Estatística e Modelos Probabilísticos - Quiz 4

Matheus Henrique Sant'Anna Cardoso

DRE: 121073530

Novembro de 2022

(1) Após um bom tempo consegui juntar com o rendimento da poupança (0.6%) um total de $P = 10000$ reais. Pretendo trocar para aplicações cujas taxas de retorno são variáveis aleatórias independentes $x_1 e x_2$, com médias 5% e 14% e desvios padrão 1% e 8%, respectivamente. Para avaliar o risco da aplicação utilizarei o desvio padrão, $\sigma(R)$, do seu retorno total $R = P_1x_1 + P_2x_2$.

(a) para ter o risco mínimo possível, que quantias P_1 e P_2 devo investir nas respectivas aplicações? Quais são a média do retorno e o risco correspondentes?

(b) qual é o tamanho do risco que devo correr para obter o mesmo rendimento em reais da poupança? Vale a pena trocar de investimento?

(c) Através da Desigualdade de Chebyshev, obtenha um intervalo simétrico em torno de 770 reais que, com probabilidade superior a 80%, conterá o retorno R da carteira obtida no item (b).

(2) Na resolução do exercício abaixo foi cometido um erro grave. Pergunta: Sejam x e y duas v.a.'s independentes e tais que $x \sim N(80; 9)$ e $y \sim N(50; 16)$. Qual a distribuição de probabilidade da v.a. $z = x - y$?

Resposta:

$$\begin{aligned} E[z] = E[x-y] = E[x] - E[y] = 80 - 50 = 30 \\ Var(z) = Var(x-y) = Var(x) - Var(y) = 9 - 16 = -7 \\ \text{Conclusão} : z \sim N(30; -7) \end{aligned}$$

(a) Qual foi o erro cometido aqui?

(b) qual a solução correta

(3) Considere duas variáveis aleatórias x e y com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kxy^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Onde K é uma constante real. Determine $E[X]$, $E[Y]$, $E[X \mid Y = 1]$ e $E[Y \mid X = 0]$.

(4) A chegada de passageiros a uma paragem de autocarro segue um processo de Poisson com

intensidade λ_1. Seja T o tempo de chegada de um autocarro que é independente do processo de Poisson. Quando $t = 0$ não existem passageiros na paragem. Supondo que T segue uma distribuição exponencial com intensidade λ_2, calcule o número médio de pessoas na paragem no instante T.

Resposta: $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

(5) Uma concessionária de automóveis vem mantendo semanalmente em estoque 2 carros importados e 3 de fabricação nacional, para atender aos seus clientes. Sejam x e y as variáveis aleatórias que representam respectivamente o número de carros importados e o número de carros nacionais que ela vende ao longo de uma semana. Assim sendo, x pode assumir os valores $0, 1, 2$ e y os valores $0, 1, 2, 3$. A função de probabilidade conjunta de x e y é dada pela tabela abaixo:

x	y			
	0	1	2	3
0	0.01	0.05	0.05	0.04
1	0.05	0.20	0.15	0.10
2	0.04	0.15	0.10	0.06

Qual a probabilidade de que, em uma determinada semana:

(a) não seja vendido nenhum carro importado?

(b) todos os carros nacionais sejam vendidos?

(c) sejam vendidos no máximo um carro importado e um carro nacional?

(d) sejam vendidos mais carros importados do que nacionais?

(e) sejam vendidos ao todo pelo menos 4 carros?

Obtenha:

(f) as distribuições marginais de x e de y.

(g) as distribuições condicionais de x dado y, e de y dado x.

(h) $Cov(x, y)$ **e** $\rho(x, y)$

(6) O tempo de vida de um equipamento é uma variável aleatória x com função densidade de probabilidade exponencial de parâmetro a, ou seja,

$$p_x(X) = ae^{-aX}u(X).$$

Quando o equipamento falha, o tempo necessário para repará-lo pode ser modelado por uma variável aleatória y, com função densidade de probabilidade dada por

$$p_y(Y) = be^{-bY}u(Y).$$

Seja z a duração total de um ciclo do equipamento, entendendo-se como tal o tempo decorrido desde que o equipamento entra em operação até que ele volte a funcionar depois de ter falhado uma vez, ou seja,

$$z = x + y$$

(a) Determine o coeficiente de correlação ρ_{xz} entre as variáveis aleatórias x e z.

(b) Determine a função densidade de probabilidades $\rho_z(Z)$ da variável aleatória z. Para isso, lembre-se que

$$\frac{1}{(a-jv)(b-jv)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a-jv} - \frac{1}{b-jv}\right)$$

(c) Calcule, para $a = 1$ e $b = 5$, a probabilidade de que a duração do ciclo exceda 10.

(d) Determine um limitante superior para a probabilidade calculada no item anterior, utilizando a desigualdade de Tchebyshev.

(7) Num determinado instante de t_0 uma chamada telefônica chega a uma central telefônica e encontra todos os seus N circuitos ocupados. Assim, a chamada não pode ser servida imediatamente e passa a aguardar a liberação de qualquer um dois N circuitos. Considere que as durações x_i, $i = 1, \cdots, N$ das chamadas que estão utilizando cada um dos N circuitos (medidas a partir de t_0) são variáveis aleatórias estatisticamente independentes e identicamente distribuídas, com funções de densidade de probabilidade dadas por

$$p_{x_i}(X) = e^{-X}u(X); \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

Determine a espera média da chamada telefônica, ou seja, o intervalo de tempo ocorrido desde t_0 até o instante em que a chamadas é servida.