Biểu diễn tín hiệu và hệ thống trong miền Z

Nội dung

- Biến đổi Z
- Biến đổi Z ngược
- Tính chất của biến đổi Z
- Biểu diễn hệ thống rời rạc trong miền Z

Biến đổi z - ZT
(z -Transform)

Biến đổi Z

- Các phép biến đổi làm nhiệm vụ chuyển miền biến số này sang miền biến số khác.
- Mục đích: Làm cho việc nghiên cứu tín hiệu và hệ thống dễ dàng hơn.
- Biến đổi z (ZT: z- transform) là một trong các phương pháp biến đổi phổ biến nhất.

Biến đổi Z – Định nghĩa

- Biến đổi Z hai phía:
  - Biến đổi z của một dãy x(n) được định nghĩa như sau:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n}$$

  - Biến đổi z biến đổi việc biểu diễn tín hiệu $x(n)$ trong miền biến số độc lập tự nhiên n thành việc biểu diễn tín hiệu $X(z)$ trong miền z.
  - Ký hiệu: $\boldsymbol{x(n) \xrightarrow{ZT} X(z); X(z) = ZT\{x(n)\}}$
  - $X(z)$ là chuỗi lũy thừa vô hạn, $X(z)$ tồn tại khi và chỉ khi chuỗi hội tụ.
- Biến đổi Z một phía:
  - Biến đổi z một phía của một dãy x(n) được định nghĩa như sau:

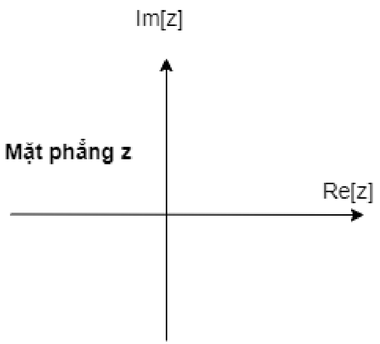
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n).z^{-n}$$

  - Ký hiệu: $\boldsymbol{x(n) \xrightarrow{ZT^1} X(z); X(z) = ZT^1\{x(n)\}}$

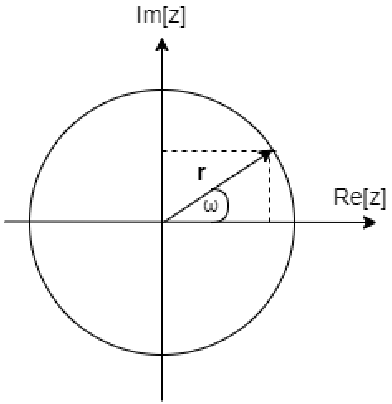
Biểu diễn trong miền phức

- Biểu diễn trong miền mặt phẳng phức:

$$z = Re[z] + j.Im[z]$$



- Biểu diễn trong tọa độ cực:
  - $z = r.e^{j\omega} = r(cos\omega + jsin\omega) = Re[z] + j.Im[z]$
  - Nếu $|z| = r = 1$ ta có vòng tròn đơn vị.



Ví dụ: Tìm biến đổi z của các dãy

- $x_1(n) = \delta(n); x_2(n) = \delta(n-1); x_3(n) = \delta(n+1);$
- $x_4(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n); x_5(n) = (2)^n u(n); \sum_{n=0}^{\infty}(a)^n = \frac{1}{1-a}$ $với\ |a| < 1$
- **Giải**:
- $X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n).z^{-n} = 1.z^0 = 1$
- $X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-1).z^{-n} = 1.z^{-1} = z^{-1}$
- $X_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n+1).z^{-n} = 1.z^1 = z$
- $X_4(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_4(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n).z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n = \frac{1}{1-2z}$

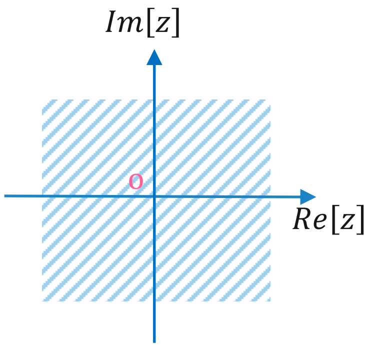
  với $|1/2z| < 1$ hay $|z| > 1/2$
- $X_5(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_5(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2)^n u(n).z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2z^{-1})^n = \frac{1}{1-2z^{-1}}$

  với $|2z^{-1}| < 1$ hay $|z| > 2$

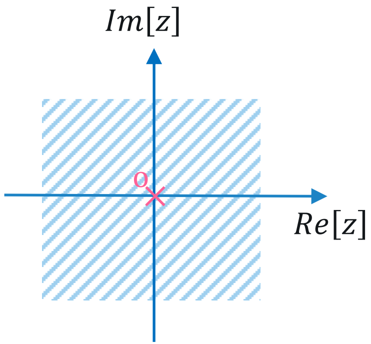
Sự tồn tại của biến đổi z

- Tập hợp tất cả các giá trị của z mà tại đó chuỗi $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n}$ hội tụ được gọi là miền hội tụ của biến đổi z.
- Ký hiệu: RC (Region of Convergence) – miền hội tụ.
- Ví dụ: Tìm miền hội tụ của các biến đổi z trong ví dụ trước.

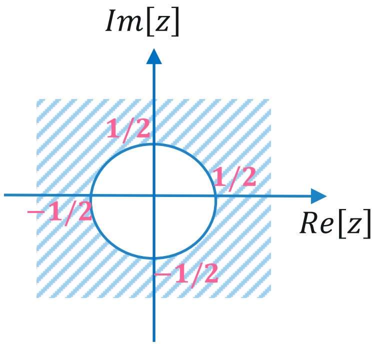
$X_1(z) = 1;\ X_2(z) = z^{-1}; X_3(z) = z; X_4(z) = \frac{1}{1-2z}$ với $|z| > 1/2; X_5(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}$ với $|z| > 2$



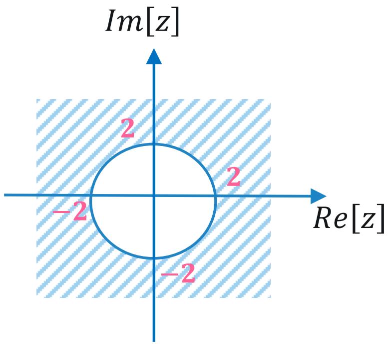
$RC[X_1(z)]; RC[X_3(z)]$



$RC[X_2(z)]$



$RC[X_4(z)]$



$RC[X_5(z)]$

Điểm cực và điểm không (POLE and ZERO)

- Định nghĩa điểm không:
  - Trong biến đổi z, nếu tại các điểm z_{or} mà tại đó $X(z)$ triệt tiêu $\left(X(z)|_{z=z_{or}} = 0\right)$ thì z_{or} gọi là các điểm không của $X(z)$.
- Định nghĩa điểm cực:
  - Nếu tại các điểm z_{pk} mà tại đó $X(z)$ không xác định $\left(X(z)|_{z=z_{pk}} \to \infty\right)$ thì những điểm z_{pk} gọi là các điểm cực của $X(z)$.
- Biểu diễn:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_M z^M}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_N z^N} = \frac{b_M \prod_{r=1}^{M}(z - z_{or})}{a_N \prod_{r=1}^{N}(z - z_{pk})}$$

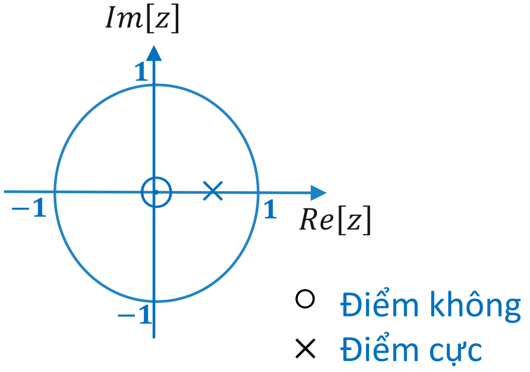
  - $X(z)$ có M điểm không và N điểm cực.

Ví dụ điểm cực và điểm không (POLE and ZERO)

- Cho $X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$. Tìm điểm cực và điểm không.
- Giải: $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$

$$N(z) = z \implies z_{01} = 0$$

$$D(z) = z - 1/2 \implies z_{p1} = 1/2$$



Một số biến đổi z thông dụng

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$A\delta[n]$	A	Everywhere
$A\delta[n-n_0]$	Az^{-n_0}	Everywhere
$A \cdot u[n]$	$\frac{A}{1-z^{-1}} = \frac{Az}{z-1}$	$\|z\| > 1$
$Aa^n \cdot u[n]$	$\frac{A}{1-az^{-1}} = \frac{Az}{z-a}$	$\|z\| > \|a\|$
$Aa^n e^{j\omega n} \cdot u[n]$	$\frac{A}{1-ae^{j\omega}z^{-1}} = \frac{Az}{z-ae^{j\omega}}$	$\|z\| > \|a\|$
$Aa^n \cos(\omega n) \cdot u[n]$	$\frac{Az(z-a\cos\omega)}{z^2-(2a\cos\omega)z+a^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$Aa^n \cos(\omega n + \alpha) \cdot u[n]$	$\frac{\frac{A}{2}e^{j\alpha}}{1-ae^{j\omega}z^{-1}} + \frac{\frac{A}{2}e^{-j\alpha}}{1-ae^{-j\omega}z^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$A\cos(\omega n) \cdot u[n]$	$\frac{Az(z-\cos\omega)}{z^2-(2\cos\omega)z+1}$	$\|z\| > 1$
$A\sin(\omega n) \cdot u[n]$	$\frac{Az\sin\omega}{z^2-(2\cos\omega)z+1}$	$\|z\| > 1$
$An \cdot u[n]$	$\frac{Az^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{Az}{(z-1)^2}$	$\|z\| > 1$
$An^2 \cdot u[n]$	$\frac{Az^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3} = \frac{Az(z+1)}{(z-1)^2}$	$\|z\| > 1$
$Ana^n \cdot u[n]$	$\frac{Aaz^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{Aaz}{(z-a)^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$Aa^n \cdot u[-n-1]$	$\frac{-A}{1-az^{-1}} = \frac{-Az}{z-a}$	$\|z\| < \|a\|$

Biến đổi z ngược - IZT (Inverse z-Transform)

Biến đổi z ngược

- Định nghĩa biến đổi z ngược:
  - Biến đổi z ngược được định nghĩa như sau:

$$x(n) = ZT^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

$\oint$– đường cong kín bao quanh gốc tọa độ. Tích phân đi theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ).

- Ký hiệu:
  - $IZT[X(z)] = \mathrm{x(n)}; X(z) \xrightarrow{IZT} x(n)$
- Phương pháp tính biến đổi z ngược:
  - Phương pháp thặng dư (tìm trực tiếp tích phân)
  - Khai triển thành chuỗi lũy thừa của z hoặc z^{-1}
  - Khai triển thành các phân thức tối giản và sử dụng bảng biến đổi cơ bản.

Phương pháp thặng dư

- Theo lý thuyết thặng dư:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz = \sum_k Res\left[X(z)z^{n-1}|_{z=z_{pk}}\right]$$

  - z_{pk}: các điểm cực của $X(z)z^{n-1}$ nằm trong đường cong kín C.
  - $Res\left[X(z)z^{n-1}|_{z=z_{pk}}\right]$: thặng dư của $X(z)z^{n-1}$ tại điểm cực z_{pk}
  - Nếu $X(z)z^{n-1} = \frac{\psi(z)}{(z-z_{pk})^{s_k}}$; z_{pk} là cực bội bậc s_k.

  Thặng dư được tính theo công thức sau:

$$Res\left[X(z)z^{n-1}|_{z=z_{pk}}\right] = \frac{1}{(s_k-1)!}\left.\frac{d^{s_k-1}\psi(z)}{dz^{s_k-1}}\right|_{z=z_{pk}}$$

  Nếu z_{pk} là điểm cực đơn ($s_k = 1$): $Res\left[X(z)z^{n-1}|_{z=z_{pk}}\right] = \frac{1}{0!}\left.\frac{d^0\psi(z)}{dz^0}\right|_{z=z_{pk}} = \psi(z_{pk})$

  Nếu z_{pk} là cực đơn bội 2 ($s_k = 2$): $Res\left[X(z)z^{n-1}|_{z=z_{pk}}\right] = \frac{1}{1!}\left.\frac{d^1\psi(z)}{dz^1}\right|_{z=z_{pk}} = \psi'(z_{pk})$

Ví dụ: Phương pháp thặng dư

- Cho $X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$; miền hội tụ $RC[X(z)]$: $|z| > 1/2$

  Giải:

  $X(z)z^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} z^{n-1} = \frac{z^n}{z-\frac{1}{2}}$

  $x(n) \geq 0$; $x(n)$ nhân quả.

  Có một cực đơn: $z_{pk} = \frac{1}{2}$; $s_k = 1$

  $x(n) = \sum_k Res\left[X(z)z^{n-1}|_{z=1/2}\right] = \psi(1/2)$

  $\psi(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) X(z)z^{n-1} = z^n$

  $\psi(1/2) = \left(\frac{1}{2}\right)^n; n \geq 0$

  Vậy: $x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

Ví dụ: Phương pháp thặng dư

- Cho $X(z) = \frac{z}{(z-z_{pk})^{m+1}}$; miền hội tụ $RC[X(z)]$: $|z| > z_{pk}$. Tìm $x(n)$

Giải:

$X(z)z^{n-1} = \frac{z}{(z-z_{pk})^{m+1}} z^{n-1} = \frac{z^n}{(z-z_{pk})^{m+1}}$; z_{pk} là cực bội bậc $s_k = m + 1$

$$x(n) = \sum_k Res\left[X(z)z^{n-1}|_{z=z_{pk}}\right] = \frac{1}{(s_k-1)!} \frac{d^{s_k-1}\psi(z)}{dz^{s_k-1}}\bigg|_{z=z_{pk}} = \frac{1}{m!} \frac{d^m\psi(z)}{dz^m}\bigg|_{z=z_{pk}}$$

$$\psi(z) = X(z)z^{n-1}(z - z_{pk})^{s_k} = z^n$$

$$\frac{d^m\psi(z)}{dz^m} = n(n-1)\ldots(n-m+1)\, z^{n-m}$$

Vậy: $x(n) = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} {z_{pk}}^{n-m} \mathrm{u(n)}$

Ví dụ: Phương pháp thặng dư

- Cho $X(z) = \frac{A_k}{z - z_{pk}}$; miền hội tụ $RC[X(z)]$: $|z| > |z_{pk}|$. Tìm $x(n)$

Giải:

$X(z)z^{n-1} = \frac{A_k}{z-z_{pk}} z^{n-1} = \frac{A_k z^{n-1}}{z-z_{pk}}$; z_{pk} là cực đơn

$x(n) = \sum_k Res\left[X(z)z^{n-1}|_{z=z_{pk}}\right] = \psi(z)|_{z=z_{pk}}$

$\psi(z) = X(z)z^{n-1}(z - z_{pk}) = A_k z^{n-1}|_{z=z_{pk}} = A_k(z_{pk})^{n-1}$

Vậy: $x(n) = A_k\,(z_{pk})^{n-1}\mathrm{u}(\mathrm{n}-1)$

Khai triển thành chuỗi lũy thừa

- Ở phương pháp này, ta khai triển biến đổi z thành một chuỗi lũy thừa có dạng:
  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n z^{-n}$ trong đó α_n là hệ số của chuỗi lũy thừa.
  So sánh với định nghĩa: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n} \Longrightarrow \; x(n) \equiv \alpha_n$
- Ví dụ: Cho $X(z) = \frac{z}{z-2}$. Tìm $x(n)$ với điều kiện miền hội tụ $\mathrm{RC}[X(z)] = \{z; |z| > 2\}$

Giải: $X(z) = \frac{z}{z-2} = \frac{1}{1-2z^{-1}}$

Thực hiện chia đa thức:

$$
\begin{array}{r|l}
1 & 1 - 2z^{-1} \\ \cline{2-2}
- \; 1 - 2z^{-1} & 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 8z^{-3} + \ldots \\ \cline{1-1}
2z^{-1} & \\
- \; 2z^{-1} - 4z^{-2} & \\ \cline{1-1}
4z^{-2} & \\
- \; 4z^{-2} - 8z^{-3} & \\ \cline{1-1}
8z^{-3} & \\
- \; 8z^{-3} - 16z^{-4} & \\ \cline{1-1}
16z^{-4} &
\end{array}
$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2z^{-1})^n$$

$$\Longrightarrow x(n) = 2^n u(n)$$

Khai triển thành phân thức tối giản

- $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_Mz^M}{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_Nz^N} = \frac{b_M\prod_{r=1}^{M}(z-z_{or})}{a_N\prod_{r=1}^{N}(z-z_{pk})}$
- Nếu $M \geq N$:

$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = S(z) + \frac{P(z)}{Q(z)}$ với $S(z)$ là phần nguyên, $D(z) \equiv Q(z); degS(z) = M - N$

$$S(z) = B_{M-N}z^{M-N} + \ B_{M-N-1}z^{M-N-1} + \cdots + B_1z^1 + B_0; ZT[\delta(n+m)] = z^m$$

$$s(n) = B_{M-N}\delta(n+M-N) + \ B_{M-N-1}\delta(n+M-N-1) + \cdots + B_1\delta(n+1) + B_0\ \delta(n)$$

- Nếu $M < N$: $\quad X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \equiv \frac{P(z)}{Q(z)}$

Trường hợp 1: $X(z)$ chỉ có các cực đơn. $X(z) = \sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{z-z_{pk}}$; z_{pk} là các điểm cực.

$$A_k = (z - z_{pk})\frac{P(z)}{Q(z)}\bigg|_{z=z_{pk}}$$

Khai triển thành phân thức tối giản

Trường hợp 2: $X(z)$ có một cực bội z_{pl} bậc s, còn lại là cực đơn.

$$\boxed{X(z) = \sum_{k=1}^{N-s} \frac{A_k}{z-z_{pk}} + \sum_{j=1}^{s} \frac{C_j}{(z-z_{pl})^j}}$$

$$A_k = (z - z_{pk}) \frac{P(z)}{Q(z)}\Big|_{z=z_{pk}} ;\ C_j = \frac{1}{(s-j)!} \frac{d^{s-j}}{dz^{s-j}} (z - z_{pl})^s \frac{P(z)}{Q(z)}\Big|_{z=z_{pl}}$$

Trường hợp 3: $X(z)$ có L cực bội bậc $s_1, s_2, \ldots, s_L$, còn lại là cực đơn.

$$\boxed{X(z) = \sum_{k=1}^{N'} \frac{A_k}{z-z_{pk}} + \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{s_i} \frac{C_{js_i}}{(z-z_{pl_i})^j} \ ;\ N' = N - \sum_{i=1}^{L} s_i}$$

$$A_k = (z - z_{pk}) \frac{P(z)}{Q(z)}\Big|_{z=z_{pk}} ;\ C_j = \frac{1}{(s_j-j)!} \frac{d^{s_j-j}}{dz^{s_j-j}} (z - z_{pl_i})^{s_j} \frac{P(z)}{Q(z)}\Big|_{z=z_{pl_i}}$$

Lưu ý: $IZT\left[\frac{z}{(z-z_{pk})^{m+1}}\right] = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\ {z_{pk}}^{n-m}\mathrm{u(n)}$

Ví dụ: Tìm IZT bằng khai triển thành phân thức tối giản

$$\text{IZT}\left[X(z) = \frac{A_k}{z - z_{pk}}\right] = A_k\,(z_{pk})^{n-1}\text{u}(\text{n}-1)$$

$$\text{IZT}\left[X(z) = \frac{z}{z - z_{pk}}\right] = (z_{pk})^{n}\text{u}(\text{n})$$

Cho $X(z) = \frac{z+2}{z^2-3z+2}$. Tìm $x(n)$.

Cách 1: $X(z) = \frac{z+2}{z^2-3z+2} = \frac{z+2}{(z-1)(z-2)} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-2}$

$A_1 = \cancel{(z-1)}\frac{z+2}{\cancel{(z-1)}(z-2)}\Big|_{z=1} = -3;\ A_2 = \cancel{(z-2)}\frac{z+2}{\cancel{(z-1)}(z-2)}\Big|_{z=2} = 4;$

Vậy $X(z) = -3\frac{1}{z-1} + \frac{4}{z-2}$; $\Longrightarrow x(n) = [(-3)1^{n-1} + 4.2^{n-1}]\text{u}(\text{n}-1)$

Cách 2: $\frac{X(z)}{z} = \frac{z+2}{z(z-1)(z-2)} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-2} + \frac{A_3}{z}$ có 3 điểm cực $z_{p1} = 1; z_{p2} = 2; z_{p3} = 0$

$A_1 = (z-1)\frac{z+2}{(z-1)(z-2)z}\Big|_{z=1} = -3;\ A_2 = (z-2)\frac{z+2}{(z-1)(z-2)z}\Big|_{z=2} = 2;\ A_3 = z\frac{z+2}{z(z-1)(z-2)}\Big|_{z=0} = 1$

$\frac{X(z)}{z} = -3\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-2} + \frac{1}{z} \Longrightarrow X(z) = -3\frac{z}{z-1} + \frac{2z}{z-2} + 1$

$$x(n) = [(-3).1^n + 2.2^n + \delta(n)]\text{u}(\text{n})$$

Các tính chất của biến đổi z

Các tính chất của biến đổi z - Tính tuyến tính

Nếu có 2 dãy $x_1[n]$ và $x_2[n]$ và 2 biến đổi z tương ứng $X_1(z)$ và $X_2(z)$ thì tính chất tuyến tính cho phép chúng ta viết: $ZT\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aX_1[z] + bX_2[z]$

$$X(z) = Zax_1[n] + bx_2[n] \quad = aX_1(z) + bX_2(z)$$

Chứng minh:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad = \sum_{n=0}^{\infty} (ax_1[n] + bx_2[n])z^{-n}$$

$$= a\sum_{n=0}^{\infty} x_1[n]z^{-n} + b\sum_{n=0}^{\infty} x_2[n]z^{-n} \quad = aX_1(z) + bX_2(z)$$

Các tính chất của biến đổi z - Tính dịch thời gian & đảo thời gian

Tính dịch thời gian:

Nếu có dãy $x[n-k]$ là dãy dịch thời gian của $x[n]$ thì ta có $ZT\{x[n-k]\} = z^{-k}X(z)$

Chứng minh:

$$Y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} x[n-k]z^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m-k} = z^{-k}\sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m} = z^{-k}X(z)$$

Tính đảo thời gian:

Nếu có dãy $x[-n]$ là dãy đảo thời gian của $x[n]$ thì ta có $ZT\{x[-n]\} = X(z^{-1})$

Chứng minh:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[-n]z^{-n}$$ Lấy m=-n:

$$\sum_{m=0}^{-\infty} x[m]z^{m} = \sum_{m=-\infty}^{0} x[m]z^{m} = \sum_{-m=\infty}^{0} x[m](z^{-1})^{-m} = X(z^{-1})$$

Các tính chất của biến đổi z

Thay đổi tỉ lệ trong miền z:

Khi nhân dãy $x[n]$ trong miền thời gian với a^n thì biến đổi z tương đương của tín hiệu mới được thay đổi tỉ lệ với hệ số a. $ZT\{x[n].a^n\} = X(z/a)$

Chứng minh:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n](a^{-1}z)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n](z/a)^{-n} = X(z/a)$$

Vi phân trong miền z:

Ta có: $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$

Lấy vi phân theo z ta được:

$$\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} = -\sum_{n=0}^{\infty} n x[n] z^{-n-1} = -z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} n x[n] z^{-n}$$

$$-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=0}^{\infty} (n x[n]) z^{-n}$$

$$ZT\{n.x[n]\} = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

Các tính chất của biến đổi z- Tích chập của 2 dãy

Tích chập trong miền thời gian tương ứng với phép nhân trong miền z.

$$ZT\{x[n] * h[n]\} = X(z)H(z)$$

Chứng minh:

Tích chập của hai dãy x[n] và h[n] được định nghĩa là: $x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]h[n-k]$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x[n] * h[n])z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} x[k]h[n-k]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} x[k]h[n-k]z^{-(n-k)}z^{-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k})h[n-k]z^{-(n-k)} = \sum_{n=0}^{\infty} X(z)h[n-k]z^{-(n-k)}$$

$$= X(z)\sum_{n-k=0}^{\infty} h[n-k]z^{-(n-k)} = X(z)H(z)$$

Các tính chất của biến đổi

Định lý giá trị đầu:

Định lý giá trị đầu cho chúng ta công cụ tính toán giá trị đầu tiên của dãy x[n], x[0] được tính bằng cách lấy giới hạn của giá trị X(z). $x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$

Chứng minh:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0]z^{0} + x[1]z^{-1} + z[2]z^{-2} + \dots.$$

Định lý giá trị cuối:

Định lý giá trị đầu cho chúng ta biết giá trị cuối của dãy x[n], hay giá trị vô hạn của x[n] được tính bằng cách sử dụng giới hạn của X(z). $x[\infty] = \lim_{z \to 1} X(z)(1 - z^{-1})$

Chứng minh: $$X(z) - z^{-1}X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} - z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$= x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots - z^{-1}(x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots)$$

Lấy giới hạn $z \to 1$ được điều chứng minh.

Các tính chất của biến đổi z

Sequence	Transform	ROC
1. $\{x[n]\}$	$X(z)$	R_x
2. $a\{x[n]\}+b\{y[n]\}$	$aX(z)+bY(z)$	contains $R_x \cap R_y$
3. $\{x[n-n_0]\}$	$z^{-n_o}X(z)$	R_x, except change at $z=o, z=\infty$
4. $\{z_0^n x[n]\}$	$X(z/z_0)$	$\{z/z_0 \epsilon R_x\}$
5. $\{nx[n]\}$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	R_x, except change at $-z=0, z=\infty$
6. $\{x^*[n]\}$	$X^*(z^*)$	R_x
7. $\{x[-n]\}$	$X(1/z)$	$\{1/Z \epsilon R_x\}$
8. $\{x[n]\} * \{y[n]\}$	$X(z)Y(z)$	Contains $R_x \cap R_y$
9. $\{x[n]y[n]\}$	$\frac{1}{2\pi j}\oint X(v)Y(z/v)u_{dv}^{-1}$	Contains $R_x R_y$

10. $x_1[n].x_2[-n]$ $\quad X_1[z].X_2[1/z]$

Biểu diễn hệ thống rời rạc trong miền z

Hàm truyền đạt của hệ thống

Miền n:

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

Miền z:

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)$$

$$ZT\{x[n] * h[n]\} = X(z)H(z) = Y(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = ZT\{h(n)\}$$

H(z): hàm truyền đạt của hệ thống hay biến đổi z của đáp ứng xung

Hệ thống tuyến tính bất biến trong miền z

Xét PTSP tổng quát: $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$

Biến đổi z hai phía của PTSP:

$$ZT\left[\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]\right] = ZT\left[\sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]\right]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k ZT\big[y[n-k]\big] = \sum_{r=0}^{M} b_r ZT\big[x[n-r]\big]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y[z] = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} X[z]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Nếu $a_0 = 1$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Giải PTSP tuyến tính hệ số hằng bằng biến đổi z

- Việc giải PTSP hệ số hằng trở nên đơn giản khi giải trong miền Z:
  - Biến đổi PTSP hệ số hằng sang miền Z bằng biến đổi Z.
  - Giải phương trình số học để tìm nghiệm trong miền Z.
  - Sử dụng biến đổi Z ngược để tìm nghiệm trong miền n.
- Chú ý:
  - Nếu hệ thống có điều kiện đầu thì cần sử dụng biến đổi z một phía.

Ví dụ: Giải PTSP tuyến tính hệ số hằng bằng biến đổi z

- Cho PTSP: $y(n) - 5y(n-1) = x(n)$

  Tìm $y(n)$ khi $x(n) = 5^n u(n)$ và điều kiện đầu $\mathrm{y}(-1) = 0$.
- Giải:

$$x(n) = 5^n u(n) \Longrightarrow X(z) = \frac{1}{1-5z^{-1}}$$

$$y(n) - 5y(n-1) = x(n) \Longrightarrow Y(z) - 5.z^{-1}Y(z) = X(z) = \frac{1}{1-5z^{-1}}$$

$$\Longrightarrow \ Y(z) = \frac{1}{(1-5z^{-1})^2}$$

$$y(n) = IZT[Y(z)] = IZT\left[\frac{1}{(1-5z^{-1})^2}\right] = 5^n(n+1)u(n)$$

Tính ổn định của hệ thống

- Điều kiện ổn định của hệ thống trong miền n là:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

- Điều kiện ổn định của hệ thống trong miền z:

Một HTTTBB nhân quả là ổn định nếu và chỉ nếu tất cả các điểm cực của hàm truyền đạt H(z) nằm bên trong vòng tròn đơn vị (tức là chỉ cần một điểm cực nằm trên hoặc nằm ngoài vòng tròn đơn vị là hệ thống mất ổn định).

- Ví dụ: Xét tính ổn định của hệ thống có hàm truyền đạt $H(z) = \frac{z}{z-a}$

Hàm truyền đạt này có 1 điểm cực $z_{pk} = a$.

  - $a < 1$ hệ thống ổn định
  - $a \geq 1$ hệ thống không ổn định.

Tiêu chuẩn ổn định Jury

- Cho hàm truyền đạt của hệ thống: $H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$; $\mathrm{D(z)} = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}$

Hàng	Hệ số						
1	a_0	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_{N-1}	a_N
2	a_N	a_{N-1}	a_{N-2}	a_{N-3}	$\dots$	a_1	a_0
3	c_0	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_{N-2}	c_{N-1}
4	c_{N-1}	c_{N-2}	c_{N-3}	c_{N-4}	$\dots$	c_1	c_0
5	d_0	d_1	d_2	d_3	$\dots$		
6	d_{N-2}	c_{N-3}	c_{N-4}	c_{N-5}			
…							
2N-3	r_0	r_1	r_2				

$$c_i = det\begin{bmatrix} a_0 & a_{N-i} \\ a_N & a_i \end{bmatrix} = a_0\, a_i - a_N\, a_{N-\mathrm{i}};\ i = \overline{0, N-1}$$

$$d_i = det\begin{bmatrix} c_0 & c_{N-1-i} \\ c_{N-1} & c_i \end{bmatrix} = c_0\, c_i - c_{N-1}\, c_{N-1-\mathrm{i}};\ i = \overline{0, N-2}$$

Tiêu chuẩn ổn định Jury:

1. $D(z)|_{z=1} > 0$

2. $D(z)|_{z=-1} > 0$ với N chẵn

$D(z)|_{z=-1} < 0$ với N lẻ

3. $1 > |a_N|;\ |c_0| > |c_{N-1}|;\ |d_0| > |d_{N-2}|; \dots, |r_0| > \ |r_2|$

Tiêu chuẩn này thích hợp cho các hệ thống có hàm truyền đạt có mẫu số có bậc lớn.

Ví dụ: Xét tính ổn định của hệ thống bằng tiêu chuẩn Jury

- Cho HTTTBB được mô tả bằng PTSP: $y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = x(n)$. Tìm $\mathrm{H}(z)$ và xét tính ổn định theo tiêu chuẩn Jury.
- Lấy biến đổi Z cả hai vế: $Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) = X(z)$

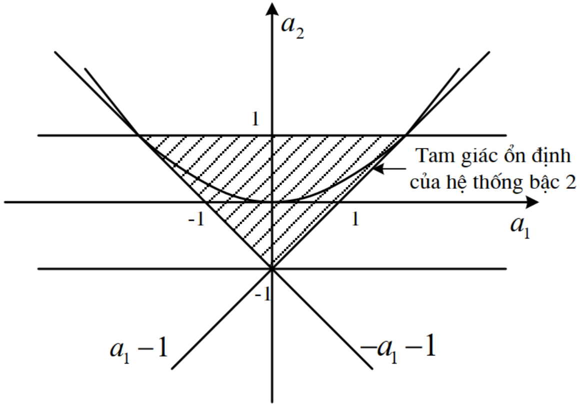
Hàm truyền đạt: $\mathrm{H}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}}$; $\mathrm{D(z)} = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$

N=2; 2N-3 = 1, ta có bảng Jury:

1	a_0	a_1	a_2

Tiêu chuẩn ổn định Jury:

1. $D(z)|_{z=1} = 1 + a_1 + a_2 > 0 \Rightarrow a_2 \succ -1 - a_1$
2. $D(z)|_{z=-1} = 1 - a_1 + a_2 > 0 \Rightarrow a_2 \succ -1 + a_1$
3. $1 > |a_2|; \Rightarrow -1 < a_2 < 1$



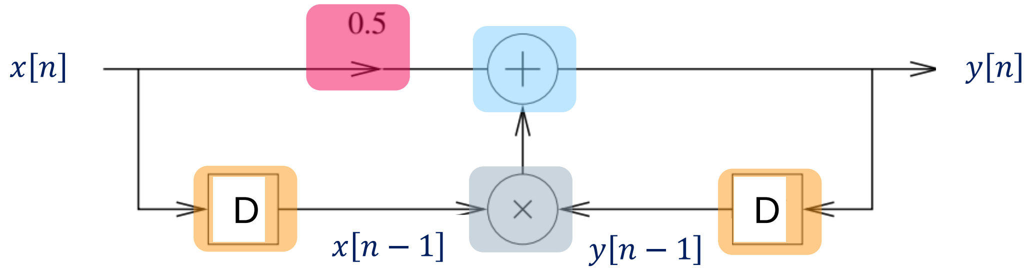
Câu hỏi

Thực hiện hệ thống trong miền Z

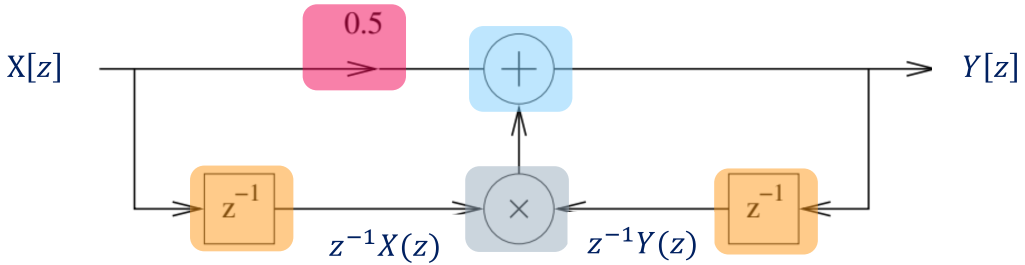
Các phần tử thực hiện

- Để thực hiện một hệ thống số cần các khối cơ bản: *bộ cộng, bộ nhân hằng số, bộ nhân tín hiệu, thành phần trễ*.

Miền n



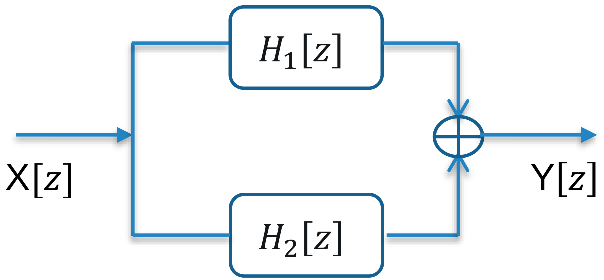
Miền z



Cách mắc sơ đồ hệ thống trong miền z

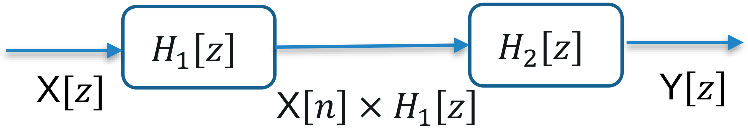
- Nếu các hệ thống mắc song song với nhau thì hàm truyền đạt của hệ thống tổng quát sẽ bằng tổng các hàm truyền đạt của các hệ thống thành phần:

$$H(z) = \sum_{i=1}^{N} H_i(z)$$



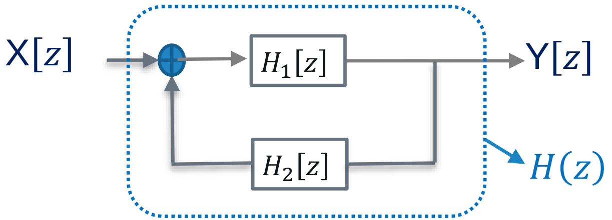
- Nếu các hệ thống mắc nối tiếp với nhau thì hàm truyền đạt của hệ thống tổng quát sẽ bằng tích các hàm truyền đạt của các hệ thống thành phần.

$$H(z) = \prod_{i=1}^{N} H_i(z)$$



- Nếu $H_2[z]$ mắc hồi tiếp với $H_1[z]$ thì hàm truyền đạt của hệ thống sẽ bằng:

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)}$$



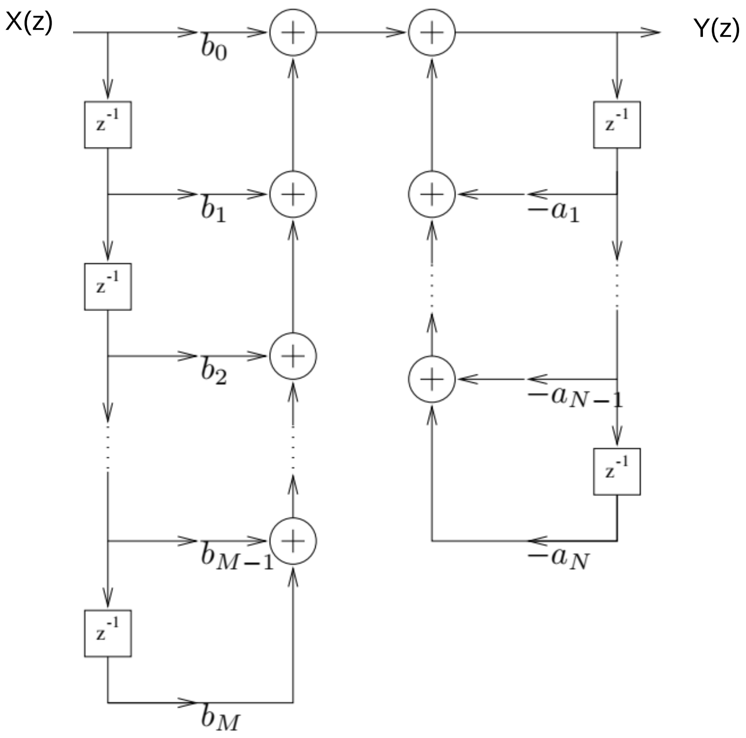
Chứng minh:

$$Y(z) = (X(z) + Y(z).H_2(z))H_1(z)$$

$$Y(z)\big(1 - H_2(z)H_1(z)\big) = X(z) \Rightarrow \ H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)}$$

Thực hiện hệ thống – Dạng chuẩn tắc 1&2

Dạng chuẩn tắc 1



Dạng chuẩn tắc 2