

Sinais e Sistemas - Trabalho 5 - Avaliação 9

Grupo 2

Leonardo Soares da Costa Tanaka

Matheus Henrique Sant Anna Cardoso

Theo Rudra Macedo e Silva

1.) Um SLIT relaxado é descrito pela equação a diferenças $y_{k+2} + \alpha y_k = \beta u_{k+1} + \gamma u_k$.

Os dados (α, β, γ) são: **G2:** $(-1/4, 1, 2)$;

Utilizando as constantes do grupo, a equação torna-se: $y_{k+2} - \frac{1}{4}y_k = u_{k+1} + 2u_k$

(a) Encontrar a função de transferência $G(z)$;

$$y_{k+2} - \frac{1}{4}y_k = u_{k+1} + 2u_k$$

$$z^2Y(z) - z^2Y(0) - zY(1) - \frac{1}{4}Y(z) = zU(z) - zu(0) + 2U(z)$$

$$Y(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}}U(z) + \frac{z^2y(0) + zy(1) - zu(0)}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

$$G(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

(b) encontrar polos e zeros e verificar a estabilidade;

$$Polos \Rightarrow x^2 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2}; p_2 = -\frac{1}{2}$$

$$Zeros \Rightarrow x + 2 \Rightarrow z_1 = -2$$

O SLIT é estável nesse caso, porque seus pólos p_1 e p_2 estão no círculo unitário.

(c) encontrar as equações dinâmicas;

$$\begin{aligned} x_1[k] = y[k] & \Rightarrow x_1[k+1] = y[k+1] = x_2[k] - p_1 u[k] \\ x_2[k] = y[k+1] + p_1 u[k] & \Rightarrow x_2[k+1] = y[k+2] + p_1 u[k] = \frac{1}{4}x_1[k] + (p_1 + 1)u[k+1] + 2u[k] \end{aligned}$$

$$p_1 = -1$$

$$\begin{array}{lll} x_1[k] = y[k] & \Rightarrow & x_1[k+1] = x_2[k] + u[k] \\ x_2[k] = y[k+1] - u[k] & \Rightarrow & x_2[k+1] = \frac{1}{4}x_1[k] + 2u[k] \end{array}$$

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u[k]; \quad y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[k]$$

(d) calcular, iterativamente, os 10 primeiros valores y_k para entrada em degrau unitário;

Podemos usar o seguinte formato para $y(k)$:

$$y(k) = CA^k x(0) + C \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j)$$

Assumindo que $x(0) = 0$, pois o SLIT é relaxado:

$$y(k) = C \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j)$$

Por fim, os valores são:

$$y(0) = 0.000000$$

$$y(1) = 1.000000$$

$$y(2) = 3.000000$$

$$y(3) = 3.250000$$

$$y(4) = 3.750000$$

$$y(5) = 3.812500$$

$$y(6) = 3.937500$$

$$y(7) = 3.953125$$

$$y(8) = 3.984375$$

$$y(9) = 3.988281$$

$$y(10) = 3.996094$$

(e) usando transformada em Z , encontrar uma expressão analítica para a y_k ;

Utilizaremos uma das expressões obtidas no item a)

$$Y(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}} U(z) + \frac{z^2 y(0^-) + zy(1) - zu(0^-)}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

Como a entrada é um degrau unitário, e temos os valores obtidos para $y(0)$, $y(1)$ e $u(0)$, obtém-se:

$$Y(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}} \cdot \frac{z}{z-1}$$

Manipulando a equação:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{z+2}{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{2})} \cdot \frac{z}{z(z-1)} \\ Y(z) &= \frac{z}{z+\frac{1}{2}} - 5 \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + 4 \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

Calculando a inversa:

$$y(k) = \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 5 \left(\frac{1}{2}\right)^k + 4 \right] \cdot 1(k)$$

Por fim, plotando os resultados:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0.000000 \\ y(1) &= 1.000000 \\ y(2) &= 3.000000 \\ y(3) &= 3.250000 \\ y(4) &= 3.750000 \\ y(5) &= 3.812500 \\ y(6) &= 3.937500 \\ y(7) &= 3.953125 \\ y(8) &= 3.984375 \\ y(9) &= 3.988281 \\ y(10) &= 3.996094 \end{aligned}$$

(f) comparar os resultados iterativo e analítico.

Embora métodos diferentes tenham sido utilizados, os resultados iterativo e analítico são os mesmos.

G2: 2.) Eis um “Problema de Algibeira”: um vendedor de queijos efetua apenas transações do tipo *vende metade de seu estoque mais meia peça*. Pede-se o número inicial de peças, x_0 se após a 6^a venda seus queijos acabam. Interpretar a filosofia de vendas por meio de uma equação a diferenças e calcular x_k , o saldo de estoque após a k -ésima venda. Dar a resposta ao problema de algibeira.

Antes de mais nada, podemos pensar um pouco antes de tomarmos quaisquer decisões. É claro ser impossível realizar a venda de meia peça, portanto, é provável que seja uma correção, justamente para que não se venda meia peça. Veja o processo:

Processo: (Venda)

Após a venda k : c peças.

Logo antes: $c + 1/2$ peças.

Antes da venda k : $2 \cdot (c + 1/2) = \boxed{2c + 1}$ peças. Ou, após a venda $k - 1$.

Disso, podemos ir dando passos para trás até chegarmos ao momento anterior à primeira venda. Considerando, cada processo, uma venda e que antes de cada venda, teremos $2c + 1$ peças, sendo c o número de peças após essa venda:

Após a venda 6: 0

Após a venda 5: $2 \cdot 0 + 1 = 1$

Após a venda 4: $2 \cdot 1 + 1 = 3$

Após a venda 3: $2 \cdot 3 + 1 = 7$

Após a venda 2: $2 \cdot 7 + 1 = 15$

Após a venda 1: $2 \cdot 15 + 1 = 31$

Finalmente, antes da primeira venda, teremos: $2 \cdot 31 + 1 = 63$

Portanto, com passos simples, podemos resolver este problema.

Ainda assim, é possível resolvê-lo por métodos analíticos, com uma equação a diferenças, modelando da seguinte maneira: a quantidade de peças após a venda k (x_k) é a metade da anterior subtraída de $1/2$, da forma abaixo:

$$x_k = \frac{1}{2}x_{k-1} - \frac{1}{2}$$

Podemos realizar a transformada Z desta equação, obtendo:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\{x_k\} &= \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{x_{k-1}\} - \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{1[k]\} \\
 X(z) &= \frac{1}{2}(z^{-1}X(z) + x[-1]) - \frac{z}{2z-2} \\
 X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1]}{2} - \frac{z}{2z-2} \\
 X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1](z-1)}{2z-2} - \frac{z}{2z-2} \\
 X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1]z - x[-1] - z}{2z-2} \\
 \frac{X(z)}{z} &= \frac{x[-1]z - x[-1] - z}{(z-1)(2z-1)} \\
 \frac{X(z)}{z} &= \frac{x[-1]+1}{2z-1} - \frac{1}{z-1} \\
 X(z) &= \frac{x[-1]+1}{2} \left(\frac{z}{z-1/2} \right) - \frac{1}{z-1}
 \end{aligned}$$

A partir daqui, podemos fazer a transformada inversa:

$$x[k] = \frac{x[-1]+1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^k - 1[k]$$

Podemos descobrir $x[-1]$ dado que sabemos $x[6]$:

$$\begin{aligned}
 x[6] = 0 &= \frac{x[-1]+1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^6 - 1[6] \\
 0 &= \frac{x[-1]+1}{128} - 1 \\
 128 &= x[-1] + 1
 \end{aligned}$$

$$\boxed{x[-1] = 127}$$

Temos tudo o que precisamos:

$$\begin{aligned}
 x[k] &= \frac{x[-1]+1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^k - 1[k] \\
 x[k] &= 64 \left(\frac{1}{2} \right)^k - 1[k]
 \end{aligned}$$

Aplicando para $k = 0$, teremos:

$$x[0] = 64 \cdot 1 - 1$$

$$\boxed{x[0] = 63}$$

Que foi o resultado obtido da primeira forma.

3.) Para a EDLIT $\tau \dot{y}(t) + y(t) = \beta u(t)$ **com** $y(0^-) = y_0$:

G2: $\tau = 2, \beta = 2$ e $y_0 = 1$.

Utilizando as constantes do grupo, a equação torna-se: $2\dot{y}(t) + y(t) = 2u(t)$ com $y(0^-) = 1$

(a) Calcular a resposta à rampa unitária por Laplace, e traçar com precisão o seu gráfico para $t \in [0, 5\tau]$;

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{2}y(t) = u(t); \quad y(0^-) = 1; \quad u(t) = t1(t)$$

$$sY(s) - y(0^-) + \frac{1}{2}Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(s + 1/2)Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2(s + 1/2)} = \frac{r_1}{s^2} + \frac{r_2}{s} + \frac{r_3}{s + 1/2}$$

$$r_1 = 2; \quad r_2 = -4; \quad r_3 = 5$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s} + \frac{5}{s + 1/2}$$

$$y(t) = 2t \, 1(t) - 4 \, 1(t) + 5e^{-\frac{1}{2}t}1(t)$$

%Questão 3.a)

% Intervalo

dt=0.001;

% Dados basicos

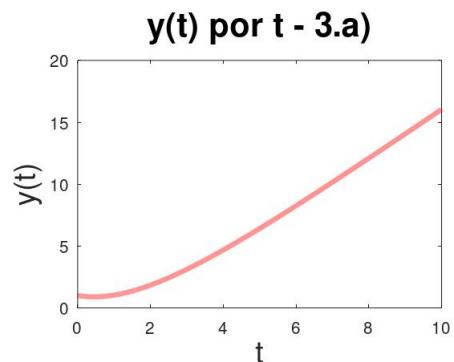
t=0:dt:10-dt; x=2*t-4+5*exp(-1/2*t);

plot (t, x, "r", "linewidth", 3);

title("y(t) por t - 3.a)", "fontsize", 20);

xlabel("t", "fontsize", 18);

ylabel("y(t)", "fontsize", 18);



(b) por Euler I, encontrar a equação que relaciona $y_k \leftrightarrow y(kT)$ e $u_k \leftrightarrow u(kT)$;

Buscando chegar em uma relação tal que $y(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau$, fazemos:

$$\begin{aligned} 2\dot{y}(t) &= 2u(t) - y(t) \\ \dot{y}(t) &= \frac{2u(t) - y(t)}{2} \\ y(t) &= \int_0^t \frac{2u(t) - y(t)}{2} dt \end{aligned}$$

Tendo $a(t)$, fazemos:

$$\begin{aligned} y(kT) &= y(kT - T) + Ta(kT - T) \\ y[k] &= y[k - 1] + Ta[k - 1] \\ y[k] &= y[k - 1] + T \frac{2u(t) - y(t)}{2} \\ y[k] &= y[k - 1] \left(1 - \frac{T}{2}\right) + Tu[k - 1] \end{aligned}$$

(c) resolvê-la por transformada Z para entrada em rampa;

Aqui, $u[k] = kT \cdot 1[k]$. Logo, $U(z) = T \frac{z}{(z-1)^2}$. Deslocando a sequência, temos: $y[k + 1] = y[k] \left(1 - \frac{T}{2}\right) + Tu[k]$. Aplicando a transformada Z , teremos:

$$\begin{aligned} zY(z) - z &= Y(z) + TU(z) \\ \frac{Y(z)}{z} &= \frac{z^2 - 2z + 1 - T^2}{(z - 1 + T/2)(z - 1)^2} \end{aligned}$$

Separando em frações parciais:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{A}{z - 1 + T/2} + \frac{B}{z - 1} + \frac{C}{(z - 1)^2} \\ Y(z) &= A \frac{z}{z - 1 + T/2} + B \frac{z}{z - 1} + C \frac{z}{(z - 1)^2} \\ y[k] &= A \cdot \left(1 - \frac{T}{2}\right)^k + B \cdot 1[k] + C \cdot k \cdot 1[k] \end{aligned}$$

Agora, basta descobrir A, B e C . Somando as frações:

$$A(z^2 - 2z + 1) + B(z - 1 + T/2)(z - 1) + C(z - 1 + T/2) = z^2 - 2z + 1 - T^2$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A + 2B - \frac{TB}{2} - C = 2 \\ A + B - \frac{TB}{2} + \frac{TC}{2} - C = 1 + T^2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 5 \\ B = -4 \\ C = 2T \end{cases}$$

Então

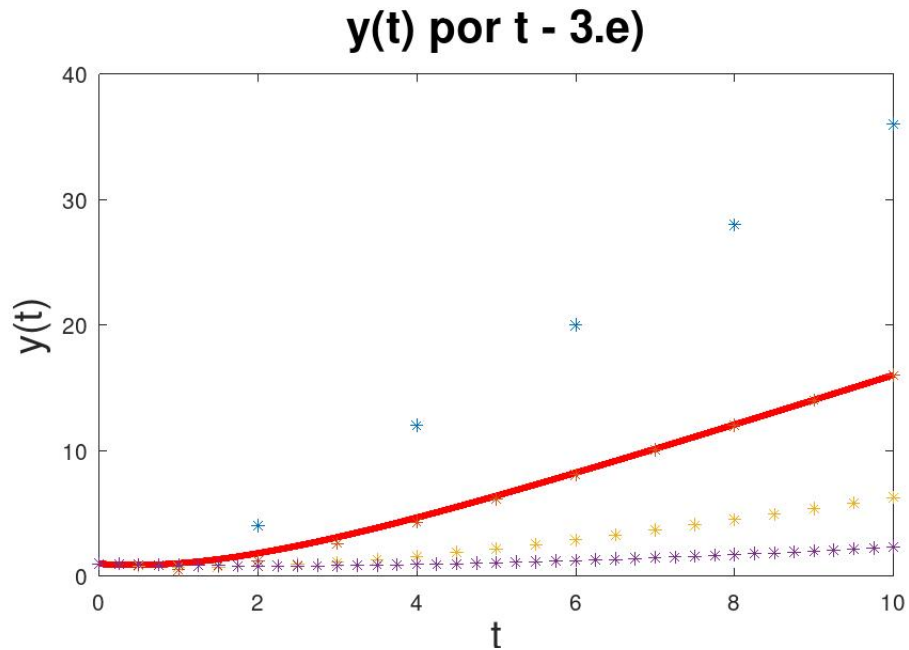
$$y[k] = 5 \cdot \left(1 - \frac{T}{2}\right)^k \cdot 1[k] - 4 \cdot 1[k] + 2T \cdot k \cdot 1[k]$$

(d) listar as sequências obtidas para $T = \tau, T = \tau/2, T = \tau/4$ e $T = \tau/8$;

Sendo $\tau = 2$, substituímos:

$$\begin{cases} T = 2 & y[k] = 5 \cdot \delta(k) - 4 \cdot 1[k] + 4 \cdot k \cdot 1[k] \\ T = 1 & y[k] = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 1[k] - 4 \cdot 1[k] + 2 \cdot k \cdot 1[k] \\ T = \frac{1}{2} & y[k] = 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot 1[k] - 4 \cdot 1[k] + k \cdot 1[k] \\ T = \frac{1}{4} & y[k] = 5 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^k \cdot 1[k] - 4 \cdot 1[k] + \frac{1}{2} \cdot k \cdot 1[k] \end{cases}$$

(e) plotar os valores de $y(kT)$ no mesmo gráfico do item (a) e comparar as aproximações numéricas;



$y(t)$ em vermelho – $T = 2$ em azul – $T = 1$ em laranja – $T = 1/2$ em amarelo – $T = 1/4$ em roxo.

Aqui, o período igual a um ($T = 1$) aproxima-se mais da curva real.

Código para o gráfico:

```
%% Questão 3 e)
```

```
%% Trabalho 5 - Sinais e Sistemas
```

```
%Questão 3.a)
```

```

% Intervalo
dt = 0.001;
% Dados basicos
t = 0:dt:10 - dt; x = 2 * t - 4 + 5*exp(-1/2 * t);
plot (t, x, "r", "linewidth", 3), hold on
T = 2          %% Valor inicial do periodo
for j=0:3
    k = 0:T:10;
    y = (5 * (1 - T/2).^k) + (2 * T * k) - 4;
    plot(k, y, "*"), hold on
    T = T / 2;    %% Mudanca no periodo segue um padrao
endfor
title("y(t) por t - 3.e)", "fontsize", 20)
xlabel("t", "fontsize", 18),
ylabel("y(t)", "fontsize", 18);

```

(f) repetir (b), (c), (d) e (e) para Newton.

Com o mesmo $a = \frac{2u(t)-y(t)}{2}$ pelo método de Newton, teremos:

$$\begin{aligned}
 y[k] &= y[k-1] + T \frac{a[k] + a[k-1]}{2} \\
 y[k] &= y[k-1] + \frac{T}{4} (2u[k] - y[k] + 2u[k-1] - y[k-1]) \\
 y[k] \left[1 + \frac{T}{4} \right] &= y[k-1] \left[1 - \frac{T}{4} \right] + \frac{T}{2} u[k] + \frac{T}{2} u[k-1]
 \end{aligned}$$

Fazendo a transformada Z:

$$\begin{aligned}
 Y(z) \left[1 + \frac{T}{4} \right] &= z^{-1} Y(z) \left[1 - \frac{T}{4} \right] + \frac{T}{2} U(z) + \frac{T}{2} z^{-1} U(z) \\
 Y(z) [4z - 4 + T + Tz] &= \frac{zT^2(z+1)}{2(z-1)^2} \\
 \frac{Y(z)}{z} &= \frac{T^2(z+1)}{2(z(4-T) + T-4)(z-1)^2}
 \end{aligned}$$

Fazendo algumas simplificações, chamemos de $p = \frac{T-4}{T+4}$.

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{z} &= \frac{1}{2(4-T)} \cdot \frac{T^2(z+1)}{(z+p)(z-1)^2} \\ \frac{Y(z)}{z} &= \frac{A}{z+p} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2} \\ Y(z) &= A \frac{z}{z+p} + B \frac{z}{z-1} + C \frac{z}{(z-1)^2}\end{aligned}$$

Voltando:

$$y[k] = A \cdot p^k 1[k] + B \cdot 1[k] + C \cdot k 1[k]$$

Para os valores A , B e C , faremos:

$$A(z^2 - 2z + 1) + B(z - p)(z - 1) + C(z - p)$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B - pB + C = T^2 \\ A + Bp - Cp = T^2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{T^2(1+p)}{(1-p)^2} \\ B = -\frac{T^2(1+p)}{(1-p)^2} \\ C = \frac{2T^2}{1-p} \end{cases}$$

Uma lista para os casos com T e p :

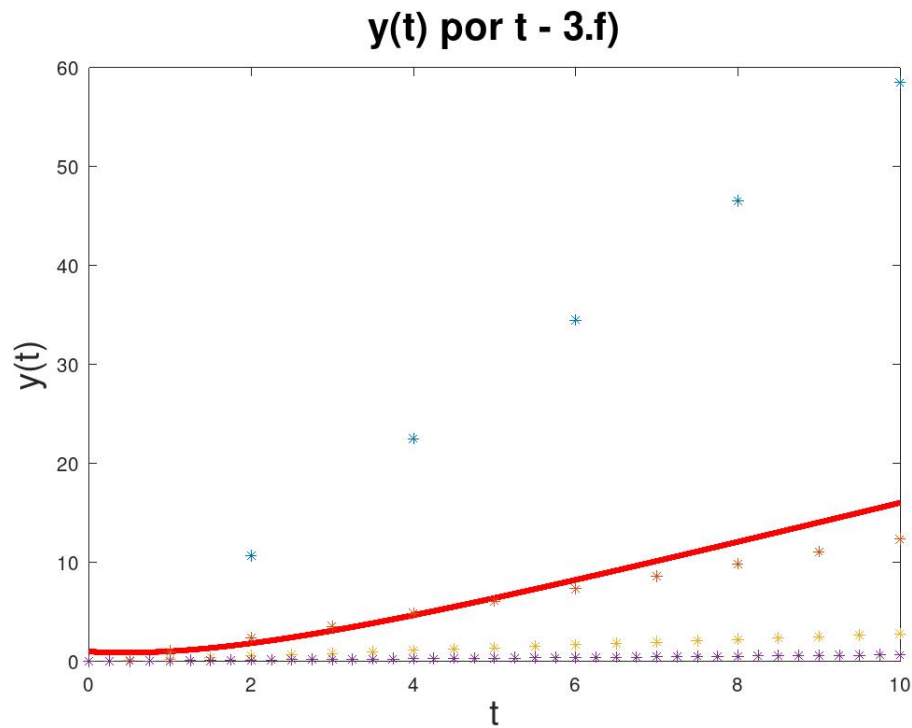
$T = 2$	$p = -\frac{1}{3}$	$A = \frac{3}{2}$	$B = -\frac{3}{2}$	$C = 6$
$T = 1$	$p = -\frac{3}{5}$	$A = \frac{5}{32}$	$B = -\frac{5}{32}$	$C = \frac{5}{4}$
$T = \frac{1}{2}$	$p = -\frac{7}{9}$	$A = \frac{9}{512}$	$B = -\frac{9}{512}$	$C = \frac{9}{32}$
$T = \frac{1}{4}$	$p = -\frac{15}{17}$	$A = \frac{17}{8192}$	$B = -\frac{17}{8192}$	$C = \frac{17}{256}$

Então, para cada caso, teremos:

$$y[k] = A \cdot p^k 1[k] + B \cdot 1[k] + C \cdot k 1[k]$$

$T = 2$	$y[k] = \frac{3}{2} \cdot p^k 1[k] - \frac{3}{2} \cdot 1[k] + 6 \cdot k 1[k]$
$T = 1$	$y[k] = \frac{5}{32} \cdot p^k 1[k] - \frac{5}{32} \cdot 1[k] + \frac{5}{4} \cdot k 1[k]$
$T = \frac{1}{2}$	$y[k] = \frac{9}{512} \cdot p^k 1[k] - \frac{9}{512} \cdot 1[k] + \frac{9}{32} \cdot k 1[k]$
$T = \frac{1}{4}$	$y[k] = \frac{17}{8192} \cdot p^k 1[k] - \frac{17}{8192} \cdot 1[k] + \frac{17}{256} \cdot k 1[k]$

Fazendo, finalmente, os gráficos, teremos:



Aqui, igualmente, aquela com período igual a um ($T = 1$) é mais próxima da curva real.

Código para o gráfico:

```
%% Questão 3 f)
%% Trabalho 5 - Sinais e Sistemas
%Questão 3.a)
% Intervalo
dt = 0.001;
% Dados basicos
t = 0:dt:10 - dt; x = 2 * t - 4 + 5*exp(-1/2 * t);
plot (t, x, "r", "linewidth", 3), hold on
T = 2          %% Valor inicial do periodo
for j=0:3
    %% Coeficientes
    p = (T - 4) / (T + 4);
    A = (T^2 * (1 + p)) / (1 - p)^2;
    B = -A;
    C = (2*T^2) / (1 - p);
    k = 0:T:10;
    y = (A * p.^k) + B + C * k;
```

```

plot(k, y, "*"), hold on
T = T / 2;    %% Mudanca no periodo segue um padrao
endfor
title("y(t) por t - 3.f)", "fontsize", 20),
xlabel("t", "fontsize", 18),
ylabel("y(t)", "fontsize", 18);

```

4.) Para a EDLIT $\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2y(t) = \alpha\dot{u}(t) + \beta u(t)$ com CIs nulas:

Os dados $(\zeta, \omega_n, \beta, \alpha)$ são G2: $(1/3, 2, 3, -1)$.

Utilizando os dados do grupo, temos: $\ddot{y}(t) + \frac{4}{3}\dot{y}(t) + 4y(t) = -\dot{u}(t) + 3u(t)$

(a) para $u(t) = 1$, encontre, por Laplace, a solução e plote-a com precisão para $t \in [0, 8/(\zeta\omega_n)]$;

Utilizando Laplace na EDLIT:

$$s^2Y(s) + 2\zeta\omega_nsY(s) + \omega_n^2Y(s) = \alpha sU(s) + \beta U(s); \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + 2\zeta\omega_ns + \omega_n^2}U(s) = \frac{\alpha s + \beta}{(s^2 + 2\zeta\omega_ns + \omega_n^2)s}$$

Descobrimos os valores do denominador das frações polinomiais:

$$Y(s) = \frac{r_1s + r_2}{s^2 + 2\zeta\omega_ns + \omega_n^2} + \frac{r_3}{s} = \frac{r_1s + r_2}{s^2 + 2\zeta\omega_ns + \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2 - \zeta^2\omega_n^2} + \frac{r_3}{s}$$

$$Y(s) = \frac{r_1s + r_2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)} + \frac{r_3}{s} = \frac{r_1s + r_2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})^2} + \frac{r_3}{s}$$

Substituindo $\omega = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ para achar a transformada de seno e cosseno nas expressões da transformada:

$$Y(s) = \frac{r_1(s + \zeta\omega_n)}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega^2} + \frac{\frac{r_2 - r_1\zeta\omega_n}{\omega}\omega}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega^2} + \frac{r_3}{s}$$

$$y(t) = e^{-\zeta\omega_nt}(r_1\cos(\omega t) + \frac{r_2 - r_1\zeta\omega_n}{\omega}\sin(\omega t)) + r_3$$

Descobrimos os denominadores das frações anteriores:

$$r_1 = \frac{-\beta}{\omega_n^2}, r_2 = \alpha - \frac{2\zeta\beta}{\omega_n}, r_3 = \frac{\beta}{\omega_n^2}$$

$$\omega = \frac{4\sqrt{2}}{3}, r_1 = \frac{-3}{4}, r_2 = -2, r_3 = \frac{3}{4}$$

Solução:

$$y(t) = e^{-\frac{2}{3}t} \left(-\frac{3}{4} \cos \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}t \right) - \frac{15\sqrt{2}}{16} \sin \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}t \right) \right) + \frac{3}{4}$$

%Questão 4.a)

% Intervalo

dt=0.001;

% Dados basicos

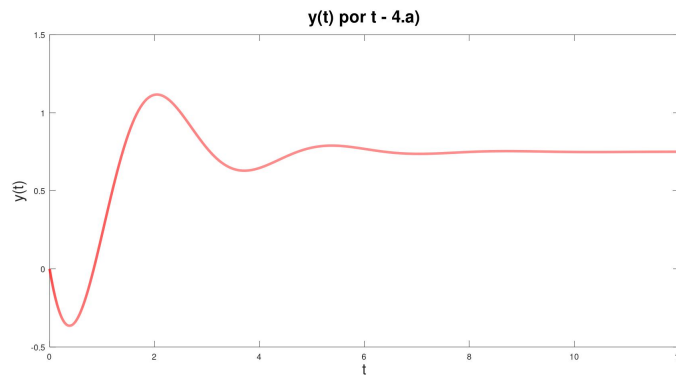
t=0:dt:12-dt; y=e.^(-2/3*t).*(-3/4*cos(4*sqrt(2)/3*t)-15*sqrt(2)/16*sin(4*sqrt(2)/3*t))+3/4;

plot (t, y, "r", "linewidth", 3);

title("y(t) por t - 4.a)", "fontsize", 20);

xlabel("t", "fontsize", 18);

ylabel("y(t)", "fontsize", 18);



(b) por meio de variáveis x_1 e x_2 apropriadas, expressá-la como $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$ e $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)$;

$$x_1(t) = y(t), x_2(t) = \dot{y}(t) + pu(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) - pu(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) + p\dot{u}(t) = -\omega_n^2 y(t) - 2\zeta\omega_n \dot{y}(t) + \alpha\dot{u}(t) + \beta u(t) + p\dot{u}(t) = \\ &= -\omega_n^2 x_1(t) - 2\zeta\omega_n x_2(t) + (\alpha + p)\dot{u}(t) + (\beta + 2\zeta\omega_n p)u(t) \end{aligned}$$

Já que $\dot{u}(t)$ tem que sumir, então $p = -\alpha = 1$.

Utilizando as expressões anteriores chegamos na seguinte expressão:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -p \\ \beta + 2\zeta\omega_n p \end{bmatrix} u(t), y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Substituindo com os valores das constantes:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4/3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 13/3 \end{bmatrix} u(t), y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

(c) por Euler I, relacione $\mathbf{x}_k \leftrightarrow \mathbf{x}(kT)$, $y_k \leftrightarrow y(kT)$ e $u_k \leftrightarrow u(kT)$ (o procedimento para vetores é o mesmo e leva a $\mathbf{x}_k = A_d \mathbf{x}_{k-1} + B_d \mathbf{u}_k$ e $\mathbf{y}_k = C_d \mathbf{x}_k + D_d \mathbf{u}_k$) e obtenha y_k ;

Utilizando Euler I para obter x_k :

$$\begin{aligned} \dot{x}(kT) &= A_d x(kT) + B_d u(kT) = w(kT) \\ \int_0^{kT} \dot{x}(t) dt &= \int_0^{kT} w(t) dt \\ x(kT) - x(kT - T) &= T w(kT - T) \\ x(kT) &= x(kT - T) + T(A_d x(kT - T) + B_d u(kT - T)) \\ x_k &= (I + TA_d)x_{k-1} + B_d T u_{k-1} \end{aligned}$$

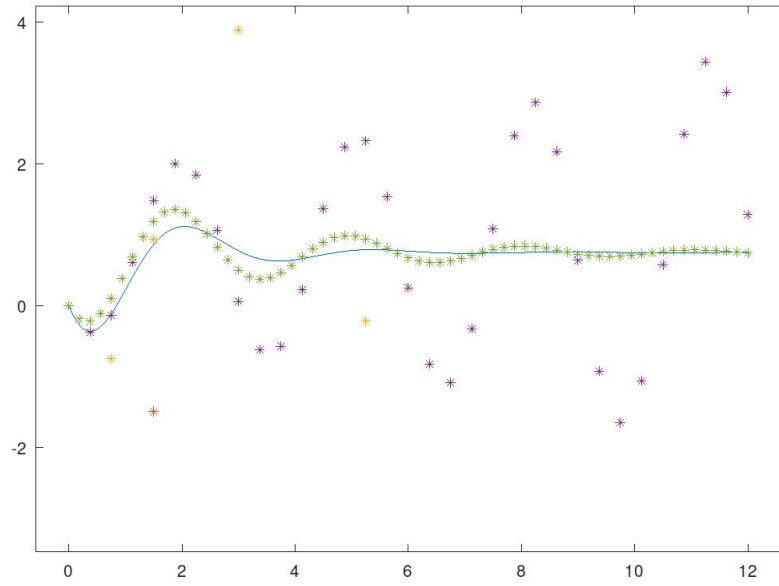
Obtendo y_k :

$$\begin{aligned} y(KT) &= C_d x(KT) \\ y_k &= C_d x_k \end{aligned}$$

(d) plota as sequências obtidas para $T = T_0 = 1/(\zeta\omega_n)$, $T = T_0/2$, $T = T_0/4$ e $T = T_0/8$ no gráfico de (a) e compare as aproximações numéricas.

5.) Seja EDVT $\dot{y}(t) + \alpha(t)y(t) = u(t)$ com $u(t) = 1(t)$. Quando um sinal contínuo p tende a uma constante para valores altos de t ($\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p_r = \text{cte.}$) esta é chamada de valor de regime do sinal.

Os dados $a(t)$ e $y(0^-)$ são: **G2:** $(t^2 - 1)/(t^2 + 1)$ e -1 .



(a) sem resolver a equação calcular o valor de regime y_r , supondo que $y(t)$ tende a ele;

$$\text{Foi dado que } a(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

Precisamos conhecer os limites de $\dot{y}(t)$ e $a(t)$. Se existe um valor de regime para a equação acima, então a taxa de variação da função tende a zero quando t tende a infinito. Portanto $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}(t) = 0$

$$\text{Basta fazer } \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right) = \left(\frac{1 - \frac{1}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2}} \right)$$

$$\text{Logo : } \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 1$$

Agora, aplicando o limite na equação inteira:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{y}(t)] + \lim_{t \rightarrow \infty} [a(t) \cdot y_r] = \lim_{t \rightarrow \infty} [1(t)]$$

$$0 + 1 \cdot y_r = 1$$

$$y_r = 1$$

(b) por Euler I, relacione as sequências $u_k \leftrightarrow u(kT)$ e $y_k \leftrightarrow y(kT)$;

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= u(t) - a(t)y(t) \\ y(t) &= y_0 + \int_0^t (u(t) - a(t)y(t))dt \\ y_k &= y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (u_i - a_i y_i)T \\ y_{k+1} &= -1 + \sum_{i=0}^k (u_i - a_i y_i)T \\ y_{k+1} &= y_k + (u_k - a_k y_k)T \\ \text{Dados : } a_k &= \frac{(KT)^2 - 1}{(KT)^2 + 1}; \quad u_k = 1(k)\end{aligned}$$

$$y_{k+1} = \left[1 - T \left(\frac{(KT)^2 - 1}{(KT)^2 + 1} \right) \right] y_k + T \cdot 1(k)$$

(c) resolva, manualmente ou por meio de um script em alguma linguagem, para $T = 1, T = 1/2, T = 1/4$ e $T = 1/10$; a solução $y(t)$ deve ser aproximada para $t \in [0, 10]$;

Para $T = 1$	Para $T = 1/2$	Para $T = 1/4$	Para $T = 1/10$
$y(0) = -1.0$	$y(0) = -1.0$	$y(0) = -1.0$	$y(0) = -1.0$
$y(1) = -1.0$	$y(1) = 0.5$	$y(1) = -0.30416667$	$y(1) = -0.20647793$
$y(2) = 0.33333333$	$y(2) = 0.5625$	$y(2) = 0.63425775$	$y(2) = 0.66582892$
$y(3) = 1.13333333$	$y(3) = 1.09583333$	$y(3) = 1.08627931$	$y(3) = 1.08022663$
$y(4) = 1.32380952$	$y(4) = 1.25279018$	$y(4) = 1.22955746$	$y(4) = 1.21710094$
$y(5) = 1.29417989$	$y(5) = 1.2593564$	$y(5) = 1.24424547$	$y(5) = 1.23560193$
$y(6) = 1.23530544$	$y(6) = 1.225763$	$y(6) = 1.21908111$	$y(6) = 1.21476884$
$y(7) = 1.19004699$	$y(7) = 1.18981198$	$y(7) = 1.18778411$	$y(7) = 1.18613779$
$y(8) = 1.15867293$	$y(8) = 1.16050257$	$y(8) = 1.16039514$	$y(8) = 1.16002065$
$y(9) = 1.13631446$	$y(9) = 1.13806452$	$y(9) = 1.13854073$	$y(9) = 1.13865689$
$y(10) = 1.11961205$	$y(10) = 1.12091172$	$y(10) = 1.12145406$	$y(10) = 1.12170391$

Para tal, foi realizado um código na linguagem python, a seguir:

```
import numpy as np

# Função a(t)
def a(t):
    return (t*2 - 1)/(t*2 + 1)

# Valores iniciais
y0 = -1
t0 = 0

# Passos de tempo
Ts = [1, 0.5, 0.25, 0.1]

# Número de passos
N = 100

# Loop sobre os passos de tempo
for T in Ts:
    # Vetor de tempos
    t = np.linspace(t0, t0 + N*T, N+1)

    # Vetor de solução aproximada
    y = np.zeros(N+1)
    y[0] = y0

    # Loop sobre os passos
    for k in range(N):
        y[k+1] = y[k] + T*(1 - a(t[k])*y[k])

    # Imprime a solução aproximada para o intervalo [0, 10]
    print(y[0:int(10/T)+1])
```

(d) repetir (b) e (c) para Euler II.

Aplicando Euler II, sabendo que $y_k = y(KT)$:

$$y_k = y_0 + \sum_{i=1}^k (u_i - a_i y_i) T$$
$$y_{k+1} = y_0 + \sum_{i=1}^{k+1} (u_i - a_i y_i) T$$
$$y_{k+1} = y_k + (u_{k+1} - a_{k+1} y_{k+1}) T$$

$$y_{k+1} = \frac{y_k + T u_{k+1}}{1 + T a_{k+1}}$$

$$y_{k+1} = \frac{y_k + T \cdot 1(k+1)}{1 + T \left[\frac{((k+1)T)^2 - 1}{((k+1)T)^2 + 1} \right]}$$

Para $T = 1$	Para $T = 1/2$	Para $T = 1/4$	Para $T = 1/10$
$y(0) = -1$	$y(0) = -1$	$y(0) = -1$	$y(0) = -1$
$y(1) = 0.0$	$y(1) = -0.5$	$y(1) = -0.8823$	$y(1) = -0.991525$
$y(2) = 0.555555$	$y(2) = 0.0$	$y(2) = -0.6799$	$y(2) = -0.972735$
$y(3) = 0.826388$	$y(3) = 0.384615$	$y(3) = -0.4299$	$y(3) = -0.940867$
$y(4) = 0.949722$	$y(4) = 0.649464$	$y(4) = -0.1705$	$y(4) = -0.894539$
$y(5) = 1.001940$	$y(5) = 0.821046$	$y(5) = 0.07244$	$y(5) = -0.833776$
$y(6) = 1.021398$	$y(6) = 0.927356$	$y(6) = 0.28612$	$y(6) = -0.759782$
$y(7) = 1.026491$	$y(7) = 0.990410$	$y(7) = 0.46619$	$y(7) = -0.674590$
$y(8) = 1.025754$	$y(8) = 1.025788$	$y(8) = 0.61343$	$y(8) = -0.580685$
$y(9) = 1.023006$	$y(9) = 1.043960$	$y(9) = 0.73108$	$y(9) = -0.480685$
$y(10) = 1.01986$	$y(10) = 1.05174$	$y(10) = 0.8233$	$y(10) = -0.37710$

Para tal, foi realizado um código na linguagem python, a seguir:

```
# Biblioteca para otimização do tempo de execução
from functools import cache

# Dados iniciais
y0 = -1

# Parte complicada da operação
def mult_dem(k, T):
    return (((k + 1) * T)**2 - 1) / (((k + 1) * T)**2 + 1)

# Função recursiva, que retorna o valor de y_k
@cache
def y_k(k, T):
    if k == 0:
```

```
    return -1
```

```
    return (y_k(k - 1, T) + T) / (1 + T * mult_dem(k, T))
```

```
% Os períodos
```

```
T1 = 1
```

```
T2 = 1/2
```

```
T3 = 1/4
```

```
T4 = 1/10
```

```
# Aqui, para o período igual a 4
```

```
for k in range(11):
```

```
    print(f"y({k}) = {y_k(k, T4)}")
```