

Sinais e Sistemas - Trabalho 2

Leonardo Soares da Costa Tanaka
Matheus Henrique Sant Anna Cardoso
Theo Rudra Macedo e Silva

Outubro de 2022

1.) Uma nota musical, ou tom, pode ser modelada por um sinal periódico com uma frequência fundamental e vários harmônicos. Quando duas notas musicais são “tocadas” ao mesmo tempo — um acorde — o efeito resultante pode soar agradável, consonante ou desagradável, dissonante. Desde os antigos gregos, com Pitágoras, se sabe que as combinações ou acordes agradáveis acontecem quando a razão entre as frequências fundamentais das notas é expressa por números naturais pequenos. Assim, os acordes mais harmônicos e consonantes são, pela ordem, aqueles associados às razões 1:1 (unísono), 2:1 (oitava), 3:2 (5.a perfeita), 4:3 (4.a perfeita), 5:4 (3.a maior) etc.

(a) Crie, no Octave, uma nota com frequência **G2**: $f_0 = 170\text{Hz}$, usando ondas quadradas ou triangulares (pesquise e use os comandos `square` ou `sawtooth` no Octave) em uma escala de tempo de 3 segundos com espaçamento entre as amostras de $\text{dt} = 1/44000$ (`t=0:dt:3`) e chame-a de tônica $x_t(t)$;

```
% Tônica:
dt = 1/44000;
t = 0:dt:3;
f0 = 170; A=0.02;
w0 = 2*pi*f0;
```

```
% A constante A para diminuir o volume
xt = square(w0*t);
```

(b) crie a oitava $x_8(t)$ da tônica, a 5.a $x_5(t)$, a 4.a $x_4(t)$, a 2.a (9:8) $x_2(t)$ e também a nota com relação 321:319 $x_d(t)$;

% Oitava:	% Quinta:	% Quarta:	% Segunda:
dt = 1/44000;	dt = 1/44000;	dt = 1/44000;	dt = 1/44000;
t = 0:dt:3;	t = 0:dt:3;	t = 0:dt:3;	t = 0:dt:3;
f0 = 2*170; A=0.01;	f0 = (3/2)*170; A=0.01;	f0 = (4/3)*170; A=0.01;	f0 = (9/8)*170; A=0.01;
w0 = 2*pi*f0;	w0 = 2*pi*f0;	w0 = 2*pi*f0;	w0 = 2*pi*f0;
x8 = square(w0*t);	x5 = square(w0*t);	x4 = square(w0*t);	x2 = square(w0*t);
sound(A*x8, 44000);	sound(A*x5, 44000);	sound(A*x4, 44000);	sound(A*x2, 44000);

```
% Nota com relação '321:319':
dt = 1/44000;
t = 0:dt:3;
f0 = (321/319)*170; A=0.01;
w0 = 2*pi*f0;
```

```
xd = square(w0*t);
sound(A*xd, 44000);
```

(c) usando o comando `sound(x, 44000)` ouça no Octave as notas isoladas e todos os acordes (para os acordes, crie a soma $z = x_t + x_8$, por exemplo, e depois use o comando `sound` acima em z) verificando se são consonantes;

Utilizando o comando `sound(A*z, 44000)` para ouvir as saídas, foi possível perceber que para a oitava $x_8(t)$, o som se assemelha ao unísono. As combinações da tônica com as demais notas ($x_t + x_i$, para $i = 2, 3, 4, 5$) são consonantes. As combinações das notas de índice par ($x_t + x_2 + x_4$, por exemplo), normalmente geravam um som mais agradável, assim como às de índice ímpar ($x_3 + x_5$, por exemplo).

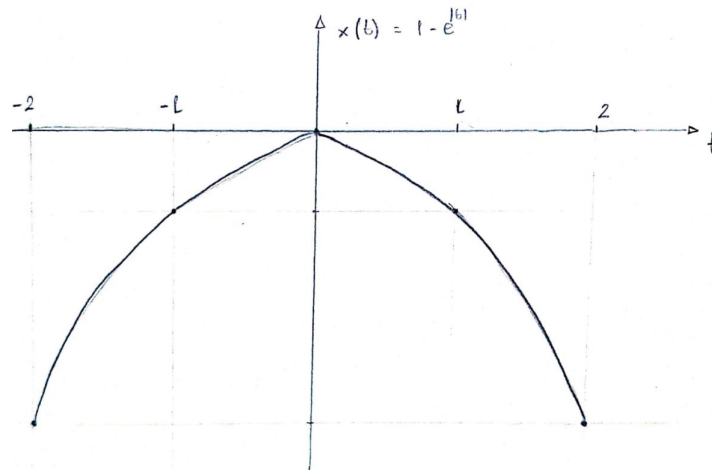
(d) explique a teoria harmônica de Pitágoras usando Série de Fourier e análise dos harmônicos da tônica e das companheiras.

Sabe-se que a soma de dois sinais periódicos é periódica se a razão de suas frequências é racional. Portanto, é preciso que isso ocorra para termos sinais harmônicos. Sinais consonantes respeitam essa regra, sendo periódicos e harmônicos.

2.) Um sinal definido como abaixo em um intervalo de largura $L = 4$ e nulo para outros valores de t é chamado de pulso:

G2: $x(t) = 1 - e^{|t|}$ para $-L/2 \leq t < L/2$

(a) Esboce o gráfico do pulso;



(b) calcule sua energia total E_t ;

O que buscamos é:

$$E_t = \int_{-2}^2 |1 - e^{|t|}|^2 dt$$

Para motivações de cálculo, podemos separar esta integral em duas partes:

$$E_t = \int_{-2}^0 (1 - e^{-t})^2 dt + \int_0^2 (1 - e^t)^2 dt$$

Porém, como o gráfico possui eixo de simetria em $t = 0$, sabemos que o valor das duas integrais separadas é igual. Dessa forma fazemos:

$$E_t = 2 \cdot \int_{-2}^0 (1 - e^{-t})^2 dt = 2 \cdot \int_0^2 (1 - e^t)^2 dt$$

Escolhendo a que melhor convém para o cálculo, obtemos:

$$E_t = 2 \cdot \int_0^2 (1 - e^t)^2 dt$$

Finalmente:

$$E_t = 2 \cdot \int_0^2 (1 - 2e^t + e^{2t}) dt$$

$$E_t = 2 \cdot [t - 2e^t + e^{2t}]_0^2$$

$$E_t = 7 - 4e^2 + e^4$$

Fazendo os cálculos utilizando o Octave, a energia total será:

$$E_t = 32.042$$

(c) calcule $X(0)$ fazendo $f = 0$ na fórmula de definição;

Primeiramente, anotemos a definição com a fórmula abaixo:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

Deve-se perceber que o intervalo de integração será de $[-2, 2]$. Como queremos $X(0)$, fazemos $f = 0$ na fórmula:

$$X(0) = \int_{-2}^2 x(t)e^{-j2\pi 0t} dt$$

$$X(0) = \int_{-2}^2 (1 - e^{|t|}) dt$$

Separando, novamente, em duas integrais, temos:

$$X(0) = \int_{-2}^0 (1 - e^{-t}) dt + \int_0^2 (1 - e^t) dt$$

$$X(0) = (t + e^{-t}) \Big|_{-2}^0 + (t - e^t) \Big|_0^2$$

$$X(0) = 3 - e^2 + 3 - e^2$$

$$X(0) = 6 - 2e^2$$

(d) calcule analiticamente $X(f)$ e verifique se $X(0)$ pode ser obtido a partir desta fórmula sem indeterminações; Agora, queremos calcular a seguinte integral:

$$X(f) = \int_{-2}^2 (1 - e^{|t|}) e^{-j2\pi ft} dt$$

Aqui, podemos, novamente, separar em duas integrais:

$$X(f) = \int_{-2}^0 (1 - e^{-t}) e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^2 (1 - e^t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$X(f) = \left(-\frac{e^{-j2\pi ft}}{j2\pi f} + \frac{e^{-t(1+j2\pi f)}}{1+j2\pi f} \right) \Big|_{-2}^0 + \left(-\frac{e^{-j2\pi ft}}{j2\pi f} - \frac{e^{t(1-j2\pi f)}}{1-j2\pi f} \right) \Big|_0^2$$

$$X(f) = -\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{e^{j4\pi f}}{j2\pi f} - \frac{e^2 e^{j4\pi f}}{1+j2\pi f} + \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{1-j2\pi f} - \frac{e^{-j4\pi f}}{j2\pi f} - \frac{e^2 e^{-j4\pi f}}{1-j2\pi f}$$

Resumindo as contas, temos:

$$X(f) = 4\text{sinc}(4f) + \frac{2}{1+4\pi^2 f^2} - \frac{2e^2 \cos(4\pi f)}{1+4\pi^2 f^2} - \frac{4e^2 \pi f \text{sen}(4\pi f)}{1+4\pi^2 f^2}$$

Primeiramente, perceba que os valores de $X(f)$ são reais.

Agora, que temos a expressão, calculemos $X(0)$ com base nela e comparar com a expressão obtida em (c).

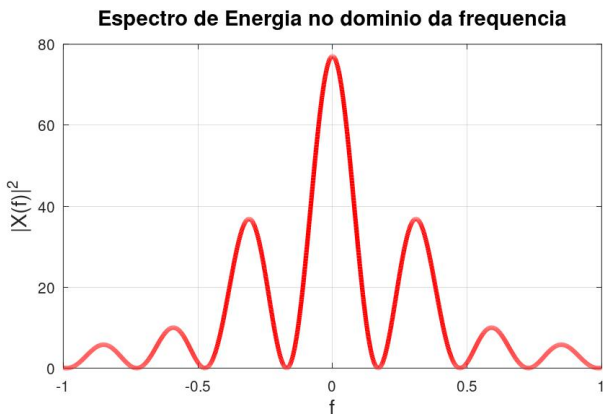
$$X(0) = 4\text{sinc}(0) + \frac{2}{1+4\pi^2 0} - \frac{2e^2 \cos(4\pi 0)}{1+4\pi^2 0} - \frac{4e^2 \pi 0 \text{sen}(4\pi 0)}{1+4\pi^2 0}$$

$$X(0) = 4 + 2 - 2e^2 = 6 - 2e^2$$

Perceba, então, que obtivemos a mesma expressão, não existindo indeterminações para $f = 0$.

(e) trace o espectro de energia $|X(f)|^2 \times f$ para $f \in [-1 + 1]Hz$ usando muitos pontos e calcule a energia contida nesta banda ($\int_{-1}^1 |X(f)|^2 dt$) usando integração aproximada;

Utilizando o Octave para calcular a aproximação do espectro de energia e plotar o gráfico. O resultado é o visto abaixo:



Calculando a energia para o intervalo definido (de -1 até 1), utilizando o próprio Octave para realizar os cálculos aproximados, encontramos que a energia para este intervalo de frequências.

$$E_{[-1 \ 1]} = 27.923$$

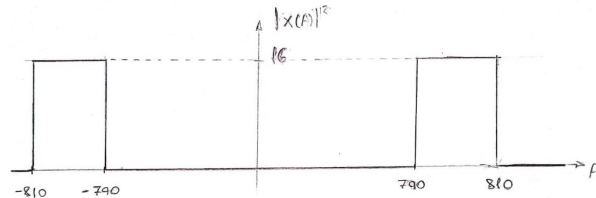
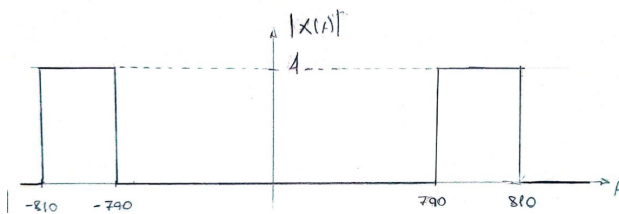
(f) por tentativa e erro, e usando o método anterior, calcule a banda de passagem que retém 95% da energia do sinal: f_M tal que $\int_{-f_M}^{f_M} |X(f)|^2 df$;

Utilizando, novamente, o software Octave, pudemos testar, para algumas faixas de frequências, quantos por cento da energia havia naquela banda de frequência. O valor mais próximo que chegamos para a frequência f_M foi de 2.5985, em que chegamos a uma retenção de 95.000%.

$$E_t = 32.042$$

$$E_{f_M} = 30.440$$

Finalmente, a banda de passagem que retém 95% da energia é para $f_M = 2.5985$.



3.) Um sinal é caracterizado por

G2: $X_m(f) = 80p_{20}(f + 810) + 80p_{20}(f - 790)$

com frequências medidas em kHz . Lembrar que $p_\Delta(f - \tau)$ denota um pulso de largura Δ , amplitude Δ^{-1} e aplicado a partir de τ , com transformada conhecida.

(a) Esboçar os espectros de amplitude e de energia;

(b) calcular sua anti-transformada de Fourier: $\mathcal{F}^{-1}\{X_m(f)\} = x_m(t)$ (use as propriedades);

Queremos calcular a inversa da transformada de Fourier. Para isso, usamos:

$$\begin{aligned} x_m(t) &= \int_{-810}^{-790} 4e^{j2\pi ft} df + \int_{790}^{810} 4e^{j2\pi ft} df \\ x_m(t) &= \left[\frac{4e^{j2\pi ft}}{j2\pi t} \right]_{-810}^{-790} + \left[\frac{4e^{j2\pi ft}}{j2\pi t} \right]_{790}^{810} \\ x_m(t) &= 4 \left[\frac{2\text{sen}(2\pi 810t)}{2\pi t} - \frac{2\text{sen}(2\pi 790t)}{2\pi t} \right] \\ x_m(t) &= 4 \left[\frac{2\text{sen}(2\pi 810t) \cdot 810}{2\pi t \cdot 810} - \frac{2\text{sen}(2\pi 790t) \cdot 790}{2\pi t \cdot 790} \right] \\ x_m(t) &= 6480 \text{sinc}(1620t) - 6320 \text{sinc}(1580t) \end{aligned}$$

(c) ao sinal $x_m(t)$ se aplica um filtro PB (passa-baixas) ideal; determinar sua frequência de corte M de modo que 50% da energia total seja retida;

Aqui é bem mais conveniente trabalharmos com o sinal no domínio da frequência (o dado da questão), sendo, dessa forma, fácil ver que a frequência de corte assume, nesse caso, o valor de $800Hz$, percorrendo o intervalo de $[-800, 800]$. Isso fica claro, pois, ao obtermos o espectro de energia, para termos metade do gráfico preenchido (50% da área), devemos percorrer os valores entre -800 até 800.

(d) ao sinal $x_m(t)$ se aplica um filtro PA (passa-altas) ideal; determinar sua frequência de corte M de modo que 50% da energia total seja retida.

Perceba que, de forma análoga ao anterior, é mais conveniente trabalharmos no domínio da frequência. Aqui, diferentemente, queremos um filtro passa-alta, sendo a frequência de corte, também $800Hz$. Finalmente, obtemos 50% da área do gráfico de espectro de energia, com os intervalos $[-\infty, -800]$ e $[800, \infty]$. Logo, a frequência de corte é, novamente $800Hz$.