Estatística e Modelos Probabilísticos - Quiz 3

Matheus Henrique Sant'Anna Cardoso

DRE: 121073530

Novembro de 2022

Questão 1

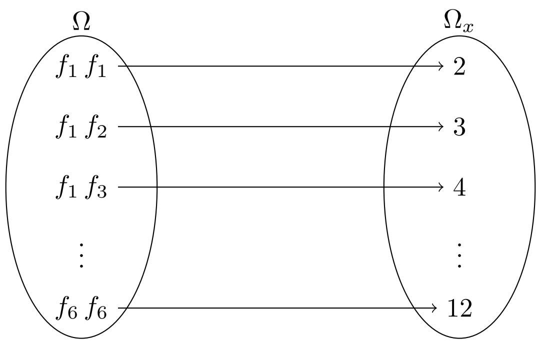
Considere o lançamento de dois dados e a experiência cujo resultado consiste na soma do número de pontos da face superior dos dados. Resolva:

a. Modele com uma v.a. esta soma.

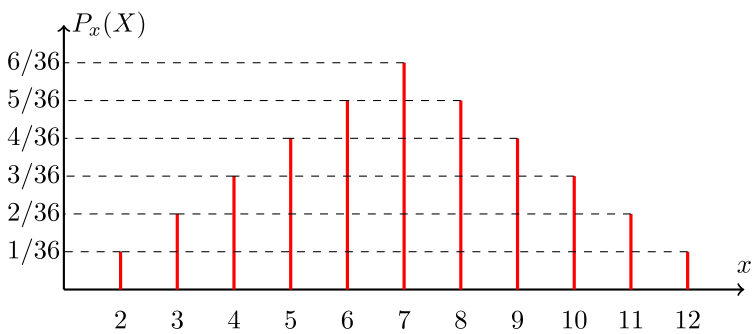
Aqui, o espaço amostra da variável aleatória pode ser dado por:

$$\Omega_x = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

De forma que, possamos, de cada par $f_i\, f_j$ com $i, j = 1, 2, \cdots, 6$ apontar para uma soma $i + j$.



b. Encontre e esboce sua distribuição de probabilidade.



c. Encontre e esboce a Função Distribuição de Probabilidades (F.D.P.)

Sabemos que:

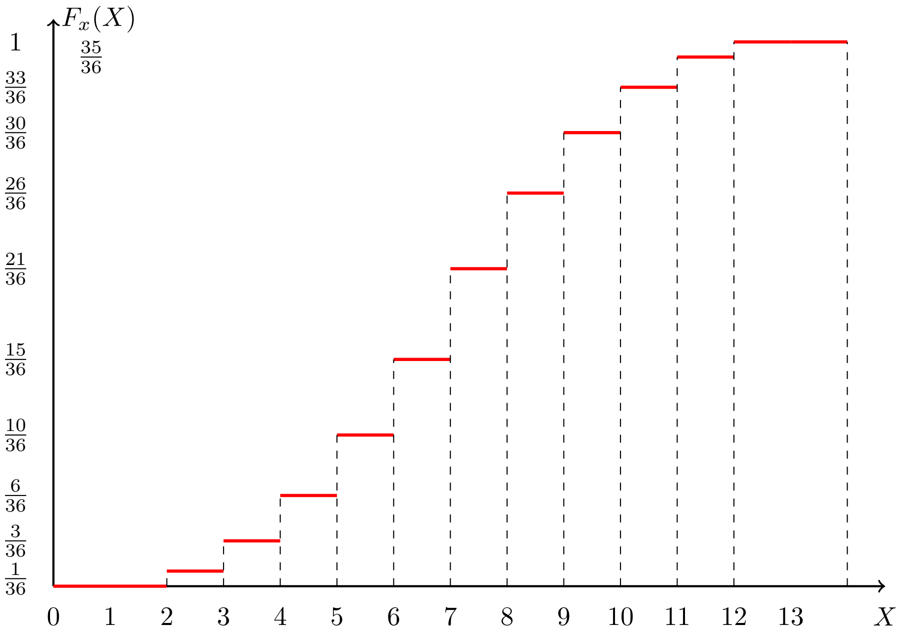
$$F_x(X) = \sum_i P(x = X_i) u_{-1}(X - X_i)$$

Então,

$$F_x(X) = P(2)u_{-1}(X-2) + P(3)u_{-1}(X-3) + \cdots P(12)u_{-1}(X-12) =$$

$$F_x(X) = \frac{1}{36}u_{-1}(X-2) + \frac{2}{36}u_{-1}(X-3) + \cdots + \frac{1}{36}u_{-1}(X-12)$$

Esboçando a Função Distribuição de Probabilidades, temos:



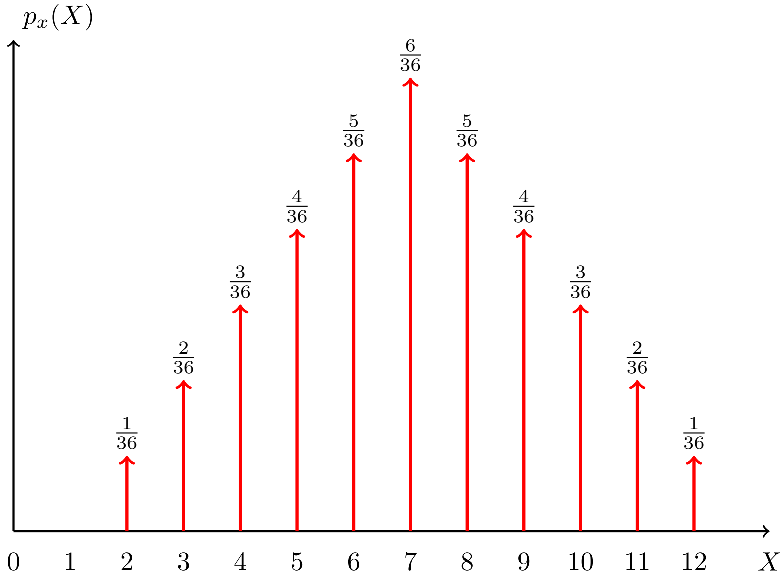
d. Encontre e esboce a função densidade de probabilidades (f.d.p.)
Sabemos que $p_x(X) = \dfrac{dF_x(X)}{dX}$. Dessa forma, vamos derivar a F.D.P. para obtermos f.d.p.

$$p_x(X) = \frac{1}{36}\frac{du(X-2)}{dX} + \frac{2}{36}\frac{du(X-3)}{dX} + \frac{3}{36}\frac{du(X-4)}{dX} + \cdots + \frac{1}{36}\frac{du(X-12)}{dX}$$

Assim:

$$p_x(X) = \frac{1}{36}\delta(X-2) + \frac{2}{36}\delta(X-3) + \frac{3}{36}\delta(X-4) + \cdots + \frac{1}{36}\delta(X-12)$$

Esboçando, teremos:



e. Calcule a probabilidade de obter um valor no intervalo $[7, 9]$.

Deveremos calcular a probalilidade para que $7 \leq X \leq 9$.

$$P_x(7 \leq X \leq 9) = F_x(9) - \lim_{\epsilon \to 0} F_x(7-\epsilon)$$

$$P_x(7 \leq X \leq 9) = \frac{30}{36} - \frac{15}{36} = \frac{15}{36}$$

$$P_x(7 \leq X \leq 9) = \frac{5}{12}$$

Questão 2

Seja x uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$P(x = X) = \frac{c}{4^x}, X = 0, 1, \cdots$$

Obtenha:

a. O valor de c.

Para que isso possa expressar uma probabilidade, deve cumprir o fato de que a soma de todos os casos vale 1. Assim, façamos a soma para infinitos termos.

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{c}{4^x} = 1$$

$$c\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{4^x} = 1$$

Sabe-se que o somatório acima é a soma de infinitos termos de uma P.G. infinita, que é dada por $\frac{a_1}{1-q}$ em que a_1 é o primeiro termo e q a razão. Então

$$c\left(\frac{1}{1 - 1/4}\right) = 1$$

$$c = \frac{3}{4}$$

b. A probabilidade de x ser um número par.

Sabemos que o valor de c é $\frac{3}{4}$. Queremos agora que X assuma os valores $0, 2, 4, 6, \cdots$ tendo uma outra P.G. infinita. Assim:

$$P(x_{par}) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4^0} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right)$$

sendo, novamente, uma P.G. infinita, com razão $\frac{1}{16}$ e primeiro termo 1. Dessa forma:

$$P(x_{par}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - 1/16} = \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{15} = \frac{4}{5}$$

Questão 3

Seja x uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$p_x(X) = \begin{cases} c\left(1 - x^2\right); & -1 < x < 1 \\ 0 \qquad\qquad ; & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a. Qual o valor de c?

Aqui, sabemos que a integral de $p_x(X)$ é igual a 1. Portanto:

$$c\int_{-1}^{1} p_x(X)\,dx = 1$$

$$c\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,dx = 1$$

$$c \cdot \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 1$$

$$c \cdot \frac{4}{3} = 1$$

$$c = \frac{3}{4}$$

b. qual é a Função Distribuição Cumulativa de x?

Sabemos que

$$F_x(X) = \int_{-\infty}^{X} p_x(X)\,dx$$

que, para efeitos desta questão, é o mesmo que

$$F_x(X) = \int_{-1}^{X} \frac{3}{4} \cdot \left(1 - x^2\right)\,dx$$

Sabendo que, para isso, $X \leq 1$.

$$F_x(X) = \frac{3}{4} \cdot \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{X}$$

$$F_x(X) = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{X^3}{3} + X + \frac{2}{3}\right)$$

$$F_x(X) = -\frac{X^3}{4} + \frac{3X}{4} + \frac{1}{2}$$

Questão 4

Quinze pessoas portadoras de determinada doença são selecionadas para se submeter a um tratamento. Este tratamento é eficaz na cura da doença em 80% dos casos. Suponha que os indivíduos submetidos ao tratamento se curam (ou não) independentes uns do outros.

a. Modelar com uma v.a. o número de curados x dentre os 15 pacientes submetidos ao tratamento.

$$\Omega_x = \{0, 1, 2, \cdots, 15\}$$

O σ-álgebra são todas as combinações possíveis de uma pessoa.

Os sucessos serão os casos descritos em Ω_x.

b. Qual a distribuição de x?

Queremos obter a probabilidade de $x = K$ pacientes alcançarem sucesso - que seria a cura. Podemos modelar da seguinte forma:

$$P(x = K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$$

Aqui, escolhemos K pacientes dentre 15. Fazemos o produto dos $p's$ K vezes - escolhendo K que obtiveram sucesso, ou seja, $1 - K$ que não obtiveram sucesso. Por fim, teremos:

$$P(x = K) = \binom{15}{K} p^K (1-p)^{15-K}$$

c. Qual a probabilidade de que os 15 pacientes sejam curados?

Da fórmula anterior, obtemos:

$$P(x = 15) = \binom{15}{15} 0.8^{15} \cdot (1 - 0.8)^{15-15}$$

$$P(x = 15) = 0.8^15 = 0.03518$$

$$P(x = 15) \approx 3.52\%$$

d. Qual a probabilidade de que pelo menos dois não sejam curados?

Aqui, queremos $P(x \leq 13)$.

Porém, sabemos que

$$P(x \leq 13) = 1 - P(x > 13) = 1 - P(x = 14) - P(x = 15)$$

$$P(x \leq 13) = 1 - (1 \cdot (0.8)^{14} \cdot (0.2)^1) - 0.03518$$

$$P(x \leq 13) = 1 - 0.00879 - 0.03518 = 0.956$$

$$P(x \leq 13) \approx 95.6\%$$

Questão 5

Seja x o número de ensaios necessários para obter o primeiro sucesso quando se realiza uma sequência de ensaios de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso p.

a. Deduza o modelo de distribuição de probabilidades conhecida como geométrica.

Aqui, teremos um modelo similar ao da questão anterior, porém, não iremos escolher quando haverá sucesso. Dessa forma, teremos

$$P(x) = (1 - p)^{x-1} p$$

Sendo que há fracasso em $x - 1$ vezes e sucesso apenas uma vez, sendo a última.

b. Mostre que a somatória das probabilidades da distribuição geométrica é igual a 1.

Vamos, então, calcular a somatória para infinitos valores de X. Queremos, então:

$$\sum_{X=1}^{\infty}(1-p)^{x-1}p = p \cdot \sum_{X=1}^{\infty}(1-p)^{x-1}$$

Caímos, aqui, em uma P.G. infinita, com primeiro termo 1 e razão $1-p$.

$$p \cdot \sum_{X=1}^{\infty}(1-p)^{x-1} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1$$

Questão 6

Um amperímetro digital tem uma escala que vai de -5 a +5 Ampère e tem a precisão de apenas um dígito, isto é, indica valores inteiros de corrente. Assim, ao se fazer uma medida, o aparelho aproxima o valor real da corrente para o valor inteiro mais próximo. Determine a probabilidade de que o erro na medida seja superior a 0.2 Ampère. Considere que a função densidade de probabilidade da corrente na entrada do amperímetro seja a mostrada na figura 4.

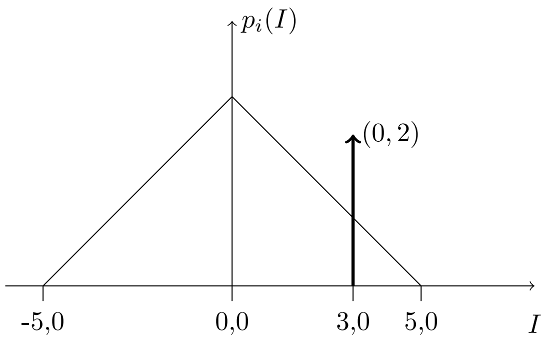


Figura 4

É preciso, primeiramente, refazermos a figura acima, sabendo o valor de $p_i(0)$, que não é mostrado. Assim, sabendo que

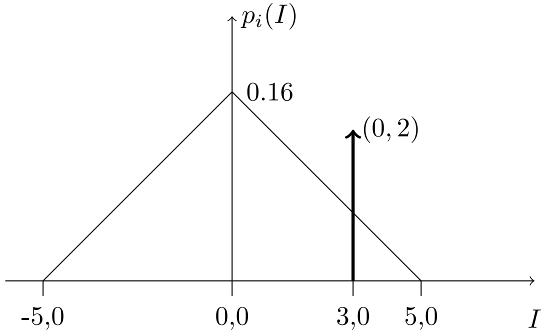
$$\int_{-\infty}^{\infty} p_i(I)\, di = 1$$

ou, mais convenientemente, que a área do triângulo somada a integral do impulso de amplitude 0.2 deve ser 1.

$$\frac{10c}{2} + 0.2 = 1$$

$$c = 0.16$$

Então, recriando a figura, teremos



Agora, temos uma figura clara e podemos calcular as áreas nos intervalos em que o problema exige. Precisamos das áreas que comtemplam o fato de estarem entre $X.2$ e $X.8$.

Na primeira parte do gráfico, este segue a função $p_i(I) = 0.032I + 0.16$.

Já, na segunda parte do gráfico, temos uma função da forma $-0.032I + 0.16$.

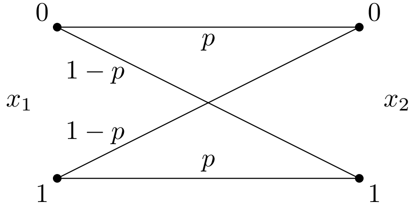
Por partes, calculemos as áreas dos intervalos:

$$\frac{(p_i(-4.8) + p_i(-4.2)) \cdot 0.6}{2} = 0.0096$$
$$\frac{(p_i(-3.8) + p_i(-3.2)) \cdot 0.6}{2} = 0.0288$$
$$\frac{(p_i(-2.8) + p_i(-2.2)) \cdot 0.6}{2} = 0.048$$
$$\frac{(p_i(-1.8) + p_i(-1.2)) \cdot 0.6}{2} = 0.0672$$
$$\frac{(p_i(-0.8) + p_i(-0.2)) \cdot 0.6}{2} = 0.0864$$
$$\frac{(p_i(0.2) + p_i(0.8)) \cdot 0.6}{2} = 0.0864$$
$$\frac{(p_i(1.2) + p_i(1.8)) \cdot 0.6}{2} = 0.0672$$
$$\frac{(p_i(2.2) + p_i(2.8)) \cdot 0.6}{2} = 0.048$$
$$\frac{(p_i(3.2) + p_i(3.8)) \cdot 0.6}{2} = 0.0288$$
$$\frac{(p_i(4.2) + p_i(4.8)) \cdot 0.6}{2} = 0.0096$$

Somando os valores, obtemos 0.48, sendo essa a probabilidade pedida.

Questão 7

No canal binário da figura, a v.a. x_1 representa os dígitos transmitidos e a v.a. x_2 os dígitos recebidos. Os bits recebidos podem estar alterados devido ao ruído no canal.



a. Determine os eventos Ax para um vetor aleatório bidimensional que represente este experimento.

$$A_x = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

b. Encontre a distribuição de probabilidades e a F.D.P conjuntas, considerando que a probabilidade de transmissão de cada um dos dígitos é igual, e que o ruído do canal pode ser caracterizado pelas probabilidades condicionadas mostradas na figura.

c. Encontre a distribuição de probabilidades e a F.D.P de cada v.a.

Questão 8

Encontre a distribuição de probabilidades marginal $P_x(K)$, sabendo que:

$$P_{xy}(K,L) = \begin{cases} \frac{2\left[\frac{K}{K+1}\right]^L}{n(n+1)} & K = 0, 1, \cdots, n-1; L \geq 0 \\ 0 & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Observação

$$P_x(X_i) = \sum_j P_{xy}(X_i, Y_j), \qquad P_y(Y_j) = \sum_i P_{xy}(X_i, Y_j)$$

Questão 9

Dois usuários A e B solicitam serviços a um determinado provedor. Considere que as v.a.'s x e y caracterizam, respectivamente, os tempos (em segundos)necessários para a execução dos serviços solicitados pelos usuários A e B. Suponha que a densidade de probabilidade conjunta das v.a.'s x e y seja dada por:

$$p_{xy}(X,Y) = Ke^{-(3X+2Y)}u(X)u(Y)$$

Sabe-se que quando um serviço é solicitado ao provedor, a probabilidade de que a solicitação venha de A vale 0.6, valendo, portanto 0.4 a probabilidade de que ela venha de B.

a. Determine o valor da constante K.

b. Calcule a probabilidade de que a execução de um serviço solicitado ao provedor requeira um tempo superior a 0.5 segundos.

c. Calcule a probabilidade de que uma solicitação de serviço venha do usuário A sabendo-se que sua execução requer um tempo maior do que 0.5 segundos.

Questão 10

Se x é uma variável aleatória normal (gaussiana) com parâmetros $\mu = 10$ e $\sigma^2 = 36$, calcule:

a. $P(x > 5)$

b. $P(4 < x < 16)$

c. $P(x < 8)$

d. $P(x < 20)$

e. $P(x > 16)$