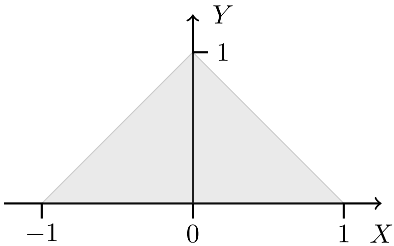
Estatística e Modelos Probabilísticos - Quiz 4

Matheus Henrique Sant'Anna Cardoso
DRE: 121073530

Novembro de 2022

Questão 1

Considere duas variáveis aleatórias x e y com função densidade de probabilidade conjunta constante e diferente de zero apenas na área hachurada da figura. Determine o valor de $p_{xy}(X,Y)$ na área hachurada de figura. Encontre a função densidade de probabilidade $p_x(X)$ da variável aleatória x. Determine a função densidade de probabilidade condicional $p_{x|M}(X)$ onde M é o evento definido por $M = \{0.4 < y < 0.6\}$.



Sendo a probabilidade conjunta uma constante, chamemos de k. Assim:

$$p_{xy}(X,Y) = k$$

Disso, vem:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(X,Y)\,dX\,dY &= 1\\
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k\,dX\,dY &= 1\\
\int_{-1}^{0}\int_{0}^{X+1} k\,dY\,dX + \int_{0}^{1}\int_{0}^{-X+1} k\,dY\,dX &= 1\\
\int_{-1}^{0}(X+1)k\,dX + \int_{0}^{1}(-X+1)k\,dX &= 1\\
k\left[\frac{X^2}{2}+X\right]_{-1}^{0} + k\left[\frac{-X^2}{2}+X\right]_{0}^{1} &= 1
\end{aligned}$$

$$k\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]=1$$

$$k=1$$

$$\boxed{p_{xy}(X,Y)=1}$$

Sigamos para o cálculo de $p_x(X)$ da área hachurada.

$$p_x(X)=\int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(X,Y)\,dY$$

$$\boxed{p_x(X)=\begin{cases}\int_0^{X+1} 1\,dY = X+1 & -1\leq X\leq 0\\ \int_0^{-X+1} 1\,dY = -X+1 & 0<X\leq 1\end{cases}}$$

Agora, calculemos $p_{x|M}(X)$.

Antes, vejamos $p_y(Y)$

$$p_y(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(X,Y)\,dX$$

$$p_y(Y)=\int_{Y-1}^{0} 1\,dX+\int_{0}^{-Y+1} 1\,dX \quad 0\leq Y\leq 1$$

$$p_y(Y)=(-Y+1)+(-Y+1)$$

$$p_y(Y)=2(-Y+1) \quad 0\leq Y\leq 1$$

Dessa forma, podemos calcular $P(M)$.

$$P(0.4<Y<0.6)=2\int_{0.4}^{0.6}(-Y+1)\,dY$$

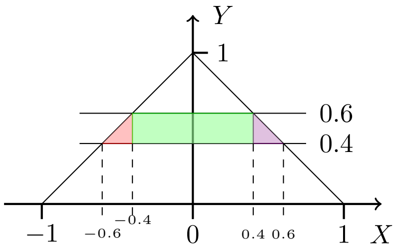
$$P(0.4<Y<0.6)=2\left[-\frac{Y^2}{2}+Y\right]_{0.4}^{0.6}$$

$$P(0.4<Y<0.6)=2\left[-\frac{0.6^2}{2}+0.6-\left(-\frac{0.4^2}{2}+0.4\right)\right]$$

$$P(0.4<Y<0.6)=2\left[0.1\right]$$

$$P(0.4 < Y < 0.6) = 0.2$$

Sigamos, pois para o cálculo de $P(x \leq X, M)$. Perceba, que, aqui queremos a interseção, sendo representado pela figura abaixo.



Vamos então, analisar por região destacada.

$$P(x \leq X, M) = \begin{cases} 0 & X < -0.6 \\ \frac{(X+0.6)^2}{2} & -0.6 \leq X \leq -0.4 \\ \frac{0.2^2}{2} + (X+0.4)\cdot 0.2 = 0.1 + 0.2X & -0.4 < X \leq 0.4 \\ 0.18 + \frac{(0.8-X)\cdot(X-0.4)}{2} = 0.2 - \frac{(X-0.6)^2}{2} & 0.4 < X \leq 0.6 \\ 0.2 & X > 0.6 \end{cases}$$

Sabemos que

$$p_{x|M}(X) = \frac{\frac{d}{dx}P(x \leq X)}{P(M)}$$

Calculando $\frac{d}{dX}P(x \leq X, M)$, chegamos em

$$\frac{d}{dX}P(x \leq X, M) = \begin{cases} 0 & X < -0.6 \\ X + 0.6 & -0.6 \leq X \leq -0.4 \\ 0.2 & -0.4 < X \leq 0.4 \\ 0.6 - X & 0.4 < X \leq 0.6 \\ 0 & X > 0.6 \end{cases}$$

Finalmente

$$\boxed{p_{x|M}(X) = \begin{cases} 0 & X < -0.6 \\ 5X+3 & -0.6 \le X \le -0.4 \\ 1 & -0.4 < X \le 0.4 \\ 3-5X & 0.4 < X \le 0.6 \\ 0 & X > 0.6 \end{cases}}$$

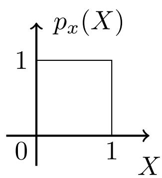
Questão 2

Uma régua de comprimento unitário é quebrada em um ponto aleatório. O pedaço da esquerda é novamente quebrado. Seja x a variável aleatória que define, a partir da extremidade esquerda da régua, o ponto em que a régua é quebrada pela primeira vez e y a variável aleatória que define o segundo ponto de quebra. Determine

$$p_x(X), p_y(Y), p_{y|x=X}(Y), p_{x|y=Y}(X)$$

Calcule a probabilidade de que um triangulo possa ser formado com as três peças obtidas. Lembre-se de que, num triangulo, o comprimento de qualquer um dos lados é menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

O cálculo de $p_x(X)$ é bem simples. Tendo uma régua unitária, sua densidade de probabilidade é:



$$p_x(X) = 1; 0 \ge X \ge 1$$

Podemos pensar, agora na probabilidade conjunta, criando um gráfico com Y em função de X.

Questão 3

Um equipamento pode se encontrar em um dentre dois estados possíveis: operação normal e operação anormal. A probabilidade de o equipamento encontra-se em operação normal é 0.8. Ligado a este equipamento tem-se um painel de controle onde um termômetro com escala em graus Celsius indica a temperatura do equipamento a cada instante. Considere que a indicação do termômetro é uma variável aleatória t cuja função densidade de probabilidade depende do estado em que o equipamento se encontra. Se o equipamento está em operação normal (N), tem-se

$$p_{t|N}(T) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(T-30)^2}{200}}$$

Por outro lado, se o equipamento está em operação anormal $(\overline{N})$, tem-se

$$p_{t|\overline{N}}(T) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(T-50)^2}{200}}$$

Determine a probabilidade de que a indicação do termômetro exceda 40 graus Celsius. Determine a probabilidade de que a operação seja normal dado que a indicação do termômetro está compreendida entre 40 e 50 graus Celsius. Suponha que se resolve decidir a respeito do estado do equipamento (operação normal ou anormal) a partir da indicação do termômetro. Estabelece-se então a seguinte regra de decisão:

Se $t < T_0$ decide-se por operação normal

Se $t \geq T_0$ decide-se por operação anormal.

Calcule a probabilidade de se cometer um erro quando se usa este critério de decisão com $T_0 = 45$. Calcule o menor valor de T_0 tal que a probabilidade de se decidir por operação anormal quando a operação é normal não excede 0.0075.

Questão 4

Deseja-se encontrar a função de densidade de probabilidade da v.a. $y = ax^2, (a > 0)$, onde x é uma v.a. dupla exponencial de parâmetro b:

$$p_x(X) = \frac{b}{2e^{-b|X|}}$$