Quiz 1 - Estatística e Métodos Probabilísticos

Matheus Henrique Sant‘Anna Cardoso
DRE: 121073530

Setembro de 2022

Questão 1

(a)

Podemos organizar cada evento como uma tupla da seguinte forma:

$$(f_a, f_b, f_c, f_d)$$

em que a, b, c e d são números de 1 até 6. O espaço amostra (Ω) será dado pela união de todas os eventos. Assim, teremos um número finito de opções, pois, para cada elemento da tupla, teremos seis opções de forma que o total é dado por 6^4. Nisso, podemos contar todos os eventos sendo o Ω discreto e finito.

(b)

Aqui, buscamos as somas possíveis ao se lançar quatro dados. Partindo do mínimo, temos o cenário em que a face 1 caiu por quatro vezes (soma 4): (f_1, f_1, f_1, f_1). Já para o caso máximo, o cenário em que o lado 6 cai por quatro vezes (soma 24): (f_6, f_6, f_6, f_6). Assim, o Ω é o conjunto das somas possíveis qua são os naturais de 4 até 24: $\Omega = \{4, 5, 6, \cdots, 24\}$. Portanto é discreto e finito.

(c)

A face 6 - como qualquer outra face - pode cair zero, uma, duas, três e quatro vezes. Nisso, é o conjunto dos inteiros de zero à quatro. $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Portanto é discreto e finito.

(d)

Podemos organizar isso em forma de tuplas de seis elementos q_i em que i é o número da face e q é a quantidade de vezes que a face caiu. Dessa forma, A soma de todos os $q's$ deve ser quatro. Como são números inteiros, teremos um Ω discreto e finito.

(e)

A quantidade de carros sempre será contável, portanto é discreto. Porém, uma moto pode aparecer na primeira vez que se passa um veículo, ou nunca. Portanto é infinito. O Ω é discreto e infinito.

(f)

Aqui, procuramos os pares ordanados (x, y) que estejam dentro do círculo de raio unitário.

$$\Omega = \{(x, y) \in \Re^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Nisso, temos um número infinito de pares ordenados que não são contáveis. Assim, o Ω é contínuo e infinito.

(g)

Aqui, como temos um círculo de raio unitário, sua distância ao centro estará no intervalo entre 0 e 1. $\Omega = [0, 1]$. Nisso, o Ω é contínuo e infinito.

(h)

Aqui, podemos organizar de forma que tenhamos tuplas com dois elementos. O primeiro será um número inteiro de o até 7 e o segundo será um valor em centímetros. Portanto Ω será contínuo, pelos valores da precipitação. E será infinito pelos valores das precipitações.

Questão 2

O espaço amostra (Ω) são todas as combinações de quatro bolas que se pode obter do baú. Assim, sendo X_i a bola de cor X retirada na posição i (X é A (azul) ou V (vermelho)), temos:

$$\Omega = \{(A_1, A_2, A_3, V_4), (A_1, A_2, V_3, V_4), (A_1, A_2, V_3, A_4), (V_1, A_2, A_3, V_4), (A_1, V_2, A_3, V_4), \cdots\}$$

O σ-álgebra pode ser o conjunto com todas as combinações dos elementos de Ω.
Para a probabilidade, podemos pensar em calcular todas as possíveis (com a quarta podendo ser vermelha) dado que a quarta é vermelha. Nisso, teremos:

$P(A_1, A_2, A_3/V_4) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap V_4)}{P(V_4)} = \frac{(3/6)(2/5)(1/4)(1)}{P(V_4)} = \frac{1/20}{P(V_4)}$

$P(A_1, A_2, V_3/V_4) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap V_3 \cap V_4)}{P(V_4)} = \frac{(3/6)(2/5)(3/4)(2/3)}{P(V_4)} = \frac{2/20}{P(V_4)}$

$P(A_1, V_2, A_3/V_4) = \frac{P(A_1 \cap V_2 \cap A_3 \cap V_4)}{P(V_4)} = \frac{(3/6)(3/5)(2/4)(2/3)}{P(V_4)} = \frac{2/20}{P(V_4)}$

$P(A_1, V_2, V_3/V_4) = \frac{P(A_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4)}{P(V_4)} = \frac{(3/6)(3/5)(2/4)(1/3)}{P(V_4)} = \frac{1/20}{P(V_4)}$

$P(V_1, A_2, A_3/V_4) = \frac{P(V_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap V_4)}{P(V_4)} = \frac{(3/6)(3/5)(2/4)(2/3)}{P(V_4)} = \frac{2/20}{P(V_4)}$

$P(V_1, A_2, V_3/V_4) = \frac{P(V_1 \cap A_2 \cap V_3 \cap V_4)}{P(V_4)} = \frac{(3/6)(3/5)(2/4)(1/3)}{P(V_4)} = \frac{1/20}{P(V_4)}$

$P(V_1, V_2, A_3/V_4) = \frac{P(V_1 \cap V_2 \cap A_3 \cap V_4)}{P(V_4)} = \frac{(3/6)(2/5)(3/4)(1/3)}{P(V_4)} = \frac{1/20}{P(V_4)}$

A soma de todas as probabilidades deve ser 1, portanto: $\frac{10/20}{P(V_4)} = 1$

Finalmente, temos que $P(V_4) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ ou 50%.

Questão 3

Para este experimento, o Ω será o conjunto dos pontos os quais estejam dentro do círculo de área 10.

$$\Omega = \{(x, y) \in \Re^2 \mid x^2 + y^2 \leq 10\}$$

para x e y em kilômetros. A σ-álgebra deste evento é a combinação de todos os pontos existentes no Ω. Já a probabilidade de que a chamada seja realizada numa área de 2Km é a área quista: $2^2\pi$ dividido pela área que contempla o Ω, que é $10^2\pi$. Isto nos dá $\frac{4\pi}{100\pi} = 4\%$.

Questão 4

Na questão, foram dados:

$$P(pescar/mar) = 0.8 \quad P(pescar/rio) = 0.4 \quad P(pescar/lago) = 0.6$$

Seja n_p o símbolo que representa não pescar, teríamos os seguintes dados:

$$P(n_p/mar) = 0.2 \quad P(n_p/rio) = 0.6 \quad P(n_p/lago) = 0.4$$

Sabemos que $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Assim, teremos:

$$P(n_p/mar) = 0.2 = \frac{P(n_p \cap mar)}{P(mar)} \quad P(n_p/rio) = 0.6 = \frac{P(n_p \cap rio)}{P(rio)} \quad P(n_p/lago) = 0.4 = \frac{P(n_p \cap lago)}{P(lago)}$$

Assim, temos, para todos os casos que:

$P(mar/n_p) \cdot P(n_p) = P(n_p \cap mar) = P(mar) \cdot 0.2 = \frac{1}{2} \cdot 0.2 = 0.1 \to P(mar/n_p) = \frac{0.1}{P(n_p)}$

$P(rio/n_p) \cdot P(n_p) = P(n_p \cap rio) = P(rio) \cdot 0.6 = \frac{1}{4} \cdot 0.6 = 0.15 \to P(rio/n_p) = \frac{0.15}{P(n_p)}$

$P(lago/n_p) \cdot P(n_p) = P(n_p \cap lago) = P(lago) \cdot 0.4 = \frac{1}{4} \cdot 0.4 = 0.1 \to P(lago/n_p) = \frac{0.1}{P(n_p)}$

Sabemos, também que $P(mar/n_p) + P(rio/n_p) + P(lago/n_p) = 1$, Portanto, $\frac{0.35}{P(n_p)} = 1 \to P(n_p) = 0.35$

Já vimos que para não ter havido pesca, é mais provável que ele tenha ido para o rio, pois $P(n_p/rio)$ é a maior. Calculando temos:

$P(n_p/rio) = 0.15/P(n_p) = \frac{3}{7}$

Questão 5

Anotando os valores, temos

$P(A) = 2/5$

$P(B) = 5/12$

$P(C) = 1/2$

$P(A \cap B) = 2/15$

$P(A \cap C) = 17/60$

$P(C \cap B) = 1/4$

$P(A \cap B \cap C) = 1/12$

(a)

Sabemos que para dois eventos X e Y serem independentes $P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$. Calculando, temos:

$P(A) \cdot P(B) = 1/6$

$P(A) \cdot P(C) = 1/5$

$P(C) \cdot P(B) = 5/24$

Veja que difere dos valores das interseções, sendo, portanto, eventos dependentes.

(b)

Sendo a interseção dos três eventos igual a 1/12, a chance de o cliente não comprar nenhum dos ítens é $1 - 1/12 = 11/12$

(c)

Queremos aqui $P(A/B)$ que se dá por $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/15}{5/12} = 8/25$

(d)

Queremos aqui $P((A \cap B)/C)$ que se dá por $\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{1/12}{1/2} = 1/6$

Questão 6

(a)

Podemos calcular o complementar de cada revisor e fazer o produto. Ao final, teremos a probabilidade de nenhum dos três perceba erro. Perceba que, podemos fazer isso, pois as avaliações de erro de cada revisor são eventos independentes.

$P(A^c \cap B^c \cap C^c) = (1 - 0.92) \cdot (1 - 0.85) \cdot (1 - 0.95) = 1 - P(pelo\ menos\ um)$

$P(pelo\ menos\ um) = 0.9994$

(b)

Será a soma de todos os casos em que dois revisam e um não:

$P(x) = 0.92 \cdot 0.85 \cdot (1 - 0.95) + 0.92 \cdot (1 - 0.85) \cdot 0.95 + (1 - 0.92) \cdot 0.85 \cdot 0.95 = 0.2348$

Questão 7

No total, existem $6 \cdot 6 = 36$ opções para as somas, de forma que, para a soma 7, teremos 6 opções. Nisso, a probabilidade de o jogador que inicia o jogo ganhar na primeira rodada é $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ sendo seu complementar (chance de não ser sete a soma) é $\frac{5}{6}$.

Vencer na primeira rodada: $\frac{1}{6}$

Vencer na segunda rodada: $\left(\frac{5}{6}\frac{5}{6}\right)\frac{1}{6}$

Vencer na terceira rodada: $\left(\frac{5}{6}\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\frac{5}{6}\right)\frac{1}{6}$

$\cdots$ e assim por diante.

De forma que, ao final, somando todas as possibilidades, tenhamos uma P.G. infinita de razão $\frac{25}{36}$ que é calculada por $\frac{1/6}{1-\frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$

Na mesma lógica anterior, teremos um múltiplo de três jogadas que não podem somar sete, seguida de uma que isto ocorre. Sendo assim:

Vencer na primeira rodada: $\frac{1}{6}$

Vencer na segunda rodada: $\left(\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\right)\frac{1}{6}$

Vencer na terceira rodada: $\left(\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\right)\frac{1}{6}$

$\cdots$ e assim por diante.

De forma que continuará sendo uma soma de P.G., porém, com razão $\frac{125}{216}$, que se dará por $\frac{1/6}{1-\frac{125}{216}} = \frac{36}{91}$