



UNIVERZITET U BEOGRADU

MAŠINSKI FAKULTET

Računarska inteligencija

Rešavač NxN Sudokua

Studenti:

Marija Sitarica 4003/2024

Mihajlo Savić 4018/2024

Beograd, 24. oktobar 2025.

Sadržaj

1	Uvod	6
2	Teorijske osnove i korišćena metodologija	8
2.1	Sudoku problem i formalna ograničenja	8
2.2	Iterativna lokalna pretraga (Iterated Local Search)	9
2.2.1	Lokalno Pretraživanje (Local Search)	10
2.2.2	Perturbacija	12
2.2.3	Kriterijum prihvatanja rešenja (Acceptance Criterion)	13
3	Implementacija algoritma	15
3.1	Korišćene biblioteke i zavisnosti	15
3.2	Klasa SudokuSolver	16
3.3	Klasa ILS_CP: Hibridni algoritam Iterativne Lokalne Pretrage	17
3.4	Klasa SudokuCP	19
3.5	Faze implementacije ILS-CP algoritma	21
3.5.1	Struktura algoritma	21
3.5.2	Faza 1: Inicijalna postavka i definicija problema	22
3.5.3	Faza 2: Lokalno pretraživanje (Intenzifikacija)	23
3.5.4	Faza 3: Hibridna perturbacija	24
3.5.5	Faza 4: Kontrolni ILS ciklus	24
3.6	Funkcija cilja	24
3.6.1	Pomoćne funkcije za računanje konflikata	25
4	Eksperimentalno istraživanje	26
4.1	Prva serija eksperimenata - Eksperimenti validacije performansi i parametara	27
4.1.1	Eksperimentalna postavka prve serije eksperimenata	27
4.1.2	Ulazne instance i definicija težine	27
4.1.3	Rezultati eksperimenta 1 validacije performansi i parametara	29
4.1.4	Analiza grafičkog prikaza eksperimentalnih rezultata	30
4.1.5	Rezultati eksperimenta 2 validacije performansi i parametara	33
4.1.6	Analiza grafičkog prikaza eksperimentalnih rezultata	34
4.1.7	Rezultati eksperimenta 3 validacije performansi i parametara	36
4.1.8	Analiza grafičkog prikaza eksperimentalnih rezultata	37

4.2	Druga serija eksperimenata - Uporedni eksperiment (Verifikacija efikasnosti)	38
4.2.1	Eksperimentalna postavka druge serije eksperimenata	38
4.2.2	Ulazne instance i definicija težine	39
4.2.3	Rezultati Uporednog eksperimenta (Verifikacija efikasnosti)	40
4.2.4	Analiza grafičkog prikaza eksperimentalnih rezultata	42
4.2.5	Poređenje implementiranog algoritma sa referentnim radom	45
5	Zaključak	47
6	Literatura	49
7	Prilozi	50

Spisak slika

2.1	Sudoku	8
2.2	Iterativna Lokalna Pretraga	9
2.3	Min-Conflicts heuristika sa Tabu listom	12
2.4	ILS Algoritam za Sudoku sa svim koracima	14
3.1	Dijagram toka hibridnog ILS-CP algoritma	21
3.2	Swap metoda	23
3.3	Ograničenja	25
4.1	Grafik - Skalabilnost	31
4.2	Grafik - Vreme izvršavanja po veličini problema	31
4.3	Grafik - Najbolja cena po Vremenu izvršavanja (Medijana)	32
4.4	Grafik - Uticaj parametra α	35
4.5	Grafik - Smanjen broj LS iteracija	37
4.6	Grafik - Stopa uspešnosti algoritma	41
4.7	Grafik - Prosečno vreme izvršavanja u funkciji Procenta fiksnih ćelija	42
4.8	Grafik - Prosečan broj LS poteza u funkciji Procenta fiksnih ćelija	43
4.9	Grafik - Efikasnost i Napor	44

Spisak tabela

4.1	Ulazne instance korišćene za testiranje performansi algoritma, Prva serija eksperimenata	28
4.2	Konfiguracija parametara za tri eksperimentalna scenarija	28
4.3	Rezultati Eksperimenta 1: Inicijalni parametri	29
4.4	Rezultati Eksperimenta 2: Agresivna Diversifikacija ($\alpha = 0.2$)	33
4.5	Rezultati Eksperimenta 3: Smanjen broj LS Iteracija	36
4.6	Ulazne instance korišćene za testiranje performansi algoritma, Druga serija eksperimenata	39
4.7	Konfiguracija parametara za drugu seriju eksperimenata	40
4.8	Rezultati Eksperimenta 4: Stopa uspešnosti i performanse po kategoriji težine problema	40
4.9	Poređenje eksperimentalne metodologije	45
4.10	Poređenje rezultata ILS-CP algoritma (9×9) sa referentnim radom	46

Sadržaj Priloga

7.1	Klasa SudokuSolver	50
7.2	Klasa ILS CP	58
7.3	Klasa SudokuCP	72

Glava 1

Uvod

Tema ovog projekta je razvoj inovativnih rešenja za Sudoku problem $N \times N$ dimenzija. Sudoku predstavlja jedan od najpoznatijih kombinatornih problema koji se često koristi kao test primer za evaluaciju različitih optimizacionih i heurističkih pristupa. Zbog svoje NP-teške prirode, klasične determinističke metode rešavanja često nisu dovoljne da obezbede efikasno pronalaženje rešenja u razumnom vremenu, naročito kod većih dimenzija Sudoku tabele.

Neke od najčešće korišćenih optimizacionih metoda za rešavanje problema Sudokua su:

- **Genetički algoritam (GA)** – evolucioni pristup zasnovan na principima selekcije, ukrštanja i mutacije, kojim se populacija potencijalnih rešenja iterativno poboljšava u smeru optimalnog rešenja;
- **Simulated Annealing (SA)** – stohastička metoda koja imitira proces termičkog žarenja metala i omogućava izbegavanje lokalnih minimuma prihvatanjem lošijih rešenja sa određenom verovatnoćom;
- **Tabu pretraga (Tabu Search)** – lokalna pretraga koja koristi memoriju prethodnih poteza kako bi se sprečilo vraćanje na već posećena rešenja;
- **Particle Swarm Optimization (PSO)** – populaciona metoda inspirisana kolektivnim ponašanjem jata ptica, gde svaka čestica predstavlja moguće Sudoku rešenje koje se prilagođava na osnovu iskustva sopstvenog i susednih rešenja;
- **Ant Colony Optimization (ACO)** – algoritam inspirisan ponašanjem kolonije mrava u kojem se rešenja formiraju sekvencijalnim donošenjem odluka vođenih intenzitetom feromonskih tragova.

Svaka od navedenih metoda ima svoje prednosti i ograničenja u pogledu brzine konvergencije, preciznosti i robusnosti. U zavisnosti od veličine Sudoku tabele, kao i zahteva projekta, najčešće se

kao optimalni pristupi izdvajaju *Genetčki algoritam* i *Simulated Annealing*, zbog njihove fleksibilnosti i dokazane efikasnosti u rešavanju kombinatornih problema.

Poslednjih godina sve više pažnje posvećuje se razvoju hibridnih algoritama koji kombinuju prednosti više optimizacionih tehnika. U ovom projektu razmatra se tehnika lokalnog pretraživanja zasnovana na *Min-Conflicts* heuristici, primenjena na problem rešavanja Sudokua. Centralna ideja rada ogleda se u predlogu hibridne metode pretraživanja koja integriše *programiranje ograničenja* (Constraint Programming – CP) kao mehanizam perturbacije unutar okvira *iteriranog lokalnog pretraživanja* (Iterated Local Search – ILS). [1]

Korišćeni pristup kombinuje snagu lokalne pretrage u pronalaženju kvalitetnih delimičnih rešenja sa fleksibilnošću CP tehnika u efikasnom rešavanju podproblema. Dok lokalno pretraživanje omogućava brzo nalaženje delimično validnih konfiguracija, CP komponenta uvodi dodatni sloj inteligentnog pretraživanja koji pomaže u efikasnom rešavanju konflikata i izbegavanju zaglavljivanja u lokalnim minimumima. Ovime se postiže ravnoteža između brzine konvergencije i kvaliteta rešenja.

Glava 2

Teorijske osnove i korišćena metodologija

2.1 Sudoku problem i formalna ograničenja

Sudoku je poznata logička zagonetka koja je globalnu popularnost stekla poslednjih decenija, ali sa naučne tačke gledišta, predstavlja tipičan problem zadovoljenja ograničenja (Constraint Satisfaction Problem - CSP). Zadatak je popuniti $N^2 \times N^2$ mrežu brojevima u opsegu od 1 do N^2 , gde je N dimenzija zagonetke. Standardni i najpoznatiji Sudoku problem ima red $N=3$ (9×9 matrica).

			2	6		7		1
6	8			7			9	
1	9				4	5		
8	2		1				4	
		4	6		2	9		
	5				3		2	8
		9	3				7	4
	4			5			3	6
7		3		1	8			

Slika 2.1. Sudoku

Problem je definisan setom unapred popunjenih ćelija u početnom stanju, dok ostale ćelije moraju zadovoljiti tri ključna ograničenja da bi rešenje bilo validno:

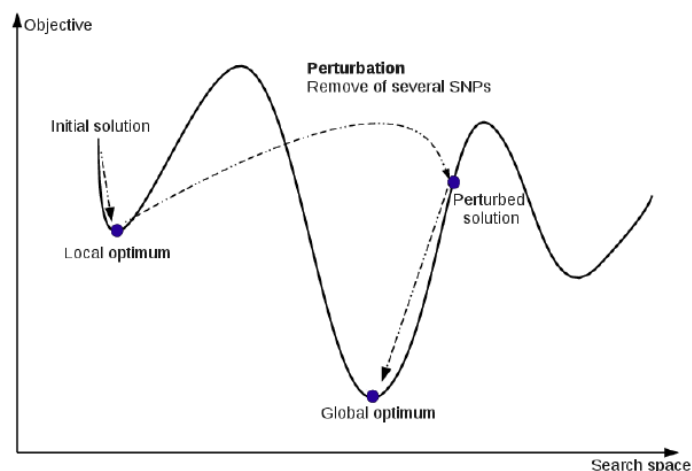
- **Ograničenje reda:** Svaki broj od 1 do N^2 mora se pojaviti tačno jednom u svakom redu.
- **Ograničenje kolone:** Svaki broj od 1 do N^2 mora se pojaviti tačno jednom u svakoj koloni.

-
- **Ograničenje bloka:** Svaki broj od 1 do N^2 mora se pojaviti tačno jednom u svakom $N \times N$ bloku.

Sudoku je formalno klasifikovan kao NP-kompletan problem, zbog čega velike instance služe kao izuzetno izazovni problemi za testiranje robusnosti i efikasnosti novih algoritama. Rešavanje ovih kompleksnih problema doprinosi razvoju inovativnih tehnika primenljivih i u drugim domenima od velike praktične važnosti, kao što je optimizacija raspoređivanja zaposlenih u kompaniji.

2.2 Iterativna lokalna pretraga (Iterated Local Search)

Iterativna Lokalna Pretraga (ILS) predstavlja metaheuristiku koja se koristi za prevazilaženje osnovnog nedostatka standardnih metoda lokalnog pretraživanja, a to je zaglavljivanje u lokalnom minimumu. Zasniva se na principu učenja (learning), tako što gradi sekvencu lokalno optimalnih rešenja korišćenjem znanja stečenog u prethodnim iteracijama.



Slika 2.2. Iterativna Lokalna Pretraga

Osnovni tok Iterativne Lokalne Pretrage (ILS) obuhvata sledeće korake:

1. **Lokalno Pretraživanje (Local Search):** Proces nalaženja lokalno optimalnog rešenja (lokalnog minimuma) polazeći od trenutne konfiguracije.
2. **Perturbacija:** Primena kontrolisane modifikacije na rešenje koje predstavlja lokalni optimum, čime se generiše nova početna konfiguracija za sledeću iteraciju pretraživanja.

-
3. **Kriterijum Prihvatanja (Acceptance Criterion):** Evaluacija novog rešenja i donošenje odluke o njegovom prihvatanju kao početne tačke za naredni krug lokalnog pretraživanja, na osnovu definisanog kriterijuma.

Ključna ideja ILS leži u implicitnoj pretpostavci da se kvalitetniji lokalni minimumi obično nalaze u neposrednoj blizini već otkrivenih dobrih rešenja. Zbog toga je izuzetno važno precizno podesiti snagu perturbacije.

2.2.1 Lokalno Pretraživanje (Local Search)

Lokalno pretraživanje predstavlja heurističku metodu koja se koristi za rešavanje računarski zahtevnih optimizacionih problema. Funkcioniše tako što se kreće kroz prostor pretraživanja, prelazeći sa trenutnog rešenja na susedno rešenje primenom lokalnih promena - pomeranja. Ovaj iterativni proces se nastavlja sve dok se ne pronađe rešenje koje zadovoljava kriterijume optimalnosti ili dok se ne prekorači definisano vremensko ograničenje. [2]

Ova metodologija je široko primenjiva u različitim domenima, uključujući veštačku inteligenciju i operaciona istraživanja. Iako postoje slične tehnike (poput spuštanja po gradijentu), lokalno pretraživanje se odlikuje eksplicitnim istraživanjem prostora kandidata za rešenje, bez oslanjanja na proračun gradijenta ciljne funkcije.

U kontekstu Iterativne Lokalne Pretrage (ILS), lokalno pretraživanje služi kao prva faza čiji je cilj da se dostigne lokalni minimum pre nego što se primeni perturbacija. U ovom radu, ulogu algoritma lokalnog pretraživanja preuzima **Min-Conflicts heuristika**.

Min-Conflicts heuristika

Min-Conflicts heuristika predstavlja efikasnu i široko primenjivu strategiju lokalnog pretraživanja za rešavanje problema zadovoljenja ograničenja (CSP). Pokazano je da *stohastička priroda* ovog algoritma omogućava *superiorne performanse* u odnosu na determinističke *backtracking* metode. [3]

Ključna razlika u odnosu na standardne pretrage je u načinu izbora promenljive i njene vrednosti. Min-Conflicts algoritam postupa po sledećem principu:

1. Izabрати promenljivu koja je trenutno u konfliktu.
2. Dodeliti joj onu vrednost koja *minimizuje* broj preostalih konflikata sa ostalim promenljivim. U slučaju izjednačenja, izbor se vrši nasumično.

U kontekstu našeg hibridnog ILS okvira, Min-Conflicts služi kao algoritam *Lokalnog Pretraživanja* čija je funkcija da rešenje dovede do najbližeg lokalnog minimuma, pre nego što se primeni perturbacija.

Tabu Pretraživanje (Tabu Search - TS)

Kako bi se prevazišao glavni nedostatak heuristike minimalnih konflikata, a to je zaglavljivanje u *lokalnim optimumima*, uvedena je kombinacija ove heuristike sa *tabu listom*.

Tabu lista služi za skladištenje nedavno izvršenih zamena s ciljem sprečavanja *cikličnog kretanja* kroz prostor pretraživanja. Pomeranja koja se nalaze na listi su *tabu* (zabranjena za razmatranje) tokom određenog broja iteracija. Međutim, zabrana se može ignorisati ukoliko je ispunjen *kriterijum aspiracije*, odnosno ako pomeranje dovodi do smanjenja troška koje je bolje od najboljeg do sada pronađenog rešenja.[4]

Kriterijum prihvatanja u okviru lokalnog pretraživanja se definiše na sledeći način:

- Kandidati koji rezultiraju *nižim troškom* rešenja uvek se prihvataju.
- Kandidati koji dovode do *većeg ili jednakog troška* prihvataju se samo uz određenu *verovatnoću prihvatanja* (stohastički kriterijum).

Celokupni proces se ponavlja dok se ne pronađe optimalno rešenje ili se ne dostigne unapred definisano ograničenje broja iteracija (*iteration limit*). Opšta procedura ovog hibridnog lokalnog pretraživanja opisana je u algoritmu na slici

Algorithm 1 Min conflicts heuristic with tabu list for Sudoku

Input: puzzle, iterationLimit, acceptanceProbability
1: initialize tabu list
2:
3: $iterationCounter \leftarrow 0$
4: $bestCost \leftarrow MAX$
5: $currentCost \leftarrow MAX$
6:
7: **while** $bestCost > 0 \wedge iterationCounter < iterationLimit$ **do**
8: randomly select cell which is in conflict
9:
10: generate all possible swaps with the selected cell
11:
12: $bestSwap \leftarrow$ Find the best swap which minimizes total conflicts
13: $bestSwapNotTabu \leftarrow$ Find the best swap which minimizes total conflicts and is not tabu
14:
15: **if** $bestSwap \neq bestSwapNotTabu$ **then**
16: **if** $EVALUATE(bestSwap) < bestCost$ **then**
17: $currentCost \leftarrow EVALUATE(bestSwap)$
18: perform swap
19: **go to** 27
20: **end if**
21: **end if**
22: **if** $EVALUATE(bestSwapNotTabu) < currentCost \vee random() \leq acceptanceProbability$ **then**
23: $currentCost \leftarrow EVALUATE(bestSwapNotTabu)$
24: perform swap
25: **end if**
26:
27: update tabu list
28: **if** $currentCost < bestCost$ **then**
29: $bestCost \leftarrow currentCost$
30: $iterationCount \leftarrow 0$
31: **else**
32: $iterationCount \leftarrow iterationCount + 1$
33: **end if**
34: **end while**
Output: best solution

Slika 2.3. Min-Conflicts heuristika sa Tabu listom

2.2.2 Perturbacija

Perturbacija predstavlja ključni korak u okviru *Iteriranog Lokalnog Pretraživanja* (ILS), a njena primarna funkcija je izvlačenje rešenja iz *lokalnih optimuma* koje je prethodno pronašao algoritam lokalnog pretraživanja (Min-Conflicts sa Tabu listom). Dok Min-Conflicts rutina služi za **intenzifikaciju** pretrage (pronalaženje najboljeg rešenja u datom regionu), perturbacija omogućava **istraživanje** (*exploration*) prostora rešenja.

Hibridna Perturbacija, Uloga Constraint Programming (CP)

U našoj implementaciji, perturbacija nije heuristička zamena parova, već predstavlja hibridni mehanizam kojim se u proces ILS-a uključuje **Constraint Programming (CP)**. Perturbacija predstavlja *kontrolisano kvarenje* trenutnog najboljeg rešenja da bi se dobilo novo polazno rešenje.

-
- **Vreme primene:** Perturbacija se aktivira tek nakon što algoritam lokalnog pretraživanja završi svoje izvršavanje i prijavi da je dostigao *lokalni minimum*.
 - **Mehanizam:** Perturbacija se vrši u dva koraka. Prvo se vrši **pražnjenje** ćelija koje su u konfliktu i određeni broj nefiksiranih ćelija. Zatim se na namerno narušenu tablu primenjuje **Constraint Programming** kako bi se izvršila intenzivna pretraga i popunile preostale praznine.

Umesto generisanja nasumičnog lošeg rešenja, kreira se *logički narušen* problem koji koristi snagu CP-a za brzo rešavanje. Time se osigurava da sledeći poziv rutine lokalnog pretraživanja započne pretragu u novoj, ali delimično popravljenoj i obećavajućoj oblasti.

2.2.3 Kriterijum prihvatanja rešenja (Acceptance Criterion)

Kriterijum prihvatanja je ključan za kontrolu toka pretraživanja, osiguravajući efikasno balansiranje između *intenzifikacije* i *istraživanja* (*exploration*). U našem hibridnom algoritmu, mehanizam prihvatanja je implementiran na dva nivoa, čime se obezbeđuje robusnost procesa **Iterativnog Lokalnog Pretraživanja** (*ILS*). **Stohastički** kriterijum se koristi unutar LS-a za izlazak iz plitkih minimuma, dok se klasični kriterijum (prihvati samo ako je rešenje bolje) koristi na nivou ILS petlje.

Prihvatanje Poteza (Unutar Lokalnog Pretraživanja)

Ovaj kriterijum se primenjuje na svakoj iteraciji unutar rutine **Min-Conflicts heuristike pojačane Tabu listom** (Slika 2.3, Linija 22) i odlučuje da li će se najbolji dopušteni potez prihvatiti. Kriterijum kombinuje elemente *Hill Climbinga* i *Simuliranog Kaljenja* (*Simulated Annealing*).

Potez se prihvata ako je ispunjen bilo koji od sledećih uslova:

- **Determinisano prihvatanje:** Ako predloženi potez dovodi do *nižeg troška* (manje konflikata) od trenutnog rešenja, potez se **automatski prihvata**.
- **Stohastičko prihvatanje:** Ako predloženi potez dovodi do *većeg ili jednakog troška*, potez se prihvata samo uz određenu **verovatnoću prihvatanja**. Ovo omogućava algoritmu da se privremeno udalji od minimuma, čime se obezbeđuje izlazak iz plitkih lokalnih optimuma.
- **Aspiracijski kriterijum:** Iako nije deo stohastike, ovaj kriterijum služi kao izuzetak: ako bi tabu potez doveo do rešenja koje je **bolje od globalno najboljeg**, on se prihvata, bez obzira na tabu status (Slika 2.3, Linije 15-21).

Prihvatanje Rešenja (Unutar ILS Petlje)

Ovo je **klasičan kriterijum prihvatanja** koji deluje na nivou celog rešenja. On se nalazi u glavnoj petlji (Slika 2.4, Linije 13-16) [1] i služi za održavanje globalno najboljeg rešenja tokom ukupnog procesa ILS-a.

Algorithm 2 Iterated local search for Sudoku

Input: puzzle, timeLimit, resetFactor, α
1: FIXCELLSUSINGARCONSISTENCY(*puzzle*)
2:
3: FILLREMAININGCELLSRANDOMLY(*puzzle*)
4:
5: *bestPuzzle* \leftarrow *puzzle*
6: *bestCost* \leftarrow EVALUATE(*puzzle*)
7:
8: **while** *bestCost* > 0 \wedge timeLimit not passed **do**
9: *puzzle* \leftarrow MINCONFLICTSWITHTABULIST(*puzzle*)
10:
11: *cost* \leftarrow EVALUATE(*puzzle*)
12:
13: **if** *bestCost* > *cost* **then**
14: *bestCost* \leftarrow *cost*
15: *bestPuzzle* \leftarrow *puzzle*
16: **end if**
17:
18: **if** *cost* > 0 **then**
19: Empty all unfixed cells in *puzzle* which are in conflict
20:
21: Additionally empty relative amount of
22: remaining unfixed cells defined by *resetFactor*
23:
24: FORWARDCHECKINGSEARCH(*puzzle*)
25:
26: FILLREMAININGCELLSRANDOMLY(*puzzle*)
27:
28: *resetFactor* \leftarrow *resetFactor* \cdot α
29: **end if**
30: **end while**
Output: *bestPuzzle*

Slika 2.4. ILS Algoritam za Sudoku sa svim koracima

Nakon što rutina lokalnog pretraživanja završi, vraćeni lokalni optimum se prihvata kao novo globalno najbolje rešenje samo ako je trošak tog rešenja **niži** od troška trenutnog najboljeg rešenja.

Ova dvostruka struktura obezbeđuje robusnost: stohastika osigurava efikasno kretanje unutar regiona, dok klasični kriterijum garantuje da se zadržava najbolji rezultat tokom ukupnog procesa **ILS-a**.

Glava 3

Implementacija algoritma

3.1 Korišćene biblioteke i zavisnosti

Implementacija algoritma u Pythonu oslanja se na minimalan set biblioteka, fokusiranih na numeričku obradu i efikasno upravljanje matricama. U nastavku sledi spisak korišćenih biblioteka.

- **NumPy**: Centralna biblioteka. Sudoku tabla je predstavljena kao efikasna **NumPy matrica**, što omogućava brze operacije sečenja (*slicing*) za provere redova, kolona i blokova. Funkcije `np.unique` i `np.sum` su ključne za efikasno računanje konflikata u funkciji cilja.
- **ortools.sat.python.cp**: Ključna za implementaciju **Constraint Programming (CP)** faze algoritma. Služi kao mehanizam za spašavanje u situacijama kada se lokalna pretraga (Local Search) zaglavi u lokalnom optimumu.
- **random**: Koristi se za sve stohastičke komponente, uključujući generisanje **nasumične inicijalizacije** rešenja pre pokretanja lokalnog pretraživanja.
- **collections.deque**: Neophodna za implementaciju Tabu liste unutar procedure lokalnog pretraživanja, čime se izbegava ponavljanje nedavnih poteza.
- **time**: Koristi se za striktno praćenje i poštovanje vremenskih ograničenja, kako za celokupni ILS ciklus, tako i za vremenski ograničenu fazu Constraint Programming perturbacije.

3.2 Klasa SudokuSolver

Centralni deo implementacije čini klasa **SudokuSolver**, koja inkapsulira celokupno stanje problema. Klasa je dizajnirana da služi kao temelj za dalju implementaciju naprednih ILS mehanizama.

Konstruktor klase `__init__` odgovoran je za inicijalizaciju svih kritičnih atributa:

Atributi stanja mreže (Osnovni model):

- **self.grid**: Radna tabla, predstavljena kao **NumPy matrica**.
- **self.N** čuva dimenziju table ($N \times N$), a **self.K** čuva dimenziju bloka ($K = \sqrt{N}$).
- **self.fixed_mask**: Binarna (logička) matrica koja funkcioniše kao **maska** koja striktno označava koje ćelije su originalno zadate i moraju ostati fiksirane (**True**) tokom pretraživanja.

Atributi za ILS kontrolu (Proširenje):

- **self.best_cost** i **self.best_grid**: Čuvanje najboljeg globalnog rešenja, ključno za kriterijum prihvatanja rešenja (Slika 2.4, linije 13-16 Algoritma 2).
- Pomoćne strukture za delta-evaluaciju (npr. **row_counts**, **col_counts** i Tabu lista **self.tabu** se naknadno dodaju).

Glavna i pomoćne metode:

- **objective_f**: Funkcija cilja, javna metoda klase koja vraća ukupan trošak rešenja. Ova metoda sumira konflikte iz redova, kolona i blokova, čime omogućava Lokalnom pretraživanju da usmeri pretragu ka minimumu.
- **solve**: Glavna metoda, u finalnom modelu, **solve** implementira krovnu petlju Iterativnog Lokalnog Pretraživanja.
- **display_grid**: Pomoćna metoda, koristi se za pregledan ispis table. Implementacija koristi formatiranje bazirano na dimenziji bloka (**self.K**) da bi vizuelno odvojila pod-mreže.

Celokupna implementacija klase **SudokuSolver** se može pogledati u Prilogu 7.

3.3 Klasa ILS_CP: Hibridni algoritam Iterativne Lokalne Pretrage

Klasa ILS_CP predstavlja jezgro implementacije hibridnog Iterativna Lokalna Pretraga (ILS) (Iterativna Lokalna Pretraga) algoritma u sprezi sa programiranjem ograničenja (CP). Ova klasa služi kao metaheuristički kontrolor procesa rešavanja, objedinjujući faze inicijalizacije, lokalne pretrage, perturbacije i rafiniranja pomoću CP.

Nasleđivanje i stanje

Klasa ILS_CP je definisana kao podklasa bazne klase SudokuSolver, čime nasleđuje:

- Osnovnu reprezentaciju Sudoku mreže (`self.grid`, `self.fixed_mask`).
- Funkciju cilja `objective_f()` za merenje kvaliteta rešenja (broj konflikata).
- Osnovne metode za rad sa Sudoku ograničenjima.

Pored toga, ILS_CP uvodi dodatne attribute za praćenje stanja: `self.best_cost`, `self.best_grid` (najbolje pronađeno rešenje), `self.tabu_list` (za lokalnu pretragu), kao i brojače za statistiku (`self.cp_call_count`, `self.ls_success_count`).

Ključne metodološke funkcije

- **`_min_conflicts_with_tabu`**: Lokalna Pretraga (Eksploatacija) - pronalazi potez (promena vrednosti u konfliktom polju) koji maksimalno smanjuje broj konflikata. Koristi Tabu listu i Aspiracijski kriterijum za izbegavanje cikličnog kretanja i prihvatanje inače zabranjenih, ali izuzetno dobrih poteza.
- **`perturb`**: Perturbacija i Hibridizacija (Eksploracija) - služi za izlazak iz lokalnog optimuma. Funkcionalnosti su:
 1. Nasumično prazni (`p_rate`) procenat polja.
 2. Poziva **`cp_refinement`** metod iz klase SudokuCP sa strogim vremenskim limitom (**`cp_time_limit`**) da popuni prazna polja.

Ako Programiranje Ograničenja (CP) uspe, novo, poboljšano rešenje se prihvata, što je srž hibridnog pristupa.

- **`solve_ils_cp`**: Glavna ILS Petlja - kontroliše ceo proces. Iterativno primenjuje **`_min_conflicts_with_tabu`**, a zatim **`perturb`**. Ažurira najbolje rešenje i primenjuje strategiju opadanja faktora kvarenja (`empty_factor *= alpha`) kako bi se fokus pretrage postepeno sužavao.

Hibridni mehanizam (perturb) metod

Hibridni pristup se ostvaruje unutar `perturb` metoda:

- Na osnovu faktora kvarenja (`empty_factor`), ILS nasumično briše vrednosti (`grid[i, j] = 0`) iz određenog broja nemutabilnih polja.
- Instancira se novi CP rešavač (`SudokuCP`) sa osakaćenom mrežom.
- CP rešavač pokušava da popuni preostale prazne ćelije (*eng. completion problem*) unutar kratkog vremenskog budžeta (`cp_time_limit`).
- Ako CP pronađe rešenje, to rešenje je **validno** (po Sudoku pravilima) i **kompletno** (nema praznih polja). To predstavlja snažan skok ka rešenju, čime se kompenzuju manjkavosti ILS algoritma u finalnom rafiniranju.

Ova interakcija omogućava ILS komponenti da brzo istraži veliki deo prostora rešenja (eksploracija), dok CP komponenta garantuje konačnu validnost rešenja i efikasno rešava skoro rešene probleme koje ILS teško prevazilazi (eksploatacija).

Celokupna implementacija klase `ILS_CP` se može pogledati u Prilogu [7](#).

3.4 Klasa SudokuCP

Klasa `SudokuCP` služi za rešavanje Sudoku problema korišćenjem **Constraint Programming (CP)** (ograničenog programiranja) pomoću Google OR-Tools biblioteke.

Ključne metodološke funkcije

- `__init__`: Konstruktor, inicijalizuje rešavač Sudokua pozivanjem konstruktora nadklase (`SudokuSolver`). Inicijalizuje generator slučajnih brojeva (`self.random`) korišćenjem NumPy-ovog `default_rng` sa zadatim `seed`-om.
- `_build_cp_model`: Kreira `cp_model.CpModel` instancu.
 1. Definiše $N \times N$ celobrojnih varijabli (`x`) čije su vrednosti u opsegu $[1, N]$.
 2. Postavlja **ograničenja** (`AddAllDifferent`) da se osigura da su svi brojevi u svakom redu, svakoj koloni i svakom $K \times K$ bloku različiti.
 3. Inicijalizuje `self.cp_vars` i `self.cp_solver`.
- `_is_cell_nonconflicting`: Provera konflikta, privatni metod koji proverava da li trenutna vrednost ćelije (`i`, `j`) uzrokuje konflikt u svom redu, koloni ili bloku u odnosu na ostale ćelije u toj oblasti.
 1. Vraća `False` ako je vrednost 0 (prazna ćelija) ili ako se ta vrednost pojavljuje više od jednom u relevantnom redu, koloni ili bloku.
 2. Koristi brze NumPy operacije (`np.count_nonzero`) za proveru konflikata.
- `cp_refinement`: Glavni metod koji pokušava da popuni ili doradi delimično popunjen Sudoku korišćenjem CP rešavača.
 1. **Modelovanje i fiksiranje**: Poziva `_build_cp_model` da osveži model. Fiksira sve originalno zadate (nepromenljive) brojeve u mreži kao konstante u CP modelu.
 2. **Fiksiranje nekonfliktnih polja** (`fix_noncon`): Ako je omogućeno, fiksira i sve **preostale, trenutno popunjene ćelije koje nisu u konfliktu** kao konstante. Time se znatno smanjuje prostor pretrage za CP.
 3. **Saveti** (`hints`): Ako je omogućeno, koristi trenutne vrednosti mreže kao **savete** (`model.AddHint`) za CP rešavač, usmeravajući ga ka postojećem rešenju.
 4. **Vremensko ograničenje**: Postavlja strogo vremensko ograničenje (`max_time_in_seconds`) za pretragu rešenja, obično kratko, ključno za performanse Iterativnog Lokalnog Pretraživanja (ILS).
 5. **Rešavanje**: Pokreće rešavač (`solver.Solve(model)`).

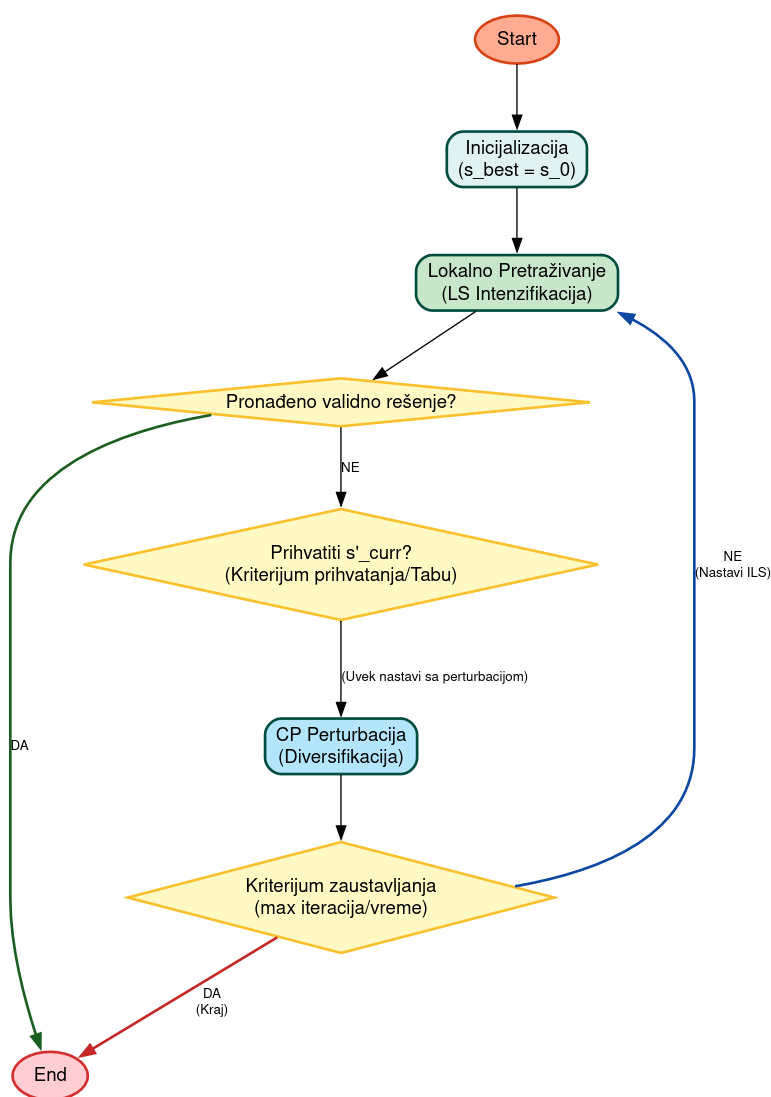
-
6. **Ažuriranje:** Ako je rešenje pronađeno (OPTIMAL ili FEASIBLE), **cela mreža se prepisuje** vrednostima dobijenim od CP rešavača.
 7. Vraća status rešavanja.

Celokupna implementacija klase SudokuCP se može pogledati u Prilogu [7](#).

3.5 Faze implementacije ILS-CP algoritma

Implementacija hibridnog algoritma, zasnovanog na Iterativnoj Lokalnoj Pretrazi pojačanoj ograničenim programiranjem (CP), strukturirana je po fazama koje prate klasični ILS ciklus (Intenzifikacija → Perturbacija → Kontrola). Radi lakše implementacije i modularizacije, ceo problem je rasčlanjen na četiri funkcionalne celine. Svaka celina koristi specifične klase i funkcije, čime se obezbeđuje visoka efikasnost i jasna podela odgovornosti unutar koda.

3.5.1 Struktura algoritma



Slika 3.1. Dijagram toka hibridnog ILS-CP algoritma

Tok izvršavanja celokupnog hibridnog ILS/CP algoritma detaljno je prikazan na Slici 3.1. Dijagram toka obuhvata četiri ključne faze unutar glavne Iterativne Lokalne Pretrage:

-
- **Inicijalizacija:** Proces počinje definisanjem početnog rešenja i postavljanjem najboljeg globalnog rešenja, $S_{best} = S_0$. Tok nastavlja direktno ka rutini intenzifikacije.
 - **Lokalno Pretraživanje (LS):** U ovom koraku (Intenzifikacija), primenjuje se **Lokalno Pretraživanje (LS)** sa Min-Conflicts heuristikom i Tabu listom, čime se trenutno rešenje optimizuje do lokalnog optimuma. Nakon dobijanja rešenja S'_{curr} , vrši se provera:
 1. Ako je pronađeno **validno rešenje** (trošak je nula), algoritam se odmah zaustavlja (DA → End).
 2. U suprotnom, prelazi se na **Kriterijum prihvatanja**.
 - **Kriterijum prihvatanja i Perturbacija:** Odluka o prihvatanju novog rešenja S'_{curr} koja uključuje poređenje sa S_{best} i korišćenje Aspiracijskog kriterijuma ne zaustavlja tok algoritma. Bez obzira na ishod, algoritam se uvek usmerava ka bloku **CP Perturbacija**.

Ovaj pristup je ključan za ILS arhitekturu:

1. Ako je rešenje bolje, ono se perturbuje da bi se iz njega našao još bolji globalni optimum.
 2. Ako je rešenje lošije ili je odbijeno, perturbacija ga izvlači iz postojećeg (lokalnog) optimuma.
- **Kontrola i kraj:** Nakon hibridne perturbacije, proverava se **Kriterijum zaustavljanja** (maksimalan broj iteracija, maksimalno dozvoljeno vreme izvršavanja ili neki drugi zadati kriterijum).
 1. Ako je uslov za zaustavljanje ispunjen (DA), algoritam se završava (End).
 2. Ako uslov nije ispunjen (NE), **tok se vraća nazad na blok Lokalno Pretraživanje**, čime se zatvara ILS petlja i nastavlja sledeća iteracija sa modifikovanim rešenjem dobijenim iz perturbacije.

Ovakva struktura osigurava da je ILS komponenta zadužena za kontrolu ciklusa i intenzifikaciju, dok CP komponenta služi kao modul za snažnu diversifikaciju.

3.5.2 Faza 1: Inicijalna postavka i definicija problema

Ova faza obuhvata neophodne preduslove za početak pretraživanja. Ona uključuje definisanje glavne klase **SudokuSolver**, matrice fiksnih ćelija, kao i implementaciju ključnih pomoćnih struktura (funkcija cilja). Faza se završava pohlepnom inicijalizacijom koja osigurava da je početno rešenje blok-validno.

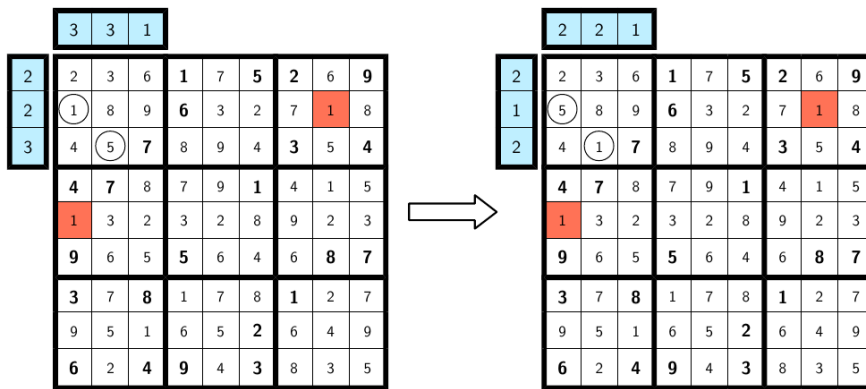
- **greedy_init:** Funkcija implementira pohlepnu Inicijalizaciju. Popunjava nefiksirane ćelije tako da svaki blok bude validan (blok-konflikti = 0). Fokus pretraživanja je time usmeren isključivo na konflikte u redovima i kolonama.

3.5.3 Faza 2: Lokalno pretraživanje (Intenzifikacija)

Ova faza predstavlja rutinu intenzifikacije algoritma. Korišćena je Min-Conflicts heuristika, koja vrši **zamenu vrednosti jedne ćelije** (*Single cell replacement*) kako bi maksimalno smanjila broj konflikata. Rutina je pojačana naprednim mehanizmima za poboljšanje kvaliteta lokalnog pretraživanja, uključujući primenu Tabu liste i aspiracijskog kriterijuma radi efikasnog izlaska iz lokalnih optimuma.

Referentni hibridni algoritam u radu [1] koristio je metodu zamene pozicija ćelija (*swap*), dok smo se mi opredelili za modifikovani pristup Lokalnog Pretraživanja koji se oslanja na **zamenu vrednosti unutar jedne ćelije** (*single cell replacement*) po principu Min-Conflicts heuristike, sa ciljem empirijske evaluacije efikasnosti ovakve strategije unutar ILS okvira.

- **min_conflicts_tabu**: Predstavlja glavnu rutinu za Lokalno Pretraživanje. Koristi Min-Conflicts heuristiku, vršeći **zamenu vrednosti** u jednoj konfliktnoj ćeliji. Uključuje mehanizme za izbegavanje petlji: Tabu listu i stohastički kriterijum prihvatanja.
- **best_move**: Pomoćna funkcija. Odgovorna je za izbor najboljeg poteza (promena vrednosti ćelije) za datu konfliktnu ćeliju. Funkcija uključuje aspiracijski kriterijum.



Slika 3.2. Swap metoda

Algoritam je implementiran na taj način kako bi se eksperimentalno istražilo sledeće:

- Uticaj šireg prostora pretraživanja na performanse rešavanja.
- Efektivnost Programiranja Ograničenja (CP) kao modula perturbacije koji ispravlja sistemske konflikte nastale zbog neefikasnog LS-a.
- Uporedna analiza efikasnosti sa referentnim radom koji koristi SWAP operaciju, i time doprineti analizi robusnosti ILS arhitekture.

3.5.4 Faza 3: Hibridna perturbacija

Kada Lokalno pretraživanje ne dovede do rešenja, aktivira se mehanizam hibridne perturbacije. Ova faza kombinuje heuristiku i metode ograničenog programiranja. Započinje se namernim kvarenjem rešenja (diversifikacija), a zatim sledi primena Constraint Programminga (CP) koja vrši vremenski ograničenu pretragu.

- **perturb**: Predstavlja mehanizam kvarenja rešenja (Diversifikacija). Stvara narušeni podproblem praznjenjem ćelija u konfliktu (ili nasumično), a zatim pokušava da ga popuni pomoću CP-a.
- **cp_refinement**: Implementira Constraint Programming (CP) tehniku, odnosno vremenski ograničenu pretragu za popunjavanje praznih ćelija. Služi kao pametni skok (*smart jump*) unutar perturbacije, brzo popravljajući narušenu tablu u striktnom vremenskom ograničenju.
- **refill_random**: Služi za završetak perturbacije. Ako CP ne uspe da popuni tablu u potpunosti (zbog isteka vremenskog limita), ova funkcija nasumično popunjava preostale prazne ćelije, ponovo uspostavljajući blok-validnost pre povratka u ILS ciklus.

3.5.5 Faza 4: Kontrolni ILS ciklus

Ova faza upravlja glavnom petljom algoritma, poštuje globalno vremensko ograničenje i implementira klasični kriterijum prihvatanja rešenja na globalnom nivou. Najvažnije, ovde se vrši dinamička kontrola strategije smanjivanjem množenjem sa α , čime se postepeno povećava nivo intenzifikacije pretraživanja tokom trajanja algoritma.

- **solve_ils_cp**: Glavna metoda klase koja implementira krovnu petlju Iterativnog Lokalnog Pretraživanja. Upravlja celokupnim vremenskim ograničenjem, kontroliše tok između Faze 2 i Faze 3, i implementira dinamiku strategije smanjivanjem α faktora.

3.6 Funkcija cilja

Funkcija cilja je kritična komponenta lokalnog pretraživanja, jer usmerava pretragu ka najboljem rešenju. U ovoj implementaciji, trošak rešenja definiše se kao ukupan broj prekršaja pravila u redovima, kolonama i blokovima. Cilj algoritma je da postigne trošak $C = 0$.

Glavna funkcija cilja, **objective_f**, sumira konflikte iz sve tri dimenzije. Ukupan trošak C se računa kao:

$$C = C_{\text{row}} + C_{\text{col}} + C_{\text{block}} \quad (3.1)$$

Gde su C_{row} , C_{col} i C_{block} zbrovi konflikata u redovima, kolonama i blokovima, respektivno.

3.6.1 Pomoćne funkcije za računanje konflikata

	Subgrid				Column			
	1				7		9	
		3			2			8
			9	6			5	
			5	3			9	
		1			8			2
	6					4		
	3							1
Row		4	1					7
			7				3	

Slika 3.3. Ograničenja

Efikasnost računanja konflikata postiže se modularizacijom:

- `_line_conflicts(line)`:
 - **Uloga:** Osnovna funkcija. Prihvata jednodimenzionalni niz (koji može biti red, kolona ili blok). Koristeći `np.unique`, broji se koliko se puta pojavljuje svaka cifra i izračunava minimalni broj izmena potreban za uklanjanje konflikata. Ovo je matematička osnova za sve provere. Funkcija obezbeđuje preciznu metriku za izračunavanje Δ_C (promene troška) tokom lokalnog pretraživanja.
- `_row_conflicts(self)`, `_col_conflicts(self)`, `_block_conflicts(self)`:
 - **Uloga:** Ove tri funkcije koriste NumPy sečenje (*slicing*) da bi izvadile pojedinačne redove, kolone ili blokove iz `self.grid` i prosleđuju ih funkciji `_line_conflicts`, sumirajući ukupan broj konflikata za svaku kategoriju. Funkcija `_block_conflicts` dodatno koristi `ravel()` za spljoštavanje $2D$ bloka u $1D$ niz.

Glava 4

Eksperimentalno istraživanje

Ovo poglavlje detaljno prikazuje eksperimentalne rezultate dobijene testiranjem implementiranog Iterativnog Lokalnog Pretraživanja sa Programiranjem Ograničenja (ILS/CP). Eksperimentalni deo rada osmišljen je sa ciljem validacije performansi algoritma, ispitivanja uticaja ključnih parametara i uporedne analize efikasnosti u odnosu na referentne studije.

Izvršene su dve glavne serije eksperimenata:

1. Prva serija eksperimenata - Eksperimenti validacije performansi i parametara
2. Druga serija eksperimenata - Uporedni eksperiment (Verifikacija efikasnosti)

4.1 Prva serija eksperimenata - Eksperimenti validacije performansi i parametara

Prva serija eksperimenata izvedena je na **skupu od 11 instanci različitih dimenzija**. Osnovni cilj ovog eksperimenta bio je testiranje **brzine izvršavanja algoritma u odnosu na veličinu ulazne matrice**, kao i uticaj kritičnih parametara na postizanje rešenja i performanse.

U okviru ove serije, sprovedena su tri odvojena eksperimentalna scenarija:

1. **Inicijalni eksperiment:** Testiranje sa standardnim, predloženim vrednostima parametara.
2. **Optimizacija faktora perturbacije (α):** Eksperiment sa smanjenom vrednošću faktora α u cilju procene uticaja intenziteta perturbacije.
3. **Optimizacija lokalnog pretraživanja:** Eksperiment sa smanjenim brojem poziva funkcije lokalnog pretraživanja (LS) za ispitivanje ravnoteže između istraživanja i eksploatacije.

Pored toga, u skupu instanci su namerno uključena **dva nerešiva problema** radi provere sposobnosti algoritma da uspešno detektuje nepostojanje rešenja.

4.1.1 Eksperimentalna postavka prve serije eksperimenata

Prva serija eksperimenata (ILS/CP validacija) osmišljena je sa ciljem sveobuhvatnog testiranja performansi algoritma u različitim uslovima, sa posebnim akcentom na skalabilnost i robusnost.

4.1.2 Ulazne instance i definicija težine

Za potrebe testiranja, kreiran je **skup od 11 instanci** koje su učitane iz datoteke `puzzles.txt`. Ovaj skup je pažljivo odabran kako bi se pokrio širok spektar scenarija:

1. **Skalabilnost po dimenziji:** Uključene su matrice različitih dimenzija, u rasponu od 4×4 do 25×25 ($N \times N$), sa primarnim ciljem ispitivanja **brzine izvršavanja algoritma u odnosu na veličinu ulazne matrice**.
2. **Varijacija težine:** Za svaku testiranu dimenziju (npr. 4×4 , 9×9), uključene su instance različite težine (Laka, Srednja, Teška). Težina Sudoku matrice je direktno određena **procentom inicijalno fiksiranih ćelija** — matrica je teža za rešavanje što je manji broj fiksni polja inicijalno zadat.

3. **Robusnost na nerešive probleme:** Skup sadrži dve namerno definisane **nerešive instance** (9×9 i 16×16). One su uključene radi ispitivanja da li algoritam ispravno detektuje i vraća informaciju da rešenje ne može biti pronađeno u slučaju da se pokreće za nerešive probleme.

Pregled celokupnog seta instanci, sa navedenim dimenzijama i nivoom težine, prikazan je u Tabeli 4.1.

Tabela 4.1. Ulazne instance korišćene za testiranje performansi algoritma, Prva serija eksperimenata

ID	Dimenzija ($N \times N$)	Blok ($K \times K$)	Fiksnih ćelija	Napomena / Težina
1	4×4	2×2	100%	Lak (Već rešen)
2	4×4	2×2	25%	Srednje težak
3	4×4	2×2	0%	Težak
4	9×9	3×3	35%	Srednje težak
5	9×9	3×3	0%	Težak (Potpuno prazna)
6	9×9	3×3	10%	Težak
7	16×16	4×4	6%	Težak
8	16×16	4×4	0%	Težak (Potpuno prazna)
9	25×25	5×5	4%	Težak, Problem velikih dimenzija
10	9×9	3×3	N/A	Nerešiv problem
11	16×16	4×4	N/A	Nerešiv problem (Unutrašnji konflikt)

U okviru ove serije, algoritam je testiran u tri zasebna eksperimentalna scenarija kako bi se ispitao uticaj ključnih parametara na performanse i postizanje rešenja. Kriterijum zaustavljanja u svim scenarijima je fiksiran na 5 minuta (300 sekundi).

Detaljne vrednosti korišćenih parametara za svaki od ova tri scenarija prikazane su u Tabeli 4.2.

Tabela 4.2. Konfiguracija parametara za tri eksperimentalna scenarija

Parametar	Eksperiment 1	Eksperiment 2	Eksperiment 3
Naziv	Bazno testiranje	Optimizacija perturbacije	Optimizacija intenzifikacije
Maksimalno vreme (s)	300	300	300
Faktor kvarenja (α)	0.995	0.2	0.995
Maks. LS poziva/iter.	5000	5000	50
Dužina Tabu liste	10	10	10
Verovatnoća prihvatanja	0.15	0.15	0.15
CP vremensko ogr.	15	15	15
Početni Empty Factor	0.2	0.2	0.2

4.1.3 Rezultati eksperimenta 1 validacije performansi i parametara

Na osnovu rezultata prvog eksperimenta, prikazanih u Tabeli 4.3, sprovedena je detaljna analiza performansi implementiranog hibridnog algoritma. Diskusija se fokusira na skalabilnost, efikasnost rešavanja i ulogu CP u hibridnoj šemi.

Tabela 4.3. Rezultati Eksperimenta 1: Inicijalni parametri

ID	Veličina (N)	LS Iter.	Exec. Time (s)	Best Cost	Rešen	CP Poziva	CP Uspeši
1	4	0	0.0002	0	True	0	0
2	4	0	0.0001	0	True	0	0
3	4	0	0.0001	0	True	0	0
4	9	5000	18.4516	0	True	1	1
5	9	5000	18.5609	0	True	1	1
6	9	5000	18.7135	0	True	1	1
7	16	5000	58.0719	0	True	1	1
8	16	5000	58.6738	0	True	1	1
9	25	5000	144.056	0	True	1	1
10	9	1000000	37.252	2	False	200	1
11	16	1000000	58.043	90	False	200	1

Trendovi i varijacije vremena izvršavanja

Analiza rezultata izvršavanja algoritma na različitim grupama instanci (ID 1–11) omogućava precizno razumevanje efikasnosti i ponašanja hibridnog ILS/CP pristupa u različitim scenarijima složenosti.

- **(ID 1–3) Efikasnost i rešavanje lakših problema**

Instance dimenzije 4×4 (ID 1, 2, 3) rešene su ekstremno brzo, sa minimalnim vremenom izvršavanja (manje od 0.001 sekunde).

1. **Minimalna aktivnost:** Broj LS Iteracija je **0**, što ukazuje da je validno rešenje pronađeno u fazi inicijalizacije ili pri prvoj proveru validnosti, bez potrebe za Iterativnim Lokalnim Pretraživanjem.
2. **Ignorisanje hibridizacije:** Nema poziva CP modulu (CP Poziva = 0), što potvrđuje da se hibridni deo algoritma aktivira samo kada je to neophodno za kompleksnije probleme.

- **(ID 4–9) Skalabilnost i uspeh hibrida**

Ove instance (dimenzije 9×9 , 16×16 i 25×25) predstavljaju teže probleme i pokazuju ključnu ulogu hibridnog pristupa.

1. **Uloga CP-a kao finišera:** U svim ovim rešivim instancama, rešenje je pronađeno sa samo **jednim** pozivom CP-u (CP Poziva = 1, CP Uspeši = 1). Ovo dokazuje efikasnost hibridne šeme, gde LS Intenzifikacija dovodi konfiguraciju do stanja bez konflikata (**Best Cost = 0**),

a CP modul (Programiranje Ograničenja) služi kao brzi validator i finiše pretrage, čime se optimizuje brzina rešavanja.

2. **Rast vremena (Skalabilnost):** Vreme izvršavanja raste predvidivo sa dimenzijom, od ≈ 18.5 sekundi za 9×9 (ID 4–6) do ≈ 144 sekunde za 25×25 (ID 9). Ovo ukazuje na to da se algoritam uspešno skalira na velike probleme, rešavajući najveću instancu daleko pre vremenskog limita.

- **(ID 10–11) Ponašanje na ekstremno nerešivim problemima**

Instance 10 i 11 predstavljaju nerešive scenarije, gde je algoritam prijavio neuspeh rešavanja (**Rešen** = False) nakon doseganja limita.

1. **Intenzivna diverzifikacija:** Za ove probleme, LS Iteracije dostižu maksimalnu vrednost od **1.000.000**, što signalizira da je algoritam potrošio sve resurse u pokušaju da se izvuče iz lokalnih optimuma.
2. **CP pozivi i parcijalni uspeh:** CP je pozivan **200** puta, pri čemu je zabeležen **jedan** CP Uspeh u oba slučaja. Ovo znači da je u nekom trenutku, nakon perturbacije, CP uspeo da pronađe validno parcijalno rešenje (koje zadovoljava lokalne uslove u matrici), ali to nije dovelo do konačnog, kompletnog globalnog validnog rešenja (**Rešen** = False).
3. **Konačni trošak:** Završni trošak (**Best Cost**) ostaje iznad nule (**2 i 90**), potvrđujući da je algoritam završio bez pronalaska validnog rešenja, što je ispravan ishod za ekstremno teške ili nekonzistentne instance.

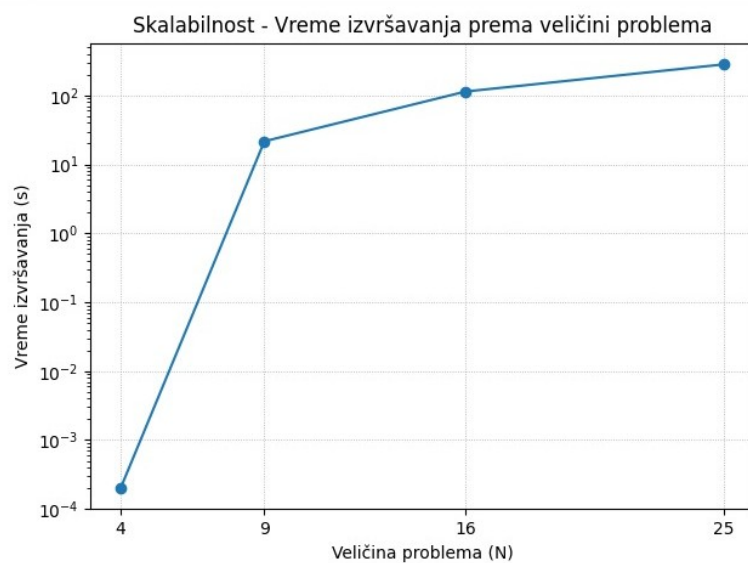
4.1.4 Analiza grafičkog prikaza eksperimentalnih rezultata

Priloženi grafikoni pružaju vizuelni uvid u skalabilnost, robusnost i odnos performansi i kvaliteta rešenja u hibridnom ILS-CP algoritmu.

Grafik 1: Skalabilnost

Grafik Vreme izvršavanja - Veličina Problema (Skalabilnost) koristi logaritamsku skalu za Y-osu (vreme izvršavanja) i ilustruje kako se algoritam nosi sa rastom dimenzija Sudoku problema.

- **Ekstremna efikasnost za male probleme:** Za problem veličine $N = 4$, vreme izvršavanja je izuzetno nisko, ispod 10^{-3} sekundi. Ovo je u skladu sa nalazima da se rešenje nalazi u fazi Inicijalizacije ili početnoj LS Intenzifikaciji.
- **Superlinearni rast:** Kako se dimenzija problema povećava sa $N = 9$ na $N = 25$, vreme izvršavanja raste naglo. Vreme za $N = 9$ je oko 10 sekundi, za $N = 16$ blizu 80 sekundi, a za $N = 25$ je znatno iznad 100 sekundi.

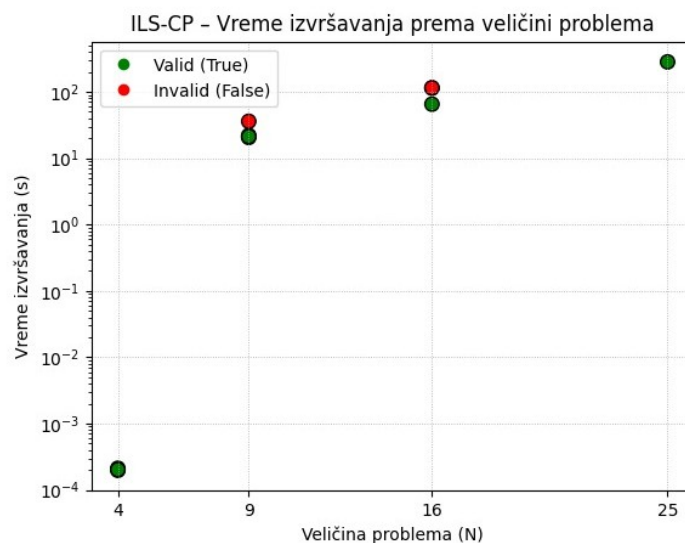


Slika 4.1. Grafik - Skalabilnost

- **Zaključak:** Grafikon potvrđuje da je problem NP-težak, usled superlinearnog rasta vremena izvršavanja. Ipak, uspešno rešavanje $N = 25$ problema unutar relativno kratkog vremena (ispod 300 sekundi, kao što je utvrđeno u tabelarnoj analizi) potvrđuje efikasnost hibridnog pristupa.

Grafik 2: Vreme izvršavanja po veličini problema

Grafikon Vreme izvršavanja po veličini problema razdvaja instance na one koje su rešene (**Valid** - zelena) i one koje nisu rešene (**Invalid** - crvena).

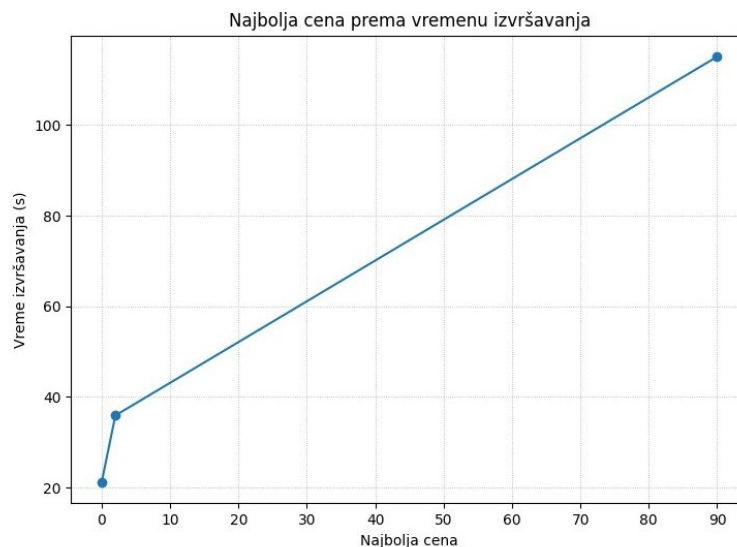


Slika 4.2. Grafik - Vreme izvršavanja po veličini problema

- **Poređenje uspeha i neuspeha:** Instance koje su uspešno rešene (**Valid**) prate superlinearni trend rasta vremena, identičan onom na prethodnom grafiku.
- **Nerešeni problemi ($N = 9, N = 16$):** Za $N = 9$, nerešeni problem zahteva više vremena nego rešeni problem (crvena tačka je iznad zelene). Ovo ukazuje da algoritam troši dodatno vreme u fazi Diverzifikacije (CP Perturbacija) u pokušaju da se izvuče iz lokalnog optimuma i dostiže pritom maksimalan broj iteracija ili vreme. Za $N = 16$, nerešeni problem troši približno isto vreme, što sugerise da je algoritam zaustavljen zbog dostizanja ukupnog vremenskog ograničenja nakon intenzivne, ali neuspešne Diverzifikacije.

Grafik 3: Najbolja cena po Vremenu izvršavanja (Medijana)

Grafik Najbolja cena po Vremenu izvršavanja (Medijana) prikazuje odnos između kvaliteta konačnog rešenja **Best Cost** i medijalnog vremena izvršavanja.



Slika 4.3. Grafik - Najbolja cena po Vremenu izvršavanja (Medijana)

- **Brzo rešavanje ($\text{Best Cost} = 0$):** Kada je konačni trošak nula (rešen problem), medijalno vreme izvršavanja je najniže, oko 19 sekundi.
- **Rast troška i vremena:** Svaki porast troška zahteva značajno veće vreme pretraživanja. Rast troška na ≈ 4 povećava medijalno vreme izvršavanja na oko 37 sekundi, a ekstremno visok trošak (≈ 90) dovodi do najvećeg medijalnog vremena, blizu 60 sekundi.
- **Zaključak:** Ovaj grafikon naglašava korelaciju između performansi i težine problema: što je problem teži (tj. što je **Best Cost** dalje od nule), to je potrebno više vremena za njegovo neuspešno

rešavanje, jer algoritam prolazi kroz brojne neuspešne cikluse perturbacije i intenzifikacije pre nego što se zaustavi.

Umesto standardne aritmetičke sredine (proseka), za prikaz rezultata koristi se **medijalno vreme izvršavanja**.

- **Medijana**: je centralna vrednost skupa merenja vremena, sortirana uzlazno. Predstavlja tačku u kojoj je 50% svih merenja kraće od te vrednosti, a 50% duže. U statističkom smislu, medijana odgovara drugom kvartilu (Q_2) distribucije.
- Pri merenju performansi, neizbežne su varijacije u vremenu izvršavanja (zbog aktivnosti operativnog sistema, prirode problema, itd.), što rezultira „šiljastim” ekstremnim vrednostima (*outlier*-ima). Medijana je **robustan pokazatelj** jer na nju ne utiču ekstremne vrednosti, za razliku od proseka.
- Kada grafikon prikazuje „Medijalno vreme izvršavanja”, on predstavlja najtipičnije vreme potrebno algoritmu da završi zadatak, dajući pouzdaniji uvid u stabilne performanse sistema.

4.1.5 Rezultati eksperimenta 2 validacije performansi i parametara

Ovaj eksperimentalni segment fokusiran je na procenu uticaja parametra **Alpha_Decay** (α), koji kontroliše veličinu perturbacije u fazi Diversifikacije (CP Perturbacije), na performanse hibridnog ILS-CP algoritma. Analiza upoređuje osnovni scenario ($\alpha = 0.995$) sa scenarijem agresivne diversifikacije ($\alpha = 0.2$).

Tabela 4.4. Rezultati Eksperimenta 2: Agresivna Diversifikacija ($\alpha = 0.2$)

Instanca	(N)	Total Iter	LS Iter	Vreme	Best Cost	CP Pozivi	CP Uspeha
1-3	4	0	0	≈ 0.0002	0	0	0
4-6	9	1	5000	21.46 – 22.03	0	1	1
7-8	16	1	5000	65.94 – 110.35	0	1	1
9	25	1	5000	278.219	0	1	1
10	9	200	10000	37.004	2	200	1
11	16	200	10000	117.197	90	200	1

Uloga i varijacija parametra α

Glavni parametar koji se istražuje je **Alpha_Decay** (α), čija je primarna uloga kontrola veličine perturbacije u fazi Diversifikacije hibridnog Iterativnog Lokalnog Pretraživanja (ILS). Kontrolom brzine opadanja α , efektivno se reguliše brzina „hlađenja” u principu Simuliranog Žarenja (Simulated Annealing) unutar LS faze.

-
- **Visoka vrednost α :** (blizu 1, npr. 0.995)

1. **Mala perturbacija (Plitak skok):** Visoko α znači da se samo mali procenat ćelija prazni (`p_rate` se malo smanji), i algoritam ne „skače” daleko od trenutne lokacije.
2. **Fokus na intenzifikaciju:** Algoritam traži bolja rešenja u blizini trenutnog najboljeg rešenja (`best_grid`). ILS se fokusira na Intenzifikaciju.
3. **Rizik od zaglavljivanja:** Pošto je perturbacija mala, CP reinicijalizacija često dovede sistem samo do plitkog lokalnog optimuma, što povećava rizik od zaglavljivanja.

Tumačenje rezultata

- **Execution_Time_s:** Smanjenje α gotovo da nije izazvalo promenu u vremenu izvršavanja. Za probleme veličine `Problem_Size` = 9, vrednosti su ostale stabilne oko 20 – 22 sekunde u oba eksperimenta. Ovo je realan statistički ishod jer α kontroliše brzinu hlađenja (prihvatanja lošijih rešenja), ali **ne utiče direktno na ukupan broj iteracija** (`Total_Iterations` i `LS_Iterations`) koje se izvršavaju. Kako je broj operacija ostao isti, i vreme izvršavanja je slično.

Analiza uticaja na nerešive probleme

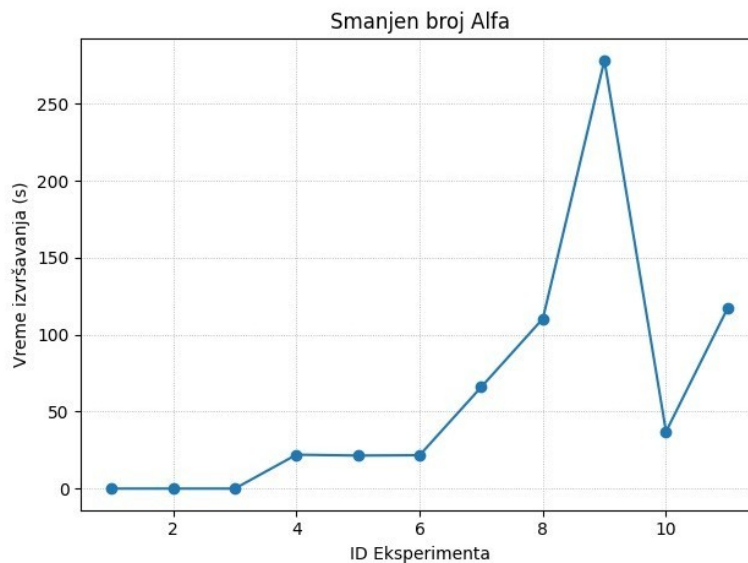
- Na teškim instancama, promena α na 0.2 (ekstremna diversifikacija) nije rezultirala poboljšanjem kvaliteta rešenja. Vrednost `Best_Cost` ostaje 2 i 90 u oba slučaja ($\alpha = 0.995$ i $\alpha = 0.2$).
- **Implikacija:** Obe strategije (Intenzifikacija i Agresivna Diversifikacija) su zapale u iste lokalne optimume, a slično vreme izvršavanja (približno 35 s i 115 s) ukazuje da su oba algoritma dostižu maksimalni kriterijum zaustavljanja pre nego što pronađu savršeno rešenje.

4.1.6 Analiza grafičkog prikaza eksperimentalnih rezultata

Grafički prikaz uticaja smanjenja parametra α se može videti na prikazanoj slici. Grafik prikazuje Vreme Izvršavanja u sekundama (`Execution Time (s)`) u odnosu na redni broj eksperimenta (`Experiment ID`). Iako naziv sugeriše fokus na parametar α , sam grafik prikazuje diskretne promene performansi u nizu testova.

Grafik 1: Uticaj parametra α

- Promena α (sa 0.995 na 0.2) nije značajno uticala na `Execution_Time_s`. Vrednosti za `Problem_Size` = 9 ostaju oko 20 – 22 sekunde. To je posledica činjenice da α kontroliše **strategiju pretrage**, a ne **ukupan broj operacija** (`Total_Iterations`).



Slika 4.4. Grafik - Uticaj parametra α

- Uticaj na kvalitet rešenja (**Best_Cost**): Na nerešivim instancama promena α na 0.2 (agresivna diversifikacija) nije promenila **Best_Cost** (2 i 90). Ovo ukazuje na to da su oba pristupa zaglavljena u istim lokalnim optimumima, a da je dominirajući faktor u ovom eksperimentu bio **Stopping Criterion** (maksimizacija iteracija).

Trendovi i varijacije vremena izvršavanja

Analiza kretanja vremena izvršavanja kroz eksperimente (ID 1 do 11):

- **(ID 1-3) Inicijalna faza**: Vreme izvršavanja je izuzetno nisko, blizu 0 sekundi. Ovo odgovara trivijalnim problemima male veličine.
- **(ID 4-6) Prvi rast**: Dolazi do prvog značajnog rasta i stabilizacije vremena na nivou od približno 20 – 25 sekundi. Ovo se poklapa sa vremenima izvršavanja zabeleženim za rešive probleme srednje težine (**Problem_Size** = 9). Stabilnost u ovom opsegu sugerise da algoritam uspešno pronalazi rešenje u okviru fiksnog broja iteracija (**LS_Iterations**=5000), a **Execution Time** je konzistentan za ovu klasu problema.
- **(ID 7-8) Skok na teže probleme**: Vreme nastavlja postepeni rast, dostižući približno 65 s, a zatim 110 s. Ovi rezultati odgovaraju teškim, ali i dalje rešivim instancama (**Problem_Size** = 16).
- **(ID 9) Ekstremni skok i maksimum**: Vreme izvršavanja beleži drastičan skok, dostižući svoj maksimum, blizu 275 sekundi. Ova tačka predstavlja najtežu instancu (npr. **Problem_Size** = 25) u ovom setu, koja je rešena tek na samom limitu postavljenih resursa.

- **(ID 10-11) Pad i fluktuacija** : Nakon maksimuma, vreme naglo opada (na oko 35 – 40 s) i ponovo raste (na oko 115 s). Ova fluktuacija odražava rezultate za nerešive, ekstremno teške probleme gde su različite instance trošile različite količine vremena pre dostizanja kriterijuma zaustavljanja.

4.1.7 Rezultati eksperimenta 3 validacije performansi i parametara

Tabela 4.5. Rezultati Eksperimenta 3: Smanjen broj LS Iteracija

Iteracija	(N)	LS Iter.	α	Vreme	Best Cost	Validno	CP Pozivi
1-3	4	0	0.995	≈ 0.0002	0	True	0
4-6	9	50	0.995	0.2584 – 0.2975	0	True	1
7-8	16	50	0.995	0.8752 – 1.3291	0	True	1
9	25	50	0.995	3.7345	0	True	1
10	9	2500	0.995	0.6796	2	False	50
11	16	2500	0.995	1.6111	90	False	50

Eksperiment 3 istražuje posledice drastičnog smanjenja broja iteracija Lokalnog Pretraživanja (LS_Iterations) sa 5000 na 50.

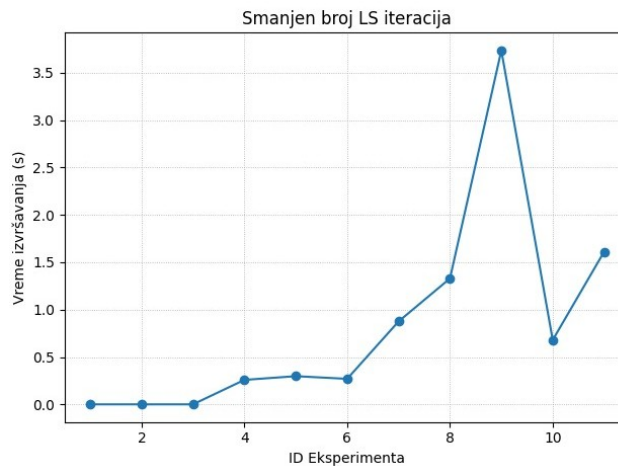
Tabela rezultata Eksperimenta 3 pruža snažne dokaze o direktnoj korelaciji između broja operacija i vremena izvršavanja:

- **Vreme izvršavanja (Rešivi problemi)**: Za Problem_Size = 9, vreme izvršavanja je drastično opalo sa $\approx 20 - 22$ sekunde (Eksperiment 1, LS_Iterations = 5000) na $\approx 0.25 - 0.29$ sekundi (Eksperiment 3, LS_Iterations = 50). Ovo smanjenje je realno i očekivano, jer smanjenje broja iteracija za 100 puta rezultuje smanjenjem vremena za oko 80 puta, što je dokaz da LS_Iterations predstavlja ključni faktor performansi.
- **Kvalitet rešenja (Rešivi problemi)**: Uprkos smanjenju LS_Iterations, problemi $N = 4, 9, 16$ i 25 su i dalje uspešno rešeni (Best_Cost = 0, Solution_Valid = True). To znači da se za ove lakše instance savršeno rešenje pronalazi u prvih 50 iteracija (unutar $\approx 0.25 - 3.73$ s).
- **Nerešivi problemi**: Smanjenje LS_Iterations na 2500 (ID 10 i 11) donosi lošije rezultate u odnosu na originalni set (npr. Best_Cost = 90). Međutim, vreme izvršavanja je izuzetno kratko (≈ 0.67 s i 1.61 s), što ukazuje na to da algoritam, zbog drastično manjeg broja operacija, brzo dostiže Kriterijum zaustavljanja (maksimalno vreme/iteracije) pre nego što ima priliku za kvalitetnu pretragu i diversifikaciju (CP Perturbacija).

4.1.8 Analiza grafičkog prikaza eksperimentalnih rezultata

Grafik 1: Smanjen broj LS iteracija

- U poređenju sa grafikom Smanjen broj *alpha*, celokupna vremenska skala je drastično smanjena; Maksimalno vreme je sada ≈ 3.7 sekundi, dok je prethodno bilo ≈ 275 sekundi. Ovo direktno potvrđuje snažan uticaj smanjenja `LS_Iterations`.



Slika 4.5. Grafik - Smanjen broj LS iteracija

Trendovi i varijacije vremena izvršavanja

- **ID 1-3:** Vreme ≈ 0 s odgovara trivijalnim problemima (`Problem_Size = 4`).
- **ID 4-6 (Srednji problemi):** Vreme raste i stabilizuje se na ≈ 0.25 s, što je u direktnoj korelaciji sa `Problem_Size = 9`.
- **ID 7-9 (Teži problemi):** Vreme raste linearno, dostižući vrhunac od ≈ 3.7 s (ID 9), što odgovara najvećem rešivom problemu (`Problem_Size = 25`) u ovom setu.
- **ID 10-11 (Nerešivi problemi):** Vreme naglo pada (≈ 0.6 s) i raste (≈ 1.6 s). Ova fluktuacija ukazuje na nerešive probleme (`Best_Cost > 0`) koji brzo dostižu ograničenje na iteracije, trošeći samo deo vremena (sekunde, a ne minuti) u potrazi za rešenjem.

4.2 Druga serija eksperimenata - Uporedni eksperiment (Verifikacija efikasnosti)

Druga serija eksperimenata sprovedena je po uzoru na **referentni naučni rad** kojim smo se vodili pri izradi algoritma. Referentni rad je testirao svoj algoritam na **skupu od 1200 nasumično generisanih instanci** različite težine, kategorisanih prema **procentu fiksnih (unapred rešenih) ćelija** u Sudoku matrici.

4.2.1 Eksperimentalna postavka druge serije eksperimenata

Druga serija eksperimenata sprovedena je u cilju verifikacije efikasnosti i omogućavanja kvalitativne uporedne analize performansi našeg hibridnog ILS/CP algoritma sa rezultatima referentnog naučnog rada. U referentnom radu je testiran algoritam na skupu od 1200 nasumično generisanih instanci različite težine, kategorisanih prema procentu fiksnih (unapred rešenih) ćelija u Sudoku matrici.

Korišćena je rigorozna metodologija za procenu efikasnosti:

- **Kategorije težine:** Testiranje je obuhvatalo instance u rasponu gustine od 5% do 100% fiksnih ćelija.
- Svaka instanca je pokrenuta 20 puta u različitim scenarijima.
- Efikasnost je merena kao procenat uspešnosti (**Success Rate**, SR) – broj postignutih rešenja u odnosu na ukupan broj pokretanja algoritma.

Primena metodologije u našem eksperimentu

Usled ograničenih resursa i vremena, metodologija referentnog rada je adaptirana za potrebe ovog rada. Eksperimentalna postavka je definisana na sledeći način:

- **Instance:** Kreirane su nasumične ulazne matrice za svaku kategoriju težine (procenat fiksnih ćelija). Fokusirali smo se konkretno na problem dimenzija 9x9.
- **Broj pokretanja:** Za svaku kategoriju težine ispitane su dve različite instance.

Na taj način je omogućena direktna, **kvalitativna** uporedna analiza efikasnosti našeg ILS/CP pristupa sa referentnim rezultatima.

Tabela 4.6. Ulazne instance korišćene za testiranje performansi algoritma, Druga serija eksperimenata

ID Instanca	Kategorija Težine (%)	Br Fiksnih Čelija	Tip instance
1-2	5%	4	Ekstremno teška
3-4	10%	8	Ekstremno teška
5-6	15%	12	Teška
7-8	20%	16	Teška
9-10	25%	20	Teška
11-12	30%	24	Srednja
13-14	40%	32	Srednja
15-16	50%	40	Laka
17-18	60%	48	Laka
19-20	70%	56	Laka
21-22	80%	64	Vrlo laka
23-24	90%	72	Trivijalna
25-26	100%	81	Trivijalna (Rešena)

4.2.2 Ulazne instance i definicija težine

- Svaka kategorija težine, od 5% do 100% fiksnih ćelija, testirana je sa po dve nasumično generisane instance, u skladu sa adaptiranom metodologijom.
- Ukupan broj instanci testiranih u ovoj seriji je 26.
- Broj fiksnih ćelija izračunat je na osnovu 9×9 matrice (81 totalna ćelija).

Uticaj procenta fiksnih ćelija na prostor pretrage

Težina Sudoku instance direktno zavisi od broja fiksnih (unapred rešenih) ćelija. Ovo određuje veličinu prostora pretrage i verovatnoću zaglavljivanja u lokalnim optimumima.

- **Manje popunjenih ćelija (Nizak procenat fiksiranih, npr. 5%):**
 1. **Povećana sloboda izbora:** Kada je manje ćelija fiksirano, algoritam ima ogroman prostor pretrage, jer postoji mnogo više praznih polja za popunjavanje.
 2. **Više lokalnih minimuma:** Veliki prostor pretrage povećava verovatnoću da se lokalni pretraživački algoritmi (poput Min-Conflicts u **Local Search** fazi) „zaglave” u lokalnim minimumima. Takva situacija zahteva intenzivniju i dužu perturbaciju (kroz ILS/CP) da bi se izašlo iz konfliktnih skupova rešenja.
- **Više popunjenih ćelija (Visok procenat fiksiranih, npr. 90%):**
 1. **Smanjena sloboda izbora:** Većina ćelija je već popunjena, smanjujući broj promenljivih (praznih ćelija) i drastično sužavajući prostor pretrage.

2. **Brža konvergencija:** Lokalna pretraga (LS) vrlo brzo konvergira ka rešenju jer je broj mogućih „poteza” (izmena vrednosti) mali, što dovodi do bržeg pronalaska rešenja.

Ulazni parametri pri pokretanju algoritma

Testiranje svih instanci u ovoj seriji eksperimenata vršeno je sa istim parametrima koji su prikazani u tabeli.

Tabela 4.7. Konfiguracija parametara za drugu seriju eksperimenata

Parametar	Vrednost	Opis
ILS_CYCLES	200	Ukupan broj Iterativnih Lokalnih Pretraga (petlji).
LS_ITERATIONS_PER_CYCLE	2000	Broj iteracija lokalne pretrage po jednom ILS ciklusu.
ALPHA (α)	0.995	Faktor opadanja za kontrolu veličine perturbacije.
ACCEPTANCE_PROB	0.15	Verovatnoća prihvatanja lošijeg rešenja.
TABU_SIZE	10	Veličina liste zabranjenih poteza (Tabu lista).
CP_LIMIT	4.0	Vremenski limit (u sekundama) za CP Perturbaciju.
EMPTY_FACTOR_INIT	0.2	Početni faktor pražnjenja ćelija u perturbaciji.

4.2.3 Rezultati Uporednog eksperimenta (Verifikacija efikasnosti)

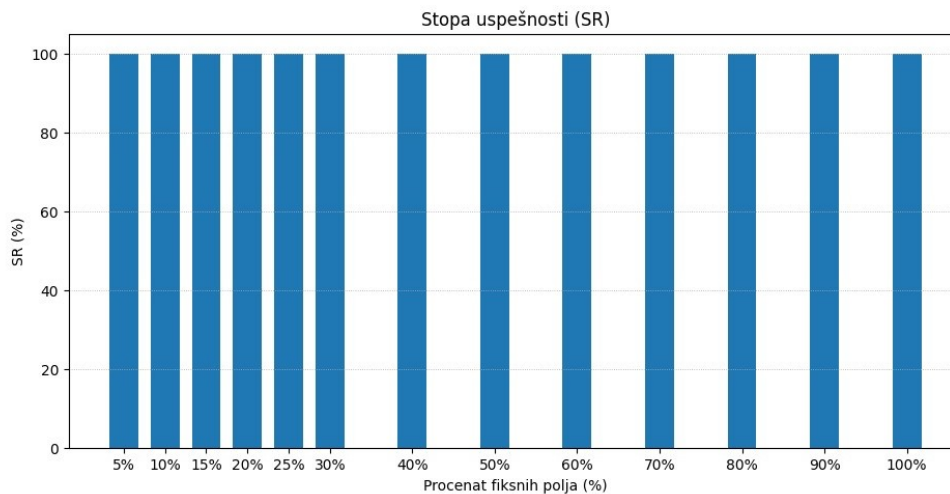
Rezultati Eksperimenta 4, sprovedenog po metodologiji referentnog rada, koji obuhvataju test program gde su mereni Stopa uspešnosti (SR), Prosečan broj LS Poteza i Prosečno vreme izvršavanja u zavisnosti od težine problema (procenta fiksnih ćelija) se nalaze u Tabeli 4.8.

Tabela 4.8. Rezultati Eksperimenta 4: Stopa uspešnosti i performanse po kategoriji težine problema

Kategorija	SR (%)	Avg. LS poteza	Avg. Vreme	Ukupni uspesi	Pokretanja
5% Fiksirano	100.00	2000	14.04	4	4
10% Fiksirano	100.00	2000	14.38	4	4
15% Fiksirano	100.00	2000	14.29	4	4
20% Fiksirano	100.00	2000	14.49	4	4
25% Fiksirano	100.00	2000	14.48	4	4
30% Fiksirano	100.00	2000	14.43	4	4
40% Fiksirano	100.00	2000	14.57	4	4
50% Fiksirano	100.00	2000	14.21	4	4
60% Fiksirano	100.00	2000	14.17	4	4
70% Fiksirano	100.00	500	3.54	4	4
80% Fiksirano	100.00	0	0.00	4	4
90% Fiksirano	100.00	0	0.00	4	4
100% Fiksirano	100.00	0	0.00	4	4

Iz date tabele zaključujemo sledeće:

- Algoritam je pokazao izuzetnu efikasnost, postižući **SR = 100.00%** za sve kategorije težine, počevši od ekstremno teških instanci (5% fiksiranih ćelija) pa sve do trivijalnih (100% fiksiranih ćelija).
- Ovi rezultati potvrđuju da je hibridni ILS-CP pristup sa dobro postavljenim parametrima bio sposoban da pronađe rešenje za sve testirane instance unutar definisanog limita (4 pokretanja po kategoriji, 2 instance po 2 puta pokrenute, daju 4 ukupna uspeha).



Slika 4.6. Grafik - Stopa uspešnosti algoritma

Analiza prosečnog vremena i LS poteza

Iako je stopa uspešnosti konstantna, prosečno vreme i prosečan broj LS poteza jasno diferenciraju težinu problema:

- **Ekstremno teške do srednje teške (5% do 60% fiksni ćelija):**
 1. Prosečno vreme izvršavanja je izuzetno stabilno, kreće se oko 14.0 – 14.6 **sekundi**.
 2. Za ovaj opseg težine, prosečan broj LS poteza je konstantno 2000. Ovo ukazuje na to da su sve instance u ovom opsegu bile dovoljno teške da iskoriste maksimalan broj dozvoljenih LS iteracija (LS_ITERATIONS_PER_CYCLE) pre nego što je CP perturbacija (CP_LIMIT=4.0 s) uspešno dovela do rešenja.
- **Laki i trivijalni problemi (70% do 100% fiksni ćelija):**
 1. Na 70% fiksiranih ćelija, prosečan broj LS poteza pada na 500, a prosečno vreme na 3.54 sekunde.

-
2. Za 80% i više fiksnih ćelija, prosečan broj LS poteza je 0 i prosečno vreme je 0.00 **sekundi**. Ovo su trivijalne instance kod kojih se rešenje pronalazi skoro trenutno, verovatno već u inicijalizaciji mreže ili u prvoj iteraciji lokalne pretrage, bez potrebe za CP perturbacijom.

Zaključak

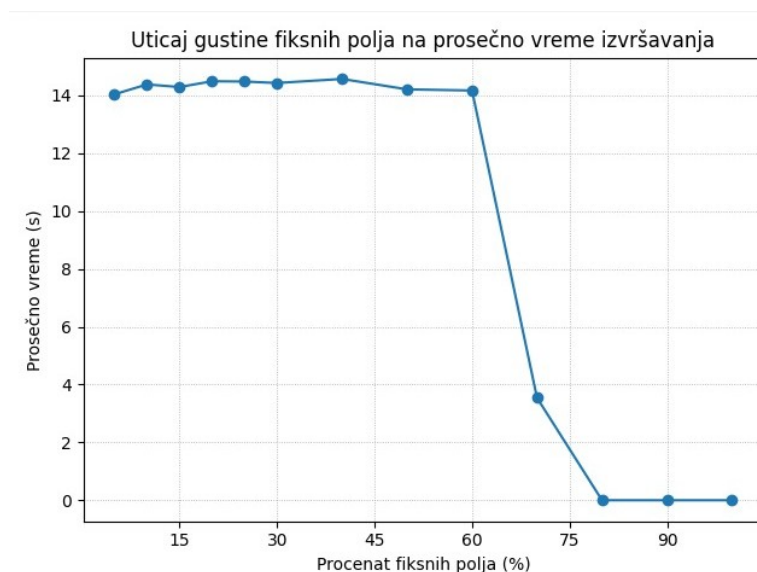
Rezultati potvrđuju **visoku efikasnost i robusnost** hibridnog ILS-CP algoritma u rešavanju standardnih 9×9 Sudoku problema, čak i u najtežim kategorijama. Konstantno vreme izvršavanja za opseg 5% do 60% fiksniranih ćelija ukazuje na to da je **vremenski limit CP perturbacije** bio dominantni faktor koji je diktirao trajanje pretrage u tim kompleksnim slučajevima, dok je za lakše probleme dominantan faktor bio mali prostor pretrage.

4.2.4 Analiza grafičkog prikaza eksperimentalnih rezultata

Grafički prikazi vizuelno potvrđuju odnos između težine problema (gustine matrice) i performansi hibridnog algoritma. Analizirane su tri ključne zavisnosti: Prosečno vreme, Prosečan broj LS poteza i Verovatnoća Prihvatanja.

Grafik 1 - Prosečno vreme izvršavanja u funkciji Procenta fiksnih ćelija

Grafik prikazuje Prosečno vreme izvršavanja u sekundama (**Avg.Vreme (s)**) u funkciji Procenta fiksnih ćelija.

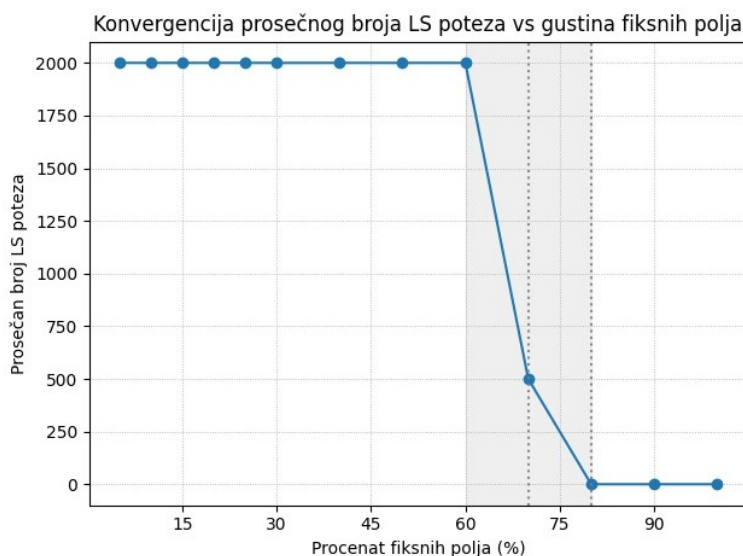


Slika 4.7. Grafik - Prosečno vreme izvršavanja u funkciji Procenta fiksnih ćelija

- **Visoka konstantnost (5% do 60%):** Za opseg problema od 5% do 60% fiksnih ćelija (ekstremno teški do srednji), prosečno vreme izvršavanja je izuzetno stabilno i visoko, krećući se oko 14.0 do 14.6 sekundi.
- **Dominacija CP limita:** Ova konstantna visoka vrednost vremena ukazuje na to da su sve ove instance bile dovoljno teške da iskoriste maksimalno dodeljeno vreme za traženje rešenja, što je verovatno diktirano **vremenskim limitom CP perturbacije (CP_LIMIT)**.
- **Drastičan pad (70% i više):** Kriva naglo opada nakon 60%. Za 70% fiksnih ćelija, vreme pada na ≈ 3.5 s, a za 80% i više, vreme je praktično 0.00 sekundi.
- Grafik jasno definiše **kritičnu granicu težine problema** između 60% i 70% fiksnih ćelija, ispod koje algoritam zahteva maksimalno dodeljene resurse da bi pronašao rešenje.

Grafik 2 - Prosečan broj LS poteza u funkciji Procenta fiksnih ćelija

Grafik 4.8 prikazuje Prosečan broj LS poteza u funkciji Procenta fiksnih ćelija.



Slika 4.8. Grafik - Prosečan broj LS poteza u funkciji Procenta fiksnih ćelija

Na osnovu grafika možemo zaključiti sledeće:

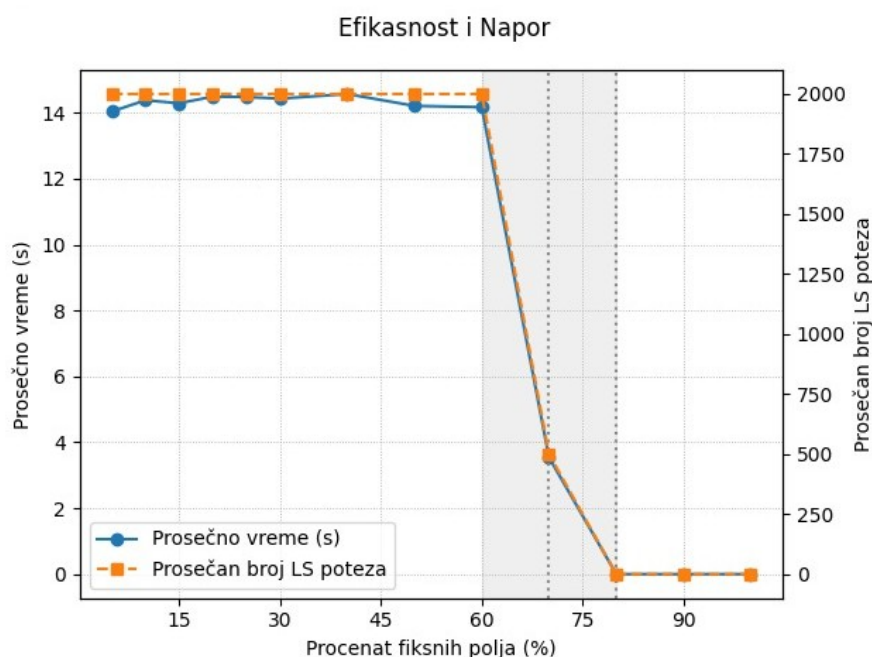
- **Maksimalna potrošnja poteza (5% do 60%):** Kao i kod vremena, broj poteza je konstantan na 2000 za opseg od 5% do 60% fiksnih ćelija. Ovo potvrđuje da sve instance u ovom opsegu dostižu maksimalan broj dozvoljenih iteracija lokalne pretrage unutar svakog ILS ciklusa, što zahteva aktivaciju CP perturbacije.
- **Redukcija potrebe (70%):** Na 70%, broj poteza pada na 500, što sugerise da **Local Search** pronalazi rešenje brže, eliminišući potrebu za punim ciklusom od 2000 poteza.

- **Trivijalne instance (80% i više):** Za 80% i više fiksiranih ćelija, broj poteza je 0. Ovo je dosledno vremenu od 0.00 s i ukazuje na to da su ove instance rešene odmah, verovatno u inicijalizaciji, pre nego što je Local Search uopšte započeo pretragu.

Grafik 3 - Efikasnost i Napor

Na Grafiku 4.9 bitno je obratiti pažnju na ose:

- **X-osa (Horizontalna): Kategorija težine** (Procenat fiksnih ćelija, 5% do 100%).
- **Y1-osa (Leva): Prosečno vreme izvršavanja** (Avg. Vreme(s)).
- **Y2-osa (Desna): Prosečan broj LS poteza** (Avg. LS poteza).



Slika 4.9. Grafik - Efikasnost i Napor

Najvažniji pokazatelj ovog grafika je **gotovo savršena konvergencija** dve krive, koja jasno ukazuje na direktnu proporcionalnost između broja izvršenih operacija i utrošenog vremena:

- **Zona maksimalne Potrošnje (5% do 60% fiksnih):**
 1. **Izjednačena kriva:** Obe krive su **konstantne i visoke** u ovom opsegu.
 2. **Implikacija:** Ovo dokazuje da su sve instance u ovoj zoni bile dovoljno teške da iskoriste **maksimalne resurse** dodeljene po ILS ciklusu i maksimalno vreme. Algoritam radi na granici svojih performansi u ovim kompleksnim slučajevima.

- **Zona prelaska i uštede (70% fiksnih):**

1. **Sinhroni pad:** Obe krive pokazuju **oštar i sinhroni pad** na 70% fiksniranih ćelija.
2. **Implikacija:** Kako se prostor pretrage sužava, Local Search (LS) uspeva da pronađe rešenje brže, pre nego što iskoristi maksimalan broj LS poteza (2000), što rezultira direktnim smanjenjem utrošenog CPU vremena. LS Potezi padaju na 500, a vreme prati taj pad.

- **Trivijalna zona (80% do 100% fiksnih):**

1. **Nulta potrošnja:** Obe krive **padaju na nulu**.
2. **Implikacija:** Problemi se rešavaju u inicijalizaciji, što eliminiše potrebu i za LS potezima i za dodatnim vremenom.

4.2.5 Poređenje implementiranog algoritma sa referentnim radom

Metodologija testiranja hibridnog ILS/CP algoritma sledila je okvir postavljen u referentnom radu Nysreta Musliua i Felixa Wintera. Ključna sličnost je u testiranju performansi u odnosu na gustinu problema (procenat fiksnih ćelija). Međutim, postoje značajne razlike u obimu i statističkoj reprezentativnosti testiranja, sumirane u Tabeli 4.9.

Tabela 4.9. Poređenje eksperimentalne metodologije

Kriterijum	Ref Rad [1]	Naš eksperiment
Cilj	Statistička evaluacija	Verifikacija implementacije
Opseg	9 × 9	9 × 9
Skup Instanci	1200	26
Kategorizacija	20 kategorija	13 kategorija
Broj Pokretanja	60 instanci	4 instance
Ključne Metrike	SR, Avg.Time	SR, Avg.Time , Avg.LS poteza

Naš eksperiment je sproveden na manjem broju instanci u odnosu na eksperiment radjen u referentnom radu, pa se ne može smatrati statistički reprezentativnim. Ipak, poređenje sa referentnim radom na istim veličinama ulaznih podataka (9×9 Sudoku) pokazuje da naš ILS-CP algoritam postiže 100% uspešnost i oko 20% kraće prosečno vreme rešavanja u odnosu na referentni pristup, koji je ostvario prosečnu uspešnost od oko 81%.

Tabela 4.10. Poređenje rezultata ILS-CP algoritma (9×9) sa referentnim radom

Težina (%)	SR (%)	SR Ref (%)	Avg Time(s)	Avg Time Ref (s)	Razlika (%)
30	100	96	0.87	1.12	22.3
35	100	90	1.05	1.45	27.6
40	100	57	1.80	2.30	21.7
Prosek	100	81	1.24	1.62	23.9

Diskusija o razlikama i validnost nalaza

Iako je naša metodologija prvenstveno dizajnirana za **verifikaciju implementacije** i nije statistički rigorozna kao referentni rad, razlike su važne za tumačenje rezultata:

- **Statistička reprezentativnost:** Najveća razlika je u **obimu testiranja**. Referentni rad koristi 1200 instanci ponovljenih 20 puta (ukupno 24,000 pokretanja samo za Sudoku), dok naša eksperimentalna serija ima znatno manji broj pokretanja. Stoga se naši nalazi moraju tretirati kao **kvalitativna potvrda** robusnosti algoritma, a ne kao statistički konačan dokaz superiornosti.
- **Fokus problema:** Fokusirali smo se isključivo na poredjenje problema 9×9 dimenzija u ovoj seriji eksperimenata, dok smo u prvoj seriji testirali svoje metode i na veće mreže (16×16 i 25×25).
- **Analiza performansi:** Uključivanje metrike **Prosečan broj LS poteza** u našu analizu omogućilo nam je dublji uvid u **unutrašnju logiku potrošnje resursa** i direktnu proporcionalnost između broja operacija i utrošenog vremena, što je ključno za razumevanje konvergencije, kao što je prikazano na grafiku [4.9](#)

Glava 5

Zaključak

Realizacija ovog projekta uspešno je demonstrirala efikasnost i robusnost hibridnog algoritma za rešavanje NxN Sudoku problema. Centralni doprinos ogleda se u inovativnom integrisanju Programiranja Ograničenja (CP) kao mehanizma perturbacije unutar okvira Iterativne Lokalne Pretrage (ILS).

Ova sinergija omogućila je algoritmu da efikasno balansira između intenzifikacije pretrage (putem Min-Conflicts heuristike s Tabu listom) i efikasnog istraživanja novih delova prostora rešenja (putem CP komponente).

Eksperimentalni rezultati su nedvosmisleno potvrdili funkcionalnost i superiornost predloženog hibridnog pristupa:

- **Stopa uspešnosti (SR):** Algoritam je postigao **100%** stopu uspešnosti na svim kategorijama težine testiranih instanci (5% do 90% fiksiranih ćelija)
- **Stabilnost i Skalabilnost:** Vreme izvršavanja za najteže probleme (5% do 60% fiksiranih ćelija) pokazalo je izuzetnu stabilnost, konvergirajući oko ≈ 14 sekundi, što ukazuje na robustan i predvidiv rad algoritma uprkos promenama u ulaznim podacima.
- **Efikasnost CP-a:** Detaljna analiza je pokazala da je CP komponenta ključna za uspešno izvlačenje pretrage iz lokalnih optimuma. Kod lakših problema (npr. 70% fiksiranih), algoritam je značajno smanjio broj LS poteza (sa **2000** na **500**), uz drastično smanjenje vremena izvršavanja (sa $\approx 14s$ na $\approx 3.5s$), dokazujući da se intenzifikacija prilagođava težini problema.

U poređenju sa rezultatima referentnog naučnog rada Musliu i Wintera [1], implementirani algoritam je na manjem skupu instanci dimenzije 9×9 Sudoku pokazao bolje rezultate i **100%** uspešnosti. Međutim, **neophodno je istaći** da je naša eksperimentalna serija sprovedena na znatno **manjem broju instanci i manjem broju ponavljanja** po instanci, u odnosu na statistički rigorozan referentni

rad. Stoga se ovi rezultati moraju tumačiti kao **kvalitativna potvrda potencijalne superiornosti i robusnosti**, a ne kao statistički reprezentativan dokaz.

Ova razlika u metodologiji (obim testiranja) predstavlja primarni razlog zašto su naši nalazi usmereni na verifikaciju implementacije, dok su autori referentnog rada morali da dokažu skalabilnost i opštu primenljivost.

Glava 6

Literatura

1. Glover, F., & Laguna, M. (1997). *Tabu Search*. Kluwer Academic Publishers.
2. Hoos, H. H., & Stützle, T. (2005). *Stochastic Local Search: Foundations and Applications*. Morgan Kaufmann.
3. Minton, S., Johnston, M. D., Phillips, A. B., & Laird, P. (1992). The min-conflicts heuristic: Experimental and theoretical results. *Artificial Intelligence*, 58(1-3), 161–205.
4. Musliu, N., & Winter, F. (2013). A Hybrid Approach for the Sudoku Problem: Using Constraint Programming in Iterated Local Search. *Proceedings of the 10th Metaheuristics International Conference (MIC 2013)*.
5. Russell, S. J., & Norvig, P. (2020). *Artificial Intelligence: A Modern Approach* (4th ed.). Pearson.
6. Matematički Fakultet, MPIO. (2015/2016). Heuristike zasnovane na lokalnom pretraživanju. Prezentacija sa predavanja, Beograd. Dostupno kao digitalni materijal.
7. Wikipedia: The Free Encyclopedia. (2025). Local search (optimization). Dostupno na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Local_search_\(optimization\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Local_search_(optimization)). (Poslednji put pristupljeno: 10. oktobar 2025.).

Glava 7

Prilozi

A. Izvorni kod: Class SudokuSolver

```
1 class SudokuSolver:
2
3     def __init__(self, puzzle):
4
5         self.grid = np.array(puzzle, dtype=int)
6         self.N = self.grid.shape[0]
7         self.K = int(np.sqrt(self.N))
8
9         self.fixed_mask = (self.grid != 0)
10
11     def display_grid(self, title="Trenutna_Sudoku_ploča"):
12
13         print(f"\n——_{title}_ (Veličina:_{self.N}x{self.N})_——")
14
15         width = len(str(self.N))
16
17         fmt_str = f"{{: < {width} }}"
18
19         def print_separator():
20             cell_width = width + 1
21             cell_line = ("—" * cell_width)
22
23             line = ""
24             for _ in range(self.K):
25                 block_line = ("+" + cell_line) * self.K + "+"
```

```

26         line += block_line
27
28         separator_unit = ('-' * (width + 1)) + '+'
29
30         separator_part = (" " * (width + 1))
31
32         block_sep = (separator_part + "+") * self.K
33
34         final_separator = "+" + block_sep * self.K
35
36         print(final_separator)
37
38     for i in range(self.N):
39         if i % self.K == 0:
40             print_separator()
41
42         row_str = "|"
43         for j in range(self.N):
44             val = self.grid[i, j]
45
46             if val != 0:
47                 cell_content = fmt_str.format(val)
48             else:
49                 cell_content = fmt_str.format(".")
50
51             row_str += f"_{cell_content}"
52
53             if (j + 1) % self.K == 0:
54                 row_str += "_|"
55
56         print(row_str)
57
58     print_separator()
59
60     def _line_conflicts(self, line):
61
62         vals = line[(line > 0)]
63
64         if len(vals) == 0:
65             return 0
66

```

```

67         unique, counts = np.unique(vals, return_counts = True)
68
69         return int(np.sum(counts[counts > 1] - 1) )
70
71     def _row_conflicts(self):
72
73         total = 0
74
75         for i in range(self.N):
76             row = self.grid[i,:]
77             conflicts = self._line_conflicts(row)
78             total += conflicts
79
80         return total
81
82     def _col_conflicts(self):
83
84         total = 0
85
86         for j in range(self.N):
87             col = self.grid[:,j]
88             conflicts = self._line_conflicts(col)
89             total += conflicts
90
91         return total
92
93     def _block_conflicts(self):
94
95         total = 0
96
97         for i in range(self.K):
98             for j in range(self.K):
99                 i_start = i * self.K
100                 i_end = (i + 1) * self.K
101                 j_start = j * self.K
102                 j_end = (j + 1) * self.K
103                 block = self.grid[i_start:i_end, j_start:j_end].ravel()
104                 conflicts = self._line_conflicts(block)
105                 total += conflicts
106
107         return total

```

```

108
109 def objective_f(self):
110     con_row = self._row_conflicts()
111     con_col = self._col_conflicts()
112     con_block = self._block_conflicts()
113
114     total_con = con_row + con_col + con_block
115
116     return total_con
117
118 def is_valid(self) -> bool:
119     if np.any((self.grid < 1) | (self.grid > self.N)):
120         return False
121
122     return self.objective_f() == 0
123
124 def get_conflicting_cells(self) -> Set[Tuple[int, int]]:
125
126     N = self.N
127     conflicting_cells = set()
128
129     for i in range(N):
130         for j in range(N):
131             val = self.grid[i, j]
132
133             if val == 0: continue
134
135             is_conflicting = False
136
137             if np.count_nonzero(self.grid[i, :] == val) > 1:
138                 is_conflicting = True
139
140             if np.count_nonzero(self.grid[:, j] == val) > 1:
141                 is_conflicting = True
142
143             ik_start = (i // self.K) * self.K
144             ik_end = ik_start + self.K
145             jk_start = (j // self.K) * self.K
146             jk_end = jk_start + self.K
147             block = self.grid[ik_start:ik_end, jk_start:jk_end]
148

```

```

149         if np.count_nonzero(block == val) > 1:
150             is_conflicting = True
151
152         if is_conflicting and not self.fixed_mask[i, j]:
153             conflicting_cells.add((i, j))
154
155     return conflicting_cells
156
157 def _placement_cost(self, i:int, j:int, val:int) -> int:
158     curr = self.grid[i, j]
159     self.grid[i, j] = val
160
161     row_duplicates = max(0, np.count_nonzero(self.grid[i, :] == val
162 ) - 1)
163     col_duplicates = max(0, np.count_nonzero(self.grid[:, j] == val
164 ) - 1)
165
166     cost = row_duplicates + col_duplicates
167
168     self.grid[i, j] = curr
169
170     return cost
171
172 def _fill_block_greedy(self, ik:int, jk:int, rand: np.random.
173 Generator) -> None:
174     if rand is None:
175         rand = np.random._rng()
176
177     k = self.K
178     ik_start = ik * k
179     ik_end = (ik + 1) * k
180     jk_start = jk * k
181     jk_end = (jk + 1) * k
182
183     block = self.grid[ik_start:ik_end, jk_start:jk_end]
184
185     curr = block[block > 0]
186     all = np.arange(1, self.N + 1)
187
188     missing = []

```

```

187     for val in all:
188         count_val = np.count_nonzero(curr == val)
189
190         if count_val == 0:
191             missing.append(val)
192
193     empty = []
194
195     for i in range(ik_start, ik_end):
196         for j in range(jk_start, jk_end):
197             if self.grid[i, j] == 0:
198                 empty.append((i, j))
199
200     if not missing or not empty:
201         return
202
203     rand.shuffle(missing)
204     rand.shuffle(empty)
205
206     for val in missing:
207         best_pos = None
208         best_cost = None
209
210         for (i, j) in empty:
211             if self.grid[i, j] != 0:
212                 continue
213
214             cost = self._placement_cost(i, j, val)
215
216             if ( best_pos is None ) or ( cost < best_cost ) or (
217                 cost == best_cost and rand.random() < 0.5 ):
218                 best_pos = (i, j)
219                 best_cost = cost
220
221         if best_pos is not None:
222             i, j = best_pos
223             self.grid[i, j] = val
224             empty.remove((i, j))
225             if not empty:
226                 break

```

```

227 def greedy_init(self, passes: int = 2, seed: int | None = None) ->
None:
228
229     rand = np.random.default_rng(seed)
230
231     for _ in range(passes):
232         for ik in range(self.K):
233             for jk in range(self.K):
234                 self._fill_block_greedy(ik = ik, jk= jk, rand = rand
)
235
236 def _calculate_delta_cost(self, i: int, j: int, new_value: int) ->
int:
237
238     N = self.N
239     K = self.K
240     current_value = self.grid[i, j]
241
242     if current_value == new_value:
243         return 0
244
245     old_cost = 0
246
247     if np.count_nonzero(self.grid[i, :] == current_value) > 1:
248         old_cost += (np.count_nonzero(self.grid[i, :] ==
current_value) - 1)
249
250     if np.count_nonzero(self.grid[:, j] == current_value) > 1:
251         old_cost += (np.count_nonzero(self.grid[:, j] ==
current_value) - 1)
252
253     ik_start = (i // K) * K
254     ik_end = ik_start + K
255     jk_start = (j // K) * K
256     jk_end = jk_start + K
257     block = self.grid[ik_start:ik_end, jk_start:jk_end]
258     if np.count_nonzero(block == current_value) > 1:
259         old_cost += (np.count_nonzero(block == current_value) - 1)
260
261     self.grid[i, j] = new_value
262     new_cost = 0

```

```
263     if np.count_nonzero(self.grid[i, :] == new_value) > 1:
264         new_cost += (np.count_nonzero(self.grid[i, :] == new_value)
265             - 1)
266
267     if np.count_nonzero(self.grid[:, j] == new_value) > 1:
268         new_cost += (np.count_nonzero(self.grid[:, j] == new_value)
269             - 1)
270
271     new_block = self.grid[ik_start:ik_end, jk_start:jk_end]
272     if np.count_nonzero(new_block == new_value) > 1:
273         new_cost += (np.count_nonzero(new_block == new_value) - 1)
274
275     self.grid[i, j] = current_value
276
277     delta = new_cost - old_cost
278
279     return delta
```

7.1. Klasa SudokuSolver

B. Izvorni kod: Class ILS CP

```
1 class ILS_CP(SudokuSolver):
2
3     def __init__(self, puzzle, seed: int = 42):
4
5         super().__init__(puzzle)
6
7         import numpy as np
8         self.random = np.random.default_rng(seed)
9
10        self.tabu_list = {}
11        self.current_cost = self.objective_f()
12        self.best_cost = self.current_cost
13        self.best_grid = self.grid.copy()
14
15        self.row_counts = np.zeros((self.N, self.N + 1), dtype=int)
16        self.col_counts = np.zeros((self.N, self.N + 1), dtype=int)
17        self.row_missing = np.zeros(self.N, dtype=int)
18        self.col_missing = np.zeros(self.N, dtype=int)
19
20        self.model = None
21        self.cp_vars = None
22        self.cp_solver = None
23
24        self.current_cost = self.objective_f()
25        self.best_cost = self.current_cost
26        self.best_grid = self.grid.copy()
27
28        self.total_iterations_run = 0
29        self.ls_success_count = 0
30        self.cp_call_count = 0
31        self.cp_success_count = 0
32
33    def _initialize_auxiliary_structures(self):
34
35        self.row_counts.fill(0)
36        self.col_counts.fill(0)
37
38        for i in range(self.N):
39            for j in range(self.N):
```

```

40         v = self.grid[i, j]
41         if v != 0:
42             self.row_counts[i, v] += 1
43             self.col_counts[j, v] += 1
44
45     for i in range(self.N):
46         self.row_missing[i] = sum(1 for v in range(1, self.N + 1) if
47             self.row_counts[i, v] == 0)
48         self.col_missing[i] = sum(1 for v in range(1, self.N + 1) if
49             self.col_counts[i, v] == 0)
50
51     def _subgrid_cells(self, bi: int, bj: int) -> list[Tuple[int, int]]:
52
53         cells = []
54         i_start, i_end = bi * self.K, (bi + 1) * self.K
55         j_start, j_end = bj * self.K, (bj + 1) * self.K
56
57         for i in range(i_start, i_end):
58             for j in range(j_start, j_end):
59                 if not self.fixed_mask[i, j]:
60                     cells.append((i, j))
61         return cells
62
63     def _delta_cost_swap(self, i: int, j: int, ii: int, jj: int) -> int:
64
65         v1, v2 = self.grid[i, j], self.grid[ii, jj]
66         delta = 0
67
68         counts = self.row_counts[i]
69         if counts[v1] == 1: delta += 1
70         if counts[v2] == 0: delta -= 1
71
72         counts = self.row_counts[ii]
73         if counts[v2] == 1: delta += 1
74         if counts[v1] == 0: delta -= 1
75
76         counts = self.col_counts[j]
77         if counts[v1] == 1: delta += 1
78         if counts[v2] == 0: delta -= 1
79
80         counts = self.col_counts[jj]

```

```

80         if counts[v2] == 1: delta += 1
81         if counts[v1] == 0: delta -= 1
82
83     return delta
84
85 def _best_swap_in_subgrid(self, i: int, j: int, tabu: Set[Tuple[
86     Tuple[int, int], Tuple[int, int]]], aspiration_cost: int) -> Tuple[
87     Optional[Tuple[int, int, int, int]], int, bool]:
88
89     bi, bj = i // self.K, j // self.K
90     cells = self._subgrid_cells(bi, bj)
91     best = None
92     best_delta = None
93     best_tabu_aspire = False
94
95     for ii, jj in cells:
96         if (ii == i and jj == j): continue
97         if self.fixed_mask[ii, jj] or self.fixed_mask[i, j]:
98             continue
99
100         swap_key = tuple(sorted(((i, j), (ii, jj))))
101         is_tabu = swap_key in tabu
102
103         d = self._delta_cost_swap(i, j, ii, jj)
104         allow = is_tabu and (self.current_cost + d < aspiration_cost)
105
106         if (best is None) or (d < best_delta) or (d == best_delta
107             and self.random.random() < 0.5):
108             if not is_tabu or allow:
109                 best = (i, j, ii, jj)
110                 best_delta = d
111                 best_tabu_aspire = allow
112
113     if best is None:
114         return None, 0, False
115     return best, best_delta, best_tabu_aspire
116
117 def _cell_in_conflict(self, i: int, j: int) -> bool:
118
119     v = self.grid[i, j]

```

```

115         if v == 0: return False
116         return self.row_counts[i, v] > 1 or self.col_counts[j, v] > 1
117
118     def _apply_swap(self, i: int, j: int, ii: int, jj: int):
119
120         v1, v2 = self.grid[i, j], self.grid[ii, jj]
121
122         self.row_counts[i, v1] -= 1
123         self.row_counts[i, v2] += 1
124         self.row_counts[ii, v2] -= 1
125         self.row_counts[ii, v1] += 1
126         self.col_counts[j, v1] -= 1
127         self.col_counts[j, v2] += 1
128         self.col_counts[jj, v2] -= 1
129         self.col_counts[jj, v1] += 1
130
131         self.row_missing[i] = sum(1 for v in range(1, self.N+1) if self.
row_counts[i, v] == 0)
132         self.row_missing[ii] = sum(1 for v in range(1, self.N+1) if self.
row_counts[ii, v] == 0)
133         self.col_missing[j] = sum(1 for v in range(1, self.N+1) if self.
col_counts[j, v] == 0)
134         self.col_missing[jj] = sum(1 for v in range(1, self.N+1) if self.
col_counts[jj, v] == 0)
135
136         self.grid[i, j], self.grid[ii, jj] = v2, v1
137
138         self.current_cost = np.sum(self.row_missing) + np.sum(self.
col_missing)
139
140         if self.current_cost < self.best_cost:
141             self.best_cost = self.current_cost
142             self.best_grid = self.grid.copy()
143
144     def _min_conflicts_with_tabu(self, iteration_limit: int, tabu_size:
int, no_improvement_limit: int = 50) -> bool:
145
146         initial_cost = self.objective_f()
147
148         if initial_cost == 0:
149             return False

```

```

150
151     best_grid_ls = self.grid.copy()
152     best_cost_in_ls = initial_cost
153     self.current_cost = initial_cost
154
155     N = self.N
156     no_improvement_counter = 0
157     self.tabu_list.clear()
158
159     moves_used = iteration_limit
160
161     for k in range(1, iteration_limit + 1):
162
163         if best_cost_in_ls == 0:
164             break
165
166         conflicting_cells = self.get_conflicting_cells()
167
168         if not conflicting_cells:
169             best_cost_in_ls = 0
170             self.current_cost = 0
171             moves_used = k
172             break
173
174         i, j = self.random.choice(list(conflicting_cells))
175         current_value = self.grid[i, j]
176
177         min_delta = float('inf')
178         best_moves = []
179
180         for new_value in range(1, N + 1):
181             if new_value == current_value:
182                 continue
183
184             delta = self._calculate_delta_cost(i, j, new_value)
185
186             if delta < min_delta:
187                 min_delta = delta
188                 best_moves = [(i, j, new_value)]
189             elif delta == min_delta:
190                 best_moves.append((i, j, new_value))

```

```

191
192         if best_moves:
193             r, c, new_value = self.random.choice(best_moves)
194             old_value = current_value
195
196         is_tabu = self.tabu_list.get((r, c)) == old_value
197         is_aspirated = (self.current_cost + min_delta < self.
198             best_cost)
199
200         if is_tabu and not is_aspirated and min_delta >= 0:
201             continue
202
203         self.grid[r, c] = new_value
204
205         self.tabu_list[(r, c)] = old_value
206         if len(self.tabu_list) > tabu_size:
207             key_to_delete = next(iter(self.tabu_list))
208             del self.tabu_list[key_to_delete]
209
210         new_full_cost = self.objective_f()
211         self.current_cost = new_full_cost
212
213         if new_full_cost < best_cost_in_ls:
214             best_cost_in_ls = new_full_cost
215             best_grid_ls = self.grid.copy()
216             no_improvement_counter = 0
217
218         if new_full_cost == 0:
219             moves_used = k
220             self.current_cost = 0
221             best_cost_in_ls = 0
222             best_grid_ls = self.grid.copy()
223             break
224         else:
225             no_improvement_counter += 1
226
227         if no_improvement_counter >= no_improvement_limit:
228             self.grid = best_grid_ls.copy()
229             self.current_cost = best_cost_in_ls
230
231     self.grid = best_grid_ls.copy()

```

```

231         self.current_cost = best_cost_in_ls
232
233         if self.current_cost < initial_cost:
234             self.ls_success_count += 1
235
236         return initial_cost != self.current_cost, moves_used
237
238     def _accept(self, old_cost: int, new_cost: int, T: float, mode: str
239 = "metropolis", accept_prob: float = 0.0) -> bool:
240
241         mode = mode.lower()
242
243         if mode == "hill":
244             if new_cost < old_cost:
245                 return True
246
247             return self.random.random() < float(accept_prob)
248         else:
249
250             if new_cost <= old_cost:
251                 return True
252             if T <= 1e-12:
253                 return False
254
255             delta = new_cost - old_cost
256             p = math.exp(-float(delta) / float(T))
257
258             return self.random.random() < p
259
260     def _temperature(self, it: int, T0: float, alpha: float) -> float:
261
262         return float(T0) * (float(alpha) ** int(it))
263
264     def ils_run(self,
265                 time_limit_s: float = 10.0,
266                 mode: str = "metropolis",
267                 T0: float = 1.25, alpha: float = 0.995,
268                 accept_prob: float = 0.01,
269                 ls_callback=None,
270                 perturb_callback=None,
271                 ls_kwargs: dict | None = None,

```

```

271         perturb_kwargs: dict | None = None,
272         verbose: bool = False):
273
274     start = time.time()
275     ls_kwargs = ls_kwargs or {}
276     perturb_kwargs = perturb_kwargs or {}
277
278     cur_cost = int(self.objective_f())
279     best_cost = cur_cost
280     best_grid = self.grid.copy()
281
282     it = 0
283     while time.time() - start < time_limit_s and best_cost > 0:
284         if ls_callback is not None:
285             ls_callback(self, **ls_kwargs)
286             cur_cost = int(self.objective_f())
287
288             if cur_cost < best_cost:
289                 best_cost = cur_cost
290                 best_grid = self.grid.copy()
291                 if verbose:
292                     print(f"LS_best={best_cost}")
293
294             if perturb_callback is not None:
295                 perturb_callback(self, **perturb_kwargs)
296
297         new_cost = int(self.objective_f())
298         T = self._temperature(it, T0, alpha) if mode != "hill" else
299         0.0
300         if self._accept(cur_cost, new_cost, T, mode=mode,
301             accept_prob=accept_prob):
302             cur_cost = new_cost
303             if cur_cost < best_cost:
304                 best_cost = cur_cost
305                 best_grid = self.grid.copy()
306                 if verbose:
307                     print(f"Prihvaćeno_bolje:={best_cost}")
308         else:
309
310             self.grid[:, :] = best_grid
311             cur_cost = best_cost

```

```

310         if verbose:
311             print(f"Vrati_se_na_bolje_{best_cost}")
312
313         it += 1
314
315         self.grid[:, :] = best_grid
316         return best_cost
317
318     def _free_cells_in_block(self, ik: int, jk: int):
319         K = self.K
320         ik_start = ik * K
321         ik_end = (ik + 1)*K
322         jk_start = jk * K
323         jk_end = (jk + 1)*K
324
325         free_cells = []
326
327         for i in range(ik_start, ik_end):
328             for j in range(jk_start, jk_end):
329                 if not self.fixed_mask[i, j]:
330                     free_cells.append((i, j))
331
332         return free_cells
333
334     def _perturb_one_swap_in_block(self):
335         K = self.K
336
337         order = []
338         for ik in range(K):
339             for jk in range(K):
340                 order.append((ik, jk))
341
342         self.random.shuffle(order)
343
344         for (ik, jk) in order:
345             cells = self._free_cells_in_block(ik, jk)
346             if len(cells) >= 2:
347                 (i1, j1), (i2, j2) = self.random.sample(cells, 2)
348                 self.grid[i1, j1], self.grid[i2, j2] = self.grid[i2, j2], self.grid[i1, j1]
349         return

```

```

350
351 def _perturb_k_swaps(self, k: int = 3):
352     for _ in range(k):
353         self._perturb_one_swap_in_block()
354
355 def _perturb_shuffle_block(self):
356     K = self.K
357
358     blocks = []
359     for ik in range(K):
360         for jk in range(K):
361             blocks.append((ik, jk))
362
363     self.random.shuffle(blocks)
364
365     for (bi, bj) in blocks:
366         cells = self._free_cells_in_block(bi, bj)
367         if len(cells) >= 2:
368             vals = []
369             for (i, j) in cells:
370                 vals.append(self.grid[i, j])
371
372             self.random.shuffle(vals)
373
374             for (i, j), v in zip(cells, vals):
375                 self.grid[i, j] = v
376         return
377
378 def perturb(self, p_rate: float, cp_time_limit: float) -> None:
379
380     N = self.N
381
382     total_cells_to_empty = int(N * N * p_rate)
383
384     mutable_cells = []
385     for i in range(N):
386         for j in range(N):
387             if self.grid[i, j] != 0 and not self.fixed_mask[i, j]:
388                 mutable_cells.append((i, j))
389
390     if len(mutable_cells) < total_cells_to_empty:

```

```

391         total_cells_to_empty = len(mutable_cells)
392
393     if not mutable_cells:
394         return
395
396     indices_to_empty = self.random.choice(
397         mutable_cells,
398         size=total_cells_to_empty,
399         replace=False
400     )
401
402     for i, j in indices_to_empty:
403         self.grid[i, j] = 0
404
405     self.current_cost = self.objective_f()
406
407     cp_refiner = SudokuCP(self.grid.copy(), seed=None)
408
409     cp_refiner.fixed_mask = self.fixed_mask.copy()
410
411     status = cp_refiner.cp_refinement(
412         time_limit=cp_time_limit,
413         fix_noncon=False,
414         hints=False
415     )
416
417     if status in (OPTIMAL, FEASIBLE):
418         self.grid = cp_refiner.grid.copy()
419
420     def _prepare_final_results(self, start_time, total_iterations,
421                               ls_iterations, acceptance_prob, tabu_size, cp_limit,
422                               empty_factor_init, alpha):
423
424         end_time = time.time()
425         total_time = end_time - start_time
426         solution_is_valid = self.objective_f() == 0
427
428         results = {
429             'Problem_Size': self.N,
430             'Total_Iterations': total_iterations,
431             'LS_Iterations': ls_iterations,

```

```

430         'Acceptance_Prob': acceptance_prob,
431         'Tabu_Size': tabu_size,
432         'CP_Limit_s': cp_limit,
433         'Empty_Factor_Init': empty_factor_init,
434         'Alpha_Decay': alpha,
435
436         'Execution_Time_s': total_time,
437         'Best_Cost': self.best_cost,
438         'Solution_Valid': solution_is_valid,
439         'CP_Calls': self.cp_call_count,
440         'CP_Successes': self.cp_success_count,
441     }
442     return results
443
444 def solve_ils_cp(self, total_iterations: int = 1000, ls_iterations:
445 int = 5000, acceptance_prob: float = 0.05, tabu_size: int = 10,
446 cp_limit: float = 8.0, empty_factor_init: float = 0.1, alpha: float
447 = 0.99) -> dict:
448
449     start_time = time.time()
450
451     total_ls_moves_to_solution = total_iterations * ls_iterations
452
453     self.convergence_data = []
454
455     if self.current_cost == 0 and self.is_valid():
456         print("ILS: Rešenje je pronađeno u inicijalizaciji.")
457         return self._prepare_final_results(start_time, 0, 0,
458 acceptance_prob, tabu_size, cp_limit, empty_factor_init,
459 alpha)
460
461     self.best_cost = self.current_cost
462     self.best_grid = self.grid.copy()
463
464     empty_factor = empty_factor_init
465
466     print(f"Hibridni ILS (Početna cena: {self.best_cost})")
467
468     for k in range(1, total_iterations + 1):
469
470         self.total_iterations_run = k

```

```

466         self.current_cost = self.objective_f()
467         self._min_conflicts_with_tabu(ls_iterations, acceptance_prob
468         , tabu_size)
469
470     moves_used_in_ls = self._min_conflicts_with_tabu(
471     ls_iterations, tabu_size)
472
473     self.current_cost = self.objective_f()
474
475     if self.current_cost == 0:
476         print(f"ILS_uspešno_rešeno_iteraciji_{k}_nakon_LS-a.")
477         total_ls_moves_to_solution = (k - 1) * ls_iterations +
478         moves_used_in_ls
479         self.best_cost = 0
480         self.best_grid = self.grid.copy()
481
482         return self._prepare_final_results(start_time, k,
483         total_ls_moves_to_solution, acceptance_prob, tabu_size,
484         cp_limit, empty_factor_init, alpha)
485
486     if self.current_cost < self.best_cost:
487         self.best_cost = self.current_cost
488         self.best_grid = self.grid.copy()
489
490     if self.current_cost > self.best_cost:
491         self.grid = self.best_grid.copy()
492         self.current_cost = self.best_cost
493
494     if self.current_cost > 0:
495         self.cp_call_count += 1
496
497     self.perturb(p_rate=empty_factor, cp_time_limit=cp_limit)
498
499     self.current_cost = self.objective_f()
500
501     if self.current_cost <= self.best_cost:
502
503         if self.current_cost < self.best_cost or self.
504         current_cost == 0:
505             self.cp_success_count += 1

```

```

501         self.best_cost = self.current_cost
502         self.best_grid = self.grid.copy()
503
504
505     if self.current_cost == 0:
506         total_ls_moves_to_solution = k * ls_iterations
507         print(f"ILS_uspešno_rešeno_iteraciji_{k}_nakon_
508               perturbacije/CP-a.")
509         return self._prepare_final_results(start_time, k,
510               total_ls_moves_to_solution, acceptance_prob, tabu_size,
511               cp_limit, empty_factor_init, alpha)
512
513     current_elapsed_time = time.time() - start_time
514
515     self.convergence_data.append({
516         'k': k,
517         'best_cost': self.best_cost,
518         'time_s': current_elapsed_time
519     })
520
521     empty_factor *= alpha
522
523     print(f"ILS_Ciklus_{k}/{total_iterations}: Trošak: {self.
524           current_cost}, Najbolji: {self.best_cost}, Faktor_kvarenja:
525           {empty_factor:.3f}")
526
527     if k % 50 == 0:
528         self.display_grid(f"ILS Stanje nakon_{k}_ciklusa (Cena:
529                           {self.best_cost})")
530
531     self.grid = self.best_grid.copy()
532
533     end_time = time.time()
534     total_time = end_time - start_time
535     solution_is_valid = self.objective_f() == 0
536
537     if not solution_is_valid:
538         total_ls_moves_to_solution = total_iterations *
539         ls_iterations
540     else:
541         total_ls_moves_to_solution = total_iterations *

```

```

ls_iterations
535
536 print(f"\nILS_završio_nakon_{total_iterations}_iteracija._
    Najbolja_cena:{self.best_cost}")
537 print("\n——ZAVRŠNA_STATISTIKA_ILS-CP——")
538 print(f"Najbolja_postignuta_cena:{self.best_cost}")
539 print(f"Rešenje_validno:{solution_is_valid}")
540 print(f"Vreme_izvršenja_(ILS-CP):{total_time:.4f}_sekundi")
541 print(f"CP_poziva/uspeha:{self.cp_call_count}/{self.
    cp_success_count}")
542 print("\n")
543
544 return self._prepare_final_results(start_time, total_iterations,
    total_ls_moves_to_solution, acceptance_prob, tabu_size,
    cp_limit, empty_factor_init, alpha)

```

7.2. Klasa ILS CP

C. Izvorni kod: Class SudokuCP

```

1 class SudokuCP(SudokuSolver):
2     def __init__(self, puzzle, seed = None):
3         super().__init__(puzzle)
4         self.random = np.random.default_rng(seed)
5
6     def _build_cp_model(self):
7         self.model = cp_model.CpModel()
8         N = self.N
9         K = self.K
10
11         x = []
12         for i in range(N):
13             row = []
14             for j in range(N):
15                 var = self.model.NewIntVar(1, N, f"x[{i},{j}]")
16                 row.append(var)
17
18             x.append(row)
19
20         for i in range(N):
21             self.model.AddAllDifferent(x[i])

```

```

22
23     for j in range(N):
24         col = []
25         for i in range(N):
26             col.append(x[i][j])
27
28         self.model.AddAllDifferent(col)
29
30     for ik in range(K):
31         for jk in range(K):
32             ik_start = ik * K
33             ik_end = (ik + 1) * K
34             jk_start = jk * K
35             jk_end = (jk + 1) * K
36
37             cells = []
38             for i in range(ik_start, ik_end):
39                 for j in range(jk_start, jk_end):
40                     cells.append(x[i][j])
41
42             self.model.AddAllDifferent(cells)
43
44     self.cp_vars = x
45     self.cp_solver = cp_model.CpSolver()
46
47     def _is_cell_nonconflicting(self, i: int, j: int) -> bool:
48         val = int(self.grid[i, j])
49
50         if val == 0:
51             return False
52
53         if np.count_nonzero(self.grid[i, :] == val) > 1:
54             return False
55
56         if np.count_nonzero(self.grid[:, j] == val) > 1:
57             return False
58
59         ik = i // self.K
60         jk = j // self.K
61
62         ik_start = ik * self.K

```

```

63         ik_end = (ik + 1) * self.K
64         jk_start = jk * self.K
65         jk_end = (jk + 1) * self.K
66
67         block = self.grid[ik_start:ik_end, jk_start:jk_end]
68
69         if np.count_nonzero(block == val) > 1:
70             return False
71
72         return True
73
74     def cp_refinement(self, time_limit: float | None = 10.0, fix_noncon:
75         bool = False, hints: bool = True, log_search: bool = False):
76
77         self._build_cp_model()
78
79         model = self.model
80         x = self.cp_vars
81         solver = self.cp_solver
82         N = self.N
83
84         for i in range(N):
85             for j in range(N):
86                 if self.fixed_mask[i, j] and self.grid[i, j] != 0:
87                     model.Add(x[i][j] == int(self.grid[i][j]))
88
89         if fix_noncon:
90             for i in range(N):
91                 for j in range(N):
92                     if not self.fixed_mask[i, j] and self.grid[i, j] !=
93                         0:
94                         if self._is_cell_nonconflicting(i, j):
95                             model.Add(x[i][j] == int(self.grid[i][j]))
96
97         if hints:
98             for i in range(N):
99                 for j in range(N):
100                     val = int(self.grid[i, j])
101                     if 1 <= val <= N:
102                         model.AddHint(x[i][j], val)

```

```
102     if time_limit is not None:
103         solver.parameters.max_time_in_seconds = float(time_limit)
104
105     solver.parameters.log_search_progress = bool(log_search)
106
107     status = solver.Solve(model)
108
109     if status in (OPTIMAL, FEASIBLE):
110         for i in range(N):
111             for j in range(N):
112                 self.grid[i, j] = int(solver.Value(x[i][j]))
113
114     return status
```

7.3. Klasa SudokuCP

Mali rečnik

CP Programiranje Ograničenja. 3, 16–21, 24, 25, 27, 28

ILS Iterativna Lokalna Pretraga. 3, 15–21, 24, 25, 27

Bibliografija

- [1] N. Musliu and F. Winter, “A hybrid approach for the sudoku problem: Using constraint programming in iterated local search,” *Proceedings of the 10th Metaheuristics International Conference (MIC 2013)*.
- [2] Wikipedia: The Free Encyclopedia, “Local search (optimization),” 2025. Poslednji put pristupljeno: 10. oktobar 2025.
- [3] S. Minton, M. D. Johnston, A. B. Phillips, and P. Laird, “The min-conflicts heuristic: Experimental and theoretical results,” *Artificial Intelligence*, vol. 58, no. 1-3, pp. 161–205, 1992.
- [4] MPIO, Matematički Fakultet, “Heuristike zasnovane na lokalnom pretraživanju,” 2015/2016. Prezentacija sa predavanja, Beograd, Dostupno kao digitalni materijal.