

# Sinais e Sistemas - Trabalho 5 - Avaliação 9

## **Grupo 2**

Leonardo Soares da Costa Tanaka

Matheus Henrique Sant Anna Cardoso

Theo Rudra Macedo e Silva

1.) Um SLIT relaxado é descrito pela equação a diferenças  $y_{k+2} + \alpha y_k = \beta u_{k+1} + \gamma u_k$ .

Os dados  $(\alpha, \beta, \gamma)$  são: **G2:**  $(-1/4, 1, 2)$ ;

Utilizando as constantes do grupo, a equação torna-se:  $y_{k+2} - \frac{1}{4}y_k = u_{k+1} + 2u_k$

(a) Encontrar a função de transferência  $G(z)$ ;

$$y_{k+2} - \frac{1}{4}y_k = u_{k+1} + 2u_k$$

$$z^2 Y(z) - z^2 Y(0) - z Y(1) - \frac{1}{4} Y(z) = z U(z) - z u(0) + 2 U(z)$$

$$Y(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}} U(z) + \frac{z^2 y(0) + z y(1) - z u(0)}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

$$G(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

(b) encontrar polos e zeros e verificar a estabilidade;

$$Polos \Rightarrow x^2 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2}; p_2 = -\frac{1}{2}$$

$$Zeros \Rightarrow x + 2 \Rightarrow z_1 = -2$$

O SLIT é estável nesse caso, porque seus pólos  $p_1$  e  $p_2$  estão no círculo unitário.

(c) encontrar as equações dinâmicas;

$$\begin{aligned} x_1[k] = y[k] & \Rightarrow x_1[k+1] = y[k+1] = x_2[k] - p_1 u[k] \\ x_2[k] = y[k+1] + p_1 u[k] & \Rightarrow x_2[k+1] = y[k+2] + p_1 u[k] = \frac{1}{4} x_1[k] + (p_1 + 1) u[k+1] + 2u[k] \end{aligned}$$

$$p_1 = -1$$

$$\begin{array}{lll} x_1[k] = y[k] & \Rightarrow & x_1[k+1] = x_2[k] + u[k] \\ x_2[k] = y[k+1] - u[k] & \Rightarrow & x_2[k+1] = \frac{1}{4}x_1[k] + 2u[k] \end{array}$$

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u[k]; \quad y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[k]$$

(d) calcular, iterativamente, os 10 primeiros valores  $y_k$  para entrada em degrau unitário;

Podemos usar o seguinte formato para  $y(k)$ :

$$y(k) = CA^k x(0) + C \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j)$$

Assumindo que  $x(0) = 0$ , pois o SLIT é relaxado:

$$y(k) = C \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j)$$

Por fim, os valores são:

$$y(0) = 0.000000$$

$$y(1) = 1.000000$$

$$y(2) = 3.000000$$

$$y(3) = 3.250000$$

$$y(4) = 3.750000$$

$$y(5) = 3.812500$$

$$y(6) = 3.937500$$

$$y(7) = 3.953125$$

$$y(8) = 3.984375$$

$$y(9) = 3.988281$$

$$y(10) = 3.996094$$

(e) usando transformada em  $Z$ , encontrar uma expressão analítica para a  $y_k$ ;

Utilizaremos uma das expressões obtidas no item a)

$$Y(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}} U(z) + \frac{z^2 y(0^-) + zy(1) - zu(0^-)}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

Como a entrada é um degrau unitário, e temos os valores obtidos para  $y(0)$ ,  $y(1)$  e  $u(0)$ , obtém-se:

$$Y(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}} \cdot \frac{z}{z-1}$$

Manipulando a equação:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{z+2}{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{2})} \cdot \frac{z}{z(z-1)} \\ Y(z) &= \frac{z}{z+\frac{1}{2}} - 5 \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + 4 \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

Calculando a inversa:

$$y(k) = \left[ \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 5 \left(\frac{1}{2}\right)^k + 4 \right] \cdot 1(k)$$

Por fim, plotando os resultados:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0.000000 \\ y(1) &= 1.000000 \\ y(2) &= 3.000000 \\ y(3) &= 3.250000 \\ y(4) &= 3.750000 \\ y(5) &= 3.812500 \\ y(6) &= 3.937500 \\ y(7) &= 3.953125 \\ y(8) &= 3.984375 \\ y(9) &= 3.988281 \\ y(10) &= 3.996094 \end{aligned}$$

(f) comparar os resultados iterativo e analítico.

**G2: 2.)** Eis um “Problema de Algibeira”: um vendedor de queijos efetua apenas transações do tipo *vende metade de seu estoque mais meia peça*. Pede-se o número inicial de peças,  $x_0$  se após a 6ª venda seus queijos acabam. Interpretar a filosofia de vendas por meio de uma equação a diferenças e calcular  $x_k$ , o saldo de estoque após a  $k$ -ésima venda. Dar a resposta ao problema de algibeira.

Antes de mais nada, podemos pensar um pouco antes de tomarmos quaisquer decisões. É claro ser impossível realizar a venda de meia peça, portanto, é provável que seja uma correção, justamente para que não se venda meia peça. Veja o processo:

**Processo: (Venda)**

Após a venda  $k$ :  $c$  peças.

Logo antes:  $c + 1/2$  peças.

Antes da venda  $k$ :  $2 \cdot (c + 1/2) = \boxed{2c + 1}$  peças. Ou, após a venda  $k - 1$ .

Disso, podemos ir dando passos para trás até chegarmos ao momento anterior à primeira venda. Considerando, cada processo, uma venda e que antes de cada venda, teremos  $2c + 1$  peças, sendo  $c$  o número de peças após essa venda:

Após a venda 6: 0

Após a venda 5:  $2 \cdot 0 + 1 = 1$

Após a venda 4:  $2 \cdot 1 + 1 = 3$

Após a venda 3:  $2 \cdot 3 + 1 = 7$

Após a venda 2:  $2 \cdot 7 + 1 = 15$

Após a venda 1:  $2 \cdot 15 + 1 = 31$

Finalmente, antes da primeira venda, teremos:  $2 \cdot 31 + 1 = 63$

Portanto, com passos simples, podemos resolver este problema.

Ainda assim, é possível resolvê-lo por métodos analíticos, com uma equação a diferenças, modelando da seguinte maneira: a quantidade de peças após a venda  $k$  ( $x_k$ ) é a metade da anterior subtraída de  $1/2$ , da forma abaixo:

$$x_k = \frac{1}{2}x_{k-1} - \frac{1}{2}$$

Podemos realizar a transformada Z desta equação, obtendo:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\{x_k\} &= \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{x_{k-1}\} - \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{1[k]\} \\
 X(z) &= \frac{1}{2}(z^{-1}X(z) + x[-1]) - \frac{z}{2z-2} \\
 X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1]}{2} - \frac{z}{2z-2} \\
 X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1](z-1)}{2z-2} - \frac{z}{2z-2} \\
 X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1]z - x[-1] - z}{2z-2} \\
 \frac{X(z)}{z} &= \frac{x[-1]z - x[-1] - z}{(z-1)(2z-1)} \\
 \frac{X(z)}{z} &= \frac{x[-1]+1}{2z-1} - \frac{1}{z-1} \\
 X(z) &= \frac{x[-1]+1}{2} \left( \frac{z}{z-1/2} \right) - \frac{1}{z-1}
 \end{aligned}$$

A partir daqui, podemos fazer a transformada inversa:

$$x[k] = \frac{x[-1]+1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^k - 1[k]$$

Podemos descobrir  $x[-1]$  dado que sabemos  $x[6]$ :

$$\begin{aligned}
 x[6] = 0 &= \frac{x[-1]+1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^6 - 1[6] \\
 0 &= \frac{x[-1]+1}{128} - 1 \\
 128 &= x[-1] + 1
 \end{aligned}$$

$$\boxed{x[-1] = 127}$$

Temos tudo o que precisamos:

$$\begin{aligned}
 x[k] &= \frac{x[-1]+1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^k - 1[k] \\
 x[k] &= 64 \left( \frac{1}{2} \right)^k - 1[k]
 \end{aligned}$$

Aplicando para  $k = 0$ , teremos:

$$x[0] = 64 \cdot 1 - 1$$

$$\boxed{x[0] = 63}$$

Que foi o resultado obtido da primeira forma.

**3.) Para a EDLIT**  $\tau \dot{y}(t) + y(t) = \beta u(t)$  **com**  $y(0^-) = y_0$ :

**G2:**  $\tau = 2, \beta = 2$  e  $y_0 = 1$ .

Utilizando as constantes do grupo, a equação torna-se:  $2\dot{y}(t) + y(t) = 2u(t)$  com  $y(0^-) = 1$

(a) Calcular a resposta à rampa unitária por Laplace, e traçar com precisão o seu gráfico para  $t \in [0, 5\tau]$ ;

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{2}y(t) = u(t); \quad y(0^-) = 1; \quad u(t) = t1(t)$$

$$sY(s) - y(0^-) + \frac{1}{2}Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(s + 1/2)Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2(s + 1/2)} = \frac{r_1}{s^2} + \frac{r_2}{s} + \frac{r_3}{s + 1/2}$$

$$r_1 = 2; \quad r_2 = -4; \quad r_3 = 5$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s} + \frac{5}{s + 1/2}$$

$$y(t) = 2t \, 1(t) - 4 \, 1(t) + 5e^{-\frac{1}{2}t}1(t)$$

%Questão 3.a)

% Intervalo

dt=0.001;

% Dados basicos

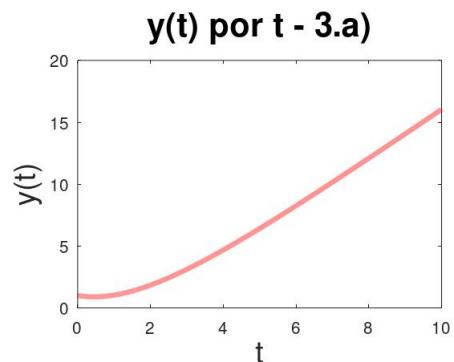
t=0:dt:10-dt; x=2\*t-4+5\*exp(-1/2\*t);

plot (t, x, "r", "linewidth", 3);

title("y(t) por t - 3.a)", "fontsize", 20);

xlabel("t", "fontsize", 18);

ylabel("y(t)", "fontsize", 18);



(b) por Euler I, encontrar a equação que relaciona  $y_k \leftrightarrow y(kT)$  e  $u_k \leftrightarrow u(kT)$ ;

Buscando chegar em uma relação tal que  $y(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau$ , fazemos:

$$\begin{aligned} 2\dot{y}(t) &= 2u(t) - y(t) \\ \dot{y}(t) &= \frac{2u(t) - y(t)}{2} \\ y(t) &= \int_0^t \frac{2u(t) - y(t)}{2} dt \end{aligned}$$

Tendo  $a(t)$ , fazemos:

$$\begin{aligned} y(kT) &= y(kT - T) + Ta(kT - T) \\ y[k] &= y[k - 1] + Ta[k - 1] \\ y[k] &= y[k - 1] + T \frac{2u(t) - y(t)}{2} \\ y[k] &= y[k - 1] \left(1 - \frac{T}{2}\right) + Tu[k - 1] \end{aligned}$$

(c) resolvê-la por transformada Z para entrada em rampa;

Aqui,  $u[k] = k \cdot 1[k]$ . Logo,  $U(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$

Agora, temos:  $y[k] = y[k - 1] \left(1 - \frac{T}{2}\right) + Tu[k - 1]$ . Aplicando a transformada Z, teremos:

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) \left(1 - \frac{T}{2}\right) + Tz^{-1}U(z)$$

(d) listar as sequências obtidas para  $T = \tau, T = \tau/2, T = \tau/4$  e  $T = \tau/8$ ;

(e) plotar os valores de  $y(kT)$  no mesmo gráfico do item (a) e comparar as aproximações numéricas;

(f) repetir (b), (c), (d) e (e) para Newton.

**4.) Para a EDLIT  $\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2y(t) = \alpha\dot{u}(t) + \beta u(t)$  com CIs nulas:**

**Os dados  $(\zeta, \omega_n, \beta, \alpha)$  são G2:  $(1/3, 2, 3, -1)$ .**

Utilizando os dados do grupo, temos:  $\ddot{y}(t) + \frac{4}{3}\dot{y}(t) + 4y(t) = -\dot{u}(t) + 3u(t)$

(a) para  $u(t) = 1$ , encontre, por Laplace, a solução e plote-a com precisão para  $t \in [0, 8/(\zeta\omega_n)]$ ;

Utilizando Laplace na EDLIT:

$$\begin{aligned} s^2Y(s) + 2\zeta\omega_n sY(s) + \omega_n^2Y(s) &= \alpha sU(s) + \beta U(s); \quad U(s) = \frac{1}{s} \\ Y(s) &= \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} U(s) = \frac{\alpha s + \beta}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s} \end{aligned}$$

Descobrimos os valores do denominador das frações polinomiais:



$$Y(s) = \frac{r_1 s + r_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{r_3}{s} = \frac{r_1 s + r_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2 - \zeta^2\omega_n^2} + \frac{r_3}{s}$$

$$Y(s) = \frac{r_1 s + r_2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)} + \frac{r_3}{s} = \frac{r_1 s + r_2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})^2} + \frac{r_3}{s}$$

Substituindo  $\omega = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$  para achar a transformada de seno e cosseno nas expressões da transformada:

$$Y(s) = \frac{r_1(s + \zeta\omega_n)}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega^2} + \frac{\frac{r_2 - r_1\zeta\omega_n\omega}{\omega}}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega^2} + \frac{r_3}{s}$$

$$y(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(r_1 \cos(\omega t) + \frac{r_2 - r_1\zeta\omega_n}{\omega} \sin(\omega t)) + r_3$$

Descobrimos os denominadores das frações anteriores:

$$r_1 = \frac{-\beta}{\omega_n^2}, r_2 = \alpha - \frac{2\zeta\beta}{\omega_n}, r_3 = \frac{\beta}{\omega_n^2}$$

$$\omega = \frac{4\sqrt{2}}{3}, r_1 = \frac{-3}{4}, r_2 = -2, r_3 = \frac{3}{4}$$

Solução:

$$y(t) = e^{-\frac{2}{3}t} \left( -\frac{3}{4} \cos\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}t\right) - \frac{15\sqrt{2}}{16} \sin\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}t\right) \right) + \frac{3}{4}$$

%Questão 4.a)

% Intervalo

dt=0.001;

% Dados basicos

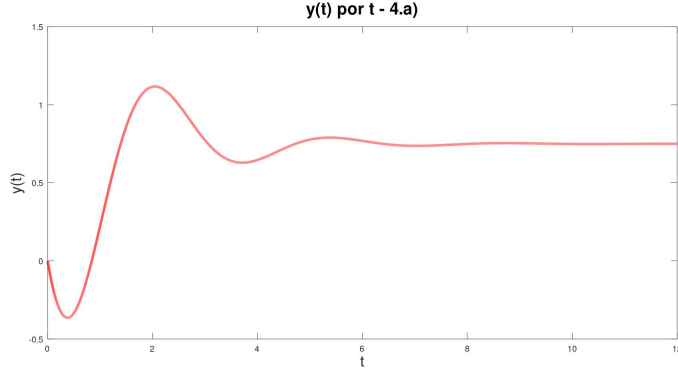
t=0:dt:12-dt; y=e.^(-2/3\*t).\*(-3/4\*cos(4\*sqrt(2)/3\*t)-15\*sqrt(2)/16\*sin(4\*sqrt(2)/3\*t))+3/4;

plot (t, y, "r", "linewidth", 3);

title("y(t) por t - 4.a)", "fontsize", 20);

xlabel("t", "fontsize", 18);

ylabel("y(t)", "fontsize", 18);



(b) por meio de variáveis  $x_1$  e  $x_2$  apropriadas, expressá-la como  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$  e  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)$ ;

$$x_1(t) = y(t), x_2(t) = \dot{y}(t) + pu(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) - pu(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) + p\dot{u}(t) = -\omega_n^2 y(t) - 2\zeta\omega_n \dot{y}(t) + \alpha\dot{u}(t) + \beta u(t) + p\dot{u}(t) = \\ &= -\omega_n^2 x_1(t) - 2\zeta\omega_n x_2(t) + (\alpha + p)\dot{u}(t) + (\beta + 2\zeta\omega_n p)u(t) \end{aligned}$$

Já que  $\dot{u}(t)$  tem que sumir, então  $p = -\alpha = 1$ .

Utilizando as expressões anteriores chegamos na seguinte expressão:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -p \\ \beta + 2\zeta\omega_n p \end{bmatrix} u(t), \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Substituindo com os valores das constantes:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4/3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 13/3 \end{bmatrix} u(t), \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

(c) por Euler I, relacione  $\mathbf{x}_k \leftrightarrow \mathbf{x}(kT)$ ,  $y_k \leftrightarrow y(kT)$  e  $u_k \leftrightarrow u(kT)$  (o procedimento para vetores é o mesmo e leva a  $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_k$  e  $\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_d \mathbf{u}_k$ ) e obtenha  $y_k$ ;

Utilizando Euler I para obter  $x_k$ :

$$\begin{aligned}
\dot{x}(kT) &= A_d x(kT) + B_d u(kT) = w(kT) \\
\int_0^{kT} \dot{x}(t) dt &= \int_0^{kT} w(t) dt \\
x(kT) - x(kT - T) &= T w(kT - T) \\
x(kT) &= x(Kt - T) + T(A_d x(KT - T) + B_d u(kT - T)) \\
x_k &= (I + T A_d) x_{k-1} + B_d T u_{k-1}
\end{aligned}$$

Obtendo  $y_k$ :

$$\begin{aligned}
y(KT) &= C_d x(KT) \\
y_k &= C_d x_k
\end{aligned}$$

(d) plota as sequências obtidas para  $T = T_0 = 1/(\zeta\omega_n)$ ,  $T = T_0/2$ ,  $T = T_0/4$  e  $T = T_0/8$  no gráfico de (a) e compare as aproximações numéricas.

**5.) Seja EDVT  $\dot{y}(t) + \alpha(t)y(t) = u(t)$  com  $u(t) = 1(t)$ . Quando um sinal contínuo  $p$  tende a uma constante para valores altos de  $t$  ( $\lim p(t) = p_r = \text{cte. para } t \rightarrow \infty$ ) esta é chamada de valor de regime do sinal.**

(a) sem resolver a equação calcular o valor de regime  $y_r$ , supondo que  $y(t)$  tende a ele;

(b) por Euler I, relacione as sequências  $u_k \leftrightarrow u(kT)$  e  $y_k \leftrightarrow y(kT)$ ;

(c) resolva, manualmente ou por meio de um script em alguma linguagem, para  $T = 1, T = 1/2, T = 1/4$  e  $T = 1/10$ ; a solução  $y(t)$  deve ser aproximada para  $t \in [0, 10]$ ;

(d) repetir (b) e (c) para Euler II.

Os dados  $a(t)$  e  $y(0^-)$  são: **G2:**  $(t^2 - 1)/(t^2 + 1)$  e  $-1$ .