Biểu diễn tín hiệu và hệ thống trong miền tần số liên tục

Nội dung

- Biến đổi Fourier
- Biến đổi Fourier ngược
- Tính chất của biến đổi Fourier
- Biểu diễn hệ thống rời rạc trong miền tần số liên tục

Biến đổi Fourier tín hiệu rời rạc – Định nghĩa

- **Định nghĩa**: Biến đổi Fourier của một dãy x(n) được định nghĩa như sau:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).e^{-j\omega n}$$

- Ký hiệu: $\boldsymbol{x(n) \xrightarrow{FT} X(e^{j\omega}); X(e^{j\omega}) = FT\{x(n)\}}$

$$e^{j\omega} = cos\omega + jsin\omega$$

Do đó $\boldsymbol{X}(e^{j\omega})$ tuần hoàn với chu kỳ 2π nên khi thể hiện $\boldsymbol{X}(e^{j\omega})$ ta chỉ cần thể hiện với dải từ 0 đến 2π hoặc từ - π đến π rồi lấy tuần hoàn.

- **Sự tồn tại của biến đổi Fourier:**

Biến đổi Fourier của một dãy x(n) sẽ tồn tại nếu và chỉ nếu $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)| < \infty$ (hay chuỗi $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|$ hội tụ)

Các cách biểu diễn $\boldsymbol{X}(e^{j\omega})$

- Trong mặt phẳng phức:

$$X(e^{j\omega}) = Re[X(e^{j\omega})] + jIm[X(e^{j\omega})]$$

- Trong tọa độ cực (modul và argument):

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|\ e^{j arg[X(e^{j\omega})]}$$

  - $|X(e^{j\omega})| = \sqrt{(Re[X(e^{j\omega})])^2 + (Im[X(e^{j\omega})]\ )^2}$ - modul; phổ biên độ
  - $\varphi(\omega) = arg[X(e^{j\omega})]$ - phổ pha của tín hiệu

- Biểu diễn theo độ lớn và pha:

$$X(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})\ e^{j\theta(\omega)}$$

  - $A(e^{j\omega})$: độ lớn của tín hiệu, có thể âm hoặc dương $|A(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$
  - $\theta(\omega)$: pha của tín hiệu; $\theta(\omega) = \varphi(\omega)$ khi $A(e^{j\omega}) \geq 0$
    $\theta(\omega) = \varphi(\omega) - \pi$ khi $A(e^{j\omega}) < 0$

Ví dụ: biểu diễn $\boldsymbol{X}(e^{j\omega})$

- Cho phổ tín hiệu: $X(e^{j\omega}) = sin3\omega . e^{-j\frac{\omega}{2}}$

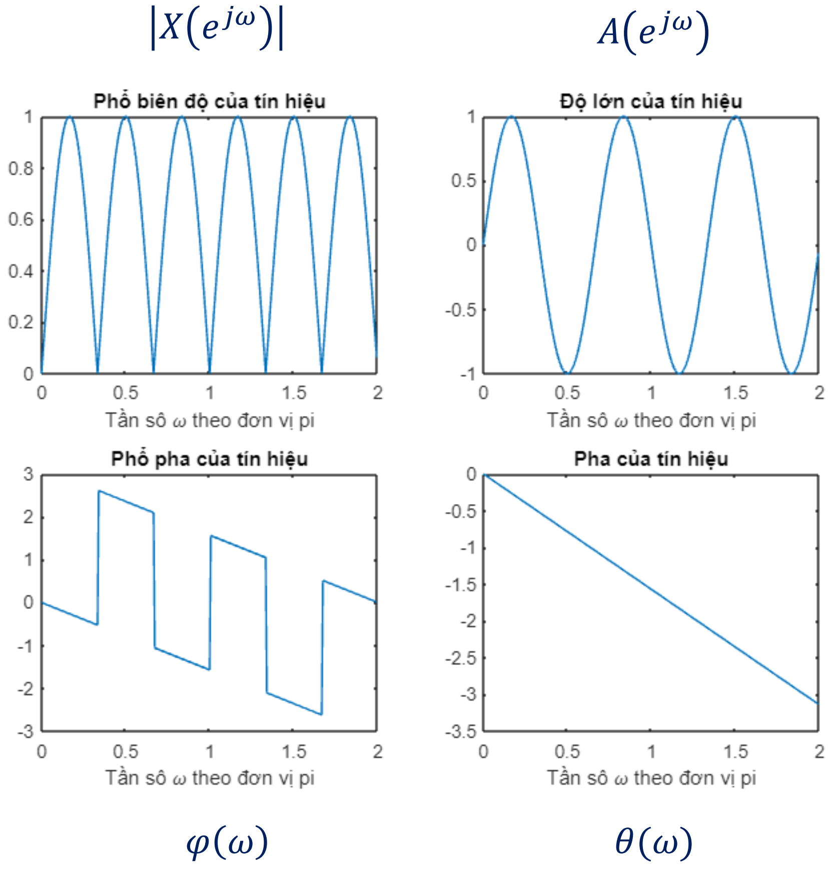
  Hãy xác định $A(e^{j\omega})$; $\theta(\omega)$; $|X(e^{j\omega})|$; $\varphi(\omega)$

Giải:

$$A(e^{j\omega}) = sin3\omega; \ |X(e^{j\omega})| = |sin3\omega|;$$

$$\theta(\omega) = -\frac{\omega}{2}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\omega}{2} & khi \ \ sin3\omega \geq 0 \\ -\frac{\omega}{2} + \pi & khi \ \ sin3\omega < 0 \end{cases}$$



Ví dụ biến đổi Fourier

Hãy tìm biến đổi Fourier của các dãy sau đây:

$x_1(n) = \delta(n);\ x_2(n) = \delta(n+1) + \delta(n-1);\ x_3(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n);\ x_4(n) = 2^n u(n)$

Giải:

$$X_1(e^{j\omega}) = FT[x_1(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)e^{-j\omega n} = 1.e^{-j\omega n}\Big|_{n=0} = 1$$

$$X_2(e^{j\omega}) = FT[x_2(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(n+1) + \delta(n-1)]e^{-j\omega n} = e^{j\omega} + e^{-j\omega} = 2.cos(\omega)$$

$$X_3(e^{j\omega}) = FT[x_3(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \left(\left|\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right|<1\right)$$

$$X_4(e^{j\omega}) = FT[x_4(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2)^n u(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2e^{-j\omega}\right)^n$$

Do $\left|2e^{-j\omega}\right| = |2cos\omega - j2sin\omega| = \sqrt{(2cos\omega)^2 + (2sin\omega)^2} = 2 > 1$ nên chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2e^{-j\omega}\right)^n$ không hội tụ. Vậy không tồn tại biến đổi Fourier cho $x_4(n)$.

Biến đổi Fourier ngược

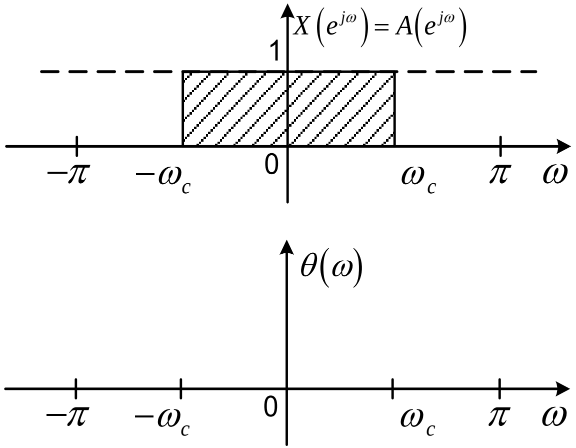
- Biến đổi Fourier ngược của phổ tín hiệu $X(e^{j\omega})$ được định nghĩa như sau:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

- Ký hiệu: $IFT\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right] = x(n);$ $\quad X\left(e^{j\omega}\right) \xrightarrow{IFT} x(n)$
- Ví dụ: Cho phổ tín hiệu

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} 1 & -\omega_c < \omega < \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases} \quad (-\pi \leq \omega_c \leq \pi)$$

Hãy xác định $x(n)$



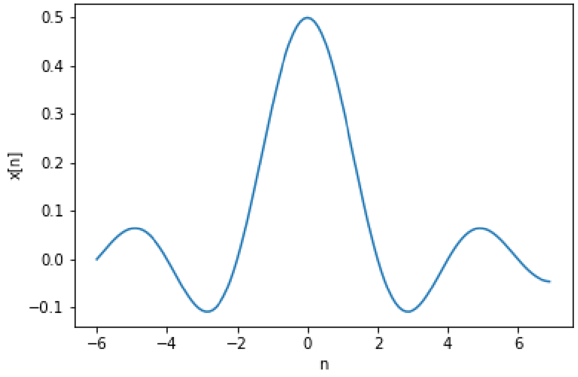
Giải: $x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi jn}e^{j\omega n}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}$

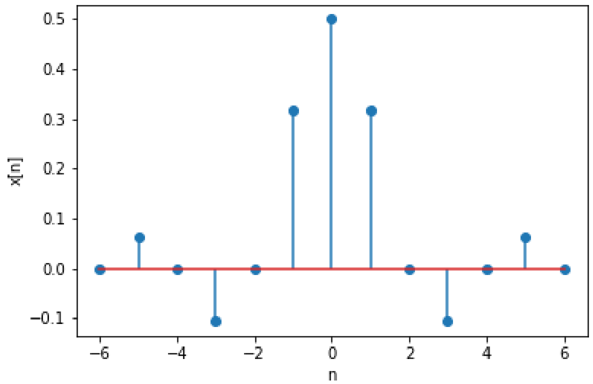
$$x(n) = \frac{1}{2\pi jn}\left(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}\right) = \frac{1}{\pi n}\sin\omega_c n$$

$$x(n) = \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c n}{\omega_c n} \quad \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\right)$$

Biến đổi Fourier ngược

- $x(n) = \frac{\omega_c}{\pi}\frac{sin\omega_c n}{\omega_c n} = \frac{1}{2}\frac{sin\frac{\pi}{2}n}{\frac{\pi}{2}n}$ (với $\omega_c = \frac{\pi}{2}$)
- $n = 0; x(0) = \frac{1}{2}$
- $n = 1; x(1) = \frac{1}{2}\frac{sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi} = x(-1)$
- $n = 2; x(2) = \frac{1}{2}\frac{sin\frac{\pi}{2}2}{\frac{\pi}{2}2} = 0 = x(-2)$
- Nhận xét:
  - $x(n)$ đối xứng qua trục tung, pha cũng đối xứng.
  - Pha bằng không nên tâm đối xứng nằm tại n = 0 (gốc tọa độ)
  - $x(n)$ đối với tín hiệu thực có tính đối xứng vì phổ đối xứng.





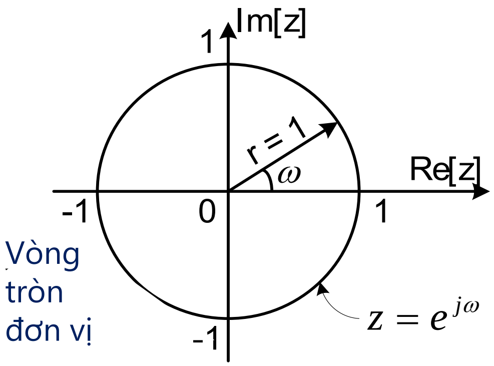
Tính chất của biến đổi Fourier

Tính chất	Miền n	Miền ω
Định nghĩa	$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).e^{-j\omega n}$
Tuyến tính	$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(e^{j\omega}) + \mathrm{b}X_2(e^{j\omega})$
Trễ miền thời gian	$x(n - n_0)$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
Tính đối xứng	$x(n)$ là thực (tính chất đối xứng)	$X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$
Tích chập trong miền n	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$
Tích chập trong miền tần số	$x_1(n).x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{-j(\omega-\omega')})X_2(e^{j\omega'})d\omega'$
Vi phân trong miền tần số	$nx(n)$	$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Dịch tần số	$e^{j\omega_0 n}$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Tính chất điều chế	$x(n)cos\omega_0 n$	$\frac{1}{2}[X(e^{j(\omega-\omega_0)}) + X(e^{j(\omega+\omega_0)})]$
Định lý Weiner Khinchine	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n).x_2^*(n)$	$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega})X_2^*(e^{j\omega})d\omega$
Quan hệ Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x(n)\rvert^2$	$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 d\omega$

Quan hệ giữa biến đổi Fourier và biến đổi Z

- Theo định nghĩa biến đổi z: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n}$
- Z là biến số phức và khi biểu diễn theo tọa độ cực: $z = r\, e^{j\omega}$
- Nếu đánh giá biến đổi z trên vòng tròn đơn vị ($r = 1$) ta có:

$$X(z)\big|_{z=r\, e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega})$$



Nhận xét:

- Biến đổi Fourier chính là biến đổi z được thực hiện trên vòng tròn đơn vị.
- Như vậy, biến đổi Fourier chỉ là trường hợp riêng của biến đổi z.

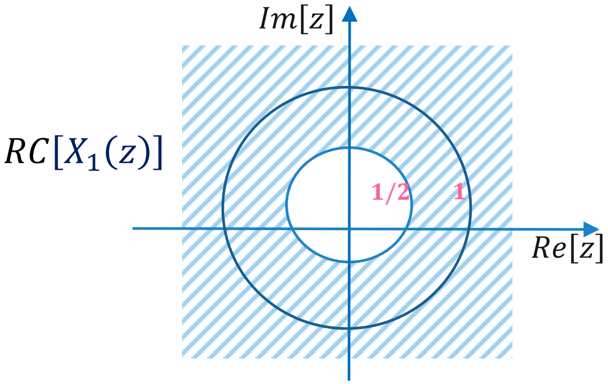
➔ chúng ta có thể tìm biến đổi Fourier từ biến đổi Z bằng cách đánh giá ZT trên vòng tròn đơn vị với điều kiện vòng tròn đơn vị phải nằm trong miền hội tụ của biến đổi Z.

Ví dụ: Tìm biến đổi Fourier từ biến đổi Z

- Hãy tìm biến đổi Fourier từ biến đổi z sau:

$a.\quad X_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}};\ |z| > \frac{1}{2}$

$b.\quad X_2(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}};\ |z| > 2$

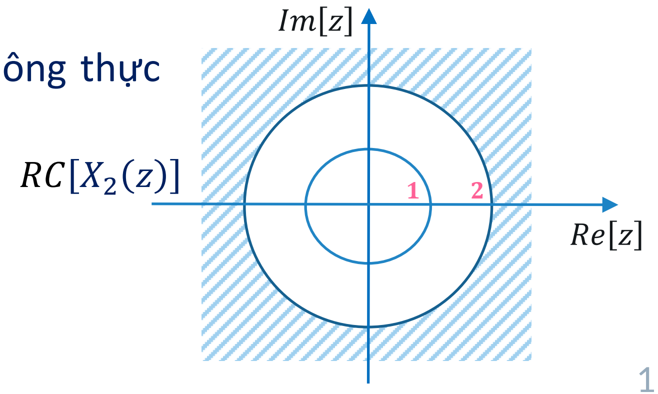


Giải:

a. Kiểm tra thấy vòng tròn đơn vị có nằm trong miền hội tụ.

Ta có biến đổi Fourier: $X_1\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

b. Vòng tròn đơn vị không nằm trong miền hội tụ nên ta không thực hiện được biến đổi Fourier.



Biểu diễn hệ thống rời rạc trong miền tần số liên tục

Đáp ứng tần số của hệ thống

- Trong miền tần số ω:

$x(n) \xrightarrow{FT} X(e^{j\omega})$;

$y(n) \xrightarrow{FT} Y(e^{j\omega})$;

$\mathrm{h}(n) \xrightarrow{FT} H(e^{j\omega})$

$$X(e^{j\omega}) \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow Y(e^{j\omega})$$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$\Leftrightarrow \ Y\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\Rightarrow \ \boldsymbol{H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)} = \mathbf{FT[h(n)]}}$$ **- Đáp ứng tần số của hệ thống**

$H\left(e^{j\omega}\right)$ đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống trong miền tần số.

Các cách thể hiện $H(e^{j\omega})$

- Trong mặt phẳng phức:

$$H(e^{j\omega}) = Re[H(e^{j\omega})] + jIm[H(e^{j\omega})]$$

- Trong tọa độ cực (modul và argument):

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|\, e^{jarg[H(e^{j\omega})]}$$

  - $|H(e^{j\omega})| = \sqrt{(Re[H(e^{j\omega})])^2 + (Im[H(e^{j\omega})]\,)^2}$ - Đáp ứng tần số của biên độ (đáp ứng biên độ)
  - $\varphi(\omega) = arg[X(e^{j\omega})]$ - Đáp ứng tần số của pha (đáp ứng pha)

- Biểu diễn theo độ lớn và pha:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})\, e^{j\theta(\omega)}$$

Các bộ lọc lý tưởng

Các bộ lọc chọn lọc tần số

- Thuật ngữ bộ lọc để miêu tả thiết bị có khả năng phân biệt và cho đi qua tùy thuộc vào một số thuộc tính của đối tượng đầu vào.
- Các hệ thống LTI cũng thực hiện một loại phân biệt hay lọc theo các thành phần tần số đầu vào khác nhau.
- Bản chất của hoạt động lọc này được quyết định bởi đáp ứng tần số $H\left(e^{j\omega}\right)$ và đại lượng này lại phụ thuộc vào việc chọn lựa các tham số hệ thống (các hệ số a_k, b_l trong phương trình sai phân của hệ thống).
- Vì vậy, với việc lựa chọn các hệ số một cách phù hợp, chúng ta có thể thiết kế các bộ lọc chọn lọc tần số - các bộ lọc này sẽ cho qua tín hiệu với các thành phần tần số trong một dải nào đó và làm suy hao các tín hiệu chứa các thành phần tần số ở các dải khác.
- Hệ thống LTI thay đổi phổ tín hiệu đầu vào $X(\omega)$ theo đáp ứng tần số $H(\omega)$ để tạo ra tín hiệu đầu ra với phổ $Y(\omega)$. $H(\omega)$ đóng vai trò là hàm định hình phổ cho các thành phần tần số khác nhau trong tín hiệu đầu vào.
- Bộ lọc được sử dụng rất nhiều trong XLTHS với nhiều cách khác nhau: loại bỏ nhiễu không mong muốn trong các tín hiệu mong muốn, tách tín hiệu trong radar, phân tích phổ tín hiệu…

Nội dung

- Bộ lọc thông thấp lý tưởng (LPF – Low Pass Filter)
- Bộ lọc thông cao lý tưởng (HPF – High Pass Filter)
- Bộ lọc thông dải lý tưởng (BPF – Band Pass Filter)
- Bộ lọc chắn dải lý tưởng (BSF – Band Stop Filter)

Nhắc lại

- Biến đổi Fourier cho tín hiệu rời rạc:

$$X(e^{j\omega}) = X(\omega)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).e^{-j\omega n}$$
$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

- Một số ví dụ cụ thể hữu ích:

$$f(n) = \delta(n) \leftrightarrow F(\omega) = 1$$
$$g(n) = \delta(n - n_0) \leftrightarrow G(\omega)$$
$$= e^{-j\omega n_0}$$

Các tính chất quan trọng của FT:

- Tuần hoàn:

$$X(\omega + 2\pi) = X(\omega)$$

- Tuyến tính:

$$z(n) = ax(n) + by(n)$$
$$\leftrightarrow Z(\omega) = aX(\omega) + bY(\omega)$$

- Trễ thời gian:

$$x(n - n_0) \leftrightarrow e^{j\omega n_0}X(\omega)$$

- Trễ tần số:

$$e^{j\omega_0 n}\,x(n) \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

- Bộ lọc là phép chập:

$$y(n) = x(n) * h(n) \leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

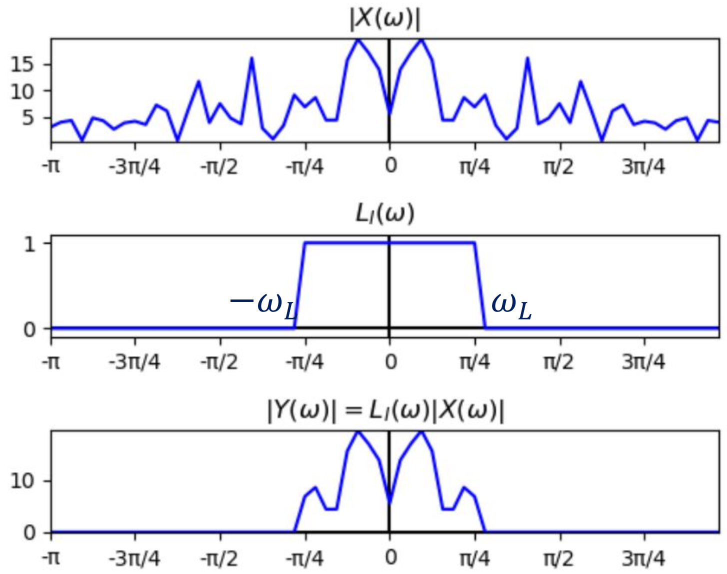
Bộ lọc thông thấp lý tưởng (LPF)

- Định nghĩa "lý tưởng" tùy thuộc vào từng ứng dụng. Hãy bắt đầu với nhiệm vụ của một bộ lọc thông thấp. Bắt đầu bằng định nghĩa một bộ lọc thông thấp: $Y(\omega) = X(\omega) * L_I(\omega)$ như sau:

$$Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & |\omega| \leq \omega_L \\ 0 & \omega\ khác \end{cases}$$

- Ở đó ω_L là tần số cắt chúng ta chọn. Ví dụ, để giảm nhiễu cho tín hiệu tiếng nói chúng ta có thể chọn $\omega_L = 2\pi 2400/F_s$ bởi vì hầu hết năng lượng tiếng nói ở dưới 2400Hz. Định nghĩa này trở thành:

$$L_I(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_L \\ 0 & \omega\ khác \end{cases}$$

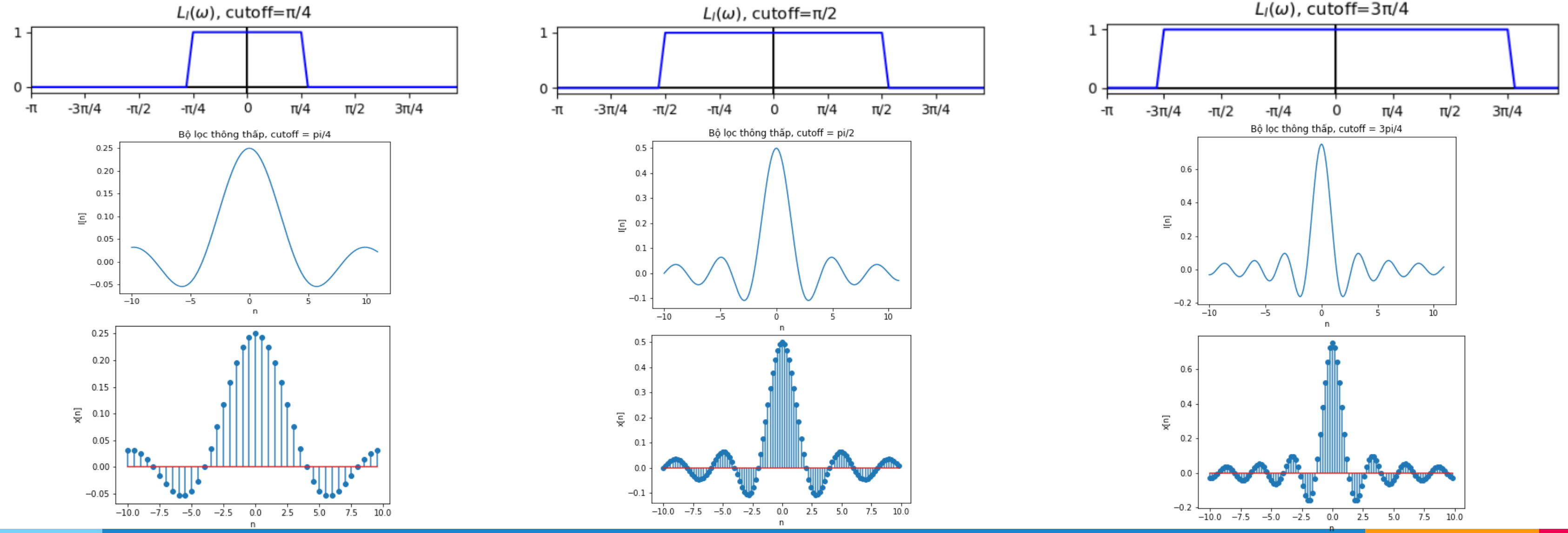


Biến đổi Fourier ngược của $L_I(\omega)$

- Bộ lọc LPF lý tưởng là: $L_I(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_L \\ 0 & \omega\ khác \end{cases}$
- Biến đổi Fourier ngược là: $l_I(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} L_I(\omega)e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_L}^{\omega_L} e^{j\omega n}d\omega$

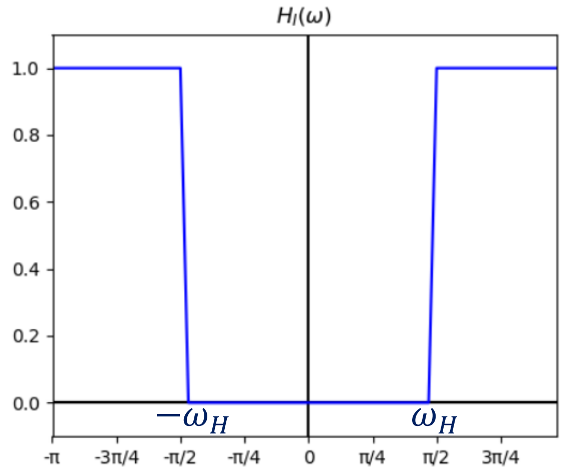
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{jn}\right)\left(e^{j\omega n}\right)\Big|_{-\omega_L}^{\omega_L} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{jn}\right)(2j\sin\omega_L n)$$

$$\Longrightarrow l_I\ (n) = \frac{\sin(\omega_L n)}{\pi n} = \frac{\omega_L}{\pi}\frac{\sin(\omega_L n)}{\omega_L n}.\quad \text{Do } \lim_{n\to 0}\frac{\sin(\omega_L n)}{\omega_L n} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to 0} l_I(n) = \frac{\omega_L}{\pi} = l_I(0)$$



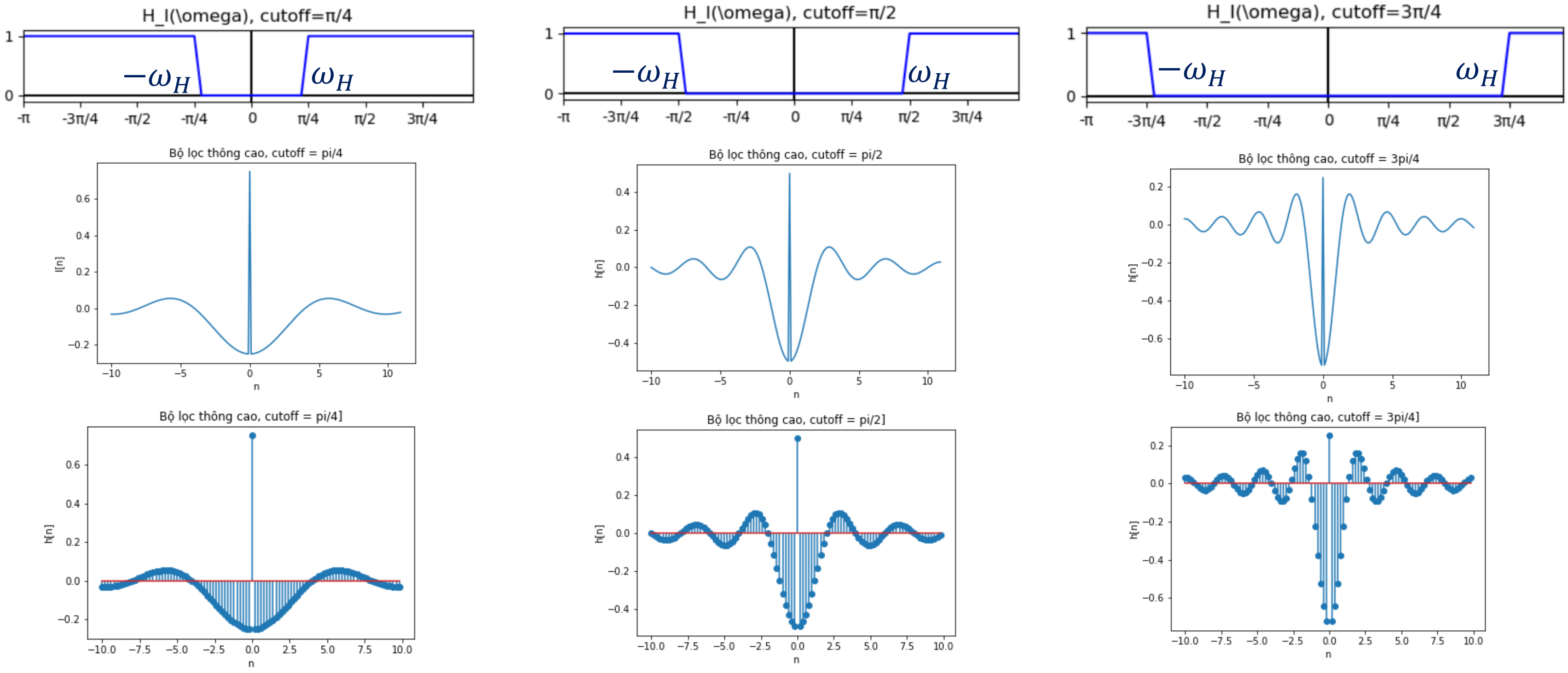
Bộ lọc thông cao lý tưởng (HPF)

- Bộ lọc thông cao lý tưởng cho qua tất cả các thành phần tần số cao hơn ω_H :
$$H_I(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| > \omega_H \\ 0 & \omega\ khác \end{cases}$$
- Lưu ý: $H_I(\omega)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π nên tần số cao nhất là $\omega = \pi$. Các tần số có vẻ cao hơn, ví dụ $\omega = 1{,}1\pi$ thực ra là thấp hơn.
- Có thể định nghĩa lại bộ lọc thông thấp và bộ lọc thông cao:
$$LPF\colon\ L_I(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_L \\ 0 & \omega_L < |\omega| \le \pi \end{cases}$$
$$HPF\colon H_I(\omega) = \begin{cases} 0 & |\omega| \le \omega_H \\ 1 & \omega_H < |\omega| \le \pi \end{cases}$$
- Cả hai bộ lọc đều tuần hoàn với chu kỳ 2π.



Biến đổi Fourier ngược của $H_I(\omega)$

- Cách đơn giản nhất để tìm $h_I(n)$ là sử dụng tính tuyến tính: $H_I(\omega) = 1 - L_I(\omega)$
- Vì vậy: $h_I(n) = \delta(n) - l_I(n) = \delta(n) - \dfrac{sin(\omega_L n)}{\pi n}$

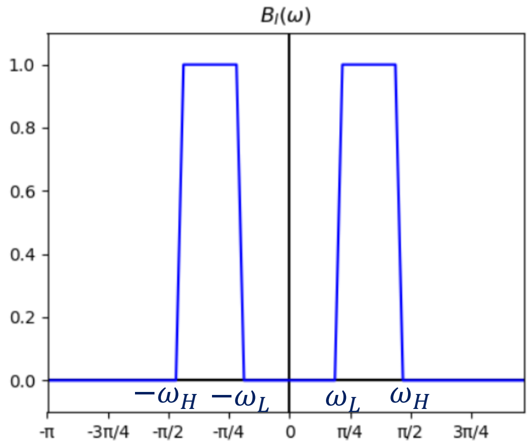


Bộ lọc thông dải lý tưởng (BPF)

- Bộ lọc thông dải lý tưởng cho qua tất cả các thành phần tần số giữa ω_L $và$ ω_H :

$$B_I(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega_L < |\omega| < \omega_H \\ 0 & \omega\ khác \end{cases}$$

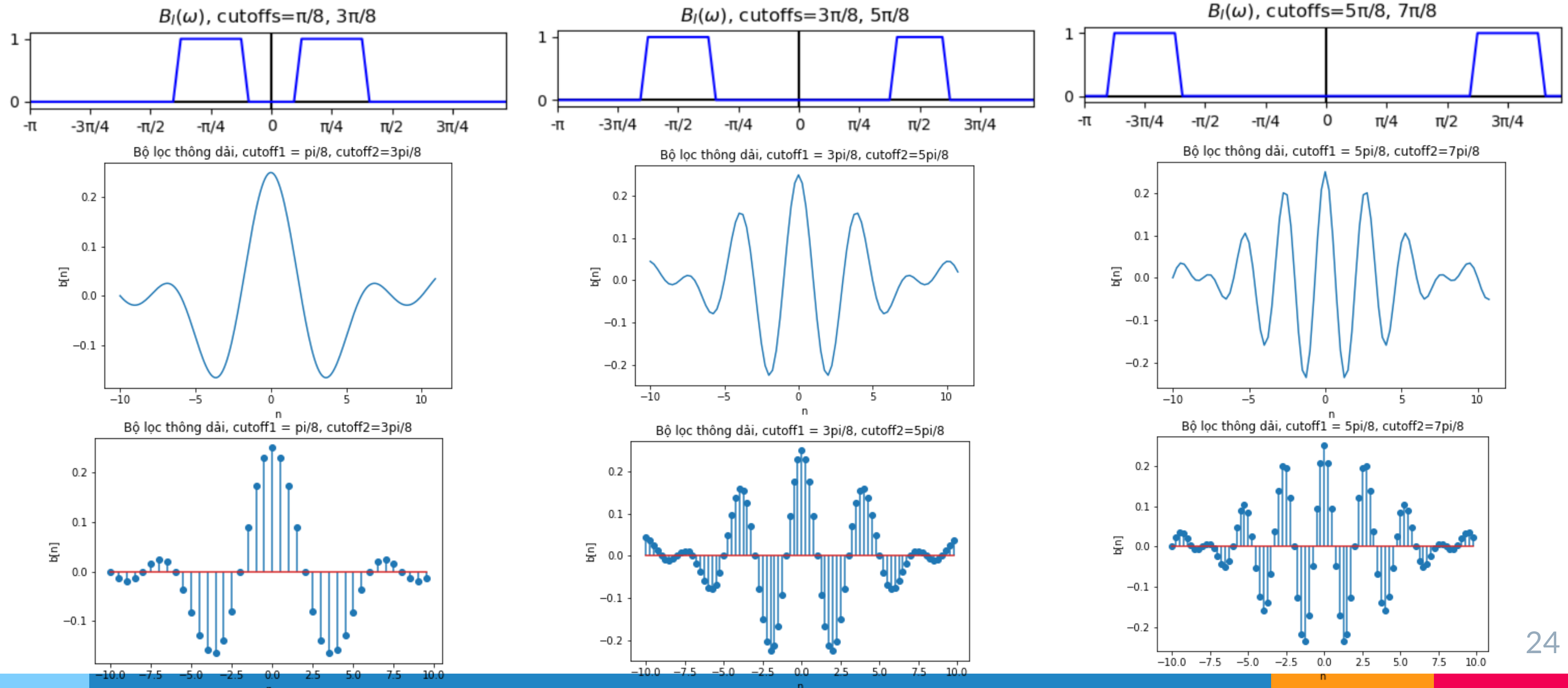
- Lưu ý: $B_I(\omega)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π.



Bộ lọc thông dải lý tưởng (BPF)

- Đáp ứng xung của bộ lọc thông dải: $B_I(\omega) = L_I(\omega|\omega_H) - L_I(\omega|\omega_L)$

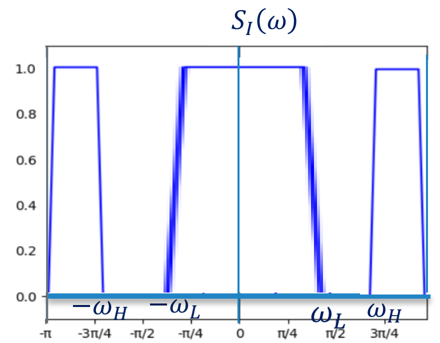
$$b_I(n) = \frac{sin(\omega_H n)}{\pi n} - \frac{sin(\omega_L n)}{\pi n}$$



Bộ lọc chắn dải lý tưởng (BSF)

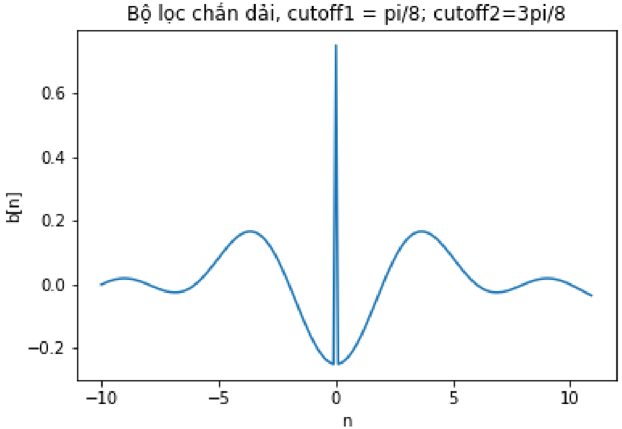
- Bộ lọc thông dải lý tưởng cho qua tất cả các thành phần tần số giữa ω_L và ω_H:

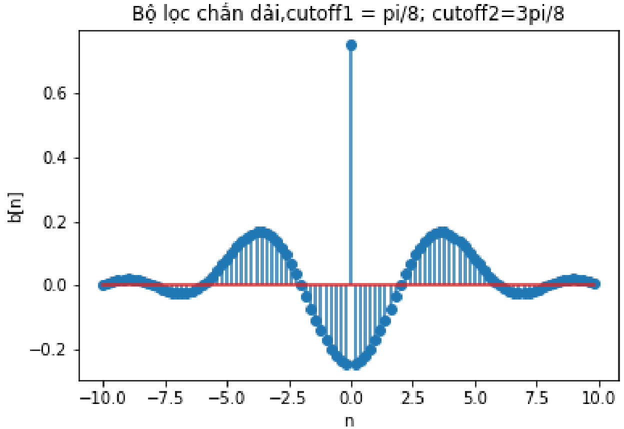
$$S_I(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega_L < |\omega| < \omega_H \\ 1 & \omega\ khác \end{cases}$$



- Lưu ý: $S_I(\omega)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π.
- Đáp ứng xung của bộ lọc BSF: $S_I(\omega) = 1 - B_I(\omega)$

$$s_I(n) = \delta(n) - \frac{sin(\omega_H n)}{\pi n} + \frac{sin(\omega_L n)}{\pi n}$$





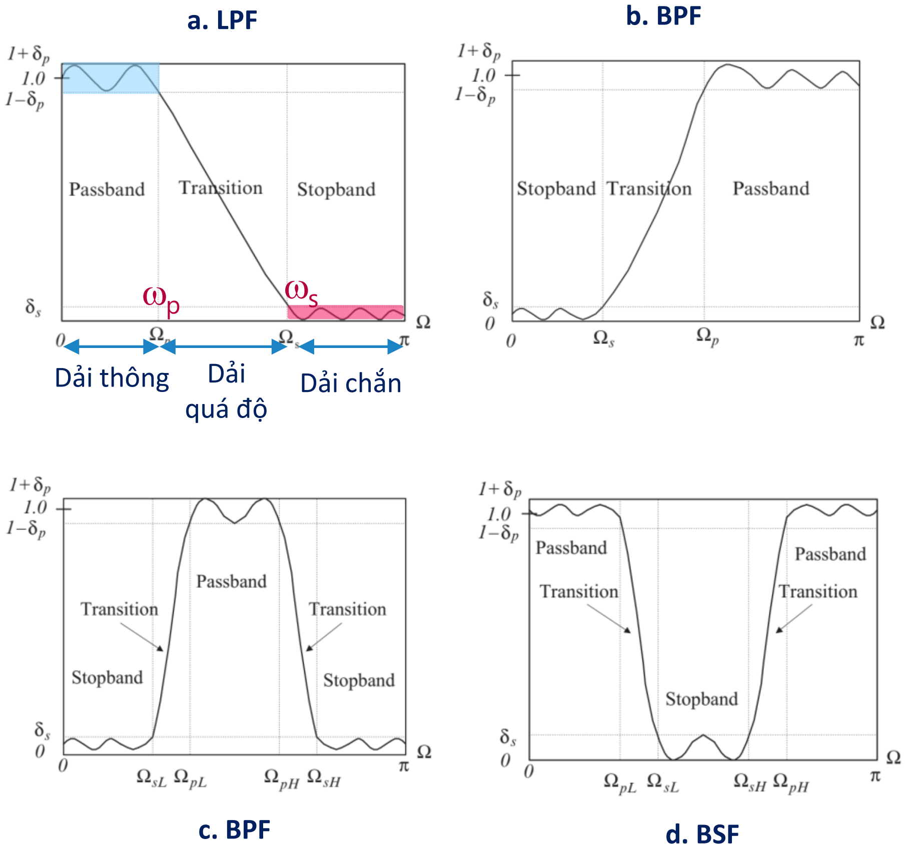
Các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thực tế

Có 4 tham số quyết định chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số là:

- Tần số giới hạn dải thông ω_p
- Tần số giới hạn dải chắn ω_s
- Độ gợn sóng dải thông δ_p
- Độ gợn sóng dải chắn δ_s

Về mặt lý tưởng:

- Các độ gợn sóng dải thông, dải chắn (δ_p, δ_s) càng nhỏ càng tốt.
- Tần số giới hạn dải thông và dải chắn (ω_p, ω_s) càng gần nhau để cho dải quá độ càng nhỏ càng tốt.



- Sự có mặt của điểm không gần vòng tròn đơn vị tác động đến biên độ của đáp ứng tần số, tại các tần số tương ứng với các điểm của vòng tròn đơn vị gần điểm đó, làm cho chúng nhỏ. Ngược lại, sự có mặt của điểm cực gần vòng tròn đơn vị làm cho biên độ của đáp ứng tần số lớn tại các tần số gần điểm đó. Vì vậy các điểm cực có ảnh hưởng ngược lại với điểm không.
- Cũng như vậy, đặt các điểm không gần điểm cực sẽ triệt tiêu các hiệu ứng của điểm cực và ngược lại. Rõ ràng, sự có mặt của cả điểm không và điểm cực trong hàm truyền đạt tạo ra sự thay đổi lớn về hình dạng của đáp ứng biên độ và đáp ứng pha. Quan sát này đặc biệt quan trọng trong việc thiết kế bộ lọc số.