

# Estatística e Modelos Probabilísticos - Quiz 4

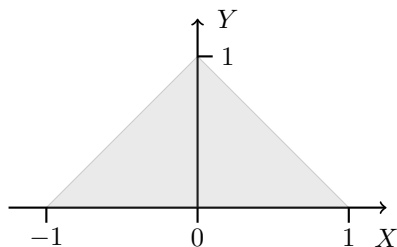
Matheus Henrique Sant'Anna Cardoso

DRE: 121073530

Novembro de 2022

## Questão 1

Considere duas variáveis aleatórias  $x$  e  $y$  com função densidade de probabilidade conjunta constante e diferente de zero apenas na área hachurada da figura. Determine o valor de  $p_{xy}(X, Y)$  na área hachurada de figura. Encontre a função densidade de probabilidade  $p_x(X)$  da variável aleatória  $x$ . Determine a função densidade de probabilidade condicional  $p_{x|M}(X)$  onde  $M$  é o evento definido por  $M = \{0.4 < y < 0.6\}$ .



Sendo a probabilidade conjunta uma constante, chamemos de  $k$ . Assim:

$$p_{xy}(X, Y) = k$$

Disso, vem:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(X, Y) dX dY &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k dX dY &= 1 \\ \int_{-1}^0 \int_0^{X+1} k dY dX + \int_0^1 \int_0^{-X+1} k dY dX &= 1 \\ \int_{-1}^0 (X+1)k dX + \int_0^1 (-X+1)k dX &= 1 \\ k \left[ \frac{X^2}{2} + X \right]_{-1}^0 + k \left[ -\frac{X^2}{2} + X \right]_0^1 &= 1 \end{aligned}$$

$$k \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = 1$$

$$k = 1$$

$$\boxed{p_{xy}(X, Y) = 1}$$

Sigamos para o cálculo de  $p_x(X)$  da área hachurada.

$$p_x(X) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(X, Y) dY$$

$$\boxed{p_x(X) = \begin{cases} \int_0^{X+1} 1 dY = X + 1 & -1 \leq X \leq 0 \\ \int_0^{-X+1} 1 dY = -X + 1 & 0 < X \leq 1 \end{cases}}$$

Agora, calculemos  $p_{x|M}(X)$ .

Antes, vejamos  $p_y(Y)$

$$p_y(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(X, Y) dX$$

$$p_y(Y) = \int_{Y-1}^0 1 dX + \int_0^{-Y+1} 1 dX \quad 0 \leq Y \leq 1$$

$$p_y(Y) = (-Y + 1) + (-Y + 1)$$

$$p_y(Y) = 2(-Y + 1) \quad 0 \leq Y \leq 1$$

Dessa forma, podemos calcular  $P(M)$ .

$$P(0.4 < Y < 0.6) = 2 \int_{0.4}^{0.6} (-Y + 1) dY$$

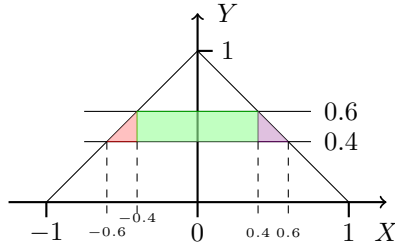
$$P(0.4 < Y < 0.6) = 2 \left[ -\frac{Y^2}{2} + Y \right]_{0.4}^{0.6}$$

$$P(0.4 < Y < 0.6) = 2 \left[ -\frac{0.6^2}{2} + 0.6 - \left( -\frac{0.4^2}{2} + 0.4 \right) \right]$$

$$P(0.4 < Y < 0.6) = 2[0.1]$$

$$P(0.4 < Y < 0.6) = 0.2$$

Sigamos, pois para o cálculo de  $P(x \leq X, M)$ . Perceba, que, aqui queremos a interseção, sendo representado pela figura abaixo.



Vamos então, analisar por região destacada.

$$P(x \leq X, M) = \begin{cases} 0 & X < -0.6 \\ \frac{(X+0.6)^2}{2} & -0.6 \leq X \leq -0.4 \\ \frac{0.2^2}{2} + (X+0.4) \cdot 0.2 = 0.1 + 0.2X & -0.4 < X \leq 0.4 \\ 0.18 + \frac{(0.8-X) \cdot (X-0.4)}{2} = 0.2 - \frac{(X-0.6)^2}{2} & 0.4 < X \leq 0.6 \\ 0.2 & X > 0.6 \end{cases}$$

Sabemos que

$$p_{x|M}(X) = \frac{\frac{d}{dx}P(x \leq X)}{P(M)}$$

Calculando  $\frac{d}{dX}P(x \leq X, M)$ , chegamos em

$$\frac{d}{dX}P(x \leq X, M) = \begin{cases} 0 & X < -0.6 \\ X + 0.6 & -0.6 \leq X \leq -0.4 \\ 0.2 & -0.4 < X \leq 0.4 \\ 0.6 - X & 0.4 < X \leq 0.6 \\ 0 & X > 0.6 \end{cases}$$

Finalmente

$$p_{x|M}(X) = \begin{cases} 0 & X < -0.6 \\ 5X + 3 & -0.6 \leq X \leq -0.4 \\ 1 & -0.4 < X \leq 0.4 \\ 3 - 5X & 0.4 < X \leq 0.6 \\ 0 & X > 0.6 \end{cases}$$

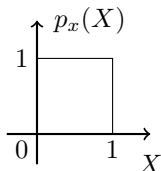
## Questão 2

Uma régua de comprimento unitário é quebrada em um ponto aleatório. O pedaço da esquerda é novamente quebrado. Seja  $x$  a variável aleatória que define, a partir da extremidade esquerda da régua, o ponto em que a régua é quebrada pela primeira vez e  $y$  a variável aleatória que define o segundo ponto de quebra. Determine

$$p_x(X), p_y(Y), p_{y|x=X}(Y), p_{x|y=Y}(X)$$

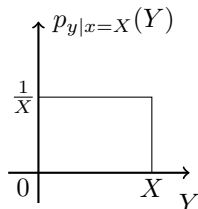
Calcule a probabilidade de que um triângulo possa ser formado com as três peças obtidas. Lembre-se de que, num triângulo, o comprimento de qualquer um dos lados é menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

O cálculo de  $p_x(X)$  é bem simples. Tendo uma régua unitária, sua densidade de probabilidade é:



$$p_x(X) = 1; 0 \leq X \leq 1$$

Agora, também podemos representar  $p_{y|x=X}(Y)$ .



Agora, podemos calcular  $p_y(Y)$ .

$$\begin{aligned}
 p_{y|x=X}(Y) &= \frac{p_{xy}(X, Y)}{p_y(Y)} \\
 p_{xy}(X, Y) &= \frac{1}{X} \\
 p_y(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(X, Y) dX \\
 p_y(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{X} dX \\
 p_y(Y) &= \int_Y^1 \frac{1}{X} dX \\
 p_y(Y) &= 0 - \ln(Y) \\
 p_y(Y) &= -\ln(Y)
 \end{aligned}$$

E agora,  $p_{y|x=X}(X) = \frac{p_{xy}(X, Y)}{p_x(X)}$ .

$$\begin{aligned}
 p_{y|x=X}(X) &= \frac{p_{xy}(X, Y)}{p_x(X)} \\
 p_{y|x=X}(X) &= \frac{1}{X} / (-\ln(Y)) \\
 p_{y|x=X}(X) &= -\frac{1}{X \ln(Y)}, 0 < Y < X < 1
 \end{aligned}$$

Seja  $P$  a probabilidade de se formar um triângulo, ela é dada por:

$$\begin{aligned}
 P &= \int_R p_{xy}(X, Y) dR = \int_{0.5}^1 \int_{X-0.5}^{0.5} \frac{1}{X} dY dX \\
 P &= \int_{0.5}^1 \frac{1}{X} [-X + 1] dX \\
 P &= -0.5 - \ln(0.5) \\
 P &\approx 0.1931
 \end{aligned}$$

### Questão 3

Um equipamento pode se encontrar em um dentre dois estados possíveis: operação normal e operação anormal. A probabilidade de o equipamento encontra-se em operação normal é 0.8. Ligado a este equipamento tem-se um painel de controle onde um termômetro com escala em graus Celsius indica a temperatura do equipamento a cada instante. Considere que a indicação do termômetro é uma variável aleatória  $t$  cuja função densidade de probabilidade depende do estado em que o equipamento se encontra. Se o equipamento está em operação normal ( $N$ ), tem-se

$$p_{t|N}(T) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(T-30)^2}{200}}$$

Por outro lado, se o equipamento está em operação anormal ( $\overline{N}$ ), tem-se

$$p_{t|\overline{N}}(T) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(T-50)^2}{200}}$$

Determine a probabilidade de que a indicação do termômetro exceda 40 graus Celsius. Determine a probabilidade de que a operação seja normal dado que a indicação do termômetro está compreendida entre 40 e 50 graus Celsius. Suponha que se resolve decidir a respeito

do estado do equipamento (operação normal ou anormal) a partir da indicação do termômetro. Estabelece-se então a seguinte regra de decisão:

Se  $t < T_0$  decide-se por operação normal

Se  $t \geq T_0$  decide-se por operação anormal.

Calcule a probabilidade de se cometer um erro quando se usa este critério de decisão com  $T_0 = 45$ . Calcule o menor valor de  $T_0$  tal que a probabilidade de se decidir por operação anormal quando a operação é normal não excede 0.0075.

A probabilidade que queremos é:

$$P(t > 40) = P(t > 40, N) + P(t > 40, \overline{N})$$

$$P(t > 40) = 0.8 \cdot P_{t|N}(T > 40) + 0.2 \cdot P_{t|\overline{N}}(T > 40)$$

A primeira,  $(P_{t|N}(T > 40))$ , possui desvio padrão de 10 com média 30. Dessa forma, a probabilidade de que a temperatura exceda 30 graus Celsius, é de 50%. Para que ela fique entre 20 e 40 graus (a um desvio padrão), aproximamos para 68%. Sendo simétrica, dividimos por 2 para obter a probabilidade de que a temperatura esteja entre 30 e 40 graus Celsius, sendo de aproximadamente 34%. Diminuindo o primeiro dado do segundo, temos que a probabilidade de que a temperatura exceda 40 graus é de  $(50 - 34)\% = 16\%$

$$P_{t|N}(T > 40) = 0.16$$

Para a segunda,  $(P_{t|\overline{N}})$ , temos uma média de 50, com um desvio padrão de 10. Pela lógica da primeira, devemos agora somar aos 50% os 34%, que é metade da probabilidade contida em um desvio padrão, tendo  $(50 + 34)\% = 84\%$ .

$$P_{t|\overline{N}}(T > 40) = 0.84$$



Aplicando aqui, temos:

$$P(t > 40) = 0.8 \cdot P_{t|N}(T > 40) + 0.2 \cdot P_{t|\overline{N}}(T > 40)$$

$$P(t > 40) = 0.8 \cdot 0.16 + 0.2 \cdot 0.84$$

$$\boxed{P(t > 40) = 0.296}$$

Agora, queremos  $P(N \mid 40 < T < 50)$ . Pelo teorema de Bayes, temos que:

$$P(N \mid 40 < T < 50) = \frac{P(N, 40 < T < 50)}{P(40 < T < 50)}$$

Sabemos, porém, que:

$$P(N, 40 < T < 50) = P(40 < T < 50 \mid N) \cdot P(N)$$

Então

$$P(N \mid 40 < T < 50) = \frac{P(40 < T < 50 \mid N) \cdot P(N)}{P(40 < T < 50)}$$

Agora, nos resta calcular o que podemos:

Para,  $P(40 < T < 50)$ , podemos utilizar a lógica da primeira parte, obtendo que

$$P(40 < T < 50) = 0.8 \cdot P_{t|N}(40 < T < 50) + 0.2 \cdot P_{t|\overline{N}}(40 < T < 50)$$

No primeiro ( $P_{t|N}(40 < T < 50)$ ), queremos metade da probabilidade de estar no intervalo entre o primeiro e segundo desvio padrão. Então ( $\frac{95-68}{2}\% = 13.5\%$ ).

No segundo, ( $P_{t|\overline{N}}(40 < T < 50)$ ), queremos metade da probabilidade de que se esteja no intervalo do primeiro desvio padrão. Então ( $\frac{68}{2}\% = 34\%$ )

Assim,

$$P_{t|N}(40 < T < 50) = 0.135$$

$$P_{t|\overline{N}}(40 < T < 50) = 0.34$$

$$P(40 < T < 50) = 0.8 \cdot P_{t|N}(40 < T < 50) + 0.2 \cdot P_{t|\overline{N}}(40 < T < 50)$$

$$P(40 < T < 50) = 0.8 \cdot 0.135 + 0.2 \cdot 0.34$$

$$\boxed{P(40 < T < 50) = 0.176}$$

Os outros, ou já calculamos, ou temos:

$$P(40 < T < 50 \mid N) = 0.135$$

$$P(N) = 0.8$$

Finalmente

$$P(N \mid 40 < T < 50) = \frac{P(40 < T < 50 \mid N) \cdot P(N)}{P(40 < T < 50)}$$

$$P(N \mid 40 < T < 50) = \frac{0.135 \cdot 0.8}{0.176} = 0.614$$

$$\boxed{P(N \mid 40 < T < 50) = 0.614}$$

Agora, queremos a probabilidade de que a temperatura seja menor que 45 graus, sendo anormal ou de que seja maior ou igual a 45 graus sendo normal.

No primeiro caso, veremos o valor para a função erro:

$$\frac{45 - 30}{10} = 1.5$$

No segundo:

$$\frac{45 - 50}{10} = -0.5$$

Assim

$$P(Erro) = P(N) \cdot P_{t|N}(t \geq 45) + P(\overline{N}) \cdot P_{t|\overline{N}}(t < 45)$$

$$P(Erro) = 0.8 \cdot (1 - \text{erf}(1.5)) + 0.2 \cdot \text{erf}(-0.5)$$

$$\boxed{P(Erro) = 0.115}$$

Finalmente, precisamos da temperatura  $T_0$  para que o erro seja o dado no enunciado. Para isso, fazemos:

$$0.8 \cdot p_{t|N}(t \geq T_0) < 0.0075$$

$$\int_{T_0}^{\infty} p_{t|N} dt < 0.009375$$

$$\left[ \frac{1}{2} - \text{erf}\left(\frac{T_0 - 30}{10}\right) \right] < 0.009375$$

$$\text{erf}\left(\frac{T_0 - 30}{10}\right) > 0.490625$$

$$\text{erf}\left(\frac{T_0 - 30}{10}\right) > \text{erf}(2.35)$$

$$\frac{T_0 - 30}{10} > 2.35$$

$$\boxed{T_0 > 53.5}$$

## Questão 4

Deseja-se encontrar a função de densidade de probabilidade da v.a.  $y = ax^2$ , ( $a > 0$ ), onde  $x$  é uma v.a. dupla exponencial de parâmetro  $b$ :

$$p_x(X) = \frac{b}{2} e^{-b|X|}$$

Vamos calcular a inversa de  $f(x) = ax^2$ .

$$y = ax^2$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{y}{a}}$$

E a derivada da função:

$$y' = (ax^2)'$$

$$y' = 2ax$$

Agora, podemos calcular  $p_y(Y)$ .

$$p_y(Y) = \frac{p_x(X)}{|f'_1(X)|} \Big|_{f_1^{-1}(Y)} \cdot I_{Cf_1(Y)} + \frac{p_x(X)}{|f'_2(X)|} \Big|_{f_2^{-1}(Y)} \cdot I_{Cf_2(Y)}$$

Lembrando que existem duas regiões pois a função não é biunívoca.

$$p_y(Y) = \left( \frac{be^{-b|X|}}{4\sqrt{ya}} + \frac{be^{-b|X|}}{4\sqrt{ya}} \right) \cdot I_{[0,\infty](Y)}$$

$$p_y(Y) = \frac{be^{-b\sqrt{\frac{y}{a}}}}{2\sqrt{ya}} \cdot u_{-1}(Y)$$