Estatística e Modelos Probabilísticos - Quiz 3

Matheus Henrique Sant'Anna Cardoso

DRE: 121073530

Novembro de 2022

Questão 1

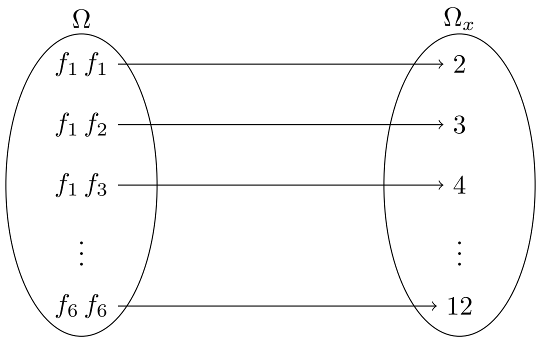
Considere o lançamento de dois dados e a experiência cujo resultado consiste na soma do número de pontos da face superior dos dados. Resolva:

a. Modele com uma v.a. esta soma.

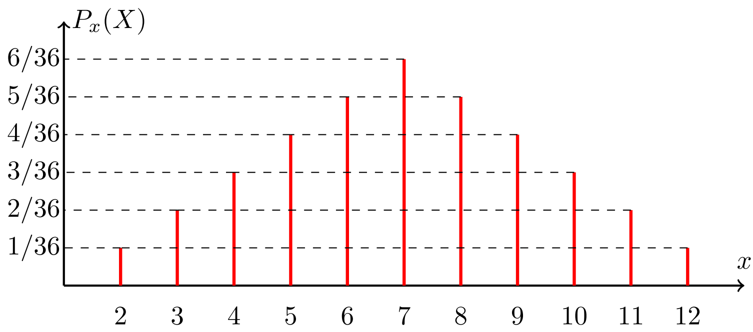
Aqui, o espaço amostra da variável aleatória pode ser dado por:

$$\Omega_x = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

De forma que, possamos, de cada par $f_i\, f_j$ com $i, j = 1, 2, \cdots, 6$ apontar para uma soma $i + j$.



b. Encontre e esboce sua distribuição de probabilidade.



c. Encontre e esboce a Função Distribuição de Probabilidades (F.D.P.)

Sabemos que:

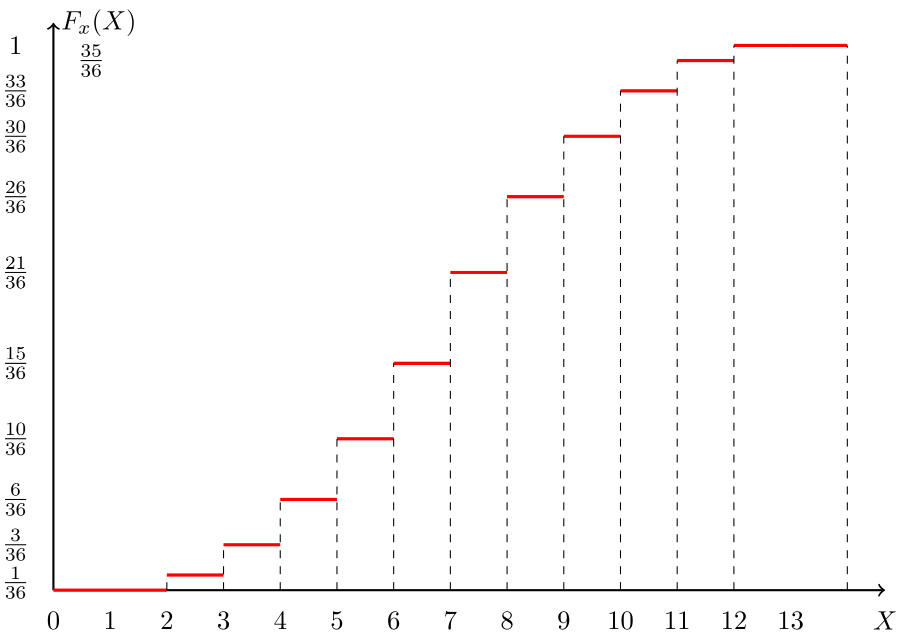
$$F_x(X) = \sum_i P(x = X_i) u_{-1}(X - X_i)$$

Então,

$$F_x(X) = P(2)u_{-1}(X-2) + P(3)u_{-1}(X-3) + \cdots P(12)u_{-1}(X-12) =$$

$$F_x(X) = \frac{1}{36}u_{-1}(X-2) + \frac{2}{36}u_{-1}(X-3) + \cdots + \frac{1}{36}u_{-1}(X-12)$$

Esboçando a Função Distribuição de Probabilidades, temos:



d. Encontre e esboce a função densidade de probabilidades (f.d.p.)

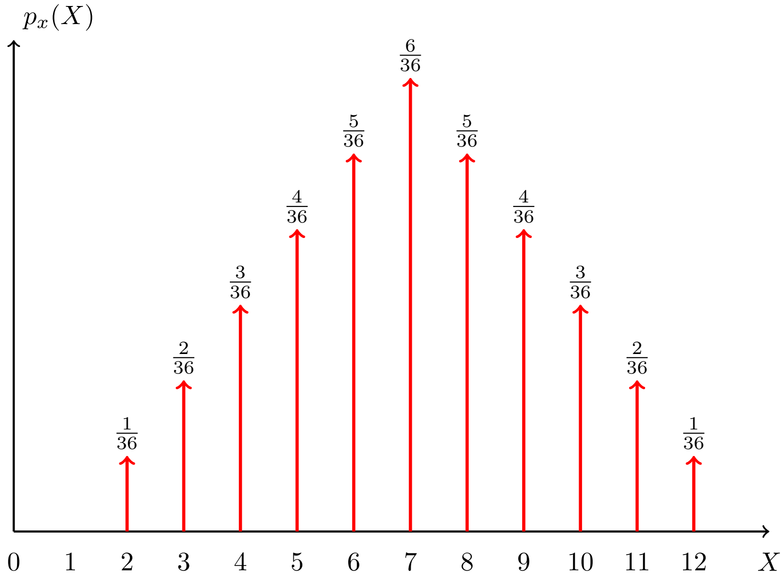
Sabemos que $p_x(X) = \dfrac{dF_x(X)}{dX}$. Dessa forma, vamos derivar a F.D.P. para obtermos f.d.p.

$$p_x(X) = \frac{1}{36}\frac{du(X-2)}{dX} + \frac{2}{36}\frac{du(X-3)}{dX} + \frac{3}{36}\frac{du(X-4)}{dX} + \cdots + \frac{1}{36}\frac{du(X-12)}{dX}$$

Assim:

$$p_x(X) = \frac{1}{36}\delta(X-2) + \frac{2}{36}\delta(X-3) + \frac{3}{36}\delta(X-4) + \cdots + \frac{1}{36}\delta(X-12)$$

Esboçando, teremos:



e. Calcule a probabilidade de obter um valor no intervalo $[7, 9]$.

Deveremos calcular a probalilidade para que $7 \leq X \leq 9$.

$$P_x(7 \leq X \leq 9) = F_x(9) - \lim_{\epsilon \to 0} F_x(7 - \epsilon)$$

$$P_x(7 \leq X \leq 9) = \frac{30}{36} - \frac{15}{36} = \frac{15}{36}$$

$$P_x(7 \leq X \leq 9) = \frac{5}{12}$$

Questão 2

Seja x uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$P(x = X) = \frac{c}{4^x}, X = 0, 1, \cdots$$

Obtenha:

a. O valor de c.

Para que isso possa expressar uma probabilidade, deve cumprir o fato de que a soma de todos os casos vale 1. Assim, façamos a soma para infinitos termos.

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{c}{4^x} = 1$$

$$c \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{4^x} = 1$$

Sabe-se que o somatório acima é a soma de infinitos termos de uma P.G. infinita, que é dada por $\frac{a_1}{1-q}$ em que a_1 é o primeiro termo e q a razão. Então

$$c \left(\frac{1}{1 - 1/4} \right) = 1$$

$$c = \frac{3}{4}$$

b. A probabilidade de x ser um número par.

Sabemos que o valor de c é $\frac{3}{4}$. Queremos agora que X assuma os valores $0, 2, 4, 6, \cdots$ tendo uma outra P.G. infinita. Assim:

$$P(x_{par}) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4^0} + \frac{1}{4^2} + \cdots \right)$$

sendo, novamente, uma P.G. infinita, com razão $\frac{1}{16}$ e primeiro termo 1. Dessa forma:

$$P(x_{par}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - 1/16} = \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{15} = \frac{4}{5}$$

Questão 3

Seja x uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$p_x(X) = \begin{cases} c\left(1 - x^2\right); & -1 < x < 1 \\ 0 \qquad\qquad ; & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a. Qual o valor de c?

Aqui, sabemos que a integral de $p_x(X)$ é igual a 1. Portanto:

$$c\int_{-1}^{1} p_x(X)\,dx = 1$$

$$c\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,dx = 1$$

$$c \cdot \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 1$$

$$c \cdot \frac{4}{3} = 1$$

$$c = \frac{3}{4}$$

b. qual é a Função Distribuição Cumulativa de x?

Sabemos que

$$F_x(X) = \int_{-\infty}^{X} p_x(X)\,dx$$

que, para efeitos desta questão, é o mesmo que

$$F_x(X) = \int_{-1}^{X} \frac{3}{4} \cdot \left(1 - x^2\right)\,dx$$

Sabendo que, para isso, $X \leq 1$.

$$F_x(X) = \frac{3}{4} \cdot \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{X}$$

$$F_x(X) = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{X^3}{3} + X + \frac{2}{3}\right)$$

$$F_x(X) = -\frac{X^3}{4} + \frac{3X}{4} + \frac{1}{2}$$

Questão 4

Quinze pessoas portadoras de determinada doença são selecionadas para se submeter a um tratamento. Este tratamento é eficaz na cura da doença em 80% dos casos. Suponha que os indivíduos submetidos ao tratamento se curam (ou não) independentes uns do outros.

a. Modelar com uma v.a. o número de curados x dentre os 15 pacientes submetidos ao tratamento.

$$\Omega_x = \{0, 1, 2, \cdots, 15\}$$

O σ-álgebra são todas as combinações possíveis de uma pessoa.

Os sucessos serão os casos descritos em Ω_x.

b. Qual a distribuição de x?

Queremos obter a probabilidade de $x = K$ pacientes alcançarem sucesso - que seria a cura. Podemos modelar da seguinte forma:

$$P(x = K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$$

Aqui, escolhemos K pacientes dentre 15. Fazemos o produto dos $p's$ K vezes - escolhendo K que obtiveram sucesso, ou seja, $1 - K$ que não obtiveram sucesso. Por fim, teremos:

$$P(x = K) = \binom{15}{K} p^K (1-p)^{15-K}$$

c. Qual a probabilidade de que os 15 pacientes sejam curados?

Da fórmula anterior, obtemos:

$$P(x = 15) = \binom{15}{15} 0.8^{15} \cdot (1 - 0.8)^{15-15}$$

$$P(x = 15) = 0.8^15 = 0.03518$$

$$P(x = 15) \approx 3.52\%$$

d. Qual a probabilidade de que pelo menos dois não sejam curados?

Aqui, queremos $P(x \leq 13)$.

Porém, sabemos que

$$P(x \leq 13) = 1 - P(x > 13) = 1 - P(x = 14) - P(x = 15)$$

$$P(x \leq 13) = 1 - (1 \cdot (0.8)^{14} \cdot (0.2)^{1}) - 0.03518$$

$$P(x \leq 13) = 1 - 0.00879 - 0.03518 = 0.956$$

$$P(x \leq 13) \approx 95.6\%$$

Questão 5

Seja x o número de ensaios necessários para obter o primeiro sucesso quando se realiza uma sequência de ensaios de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso p.

a. Deduza o modelo de distribuição de probabilidades conhecida como geométrica.

Aqui, teremos um modelo similar ao da questão anterior, porém, não iremos escolher quando haverá sucesso. Dessa forma, teremos

$$P(x) = (1 - p)^{x-1} p$$

Sendo que há fracasso em $x - 1$ vezes e sucesso apenas uma vez, sendo a última.

b. Mostre que a somatória das probabilidades da distribuição geométrica é igual a 1.

Vamos, então, calcular a somatória para infinitos valores de X. Queremos, então:

$$\sum_{X=1}^{\infty}(1-p)^{x-1}p = p\cdot\sum_{X=1}^{\infty}(1-p)^{x-1}$$

Caímos, aqui, em uma P.G. infinita, com primeiro termo 1 e razão $1-p$.

$$p\cdot\sum_{X=1}^{\infty}(1-p)^{x-1} = p\cdot\frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1$$

Questão 6

Um amperímetro digital tem uma escala que vai de -5 a +5 Ampère e tem a precisão de apenas um dígito, isto é, indica valores inteiros de corrente. Assim, ao se fazer uma medida, o aparelho aproxima o valor real da corrente para o valor inteiro mais próximo. Determine a probabilidade de que o erro na medida seja superior a 0.2 Ampère. Considere que a função densidade de probabilidade da corrente na entrada do amperímetro seja a mostrada na figura 4.

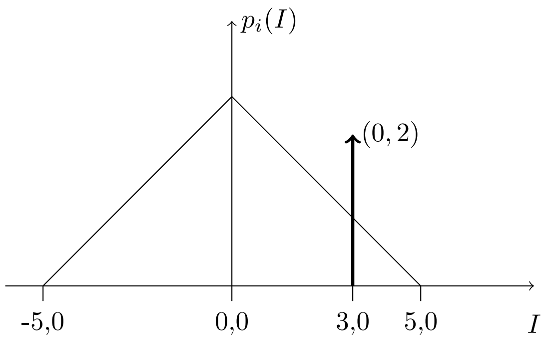


Figura 4

É preciso, primeiramente, refazermos a figura acima, sabendo o valor de $p_i(0)$, que não é mostrado. Assim, sabendo que

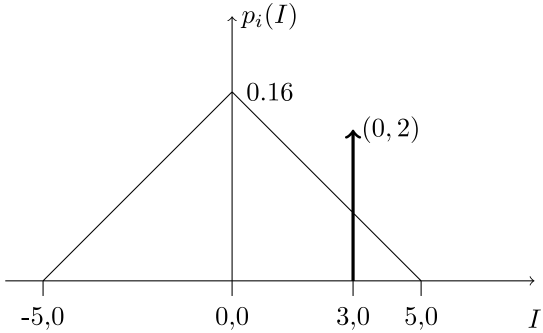
$$\int_{-\infty}^{\infty} p_i(I)\, di = 1$$

ou, mais convenientemente, que a área do triângulo somada a integral do impulso de amplitude 0.2 deve ser 1.

$$\frac{10c}{2} + 0.2 = 1$$

$$c = 0.16$$

Então, recriando a figura, teremos



Agora, temos uma figura clara e podemos calcular as áreas nos intervalos em que o problema exige. Precisamos das áreas que comtemplam o fato de estarem entre $X.2$ e $X.8$.

Na primeira parte do gráfico, este segue a função $p_i(I) = 0.032I + 0.16$.

Já, na segunda parte do gráfico, temos uma função da forma $-0.032I + 0.16$.

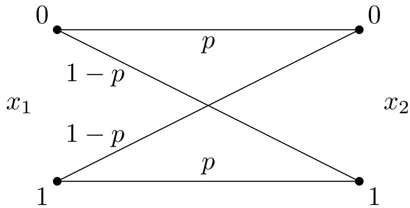
Por partes, calculemos as áreas dos intervalos:

$$\frac{(p_i(-4.8) + p_i(-4.2)) \cdot 0.6}{2} = 0.0096$$
$$\frac{(p_i(-3.8) + p_i(-3.2)) \cdot 0.6}{2} = 0.0288$$
$$\frac{(p_i(-2.8) + p_i(-2.2)) \cdot 0.6}{2} = 0.048$$
$$\frac{(p_i(-1.8) + p_i(-1.2)) \cdot 0.6}{2} = 0.0672$$
$$\frac{(p_i(-0.8) + p_i(-0.2)) \cdot 0.6}{2} = 0.0864$$
$$\frac{(p_i(0.2) + p_i(0.8)) \cdot 0.6}{2} = 0.0864$$
$$\frac{(p_i(1.2) + p_i(1.8)) \cdot 0.6}{2} = 0.0672$$
$$\frac{(p_i(2.2) + p_i(2.8)) \cdot 0.6}{2} = 0.048$$
$$\frac{(p_i(3.2) + p_i(3.8)) \cdot 0.6}{2} = 0.0288$$
$$\frac{(p_i(4.2) + p_i(4.8)) \cdot 0.6}{2} = 0.0096$$

Somando os valores, obtemos 0.48, sendo essa a probabilidade pedida.

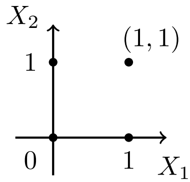
Questão 7

No canal binário da figura, a v.a. x_1 representa os dígitos transmitidos e a v.a. x_2 os dígitos recebidos. Os bits recebidos podem estar alterados devido ao ruído no canal.



a. Determine os eventos Ax para um vetor aleatório bidimensional que represente este experimento.

Vamos fazer um simples gráfico, representando o problema:



Disso, notamos o espaço amostra do problema, dado por quatro vetores:

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Seja R_1 a região que contempla a condição $X_1 < 0$ ou $X_2 < 0$.

Seja R_2 a região que contempla a condição $0 \leq X_1 < 1$ e $0 \leq X_2 < 1$.

Seja R_3 a região que contempla a condição $0 \leq X_1 < 1$ e $X_2 \geq 1$.

Seja R_4 a região que contempla a condição $X_1 \geq 1$ e $0 \leq X_2 < 1$.

Seja R_5 a região que contempla a condição $X_1 \geq 1$ e $X_2 \geq 1$.

Aqui, definimos uma álgebra de eventos A_x:

$$A_x = \begin{cases} \{\emptyset\} & \underline{X} \in R_1 \\ \{(0,0)\} & \underline{X} \in R_2 \\ \{(0,0),(0,1)\} & \underline{X} \in R_3 \\ \{(0,0),(1,0)\} & \underline{X} \in R_4 \\ \Omega & \underline{X} \in R_5 \end{cases}$$

b. Encontre a distribuição de probabilidades e a F.D.P conjuntas, considerando que a probabilidade de transmissão de cada um dos dígitos é igual, e que o ruído do canal pode ser caracterizado pelas probabilidades condicionadas mostradas na figura.

A probabilidade do valor transmitido ser 0 é $\frac{1}{2}$, igual a de ser 1. Multiplicamos por p se o valor for recebido for igual ao transmitido, e por $1-p$ caso o contrário. Dessa forma a distribuição de probabilidades fica:

$$
\begin{aligned}
P((0,0)) &= \frac{1}{2}p \\
P((0,1)) &= \frac{1}{2}(1-p) \\
P((1,0)) &= \frac{1}{2}(1-p) \\
P((1,1)) &= \frac{1}{2}p
\end{aligned}
$$

Obtendo a distribuição de probabilidades. Fazendo a F.D.P:

$$
F_{x_1|x_2}(X) = \begin{cases}
P(\{\emptyset\}) = 0 & \underline{X} \in R_1 \\
P(\{(0,0)\}) = \frac{p}{2} & \underline{X} \in R_2 \\
P(\{(0,0),(0,1)\}) = \frac{1}{2} & \underline{X} \in R_3 \\
P(\{(0,0),(1,0)\}) = \frac{1}{2} & \underline{X} \in R_4 \\
P(\Omega) = 1 & \underline{X} \in R_5
\end{cases}
$$

c. Encontre a distribuição de probabilidades e a F.D.P de cada v.a.

Vamos encontrar, primeiramente a F.D.P. de cada uma v.a, sabendo que:

$$F_{x_1}(X_1) = \lim_{X_2 \to \infty} F_{x_1|x_2}(X_1, X_2) = \begin{cases} 0 & X_1 \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2} & X_1 \in [0, 1) \\ 1 & X_1 \in [1, \infty) \end{cases}$$

$$F_{x_1}(X_1) = \frac{1}{2} \cdot u_{-1}(X_1) + \frac{1}{2} \cdot u_{-1}(X_1 - 1)$$

$$F_{x_2}(X_2) = \lim_{X_1 \to \infty} F_{x_1|x_2}(X_1, X_2) = \begin{cases} 0 & X_2 \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2} & X_2 \in [0, 1) \\ 1 & X_2 \in [1, \infty) \end{cases}$$

$$F_{x_2}(X_2) = \frac{1}{2} \cdot u_{-1}(X_2) + \frac{1}{2} \cdot u_{-1}(X_2 - 1)$$

E agora, as distribuições de probabilidade:

$$P(X_1) = \frac{1}{2}\delta(X_1) + \frac{1}{2}\delta(X_1 - 1)$$
$$P(X_2) = \frac{1}{2}\delta(X_2) + \frac{1}{2}\delta(X_2 - 1)$$

Questão 8

Encontre a distribuição de probabilidades marginal $P_x(K)$, sabendo que:

$$P_{xy}(K, L) = \begin{cases} \frac{2\left[\frac{K}{K+1}\right]^L}{n(n+1)} & K = 0, 1, \cdots, n-1; L \geq 0 \\ 0 & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Observação

$$P_x(X_i) = \sum_j P_{xy}(X_i, Y_j), \qquad P_y(Y_j) = \sum_i P_{xy}(X_i, Y_j)$$

Aqui, como faremos o somatório para os valores de L que pertence aos reais, podemos substituir o somatório por uma integral:

$$P_x(K) = \int_0^\infty \frac{2\left[\frac{K}{K+1}\right]^L}{n(n+1)}\, dL$$

$$P_x(K) = \frac{2}{n(n+1)} \int_0^\infty \left[\frac{K}{K+1}\right]^L dL$$

$$P_x(K) = \frac{2}{n(n+1)} \left[\frac{\left[\frac{K}{K+1}\right]^L}{\ln \frac{K}{K+1}}\right]_0^\infty$$

$$P_x(K) = \frac{2\left(\ln \frac{K}{K+1}\right)^{-1}}{n(n+1)}, K = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

Questão 9

Dois usuários A e B solicitam serviços a um determinado provedor. Considere que as v.a.'s x e y caracterizam, respectivamente, os tempos (em segundos) necessários para a execução dos serviços solicitados pelos usuários A e B. Suponha que a densidade de probabilidade conjunta das v.a.'s x e y seja dada por:

$$p_{xy}(X, Y) = Ke^{-(3X+2Y)}u(X)u(Y)$$

Sabe-se que quando um serviço é solicitado ao provedor, a probabilidade de que a solicitação venha de A vale 0.6, valendo, portanto 0.4 a probabilidade de que ela venha de B.

a. Determine o valor da constante K.

Sabemos que a integral dupla da função densidade de probabilidade deve ser 1, assim:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dY \int_{-\infty}^{\infty} Ke^{-(3X+2Y)}u(X)u(Y)\,dX &= 1\\
\int_{-\infty}^{\infty} dY ke^{-2Y}u(Y)\cdot\left[-\frac{e^{-3X}}{3}\right]_0^{\infty} &= 1\\
\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-2Y}u(Y)\,dY &= 1\\
\frac{1}{3}\cdot k\left[\frac{e^{-2Y}}{2}\right]_0^{\infty} &= 1\\
\frac{k}{6} &= 1\\
k &= 6
\end{aligned}$$

b. Calcule a probabilidade de que a execução de um serviço solicitado ao provedor requeira um tempo superior a 0.5 segundos.

Calculemos as probabilidades marginais $p_x(X)$ e $p_y(Y)$.

$$\begin{aligned}
p_x(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(X,Y)\,dY\\
p_x(X) &= \int_{0}^{\infty} 6e^{-(3X+2Y)}u(X)u(Y)\,dY\\
p_x(X) &= 6e^{-3X}u(X)\int_{0}^{\infty} e^{-2Y}u(Y)\,dY\\
p_x(X) &= 6e^{-3X}u(X)\left[-\frac{e^{-2Y}}{2}\right]_0^{\infty}\\
p_x(X) &= 6e^{-3X}u(X)\left[0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\\
p_x(X) &= 3e^{-3X}u(X)
\end{aligned}$$

Fazendo o mesmo processo para encontrar $p_y(Y)$, encontramos:

$$p_y(Y) = 2e^{-2Y}u(Y)$$

Assim, para que o provedor A realize o processo em um tempo superior a 0.5

segundos, fazemos a área deste gráfico:

$$P_x(X > 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} p_x(X)\, dX$$
$$P_x(X > 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} 3e^{-3X} u(X)\, dX$$
$$P_x(X > 0.5) = \left[-e^{-3X}\right]_{0.5}^{\infty}$$
$$P_x(X > 0.5) = \left[0 - (-e^{-\frac{3}{2}})\right]$$
$$P_x(X > 0.5) = e^{-\frac{3}{2}}$$

Realizando o mesmo processo para $p_y(Y)$, chegamos em:

$$P_y(Y > 0.5) = e^{-1}$$

Portanto, devemos somar a probabilidade do provedor A ser chamado, durando mais que 0.5 segundos com a do provedor B ser chamado durando mais que 0.5 segundos. Finalmnte, temos:

$$P(T > 0.5) = 0.6 \cdot P_x(X > 0.5) + 0.4 \cdot P_y(Y > 0.5)$$

$$P(T > 0.5) = 0.6 \cdot e^{-\frac{3}{2}} + 0.4 \cdot e^{-1}$$

c. Calcule a probabilidade de que uma solicitação de serviço venha do usuário A sabendo-se que sua execução requer um tempo maior do que 0.5 segundos.

Questão 10

Se x é uma variável aleatória normal (gaussiana) com parâmetros $\mu = 10$ e $\sigma^2 = 36$, calcule:

Antes de tudo, se x é variável aleatória normal, então

$$p_x(X) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-10)^2}{72}}$$

a. $P(x > 5)$

b. $P(4 < x < 16)$

c. $P(x < 8)$

d. $P(x < 20)$

e. $P(x > 16)$