Quiz 2 - Estatística e Métodos Probabilísticos

Matheus Henrique SantAnna Cardoso

Setembro de 2022

1 Questão 1

(a) Vamos iniciar pensando no espaço amostra dos dois casos:

O Ω nesse caso será todas as possibilidades de soma de duas faces de dois dados, logo:

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

que são todas as possibilidades de soma.

A σ-álgebra mínima para a classe {A, B} será aquela que contempla os dois casos, devendo ter um caso com a união de todos os casos cuja soma é um número primo (A) e um subconjunto com o valor 7 (B).

O que deve ter no conjunto: $\emptyset, \Omega, \{7\}$ e $\{2, 3, 5, 7, 11\}$. Devemos adicionar, portanto, os complementares dos dois últimos conjuntos.

σ-álgebra mínima $= \{\emptyset, \Omega, \{7\}, \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}, \{2, 3, 5, 7, 11\}, \{4, 6, 8, 9, 10, 12\}\}$

(b) Os casos mostrados no Ω e na σ-álgebra não são equiprováveis. Veja que existem 36 $(6 \cdot 6)$ possibilidades para a queda dos dados.

Para o caso A, devemos calcular quantas possibilidades existem para cada soma cujo resultado é primo. Seja S_i o número de possibilidades de cair a soma i.

$$S_2 = 1$$
$$S_3 = 2$$
$$S_5 = 4$$
$$S_7 = 6$$
$$S_{11} = 2$$

Podemos, então, dizer que a soma de todos os casos primos será $S_{primo} = 1 + 2 + 4 + 6 + 2 = 15$. Dessa forma, a probabilidade da soma ser ímpar é $P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Já a probabilidade $P(B)$ de a soma ser 7 é $\frac{6}{36}$, sendo todas as possibilidades de a soma ser 7 dividido por todos os casos. Assim $P(B) = \frac{1}{6}$.

Agora, devemos calcular $P(A/B)$, que é a probalilidade de a soma ser primo dado que vale 7. Ora, se já sabemos que vale 7, a soma é um número primo. Portanto, $P(A/B) = 1$, pois é certo que será primo.

Finalmente, devemos calcular $P(B/A)$, que é a probalilidade de ser 7 dado que é primo. Nisso, podemos utilizar o resultado anterior para fazer:

$$\begin{aligned}
P(B/A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \\
P(A/B) &= \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = 1 \text{ do último ítem} \\
P(B \cap A) &= P(B) \\
P(B/A) &= \frac{P(B)}{P(A)} \\
P(B/A) &= \frac{1/6}{5/12} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Assim, chegamos ao resultado que $P(B/A) = \frac{2}{5}$

(c) Para sabermos se não são mutuamente exclusivos, basta termos um evento que é comum aos dois. Nisso, é fácil ver que quando ocorre o evento cuja soma é 7, ambos os casos (A e B) são satisfeitos, pois é primo (A) e vale 7 (B). Dessa forma, nota-se que os eventos não são mutuamente exclusivos.

Além disso, pensando logicamente, percebemos que os eventos não são independentes. Perceba que se o número não for primo, necessariamente não poderá ser 7. Ao contrário, caso a soma seja 7, necessariamente será primo. Matematicamente, fazemos:

$$P(A) = \frac{5}{12}$$

$$P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Veja, finalmente, que $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$. Mostrando que os eventos não são independentes.