Estatística e Modelos Probabilísticos - Quiz 4

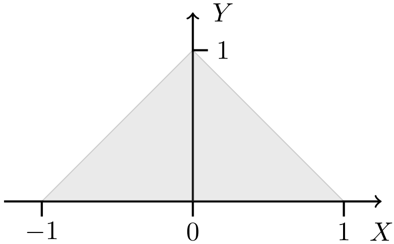
Matheus Henrique Sant'Anna Cardoso

DRE: 121073530

Novembro de 2022

Questão 1

Considere duas variáveis aleatórias x e y com função densidade de probabilidade conjunta constante e diferente de zero apenas na área hachurada da figura. Determine o valor de $p_{xy}(X,Y)$ na área hachurada de figura. Encontre a função densidade de probabilidade $p_x(X)$ da variável aleatória x. Determine a função densidade de probabilidade condicional $p_{x|M}(X)$ onde M é o evento definido por $M = \{0.4 < y < 0.6\}$.



Sendo a probabilidade conjunta uma constante, chamemos de k. Assim:

$$p_{xy}(X,Y) = k$$

Disso, vem:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(X,Y)\,dX dY &= 1 \\
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k\,dX dY &= 1 \\
\int_{-1}^{0}\int_{0}^{X+1} k\,dY dX + \int_{0}^{1}\int_{0}^{-X+1} k\,dY dX &= 1 \\
\int_{-1}^{0}(X+1)k\,dX + \int_{0}^{1}(-X+1)k\,dX &= 1 \\
k\left[\frac{X^2}{2} + X\right]_{-1}^{0} + k\left[\frac{-X^2}{2} + X\right]_{0}^{1} &= 1
\end{aligned}$$

$$k\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]=1$$

$$k=1$$

$$\boxed{p_{xy}(X,Y)=1}$$

Sigamos para o cálculo de $p_x(X)$ da área hachurada.

$$p_x(X)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{xy}(X,Y)\,dY$$

$$\boxed{p_x(X)=\begin{cases}\int_0^{X+1}1\,dY=X+1 & -1\leq X\leq 0\\ \int_0^{-X+1}1\,dY=-X+1 & 0<X\leq 1\end{cases}}$$

Agora, calculemos $p_{x|M}(X)$.

Antes, vejamos $p_y(Y)$

$$p_y(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{xy}(X,Y)\,dX$$

$$p_y(Y)=\int_{Y-1}^{0}1\,dX+\int_0^{-Y+1}1\,dX \quad 0\leq Y\leq 1$$

$$p_y(Y)=(-Y+1)+(-Y+1)$$

$$p_y(Y)=2(-Y+1) \quad 0\leq Y\leq 1$$

Dessa forma, podemos calcular $P(M)$.

$$P(0.4<Y<0.6)=2\int_{0.4}^{0.6}(-Y+1)\,dY$$

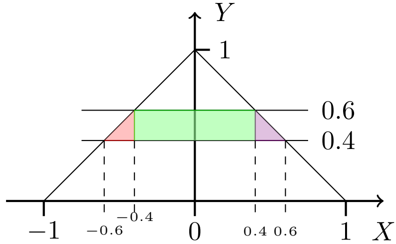
$$P(0.4<Y<0.6)=2\left[-\frac{Y^2}{2}+Y\right]_{0.4}^{0.6}$$

$$P(0.4<Y<0.6)=2\left[-\frac{0.6^2}{2}+0.6-\left(-\frac{0.4^2}{2}+0.4\right)\right]$$

$$P(0.4<Y<0.6)=2\,[0.1]$$

$$P(0.4 < Y < 0.6) = 0.2$$

Sigamos, pois para o cálculo de $P(x \leq X, M)$. Perceba, que, aqui queremos a interseção, sendo representado pela figura abaixo.



Vamos então, analisar por região destacada.

$$P(x \leq X, M) = \begin{cases} 0 & X < -0.6 \\ \frac{(X+0.6)^2}{2} & -0.6 \leq X \leq -0.4 \\ \frac{0.2^2}{2} + (X+0.4)\cdot 0.2 = 0.1 + 0.2X & -0.4 < X \leq 0.4 \\ 0.18 + \frac{(0.8-X)\cdot(X-0.4)}{2} = 0.2 - \frac{(X-0.6)^2}{2} & 0.4 < X \leq 0.6 \\ 0.2 & X > 0.6 \end{cases}$$

Sabemos que

$$p_{x|M}(X) = \frac{\frac{d}{dx}P(x \leq X)}{P(M)}$$

Calculando $\frac{d}{dX}P(x \leq X, M)$, chegamos em

$$\frac{d}{dX}P(x \leq X, M) = \begin{cases} 0 & X < -0.6 \\ X + 0.6 & -0.6 \leq X \leq -0.4 \\ 0.2 & -0.4 < X \leq 0.4 \\ 0.6 - X & 0.4 < X \leq 0.6 \\ 0 & X > 0.6 \end{cases}$$

Finalmente

$$\boxed{p_{x|M}(X) = \begin{cases} 0 & X < -0.6 \\ 5X+3 & -0.6 \leq X \leq -0.4 \\ 1 & -0.4 < X \leq 0.4 \\ 3-5X & 0.4 < X \leq 0.6 \\ 0 & X > 0.6 \end{cases}}$$

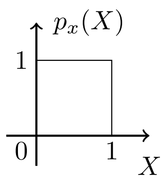
Questão 2

Uma régua de comprimento unitário é quebrada em um ponto aleatório. O pedaço da esquerda é novamente quebrado. Seja x a variável aleatória que define, a partir da extremidade esquerda da régua, o ponto em que a régua é quebrada pela primeira vez e y a variável aleatória que define o segundo ponto de quebra. Determine

$$p_x(X), p_y(Y), p_{y|x=X}(Y), p_{x|y=Y}(X)$$

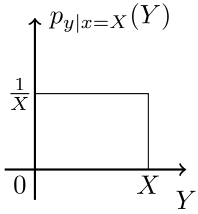
Calcule a probabilidade de que um triangulo possa ser formado com as três peças obtidas. Lembre-se de que, num triangulo, o comprimento de qualquer um dos lados é menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

O cálculo de $p_x(X)$ é bem simples. Tendo uma régua unitária, sua densidade de probabilidade é:



$$p_x(X) = 1; 0 \geq X \geq 1$$

Agora, também podemos representar $p_{y|x=X}(Y)$.



Agora, podemos calcular $p_y(Y)$.

$$p_{y|x=X}(Y) = \frac{p_{xy}(X,Y)}{p_y(Y)}$$
$$p_{xy}(X,Y) = \frac{1}{X}$$
$$p_y(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(X,Y)\,dX$$
$$p_y(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{X}\,dX$$
$$p_y(Y) = \int_{y}^{1} \frac{1}{X}\,dX$$
$$p_y(Y) = 0 - \ln(Y)$$
$$p_y(Y) = -\ln(Y)$$

E agora, $p_{y|x=X}(X) = \frac{p_{xy}(X,Y)}{p_x(X)}$.

$$p_{y|x=X}(X) = \frac{p_{xy}(X,Y)}{p_x(X)}$$
$$p_{y|x=X}(X) = \frac{1}{X}/(-\ln(Y))$$
$$p_{y|x=X}(X) = -\frac{1}{X\ln(Y)}, 0 < Y < X < 1$$

Seja P a probabilidade de se formar um triângulo, ela é dada por:

$$P = \int_R p_{xy}(X,Y)\,dR = \int_{0.5}^{1}\int_{X-0.5}^{0.5} \frac{1}{X} dY dX$$
$$P = \int_{0.5}^{1} \frac{1}{X}[-X+1]dX$$
$$P = -0.5 - \ln(0.5)$$
$$P \approx 0.1931$$

Questão 3

Um equipamento pode se encontrar em um dentre dois estados possíveis: operação normal e operação anormal. A probabilidade de o equipamento encontra-se em operação normal é 0.8. Ligado a este equipamento tem-se um painel de controle onde um termômetro com escala em graus Celsius indica a temperatura do equipamento a cada instante. Considere que a indicação do termômetro é uma variável aleatória t cuja função densidade de probabilidade depende do estado em que o equipamento se encontra. Se o equipamento está em operação normal (N), tem-se

$$p_{t|N}(T) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(T-30)^2}{200}}$$

Por outro lado, se o equipamento está em operação anormal ($\overline{N}$), tem-se

$$p_{t|\overline{N}}(T) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(T-50)^2}{200}}$$

Determine a probabilidade de que a indicação do termômetro exceda 40 graus Celsius. Determine a probabilidade de que a operação seja normal dado que a indicação do termômetro está compreendida entre 40 e 50 graus Celsius. Suponha que se resolve decidir a respeito

do estado do equipamento (operação normal ou anormal) a partir da indicação do termômetro. Estabelece-se então a seguinte regra de decisão:

Se $t < T_0$ decide-se por operação normal

Se $t \geq T_0$ decide-se por operação anormal.

Calcule a probabilidade de se cometer um erro quando se usa este critério de decisão com $T_0 = 45$. Calcule o menor valor de T_0 tal que a probabilidade de se decidir por operação anormal quando a operação é normal não excede 0.0075.

A probabilidade que queremos é:

$$P(t > 40) = P(t > 40, N) + P(t > 40, \overline{N})$$

$$P(t > 40) = 0.8 \cdot P_{t|N}(T > 40) + 0.2 \cdot P_{t|\overline{N}}(T > 40)$$

A primeira, $(P_{t|N}(T > 40))$, possui desvio padrão de 10 com média 30. Dessa forma, a probabilidade de que a temperatura exceda 30 graus Celsius, é de 50%. Para que ela fique entre 20 e 40 graus (a um desvio padrão), aproximamos para 68%. Sendo simétrica, dividimos por 2 para obter a probabilidade de que a temperatura esteja entre 30 e 40 graus Celsius, sendo de aproximadamente 34%. Diminuindo o primeiro dado do segundo, temos que a probabilidade de que a temperatura exceda 40 graus é de $(50 - 34)\% = 16\%$

$$P_{t|N}(T > 40) = 0.16$$

Para a segunda, $(P_{t|\overline{N}})$, temos uma média de 50, com um desvio padrão de 10. Pela lógica da primeira, devemos agora somar aos 50% os 34%, que é metade da probabilidade contida em um desvio padrão, tendo $(50 + 34)\% = 84\%$.

$$P_{t|\overline{N}}(T > 40) = 0.84$$

Aplicando aqui, temos:

$$P(t > 40) = 0.8 \cdot P_{t|N}(T > 40) + 0.2 \cdot P_{t|\overline{N}}(T > 40)$$
$$P(t > 40) = 0.8 \cdot 0.16 + 0.2 \cdot 0.84$$

$$\boxed{P(t > 40) = 0.296}$$

Agora, queremos $P(N \mid 40 < T < 50)$. Pelo teorema de Bayes, temos que:

$$P(N \mid 40 < T < 50) = \frac{P(N, 40 < T < 50)}{P(40 < T < 50)}$$

Sabemos, porém, que:

$$P(N, 40 < T < 50) = P(40 < T < 50 \mid N) \cdot P(N)$$

Então

$$P(N \mid 40 < T < 50) = \frac{P(40 < T < 50 \mid N) \cdot P(N)}{P(40 < T < 50)}$$

Agora, nos resta calcular o que podemos:

Para, $P(40 < T < 50)$, podemos utilizar a lógica da primeira parte, obtendo que

$$P(40 < T < 50) = 0.8 \cdot P_{t|N}(40 < T < 50) + 0.2 \cdot P_{t|\overline{N}}(40 < T < 50)$$

No primeiro ($P_{t|N}(40 < T < 50)$), queremos metade da probabilidade de estar no intervalo entre o primeiro e segundo desvio padrão. Então ($\frac{95-68}{2}\% = 13.5\%$). No segundo, ($P_{t|\overline{N}}(40 < T < 50)$), queremos metade da probabilidade de que se esteja no intervalo do primeiro desvio padrão. Então ($\frac{68}{2}\% = 34\%$)

Assim,

$$P_{t|N}(40 < T < 50) = 0.135$$

$$P_{t|\overline{N}}(40 < T < 50) = 0.34$$

$$P(40 < T < 50) = 0.8 \cdot P_{t|N}(40 < T < 50) + 0.2 \cdot P_{t|\overline{N}}(40 < T < 50)$$

$$P(40 < T < 50) = 0.8 \cdot 0.135 + 0.2 \cdot 0.34$$

$$\boxed{P(40 < T < 50) = 0.176}$$

Os outros, ou já calculamos, ou temos:

$$P(40 < T < 50 \mid N) = 0.135$$

$$P(N) = 0.8$$

Finalmente

$$P(N \mid 40 < T < 50) = \frac{P(40 < T < 50 \mid N) \cdot P(N)}{P(40 < T < 50)}$$

$$P(N \mid 40 < T < 50) = \frac{0.135 \cdot 0.8}{0.176} = 0.614$$

$$\boxed{P(N \mid 40 < T < 50) = 0.614}$$

Agora, queremos a probabilidade de que a temperatura seja menor que 45 graus, sendo anormal ou de que seja maior ou igual a 45 graus sendo normal.

No primeiro caso, veremos o valor para a função erro:

$$\frac{45 - 30}{10} = 1.5$$

No segundo:

$$\frac{45-50}{10} = -0.5$$

Assim

$$P(Erro) = P(N) \cdot P_{t|N}(t \geq 45) + P(\overline{N}) \cdot P_{t|\overline{N}}(t < 45)$$

$$P(Erro) = 0.8 \cdot (1 - erf(1.5)) + 0.2 \cdot erf(-0.5)$$

$$\boxed{P(Erro) = 0.115}$$

Finalmente, precisamos da temperatura T_0 para que o erro seja o dado no enunciado. Para isso, fazemos:

$$0.8 \cdot p_{t|N}(t \geq T_0) < 0.0075$$

$$\int_{T_0}^{\infty} p_{t|N}\, dt < 0.009375$$

$$\left[\frac{1}{2} - erf(\frac{T_0 - 30}{10})\right] < 0.009375$$

$$erf\left(\frac{T_0 - 30}{10}\right) > 0.490625$$

$$erf\left(\frac{T_0 - 30}{10}\right) > erf(2.35)$$

$$\frac{T_0 - 30}{10} > 2.35$$

$$\boxed{T_0 > 53.5}$$

Questão 4

Deseja-se encontrar a função de densidade de probabilidade da v.a. $y = ax^2, (a > 0)$, onde x é uma v.a. dupla exponencial de parâmetro b:

$$p_x(X) = \frac{b}{2} e^{-b|X|}$$

Vamos calcular a inversa de $f(x) = ax^2$.

$$y = ax^2$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{y}{a}}$$

E a derivada da função:

$$y' = (ax^2)'$$

$$y' = 2ax$$

Agora, podemos calcular $p_y(Y)$.

$$p_y(Y) = \left.\frac{p_x(X)}{|f_1'(X)|}\right|_{f_1^{-1}(Y)} \cdot I_{Cf_1(Y)} + \left.\frac{p_x(X)}{|f_2'(X)|}\right|_{f_2^{-1}(Y)} \cdot I_{Cf_2(Y)}$$

Lembrando que existem duas regiões pois a função não é biunívoca.

$$p_y(Y) = \left(\frac{be^{-b|X|}}{4\sqrt{ya}} + \frac{be^{-b|X|}}{4\sqrt{ya}}\right) \cdot I_{[0,\infty](Y)}$$

$$\boxed{p_y(Y) = \frac{be^{-b\sqrt{\frac{y}{a}}}}{2\sqrt{ya}} \cdot u_{-1}(Y)}$$