3.8

3-5. 解：

(1) $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f(t), t>0$； $f(t)=u(t)$ $y(0^+)=1, y'(0^+)=1$

齐次方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=0$ 特征方程 $\alpha^2+3\alpha+2=0$

特征根 $\alpha_1=-1, \alpha_2=-2$

固有响应 ~~齐次解~~ $y_h(t)=Ae^{-2t}+Be^{-t}$

$f(t)=u(t)$ 令 $y_p(t)=C$ $(t>0)$

强迫响应 $y_p(t)=C$

完全解 $y(t)=Ae^{-2t}+Be^{-t}+C$，代入原式

$\therefore$ $C=1$

$y(0^+)=A+B+1=1$ $y'(0+)=-2A-B=1$

$\therefore$ $A=-1$，$B=1$

固有响应 $y_h=-e^{-2t}+e^{-t}$，受迫响应 $y_p(t)=1$

完全响应 $y(t)=-e^{-2t}+e^{-t}+1$

(2) $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f(t)$ $(t>0)$ $f(t)=\cos 2t\cdot u(t)$ $y(0^+)=1$ $y'(0^+)=1$

由(1)可知，固有响应 $y_h(t)=Ae^{-2t}+Be^{-t}$

受迫响应 $y_p(t)=C\cos 2t+D\sin 2t$ 代入原式可得 $\begin{cases} C=-\frac{1}{10} \\ D=\frac{3}{10} \end{cases}$

$\therefore$ 完全响应 $y(t)=Ae^{-2t}+Be^{-t}-\frac{1}{10}\cos 2t+\frac{3}{10}\sin 2t$ $(t>0)$

$y(0^+)=A+B-\frac{1}{10}=1$

$y'(0^+)=-2A-B+\frac{3}{5}=1$ $\Rightarrow$ $A=-\frac{3}{2}$，$B=\frac{13}{5}$

$\therefore$ 自固有响应 $y_h(t)=-\frac{3}{2}e^{-2t}+\frac{13}{5}e^{-t}$

受迫响应 $y_p(t)=-\frac{1}{10}\cos 2t+\frac{3}{10}\sin 2t$

完全响应 $y(t)=-\frac{3}{2}e^{-2t}+\frac{13}{5}e^{-t}-\frac{1}{10}\cos 2t+\frac{3}{10}\sin 2t$

(3) $y''(t)+4y'(t)+2y(t)=f(t),\ t>0$；$f(t)=e^{-t}u(t)$，$y(0^+)=1$ $y'(0^+)=1$

齐次方程 $y''(t)+4y'(t)+2y(t)=0$

特征根 $\alpha_1=-2+\sqrt{2}$，$\alpha_2=-2-\sqrt{2}$

固有响应 $y_h(t)=Ae^{(-2+\sqrt{2})t}+Be^{(-2-\sqrt{2})t}$

受迫响应 $y_p(t)=Ce^{-t}$ $(t>0)$ 代入可得 $C=-1$

完全响应 $y(t)=Ae^{(-2+\sqrt{2})t}+Be^{(-2-\sqrt{2})t}+e^{-t}$

$y(0^+)=A+B+1=1$ $y'(0^+)=(-2+\sqrt{2})A+(-2-\sqrt{2})B-1=1$

$\therefore A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$B=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

固有响应 $y_h(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{(-2+\sqrt{2})t}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{(-2-\sqrt{2})t}$

受迫响应 $y_p(t)=-e^{-t}$

完全响应 $y(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{(-2+\sqrt{2})t}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{(-2-\sqrt{2})t}-e^{-t}$ $(t>0)$

3-4. 解: $y'(t)+3y(t)=f(t)$ $(t>0)$

齐次方程: $y'(t)+3y(t)=0$

特征根 $\alpha=-3$

$\therefore$ 固有响应 $y_h(t)=Ae^{-3t}$

(1) $f(t)=u(t)$ $\therefore y_p(t)=B$，$y(t)=Ae^{-3t}+B$

$\therefore \begin{cases} 3B=1 \\ y(0^+)=A+B=1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{2}{3}$，$B=\frac{1}{3}$

$y_h(t)=\frac{2}{3}e^{-3t}$，$y_p(t)=\frac{1}{3}$ $y(t)=\frac{2}{3}e^{-3t}+\frac{1}{3}$ $(t>0)$

(2) $f(t)=e^{-t}u(t)$，$y_p(t)=Be^{-t}$，~~代入~~ $y(t)=Ae^{-3t}+Be^{-t}$

$\therefore \begin{cases} 2B=1 \\ A+B=1 \end{cases}$ $\therefore B=\frac{1}{2}$，$A=\frac{1}{2}$

$y_h(t)=\frac{1}{2}e^{-3t}$ $y_p(t)=\frac{1}{2}e^{-t}$ $y(t)=\frac{1}{2}e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{-t}$ $(t>0)$

(3) $f(t)=e^{-3t}u(t)$ ∴ $y_p(t)=Bte^{-3t}$, $y(t)=Ae^{-3t}+Bte^{-3t}$

$$\begin{cases} B=1 \\ A=1 \end{cases}$$

固有响应 $y_h(t)=e^{-3t}$，受迫响应 $y_p(t)=te^{-3t}$

$y(t)=(t+1)e^{-3t} \quad (t>0)$

(4) $f(t)=t\,u(t)$ ∴ $y_p(t)=Bt$ $y(t)=Ae^{-3t}+Bt$

∴ $\begin{cases} B+3B=1 \\ y(0^+)=A=1 \end{cases}$ ∴ $A=1$，$B=\frac{1}{4}$

$y_h(t)=e^{-3t}$ $y_p(t)=\frac{1}{4}t$ $y(t)=e^{-3t}+\frac{1}{4}t$

(5) $f(t)=\cos t\,u(t)$ ∴ $y_p(t)=B\cos t+C\sin t$ $y(t)=Ae^{-3t}+B\cos t+C\sin t$

代入原式且 $y(0^+)=1$ ∴ $\begin{cases} -B+3C=0 \\ C+3B=1 \\ y(0^+)=A+B=1 \end{cases}$ ∴ $A=\frac{7}{10}$，$B=\frac{3}{10}$，$C=\frac{1}{10}$

$y_h(t)=\frac{7}{10}e^{-3t}$ $y_p(t)=\frac{3}{10}\cos t+\frac{1}{10}\sin t$ $y(t)=\frac{7}{10}e^{-3t}+\frac{3}{10}\cos t+\frac{1}{10}\sin t$

(6) $f(t)=e^{-3t}\cos t\,u(t)$ 令 $y_p(t)=B\sin t\,e^{-3t}$ ∴ $y(t)=Ae^{-3t}+B\sin t\,e^{-3t}$

代入 ∴ $\begin{cases} B=1 \\ y(0^+)=A=1 \end{cases}$ ∴ $A=1$, $B=1$

$y_h(t)=e^{-3t}$ $y_p(t)=\sin t\,e^{-3t}$ $y(t)=e^{-3t}+\sin t\,e^{-3t} \quad (t>0)$

3-6. 解:

(1) $y''(t)+5y'(t)+4y(t)=2f'(t)+5f(t)$, $t>0$; $y(0^-)=1$, $y'(0^-)=5$

零输入响应：齐次方程 $y''(t)+5y'(t)+4y(t)=0$

∴ 特征根为 $\alpha_1=-1$ $\alpha_2=-4$

$y_{zi}(t)=Ae^{-t}+Be^{-4t}$

$y(0^-)=y_{zi}(0)=A+B=1$ $y'(0^-)=y'_{zi}(0)=-A-4B=5$

$\therefore \quad A=3, A=-2 \quad \Rightarrow y_{zi}(t)=3e^{-t}-2e^{-4t}$

(2) $y''(t)+4y'(t)+4y(t)=3f'(t)+2f(t),\ t>0;\ y(0^-)=-2,\ y'(0^-)=3$

齐次方程 $y''(t)+4y'(t)+4y(t)=0$

特征根 $\alpha_1=\alpha_2=-2$

$\therefore \quad y_{zi}(t)=Ae^{-2t}+Bte^{-2t}$

$y(0^-)=y_{zi}(0)=A=-2 \qquad y'(0^-)=y'_{zi}(0^-)=-2A+B=3$

$\therefore \quad A=-2, B=-1$

$y_{zi}(t)=-2e^{-2t}-te^{-2t}$

(3) $y''(t)+4y'(t)+8y(t)=3f'(t)+f(t),\ t>0;\ y(0^-)=5,\ y'(0^-)=2$

齐次方程 $y''(t)+4y'(t)+8y(t)=0$

特征根 $\alpha=-2\pm 2i$

$\therefore y_{zi}(t)=e^{-2t}(A\cos 2t+B\sin 2t)$

$y(0^-)=y_{zi}(0)=A=5 \qquad y'(0^-)=y'_{zi}(0)=2B-2A=2$

$\therefore A=5 \quad B=6$

$y_{zi}(t)=e^{-2t}(5\cos 2t+6\sin 2t)$

(4) $y'''(t)+3y''(t)+2y'(t)=f'(t)+4f(t),\ t>0;\ y(0^-)=1,\ y'(0^-)=0,\ y''(0^-)=1$

令 $y'(t)=\varphi(t)$ $\therefore$ 齐次方程 $\varphi''(t)+3\varphi'(t)+2\varphi(t)=0$

特征根 $\alpha_1=-1,\ \alpha_2=-2$

$\varphi(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}$

$y_{zi}(t)=\int\varphi(t)\,dt=Ae^{-t}-\frac{1}{2}Be^{-2t}+C$ 即 $Ae^{-t}+Be^{-2t}+C$

$y(0^-)=y_{zi}(0)=C=1$

$y'(0^-)=y'_{zi}(0)=-A-2B=0$

$y''(0^-)=y''_{zi}(0)=A+4B=1$

$\therefore A=-1,\ B=\frac{1}{2},\ C=1 \qquad \therefore y_{zi}(t)=-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+1$

3-7 解：

(1) $y'(t)+3y(t)=f(t)$, $t>0$; $f(t)=e^{-3t}u(t)$

特征值 $\alpha=-3$

冲激响应 $h(t)=Ae^{-3t}u(t)$ 代入，$\therefore A=1$ $\therefore h(t)=e^{-3t}u(t)$

$\therefore$ 零状态响应 $y_{zs}(t)=f(t)*h(t)$

$$=\int_0^{t} e^{-3\tau}\cdot e^{-3(t-\tau)}u(t)d\tau$$

$$=te^{-3t}u(t)$$

$\therefore$ $y_{zs}(t)=te^{-3t}u(t)$

(2) $y'(t)+3y(t)=f(t)$, $t>0$; $f(t)=\cos t\,u(t)$

由(1) $h(t)=e^{-3t}u(t)$

$\therefore$ $y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=\int_0^t \cos\tau\, e^{-3(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{10}\sin\tau\, e^{-3(t-\tau)}+\frac{3}{10}\cos\tau\, e^{-3(t-\tau)}\Big|_0^t$

$$=\left(\frac{7}{10}e^{-3t}+\frac{3}{10}\cos t+\frac{1}{10}\sin t\right)u(t)$$

(3) $y'(t)+3y(t)=f(t)$, $t>0$; $f(t)=e^{-3t}\cos t\ ut$

$h(t)=e^{-3t}u(t)$

$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3\tau}\cos\tau\cdot e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$

$$=\int_0^t \cos\tau\, e^{-3t}d\tau$$

$$=\sin t\, e^{-3t}\cdot u(t)$$

(4) $y''(t)+2y'(t)+2y(t)=f(t)$, $t>0$; $f(t)=u(t)$

特征值 $\alpha=-1\pm i$

$\therefore$ $h(t)=e^{-t}(A\cos t+B\sin t)u(t)$，代入 $y''(t)+2y'(t)+2y(t)=\delta(t)$

$\therefore$ $A=0$, $B=1$ $h(t)=e^{-t}\sin t\,u(t)$

$\therefore$ $y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)e^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)u(t-\tau)\,d\tau$

$$=\int_0^t \sin(t-\tau)\,e^{-(t-\tau)}\,d\tau$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-\tau}(\cos\tau+\sin\tau)\Big|_0^t$$

$$=\left[-\frac{1}{2}e^{-t}(\cos t+\sin t)+\frac{1}{2}\right]u(t)$$

(5) $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = f(t)$, $t>0$; $f(t) = e^{-2t}u(t)$

特征值 $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -3$

$\therefore h(t) = (Ae^{-t} + Be^{-3t})u(t)$ 代入，得 $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$

$\therefore h(t) = (\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$

$\therefore y_{zs}(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\tau}u(\tau)\cdot[\frac{1}{2}e^{-(t-\tau)} - \frac{1}{2}e^{-3(t-\tau)}]u(t-\tau)\,d\tau$

$= \frac{1}{2}\int_0^t (e^{-t-\tau} - e^{-3t+\tau})\,d\tau$

$= (\frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$

(6) 由(5) $h(t) = (Ae^{-t} + Be^{-3t})u(t)$

代入式中 $\therefore A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{5}{2}$

$h(t) = (-\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-3t})u(t)$

$y_{zs}(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\tau}u(\tau)\cdot[-\frac{1}{2}e^{-(t-\tau)} + \frac{5}{2}e^{-3(t-\tau)}]u(t-\tau)\,d\tau$

$= \int_0^t (-\frac{1}{2}e^{-t-\tau} + \frac{5}{2}e^{-3t+\tau})\,d\tau$

$= (-\frac{1}{2}e^{-t} + 3e^{-2t} - \frac{5}{2}e^{-3t})u(t)$

3-9 解： $y'(t) + ay(t) = f(t)$, $a\neq 0$ ，完全响应为 $y(t) = (3+2e^{-3t})u(t)$

(1) 齐次方程 $y'(t) + ay(t) = 0$

特征值 为 $-a$ $\therefore -a = -3 \Rightarrow a=3$

固有响应 $y_h(t) = Ae^{-3t}$,由完全响应可知， $A=2$ $\therefore y_h(t) = 2e^{-3t}u(t)$

强迫响应 $y_p(t) = 3u(t)$

(2) $a = 3$,

~~零输入响应 $y_{zi}(t) = 2e^{-3t}u(t)$~~ ~~$y(0^-) = y_{zi}(0)$~~ $= 2$

~~$f(t) = y'(t) + 3y(t) = 9u(t)$~~

~~(3) 零输入响应~~

由于受迫响应 $y_p = 3$ $\therefore$ 设 $f(t) = Ku(t)$

冲激响应 $h(t)=Ae^{-3t}u(t)$ 代入式中 $\therefore A=1$

零状态响应 $y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}Ku(\tau)e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau$

$=\left(\frac{K}{3}-\frac{K}{3}e^{-3t}\right)u(t)$

零输入响应 $y_{zi}(t)=Be^{-3t}u(t)$

$\therefore$ 完全响应 $y(t)=\left(\frac{K}{3}-\frac{K}{3}e^{-3t}+Be^{-3t}\right)u(t)=(3+2e^{-3t})u(t)$

$\therefore K=9,\ B=5$

$\therefore f(t)=9u(t)$, $y(0_-)=y_{zi}(0)=5$

(3) $y_{zs}(t)=(3-3e^{-3t})u(t)$ $y_{zi}(t)=5e^{-3t}u(t)$

(4) $f(t-1)$ 为 $f(t)$ 延迟一秒

零输入响应仍为 $y_{zi}(t)=5e^{-3t}u(t)$

零状态响应延迟一秒 $y_{zs}(t)=(3+2e^{-3(t-1)})u(t-1)$