

Estatística e Modelos Probabilísticos - Quiz 3

Matheus Henrique Sant'Anna Cardoso

DRE: 121073530

Novembro de 2022

Questão 1

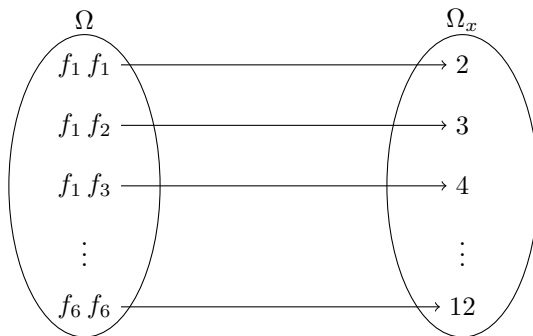
Considere o lançamento de dois dados e a experiência cujo resultado consiste na soma do número de pontos da face superior dos dados. Resolva:

a. Modele com uma v.a. esta soma.

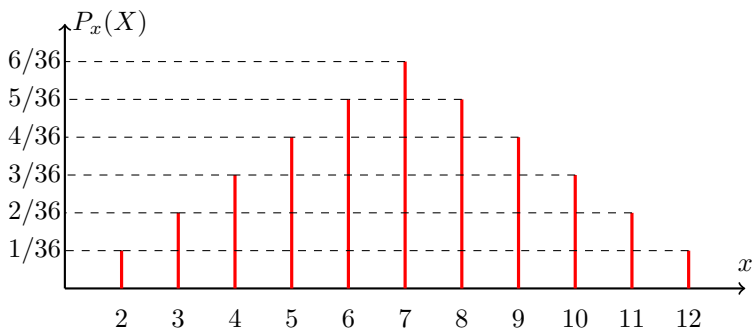
Aqui, o espaço amostra da variável aleatória pode ser dado por:

$$\Omega_x = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

De forma que, possamos, de cada par $f_i f_j$ com $i, j = 1, 2, \dots, 6$ apontar para uma soma $i + j$.



b. Encontre e esboce sua distribuição de probabilidade.



c. Encontre e esboce a Função Distribuição de Probabilidades (F.D.P.)

Sabemos que:

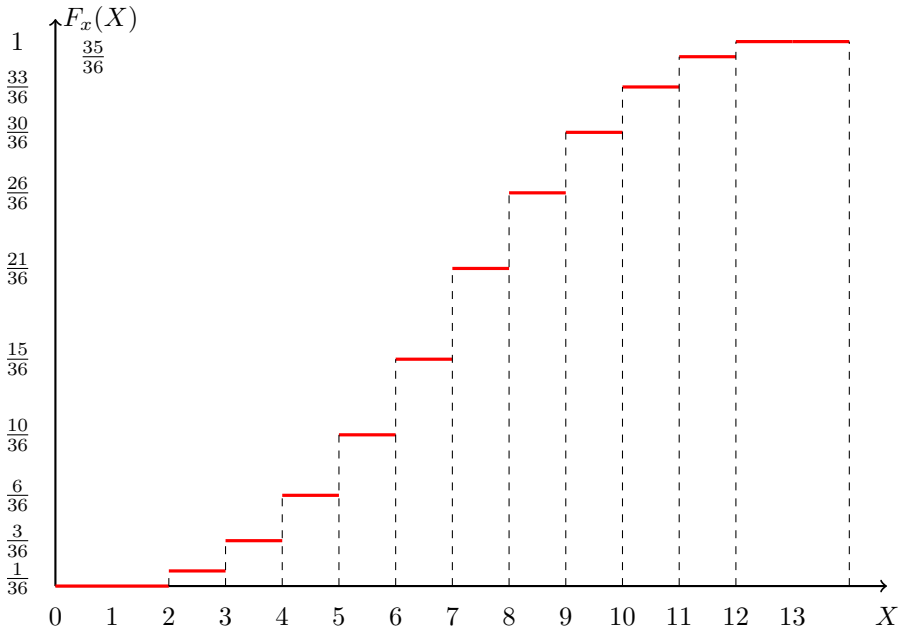
$$F_x(X) = \sum_i P(x = X_i) u_{-1}(X - X_i)$$

Então,

$$F_x(X) = P(2)u_{-1}(X - 2) + P(3)u_{-1}(X - 3) + \cdots P(12)u_{-1}(X - 12) =$$

$$F_x(X) = \frac{1}{36}u_{-1}(X - 2) + \frac{2}{36}u_{-1}(X - 3) + \cdots + \frac{1}{36}u_{-1}(X - 12)$$

Esboçando a Função Distribuição de Probabilidades, temos:



d. Encontre e esboce a função densidade de probabilidades (f.d.p.)

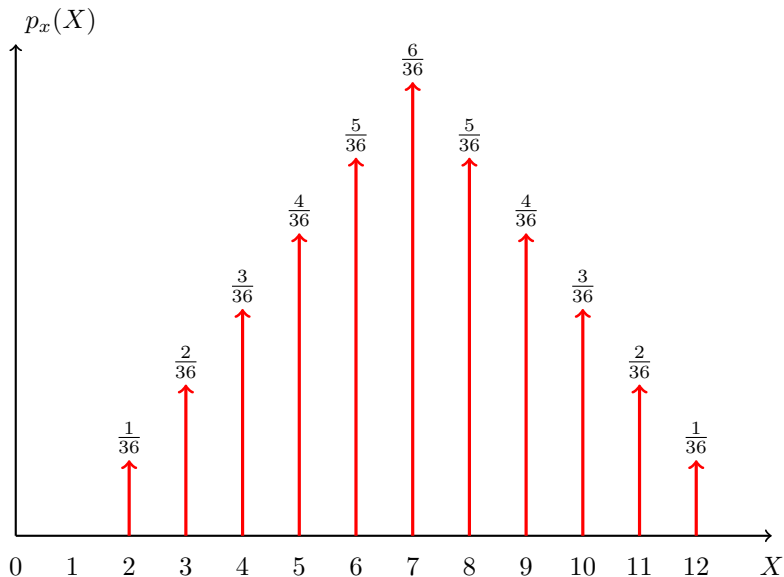
Sabemos que $p_x(X) = \frac{dF_x(X)}{dX}$. Dessa forma, vamos derivar a F.D.P. para obtermos f.d.p.

$$p_x(X) = \frac{1}{36} \frac{du(X - 2)}{dX} + \frac{2}{36} \frac{du(X - 3)}{dX} + \frac{3}{36} \frac{du(X - 4)}{dX} + \cdots + \frac{1}{36} \frac{du(X - 12)}{dX}$$

Assim:

$$p_x(X) = \frac{1}{36}\delta(X-2) + \frac{2}{36}\delta(X-3) + \frac{3}{36}\delta(X-4) + \cdots + \frac{1}{36}\delta(X-12)$$

Esboçando, teremos:



e. Calcule a probabilidade de obter um valor no intervalo $[7, 9]$.

Deveremos calcular a probabilidade para que $7 \leq X \leq 9$.

$$P_x(7 \leq X \leq 9) = F_x(9) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_x(7 - \epsilon)$$

$$P_x(7 \leq X \leq 9) = \frac{30}{36} - \frac{15}{36} = \frac{15}{36}$$

$$P_x(7 \leq X \leq 9) = \frac{5}{12}$$

Questão 2

Seja x uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$P(x = X) = \frac{c}{4^x}, X = 0, 1, \dots$$

Obtenha:

a. O valor de c .

Para que isso possa expressar uma probabilidade, deve cumprir o fato de que a soma de todos os casos vale 1. Assim, façamos a soma para infinitos termos.

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{c}{4^x} = 1$$

$$c \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{4^x} = 1$$

Sabe-se que o somatório acima é a soma de infinitos termos de uma P.G. infinita, que é dada por $\frac{a_1}{1-q}$ em que a_1 é o primeiro termo e q a razão. Então

$$c \left(\frac{1}{1 - 1/4} \right) = 1$$

$$c = \frac{3}{4}$$

b. A probabilidade de x ser um número par.

Sabemos que o valor de c é $\frac{3}{4}$. Queremos agora que X assumam os valores $0, 2, 4, 6, \dots$ tendo uma outra P.G. infinita. Assim:

$$P(x_{par}) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4^0} + \frac{1}{4^2} + \dots \right)$$

sendo, novamente, uma P.G. infinita, com razão $\frac{1}{16}$ e primeiro termo 1. Dessa forma:

$$P(x_{par}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - 1/16} = \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{15} = \frac{4}{5}$$

Questão 3

Seja x uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$p_x(X) = \begin{cases} c(1 - x^2); & -1 < x < 1 \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}$$

a. Qual o valor de c ?

Aqui, sabemos que a integral de $p_x(X)$ é igual a 1. Portanto:

$$c \int_{-1}^1 p_x(X) dx = 1$$

$$c \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 1$$

$$c \cdot \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 1$$

$$c \cdot \frac{4}{3} = 1$$

$$c = \frac{3}{4}$$

b. qual é a Função Distribuição Cumulativa de x ?

Sabemos que

$$F_x(X) = \int_{-\infty}^X p_x(X) dx$$

que, para efeitos desta questão, é o mesmo que

$$F_x(X) = \int_{-1}^X \frac{3}{4} \cdot (1 - x^2) dx$$

Sabendo que, para isso, $X \leq 1$.

$$F_x(X) = \frac{3}{4} \cdot \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^X$$

$$F_x(X) = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{X^3}{3} + X + \frac{2}{3} \right)$$

$$F_x(X) = -\frac{X^3}{4} + \frac{3X}{4} + \frac{1}{2}$$

Questão 4

Quinze pessoas portadoras de determinada doença são selecionadas para se submeter a um tratamento. Este tratamento é eficaz na cura da doença em 80% dos casos. Suponha que os indivíduos submetidos ao tratamento se curam (ou não) independentes uns dos outros.

a. Modelar com uma v.a. o número de curados x dentre os 15 pacientes submetidos ao tratamento.

$$\Omega_x = \{0, 1, 2, \dots, 15\}$$

O σ -álgebra são todas as combinações possíveis de uma pessoa.

Os sucessos serão os casos descritos em Ω_x .

b. Qual a distribuição de x ?

Queremos obter a probabilidade de $x = K$ pacientes alcançarem sucesso - que seria a cura. Podemos modelar da seguinte forma:

$$P(x = K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$$

Aqui, escolhemos K pacientes dentre 15. Fazemos o produto dos p 's K vezes - escolhendo K que obtiveram sucesso, ou seja, $1 - K$ que não obtiveram sucesso.

Por fim, teremos:

$$P(x = K) = \binom{15}{K} p^K (1-p)^{15-K}$$

c. Qual a probabilidade de que os 15 pacientes sejam curados?

Da fórmula anterior, obtemos:

$$P(x = 15) = \binom{15}{15} 0.8^{15} \cdot (1 - 0.8)^{15-15}$$

$$P(x = 15) = 0.8^{15} = 0.03518$$

$$P(x = 15) \approx 3.52\%$$

d. Qual a probabilidade de que pelo menos dois não sejam curados?

Aqui, queremos $P(x \leq 13)$.

Porém, sabemos que

$$P(x \leq 13) = 1 - P(x > 13) = 1 - P(x = 14) - P(x = 15)$$

$$P(x \leq 13) = 1 - (1 \cdot (0.8)^{14} \cdot (0.2)^1) - 0.03518$$

$$P(x \leq 13) = 1 - 0.00879 - 0.03518 = 0.956$$

$$P(x \leq 13) \approx 95.6\%$$

Questão 5

Seja x o número de ensaios necessários para obter o primeiro sucesso quando se realiza uma sequência de ensaios de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso p .

a. Deduza o modelo de distribuição de probabilidades conhecida como geométrica. Aqui, teremos um modelo similar ao da questão anterior, porém, não iremos escolher quando haverá sucesso. Dessa forma, teremos

$$P(x) = (1 - p)^{x-1} p$$

Sendo que há fracasso em $x - 1$ vezes e sucesso apenas uma vez, sendo a última.

b. Mostre que a somatória das probabilidades da distribuição geométrica é igual a 1.

Vamos, então, calcular a somatória para infinitos valores de X . Queremos, então:

$$\sum_{X=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} p = p \cdot \sum_{X=1}^{\infty} (1-p)^{x-1}$$

Caímos, aqui, em uma P.G. infinita, com primeiro termo 1 e razão $1-p$.

$$p \cdot \sum_{X=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1$$

Questão 6

Um amperímetro digital tem uma escala que vai de -5 a +5 Ampère e tem a precisão de apenas um dígito, isto é, indica valores inteiros de corrente. Assim, ao se fazer uma medida, o aparelho aproxima o valor real da corrente para o valor inteiro mais próximo. Determine a probabilidade de que o erro na medida seja superior a 0.2 Ampère. Considere que a função densidade de probabilidade da corrente na entrada do amperímetro seja a mostrada na figura 4.

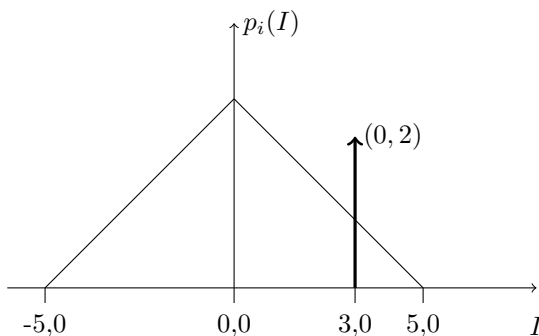


Figura 4

É preciso, primeiramente, refazermos a figura acima, sabendo o valor de $p_i(0)$, que não é mostrado. Assim, sabendo que

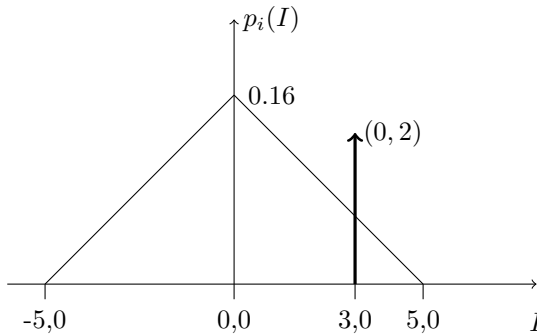
$$\int_{-\infty}^{\infty} p_i(I) di = 1$$

ou, mais convenientemente, que a área do triângulo somada a integral do impulso de amplitude 0.2 deve ser 1.

$$\frac{10c}{2} + 0.2 = 1$$

$$c = 0.16$$

Então, recriando a figura, teremos



Agora, temos uma figura clara e podemos calcular as áreas nos intervalos em que o problema exige. Precisamos das áreas que contemplam o fato de estarem entre $X.2$ e $X.8$.

Na primeira parte do gráfico, este segue a função $p_i(I) = 0.032I + 0.16$.

Já, na segunda parte do gráfico, temos uma função da forma $-0.032I + 0.16$.

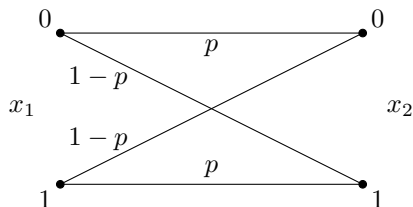
Por partes, calculemos as áreas dos intervalos:

$$\begin{aligned}
\frac{(p_i(-4.8) + p_i(-4.2)) \cdot 0.6}{2} &= 0.0096 \\
\frac{(p_i(-3.8) + p_i(-3.2)) \cdot 0.6}{2} &= 0.0288 \\
\frac{(p_i(-2.8) + p_i(-2.2)) \cdot 0.6}{2} &= 0.048 \\
\frac{(p_i(-1.8) + p_i(-1.2)) \cdot 0.6}{2} &= 0.0672 \\
\frac{(p_i(-0.8) + p_i(-0.2)) \cdot 0.6}{2} &= 0.0864 \\
\frac{(p_i(0.2) + p_i(0.8)) \cdot 0.6}{2} &= 0.0864 \\
\frac{(p_i(1.2) + p_i(1.8)) \cdot 0.6}{2} &= 0.0672 \\
\frac{(p_i(2.2) + p_i(2.8)) \cdot 0.6}{2} &= 0.048 \\
\frac{(p_i(3.2) + p_i(3.8)) \cdot 0.6}{2} &= 0.0288 \\
\frac{(p_i(4.2) + p_i(4.8)) \cdot 0.6}{2} &= 0.0096
\end{aligned}$$

Somando os valores, obtemos 0.48, sendo essa a probabilidade pedida.

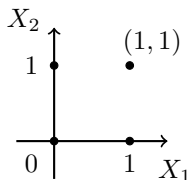
Questão 7

No canal binário da figura, a v.a. x_1 representa os dígitos transmitidos e a v.a. x_2 os dígitos recebidos. Os bits recebidos podem estar alterados devido ao ruído no canal.



a. Determine os eventos A_x para um vetor aleatório bidimensional que represente este experimento.

Vamos fazer um simples gráfico, representando o problema:



Disso, notamos o espaço amostra do problema, dado por quatro vetores:

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Seja R_1 a região que contempla a condição $X_1 < 0$ ou $X_2 < 0$.

Seja R_2 a região que contempla a condição $0 \leq X_1 < 1$ e $0 \leq X_2 < 1$.

Seja R_3 a região que contempla a condição $0 \leq X_1 < 1$ e $X_2 \geq 1$.

Seja R_4 a região que contempla a condição $X_1 \geq 1$ e $0 \leq X_2 < 1$.

Seja R_5 a região que contempla a condição $X_1 \geq 1$ e $X_2 \geq 1$.

Aqui, definimos uma álgebra de eventos A_x :

$$A_x = \begin{cases} \{\emptyset\} & \underline{X} \in R_1 \\ \{(0,0)\} & \underline{X} \in R_2 \\ \{(0,0), (0,1)\} & \underline{X} \in R_3 \\ \{(0,0), (1,0)\} & \underline{X} \in R_4 \\ \Omega & \underline{X} \in R_5 \end{cases}$$

b. Encontre a distribuição de probabilidades e a F.D.P conjuntas, considerando que a probabilidade de transmissão de cada um dos dígitos é igual, e que o ruído do canal pode ser caracterizado pelas probabilidades condicionadas mostradas na figura.

A probabilidade do valor transmitido ser 0 é $\frac{1}{2}$, igual a de ser 1. Multiplicamos por p se o valor for recebido for igual ao transmitido, e por $1 - p$ caso o contrário. Dessa forma a distribuição de probabilidades fica:

$$\begin{aligned}P((0, 0)) &= \frac{1}{2}p \\P((0, 1)) &= \frac{1}{2}(1 - p) \\P((1, 0)) &= \frac{1}{2}(1 - p) \\P((1, 1)) &= \frac{1}{2}p\end{aligned}$$

Obtendo a distribuição de probabilidades. Fazendo a F.D.P:

$$F_{x_1|x_2}(X) = \begin{cases} P(\{\emptyset\}) = 0 & \underline{X} \in R_1 \\ P(\{(0, 0)\}) = \frac{p}{2} & \underline{X} \in R_2 \\ P(\{(0, 0), (0, 1)\}) = \frac{1}{2} & \underline{X} \in R_3 \\ P(\{(0, 0), (1, 0)\}) = \frac{1}{2} & \underline{X} \in R_4 \\ P(\Omega) = 1 & \underline{X} \in R_5 \end{cases}$$

c. Encontre a distribuição de probabilidades e a F.D.P de cada v.a.

Vamos encontrar, primeiramente a F.D.P. de cada uma v.a, sabendo que:

$$F_{x_1}(X_1) = \lim_{X_2 \rightarrow \infty} F_{x_1|x_2}(X_1, X_2) = \begin{cases} 0 & X_1 \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2} & X_1 \in [0, 1) \\ 1 & X_1 \in [1, \infty) \end{cases}$$

$$F_{x_1}(X_1) = \frac{1}{2} \cdot u_{-1}(X_1) + \frac{1}{2} \cdot u_{-1}(X_1 - 1)$$

$$F_{x_2}(X_2) = \lim_{X_1 \rightarrow \infty} F_{x_1|x_2}(X_1, X_2) = \begin{cases} 0 & X_2 \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2} & X_2 \in [0, 1) \\ 1 & X_2 \in [1, \infty) \end{cases}$$

$$F_{x_2}(X_2) = \frac{1}{2} \cdot u_{-1}(X_2) + \frac{1}{2} \cdot u_{-1}(X_2 - 1)$$

E agora, as distribuições de probabilidade:

$$P(X_1) = \frac{1}{2}\delta(X_1) + \frac{1}{2}\delta(X_1 - 1)$$

$$P(X_2) = \frac{1}{2}\delta(X_2) + \frac{1}{2}\delta(X_2 - 1)$$

Questão 8

Encontre a distribuição de probabilidades marginal $P_x(K)$, sabendo que:

$$P_{xy}(K, L) = \begin{cases} \frac{2 \left[\frac{K}{K+1} \right]^L}{n(n+1)} & K = 0, 1, \dots, n-1; L \geq 0 \\ 0 & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Observação

$$P_x(X_i) = \sum_j P_{xy}(X_i, Y_j), \quad P_y(Y_j) = \sum_i P_{xy}(X_i, Y_j)$$

Aqui, como faremos o somatório para os valores de L que pertence aos reais,

podemos substituir o somatório por uma integral:

$$\begin{aligned}
 P_x(K) &= \int_0^\infty \frac{2 \left[\frac{K}{K+1} \right]^L}{n(n+1)} dL \\
 P_x(K) &= \frac{2}{n(n+1)} \int_0^\infty \left[\frac{K}{K+1} \right]^L dL \\
 P_x(K) &= \frac{2}{n(n+1)} \left[\frac{\left[\frac{K}{K+1} \right]^L}{\ln \frac{K}{K+1}} \right]_0^\infty \\
 P_x(K) &= \frac{2 \left(\ln \frac{K}{K+1} \right)^{-1}}{n(n+1)}, K = 0, 1, 2, \dots, n-1
 \end{aligned}$$

Questão 9

Dois usuários A e B solicitam serviços a um determinado provedor. Considere que as v.a.'s x e y caracterizam, respectivamente, os tempos (em segundos) necessários para a execução dos serviços solicitados pelos usuários A e B. Suponha que a densidade de probabilidade conjunta das v.a.'s x e y seja dada por:

$$p_{xy}(X, Y) = K e^{-(3X+2Y)} u(X) u(Y)$$

Sabe-se que quando um serviço é solicitado ao provedor, a probabilidade de que a solicitação venha de A vale 0.6, valendo, portanto 0.4 a probabilidade de que ela venha de B.

a. Determine o valor da constante K .

Sabemos que a integral dupla da função densidade de probabilidade deve ser 1,

assim:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dY \int_{-\infty}^{\infty} K e^{-(3X+2Y)} u(X) u(Y) dX &= 1 \\
 \int_{-\infty}^{\infty} dY k e^{-2Y} u(Y) \cdot \left[-\frac{e^{-3X}}{3} \right]_0^{\infty} &= 1 \\
 \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} k e^{-2Y} u(Y) dY &= 1 \\
 \frac{1}{3} \cdot k \left[\frac{e^{-2Y}}{2} \right]_0^{\infty} &= 1 \\
 \frac{k}{6} &= 1 \\
 k &= 6
 \end{aligned}$$

b. Calcule a probabilidade de que a execução de um serviço solicitado ao provedor requeira um tempo superior a 0.5 segundos.

c. Calcule a probabilidade de que uma solicitação de serviço venha do usuário A sabendo-se que sua execução requer um tempo maior do que 0.5 segundos.

Questão 10

Se x é uma variável aleatória normal (gaussiana) com parâmetros $\mu = 10$ e $\sigma^2 = 36$, calcule:

Antes de tudo, se x é variável aleatória normal, então

$$p_x(X) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{72}}$$

a. $P(x > 5)$

b. $P(4 < x < 16)$

c. $P(x < 8)$

d. $P(x < 20)$

e. $P(x > 16)$