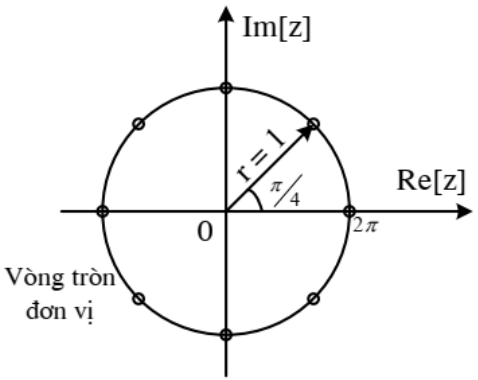
# Biểu diễn tín hiệu và hệ thống trong miền tần số rời rạc

# Giới thiệu

- Biến đổi Fourier là một trường hợp đặc biệt của biến đổi Z hay nói cách khác, biến đổi Fourier chính là biến đổi Z được thực hiện trên vòng tròn đơn vị.
- Nhưng đối với một dãy tuần hoàn với chu kỳ N $\tilde{x}(n)_N$, ta thấy không cần thiết phải thực hiện biến đổi Fourier liên tục mà chỉ cần lợi dụng tính chất tuần hoàn của $\tilde{x}(n)_N$ với chu kỳ N và tính tuần hoàn của biến $e^{j\omega}$ chu kỳ $2\pi$, nghĩa là chỉ cần lấy các điểm đặc biệt $\frac{2\pi}{N}$ trên vòng tròn đơn vị tương ứng với chu kỳ N của tín hiệu tuần hoàn $\tilde{x}(n)_N$

Ví dụ tín hiệu $\tilde{x}(n)_N$ tuần hoàn với chu kỳ N = 8.
Lấy các điểm $\omega_k = \frac{2\pi}{8}.k$



# Biến đổi Fourier rời rạc DFT cho dãy tuần hoàn

# Biến đổi Fourier rời rạc DFT đối với dãy tuần hoàn

- Định nghĩa:

Biến đổi Fourier rời rạc của dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)_N$ được định nghĩa là:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\omega_k n} \quad (\omega_k = \frac{2\pi}{N} k)$$

- Đặt $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ ; $W_N^{kn} = e^{-j\omega_k n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn}$$

- Ký hiệu: $\mathrm{DFT}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$

$$\tilde{x}(n) \xrightarrow{DFT} \tilde{X}(k)$$

# Ví dụ 4.1. Xác định DFT của dãy tuần hoàn

- Cho dãy tuần hoàn: $\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 4 \\ 0 & 5 \le n \le 9 \end{cases}$ chu kỳ N = 10. Hãy xác định $\tilde{X}(k)$

- Giải: $\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{9} \tilde{x}(n) W_{10}^{kn} = \sum_{n=0}^{9} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{10}kn} = \sum_{n=0}^{9} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{10}kn}$

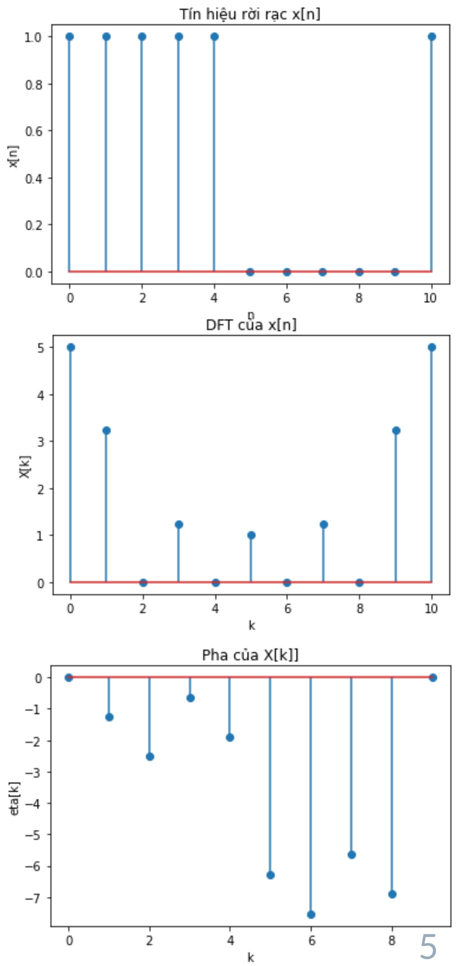
$$= \sum_{n=0}^{4} e^{-j\frac{2\pi}{10}kn} = \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{10}k5}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{10}k}} = \frac{e^{-j\frac{\pi}{10}k5}\left(e^{j\frac{\pi}{10}k5} - e^{-j\frac{\pi}{10}k5}\right)}{e^{-j\frac{\pi}{10}k}\left(e^{j\frac{\pi}{10}k} - e^{-j\frac{\pi}{10}k}\right)}$$

$e^{jx} = cosx + jsinx; e^{jx} + e^{-jx} = 2cosx;\ e^{jx} - e^{-jx} = 2jsinx$

$$\tilde{X}(k) = \frac{2jsin\left(\frac{\pi}{10}k5\right)}{2jsin\left(\frac{\pi}{10}k\right)} e^{-j\frac{4\pi}{10}k} = \frac{sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{sin\left(\frac{\pi}{10}k\right)} e^{-j\frac{2\pi}{5}k}; k = 0 \div 9$$

$$\tilde{X}(k) = \left|\tilde{X}(k)\right|. e^{j\varphi(k)}; \varphi(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{5}k & \frac{sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{sin\left(\frac{\pi}{10}k\right)} \ge 0 \\ \pi - \frac{2\pi}{5}k & \frac{sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{sin\left(\frac{\pi}{10}k\right)} < 0 \end{cases}$$

Lưu ý: $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1; \tilde{X}(k) = 5.\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\left(\frac{\pi}{2}k\right)} \frac{\left(\frac{\pi}{10}k\right)}{sin\left(\frac{\pi}{10}k\right)} e^{-j\frac{4\pi}{10}k}; \tilde{X}(0) = 5$



# Biến đổi Fourier rời rạc ngược IDFT đối với dãy tuần hoàn

- Định nghĩa:

Biến đổi Fourier rời rạc ngược IDFT của dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)_N$ được định nghĩa là:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)W_N^{-kn}$$

( $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$; $W_N^{kn} = e^{-j\omega_k n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$)

- Ký hiệu: $\mathrm{IDFT}[\tilde{X}(k)] = \tilde{x}(n)$

$$\tilde{X}(k) \xrightarrow{IDFT} \tilde{x}(n)$$

- Lưu ý: Cách tính IDFT hoàn toàn giống DFT chỉ khác dấu (-) và (+) và hệ số 1/N.

# Biểu diễn DFT dưới dạng ma trận

- Từ định nghĩa: $\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn}$

$$\tilde{X}(0) = \tilde{x}(0)W_N^0 + \tilde{x}(1)W_N^0 + \cdots + \tilde{x}(N-1)W_N^0$$

$$\tilde{X}(1) = \tilde{x}(0)W_N^0 + \tilde{x}(1)W_N^1 + \cdots + \tilde{x}(N-1)W_N^{N-1}$$

$$\tilde{X}(2) = \tilde{x}(0)W_N^0 + \tilde{x}(1)W_N^2 + \cdots + \tilde{x}(N-1)W_N^{2(N-1)}$$

……

$$\tilde{X}(N-1) = \tilde{x}(0)W_N^0 + \tilde{x}(1)W_N^{N-1} + \cdots + \tilde{x}(N-1)W_N^{(N-1)(N-1)}$$

$$\tilde{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{k}) = \begin{bmatrix} \tilde{X}(0) \\ \tilde{X}(1) \\ \tilde{X}(2) \\ \vdots \\ \tilde{X}(N-1) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{W}(\boldsymbol{k}) = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \ldots\ldots W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \ldots\ldots W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \ldots\ldots W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \ldots W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad \tilde{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{n}) = \begin{bmatrix} \tilde{x}(0) \\ \tilde{x}(1) \\ \tilde{x}(2) \\ \vdots \\ \tilde{x}(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{k})\, \tilde{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{n})$$

# Tính chất của DFT đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N

| Tính chất | Miền n | Miền tần số rời rạc k |
|---|---|---|
| Định nghĩa | $\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn}$ | $\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn}$ |
| Tuyến tính | $a\tilde{x}_1(n)_N + b\tilde{x}_2(n)_N$ | $a\tilde{X}_1(k)_N + \mathrm{b}\tilde{X}_2(k)_N$ |
| Dịch miền thời gian | $\tilde{x}(n-n_0)_N$ | $W_N^{kn_0}\tilde{X}(k)$ |
| Tính đối xứng với dãy thực | $x(n)$ là thực (tính chất đối xứng) | $\tilde{X}(k) = \tilde{X}^*(-k)$<br>$Re[\tilde{X}(k)] = Re[\tilde{X}(-k)]$<br>$Im[\tilde{X}(k)] = Im[\tilde{X}(-k)]$<br>$\lvert\tilde{X}(k)\rvert=\lvert\tilde{X}(-k)\rvert$<br>$\arg[\tilde{X}(k)] = -\arg[\tilde{X}(-k)]$ |
| Tích chập trong miền n | $\tilde{x}_1(n)_N(\tilde{*})_N\tilde{x}_2(n)_N$ | $\tilde{X}_1(k)_N\tilde{X}_2(k)_N$ |
| Tích chập trong miền tần số | $\tilde{x}_1(n)_N.\tilde{x}_2(n)_N$ | $\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_1(l)_N\tilde{X}_2(k-l)_N$<br>$\tilde{X}_1(k)_N(\tilde{*})_N\tilde{X}_2(k)_N$ |
| Dịch tần số | $W_N^{nk_0}\tilde{x}(n)_N$ | $\tilde{X}(k+k_0)$ |

# Biến đổi Fourier rời rạc DFT đối với dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn N

# Giới thiệu

- Chúng ta đã xét biến đổi DFT rời rạc đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N.
- Thực tế không phải lúc nào chúng ta cũng gặp dãy tuần hoàn, tuy nhiên có thể biến đổi dãy không tuần hoàn chiều dài hữu hạn thành dãy tuần hoàn như sau:


Dãy không tuần hoàn chiều dài N = 5 Dãy tuần hoàn chu kỳ M = 6 $\geq N = 5$

# Biến đổi Fourier rời rạc DFT đối với dãy có chiều dài hữu hạn N

- Biến đổi xuôi DFT:

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k \text{ khác} \end{cases}$$

Ký hiệu: $\mathrm{DFT}[x(n)] = X(k)$

$$x(n) \xrightarrow{DFT} X(k)$$

- Biến đổi ngược IDFT:

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ khác} \end{cases}$$

Ký hiệu: $\mathrm{IDFT}[X(k)] = x(n)$

$$X(k) \xrightarrow{IDFT} x(n)$$

# Ví dụ biến đổi Fourier cho dãy có chiều dài hữu hạn

Hãy tìm biến đổi Fourier của các dãy có chiều dài hữu hạn sau đây: $x(n) = \delta(n)$

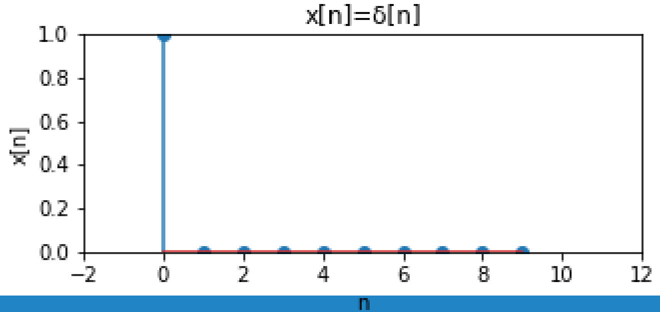
Giải: Gỉa sử dãy $x(n)$ có chiều dài hữu hạn N với x(0) = 1.

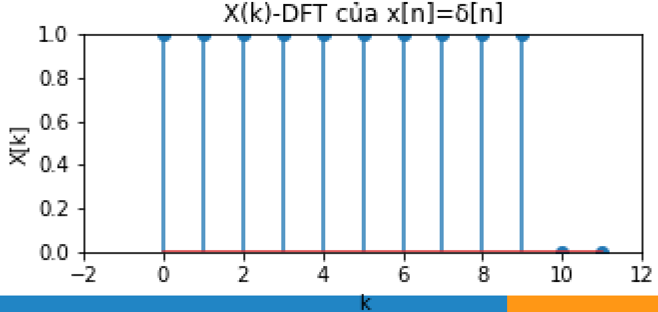
Áp dụng định nghĩa:

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k\ khác \end{cases} = \begin{cases} W_N^0 & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k\ khác \end{cases}$$

$W_N^0 = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{j.0} = 1$; Vậy $X(k) = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k\ khác \end{cases}$

Hình vẽ dưới đây vẽ N = 10



# Ví dụ biến đổi Fourier cho dãy có chiều dài hữu hạn

Hãy tìm biến đổi Fourier N (N $\geq L$) điểm của các dãy có chiều dài hữu hạn sau đây:

$$\mathrm{x}(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq L-1 \\ 0 & k\ khác \end{cases}$$

Giải: Áp dụng định nghĩa:

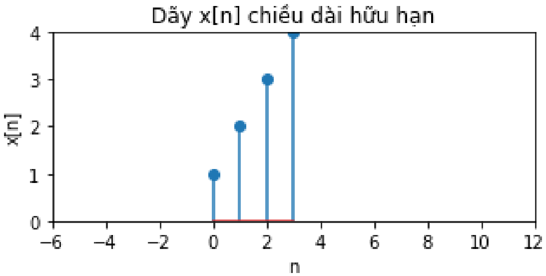
$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k\ khác \end{cases} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{L-1} W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k\ khác \end{cases}$$

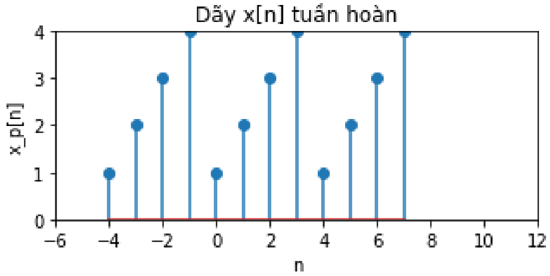
$$\sum_{n=0}^{L-1} W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{L-1} \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)^n = \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}kL}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{\sin(\frac{\pi k L}{N})}{\sin(\pi k/N)}\, e^{-j\frac{\pi}{N}k(L-1)}$$

Vậy $X(k) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\frac{\pi k L}{N})}{\sin(\pi k/N)}\, e^{-j\frac{\pi}{N}k(L-1)} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k\ khác \end{cases}$

# Phép trễ vòng

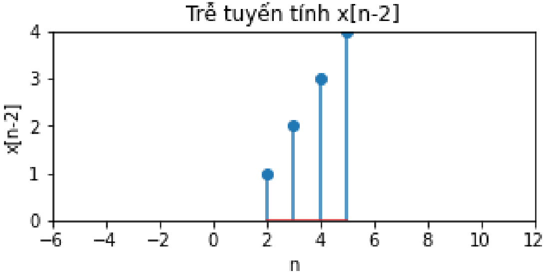
$x(n) = x(n)_4$
dãy theo đầu bài

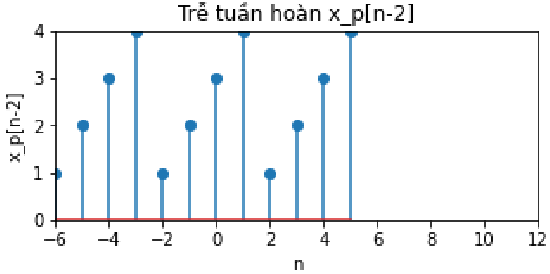


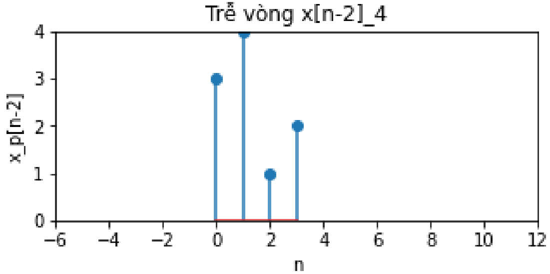

$\tilde{x}(n)_4$
dãy tuần hoàn chu kỳ 4, 1 chu kỳ chính là $x(n)$

$x(n-2)$
dãy trễ đi 2 mẫu (trễ tuyến tính)




$\tilde{x}(n-2)_4$
dãy trễ tuần hoàn của $\tilde{x}(n)_4$ đi 2 mẫu




$x(n-2)_4$
dãy trễ của $x(n)_4$ đi 2 mẫu (trễ vòng)

# Tính chất của DFT đối với dãy có chiều dài hữu hạn N

| Tính chất | Miền n | Miền tần số rời rạc k |
|---|---|---|
| Định nghĩa | $x(n)_N = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)_N W_N^{-kn} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n\ khác \end{cases}$ | $X(k)_N = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)_N W_N^{kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k\ khác \end{cases}$ |
| Tuyến tính | $ax(n)_{N_1} + bx(n)_{N_2} = x(n)_{N_3};\ N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ | $aX_1(k)_{N_3} + \mathrm{b}X_2(k)_{N_3} = X_3(k)_{N_3}$ |
| Dịch miền thời gian | $x(n-n_0)_N$ | $W_N^{kn_0} X(k)_N$ |
| Tính đối xứng với dãy thực | $x(n)_N$ là thực (tính chất đối xứng) | $X(k)_N = X^*(-k)_N; X^*(k)_N = X(-k)_N$<br>$Re[X(k)_N] = Re[X(-k)_N];\ Im[X(k)_N] = -Im[X(-k)_N]$<br>$\|X(k)_N\| = \|X(-k)_N\|;\ \arg[X(k)_N] = -\arg[X(-k)_N]$ |
| Tích chập trong miền n | $\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)_N x_2(n-m)_N = x_1(n)_N (*)_N x_2(n)_N$ | $X_1(k)_N X_2(k)_N$ |
| Tích chập trong miền tần số | $x_1(n)_N . x_2(n)_N$ | $\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X_1(l)_N X_2(k-l)_N = X_1(k)_N (*)_N X_2(k)_N$ |
| Dịch tần số | $W_N^{nk_0} x(n)_N$ | $X(k+k_0)_N$ |
| | $x^*(n)_N$ | $X^*(-k)_N$ |
| | $x^*(-n)_N$ | $X^*(k)_N$ |
| | $Re[x(n)_N]$ | $\frac{1}{2}[X(k)_N + X^*(-k)_N]$ |
| | $jRe[x(n)_N]$ | $\frac{1}{2}[X(k)_N - X^*(-k)_N]$ |
| | $\sum_{n=0}^{N-1} \|x(n)\|^2$ | $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \|X(k)_N\|^2$ |

## Ví dụ:

- Cho 2 dãy có chiều dài hữu hạn N như sau: $x_1(n)_N = x_2(n)_N = rect_N(n)$
- Tìm $x_3(n)_N = x_1(n)_N(*)_N x_2(n)_N$ thông qua biến đổi DFT.
- Giải: Sử dụng tính chất phép chập trong miền n thành phép nhân trong miền k.
- $X_3(k)_N = X_1(k)_N(*)_N X_2(k)_N; x_3(n)_N = IDFT[X_3(k)_N]$
- $X_1(k)_N = X_2(k)_N = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)_N W_N^{kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k\ khác \end{cases} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} 1.W_N^{kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k\ khác \end{cases}$
- $X_1(k)_N = X_2(k)_N \begin{cases} \frac{1-W_N^{kN}}{1-W_N^{k}} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k\ khác \end{cases} = \begin{cases} N & k = 0 \\ 0 & k\ khác \end{cases}; (W_N^{kN} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kN} = 1)$
- Vậy: $X_3(k)_N = \begin{cases} N^2 & k = 0 \\ 0 & k\ khác \end{cases}; x_3(n)_N = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_3(k)_N W_N^{-kn} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n\ khác \end{cases}$
- $x_3(n)_N = \begin{cases} N & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n\ khác \end{cases}$

# Ví dụ:

- Cho 2 dãy: $x_1(n)_N = x_2(n)_N = rect_N(n), N = 4$

Tính phép chập tuyến tính của 2 dãy $x_3(n)_N = x_1(n)_N(*)x_2(n)_N$

- Giải: Sử dụng tính chất phép chập trong miền n:

$x_3(n) = x_1(n)(*)x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)$

Khi thực hiện phép chập tuyến tính không vòng thì chiều dài phép chập tuyến tính là:

$N_3 = N_1 + N_2 - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$

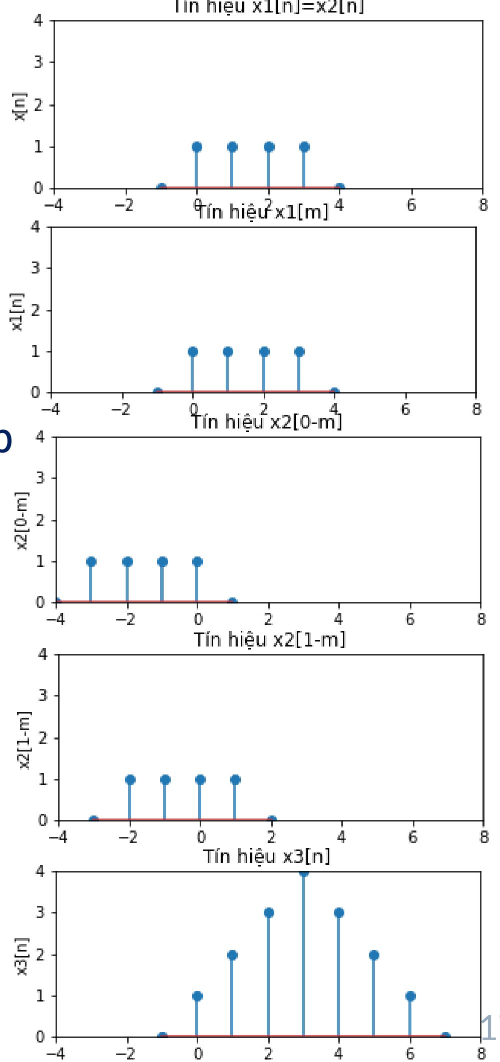
n = 0; $x_3(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(0-m) = 1$

n = 1; $x_3(1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(1-m) = 2$

.....

n = 6; $x_3(6) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(6-m) = 1$

n = 7; $x_3(7) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(7-m) = 0$



# Ví dụ:

- Tính tích chập vòng cho 2 dãy: $x_1(n)_8 = x_2(n)_8 = rect_4(n)$
- Giải: Sử dụng tính chất phép chập trong miền n:

$$x_3(n)_8 = x_1(n)_8(*)_8 x_2(n)_8 = \sum_{m=0}^{7} x_1(m)_8(*)x_2(n-m)_8$$

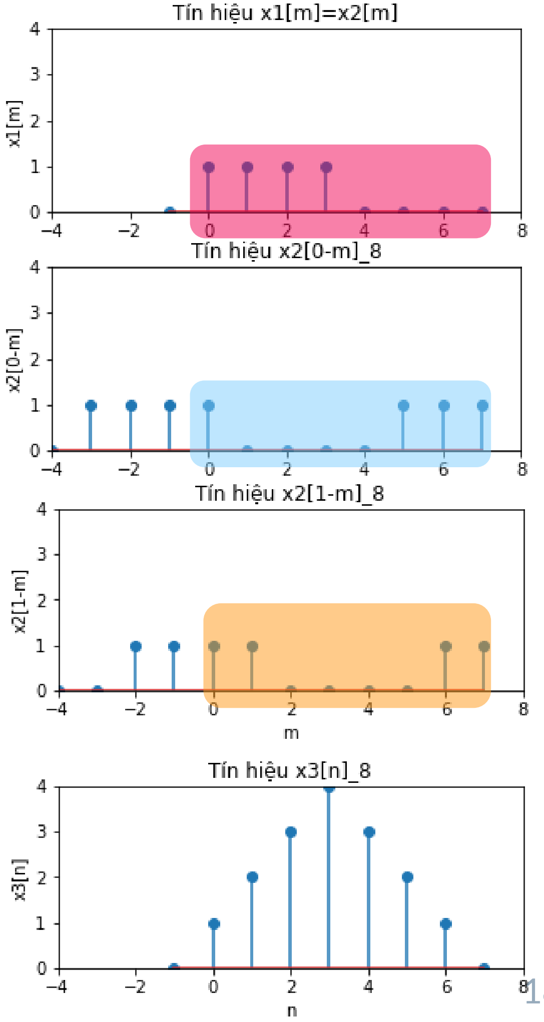
n = 0; $x_3(0)_8 = \sum_{m=0}^{7} x_1(m)_8(*)_8 x_2(0-m)_8 = 1$

n = 1; $x_3(1)_8 = \sum_{m=0}^{7} x_1(m)_8(*)_8 x_2(1-m)_8 = 2$

.....

n = 6; $x_3(6)_8 = \sum_{m=0}^{7} x_1(m)_8(*)_8 x_2(6-m)_8 = 1$

n = 7; $x_3(7)_8 = \sum_{m=0}^{7} x_1(m)_8(*)_8 x_2(7-m)_8 = 0$



# Biến đổi Fourier nhanh (FFT)

# Giới thiệu

- Tính trực tiếp DFT cần $N$ phép nhân phức và $(N-1)$ phép cộng phức cho mỗi giá trị $X(k)$. Với N giá trị X(k), cần $N^2$ phép nhân và $\mathrm{N}(N-1)$ phép cộng.
- Nếu sử dụng vài chiến lược thông minh có thể giảm đáng kể khối lượng tính toán. Các chiến lược này gọi biến đổi Fourier nhanh (FFT – Fast Fourier Transforms) mặc dù các phương pháp này không làm gì với phép biến đổi theo nghĩa đúng của từ này.
- Có hai thuật toán FFT được giới thiệu ở đây:
  - FFT phân chia theo thời gian n
  - FFT phân chia theo tần số k

# Thuật toán FFT phân chia theo thời gian

# FFT phân chia theo thời gian

$$X(k) = \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m)W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m+1)W_N^k W_N^{2mk}, \text{ for } k = 0, 1, \cdots, N-1.$$

Do $W_N^2 = W_{N/2}$ nên:

$$X(k) = \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m)W_{N/2}^{mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m+1)W_{N/2}^{mk}, \text{ for } k = 0, 1, \cdots, N-1.$$

$$G(k) = \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m)W_{N/2}^{mk} = \text{DFT}\{x(2m) \text{with} (N/2) \text{points}\}$$

$$H(k) = \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m+1)W_{N/2}^{mk} = \text{DFT}\{x(2m+1) \text{with} (N/2) \text{points}\}$$

$$G(k) = G\left(k + \frac{N}{2}\right) \qquad H(k) = H\left(k + \frac{N}{2}\right) \qquad \text{for } k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1$$

$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k), \quad \text{for } k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1$$

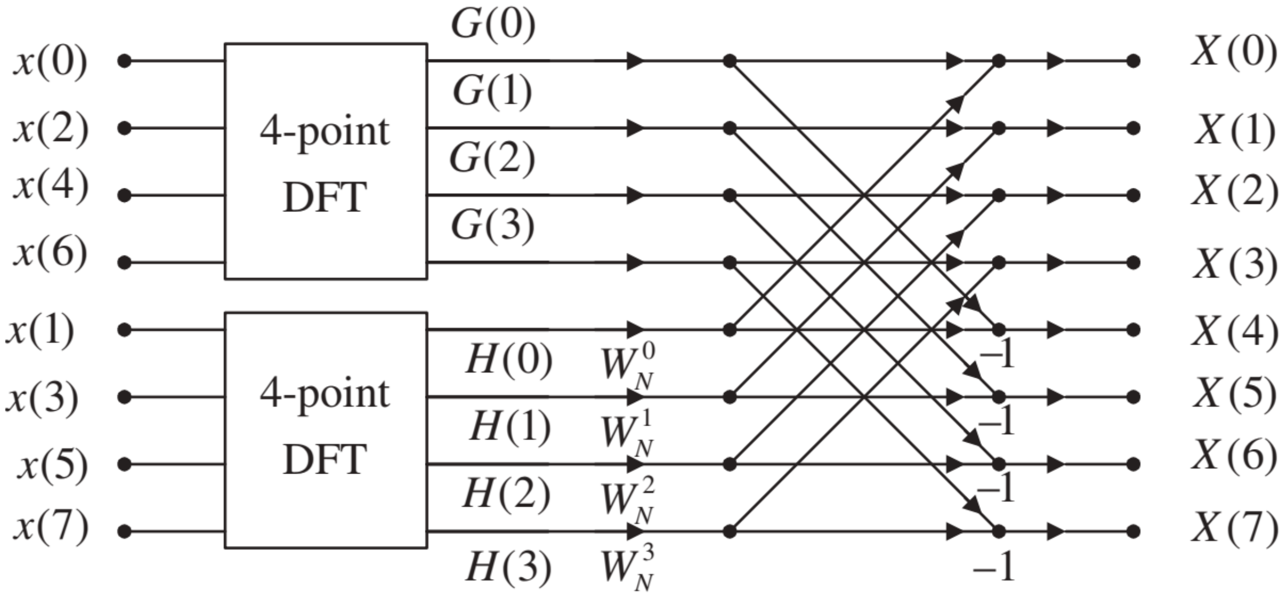
# FFT 8 điểm phân chia theo thời gian: vòng lặp đầu tiên

Do $W_N^{(N/2+k)} = -W_N^k$, nên:

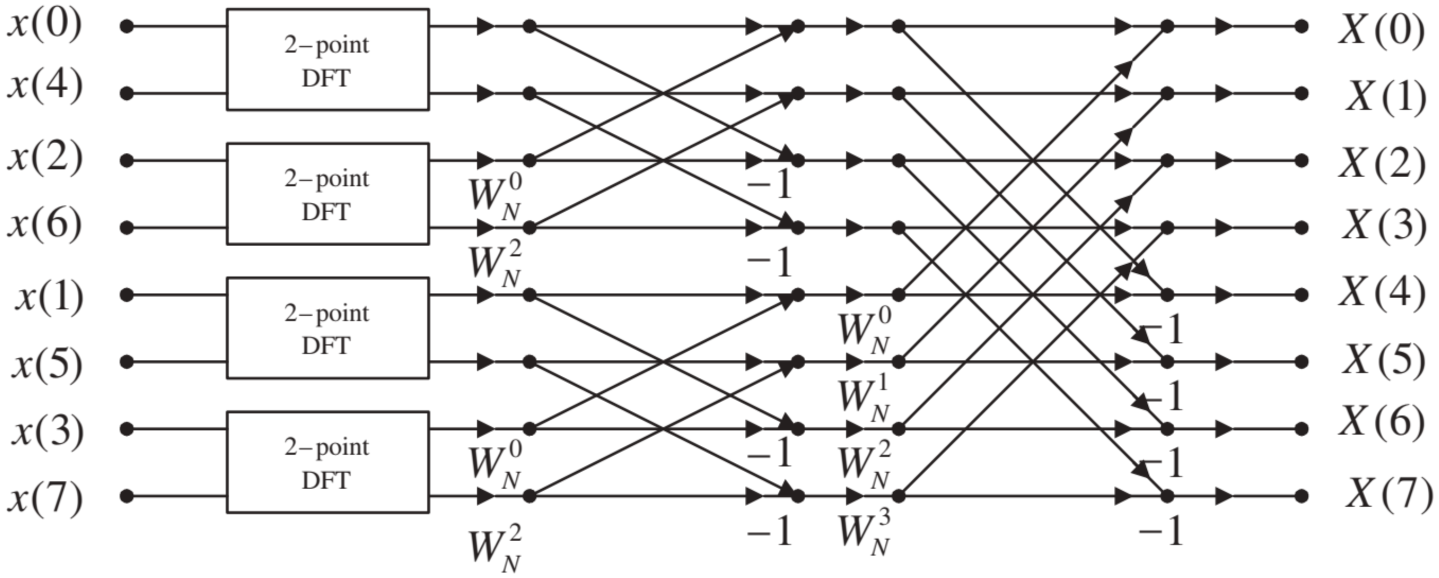
$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k), \quad \text{for} \quad k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1$$

$$X\left(\frac{N}{2} + k\right) = G(k) - W_N^k H(k), \text{for}\, k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1$$

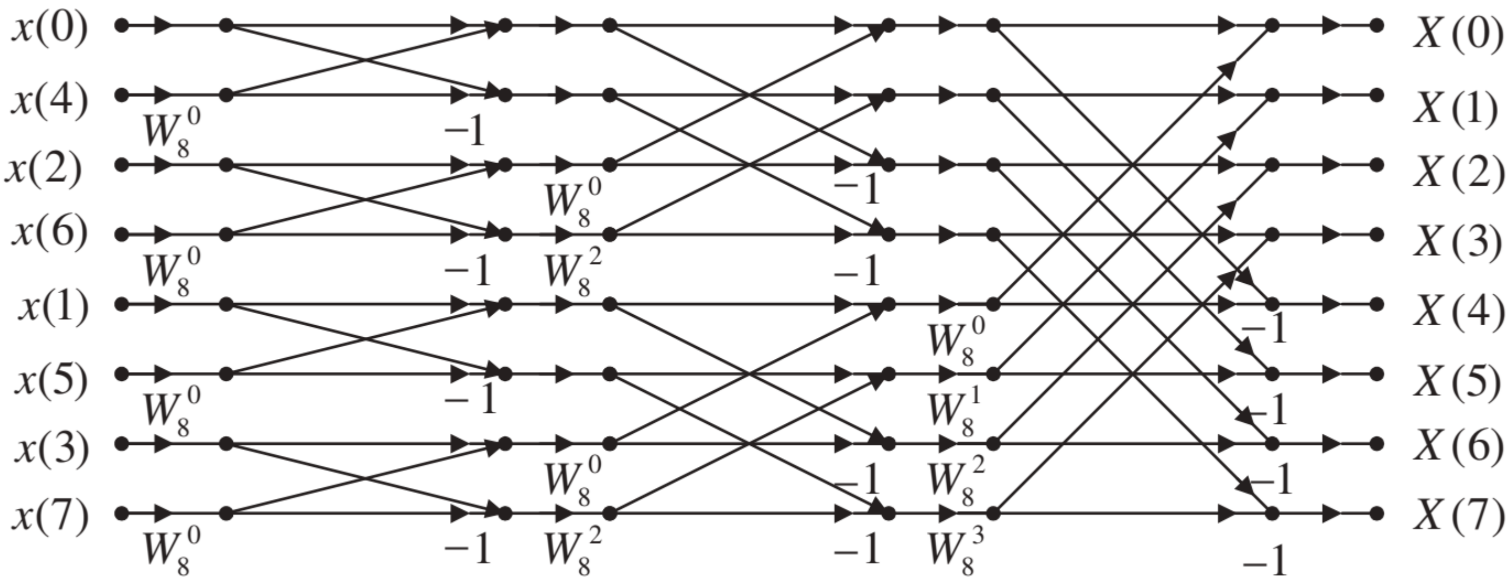
$$G(k) = G\left(k + \frac{N}{2}\right)$$
$$H(k) = H\left(k + \frac{N}{2}\right)$$
$$\text{for} \quad k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1$$



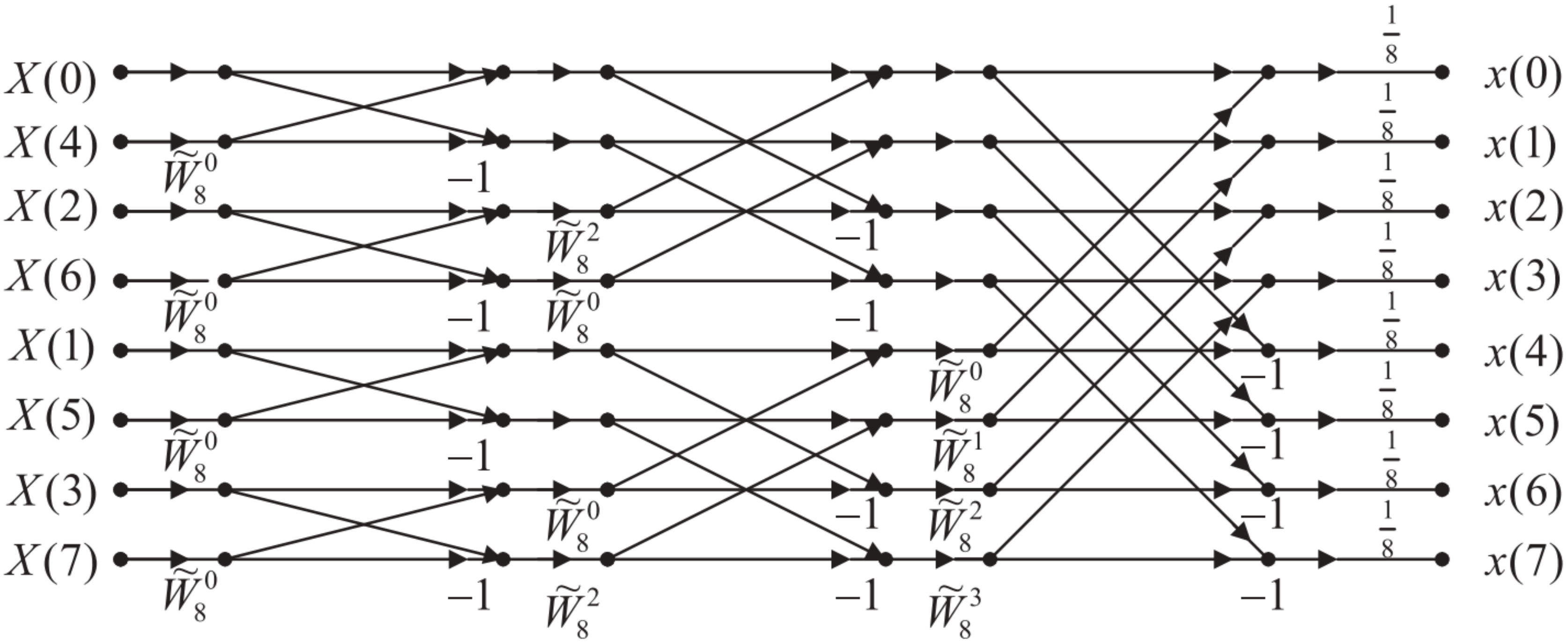
# FFT 8 điểm phân chia theo thời gian: vòng lặp thứ hai



# FFT 8 điểm phân chia theo thời gian: vòng lặp thứ ba



# IFFT 8 điểm phân chia theo thời gian

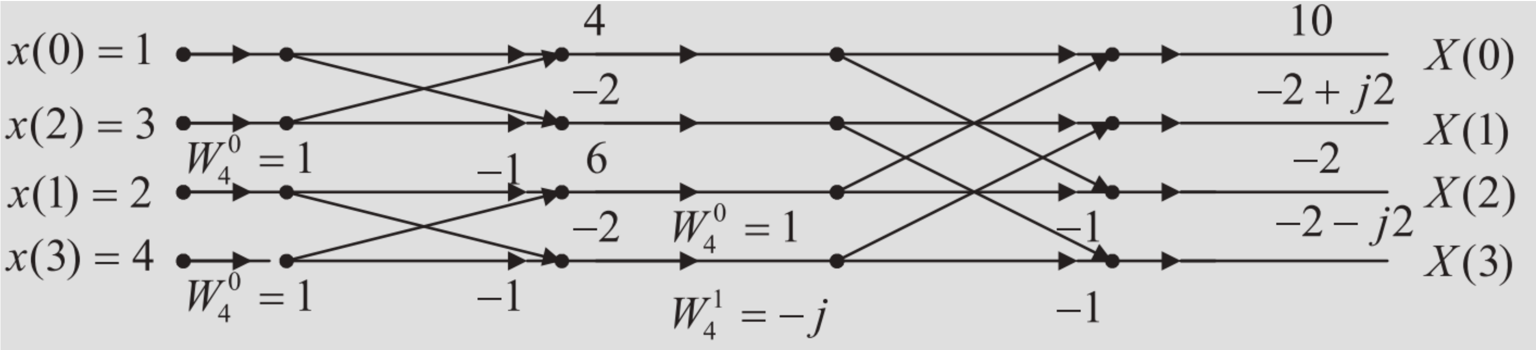


# Ví dụ FFT phân chia theo thời gian

Cho dãy $x(n)$ với $0 \leq n \leq 3$ ở đó $x(0) = 1, x(1) = 2, x(2) = 3, x(3) = 4$

Đánh giá DFT $\mathrm{X}(k)$ sử dụng phương pháp FFT phân chia theo thời gian

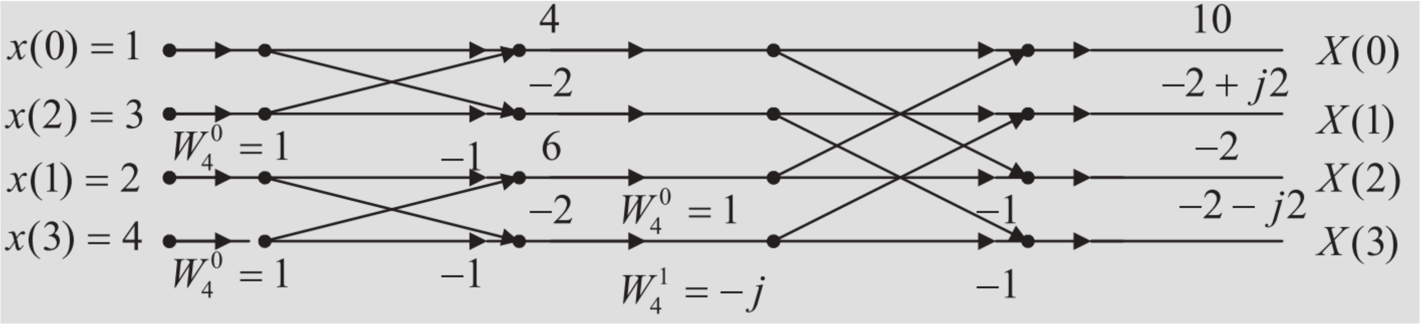
Giải:

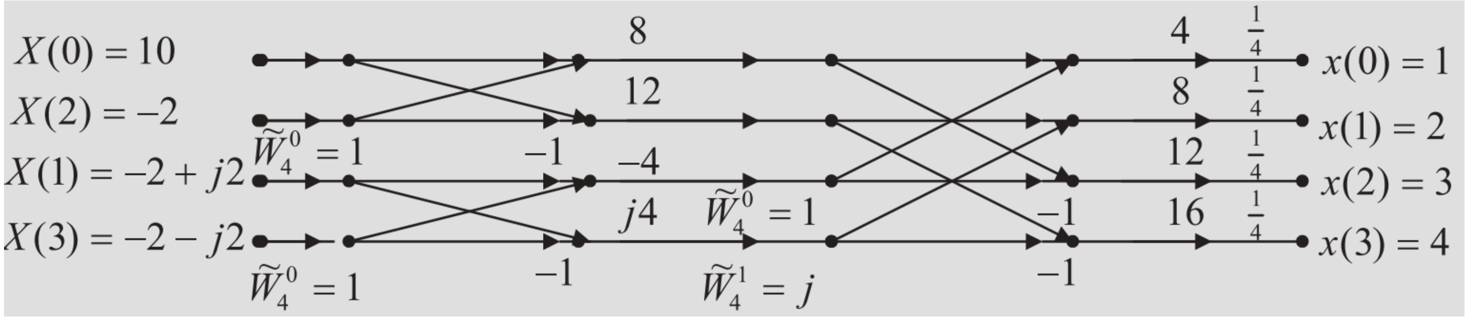


# Ví dụ tính IFFT phân chia theo thời gian

Cho dãy $\mathrm{X}(k)$ với $0 \le k \le 3$ đã tính ở ví dụ trước. Hãy tìm biến đổi FFT ngược của $\mathrm{X}(k)$ sử dụng phương pháp FFT phân chia theo thời gian.

Giải:



# Thuật toán FFT phân chia theo tần số

# FFT phân chia theo tần số

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad \text{for} \quad k = 0, 1, \cdots, N-1,$$

$$X(k) = x(0) + x(1) W_N^k + \cdots + x(N-1) W_N^{k(N-1)}$$

$$X(k) = x(0) + x(1) W_N^k + \cdots + x\left(\frac{N}{2} - 1\right) W_N^{k(N/2-1)} + x\left(\frac{N}{2}\right) W^{kN/2} + \cdots + x(N-1) W_N^{k(N-1)}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n) W_N^{kn} + W_N^{(N/2)k} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{kn}$$

Do $W_N^{N/2} = e^{-j\frac{2\pi(N/2)}{N}} = e^{-j\pi} = -1$ nên: $X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left( x(n) + (-1)^k x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right) W_N^{kn}$

# FFT phân chia theo tần số

Cho k = 2m ta được các giá trị chẵn và k = 2m+1 ta được giá trị lẻ.

$$X(2m) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left( x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right)\right) W_N^{2mn}$$

$$X(2m+1) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left( x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right)\right) W_N^{n} W_N^{2mn}$$

Do $W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi\times 2}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}} = W_{N/2}$

$$X(2m) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} a(n) W_{N/2}^{mn} = \mathrm{DFT}\{a(n) \quad \text{with} \quad (N/2)\text{points}\}$$

$$X(2m+1) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} b(n) W_N^{n} W_{N/2}^{mn} = \mathrm{DFT}\left\{b(n) W_N^{n} \quad \text{with} \quad (N/2)\text{points}\right\}$$

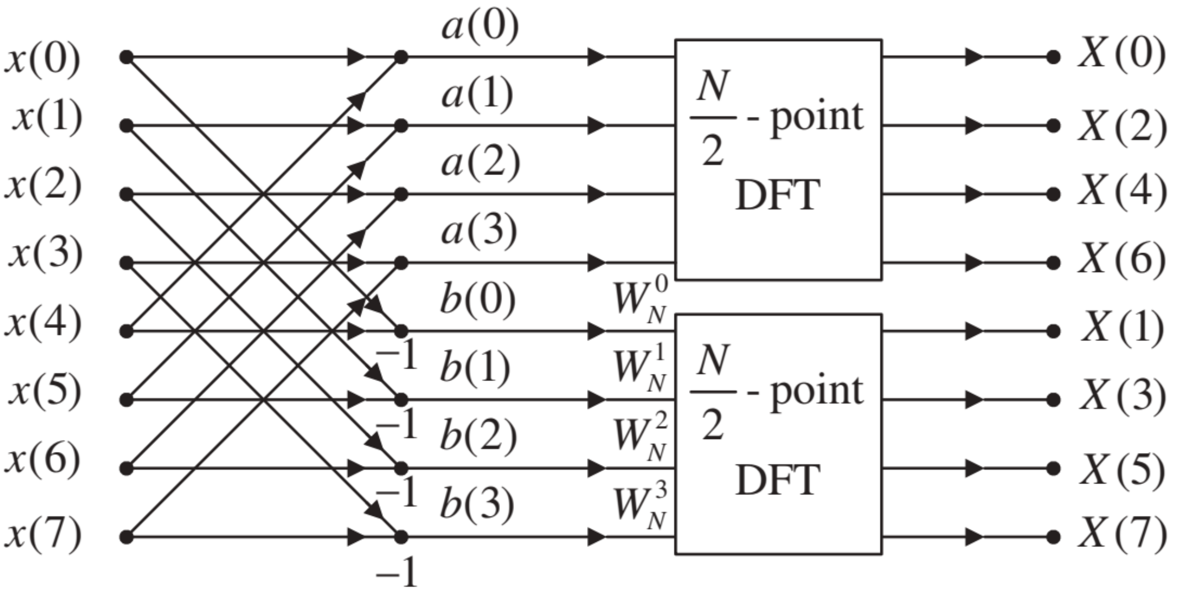
$$a(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \qquad b(n) = x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \qquad \text{for} \quad n = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1$$

# FFT phân chia theo tần số: Vòng lặp đầu tiên của FFT 8 điểm

$$\mathrm{DFT}\{x(n)\ \text{with}\ N\ \text{points}\} = \begin{cases} \mathrm{DFT}\{a(n)\ \text{with}(N/2)\text{points}\} \\ \mathrm{DFT}\{b(n)W_N^n\ \text{with}(N/2)\text{points}\} \end{cases}$$

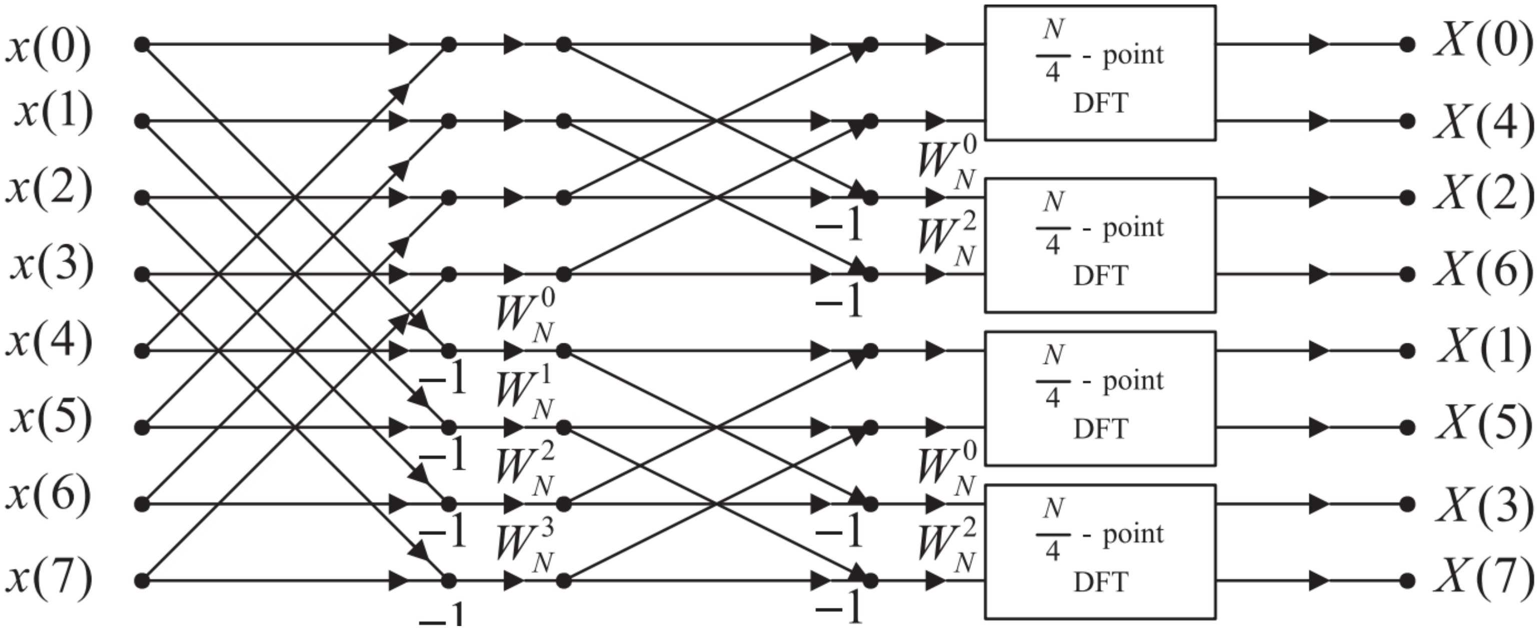
Số phép nhân của DFT: $N^2$

Số phép nhân của FFT: $\frac{N}{2}\log_2 N$

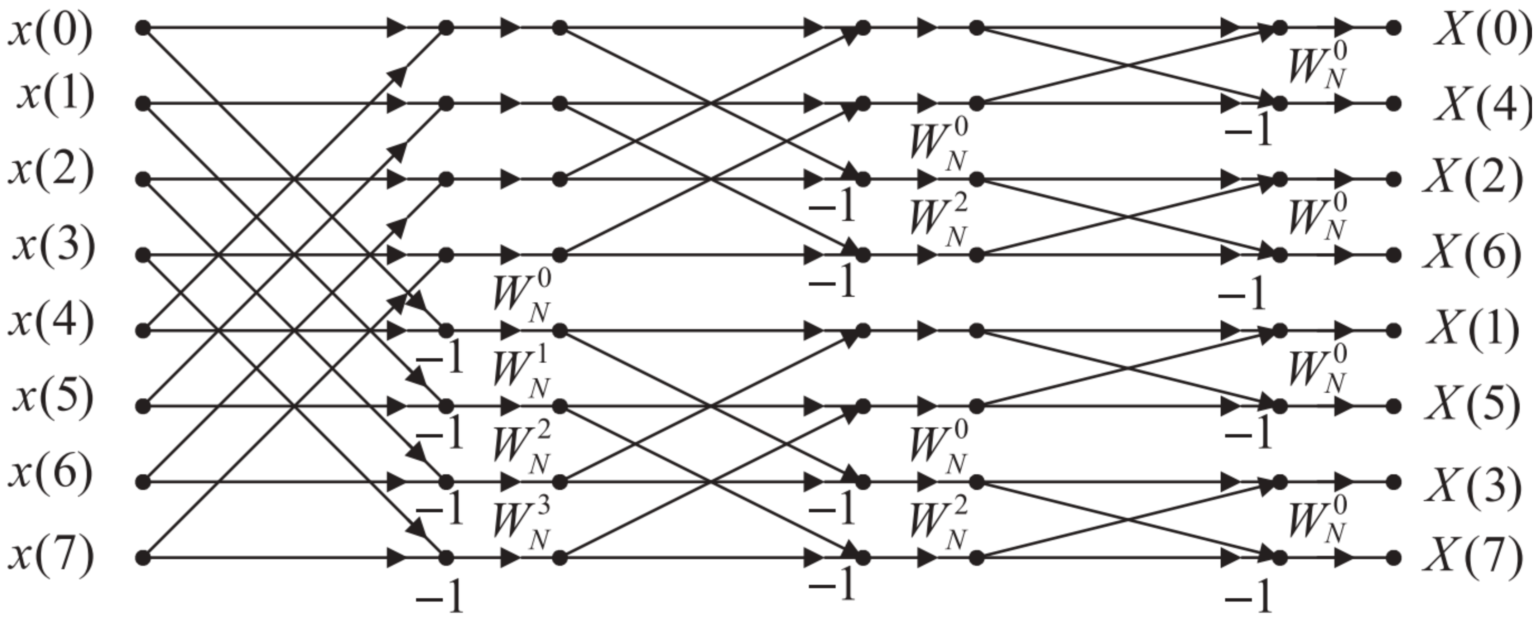



$$a(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \qquad b(n) = x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \qquad \text{for}\ \ n = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1$$

# FFT phân chia theo tần số: Vòng lặp thứ hai của FFT 8 điểm



# FFT phân chia theo tần số: Vòng lặp thứ ba của FFT 8 điểm




DFT: $N^2 = 64$ phép nhân

FFT 8 điểm: $\frac{N}{2}\log_2 N = \frac{8}{2}\log_2 8 = 12$ phép nhân!

# Ánh xạ chỉ số với FFT

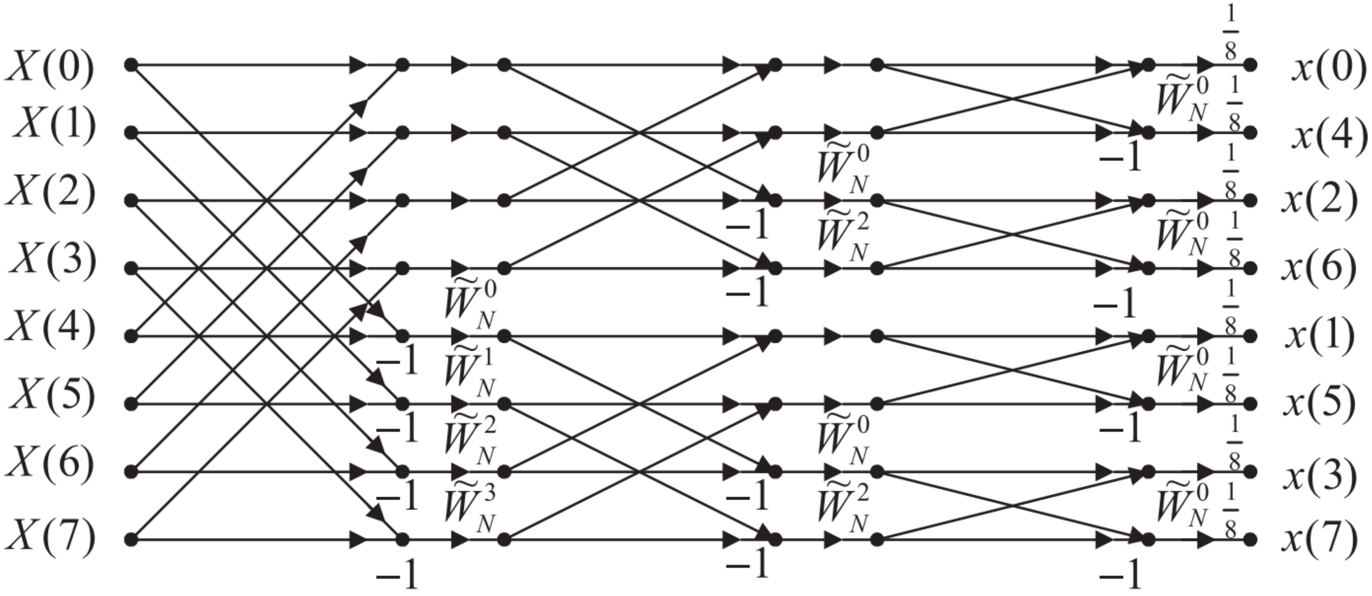
| Dữ liệu đầu vào | Các bit chỉ mục | Các bit đảo ngược | Dữ liệu đầu ra |
|---|---|---|---|
| $x(0)$ | 000 | 000 | $X(0)$ |
| $x(1)$ | 001 | 100 | $X(4)$ |
| $x(2)$ | 010 | 010 | $X(2)$ |
| $x(3)$ | 011 | 110 | $X(6)$ |
| $x(4)$ | 100 | 001 | $X(1)$ |
| $x(5)$ | 101 | 101 | $X(5)$ |
| $x(6)$ | 110 | 011 | $X(3)$ |
| $x(7)$ | 111 | 111 | $X(7)$ |

# IFFT phân chia theo tần số

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \tilde{W}_N^{kn}, \text{ for } k = 0, 1, \cdots, N-1$$

Ký hiệu: $\widetilde{W}_N = W_N^{-1}$

Chỉ cần cải tiến sơ đồ tính FFT sẽ được sơ đồ IFFT.

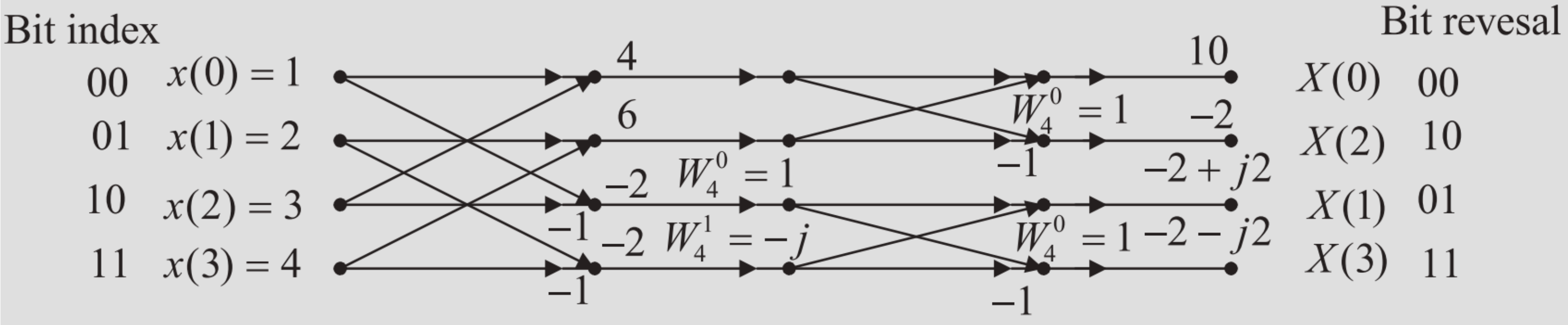


# Ví dụ FFT phân chia theo tần số

Cho dãy $x(n)$ với $0 \leq n \leq 3$ ở đó $x(0) = 1, x(1) = 2, x(2) = 3, x(3) = 4$

a. Đánh giá DFT $\mathrm{X}(k)$ sử dụng phương pháp FFT phân chia theo tần số
b. Xác định số lượng các phép nhân

Giải:



# Ví dụ tính IFFT phân chia theo tần số

Cho dãy $\mathrm{X}(k)$ với $0 \leq k \leq 3$ đã tính ở ví dụ trước. Hãy tìm biến đổi FFT ngược của $\mathrm{X}(k)$ sử dụng phương pháp FFT phân chia theo tần số

Giải: