XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ
Chương 5. Tổng hợp bộ lọc số

Giới thiệu

- Định nghĩa bộ lọc số:
Một hệ thống dùng làm biến dạng sự phân bố tần số của các thành phần của một tín hiệu theo các chỉ tiêu đã cho được gọi là bộ lọc số.
- Hệ thống trong miền n: $y(n) = x(n) * h(n)$
  - $h(n)$ là đáp ứng xung của hệ thống.
- Biểu diễn trong miền z: $Y(z) = X(z) \times H(z)$
  - $H(z)$ là hàm truyền đạt của hệ thống
- Biểu diễn trong miền tần số ω: $Y(\omega) = X(\omega) \times H(\omega)$
  - $H(\omega)$ là đáp ứng tần số của hệ thống

Nhận xét

- Việc phân bố theo tần số của biên độ và pha của kích thích vào x(n) bị thay đổi tùy theo dạng của $H(\omega)$.
- Khi thay đổi $H(\omega)$ sẽ nhận được đầu ra mong muốn – Đây chính là THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ.
- Các tiêu chí khi thiết kế bộ lọc số:
  - Phải là hệ thống tuyến tính bất biến
  - Có đáp ứng tần số mong muốn
  - Có thể thực hiện về mặt vật lý: nhân quả và ổn định
- Có 2 loại bộ lọc số:
  - Bộ lọc có chiều dài hữu hạn FIR (số hệ số của đáp ứng xung là hữu hạn).
  - Bộ lọc có chiều dài vô hạn IIR (số hệ số của đáp ứng xung là hữu hạn).

BỘ LỌC SỐ IIR

Bộ lọc có đáp ứng xung vô hạn - IIR

- Bộ lọc IIR được xác định bởi phương trình sau:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_M x(n-M) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \cdots - a_N y(n-N)$$

- a_i, b_i là hệ số bộ lọc IIR.
- Áp dụng biến đổi z ta được:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^M}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^N}$$

Nhận xét

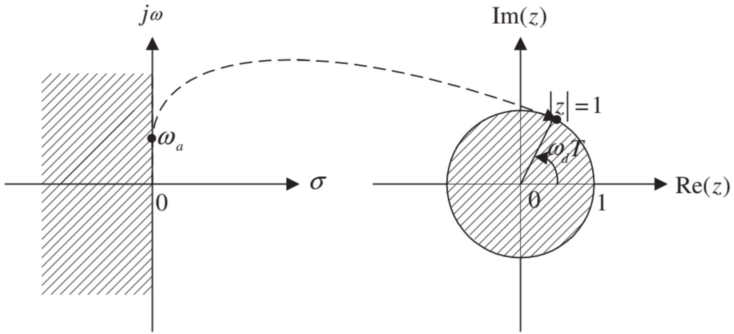
1. Đầu ra bộ lọc IIR không chỉ phụ thuộc vào đầu vào hiện tại $x(n)$ và đầu vào trong quá khứ $x(n-1)$, ..., mà còn (các) đầu ra trong quá khứ $y(n-1)$ ..., (thuật ngữ đệ quy). Hàm truyền đạt của nó là tỷ số của đa thức tử số trên đa thức mẫu số và đáp ứng xung của nó có số vô hạn các số hạng.

2. Vì hàm truyền đạt có đa thức mẫu số nên (các) cực của bộ lọc IIR được thiết kế phải nằm trong vòng tròn đơn vị trên mặt phẳng z để đảm bảo sự ổn định của nó.

3. So sánh với bộ lọc đáp ứng xung hữu hạn (FIR), bộ lọc IIR cung cấp kích thước bộ lọc nhỏ hơn nhiều. Do đó, hoạt động của bộ lọc yêu cầu số lượng tính toán ít hơn nhưng không dễ dàng thu được pha tuyến tính. Bộ lọc IIR được ưu tiên khi yêu cầu kích thước bộ lọc nhỏ nhưng ứng dụng không yêu cầu pha tuyến tính.

Các phương pháp thiết kế bộ lọc IIR

- Có nhiều phương pháp thiết kế bộ lọc IIR nhưng phổ biến nhất là biến đổi bộ lọc tương tự thành bộ lọc số.
- Cách thực hiện: tìm ra phép ánh xạ giá trị phức từ mặt phẳng s (bộ lọc tương tự) sang mặt phẳng z (bộ lọc số)
- 3 phương pháp:
  - Phương pháp bất biến xung
  - Phương pháp biến đổi song tuyến (BLT)
  - Phương pháp tương đương vi phân



Nhận xét

- HTTTBB tương tự với hàm hệ thống $H_a(s)$ sẽ ổn định khi tất cả các điểm cực phân bố bên trái của mặc phẳng s (s là biến số phức, $s = \sigma + j\omega$).
- Khi thực hiện phép biến đổi bộ lọc tương tự sang bộ lọc số:
  - Trục $j\omega$ trong mặt phẳng s sẽ ánh xạ lên đường tròn trong mặt phẳng z.
  - Nửa trái của mặt phẳng s sẽ ánh xạ vào phía trong của đường tròn đơn vị thuộc mặt phẳng z. Như vây bộ lọc tương tự ổn định sẽ được biến đổi thành bộ lọc số ổn định.
- Lưu ý: bộ lọc IIR ổn định không thể có pha tuyến tính vì để có pha tuyến tính, hàm truyền đạt của bộ lọc phải thỏa mãn điều kiện: $\boldsymbol{H(z) = \pm z^{-N} H(z^{-1})}$

Bộ lọc sẽ có điểm cực ánh xạ gương ngoài đường tròn đơn vị ứng với mỗi điểm cực trong đường tròn này. Vì thế bộ lọc sẽ không ổn định.

- Do đó, một bộ lọc IIR nhân quả và ổn định không thể có pha tuyến tính.

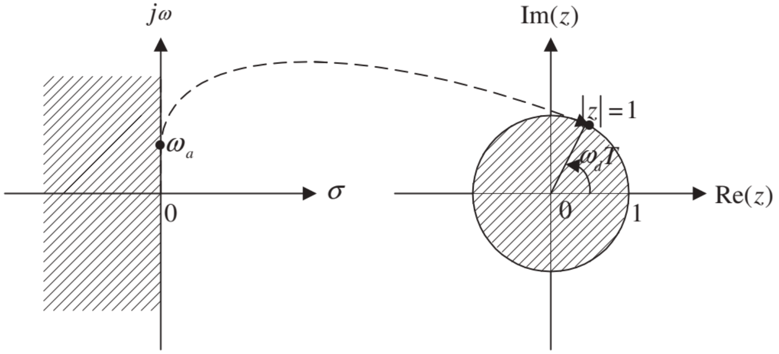
Bộ lọc tương tự

- Có thể mô tả bởi hàm hệ thống:

$$H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} \alpha_k s^k}$$

- Hay đáp ứng xung: $H_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$
- Lưu ý: Hệ thống LTI tương tự với hàm hệ thống H(s) sẽ ổn định khi và chỉ khi tất cả các điểm cực nằm ở bên trái của mặt phẳng s.

s- plane



z- plane

Phương pháp bất biến xung

- Mục đích là tổng hợp bộ lọc IIR có đáp ứng xung h(n) là phiên bản lấy mẫu của đáp ứng xung bộ lọc tương tự:

$$h(n) = h_a(nT); T \text{ là khoảng lấy mẫu}$$

- Gỉa sử $H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{s-p_k}$ với $s = p_k$ là các điểm cực của bộ lọc tương tự.

$LT\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$ nên ta có: $h_a(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{p_k t}$; $t \geq 0$

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{p_k nT}$$

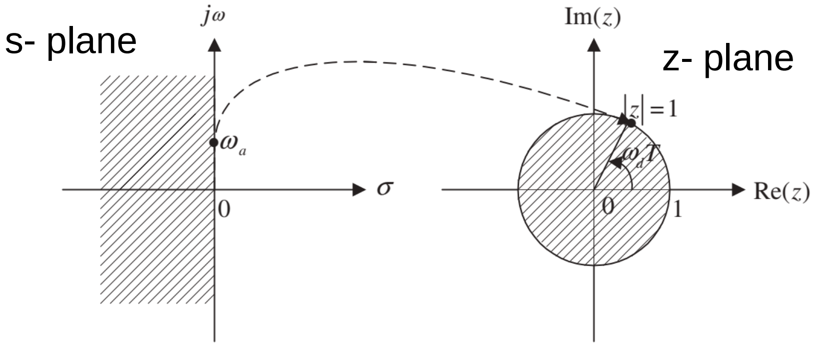
- $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=1}^{N} c_k e^{p_k nT}) z^{-n}$

Phương pháp bất biến xung

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{n=0}^{\infty} (e^{p_k T} z^{-1})^n = \sum_{k=1}^{N} c_k \frac{1}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

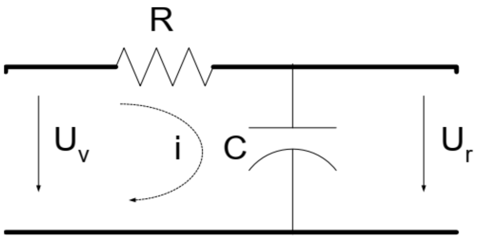
- Bộ lọc số có các điểm cực tại $z_k = e^{p_k T}; k = 1,2, \ldots, N$

- Lưu ý: Hệ thống LTI tương tự với hàm hệ thống H(s) sẽ ổn định khi và chỉ khi tất cả các điểm cực nằm ở bên trái của mặt phẳng s.



Phương pháp bất biến xung – Ví dụ 0

Cho mạch điện tương tự sau:

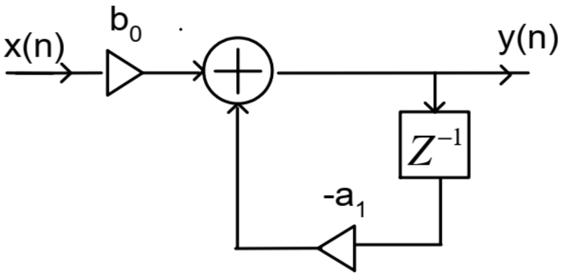


Hãy chuyển sang mạch điện số bằng phương pháp bất biến xung.

Nhắc lại các thông số cơ bản của mạch điện sau biến đổi Laplace: $Z_R(s) = R; Z_L(s) = sL; Z_C(s) = 1/sC$

$$H_a(s) = \frac{U_{ra}}{U_{vào}} = \frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}} = \frac{1}{RCs+1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}};$$

$$\mathrm{H(z)} = \sum_{k=1}^{N} c_k \frac{1}{1-e^{p_k T} z^{-1}} = \frac{\frac{1}{RC}}{1-e^{-\frac{1}{RC}T} z^{-1}} = \frac{b_0}{1+a_1 z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$



$$(b_0 = \frac{1}{RC}; a_1 = -e^{-\frac{1}{RC}T})$$

Do đó: $y(n) = b_0 \mathrm{x(n)} - a_1 \mathrm{y(n-1)}$

Phương pháp bất biến xung – Ví dụ 1

- Cho bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt như sau: $H(s) = \frac{s+0.1}{(s+0.1)^2+9}$
- Biết tần số lấy mẫu $f_s = 2\ Hz$. Biến đổi bộ lọc trên thành bộ lọc số IIR tương ứng theo phương pháp bất biến xung. Tìm hàm truyền đạt của bộ lọc số.
- Giải:
- Bộ lọc tương tự này có điểm không $s_0 = -0.1$ và hai điểm cực phân biệt $p_1 = -0.1 + j3; p_2 = -0.1 - j3$.
- Do đó: $H(s) = \frac{1/2}{s+0.1-j3} + \frac{1/2}{s+0.1+j3}$
- $H(s) = \frac{1/2}{s+0.1-j3} + \frac{1/2}{s+0.1+j3} \Rightarrow H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{1-e^{p_k T} z^{-1}} = \frac{1/2}{1-e^{-0.1T} e^{j3T} z^{-1}} + \frac{1/2}{1-e^{-0.1T} e^{-j3T} z^{-1}}$
- $H(z) = \frac{1-(e^{-0.1T} cos3T)z^{-1}}{1-(2e^{-0.1T} cos3T)z^{-1}+e^{-0.2T} z-1}$
- Thay T = 1/f_s = ½=0.5s vào H(z) ta được hàm truyền đat của hệ thống.

Phương pháp bất biến xung – Ví dụ 2

Xét hàm truyền đạt Laplace sau: $H(s) = \frac{s}{s^2+2s+5}$

Xác định H(z) sử dụng phương pháp bất biến xung nếu tốc độ lấy mẫu $f_s = 10\ Hz$

Giải: Vì $H(s)$ có điểm cực phức $s = -1 \pm 2j$, chúng ta có thể viết dưới dạng bậc 2 như sau: $H(s) = \frac{s}{s^2+2s+5} = \frac{s}{(s+1)^2+2^2}$

$$H(s) = \frac{(s+1)-1}{(s+1)^2+2^2} = \frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2} - 0.5 \times \frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

Tra bảng biến đổi Laplace, đáp ứng xung tương tự là:

$$h(t) = e^{-t}\cos(2t)\,u(t) - 0.5\ e^{-t}\sin(2t)u(t)$$

Lấy mẫu đáp ứng xung $h(t)$ sử dụng khoảng lấy mẫu $T = 0.1$ và sử dụng hệ số tỷ lệ $T = 0.1$, ta có:

Phương pháp bất biến xung – Ví dụ 2

$$Th(n) = Th(t)|_{t=nT} = 0.1e^{-0.1n}\cos(0.2n)u(n) - 0.05e^{-0.1n}\sin(0.2n)u(n).$$

- Áp dụng biến đổi z ta có:

$$\begin{aligned} H(z) &= Z[0.1e^{-0.1n}\cos(0.2n)u(n) - 0.05e^{-0.1n}\sin(0.2n)u(n)] \\ &= \frac{0.1z(z - e^{-0.1}\cos(0.2))}{z^2 - 2e^{-0.1}\cos(0.2)z + e^{-0.2}} - \frac{0.05e^{-0.1}\sin(0.2)z}{z^2 - 2e^{-0.1}\cos(0.2)z + e^{-0.2}}. \end{aligned}$$

- Sau phép biến đổi đại số ta có bộ lọc số bậc 2 như sau:

$$H(z) = \frac{0.1 - 0.09767z^{-1}}{1 - 1.7735z^{-1} + 0.8187z^{-2}}.$$

Phương pháp bất biến xung – Ví dụ 3

Xét hàm truyền đạt Laplace sau: $H(s) = \frac{2}{s+2}$

Xác định H(z) sử dụng phương pháp bất biến xung nếu tốc độ lấy mẫu $f_s = 10\ Hz$

Giải: Lấy biến đổi Laplace ngược của hàm truyền đạt tương tự ta có đáp ứng xung tương ứng là:

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{2}{s+2}\right] = 2e^{-2t}u(t)$$

Lấy mẫu đáp ứng xung $h(t)$ với $T = \frac{1}{f_s} = 0.1\ (s)$, ta có:

$$Th(n) = T2e^{-2nT}u(n) = 0.2e^{-0.2n}u(n)$$

Sử dụng bảng biến đổi z ta có:

$$Z[e^{-an}u(n)] = \frac{z}{z - e^{-a}}$$

Phương pháp bất biến xung – Ví dụ 3

Chú ý rằng $e^{-a} = e^{-0.2} = 0.8187$, hàm truyền đạt bộ lọc số H(z) sẽ là:

$$H(z) = \frac{0.2z}{z - 0.8187} = \frac{0.2}{1 - 0.8187z^{-1}}$$

Bảng biến đổi Laplace

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$		Formula
$f(t) = 1$	$F(s) = \frac{1}{s}$	$s > 0$	A
$f(t) = e^{at}$	$F(s) = \frac{1}{(s-a)}$	$s > a$	B
$f(t) = t^n$	$F(s) = \frac{n!}{s^{(n+1)}}$	$s > 0$	C
$f(t) = \sin(at)$	$F(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$	D
$f(t) = \cos(at)$	$F(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$	$s > 0$	E
$f(t) = \sinh(at)$	$F(s) = \frac{a}{s^2-a^2}$	$s > \lvert a \rvert$	F
$f(t) = \cosh(at)$	$F(s) = \frac{s}{s^2-a^2}$	$s > \lvert a \rvert$	G
$f(t) = t^n e^{at}$	$F(s) = \frac{n!}{(s-a)^{(n+1)}}$	$s > a$	H
$f(t) = e^{at}\sin(bt)$	$F(s) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$s > a$	I
$f(t) = e^{at}\cos(bt)$	$F(s) = \frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}$	$s > a$	J
$f(t) = e^{at}\sinh(bt)$	$F(s) = \frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	$s - a > \lvert b \rvert$	K
$f(t) = e^{at}\cosh(bt)$	$F(s) = \frac{(s-a)}{(s-a)^2-b^2}$	$s - a > \lvert b \rvert$	L

- Sin hyperbol:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$$

- Cos hyperbol:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$$

- Tang hyperbol:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

- Cotang hyperbol:

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

- Sec hyperbol:

$$\operatorname{sech} x = (\cosh x)^{-1} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}$$

- Cosec hyperbol:

$$\operatorname{csch} x = (\sinh x)^{-1} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$$

$x[n]$	$X(z)$
$A\delta[n]$	A
$A\delta[n-n_0]$	Az^{-n_0}
$A \cdot u[n]$	$\frac{A}{1-z^{-1}} = \frac{Az}{z-1}$
$Aa^n \cdot u[n]$	$\frac{A}{1-az^{-1}} = \frac{Az}{z-a}$
$Aa^n e^{j\omega n} \cdot u[n]$	$\frac{A}{1-ae^{j\omega}z^{-1}} = \frac{Az}{z-ae^{j\omega}}$
$Aa^n \cos(\omega n) \cdot u[n]$	$\frac{Az(z-a\cos\omega)}{z^2-(2a\cos\omega)z+a^2}$
$Aa^n \cos(\omega n + \alpha) \cdot u[n]$	$\frac{\frac{A}{2}e^{j\alpha}}{1-ae^{j\omega}z^{-1}} + \frac{\frac{A}{2}e^{-j\alpha}}{1-ae^{-j\omega}z^{-1}}$
$A\cos(\omega n) \cdot u[n]$	$\frac{Az(z-\cos\omega)}{z^2-(2\cos\omega)z+1}$
$A\sin(\omega n) \cdot u[n]$	$\frac{Az\sin\omega}{z^2-(2\cos\omega)z+1}$
$An \cdot u[n]$	$\frac{Az^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{Az}{(z-1)^2}$
$An^2 \cdot u[n]$	$\frac{Az^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3} = \frac{Az(z+1)}{(z-1)^2}$
$Ana^n \cdot u[n]$	$\frac{Aaz^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{Aaz}{(z-a)^2}$
$Aa^n \cdot u[-n-1]$	$\frac{-A}{1-az^{-1}} = \frac{-Az}{z-a}$

Cho bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt như sau:

$$H(s) = \frac{2s+5}{s^2+5s+6}$$

a) Hãy biến đổi bộ lọc trên thành bộ lọc số IIR tương ứng theo phương pháp **bất biến xung**. Biết tần số lấy mẫu $f_s = 1(Hz)$

b) Vẽ sơ đồ cấu trúc, tìm đáp ứng xung và xét tính ổn định của bộ lọc nhận được?

c) Tìm tín hiệu ra khi tín hiệu vào bộ lọc là $x(n) = 2^n.rect_2(n-1) + \delta(n)$ và điều kiện đầu $y(n) = 0$ với mọi $n < 0$?

Phương pháp biến đổi song tuyến BLT – Quy trình thiết kế

Thông số kỹ thuật bộ lọc số

↓

1. Biến đổi với sự thay đổi tần số

Thông số kỹ thuật bộ lọc tương tự

↓

2. Biến đổi nguyên mẫu thông thấp

Hàm truyền đạt bộ lọc tương tự

↓

3. Biến đổi song tuyến

Hàm truyền đạt bộ lọc số và xác minh đáp ứng tần số

Quy trình thiết kế biến đổi song tuyến

Bây giờ chúng ta có thể tóm tắt quy trình thiết kế BLT.

1. Với các thông số kỹ thuật tần số của bộ lọc kỹ thuật số, làm biến dạng trước các thông số kỹ thuật tần số kỹ thuật số cho các thông số kỹ thuật tần số tương tự.

Đối với bộ lọc thông thấp và bộ lọc thông cao: $\omega_a = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_d T}{2}\right)$

Đối với bộ lọc thông dải và chắn dải:

$$\omega_{al} = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_l T}{2}\right), \omega_{ah} = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_h T}{2}\right)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{al}\omega_{ah}},\ W = \omega_{ah} - \omega_{al}$$

Quy trình thiết kế biến đổi song tuyến

2. Thực hiện chuyển đổi nguyên mẫu bằng cách sử dụng nguyên mẫu thông thấp $H_p(s)$.

Từ thông thấp sang thông thấp: $H(s) = H_P(s)\big|_{s=\frac{s}{\omega_a}}$

Từ thông thấp sang thông cao: $H(s) = H_P(s)\big|_{s=\frac{\omega_a}{s}}$

Từ thông thấp sang thông dải: $H(s) = H_P(s)\big|_{s=\frac{s^2+\omega_0^2}{sW}}$

Từ thông thấp sang chắn dải: $H(s) = H_P(s)\big|_{s=\frac{sW}{s^2+\omega_0^2}}$

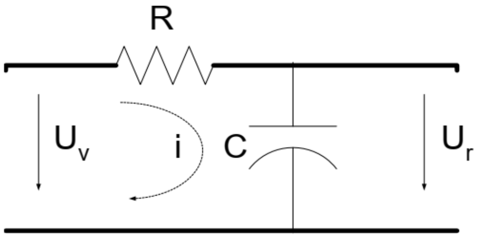
Quy trình thiết kế biến đổi song tuyến

3. Thay BLT để có được bộ lọc kỹ thuật số:

$$H(z) = H(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

Biến đổi song tuyến – Ví dụ 4

Cho mạch điện tương tự sau:

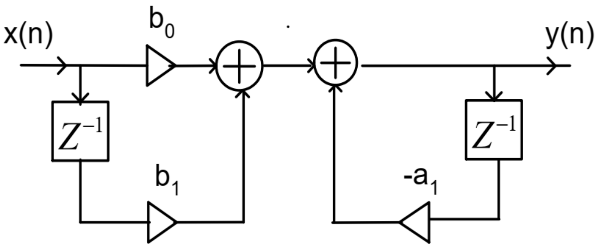


Hãy chuyển sang mạch điện số bằng phương pháp biến đổi song tuyến

$$H_a(s) = \frac{U_{ra}}{U_{vào}} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{RCs + 1}$$

$$\mathrm{H(z)} = H(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = \frac{1}{RC\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right)+1} = \frac{T(1+z^{-1})}{2RC+T+z^{-1}(T-2RC)}$$

$$\mathrm{H(z)} = \frac{\frac{T}{A}+\frac{T}{A}z^{-1}}{1+\frac{T-2RC}{A}z^{-1}};\ \left(b_0 = b_1 = \frac{T}{A};\ a_1 = \frac{T-2RC}{A};\ A = 2RC + T\right)$$



Do đó: $y(n) = b_0\mathrm{x(n)} + b_1 x(n-1) - a_1\mathrm{y(n-1)}$

Biến đổi song tuyến – Ví dụ 5

Bộ lọc thông thấp được chuẩn hóa với tần số cắt là 1rad/s là: $H_P(s) = \frac{1}{s+1}$

Sử dụng $H_p(s)$ và BLT đã cho để thiết kế bộ lọc thông thấp IIR kỹ thuật số tương ứng với tần số cắt là 15Hz và tốc độ lấy mẫu là 90Hz.

Giải:

Đầu tiên, chúng ta thu được tần số kỹ thuật số như sau:

$$\omega_d = 2\pi f = 2\pi(15) = 30\pi\,(\text{rad/s}),\ \text{and}\ T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{90}\,(\text{s})$$

1. Trước tiên hãy tính tần số tương tự được điều chỉnh trước như sau:

$$\omega_a = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_d T}{2}\right) = \frac{2}{1/90}\tan\left(\frac{30\pi/90}{2}\right)$$

$$\omega_a = 180 \times \tan(\pi/6) = 180 \times \tan(30^\circ) = 103.92\,(\text{rad/s})$$

Biến đổi song tuyến – Ví dụ 5

2. Sau đó thực hiện biến đổi nguyên mẫu (thông thấp sang thông thấp) như sau:

$$H(s) = H_P(s)\Big|_{s=\frac{s}{\omega_a}} = \frac{1}{\frac{s}{\omega_a}+1} = \frac{\omega_a}{s+\omega_a}$$

Ta được bộ lọc tương tự: $H(s) = \dfrac{103.92}{s+103.92}$

3. Áp dụng BLT tạo ra:

$$H(z) = \frac{103.92}{s+103.92}\Bigg|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

$$H(z) = \frac{103.92}{180\times\frac{z-1}{z+1}+103.92} = \frac{103.92/180}{\frac{z-1}{z+1}+103.92/180} = \frac{0.5773}{\frac{z-1}{z+1}+0.5773}$$

$$H(z) = \frac{(0.5773z+0.5773)/(1.5773z)}{(1.5773z-0.4227)/(1.5773z)} = \frac{0.3660+0.3660z^{-1}}{1-0.2679z^{-1}}$$

Biến đổi song tuyến – Ví dụ 6

Cho bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt $H(s) = \frac{1}{s+1}$. Sử dụng phương pháp biến đổi song tuyến với T=0.01 để chuyển bộ lọc đã cho thành bộ lọc số. Tìm phương trình sai phân hệ số hằng mô tả bộ lọc số thu được.

Giải:

T=0.01, sử dụng BLT ta được bộ lọc số: $H(z) = H(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$

$$H(z) = \frac{1}{s+1}\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = \frac{1}{\frac{2}{0.01}\frac{z-1}{z+1}+1} = \frac{z+1}{200(z-1)+(z+1)} = \frac{z+1}{201z-199} = \frac{1+z^{-1}}{201-199z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+z^{-1}}{201-199z^{-1}}$$

$$Y(z)(201 - 199z^{-1}) = X(z)(1 + z^{-1})$$

$$201y(n) - 199y(n-1) = x(n) + x(n-1)$$

$$y(n) - 0.99y(n-1) = 0.005x(n) + 0.005x(n-1)$$

Biến đổi song tuyến – Ví dụ 7

Cho bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt $H(s) = \frac{s}{s+2.56\times10^4}$. Sử dụng phương pháp biến đổi song tuyến với $F_s = 8000Hz$ để chuyển bộ lọc đã cho thành bộ lọc số. Tìm hàm truyền đạt của bộ lọc số thu được và phương trình sai phân tương ứng.

Giải:

Hàm truyền đạt:

$F_s = 8000Hz; T = \frac{1}{F_s} = 1/8000$, sử dụng BLT ta được bộ lọc số:

$$H(z) = \left.\frac{s}{s+2.56\times10^4}\right|_{s=\frac{2}{1/8000}\frac{z-1}{z+1}} = \frac{1.6\times10^4(z-1)}{1.6\times10^4(z-1)+2.56\times10^4(z+1)}$$

$$H(z) = \frac{1.6\,(z-1)}{1.6\,(z-1)+2.56\,(z+1)} = \frac{1.6\,(z-1)}{4.16z+0.96} = \frac{1.6\,(1-z^{-1})}{4.16+0.96z^{-1}} = \frac{0.3846-0.3846z^{-1}}{1+0.2308z^{-1}}$$

- Phương trình sai phân:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.3846-0.3846z^{-1}}{1+0.2308z^{-1}} \Leftrightarrow y(n) + 0.2308y(n-1) = 0.3846x(n) - 0.3846x(n-1)$$

Cho bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt như sau:

$$H(s) = \frac{5}{s+5}$$

a) Hãy biến đổi bộ lọc trên thành bộ lọc số IIR tương ứng theo phương pháp **biến đổi song tuyến tính**. Biết chu kỳ lấy mẫu $T_s = 2(s)$

b) Vẽ sơ đồ cấu trúc, tìm đáp ứng xung và xét tính ổn định của bộ lọc nhận được?

c) Tìm tín hiệu ra khi tín hiệu vào bộ lọc là $x(n) = 3^n.rect_3(n)$ và điều kiện đầu $y(n) = 0$ với mọi $n < 0$?

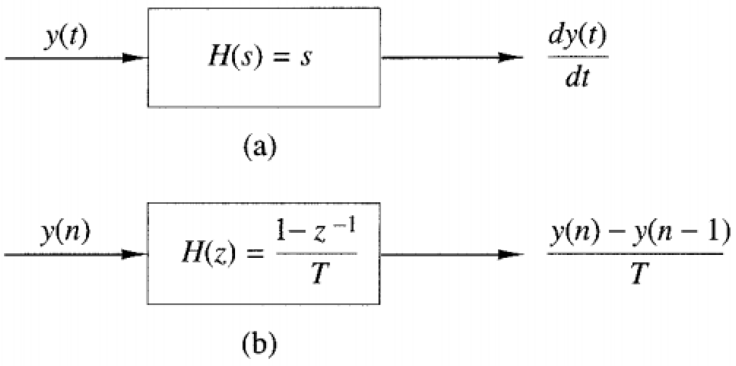
Phương pháp tương đương vi phân

- Là phương pháp thiết kế đơn giản nhất để biến đổi bộ lọc tương tự sang bộ lọc số bằng cách lấy gần đúng phương trình vi phân bằng phương trình sai phân tương ứng

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=nT} = \frac{y(nT)-y(nT-T)}{T}$$

$$= \frac{y(n)-y(n-1)}{T}$$

T là khoảng thời gian lấy mẫu



Bộ vi phân tương tự với tín hiệu ra $dy(t)/dt$ có hàm hệ thống $H(s) = s$.

Hệ thống số tạo ra tín hiệu $\frac{(y(n)-y(n-1))}{T}$ có hàm hệ thống là $H(z) = (1 - z^{-1})/T$.

Do đó $\boldsymbol{s = \frac{1-z^{-1}}{T}}$

Phương pháp tương đương vi phân

$$\left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=nT} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right]_{t=nT}$$

$$= \frac{[y(nT) - y(nT - T)]/T - [y(nT - T) - y(nT - 2T)]/T}{T}$$

$$= \frac{y(n) - 2y(n-1) + y(n-2)}{T^2}$$

$$s^2 = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{T^2} = \left(\frac{1 - z^{-1}}{T}\right)^2$$

Phương pháp tương đương vi phân

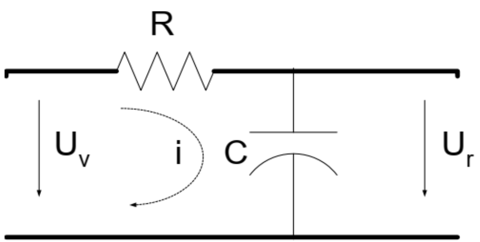
- Quan hệ ánh xạ:

$$\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{k}} = \left(\frac{\mathbf{1} - \boldsymbol{z}^{-\mathbf{1}}}{\boldsymbol{T}}\right)^{\boldsymbol{k}}$$

- Biến đổi: $H(z) = H(s)\big|_{s=\frac{(1-z^{-1})}{T}}$
- Chỉ có thể áp dụng cho bộ lọc thông thấp và thông dải với tần số cộng hưởng nhỏ.

Phương pháp tương đương vi phân – Ví dụ 8.0

Cho mạch điện tương tự sau:



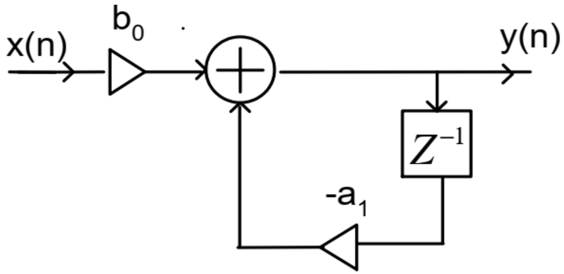
Hãy chuyển sang mạch điện số bằng phương pháp tương đương vi phân

$$H_a(s) = \frac{U_{ra}}{U_{vào}} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{RCs + 1}$$

$$\mathrm{H(z)} = H(s)\Big|_{s=\frac{(1-z^{-1})}{T}} = \frac{1}{RC\frac{(1-z^{-1})}{T}+1} = \frac{T}{T+RC-RCz^{-1}} = \frac{\frac{T}{A}}{1-\frac{RC}{A}z^{-1}}$$

$$(b_0 = \frac{T}{A};\ a_1 = \frac{-RC}{A};\ A = RC + T)$$

Do đó: $y(n) = b_0\mathrm{x(n)} - a_1\mathrm{y(n-1)}$



Cho bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt như sau:

$$H(s) = \frac{2s+7}{s^2 + 7s + 12}$$

a) Hãy biến đổi bộ lọc trên thành bộ lọc số IIR tương ứng theo phương pháp **tương đương vi phân**. Biết tần số lấy mẫu $f_s = 1(Hz)$

b) Vẽ sơ đồ cấu trúc, tìm đáp ứng xung và xét tính ổn định của bộ lọc nhận được?

c) Tìm tín hiệu ra khi tín hiệu vào bộ lọc là $x(n) = 2^n.rect_2(n) + \delta(n-2)$ và điều kiện đầu $y(n) = 0$ với mọi $n < 0$?

Phương pháp tương đương vi phân – Ví dụ 8

Biến đổi bộ lọc thông dải tương tự thành bộ lọc số

$$H(s) = \frac{1}{(s + 0.1)^2 + 9}; T = 0.1$$

Giải:

Ta có: $H(z) = H(s)\big|_{s=\frac{(1-z^{-1})}{T}} = \frac{1}{\left(\frac{1-z^{-1}}{T}+0.1\right)^2+9} = \frac{T^2/(1+0.2T+9.01T^2)}{1-\frac{2(1+0.1T)}{1+0.2T+9.01T^2}z^{-1}+\frac{1}{1+0.2T+9.01T^2}z^{-2}}$

$$H(z) = \frac{0.0090082}{1-1.81966z^{-1}+0.90082z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y(z)(1 - 1.81966z^{-1} + 0.90082z^{-2}) = 0.0090082X(z)$$

Phương trình sai phân của hệ thống:

$$y(n) - 1.81966y(n-1) + 0.90082y(n-2) = 0.0090082x(n)$$