

Estatística e Modelos Probabilísticos - Quiz 3

Matheus Henrique Sant'Anna Cardoso

DRE: 121073530

Novembro de 2022

Questão 1

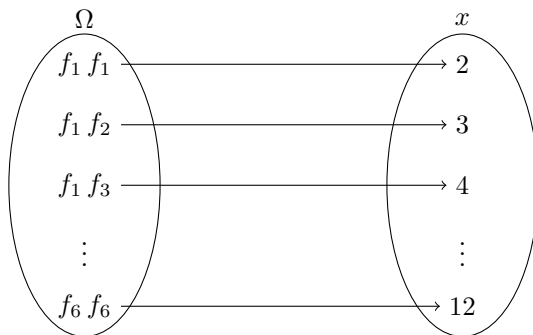
Considere o lançamento de dois dados e a experiência cujo resultado consiste na soma do número de pontos da face superior dos dados. Resolva:

a. Modele com uma v.a. esta soma.

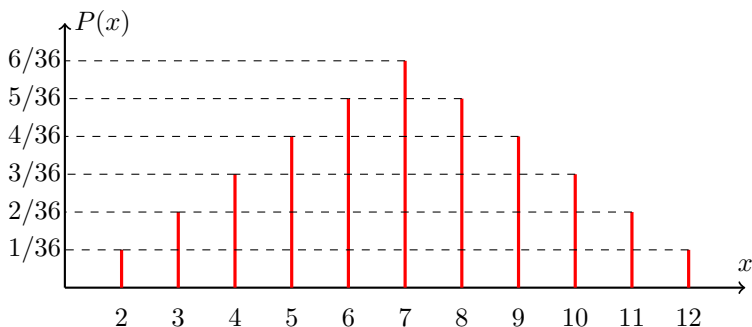
Aqui, o espaço amostra da variável aleatória pode ser dado por:

$$\Omega_x = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

De forma que, possamos, de cada par $f_i f_j$ com $i, j = 1, 2, \dots, 6$ apontar para uma soma $i + j$.



b. Encontre e esboce sua distribuição de probabilidade.



c. Encontre e esboce a Função Distribuição de Probabilidades (F.D.P.)

Sabemos que:

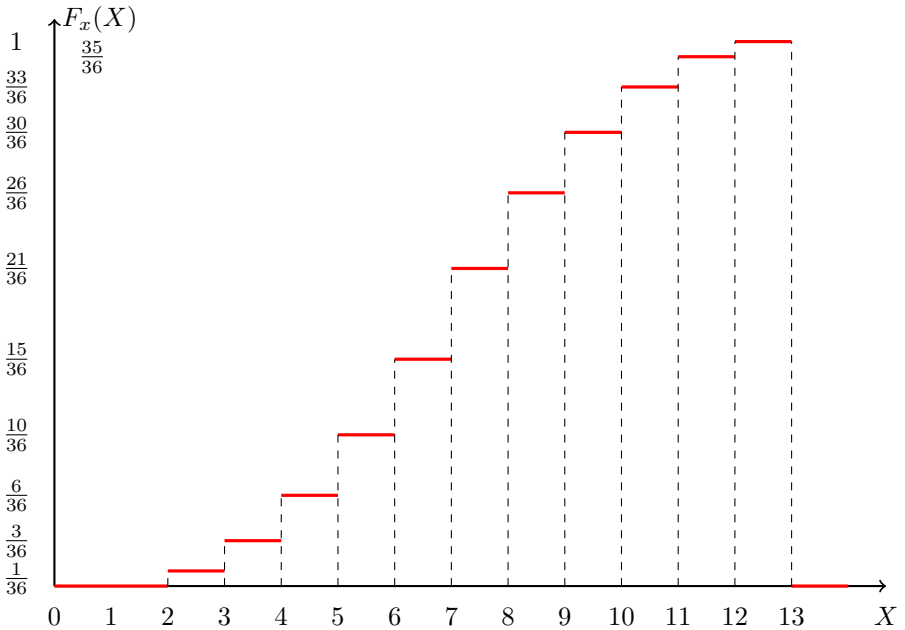
$$F_x(X) = \sum_i P(x = X_i)u_{-1}(X - X_i)$$

Então,

$$F_x(X) = P(2)u_{-1}(X - 2) + P(3)u_{-1}(X - 3) + \cdots P(12)u_{-1}(X - 12) =$$

$$F_x(X) = \frac{1}{36}u_{-1}(X - 2) + \frac{2}{26}u_{-1}(X - 3) + \cdots + \frac{1}{36}u_{-1}(X - 12)$$

Esboçando a Função Distribuição de Probabilidades, temos:



- d. Encontre e esboce a função densidade de probabilidades (f.d.p.)
- e. Calcule a probabilidade de obter um valor no intervalo $[7, 9]$.

Questão 2

Seja x uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$P(x = X) = \frac{c}{4^x}, X = 0, 1, \dots$$

Obtenha:

- a. O valor de c .
- b. A probabilidade de x ser um número par.

Questão 3

Seja x uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$p_x(x) = \begin{cases} c(1 - x^2); & -1 < x < 1 \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- a. Qual o valor de c ?
- b. qual é a Função Distribuição Cumulativa de x ?

Questão 4

Quinze pessoas portadoras de determinada doença são selecionadas para se submeter a um tratamento. Este tratamento é eficaz na cura da doença em 80% dos casos. Suponha que os indivíduos submetidos ao tratamento se curam (ou não) independentes uns dos outros.

- a. Modelar com uma v.a. o número de curados x dentre os 15 pacientes submetidos ao tratamento.
- b. Qual a distribuição de x ?
- c. Qual a probabilidade de que os 15 pacientes sejam curados?
- d. Qual a probabilidade de que pelo menos dois não sejam curados?

Questão 5

Seja x o número de ensaios necessários para obter o primeiro sucesso quando se realiza uma sequência de ensaios de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso p .

- Deduza o modelo de distribuição de probabilidades (conhecida como geométrica).
- Mostre que a somatória das probabilidades da distribuição geométrica é igual a 1.

Questão 6

Um amperímetro digital tem uma escala que vai de -5 a $+5$ Ampère e tem a precisão de apenas um dígito, isto é, indica valores inteiros de corrente. Assim, ao se fazer uma medida, o aparelho aproxima o valor real da corrente para o valor inteiro mais próximo. Determine a probabilidade de que o erro na medida seja superior a 0.2 Ampère. Considere que a função densidade de probabilidade da corrente na entrada do amperímetro seja a mostrada na figura 4.

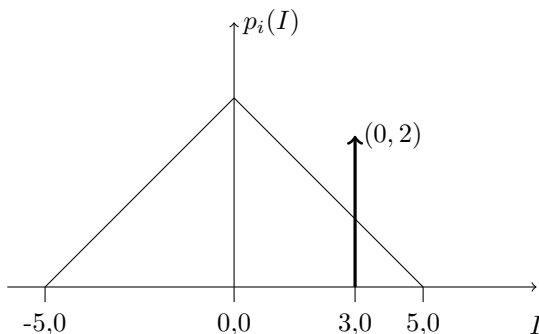
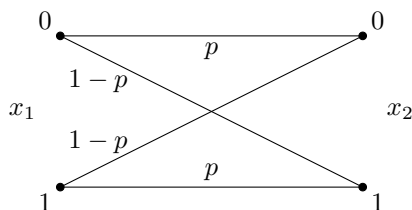


Figura 4

Questão 7

No canal binário da figura, a v.a. x_1 representa os dígitos transmitidos e a v.a. x_2 os dígitos recebidos. Os bits recebidos podem estar alterados devido ao ruído no canal.



- Determine os eventos A_x para um vetor aleatório bidimensional que represente este experimento.
- Encontre a distribuição de probabilidades e a F.D.P conjuntas, considerando que a probabilidade de transmissão de cada um dos dígitos é igual, e que o ruído do canal pode ser caracterizado pelas probabilidades condicionadas mostradas na figura.
- Encontre a distribuição de probabilidades e a F.D.P de cada v.a.

Questão 8

Encontre a distribuição de probabilidades marginal $P_x(K)$, sabendo que:

$$P_{xy}(K, L) = \begin{cases} \frac{2 \left\lfloor \frac{K}{K+1} \right\rfloor^L}{n(n+1)} & K = 0, 1, \dots, n-1; L \geq 0 \\ 0 & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Observação

$$P_x(X_i) = \sum_j P_{xy}(X_i, Y_j), \quad P_y(Y_j) = \sum_i P_{xy}(X_i, Y_j)$$

Questão 9

Dois usuários A e B solicitam serviços a um determinado provedor. Considere que as v.a.'s x e y caracterizam, respectivamente, os tempos (em segundos) necessários para a execução dos serviços solicitados pelos usuários A e B. Suponha que a densidade de probabilidade conjunta das v.a.'s x e y seja dada por:

$$p_{xy}(X, Y) = Ke^{-(3X+2Y)}u(X)u(Y)$$

Sabe-se que quando um serviço é solicitado ao provedor, a probabilidade de que a solicitação venha de A vale 0.6, valendo, portanto 0.4 a probabilidade de que ela venha de B.

- a. Determine o valor da constante K .
- b. Calcule a probabilidade de que a execução de um serviço solicitado ao provedor requeira um tempo superior a 0.5 segundos.
- c. Calcule a probabilidade de que uma solicitação de serviço venha do usuário A sabendo-se que sua execução requer um tempo maior do que 0.5 segundos.

Questão 10

Se x é uma variável aleatória normal (gaussiana) com parâmetros $\mu = 10$ e $\sigma^2 = 36$, calcule:

- a. $P(x > 5)$
- b. $P(4 < x < 16)$
- c. $P(x < 8)$
- d. $P(x < 20)$
- e. $P(x > 16)$