độ dài *n* và có ít nhất 1 dãy *k* số 1 liên tiếp. Điều kiện $n \geq 3$. Bằng lập luận hoàn toàn như ý a) của bài tập này – lưu ý là đến *k* chữ số 1 ta sẽ có kết quả:

- Số xâu nhị phân dài *n*, có ít nhất *k* bít 1 liên tiếp là:

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + \ldots + b_{n-k} + 2^{n-k}$$

với $b_1 = 0$; $b_2 = 1$; … , $b_{k-1} = 0$; $b_k = 1$;

Phương pháp lặp giải hệ thức truy hồi

- Phương pháp:
  - Lặp đến khi gặp điều kiện đầu trong các công thức truy hồi.
- Bài tập:
  - Hãy tìm nghiệm của công thức truy hồi với điều kiện đầu dưới đây:

    a) $a_n = a_{n-1} + 2$ với $a_0 = 3$.

    b) $a_n = a_{n-1} + n$ với $a_0 = 1$.

    c) $a_n = a_{n-1} + 2n + 3$ với $a_0 = 4$.

    d) $a_n = a_{n-1} + 2n$ với $a_0 = 1$.

    e) $a_n = a_{n-1} - 2n - 3$ với $a_0 = 4$.

Phương pháp lặp giải hệ thức truy hồi

a) $a_n = a_{n-1} + 2$ với $a_0 = 3$.

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-2} + 2 + 2 \\
&= a_{n-3} + 2 + 2 + 2 \\
&= a_{n-4} + 2 + 2 + 2 + 2 \\
&\dots \\
&= a_{n-n} + \underbrace{2 + 2 + 2 + \dots + 2}_{\text{n số}} = a_0 + 2n = 2n + 3
\end{aligned}
$$

Phương pháp lặp giải hệ thức truy hồi

e) $a_n = a_{n-1} - 2n - 3$ với $a_0 = 4$.

$= a_{n-2} - 2(n - 1) - 3 - 2n - 3 = a_{n-2} - 4n - 4$

$= a_{n-3} - 2(n - 2) - 3 - 4n - 4 = a_{n-3} - 6n - 3$

$= a_{n-4} - 2(n - 3) - 3 - 6n - 3 = a_{n-4} - 8n$

$= a_{n-5} - 2(n - 4) - 3 - 8n = a_{n-5} - 10n + 5$

$= a_{n-6} - 2(n - 5) - 3 - 10n + 5 = a_{n-6} - 12n + 12$

$= a_{n-7} - 2(n - 6) - 3 - 12n + 12 = a_{n-7} - 14n + 21$

$= a_{n-8} - 2(n - 7) - 3 - 14n + 21 = a_{n-8} - 16n + 32$

…

$= a_{n-k} – 2kn + (k - 4)k$

Vậy với $k = n$ ta có:

$$a_n = a_0 – 2n^2 + (n – 4)n = 4 - 4n – n^2$$

Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất

- Định nghĩa:
  - Một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k với hệ số hằng số là hệ thức truy hồi có dạng:

    $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ (1)

    trong đó $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các hằng số và $c_k \neq 0$.
- Ta cần tìm công thức trực tiếp tính số hạng a_n thõa mãn điều kiện (1).
- Dãy số $\{a_n\}$ thỏa mãn điều kiện (1) sẽ được xác định duy nhất nếu nó thỏa mãn các điều kiện ban đầu như sau: $a_0 = C_0, a_1 = C_1, \ldots, a_{k-1} = C_{k-1}$ (2)

  trong đó $C_0, \ldots, C_{k-1}$ là các hằng số.

Ví dụ Hệ thức truy hồi

- Hệ thức truy hồi $P_n = 1.11P_{n-1}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 1
- Hệ thức truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 2
- Hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-5}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 5
- Hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + (a_{n-2})^2$ là không tuyến tính
- Hệ thức truy hồi $H_n = 2H_{n-1} + 1$ là không thuần nhất
- Hệ thức $B_n = nB_{n-1}$ không có hệ số hằng số

Phương pháp giải

- Phương pháp chung để giải các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất là tìm nghiệm dưới dạng $a_n = r^n$, trong đó r là hằng số.
- Chú ý rằng, $a_n = r^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi khi và chỉ khi

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k} \qquad (3)$$

$$\underbrace{r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0}_{\text{Phương trình đặc trưng}} \qquad (4)$$

Nếu PT đặc trưng có nghiệm phân biệt

- Định lý:
  - Cho c_1, c_2 là hai số thực. Giả sử phương trình đặc trưng:
    $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$
    có hai nghiệm phân biệt r_1, r_2.
    Khi đó, dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi:
    $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$
    khi và chỉ khi:
    $a_n = \alpha_1 {r_1}^n + \alpha_2 {r_2}^n$
    Trong đó α_1 và α_2 là các hằng số.
  - Để tìm α_1 và α_2 ta sử dụng các điều kiện ban đầu.

Ví dụ 21 Hệ thức truy hồi

- Bài toán:
  - Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ với $a_0 = 2$, $a_1 = 7$.
- Giải:
  - Bước 1: Tìm nghiệm của phương trình đặc trưng $r^2 - r - 2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 2, r_2 = -1$.
  - Bước 2: Xây dựng công thức tổng quát cho $\{a_n\}$ dạng $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$
  - Bước 3: Xác định các hằng số dựa trên điều kiện ban đầu
    $$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}$$
  - Bước 4: Hoàn chỉnh nghiệm $a_n = 3.2^n - (-1)^n$

Bài tập 1 Hệ thức truy hồi

- Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, với điều kiện ban đầu $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

Bài tập 2 Hệ thức truy hồi

- Tìm nghiệm của các hệ thức truy hồi với điều kiện đầu dưới đây

  1) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3$, $a_1 = 6$.
  2) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 2$, $a_1 = 1$.
  3) $a_n = 13a_{n-1} - 22a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3$, $a_1 = 15$.
  4) $a_n = -13a_{n-1} - 22a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3$, $a_1 = 15$.

Trường hợp nghiệm kép

- Định lý:
  - Cho c_1, c_2 là hai số thực.
    Giả sử phương trình đặc trưng: $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$
    có nghiệm kép $r_0 = r_1 = r_2$.
    Khi đó, dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi:
    $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$
    khi và chỉ khi $a_n = \alpha_1 r_0{}^n + \alpha_2 n r_0{}^n$ trong đó α_1 và α_2 là các hằng số.
  - Để tìm α_1 và α_2 ta sử dụng các điều kiện ban đầu.

Ví dụ 22 Hệ thức truy hồi

- Bài toán:
  - Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ với $a_0 = 1$, $a_1 = 6$.
- Gợi ý:
  - Bước 1: Tìm nghiệm của phương trình đặc trưng: $r^2 - 6r + 9 = 0 \Leftrightarrow r_0 = r_1 = r_2 = 3$.
  - Bước 2: Xây dựng công thức tổng quát cho $\{a_n\}$: $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n3^n$
  - Bước 3: Xác định các hằng số dựa trên điều kiện ban đầu

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

  - Bước 4: Hoàn chỉnh nghiệm $a_n = 3^n + n3^n = 3^n(1 + n)$

Bài tập Hệ thức truy hồi

- Tìm nghiệm của các hệ thức truy hồi thỏa mãn các điều kiện ban đầu sau đây:

  1) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, với $n \geq 2$ và $a_0 = 4$, $a_1 = 1$.

  2) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, với $n \geq 2$ và $a_0 = 6$, $a_1 = 8$.

  3) $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, với $n \geq 2$ và $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

  4) $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, với $n \geq 2$ và $a_0 = 3$, $a_1 = -3$.

  5) $a_n = 14a_{n-1} - 49a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3$, $a_1 = 35$.

  6) $a_n = -14a_{n-1} - 49a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3$, $a_1 = 35$.

Trường hợp nghiệm phức

- Định lý:
  - Cho c_1, c_2 là hai số thực. Giả sử phương trình đặc trưng:
    $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$
    có hai nghiệm phức liên hợp:
    $$\begin{cases} r_1 = r(\cos(\theta) + i.\sin(\theta)) \\ r_2 = r(\cos(\theta) - i.\sin(\theta)) \end{cases}$$
  - Khi đó, dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi:
    $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$
    khi và chỉ khi $a_n = r^n(\alpha_1 \cos(n\theta) + \alpha_2 \sin(n\theta))$
    Trong đó α_1 và α_2 là các hằng số.
  - Để tìm α_1 và α_2 ta sử dụng các điều kiện ban đầu.

Ví dụ 23 Hệ thức truy hồi

- Bài toán:
  - Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} - 4a_{n-2}$ với $a_1 = 4$, $a_2 = 4$.
- Gợi ý:
  - Bước 1: Tìm nghiệm của phương trình đặc trưng

$$r^2 - 2r + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 2(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)) \\ r_2 = 2(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)) \end{cases}$$

  - Bước 2: Xây dựng công thức tổng quát cho $\{a_n\}$

$$a_n = 2^n(\alpha_1 \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \alpha_2 \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right))$$

  - Bước 3: Xác định các hằng số dựa trên điều kiện ban đầu

$$\begin{cases} 2\left(\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_2\right) = 4 \\ 4\left(-\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_2\right) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = 1; \alpha_2 = \sqrt{3}$$

  - Bước 4: Hoàn chỉnh nghiệm

$$a_n = 2^n(\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right))$$

Trường hợp tổng quát

- Định lý:
  - Cho $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các số thực.
    Giả sử phương trình đặc trưng:
    $r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0$
    có k nghiệm phân biệt $r_1, r_2, \ldots, r_k$.
    Khi đó, dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi:
    $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$
    khi và chỉ khi: $a_n = \alpha_1 r_1{}^n + \alpha_2 r_2{}^n + \cdots + \alpha_k r_k{}^n$
    trong đó $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ là các hằng số.
  - Để tìm $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ta sử dụng các điều kiện ban đầu.

Bài tập Hệ thức truy hồi

- Tìm nghiệm của các hệ thức truy hồi với điều kiện ban đầu sau:
  1) $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, với $n \geq 3$, $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 15$.
  2) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$, với $n \geq 3$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$, $a_2 = 0$.
  3) $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$, với $n \geq 3$, $a_0 = 9$, $a_1 = 10$, $a_2 = 32$.
  4) $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$, với $n \geq 3$, $a_0 = 7$, $a_1 = -4$, $a_2 = 8$.

Nội dung Bài 3

1. Giới thiệu bài toán đếm
2. Các nguyên lý đếm cơ bản
3. Quy về bài toán con
4. Hệ thức truy hồi
5. Phương pháp hàm sinh
6. Bài tập

Định nghĩa và ví dụ

- Định nghĩa:
  Hàm sinh $g(x)$ của dãy số $\{h_n\}_{n\,=\,0,\,1,\,2,\ldots}$ là chuỗi vô hạn

$$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{+\infty} h_i\, x^i$$

- Hàm $g(x)$ sinh ra dãy số $\{h_n\}$ như là các hệ số của nó
- Chú ý: Trong trường hợp dãy số là hữu hạn thì ta sẽ biến nó thành dãy vô hạn bằng cách đưa vào các phần tử 0.
- Ví dụ dẫn đến hàm sinh: Hàm $g(x) = (1 + x)^n$ sinh ra dãy số là các hệ số tổ hợp C_n^k

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

Định nghĩa và ví dụ

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j = \begin{cases} \dfrac{ar^{n+1} - a}{r - 1} & \text{if } r \neq 1 \\ (n+1)a & \text{if } r = 1. \end{cases}$$

- Ví dụ: Hàm sinh của dãy số 1, 1, 1, 1, 1, 1 là:

  $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

  Theo công thức trên ta có:

  $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = (1 - x^6)/(1 - x)$

  Như vậy hàm sinh của dãy 1, 1, 1, 1, 1, 1 là:

  $G(x) = (1 - x^6)/(1 - x)$

- Tổng quát:

  Theo công thức trên với $a = 1$ ta có hàm:

  $G(x) = 1/(1 - x) = 1 + x + x^2 + \ldots$ với $|x| < 1$

  là hàm sinh của chuỗi 1, 1, 1, …

Một số khai triển thường gặp

Áp dụng các khai triển của chuỗi lũy thừa *quanh x = 0* *hay |x| < 1* ta có một số khai triển thường gặp:

$$\frac{x^k}{1-x} = x^k(1 + x + x^2 + \cdots) = x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + \cdots$$

$$\frac{1-x^{k+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k.$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$$

$$\frac{x}{1-x^2} = x(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots$$

Chúng ta quan tâm đến các biểu diễn đại số và các hệ số của a^k nên điều kiện |x| < 1 sẽ không được nhắc đến

Ví dụ mở đầu về ứng dụng hàm sinh

- Bài toán: Có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$?
- Gợi ý:
  - Vì các số 1 là giống nhau và không xét thứ tự, có đúng 1 cách lựa chọn để phân bố k số 1 cho 1 biến x_n với $n = 1 \,..\, 4$
  - Vì vậy hàm sinh cho số cách phân bố k số 1 cho biến x_n được biểu diễn như sau: $A_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots$
  - Hàm sinh cho số nghiệm của phương trình đã cho có dạng: $A(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)^4$
  - Khi đó số nghiệm của phương trình đã cho là hệ số của khai triển $A(x)$ với x^{25}
  - Phương pháp & lý luận được dùng cho nhiều bài toán tương tự

Ví dụ 24 Phu

Việc tính ra đáp số cần nhiều tính toán, nhưng có thể giải quyết trên máy tính dễ dàng!

- Bài toán:
  - Xây dựng hàm sinh giải quyết bài toán sau: Có bao nhiêu cách chọn ra n quả từ 4 loại quả táo, chuối, cam, đào, trong đó có một số chẵn quả táo, một số lẻ quả chuối, không quá 4 quả cam, và ít nhất 2 quả đào?
- Gợi ý:
  - Hàm sinh giải bài toán này như sau: $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(x + x^3 + x^5 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)$
  - Hay: $g(x) = \left[\frac{1}{1-x^2}\right]\left[\frac{x}{1-x^2}\right]\left[\frac{1-x^5}{1-x}\right]\left[\frac{x^2}{1-x}\right]$
  - Số cách cần đếm chính là hệ số của x^n trong triển khai $g(x)$ dưới dạng chuỗi lũy thừa.

Bài tập 1 Phương pháp hàm sinh

- Bài toán: Tìm hàm sinh cho số cách đổi n (nghìn đồng) sử dụng các loại giấy bạc mệnh giá 1 nghìn đồng, 5 nghìn đồng, 10 nghìn đồng, 50 nghìn đồng (giả thiết là ta có một số lượng không hạn chế mỗi loại giấy bạc).
- Gợi ý:
  - Phương trình có thể được viết dưới dạng:
    $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ với x_2, x_3, x_4 lần lượt chia hết 5, 10 và 50
  - Hàm sinh cho x_1 có dạng: $A_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$
  - Hàm sinh cho x_2 có dạng: $A_2(x) = 1 + x^5 + x^{10} + \cdots$
  - Hàm sinh cho x_3 có dạng: $A_3(x) = 1 + x^{10} + x^{20} + \cdots$
  - Hàm sinh cho x_4 có dạng: $A_4(x) = 1 + x^{50} + x^{100} + \cdots$
  - Do đó hàm sinh của phương trình đã cho: $A = A_1A_2A_3A_4$

Kết thúc Bài 3

- Câu hỏi và thảo luận