

# Estatística e Modelos Probabilísticos - Quiz 3

Matheus Henrique Sant'Anna Cardoso

DRE: 121073530

Novembro de 2022

# Questão 1

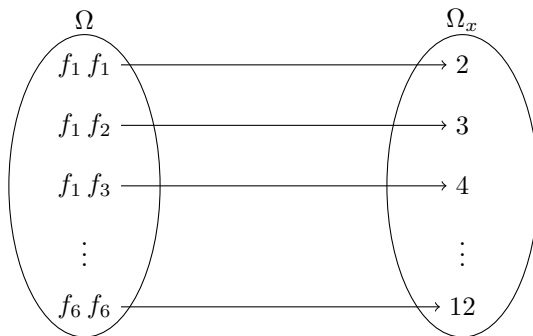
Considere o lançamento de dois dados e a experiência cujo resultado consiste na soma do número de pontos da face superior dos dados. Resolva:

a. Modele com uma v.a. esta soma.

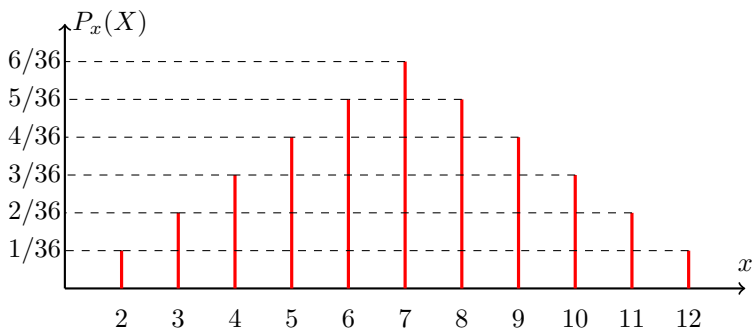
Aqui, o espaço amostra da variável aleatória pode ser dado por:

$$\Omega_x = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

De forma que, possamos, de cada par  $f_i f_j$  com  $i, j = 1, 2, \dots, 6$  apontar para uma soma  $i + j$ .



b. Encontre e esboce sua distribuição de probabilidade.



c. Encontre e esboce a Função Distribuição de Probabilidades (F.D.P.)

Sabemos que:

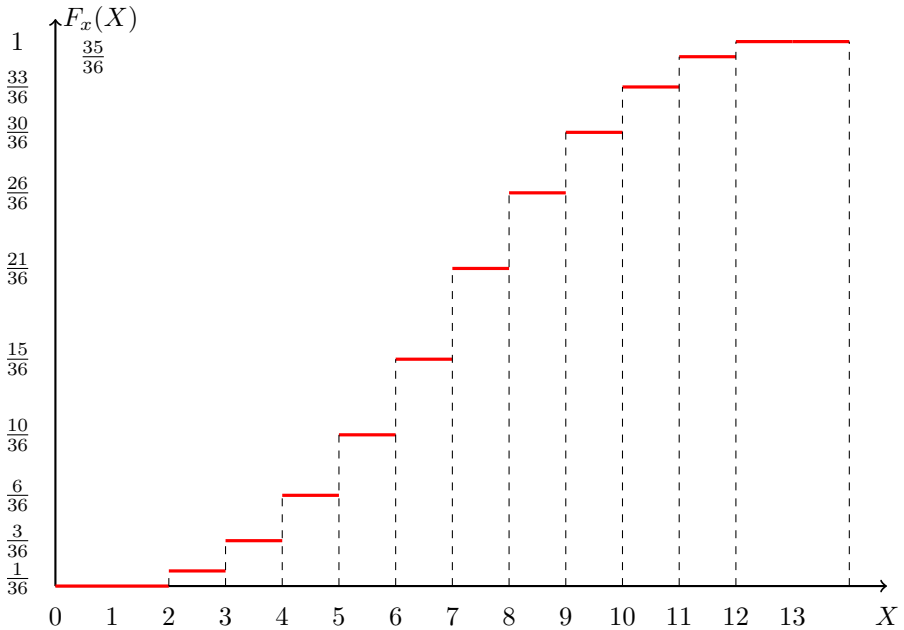
$$F_x(X) = \sum_i P(x = X_i) u_{-1}(X - X_i)$$

Então,

$$F_x(X) = P(2)u_{-1}(X - 2) + P(3)u_{-1}(X - 3) + \cdots P(12)u_{-1}(X - 12) =$$

$$F_x(X) = \frac{1}{36}u_{-1}(X - 2) + \frac{2}{36}u_{-1}(X - 3) + \cdots + \frac{1}{36}u_{-1}(X - 12)$$

Esboçando a Função Distribuição de Probabilidades, temos:



**d.** Encontre e esboce a função densidade de probabilidades (f.d.p.)

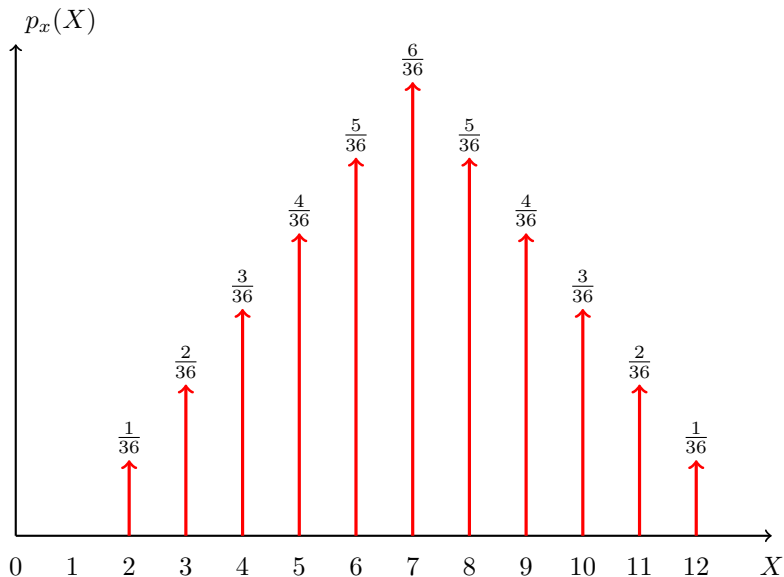
Sabemos que  $p_x(X) = \frac{dF_x(X)}{dX}$ . Dessa forma, vamos derivar a F.D.P. para obtermos f.d.p.

$$p_x(X) = \frac{1}{36} \frac{du(X - 2)}{dX} + \frac{2}{36} \frac{du(X - 3)}{dX} + \frac{3}{36} \frac{du(X - 4)}{dX} + \cdots + \frac{1}{36} \frac{du(X - 12)}{dX}$$

Assim:

$$p_x(X) = \frac{1}{36}\delta(X-2) + \frac{2}{36}\delta(X-3) + \frac{3}{36}\delta(X-4) + \cdots + \frac{1}{36}\delta(X-12)$$

Esboçando, teremos:



e. Calcule a probabilidade de obter um valor no intervalo  $[7, 9]$ .

Deveremos calcular a probabilidade para que  $7 \leq X \leq 9$ .

$$P_x(7 \leq X \leq 9) = F_x(9) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_x(7 - \epsilon)$$

$$P_x(7 \leq X \leq 9) = \frac{30}{36} - \frac{15}{36} = \frac{15}{36}$$

$$P_x(7 \leq X \leq 9) = \frac{5}{12}$$

## Questão 2

Seja  $x$  uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$P(x = X) = \frac{c}{4^x}, X = 0, 1, \dots$$

Obtenha:

**a.** O valor de  $c$ .

Para que isso possa expressar uma probabilidade, deve cumprir o fato de que a soma de todos os casos vale 1. Assim, façamos a soma para infinitos termos.

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{c}{4^x} = 1$$

$$c \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{4^x} = 1$$

Sabe-se que o somatório acima é a soma de infinitos termos de uma P.G. infinita, que é dada por  $\frac{a_1}{1-q}$  em que  $a_1$  é o primeiro termo e  $q$  a razão. Então

$$c \left( \frac{1}{1 - 1/4} \right) = 1$$

$$c = \frac{3}{4}$$

**b.** A probabilidade de  $x$  ser um número par.

Sabemos que o valor de  $c$  é  $\frac{3}{4}$ . Queremos agora que  $X$  assuma os valores  $0, 2, 4, 6, \dots$  tendo uma outra P.G. infinita. Assim:

$$P(x_{par}) = \frac{3}{4} \left( \frac{1}{4^0} + \frac{1}{4^2} + \dots \right)$$

sendo, novamente, uma P.G. infinita, com razão  $\frac{1}{16}$  e primeiro termo 1. Dessa forma:

$$P(x_{par}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - 1/16} = \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{15} = \frac{4}{5}$$

### Questão 3

Seja  $x$  uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$p_x(X) = \begin{cases} c(1 - x^2); & -1 < x < 1 \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}$$

**a.** Qual o valor de  $c$ ?

Aqui, sabemos que a integral de  $p_x(X)$  é igual a 1. Portanto:

$$c \int_{-1}^1 p_x(X) dx = 1$$

$$c \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 1$$

$$c \cdot \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 1$$

$$c \cdot \frac{4}{3} = 1$$

$$c = \frac{3}{4}$$

**b.** qual é a Função Distribuição Cumulativa de  $x$ ?

Sabemos que

$$F_x(X) = \int_{-\infty}^X p_x(X) dx$$

que, para efeitos desta questão, é o mesmo que

$$F_x(X) = \int_{-1}^X \frac{3}{4} \cdot (1 - x^2) dx$$

Sabendo que, para isso,  $X \leq 1$ .

$$F_x(X) = \frac{3}{4} \cdot \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^X$$

$$F_x(X) = \frac{3}{4} \cdot \left( -\frac{X^3}{3} + X + \frac{2}{3} \right)$$

$$F_x(X) = -\frac{X^3}{4} + \frac{3X}{4} + \frac{1}{2}$$

## Questão 4

Quinze pessoas portadoras de determinada doença são selecionadas para se submeter a um tratamento. Este tratamento é eficaz na cura da doença em 80% dos casos. Suponha que os indivíduos submetidos ao tratamento se curam (ou não) independentes uns dos outros.

**a.** Modelar com uma v.a. o número de curados  $x$  dentre os 15 pacientes submetidos ao tratamento.

$$\Omega_x = \{0, 1, 2, \dots, 15\}$$

Os sucessos serão os casos descritos em  $\Omega_x$ .

**b.** Qual a distribuição de  $x$ ?

Queremos obter a probabilidade de  $x = K$  pacientes alcançarem sucesso - que seria a cura. Podemos modelar da seguinte forma:

$$P(x = K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$$

Aqui, escolhemos  $K$  pacientes dentre 15. Fazemos o produto dos  $p$ 's  $K$  vezes - escolhendo  $K$  que obtiveram sucesso, ou seja,  $1 - K$  que não obtiveram sucesso.

Por fim, teremos:

$$P(x = K) = \binom{15}{K} p^K (1-p)^{15-K}$$

**c.** Qual a probabilidade de que os 15 pacientes sejam curados?

Da fórmula anterior, obtemos:

$$P(x = 15) = \binom{15}{15} 0.8^{15} \cdot (1 - 0.8)^{15-15}$$

$$P(x = 15) = 0.8^{15} = 0.03518$$

$$P(x = 15) \approx 3.52\%$$

**d.** Qual a probabilidade de que pelo menos dois não sejam curados?

Aqui, queremos  $P(x \leq 13)$ .

Porém, sabemos que

$$P(x \leq 13) = 1 - P(x > 13) = 1 - P(x = 14) - P(x = 15)$$

$$P(x \leq 13) = 1 - (1 \cdot (0.8)^{14} \cdot (0.2)^1) - 0.03518$$

$$P(x \leq 13) = 1 - 0.00879 - 0.03518 = 0.956$$

$$P(x \leq 13) \approx 95.6\%$$

## Questão 5

Seja  $x$  o número de ensaios necessários para obter o primeiro sucesso quando se realiza uma sequência de ensaios de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso  $p$ .

**a.** Deduza o modelo de distribuição de probabilidades conhecida como geométrica.

Aqui, teremos um modelo similar ao da questão anterior, porém, não iremos escolher quando haverá sucesso. Dessa forma, teremos

$$P(x) = (1 - p)^{x-1}p$$

Sendo que há fracasso em  $x - 1$  vezes e sucesso apenas uma vez, sendo a última.

**b.** Mostre que a somatória das probabilidades da distribuição geométrica é igual a 1.



Vamos, então, calcular a somatória para infinitos valores de  $X$ . Queremos, então:

$$\sum_{X=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} p = p \cdot \sum_{X=1}^{\infty} (1-p)^{x-1}$$

Caímos, aqui, em uma P.G. infinita, com primeiro termo 1 e razão  $1-p$ .

$$p \cdot \sum_{X=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1$$

## Questão 6

Um amperímetro digital tem uma escala que vai de -5 a +5 Ampère e tem a precisão de apenas um dígito, isto é, indica valores inteiros de corrente. Assim, ao se fazer uma medida, o aparelho aproxima o valor real da corrente para o valor inteiro mais próximo. Determine a probabilidade de que o erro na medida seja superior a 0.2 Ampère. Considere que a função densidade de probabilidade da corrente na entrada do amperímetro seja a mostrada na figura 4.

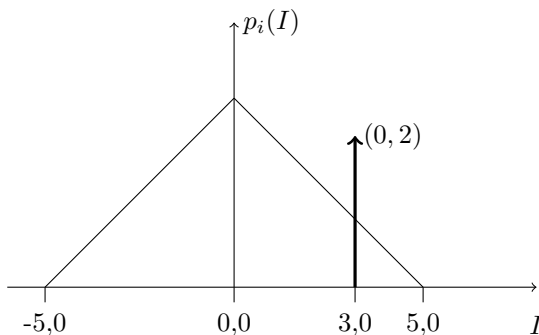
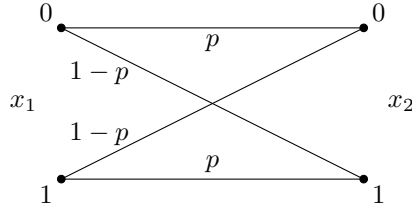


Figura 4

## Questão 7

No canal binário da figura, a v.a.  $x_1$  representa os dígitos transmitidos e a v.a.  $x_2$  os dígitos recebidos. Os bits recebidos podem estar alterados devido ao ruído no canal.



- Determine os eventos  $A_x$  para um vetor aleatório bidimensional que represente este experimento.
- Encontre a distribuição de probabilidades e a F.D.P conjuntas, considerando que a probabilidade de transmissão de cada um dos dígitos é igual, e que o ruído do canal pode ser caracterizado pelas probabilidades condicionadas mostradas na figura.
- Encontre a distribuição de probabilidades e a F.D.P de cada v.a.

## Questão 8

Encontre a distribuição de probabilidades marginal  $P_x(K)$ , sabendo que:

$$P_{xy}(K, L) = \begin{cases} \frac{2 \left[ \frac{K}{K+1} \right]^L}{n(n+1)} & K = 0, 1, \dots, n-1; L \geq 0 \\ 0 & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Observação

$$P_x(X_i) = \sum_j P_{xy}(X_i, Y_j), \quad P_y(Y_j) = \sum_i P_{xy}(X_i, Y_j)$$

## Questão 9

Dois usuários A e B solicitam serviços a um determinado provedor. Considere que as v.a.'s  $x$  e  $y$  caracterizam, respectivamente, os tempos (em segundos) necessários para a execução dos serviços solicitados pelos usuários A e B. Suponha que a densidade de probabilidade conjunta das v.a.'s  $x$  e  $y$  seja dada por:

$$p_{xy}(X, Y) = Ke^{-(3X+2Y)}u(X)u(Y)$$

Sabe-se que quando um serviço é solicitado ao provedor, a probabilidade de que a solicitação venha de A vale 0.6, valendo, portanto 0.4 a probabilidade de que ela venha de B.

- a. Determine o valor da constante  $K$ .
- b. Calcule a probabilidade de que a execução de um serviço solicitado ao provedor requeira um tempo superior a 0.5 segundos.
- c. Calcule a probabilidade de que uma solicitação de serviço venha do usuário A sabendo-se que sua execução requer um tempo maior do que 0.5 segundos.

## Questão 10

Se  $x$  é uma variável aleatória normal (gaussiana) com parâmetros  $\mu = 10$  e  $\sigma^2 = 36$ , calcule:

- a.  $P(x > 5)$
- b.  $P(4 < x < 16)$
- c.  $P(x < 8)$
- d.  $P(x < 20)$
- e.  $P(x > 16)$