Sinais e Sistemas - Trabalho 5 - Avaliação 9

Grupo 2

Leonardo Soares da Costa Tanaka

Matheus Henrique Sant Anna Cardoso

Theo Rudra Macedo e Silva

Rio de Janeiro
2022

1.) Um SLIT relaxado é descrito pela equação a diferenças $y_{k+2} + \alpha y_k = \beta u_{k+1} + \gamma u_k$**.**

Os dados (α, β, γ) **são: G2:** $(-1/4, 1, 2)$**;**

Utilizando as constantes do grupo, a equação torna-se: $y_{k+2} - \frac{1}{4} y_k = u_{k+1} + 2u_k$

(a) Encontrar a função de transferência $G(z)$;

$$y_{k+2} - \frac{1}{4} y_k = u_{k+1} + 2u_k$$

$$z^2 Y(z) - z^2 Y(0) - zY(1) - \frac{1}{4} Y(z) = zU(z) - zu(0) + 2U(z)$$

$$Y(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}} U(z) + \frac{z^2 y(0) + zy(1) - zu(0)}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

$$G(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

(b) encontrar polos e zeros e verificar a estabilidade;

$$Polos => x^2 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) => p_1 = \frac{1}{2}; p_2 = -\frac{1}{2}$$

$$Zeros => x + 2 => z_1 = -2$$

O SLIT é estável nesse caso, porque seus pólos p_1 e p_2 estão no círculo unitário.

(c) encontrar as equações dinâmicas;

$$\begin{aligned} x_1[k] &= y[k] & &=> & x_1[k+1] &= y[k+1] = x_2[k] - p_1 u[k] \\ x_2[k] &= y[k+1] + p_1 u[k] & &=> & x_2[k+1] &= y[k+2] + p_1 u[k] = \frac{1}{4} x_1[k] + (p_1 + 1) u[k+1] + 2u[k] \end{aligned}$$

$$p_1 = -1$$

$$x_1[k] = y[k] \qquad => \qquad x_1[k+1] = x_2[k] + u[k]$$

$$x_2[k] = y[k+1] - u[k] \qquad => \qquad x_2[k+1] = \frac{1}{4}x_1[k] + 2u[k]$$

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u[k]; \quad y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[k]$$

(d) calcular, iterativamente, os 10 primeiros valores y_k para entrada em degrau unitário;

Podemos usar o seguinte formato para y(k):

$$y(k) = CA^k x(0) + C\sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j}Bu(j)$$

Assumindo que x(0) = 0, pois o SLIT é relaxado:

$$y(k) = C\sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j}Bu(j)$$

Por fim, os valores são:

$$y(0) = 0.000000$$
$$y(1) = 1.000000$$
$$y(2) = 3.000000$$
$$y(3) = 3.250000$$
$$y(4) = 3.750000$$
$$y(5) = 3.812500$$
$$y(6) = 3.937500$$
$$y(7) = 3.953125$$
$$y(8) = 3.984375$$
$$y(9) = 3.988281$$
$$y(10) = 3.996094$$

(e) usando transformada em Z, encontrar uma expressão analítica para a y_k;

Utilizaremos uma das expressões obtidas no item a)

$$Y(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}} U(z) + \frac{z^2 y(0^-) + zy(1) - zu(0^-)}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

Como a entrada é um degrau unitáio, e temos os valores obtidos para $y(0),\ y(1)\ e\ u(0)$, obtém-se:

$$Y(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}} \cdot \frac{z}{z-1}$$

Manipulando a equação:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z+2}{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{2})} \cdot \frac{z}{z(z-1)}$$
$$Y(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{2}} - 5\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + 4\frac{z}{z-1}$$

Calculando a inversa:

$$y(k) = \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 5\left(\frac{1}{2}\right)^k + 4\right] \cdot 1(k)$$

Por fim, plotando os resultados:

$$y(0) = 0.000000$$
$$y(1) = 1.000000$$
$$y(2) = 3.000000$$
$$y(3) = 3.250000$$
$$y(4) = 3.750000$$
$$y(5) = 3.812500$$
$$y(6) = 3.937500$$
$$y(7) = 3.953125$$
$$y(8) = 3.984375$$
$$y(9) = 3.988281$$
$$y(10) = 3.996094$$

(f) comparar os resultados iterativo e analítico.

G2: 2.) Eis um "Problema de Algibeira": um vendedor de queijos efetua apenas transações do tipo *vende metade de seu estoque mais meia peça.* Pede-se o número inicial de peças, x_0 se após a 6ª venda seus queijos acabam. Interpretar a filosofia de vendas por meio de uma equação a diferenças e calcular x_k, o saldo de estoque após a k-ésima venda. Dar a resposta ao problema de algibeira.

Antes de mais nada, podemos pensar um pouco antes de tomarmos quaisquer decisões. É claro ser impossível realizar a venda de meia peça, portanto, é provável que seja uma correção, justamente para que não se venda meia peça. Veja o processo:

Processo: (Venda)

Após a venda k: c peças.

Logo antes: $c + 1/2$ peças.

Antes da venda k: $2 \cdot (c + 1/2) = \boxed{2c + 1}$ peças. Ou, após a venda $k - 1$.

Disso, podemos ir dando passos para trás até chegarmos ao momento anterior à primeira venda. Considerando, cada processo, uma venda e que antes de cada venda, teremos $2c + 1$ peças, sendo c o número de peças após essa venda:

Após a venda 6: 0

Após a venda 5: $2 \cdot 0 + 1 = 1$

Após a venda 4: $2 \cdot 1 + 1 = 3$

Após a venda 3: $2 \cdot 3 + 1 = 7$

Após a venda 2: $2 \cdot 7 + 1 = 15$

Após a venda 1: $2 \cdot 15 + 1 = 31$

Finalmente, antes da primeira venda, teremos: $2 \cdot 31 + 1 = 63$

Portanto, com passos simples, podemos resolver este problema.

Ainda assim, é possível resolvê-lo por métodos analíticos, com uma equação a diferenças, modelando da seguinte maneira: a quantidade de peças após a venda k (x_k) é a metade da anterior subtraída de 1/2, da forma abaixo:

$$x_k = \frac{1}{2}x_{k-1} - \frac{1}{2}$$

Podemos realizar a transformada Z desta equação, obtendo:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{x_k\right\} &= \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{x_{k-1}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{1[k]\right\} \\
X(z) &= \frac{1}{2}\left(z^{-1}X(z) + x[-1]\right) - \frac{z}{2z-2} \\
X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1]}{2} - \frac{z}{2z-2} \\
X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1](z-1)}{2z-2} - \frac{z}{2z-2} \\
X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1]z - x[-1] - z}{2z-2} \\
\frac{X(z)}{z} &= \frac{x[-1]z - x[-1] - z}{(z-1)(2z-1)} \\
\frac{X(z)}{z} &= \frac{x[-1]+1}{2z-1} - \frac{1}{z-1} \\
X(z) &= \frac{x[-1]+1}{2}\left(\frac{z}{z-1/2}\right) - \frac{1}{z-1}
\end{aligned}
$$

A partir daqui, podemos fazer a transformada inversa:

$$
x[k] = \frac{x[-1]+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1[k]
$$

Podemos descobrir $x[-1]$ dado que sabemos $x[6]$:

$$
\begin{aligned}
x[6] = 0 &= \frac{x[-1]+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1[6] \\
0 &= \frac{x[-1]+1}{128} - 1 \\
128 &= x[-1] + 1
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{x[-1] = 127}
$$

Temos tudo o que precisamos:

$$
\begin{aligned}
x[k] &= \frac{x[-1]+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1[k] \\
x[k] &= 64\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1[k]
\end{aligned}
$$

Aplicando para $k = 0$, teremos:

$$
x[0] = 64 \cdot 1 - 1
$$

$$
\boxed{x[0] = 63}
$$

Que foi o resultado obtido da primeira forma.

3.) Para a EDLIT $\tau\dot{y}(t) + y(t) = \beta u(t)$ com $y(0^-) = y_0$:

G2: $\tau = 2, \beta = 2$ **e** $y_0 = 1$**.**

Utilizando as constantes do grupo, a equação torna-se: $2\dot{y}(t) + y(t) = 2u(t)$ com $y(0^-) = 1$

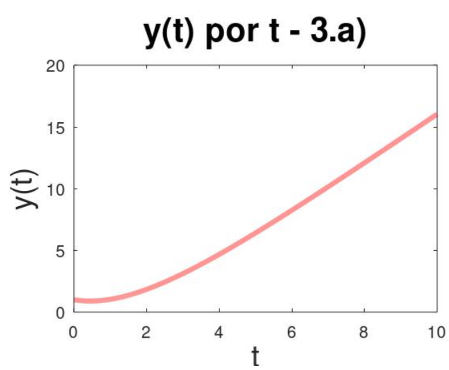
(a) Calcular a resposta à rampa unitária por Laplace, e traçar com precisão o seu gráfico para $t \in [0,\, 5\tau]$;

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{2}y(t) = u(t); \quad y(0^-) = 1; \quad u(t) = t1(t)$$
$$sY(s) - y(0^-) + \frac{1}{2}Y(s) = \frac{1}{s^2}$$
$$(s + 1/2)Y(s) = \frac{s^2+1}{s^2}$$
$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s+1/2)} = \frac{r_1}{s^2} + \frac{r_2}{s} + \frac{r_3}{s+1/2}$$
$$r_1 = 2; \quad r_2 = -4; \quad r_3 = 5$$
$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s} + \frac{5}{s+1/2}$$
$$y(t) = 2t\ 1(t) - 4\ 1(t) + 5e^{-\frac{1}{2}t}1(t)$$

```
%Questão 3.a)

% Intervalo
dt=0.001;

% Dados basicos
t=0:dt:10-dt; x=2*t-4+5*exp(-1/2*t);
plot (t, x, "r", "linewidth", 3);
title("y(t) por t - 3.a)", "fontsize", 20);
xlabel("t", "fontsize", 18);
ylabel("y(t)", "fontsize", 18);
```



(b) por Euler I, encontrar a equação que relaciona $y_k \leftrightarrow y(kT)$ e $u_k \leftrightarrow u(kT)$;

$$y(kT) = y(kT - T) + Tu(kT - T)$$
$$y[k] = y[k-1] + Tu[k-1]$$
$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + Tz^{-1}U(Z)$$
$$H_d(z) = \frac{Tz^{-1}}{1 - z^{-1}} = T\frac{1}{z-1}$$

(c) resolvê-la por transformada Z para entrada em rampa;

(d) listar as sequências obtidas para $T = \tau, T = \tau/2, T = \tau/4$ e $T = \tau/8$;

(e) plotar os valores de $y(kT)$ no mesmo gráfico do ítem (a) e comparar as aproximações numéricas;

(f) repetir (b), (c), (d) e (e) para Newton.

4.) Para a EDLIT $\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \alpha\dot{u}(t) + \beta u(t)$ com CIs nulas:

Os dados $(\zeta,\ \omega_n,\ \beta,\ \alpha)$ **são G2:** $(1/3,\ 2,\ 3,\ -1)$**.**

Utilizando os dados do grupo, temos: $\ddot{y}(t) + \frac{4}{3}\dot{y}(t) + 4y(t) = -\dot{u}(t) + 3u(t)$

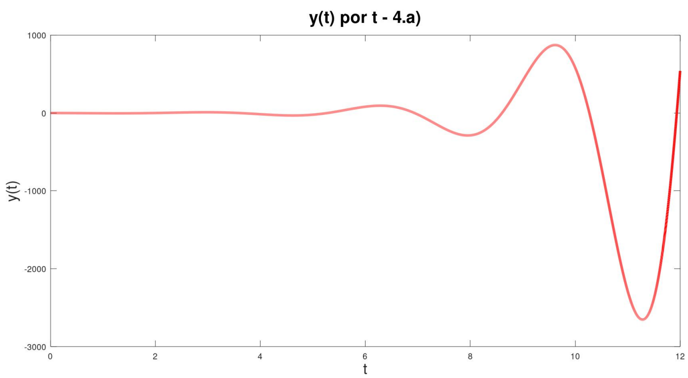
(a) para $u(t) = 1$, encontre, por Laplace, a solução e plote-a com precisão para $t \in [0,\ 8/(\zeta\omega_n)]$;

$$s^2Y(s) + 2\zeta\omega_n sY(s) + \omega_n^2 Y(s) = \alpha sU(s) + \beta U(s);\ U(s) = \frac{1}{s}$$
$$Y(s) = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}U(s) = \frac{\alpha s + \beta}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s}$$
$$Y(s) = \frac{r_1 s + r_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{r_3}{s} = \frac{r_1 s + r_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2 - \zeta^2\omega_n^2} + \frac{r_3}{s}$$
$$Y(s) = \frac{r_1 s + r_2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)} + \frac{r_3}{s} = \frac{r_1 s + r_2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})^2} + \frac{r_3}{s}$$
$$\omega = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$
$$Y(s) = \frac{r_1(s + \zeta\omega_n)}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega^2} + \frac{\frac{r_2 - r_1\zeta\omega_n}{\omega}\omega}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega^2} + \frac{r_3}{s}$$
$$y(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(r_1 cos(\omega t) + \frac{r_2 - r_1\zeta\omega_n}{\omega} sen(wt)) + r_3$$
$$r_1 = \frac{-\beta}{\omega_n^2}, r_2 = \alpha - \frac{2\zeta}{\omega_n}, r_3 = \frac{\beta}{\omega_n^2}$$
$$\omega = \frac{4\sqrt{2}}{3}, r_1 = \frac{3}{4}, r_2 = -2, r_3 = \frac{-3}{4}$$
$$y(t) = e^{\frac{2}{3}t}\left(\frac{3}{4}cos\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}t\right) - \frac{15\sqrt{2}}{16}sen\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}t\right)\right) - \frac{3}{4}$$

```
%Questão 4.a)
```

```
% Intervalo
dt=0.001;

% Dados basicos
t=0:dt:12-dt; y=e.^(2/3*t).*(3/4*cos(4*sqrt(2)/3*t)-15*sqrt(2)/16*sin(4*sqrt(2)/3*t))-3/4;
plot (t, y, "r", "linewidth", 3);
title("y(t) por t - 4.a)", "fontsize", 20);
xlabel("t", "fontsize", 18);
ylabel("y(t)", "fontsize", 18);
```



(b) por meio de variáveis x_1 e x_2 apropriadas, expressá-la como $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$ e $\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t)$;

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \alpha\dot{u}(t) + \beta u(t)$$

$$x_1(t) = y(t), x_2(t) = \dot{y}(t) + pu(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) - pu(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) + p\dot{u}(t) = -2\zeta\omega_n x_2(t) - \omega_n^2 x_1(t) + (\alpha + p)\dot{u}(t) + (\beta + 2\zeta\omega_n p)u(t)$$

$$p = -\alpha = 1$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -p \\ \beta + 2\zeta\omega_n p \end{bmatrix} u(t), y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4/3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 + 4/3 \end{bmatrix} u(t), y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

(c) por Euler I, relacione $\boldsymbol{x}_k \leftrightarrow \boldsymbol{x}(kT)$, $y_k \leftrightarrow y(kT)$ e $u_k \leftrightarrow u(kT)$ (o procedimento para vetores é o mesmo e leva a

$\boldsymbol{x}_k = A_d\boldsymbol{x}_{k-1} + B_d\boldsymbol{u}_k$ e $\dot{\boldsymbol{y}}_k = C_d\boldsymbol{x}_k + D_d\boldsymbol{u}_k$) e obtenha y_k;

(d) plota as sequências obtidas para $T = T_0 = 1/(\zeta\omega_n)$, $T = T_0/2$, $T = T_0/4$ e $T = T_0/8$ no gráfico de (a) e compare as aproximações numéricas.

5.) Seja EDVT $\dot{y}(t) + \alpha(t)y(t) = u(t)$ com $u(t) = 1(t)$. Quando um sinal contínuo p tende a uma constante para valores altos de t ($\lim p(t) = p_r =$ cte. para $t \to \infty$) esta é chamada de valor de regime do sinal.

(a) sem resolver a equação calcular o valor de regime y_r, supondo que $y(t)$ tende a ele;

(b) por Euler I, relacione as sequências $u_k \leftrightarrow u(kT)$ e $y_k \leftrightarrow y(kT)$;

(c) resolva, manualmente ou por meio de um script em alguma linguagem, para $T = 1, T = 1/2, T = 1/4$ e $T = 1/10$; a solução $y(t)$ deve ser aproximada para $t \in [0,\ 10]$;

(d) repetir (b) e (c) para Euler II.

Os dados $a(t)$a e $y(0^-)$ são: **G2:** $(t^2 - 1)/(t^2 + 1)$ e -1.