

Bild 7.1: Filigrane Lamellenstruktur eines Autokühlers.

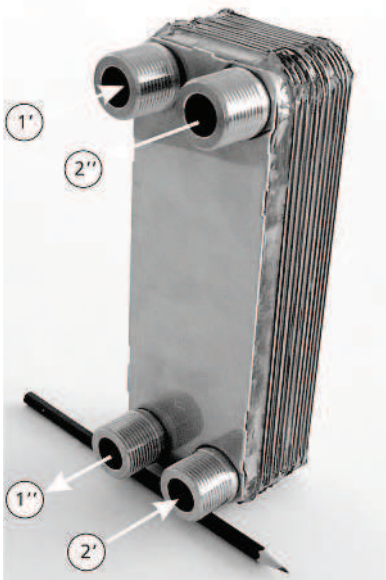


Bild 7.2: Kompakt-Wärmeübertrager aus gepressten Blechplatten in montiertem Zustand.



Bild 7.3: Das Fischgrätmuster zweier aufeinander folgender Blechplatten verläuft senkrecht zueinander.

7 Wärmeübertrager

7.1 Grundlagen

7.1.1 Begriffe und Nomenklatur

Unter einem **Wärmeübertrager** wird im Folgenden ein kalorischer Apparat verstanden, bei dem Wärme zwischen zwei Arbeitsmedien, die nicht in unmittelbarem thermischen Kontakt miteinander stehen, sondern durch eine feste Wand getrennt sind (z. B. Autokühler), übertragen wird. Daneben existieren auch Geräte mit direkter Wärmeübertragung (z. B. Nasskühltürme) auf die hier nicht eingegangen wird. Als Arbeitsfluide kommen meist Flüssigkeiten oder Gase zum Einsatz, in besonderen Fällen auch verdampfende Flüssigkeiten oder kondensierende Dämpfe.

Der Wärmedurchgang durch die Trennwand wird durch den Wärmedurchgangskoeffizienten k zwischen den beiden Medien beschrieben (vgl. Abschnitt 1.26). Insbesondere bei Wärmeübertragern mit Luft als Arbeitsmedium kommen zur Steigerung des Wärmeübergangs an der Trennwand Rippen und Lamellen zum Einsatz (Bild 7.1). Der Wärmewirkungsgrad eines Wärmeübertragers hängt maßgeblich von der Stromführung der beiden Medien ab.

Wärme fließt dabei stets vom wärmeabgebenden Medium (in der Regel mit 1 indiziert) zum wärmeaufnehmenden Medium (in der Regel mit 2 indiziert). Der Eintritt in den Wärmeübertrager wird mit dem **Index ' (1-Strich)**, der Austritt mit **'' (2-Strich)** gekennzeichnet. ϑ'_1 kennzeichnet also die Eintrittstemperatur von Fluid 1, ϑ''_2 die Austrittstemperatur von Fluid 2. In der Literatur finden sich auch andere Bezeichnungen, was bei Verwendung der entsprechenden Beziehungen zu beachten ist.

Grundsätzliche Aufgaben sind die **Dimensionierung** und **Nachrechnung von Wärmeübertragern**. Bei der Auslegung gilt es, bei bekannten Stoffströmen und Temperaturen die Übertragungsfähigkeit zu ermitteln, während beim Nachrechnen die Austrittstemperaturen der Medien und der übertragene Wärmestrom bestimmt wird.

In der Praxis hat sich für Wärmeübertrager der thermodynamisch unzutreffende Begriff „**Wärmetauscher**“ bzw. „**Wärmeaustauscher**“ eingebürgert, der mit „heat exchanger“ (HX) auch international üblich ist. Ein Wärmeaustausch zwischen den beiden Arbeitsmedien liegt allerdings nicht vor. Vielmehr erfolgt nach dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik ein in eine Richtung verlaufender Wärmetransport vom Medium höherer Temperatur zum Medium niedrigerer Temperatur. Der Begriff „Wärmeaustausch“ würde dagegen implizieren, dass Wärme in beide Richtungen ausgetauscht wird. Bei gleichen Wärmekapazitätsströmen der beiden Medien wäre bei idealen Verhältnissen ein vollständiger „Temperaturaustausch“ möglich, d. h. das wärmere Medium würde sich am Austritt auf die Eintrittstemperatur des kühleren Mediums abkühlen, während sich das wärmeaufnehmende Medium am Austritt auf die Eintrittstemperatur des wärmeabgebenden Mediums erwärmen würde. Im Folgenden wird daher nach einem Vorschlag von E. Schmidt der Begriff „**Wärmeübertrager**“ verwendet.

7.1.2 Bauformen von Wärmeübertragern

Im allgemeinen Fall **ändern** sich durch die thermische Koppelung der Medien **beide Fluidtemperaturen mit zunehmender Lauflänge**. Eine besonders einfache Bauart von Wärmeübertragern ergibt sich, wenn ein Medium eine **konstante Temperatur** aufweist. Dies kann infolge sehr großer Wärmekapazität (z. B. Wärmeabgabe eines durchströmten Rohres an die Umgebung) oder infolge Phasenübergang (z. B. Verdampfer in einem Kühlturm) der Fall sein. Die Berechnung vereinfacht sich in diesen Fällen, da sich nur eine Fluidtemperatur ändert. In der Praxis lassen sich folgende u. a. Bauformen unterscheiden:

- Rohrbündel-Wärmeübertrager (Bild 7.4)
- Platten-Wärmeübertrager (Bild 7.5)
- Spiral-Wärmeübertrager
- Rotations-Wärmeübertrager
- Schlangen-Wärmeübertrager

Weiter ist zwischen **Rekuperatoren** und **Regeneratoren** zu unterscheiden. Rekuperatoren werden gleichzeitig von zwei durch eine feste Wand getrennten Fluiden stationär durchströmt, d. h. es erfolgt ein kontinuierlicher Wärmeaustausch. Demgegenüber enthalten Regeneratoren eine für Gase durchlässige Formmasse (z. B. Formsteine mit Kanälen, Schüttung aus Steinen oder Metall). Sie werden diskontinuierlich, d. h. im zeitlichen Wechsel, von den Gasen durchströmt. Zusätzlich ist beim Regenerator meist auch noch ein Stoffaustausch möglich (z. B. Feuchteustausch in Klimaanlage).

7.1.3 Einseitig konstante Fluidtemperatur

Betrachtet wird zunächst der Wärmedurchgang von einem innen strömenden Medium der Temperatur ϑ_i durch eine feste Wand an ein äußeres Medium der **konstanten Temperatur** $\vartheta_e = \text{const}$ (vgl. Bild 6.15), was sowohl bei siedenden Medien in Verdampfern als auch bei kondensierenden Fluiden in Kondensatoren erfüllt ist. In Platten-Wärmeübertragern liegen ebene (Bild 7.7), in Rohr-Wärmeübertragern gekrümmte Trennflächen (Bild 7.8) vor.

Der Wärmedurchgang durch die jeweilige Trennfläche wird durch den Wärmedurchgangskoeffizienten k oder den längenbezogenen Wärmedurchgangskoeffizienten k^* beschrieben:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_e}} \quad \text{und} \quad k^* = k \cdot B \quad \text{Platte} \quad (7.1)$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{r_i}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) + \frac{r_i}{r_e \cdot \alpha_e}} \quad \text{und} \quad k^* = k \cdot 2\pi \cdot r_i \quad \text{Rohr} \quad (7.2)$$

Aus der Energiebilanz am infinitesimalen Element quer zur Trennwand folgt nach Einführen der Temperaturdifferenz zwischen den beiden Medien $\theta = \vartheta_i(x) - \vartheta_e$ und Integration der zugehörigen Differenzialgleichung mit der Randbedingung am Fluideintritt $\vartheta_i(x=0) = \vartheta_{i0}$ eine **exponentielle Temperaturabnahme** des strömenden Mediums:

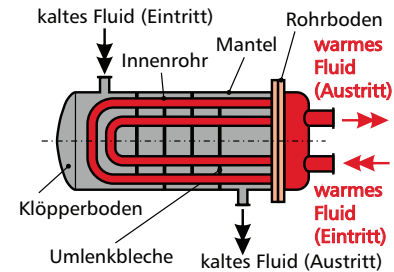


Bild 7.4: Rohrbündel-Wärmeübertrager im Schnitt.

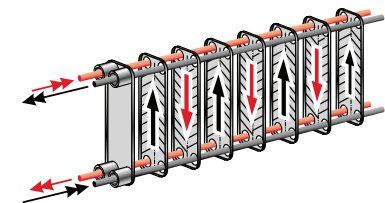


Bild 7.5: Platten-Wärmeübertrager.

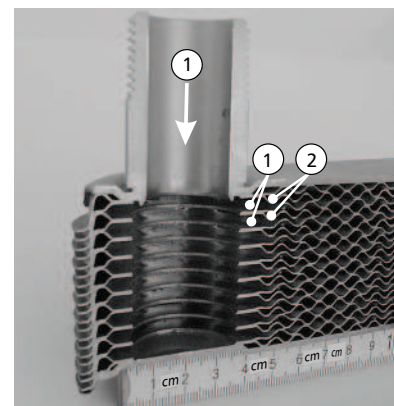


Bild 7.6: Innerer Aufbau eines Kompakt-Platten-Wärmeübertragers mit Anschlussstutzen für Fluid 1.

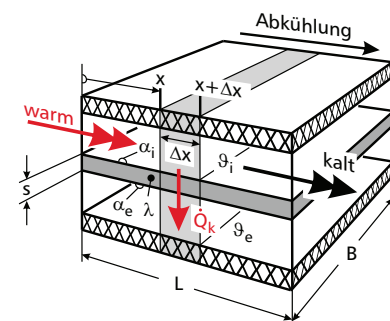


Bild 7.7: Wärmedurchgang durch ebene Wand an Fluid konstanter Temperatur.

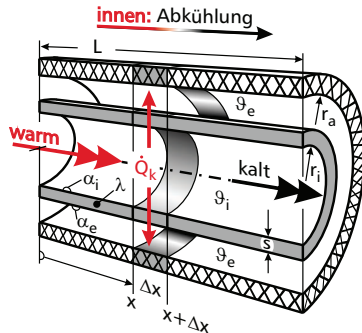


Bild 7.8: Wärmedurchgang durch Rohrwand an Fluid konstanter Temperatur.

Gl. (7.4) ist analog zu Gl. (6.54) aufgebaut, die den Temperaturabfall in einem Rohr mit konstanter Wandtemperatur beschreibt.

Alternativ zu Gl. (7.6) kann der im infinitesimalen Element fließende Wärmestrom $\frac{\dot{Q}_k}{\Delta x}$ über die Länge L integriert werden:

$$\dot{Q} = \int_0^L \frac{\dot{Q}_k}{\Delta x} dx = \int_0^L k^* \cdot [\vartheta_i(x) - \vartheta_e] dx \quad (7.7)$$

$\Delta\vartheta_{\log}$ ist die logarithmisch gemittelte Temperaturdifferenz analog Gl. (6.56). Sie ergibt sich durch Integration der örtlichen Temperaturdifferenz $\vartheta_1 - \vartheta_2$ über die gesamte wärmeübertragende Fläche A des Wärmeübertragers:

$$\Delta\vartheta_{\log} = \frac{1}{A} \cdot \int_A (\vartheta_1 - \vartheta_2) dA \quad (7.9)$$



Je nach Fließrichtung der Medien (Gleichstrom=GS, Gegenstrom=GG) resultieren unterschiedliche logarithmisch gemittelte Temperaturdifferenzen:

$$\Delta\vartheta_{\log,GS} = \frac{\vartheta_1' - \vartheta_2' - (\vartheta_1'' - \vartheta_2'')}{\ln \left(\frac{\vartheta_1' - \vartheta_2'}{\vartheta_1'' - \vartheta_2''} \right)} \quad (7.12)$$

$$\Delta\vartheta_{\log,GG} = \frac{\vartheta_1'' - \vartheta_2'' - (\vartheta_1' - \vartheta_2')}{\ln \left(\frac{\vartheta_1'' - \vartheta_2''}{\vartheta_1' - \vartheta_2'} \right)} \quad (7.13)$$

Im Sonderfall gleich großer Wärmekapazitätsströme $\dot{W}_1 = \dot{W}_2$ tritt beim Gegenstromer eine konstante Temperaturdifferenz zwischen beiden Medien über den gesamten Wärmeübertrager auf:

$$\Delta\vartheta_{\log,GG} = \vartheta_1'' - \vartheta_2'' = \vartheta_1' - \vartheta_2' \quad (7.14)$$

$$\theta(x) = (\vartheta_{i0} - \vartheta_e) \cdot \exp \left(-\frac{k^* \cdot x}{\dot{m} \cdot c_p} \right) = \theta_0 \cdot \exp \left(-\frac{k^* \cdot x}{\dot{m} \cdot c_p} \right) \quad (7.3)$$

Die Austrittstemperatur des Mediums bei $x=L$ beträgt:

$$\vartheta_{iL} = \vartheta_e + (\vartheta_{i0} - \vartheta_e) \cdot \exp \left(-\frac{k^* \cdot L}{\dot{m} \cdot c_p} \right) \quad (7.4)$$

Mit dem Wärmekapazitätsstrom des Fluids $\dot{W} = \dot{m} \cdot c_p$ und der Anzahl der Übertragungseinheiten $NTU = \frac{k^* \cdot L}{\dot{W}}$ gilt auch:

$$\vartheta_{iL} = \vartheta_e + (\vartheta_{i0} - \vartheta_e) \cdot \exp(-NTU) \quad (7.5)$$

Der insgesamt übertragene Wärmestrom \dot{Q} beträgt:

$$\dot{Q} = \dot{m} \cdot c_p \cdot (\vartheta_{iL} - \vartheta_{i0}) = \dot{m} \cdot c_p \cdot (\theta_L - \theta_0) \quad (7.6)$$

7.1.4 Dimensionslose Kennzahlen

Verändern beide Fluide ihre Temperatur, so sind zur Beschreibung von Wärmeübertragern verschiedene dimensionslose Kennzahlen üblich:

► **Dimensionslose mittlere Temperaturdifferenz Θ** ($0 \leq \Theta \leq 1$):

$$\Theta = \frac{\Delta\vartheta_{\log}}{\vartheta_1' - \vartheta_2'} = \frac{\text{logarithmisch gemittelte Temperaturdifferenz}}{\text{Differenz der Eintrittstemperaturen}} \quad (7.8)$$

Im Unterschied zur normierten mittleren Temperaturdifferenz aus Gl. (7.8) stellt $\Delta\vartheta_{\log}$ aus Gl. (7.9) eine dimensionsbehaftete mittlere Temperaturdifferenz dar, die in K angegeben wird.

Weitere dimensionsbehaftete Temperaturdifferenzen können am Anfang des Wärmeübertragers bei $x=0$ (Index 0) und am Ende des Wärmeübertragers $x=L$ (Index L) gebildet werden:

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta_0 &= \vartheta_1(x=0) - \vartheta_2(x=0) \\ \Delta\vartheta_L &= \vartheta_1(x=L) - \vartheta_2(x=L) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Die **logarithmisch gemittelte Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta_{\log}$** lässt sich damit wie folgt berechnen:

$$\Delta\vartheta_{\log} = \frac{\Delta\vartheta_0 - \Delta\vartheta_L}{\ln \left(\frac{\Delta\vartheta_0}{\Delta\vartheta_L} \right)} \quad (7.11)$$

Bei Heizkörpern wird sie z. B. als Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta$ verwendet:

$$\Delta\vartheta := \frac{\vartheta_{\text{Vorlauf}} - \vartheta_{\text{Rücklauf}}}{\ln \left[(\vartheta_{\text{Vorlauf}} - \vartheta_{\text{Luft}}) / (\vartheta_{\text{Rücklauf}} - \vartheta_{\text{Luft}}) \right]}$$

► **Betriebscharakteristiken (dimensionslose Temperaturänderungen der Stoffströme 1 und 2):**

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\vartheta_1' - \vartheta_1''}{\vartheta_1' - \vartheta_2'} & 0 \leq P_1 \leq 1 \\ P_2 &= \frac{\vartheta_2'' - \vartheta_2'}{\vartheta_1' - \vartheta_2'} & 0 \leq P_2 \leq 1 \end{aligned} \quad (7.15)$$

► **Anzahl der Übertragungseinheiten der Stoffströme 1 und 2 (Übertragungszahl, Number of Transfer Units):**

$$\begin{aligned} NTU_1 &= \frac{k \cdot A}{\dot{W}_1} \\ NTU_2 &= \frac{k \cdot A}{\dot{W}_2} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Die **Wärmekapazitätsströme** (Wasserwerte) \dot{W}_1 und \dot{W}_2 ergeben sich aus den jeweiligen Massenströmen und mittleren spezifischen Wärmekapazitäten:

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 &= \dot{m}_1 \cdot \bar{c}_{p1} \\ \dot{W}_2 &= \dot{m}_2 \cdot \bar{c}_{p2} \end{aligned} \quad (7.17)$$

► **Wärmekapazitätsstromverhältnisse (Wasserwertverhältnisse):**

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_2} = \frac{1}{R_2} & 0 \leq R_1 < \infty \\ R_2 &= \frac{\dot{W}_2}{\dot{W}_1} = \frac{1}{R_1} & 0 \leq R_2 < \infty \end{aligned} \quad (7.19)$$

7.1.5 Wärmeübertrager-Hauptgleichung

Der zwischen den Medien übertragene Wärmestrom \dot{Q} folgt mit der mittleren Temperaturdifferenz aus der Wärmeübertrager-Hauptgleichung, wobei die Ermittlung der mittleren Temperaturdifferenz in einfacheren Fällen aus Gleichungen und ansonsten aus Diagrammen [24] erfolgen kann:

$$\dot{Q} = k \cdot A \cdot \Delta\vartheta_{\log} = k \cdot A \cdot \Theta \cdot (\vartheta'_1 - \vartheta'_2) = \dot{W}_1 \cdot (\vartheta'_1 - \vartheta''_1) = \dot{W}_2 \cdot (\vartheta''_2 - \vartheta'_2) \quad (7.22)$$

k ist der über die gesamte Wärmeübertragerfläche gemittelte Wärmedurchgangskoeffizient. Das Produkt

$$K := k \cdot A \quad (7.23)$$

wird als **Übertragungsfähigkeit** bezeichnet. Der Wärmedurchgangskoeffizient k kann damit als flächenbezogene (spezifische) Übertragungsfähigkeit interpretiert werden.


7.1.6 Gleichstrom-Wärmeübertrager


Beim **Gleichstrom-Wärmeübertrager** strömen beide Fluide in **dieselbe Richtung** und treten an derselben Stelle in den Wärmeübertrager ein (Temperaturen ϑ'_1 und ϑ'_2 in Bild 7.9). Die Temperaturdifferenz der beiden Fluide ist bei $x=0$ bekannt.

$$\Delta\vartheta_0 = \vartheta'_1 - \vartheta'_2 \quad (7.24)$$


Für die Temperaturdifferenz der beiden Medien gilt mit dem Umfang U in Abhängigkeit von der Lauflänge x :

$$\Delta\vartheta(x) = (\vartheta_1 - \vartheta_2)_x = \Delta\vartheta_0 \cdot \exp \left[- \left(\frac{1}{\dot{m}_1 \cdot \bar{c}_{p1}} + \frac{1}{\dot{m}_2 \cdot \bar{c}_{p2}} \right) \cdot k \cdot U \cdot x \right] \quad (7.25)$$

 In der Literatur wird die auf den kleineren Wärmekapazitätsstrom $\min[\dot{W}_1, \dot{W}_2]$ bezogene Anzahl der Übertragungseinheiten gelegentlich als Übertragungsfähigkeit des Wärmeübertragers bezeichnet, was zu Verwechslungen mit der Übertragungsfähigkeit $K := k \cdot A$ führen kann.


 Die mittlere spezifische Wärmekapazität \bar{c}_{pj} folgt aus:

$$\bar{c}_{pj} = \frac{h'_j - h''_j}{\vartheta'_j - \vartheta''_j} \quad (j=1,2) \quad (7.18)$$

 Zwischen den dargestellten dimensionslosen Kennzahlen gelten die Zusammenhänge:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{NTU_1}{NTU_2} = \frac{1}{R_1} = R_2 \quad (7.20)$$

$$\Theta = \frac{P_1}{NTU_1} = \frac{P_2}{NTU_2} \quad (7.21)$$

 Im Allgemeinen werden bei Wärmeüberträgern folgende **vereinfachten Annahmen** getroffen:

- Der Wärmeübertrager wird stationär betrieben.
- Er ist gegenüber der Umgebung adiabatisch. Kinetische und potentielle Energien werden vernachlässigt. Die Enthalpieänderung der Stoffströme resultiert nur aus dem übertragenen Wärmestrom.
- Wärmeleitung und Vermischung in Strömungsrichtung bleiben unberücksichtigt.
- Der Wärmedurchgangskoeffizient der Übertragungsfläche ist konstant.
- Tritt im Wärmeübertrager keine Phasenänderung auf, sind die spezifischen Wärmekapazitäten und die Wärmekapazitätsströme konstant.
- Bei Phasenänderung von Reinstoffen unter konstantem Druck bleibt deren Temperatur konstant, der zugehörige Wärmekapazitätsstrom wird unendlich.

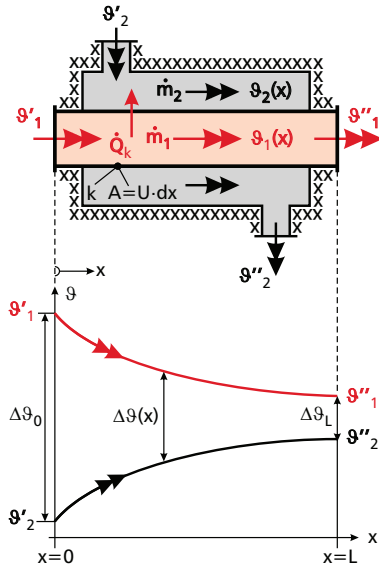


Bild 7.9: Fluidströme (oben) und Temperaturverlauf (unten) in einem Gleichstrom-Wärmeübertrager.

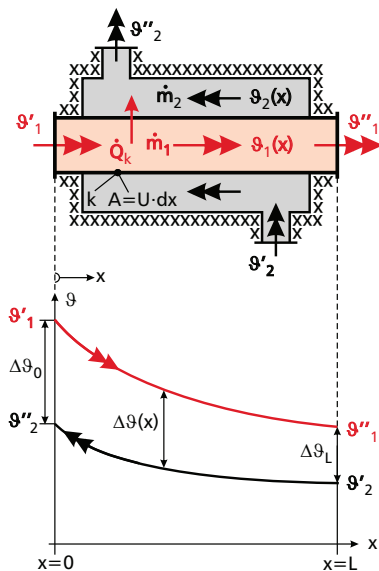


Bild 7.10: Fluidströme (oben) und Temperaturverlauf (unten) in einem Gegenstrom-Wärmeübertrager.

Der übertragene Wärmestrom \dot{Q} folgt aus einer globalen Enthalpiebilanz an den Medien:

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 \cdot \bar{c}_{p1} \cdot (\vartheta'_1 - \vartheta''_1) = -\dot{m}_2 \cdot \bar{c}_{p2} \cdot (\vartheta'_2 - \vartheta''_2) = k \cdot A \cdot \Delta\vartheta_{\log,GS} \quad (7.26)$$

Für die dimensionslosen Kenngrößen eines Gleichstrom-Wärmeübertragers gilt:

$$P_j = \frac{1 - \exp[-NTU_j \cdot (1 + R_j)]}{1 + R_j} \quad (j=1,2) \quad (7.27)$$

$$NTU_j = -\frac{\ln[1 - P_j \cdot (1 + R_j)]}{1 + R_j} \quad (j=1,2) \quad (7.28)$$

$$\Theta = -\frac{P_1 + P_2}{\ln[1 - (P_1 + P_2)]} \quad (7.29)$$

Die dimensionsbehafteten Temperaturdifferenzen betragen:

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta_0 &= \vartheta'_1 - \vartheta'_2 \\ \Delta\vartheta_L &= \vartheta''_1 - \vartheta''_2 \end{aligned} \quad (7.30)$$

Die logarithmisch gemittelte Temperaturdifferenz folgt aus Gl. (7.12).

Der Gleichstrom-Wärmeübertrager besitzt bezüglich der thermischen Leistung eine **sehr ungünstige Stromführung**. Bei gleichen Betriebscharakteristiken und gleichen Wärmekapazitätsströmen benötigt ein Gleichstrom-Wärmeübertrager gegenüber anderen Bauarten stets eine größere Übertragungsfähigkeit $K = k \cdot A$.

Um beim Gleichstrom-Wärmeübertrager eine bestimmte Temperaturänderung P_j zu realisieren, ist gemäß Gl. (7.28) ein positives Argument des Logarithmus erforderlich, was auf folgende Bedingung führt:

$$P_j < \frac{1}{1 + R_j} \quad (j=1,2) \quad (7.31)$$

Selbst bei beliebig großer Übertragungsfähigkeit $K \rightarrow \infty$ sind größere dimensionslose Temperaturänderungen mit einem Gleichstrom-Wärmeübertrager **nicht** möglich. Beim Gegenstrom-Wärmeübertrager besteht diese Beschränkung grundsätzlich nicht. Hier sind prinzipiell beliebige dimensionslose Temperaturänderungen erreichbar. Damit sind beliebige Wärmeströme übertragbar, wenn die Übertragungsfähigkeit hinreichend groß bemessen wird.

7.1.7 Gegenstrom-Wärmeübertrager

Die beiden Medien strömen nun gegenläufig. Die Eintrittsstelle von Fluid 1 fällt mit der Austrittsstelle von Fluid 2 zusammen (Temperaturen ϑ'_1 und ϑ''_2 in Bild 7.10). Gegenüber dem Gleichstrom-Wärmeübertrager sind die Temperaturdifferenzen $\Delta\vartheta_0$ und $\Delta\vartheta_L$ bei $x=0$ und $x=L$ nun **anders** definiert (Bild 7.10):

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta_0 &= \vartheta'_1 - \vartheta''_2 \\ \Delta\vartheta_L &= \vartheta'_1 - \vartheta'_2 \end{aligned} \quad (7.32)$$

Die logarithmisch gemittelte Temperaturdifferenz folgt aus Gl. (7.13). Für die Temperaturdifferenz der beiden Medien gilt in Abhängigkeit der Lauflänge x :

$$\Delta\vartheta(x) = (\vartheta_1 - \vartheta_2)_x = \Delta\vartheta_0 \cdot \exp\left[-\left(\frac{1}{\dot{m}_1 \cdot \bar{c}_{p1}} - \frac{1}{\dot{m}_2 \cdot \bar{c}_{p2}}\right) \cdot k \cdot U \cdot x\right] \quad (7.33)$$

Gegenüber Gl. (7.25) tritt nun zwischen den Kehrwerten der Wärmekapazitätsströme ein **Minuszeichen** auf.

Der übertragene Wärmestrom \dot{Q} folgt ebenfalls aus einer globalen Enthalpiebilanz an den Medien, kann aber andererseits auch mithilfe der mittleren Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta_{\log,GG}$ ermittelt werden.

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 \cdot \bar{c}_{p1} \cdot (\vartheta'_1 - \vartheta''_1) = -\dot{m}_2 \cdot \bar{c}_{p2} \cdot (\vartheta'_2 - \vartheta''_2) = k \cdot A \cdot \Delta\vartheta_{\log,GG} \quad (7.34)$$

Hinsichtlich der dimensionslosen Kenngrößen ist der Fall ungleicher Wärmekapazitätsströme $R_1 \neq 1$ vom Fall gleicher Wärmekapazitätsströme $R_1 = 1$ zu unterscheiden. Für $R_1 \neq 1$ gilt:

$$P_j = \frac{1 - \exp[NTU_j \cdot (R_j - 1)]}{1 - R_j \cdot \exp[NTU_j \cdot (R_j - 1)]} \quad (j=1,2) \quad (7.35)$$

$$NTU_j = \frac{1}{1 - R_j} \cdot \ln\left(\frac{1 - P_j \cdot R_j}{1 - P_j}\right) \quad (j=1,2) \quad (7.36)$$

$$\Theta = \frac{P_1 - P_2}{\ln\left[\frac{1 - P_2}{1 - P_1}\right]} \quad (7.37)$$

Für $R_1 = 1$ erübrigt sich die Indizierung:

$$P = \frac{NTU}{1 + NTU} \quad (7.38)$$

$$NTU = \frac{P}{1 - P} \quad (7.39)$$

$$\Theta = 1 - P \quad (7.40)$$

Bei gegebenen NTU -Werten liefert der Gegenstrom-Wärmeübertrager gegenüber dem Gleichstrom-Wärmeübertrager die größeren Werte von P . Andererseits benötigt der Gegenströmer bei vorgegebener Betriebscharakteristik die kleinsten Übertragungszahlen.

7.1.8 Kreuzstrom-Wärmeübertrager

In Kreuzstrom-Wärmeübertragern strömen die Fluide 1 und 2 senkrecht zueinander (z. B. Autokühler, Heizregister einer Klimaanlage). Hinsichtlich der Stromführung sind zu unterscheiden:

- reiner Kreuzstrom (beide Ströme unvermischt)
- einseitig quervermischter Kreuzstrom (Rohrstrom unvermischt)
- beidseits quervermischter Kreuzstrom (beide Ströme quervermischt)

Für die Betriebscharakteristik des **unvermischten Kreuzstroms** wurde bereits 1930 von W. Nußelt eine Lösung in Form von Potenzreihen mitgeteilt:

$$P_j = \frac{1}{R_j \cdot NTU_j} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[1 - \exp(-NTU_j) \cdot \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \cdot NTU_j^k \right] \cdot \left[1 - \exp(-R_j \cdot NTU_j) \cdot \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \cdot (R_j \cdot NTU_j)^k \right] \right\} \quad (j=1,2) \quad (7.41)$$

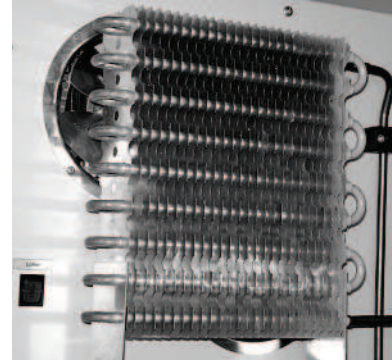


Bild 7.11: Kondensator eines Kühlkreislaufts mit dem Kältemittel R 134a ausgeführt als Kreuzstrom-Wärmeübertrager mit Ventilatoren zur Verstärkung der Wärmeabgabe an die Raumluft.

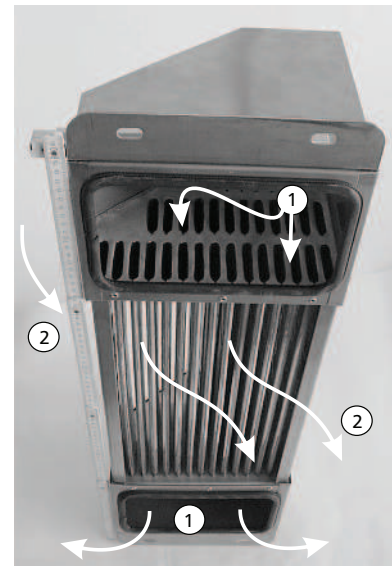
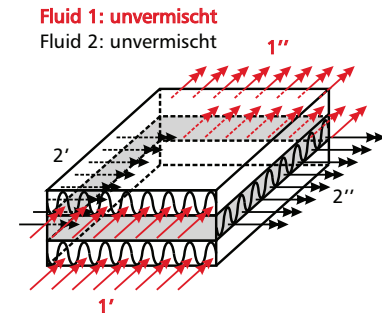
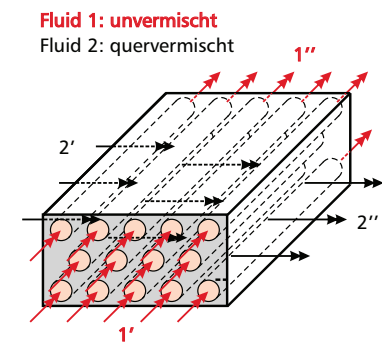


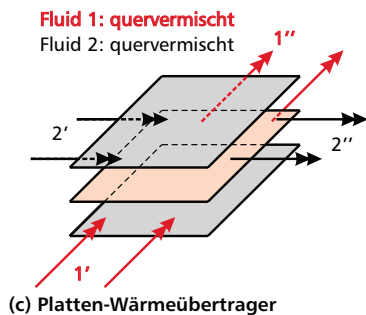
Bild 7.12: Kreuzstrom-Luft-Luft-Wärmeübertrager (Fa. Südluft) zur Wärmerückgewinnung in Großküchen. Die frische Zuluft ① wird im Rohrbündel mit ovalen Querschnitten, gefertigt aus dünnen Blechen, erwärmt und tritt unten aus der Sammelkammer aus. Im Kreuzstrom streicht die Abluft ② aus der Küche zwischen den Rohren hindurch. Große wärmeübertragende Flächen und geringe Wandstärken ermöglichen eine kompakte Bauweise.



(a) Kompakt-Wärmeübertrager



(b) Glattrohrbündel-Wärmeübertrager



(c) Platten-Wärmeübertrager

Bild 7.13: Beispiele für reinen Kreuzstrom (a), einseitig vermischten Kreuzstrom (b) und beidseitig vermischten Kreuzstrom (c).

Der vielfach für den Austauschgrad ϵ synonym verwendete Begriff „Wirkungsgrad“ erweckt den Eindruck einer umfassenden Kenngröße von Wärmeübertragern. Dies trifft aber tatsächlich nicht zu, da auch noch Strömungsverluste in Form eines Druckabfalls auftreten. Der Austauschgrad beschreibt lediglich die thermischen Verhältnisse, so dass „Wärmewirkungsgrad“ oder „thermischer Wirkungsgrad“ zutreffender ist. Gelegentlich wird auch vom „Gütegrad“ des Wärmeübertragers gesprochen.

Gl. (7.41) ist nicht explizit nach der Anzahl der Übertragungseinheiten auflösbar, was die Berechnung erschwert. In der Praxis wird vielfach folgende Näherungsgleichung für das Fluid j mit dem geringeren Wärmekapazitätsstrom verwendet, die nur für $R_j = 1$ exakt ist:

$$P_j = 1 - \exp \left\{ \frac{1}{R_j} \cdot NTU_j^{0,22} \cdot \left[\exp(-R_j \cdot NTU_j^{0,78}) - 1 \right] \right\} \quad \begin{matrix} (j=1 \text{ für } R_1 \leq 1) \\ (j=2 \text{ für } R_1 > 1) \end{matrix} \quad (7.42)$$

Für die Betriebscharakteristik des **einseitig vermischten Kreuzstroms** gilt, wobei der Index 1 den Fluidstrom im Rohr kennzeichnet:

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 - \exp \left\{ \frac{1}{R_1} \cdot \left[\exp(-R_1 \cdot NTU_1) - 1 \right] \right\} \\ P_2 &= R_1 \cdot P_1 \end{aligned} \quad (7.43)$$

Für die Anzahl der Übertragungseinheiten erhält man:

$$\begin{aligned} NTU_1 &= -\frac{1}{R_1} \cdot \ln \left[1 + R_1 \cdot \ln(1 - P_1) \right] \\ NTU_2 &= R_1 \cdot NTU_1 \end{aligned} \quad (7.44)$$

Für den **beidseitig quervermischten Kreuzstrom** gilt:

$$\frac{1}{P_j} = \frac{1}{1 - \exp(-NTU_j)} + \frac{R_j}{1 - \exp(-R_j \cdot NTU_j)} - \frac{1}{NTU_j} \quad (j=1,2) \quad (7.45)$$

Auch Gl. (7.45) ist nicht explizit nach NTU auflösbar.

7.1.9 Wärmewirkungsgrade von Wärmeübertragern

Ein idealer Wärmeübertrager würde infinitesimale Temperaturunterschiede zwischen den beiden Fluiden aufweisen, so dass die Austrittstemperatur des wärmeaufnehmenden Fluids gleich der Eintrittstemperatur des wärmeabgebenden Fluids und umgekehrt wäre:

$$\begin{aligned} \vartheta'_1 &= \vartheta''_2 \\ \vartheta'_2 &= \vartheta''_1 \end{aligned} \quad (7.46)$$

Mithilfe der Wärmeübertrager-Hauptgleichung (7.22) folgt, dass dies nur für $\dot{W}_1 = \dot{W}_2$ möglich wäre. Für $\dot{W}_1 < \dot{W}_2$ erfährt das wärmeabgebende Fluid die größere Temperaturänderung und würde sich auf ϑ'_2 abkühlen. Für $\dot{W}_1 > \dot{W}_2$ ist die Temperaturänderung im wärmeaufnehmenden Fluid größer. Dieses würde sich am Austritt auf ϑ'_1 erwärmen. Damit ergibt sich der maximale Wärmestrom zu:

$$\dot{Q}_{\max} = \min \left[\dot{W}_1, \dot{W}_2 \right] \cdot (\vartheta'_1 - \vartheta'_2) = \dot{W}_{\min} \cdot (\vartheta'_1 - \vartheta'_2) \quad (7.47)$$

Der **Wärmewirkungsgrad (Austauschgrad)** ϵ eines Wärmeübertragers ist das Verhältnis des übertragenen Wärmestroms \dot{Q} zum maximal möglichen Wärmestrom \dot{Q}_{\max} . Mit den Gln. (7.15) und (7.22) folgt:

$$\epsilon = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{\max}} = \frac{\dot{W}_1 \cdot (\vartheta'_1 - \vartheta''_1)}{\dot{W}_{\min} \cdot (\vartheta'_1 - \vartheta'_2)} = \frac{\dot{W}_1 \cdot P_1}{\dot{W}_{\min}} = \frac{\dot{W}_2 \cdot (\vartheta''_2 - \vartheta'_2)}{\dot{W}_{\min} \cdot (\vartheta'_1 - \vartheta'_2)} = \frac{\dot{W}_2 \cdot P_2}{\dot{W}_{\min}} \quad (7.48)$$

Falls $\dot{W}_1 < \dot{W}_2$, ist $\frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_{\min}} = 1$. Anderenfalls ist $\frac{\dot{W}_2}{\dot{W}_{\min}} = 1$. Damit erhält man für den Austauschgrad:

$$\epsilon = \begin{cases} P_1 & \text{für } \dot{W}_1 < \dot{W}_2 \\ P_2 & \text{für } \dot{W}_1 > \dot{W}_2 \end{cases} \quad (7.49)$$

Der Wärmewirkungsgrad eines Wärmeübertragers ist damit gleich der dimensionslosen Temperaturänderung des Fluids mit dem geringeren Wärmekapazitätsstrom. Bild 7.14 zeigt die Austauschgrade für verschiedene Stromführungen in Abhängigkeit der normierten mittleren Temperaturdifferenz. Der Gegenstrom-Wärmeübertrager weist den höchsten Wärmewirkungsgrad auf, während der Gleichstrom-Wärmeübertrager den geringsten Austauschgrad besitzt. Sehr wirkungsvoll ist auch der reine Kreuzstrom-Wärmeübertrager.

7.1.10 Korrekturfaktor

Der Korrekturfaktor F ist die dimensionslose mittlere Temperaturdifferenz Θ bezogen auf die dimensionslose mittlere Temperaturdifferenz Θ_{GG} des Gegenstrom-Wärmeübertragers (Index GG):

$$F := \frac{\Theta}{\Theta_{GG}} = \frac{NTU_{j,GG}}{NTU_j} \quad j=1,2 \quad (7.50)$$

Der Referenz-Gegenstrom-Wärmeübertrager erreicht dabei dieselben dimensionslosen Temperaturänderungen P_1 und P_2 wie die betrachtete Stromführung mit Θ und NTU_j . Bei reinem Gegenstrom ist $F=1$. Spang und Roetzel (1995) geben für F bei symmetrischen Stromführungen ohne Längsvermischung folgende Näherungsgleichung an:

$$F = \frac{1}{\left(1 + A \cdot R_1^{0,5 \cdot B} \cdot NTU_1^B\right)^C} \quad (7.51)$$

7.1.11 Wärmeübertrager mit Phasenübergang

Ist ein Arbeitsmedium ein verdampfendes oder kondensierendes Fluid, wird die für den Phasenübergang benötigte bzw. dabei freigesetzte Verdampfungsenthalpie h_{fg} vom anderen Medium geliefert bzw. aufgenommen. Dabei bleibt die Temperatur des verdampfenden bzw. kondensierenden Fluids konstant. Für einen Wärmeübertrager mit Verdampfung ist ϑ_2 konstant ($P_2 = 0$), was einem unendlichen Wärmekapazitätsstrom \dot{W}_2 bzw. $R_1 = 0$ entspricht. Unabhängig von der Bauart bzw. der Stromführung gelten dann die Zusammenhänge:

$$P_1 = 1 - \exp(-NTU_1) \quad (7.53)$$

$$NTU_1 = -\ln(1 - P_1) \quad (7.54)$$

7.1.12 Ablagerungen (Fouling)

Im Betrieb von Wärmeübertragern kommt es zu Ablagerungen (Fouling) an den Trennwänden (z.B. Oxidschichten, Ablagerungen aus den Fluiden, Sand, Schlamm, Rost, Kalk, Algen, Muscheln etc.), die den Wärmedurchgang herabsetzen und auf diese Weise den Wirkungsgrad des Wärmeübertragers vermindern. Rechnerisch kann diesem Umstand durch einen spezifischen Verschmutzungswiderstand R_f Rechnung getragen werden (Tabelle 7.2).

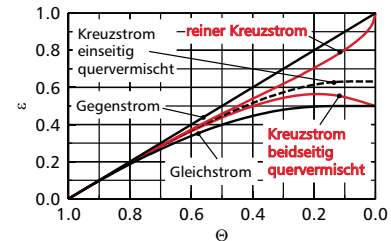


Bild 7.14: Vergleich des Wärmewirkungsgrads verschiedener Wärmeübertrager.

Tabelle 7.1: Konstanten von Gl. (7.51).

Stromführung	A	B	C
reiner Gleichstrom	0,671	2,11	0,534
reiner Kreuzstrom	0,433	1,60	0,267
beidseitig quervermischter Kreuzstrom	0,251	2,06	0,677

Für die dimensionslose Temperaturänderung des Stoffstroms 1 gilt:

$$P_1 = \frac{1 - \exp[F \cdot NTU_1 \cdot (R_1 - 1)]}{1 - R_1 \cdot \exp[F \cdot NTU_1 \cdot (R_1 - 1)]} \quad \text{für } R_1 \neq 1$$

$$P_1 = \frac{F \cdot NTU_1}{1 + F \cdot NTU_1} = \frac{F \cdot NTU}{1 + F \cdot NTU} \quad \text{für } R_1 = 1 \quad (7.52)$$

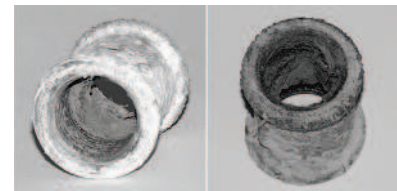


Bild 7.15: Beispiele für Ablagerungen in einer Rohrmuffe.

Tabelle 7.2: Anhaltswerte von Verschmutzungswiderständen in Wärmeübertragern.

Fluid	R_f in $10^{-3} \cdot (\text{m}^2 \text{K})/\text{W}$
Seewasser	0,1 ÷ 0,5
Flusswasser	0,2 ÷ 1,0
Abgase	1,8
Heizöl	0,9
Transformatoröl	0,2
Speiseöl	0,5
Benzin	0,2
Kältemittel	0,2
Wasserdampf	0,1 ÷ 0,2
Druckluft	0,35
destilliertes Wasser	0,1

7.2 Beispiele

Bekannte Größen:

▷ Milch:
 Eintrittstemperatur: $\vartheta'_1 = 38^\circ\text{C}$
 Austrittstemperatur: $\vartheta''_1 = 8^\circ\text{C}$
 Massenstrom: $\dot{m}_1 = 1\text{ kg/s}$
 spezifische Wärmekapazität:
 $c_{p1} = 3,94 \cdot 10^3\text{ J/(kg K)}$
 ▷ Kühlwasser:
 Eintrittstemperatur: $\vartheta'_2 = 4^\circ\text{C}$
 Massenstrom: $\dot{m}_2 = 1,5\text{ kg/s}$
 spezifische Wärmekapazität:
 $c_{p2} = 4,18 \cdot 10^3\text{ J/(kg K)}$

Gesuchte Größen:

Wärmestrom: \dot{Q}
 Austrittstemperatur Kühlwasser: ϑ''_2
 logarithmisch gemittelte Temperaturdifferenz: $\Delta\vartheta_{\log}$
 Übertragungsfähigkeit: K

► Beispiel 7.1:

Bauer Moritz Molke will Kuhmilch ($c_{p1} = 3,94\text{ kJ/(kg K)}$, $\dot{m}_1 = 1\text{ kg/s}$) von der Temperatur $\vartheta'_1 = 38^\circ\text{C}$ auf die Temperatur $\vartheta''_1 = 8^\circ\text{C}$ abkühlen. In einem im Gegenstrom betriebenen Wärmeübertrager steht ihm dazu Kühlwasser ($c_{p2} = 4,18\text{ kJ/(kg K)}$, $\dot{m}_2 = 1,5\text{ kg/s}$) der Temperatur $\vartheta'_2 = 4^\circ\text{C}$ zur Verfügung.

- Welcher Wärmestrom \dot{Q} wird der Milch dabei entzogen?
- Mit welcher Temperatur ϑ''_2 tritt das Kühlwasser aus dem Wärmeübertrager aus?
- Wie groß ist die logarithmisch gemittelte Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta_{\log}$?
- Welche Übertragungsfähigkeit K des Wärmeübertragers ist dazu erforderlich?

Lösung:

(a) übertragener Wärmestrom:

Der übertragene Wärmestrom lässt sich mithilfe der Wärmeübertrager-Hauptgleichung (7.22) berechnen, da die Ein- und Austrittstemperatur der Milch (Fluid 1) bekannt ist:

$$\dot{Q} = \dot{W}_1 \cdot (\vartheta'_1 - \vartheta''_1) \quad (7.55)$$

Der Wärmekapazitätsstrom der Milch ergibt sich dazu aus Gl. (7.17):

$$\dot{W}_1 = \dot{m}_1 \cdot c_{p1} = 3940\text{ W/K} \quad (7.56)$$

Damit beträgt der übertragene Wärmestrom:

$$\dot{Q} = 3940\text{ W/K} \cdot (38^\circ\text{C} - 8^\circ\text{C}) = 118200\text{ W} = 118,2\text{ kW} \quad (7.57)$$

(b) Austrittstemperatur des Kühlwassers:

Die Austrittstemperatur ϑ''_2 des Kühlwassers lässt sich ebenfalls über die Wärmeübertrager-Hauptgleichung (7.22) in Verbindung mit dem Wärmekapazitätsstrom \dot{W}_2 des Kühlwassers berechnen:

$$\dot{W}_2 = \dot{m}_2 \cdot c_{p2} = 6270\text{ W/K} \quad (7.58)$$

$$\dot{Q} = \dot{W}_2 \cdot (\vartheta''_2 - \vartheta'_2) \Rightarrow \vartheta''_2 = \vartheta'_2 + \frac{\dot{Q}}{\dot{W}_2} = 4^\circ\text{C} + \frac{118200\text{ W}}{6270\text{ W/K}} = 22,85^\circ\text{C} \quad (7.59)$$

(c) logarithmisch gemittelte Temperaturdifferenz:

Bei der Ermittlung der logarithmisch gemittelten ist zu beachten, dass es sich um einen Gegenstrom-Wärmeübertrager handelt. Daher ist Gl. (7.13) auszuwerten:

$$\begin{aligned}
 \Delta\vartheta_{\log} &= \frac{\vartheta''_1 - \vartheta'_2 - (\vartheta'_1 - \vartheta''_2)}{\ln \left(\frac{\vartheta''_1 - \vartheta'_2}{\vartheta'_1 - \vartheta''_2} \right)} = \frac{(8^\circ\text{C} - 4^\circ\text{C}) - (38^\circ\text{C} - 22,85^\circ\text{C})}{\ln \left(\frac{8^\circ\text{C} - 4^\circ\text{C}}{38^\circ\text{C} - 22,85^\circ\text{C}} \right)} \\
 &= \frac{4\text{ K} - 15,15\text{ K}}{\ln \left(\frac{4\text{ K}}{15,15\text{ K}} \right)} = \frac{-11,15\text{ K}}{\ln(0,264)} = 8,37\text{ K} \quad (7.60)
 \end{aligned}$$



Bei Vertauschen der Indizes (1 für die Milch und 2 für das Kühlwasser) würde sich ein negativer Wärmestrom \dot{Q} und auch eine negative logarithmisch gemittelte Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta_{\log}$ ergeben.



Anschaulich stellt die logarithmisch gemittelte Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta_{\log}$ den mittleren Temperaturunterschied zwischen Milch und Kühlwasser dar.



Der Zähler in Gl. (7.60) ist negativ, allerdings liefert auch der natürliche Logarithmus im Nenner einen negativen Wert, da er von einem Zahlenwert kleiner 1 berechnet wird.

(d) Übertragungsfähigkeit:

Die erforderliche Übertragungsfähigkeit des Wärmeübertragers K kann ebenfalls über die Wärmeübertrager-Hauptgleichung (7.22) in Verbindung mit der logarithmisch gemittelten Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta_{\log}$ ermittelt werden:

$$\dot{Q} = k \cdot A \cdot \Delta\vartheta_{\log} \Rightarrow K = k \cdot A = \frac{\dot{Q}}{\Delta\vartheta_{\log}} = \frac{118\,200\text{ W}}{8,37\text{ K}} = 1,41 \cdot 10^4\text{ W/K} \quad (7.61)$$

► Beispiel 7.2:

In den Kellerräumen von Anja Assel ist eine ungedämmte Wasserleitung DN 20 aus Stahl (Innendurchmesser $D_i = 21,6\text{ mm}$, Wandstärke $s = 2,65\text{ mm}$, Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 50\text{ W/(m K)}$, Länge $L = 8\text{ m}$) horizontal verlegt. Das mit einer Geschwindigkeit von $w = 2\text{ m/s}$ fließende Kaltwasser (Dichte $\rho_W = 999,9\text{ kg/m}^3$, spezifische Wärmekapazität $c_{pW} = 4196\text{ J/(kg K)}$, Wärmeleitfähigkeit $\lambda_W = 576,2 \cdot 10^{-3}\text{ W/(m K)}$, kinematische Viskosität $\nu_W = 1,385 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$, $Pr_W = 10,09$) tritt mit einer Temperatur von $\vartheta_0 = 8\text{ °C}$ in die Wasserleitung ein. Der Wärmeübergangskoeffizient an der Rohraußenseite zur konstanten Kellertemperatur $\vartheta_\infty = 15\text{ °C}$ beträgt $\alpha_e = 12,5\text{ W/(m}^2\text{ K)}$.

- Wie groß ist der an der Rohrrinnenseite auftretende Wärmeübergangskoeffizient α_i ?
- Wie groß ist der auf die innere Rohroberfläche bezogene Wärmedurchgangskoeffizient k_i ?
- Leiten Sie aus einer Energiebilanz am infinitesimalen Fluidelement eine Gleichung für den Temperaturverlauf des Wassers im Rohr her und ermitteln Sie die allgemeine Lösung $\vartheta_W(x)$.
- Welche Temperatur ϑ_L hat das Wasser am Ende des Rohrs angenommen?

Lösung:**(a) wasserseitiger Wärmeübergangskoeffizient:**

Es liegt erzwungene Konvektion im Rohr vor, so dass zunächst die Reynolds-Zahl und dann die Nußelt-Zahl zu ermitteln ist, um daraus den gesuchten Wärmeübergangskoeffizient zu berechnen. Gemäß Gl. (6.9) gilt:

$$Re = \frac{w \cdot D_i}{\nu_W} = 3,12 \cdot 10^4 > 2\,320 \Rightarrow \text{turbulent} \quad (7.62)$$

Für die turbulente Rohrströmung folgt aus den Gln. (6.38) und (6.41):

$$\zeta = (1,8 \cdot \log Re - 1,64)^{-2} = 0,024$$

$$K_L = \left(1 + \frac{D}{L}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,00$$

$$Nu = Nu_0 \cdot K_L = \frac{\frac{\zeta}{8} \cdot Re \cdot Pr_W}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{\frac{\zeta}{8}} \cdot \left(Pr_W^{\frac{2}{3}} - 1\right)} \cdot K_L = 266,08 \quad (7.63)$$

Zusammenfassung und Ausblick:

- Eine universelle Berechnung von Wärmeübertragern ist mithilfe der Wärmeübertrager-Hauptgleichung (7.22) möglich.

Bekannte Größen:**▷ Rohr:**

Innendurchmesser: $D_i = 21,6 \cdot 10^{-3}\text{ m}$

Wandstärke: $s = 2,65 \cdot 10^{-3}\text{ m}$

Länge: $L = 8\text{ m}$

Wärmeleitfähigkeit: $\lambda = 50\text{ W/(m K)}$

▷ Kaltwasser:

Eintrittstemperatur: $\vartheta_0 = 8\text{ °C}$

Geschwindigkeit: $w = 2\text{ m/s}$

Dichte: $\rho_W = 999,9\text{ kg/m}^3$

kinematische Viskosität: $\nu_W = 1,385 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$

Wärmeleitfähigkeit: $\lambda_W = 0,5762\text{ W/(m K)}$

spezifische Wärmekapazität:

$c_{pW} = 4196\text{ J/(kg K)}$

Prandtl-Zahl: $Pr_W = 10,09$

▷ Keller:

Temperatur: $\vartheta_\infty = 15\text{ °C}$

Wärmeübergangskoeffizient:

$\alpha_e = 12,5\text{ W/(m}^2\text{ K)}$


Gesuchte Größen:


Wärmeübergangskoeffizient innen: α_i


Wärmedurchgangskoeffizient: k_i

Temperaturverlauf im Rohr: $\vartheta_W(x)$

Temperatur am Rohrende: ϑ_L

 Auf die Korrektur der Temperaturabhängigkeit wird aufgrund der geringen Temperaturunterschiede verzichtet ($K_T = 1$).

 Wegen $\alpha_i \gg \alpha_e$ ist zu erwarten, dass der wasserseitige Wärmeübergang nur wenig zum Wärmedurchgangswiderstand beiträgt.

 Auch der Wärmeleitwiderstand des Stahlrohrs leistet einen vergleichsweise geringen Beitrag zum thermischen Gesamtwiderstand. Der auf die äußere Rohroberfläche $A_e = D_e \cdot \pi \cdot L = 0,68 \text{ m}^2$ bezogene Wärmedurchgangskoeffizient k_e liegt mit $12,46 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ nur wenig unter dem äußeren Wärmeübergangskoeffizienten, der den Wärmedurchgang dominiert.

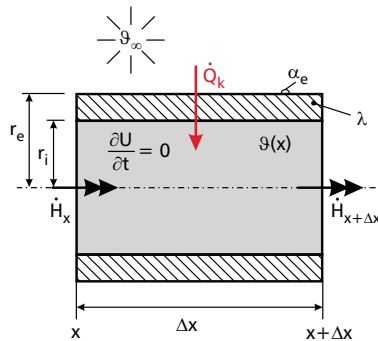



Bild 7.16: Energiebilanz am infinitesimalen Fluidelement.

 Die Längswärmeleitung im Fluid wird vernachlässigt, da gilt:

$$Nu \ll (Re \cdot Pr_W)^2$$

Ebenso bleibt die Längswärmeleitung in der Rohrwand außer Acht.

Aus Gl. (6.4) folgt der gesuchte Wärmeübergangskoeffizient zu:

$$\alpha_i = \frac{Nu \cdot \lambda_W}{D_i} = 7097,89 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}) \quad (7.64)$$

(b) auf die Rohrrinnenfläche bezogener Wärmedurchgangskoeffizient:

Der auf die innere Rohroberfläche $A_i = D_i \cdot \pi \cdot L = 0,54 \text{ m}^2$ bezogene Wärmedurchgangskoeffizient k_i kann mit $r_i = D_i/2 = 10,8 \text{ mm}$ aus Gl. (7.2) berechnet werden:

$$k_i = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{r_i}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) + \frac{r_i}{r_e \cdot \alpha_e}} = 15,52 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}) \quad (7.65)$$

(c) Temperaturverlauf im Rohr:

Zur Formulierung der Energiebilanz wird ein infinitesimales Fluidelement der Länge Δx aus dem Rohr herausgeschnitten. Da die Wassertemperatur nur von der Lauflänge x , aber nicht vom Radius r abhängt, besitzt das Kontrollvolumen den Radius r_i . Weiterhin wird eine stationäre Durchströmung des Rohres betrachtet, so dass keine Änderung der inneren Energie $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ auftritt. In das Kontrollvolumen tritt an der Stelle x der Enthalpiestrom \dot{H}_x ein, während bei $x + \Delta x$ der Enthalpiestrom $\dot{H}_{x+\Delta x}$ austritt. Am Umfang des Elements erfolgt aus der Umgebung die Wärmezufuhr \dot{Q}_k infolge des Wärmedurchgangs. Damit lässt sich die Energiebilanz wie folgt formulieren:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 = \dot{H}_x - \dot{H}_{x+\Delta x} + \dot{Q}_k \quad (7.66)$$

Für den eintretenden Enthalpiestrom gilt:

$$\dot{H}_x = \dot{m}_W \cdot c_{pW} \cdot \vartheta(x) \quad (7.67)$$

Der austretende Enthalpiestrom folgt mithilfe einer Taylor-Reihe, die nach dem zweiten Glied abgebrochen wird:


$$\dot{H}_{x+\Delta x} \approx \dot{H}_x + \frac{d\dot{H}_x}{dx} \cdot \Delta x \quad (7.68)$$

Für die Wärmetransmission an der Umfangsfläche ΔA_U erhält man:

$$\dot{Q}_k = k \cdot \Delta A_U \cdot [\vartheta_\infty - \vartheta(x)] = k \cdot 2\pi \cdot r_i \cdot \Delta x \cdot [\vartheta_\infty - \vartheta(x)] \quad (7.69)$$

Einsetzen der Gln. (7.67)–(7.69) in die Energiebilanz (7.66) liefert:

$$\begin{aligned} -\frac{d\dot{H}_x}{dx} \cdot \Delta x + k \cdot 2\pi \cdot r_i \cdot \Delta x \cdot [\vartheta_\infty - \vartheta(x)] &= 0 \Rightarrow \\ -\frac{d}{dx} (\dot{m}_W \cdot c_{pW} \cdot \vartheta(x)) + k \cdot 2\pi \cdot r_i \cdot [\vartheta_\infty - \vartheta(x)] &= 0 \Rightarrow \\ -\dot{m}_W \cdot c_{pW} \cdot \frac{d\vartheta(x)}{dx} + k \cdot 2\pi \cdot r_i \cdot [\vartheta_\infty - \vartheta(x)] &= 0 \Rightarrow \\ -\frac{d\vartheta(x)}{dx} + \frac{k \cdot 2\pi \cdot r_i}{\dot{m}_W \cdot c_{pW}} \cdot [\vartheta_\infty - \vartheta(x)] &= 0 \end{aligned} \quad (7.70)$$

 Da die Kellertemperatur ϑ_∞ konstant ist, gilt:

$$\frac{d\vartheta(x)}{dx} = \frac{d[\vartheta_\infty - \vartheta(x)]}{dx} = -\frac{d\vartheta(x)}{dx} \quad (7.71)$$

Gl. (7.70) ist eine inhomogene gewöhnliche Differenzialgleichung 1. Ordnung, die mithilfe der Übertemperatur $\theta(x) := \vartheta_\infty - \vartheta(x)$ homogenisiert werden kann:

$$-\left(-\frac{d\theta(x)}{dx}\right) + \frac{k \cdot 2\pi \cdot r_i}{\dot{m}_W \cdot c_{pW}} \cdot \theta(x) = 0 \Rightarrow \frac{d\theta(x)}{dx} + \kappa \cdot \theta(x) = 0 \quad (7.72)$$

Die spezifische Anzahl der Übertragungseinheiten κ beträgt:

$$\dot{m}_W = \rho_W \cdot w \cdot A = \rho_W \cdot w \cdot \frac{D_i^2 \cdot \pi}{4} = 0,73 \text{ kg/s}$$

$$\kappa = \frac{k \cdot 2\pi \cdot r_i}{\dot{m}_W \cdot c_{pW}} = 3,43 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} \quad (7.73)$$

Der Exponentialfunktionsansatz

$$\theta(x) = C \cdot \exp(\gamma \cdot x) \quad (7.74)$$

führt mit

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \gamma \cdot C \cdot \exp(\gamma \cdot x) \quad (7.75)$$

durch Einsetzen in Gl. (7.72) auf die charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} \gamma \cdot C \cdot \exp(\gamma \cdot x) + \kappa \cdot C \cdot \exp(\gamma \cdot x) &= 0 \Rightarrow \\ (\gamma + \kappa) \cdot C \cdot \exp(\gamma \cdot x) &= 0 \Rightarrow \\ \gamma &= -\kappa \end{aligned} \quad (7.76)$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der Übertemperatur:

$$\theta(x) = C \cdot \exp(-\kappa \cdot x) \quad (7.77)$$

Für den allgemeinen Temperaturverlauf im Wasserrohr erhält man damit:

$$\vartheta(x) = \vartheta_\infty - \theta(x) = \vartheta_\infty - C \cdot \exp(-\kappa \cdot x) \quad (7.78)$$

Die Konstante C lässt sich mithilfe der Randbedingung bei $x=0$, d. h. der bekannten Wassereintrittstemperatur ϑ_0 , bestimmen:

$$\vartheta(x=0) = \vartheta_0 = \vartheta_\infty - C \cdot \exp(-\kappa \cdot 0) \Rightarrow C = \vartheta_\infty - \vartheta_0 \quad (7.79)$$

Damit lautet der Temperaturverlauf in der Kaltwasserleitung:

$$\vartheta(x) = \vartheta_\infty - (\vartheta_\infty - \vartheta_0) \cdot \exp(-\kappa \cdot x) \quad (7.80)$$


(d) Temperatur am Rohrende:


Die Wassertemperatur am Rohrende erhält man durch Einsetzen von $x=L$ in Gl. (7.80):


$$\begin{aligned} \vartheta_L = \vartheta(x=L) &= \vartheta_\infty - (\vartheta_\infty - \vartheta_0) \cdot \exp(-\kappa \cdot L) \\ &= 15^\circ\text{C} - (15^\circ\text{C} - 8^\circ\text{C}) \cdot \exp(-3,43 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} \cdot 8 \text{ m}) = 8,02^\circ\text{C} \end{aligned} \quad (7.81)$$

► Beispiel 7.3:

Leiten Sie anhand geeigneter Energiebilanzen an den Arbeitsfluiden 1 und 2 eine Gleichung für die Temperaturverläufe $\vartheta_1(x)$ und $\vartheta_2(x)$ in einem nach außen hin adiabaten, stationär durchströmten Gleichstrom-Wärmeübertrager der Übertragungsfähigkeit $K = k \cdot A$ und der Länge L für den allgemeinen Fall unterschiedlicher Wärmekapazitätsströme \dot{W}_1 und \dot{W}_2 ab. Als Parameter sollen dabei nur die Ein- und Austrittstemperaturen der Fluide $\vartheta_1', \vartheta_2'$ und $\vartheta_1'', \vartheta_2''$ sowie die jeweilige Anzahl der Übertragungseinheiten NTU_1 und NTU_2 auftreten.

 Gl. (7.72) ist eine homogene Differenzialgleichung 1. Ordnung, die durch Trennung der Variablen oder Exponentialfunktionsansatz lösbar ist.

 Die Definition der „Untertemperatur“ $\theta^* := \vartheta(x) - \vartheta_\infty$ hätte auf denselben Temperaturverlauf wie in Gl. (7.80) geführt.

 Das Produkt $\kappa \cdot x$ bezeichnet laut Abschnitt 6.1.14 die Anzahl der Übertragungseinheiten NTU . Gl. (7.80) stimmt damit mit Gl. (7.3) bzw. Gl. (7.4) überein. Im vorliegenden Fall der Wärmezufuhr von außen beschreibt Gl. (7.80) eine exponentielle Temperaturzunahme im Fluid.

Zusammenfassung und Ausblick:

- Es tritt nur eine sehr schwache Temperaturerhöhung im Kaltwasser auf, so dass eine Wärmedämmung der Rohrleitung (aus diesem Grunde) nicht erforderlich ist.
- Die praktisch vernachlässigbare Temperaturzunahme im Fluid resultiert aus dem sehr großen Wärmekapazitätsstrom des Wassers $\dot{W}_W = \dot{m}_W \cdot c_{pW} = 3074,82 \text{ W/K}$, was auch aus dem sehr niedrigen Wert der Anzahl der Übertragungseinheiten $NTU = \kappa \cdot L = 2,74 \cdot 10^{-3}$ anschaulich klar wird.
- Wasser ist daher sehr gut als Wärmeträgermedium geeignet.