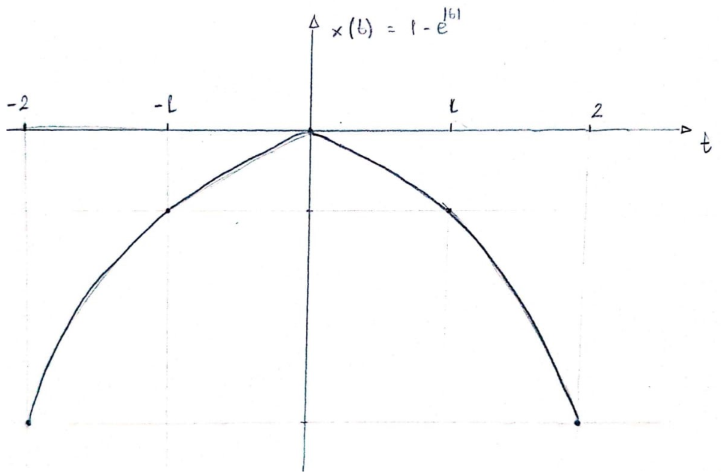
Sinais e Sistemas - Trabalho 2

Leonardo Soares da Costa Tanaka
Matheus Henrique Sant Anna Cardoso
Theo Rudra Macedo e Silva

Setembro de 2022

1.) Uma nota musical, ou tom, pode ser modelada por um sinal periódico com uma frequência fundamental e vários harmônicos. Quando duas notas musicais são "tocadas" ao mesmo tempo — um acorde — o efeito resultante pode soar agradável, consonante ou desagradável, dissonante. Desde os antigos gregos, com Pitágoras, se sabe que as combinações ou acordes agradáveis acontecem quando a razão entre as frequências fundamentais das notas é expressa por números naturais pequenos. Assim, os acordes mais harmônicos e consonantes são, pela ordem, aqueles associados às razões 1:1 (uníssono), 2:1 (oitava), 3:2 (5.a perfeita), 4:3 (4.a perfeita), 5:4 (3.a maior) etc.
(a) Crie, no Octave, uma nota com frequência **G2:** $f_0 = 170Hz$, usando ondas quadradas ou triangulares (pesquise e use os comandos `square` ou `sawtooth` no Octave) em uma escala de tempo de 3 segundos com espaçamento entre as amostras de `dt = 1/44000 (t=0:dt:3)` e chame-a de tônica $x_t(t)$;
(b) crie a oitava $x_8(t)$ da tônica, a 5.a $x_5(t)$, a 4.a $x_4(t)$, a 2.a (9:8) $x_2(t)$ e também a nota com relação 321:319 $x_d(t)$;
(c) usando o comando `sound(x, 44000)` ouça no Octave as notas isoladas e todos os acordes (para os acordes, crie a soma `z = xt + x8`, por exemplo, e depois use o comando `sound` acima em z) verificando se são consonantes;
(d) explique a teoria harmônica de Pitágoras usando Série de Fourier e análise dos harmônicos da tônica e das companheiras.

2.) Um sinal definido como abaixo em um intervalo de largura $L = 4$ e nulo para outros valores de t é chamado de pulso:
G2: $x(t) = 1 - e^{|t|}$ para $-L/2 \leq t < L/2$
(a) Esboce o gráfico do pulso;



(b) calcule sua energia total E_t;
O que buscamos é:

$$E_t = \int_{-2}^{2} |1 - e^{|t|}|^2 \, dt$$

Para motivações de cálculo, podemos separar esta integral em duas partes:

$$E_t = \int_{-2}^{0} (1 - e^{-t})^2 \, dt + \int_{0}^{2} (1 - e^{t})^2 \, dt$$

Porém, como o gráfico possui eixo de simetria em $t = 0$, sabemos que o valor das duas integrais separadas é igual. Dessa forma fazemos:

$$E_t = 2 \cdot \int_{-2}^{0} (1 - e^{-t})^2 \, dt = 2 \cdot \int_{0}^{2} (1 - e^{t})^2 \, dt$$

Escolhendo a que melhor convém para o cálculo, obtemos:

$$E_t = 2 \cdot \int_{0}^{2} (1 - e^{t})^2 \, dt$$

Finalmente:

$$E_t = 2 \cdot \int_0^2 (1 - 2e^t + e^{2t})\, dt$$

$$E_t = 2 \cdot \left[t - 2e^t + e^{2t}\right]_0^2$$

$$E_t = 7 - 4e^2 + e^4$$

Fazendo os cálculos utilizando o Octave, a energia total será:

$$E_t = 32.042$$

(c) calcule $X(0)$ fazendo $f = 0$ na fórmula de definição;
Primeiramente, anotemos a definição com a fórmula abaixo:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Deve-se perceber que o intervalo de integração será de $[-2\, 2]$. Como queremos $X(0)$, fazemos $f = 0$ na fórmula:

$$X(0) = \int_{-2}^{2} x(t)e^{-j2\pi 0 t}\, dt$$

$$X(0) = \int_{-2}^{2} (1 - e^{|t|})\, dt$$

Separando, novamente, em duas integrais, temos:

$$X(0) = \int_{-2}^{0} (1 - e^{-t})\, dt + \int_{0}^{2} (1 - e^{t})\, dt$$

$$X(0) = (t + e^{-t})\Big|_{-2}^{0} + (t - e^{t})\Big|_{0}^{2}$$

$$X(0) = 3 - e^2 + 3 - e^2$$

$$X(0) = 6 - 2e^2$$

(d) calcule analiticamente $X(f)$ e verifique se $X(0)$ pode ser obtido a partir desta fórmula sem indeterminações;
Agora, queremos calcular a seguinte integral:

$$X(f) = \int_{-2}^{2} (1 - e^{|t|})e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Aqui, podemos, novamente, separar em duas integrais:

$$X(f) = \int_{-2}^{0} (1 - e^{-t})e^{-j2\pi f t}\, dt + \int_{0}^{2} (1 - e^{t})e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$X(f) = \left(-\frac{e^{-j2\pi f t}}{j2\pi f} + \frac{e^{-t(1+j2\pi f)}}{1 + j2\pi f}\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \left(-\frac{e^{-j2\pi f t}}{j2\pi f} - \frac{e^{t(1-j2\pi f)}}{1 - j2\pi f}\right)\Bigg|_{0}^{2}$$

$$X(f) = -\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{1 + j2\pi f} + \frac{e^{j4\pi f}}{j2\pi f} - \frac{e^2 e^{j4\pi f}}{1 + j2\pi f} + \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{1 - j2\pi f} - \frac{e^{-j4\pi f}}{j2\pi f} - \frac{e^2 e^{-j4\pi f}}{1 - j2\pi f}$$

Resumindo as contas, temos:

$$X(f) = 4sinc(4f) + \frac{2}{1 + 4\pi^2 f^2} - \frac{2e^2 cos(4\pi f)}{1 + 4\pi^2 f^2} - \frac{4e^2 \pi f sen(4\pi f)}{1 + 4\pi^2 f^2}$$

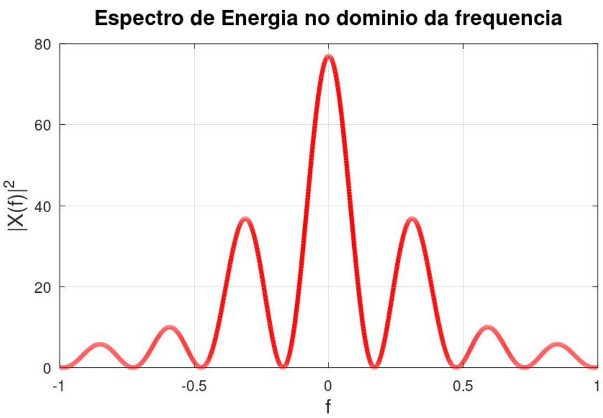
Primeiramente, perceba que os valores de $X(f)$ são reais.
Agora, que temos a expressão, calculemos $X(0)$ com base nela e comparar com a expressão obtida em (c).

$$X(0) = 4sinc(0) + \frac{2}{1 + 4\pi^2 0} - \frac{2e^2 cos(4\pi 0)}{1 + 4\pi^2 0} - \frac{4e^2 \pi 0 sen(4\pi 0)}{1 + 4\pi^2 0}$$

$$X(0) = 4 + 2 - 2e^2 = 6 - 2e^2$$

Perceba, então, que obtivemos a mesma expressão, não existindo indeterminações para $f = 0$.

(e) trace o espectro de energia $|X(f)|^2 \times f$ para $f \in [-1\ +1]Hz$ usando muitos pontos e calcule a energia contida nesta banda ($\int_{-1}^{1} |X(f)|^2\, dt$) usando integração aproximada;
Utilizando o Octave para calcular a aproximação do espectro de energia e plotar o gráfico. O resultado é o visto abaixo:



Calculando a energia para o intervalo definido (de -1 até 1), utilizando o próprio Octave para realizar os cálculos aproximados, encontramos que a energia para este intervalo de frequências.

$$E_{[-1\,1]} = 27.923$$

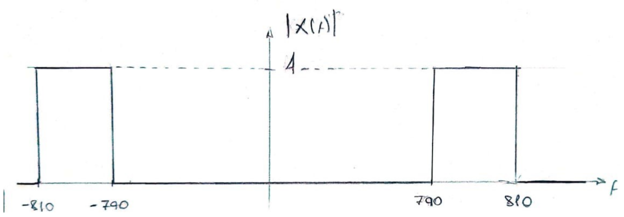
(f) por tentativa e erro, e usando o método anterior, calcule a banda de passagem que retém 95% da energia do sinal: f_M tal que $\int_{-f_M}^{f_M} |X(f)|^2\, df$;
Utilizando, novamente, o software Octave, pudemos testar, para algumas faixas de frequências, quantos porcento da energia havia naquela banda de frequência. O valor mais próximo que chegamos para a frequência f_M foi de 2.5985, em que chegamos a uma retenção de 95.000%.

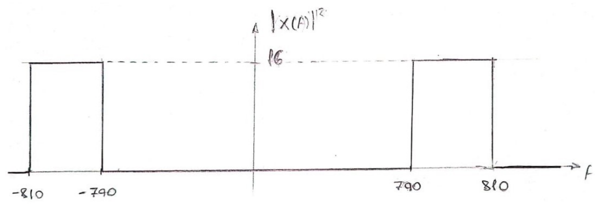
$$E_t = 32.042$$

$$E_{f_M} = 30.440$$

Finalmente, a banda de passagem que retém 95% da energia é para $f_M = 2.5985$.

3.) Um sinal é caracterizado por
G2: $X_m(f) = 80p_{20}(f+810) + 80p_{20}(f-790)$
com frequências medidas em kHz. Lembrar que $p_\Delta(f-\tau)$ denota um pulso de largura Δ, amplitude Δ^{-1} e aplicado a partir de τ, com transformada conhecida.
(a) Esboçar os espectros de amplitude e de energia;





(b) calcular sua anti-transformada de Fourier: $\mathcal{F}^{-1}\{X_m(f)\} = x_m(t)$ (use as propriedades);
Queremos calcular a inversa da transformada de Fourier. Para isso, usamos:

$$x_m(t) = \int_{-810}^{-790} 4e^{j2\pi ft}\, df + \int_{790}^{810} 4e^{j2\pi ft}\, df$$

$$x_m(t) = \left[\frac{4e^{j2\pi ft}}{j2\pi t}\right]_{-810}^{-790} + \left[\frac{4e^{j2\pi ft}}{j2\pi t}\right]_{790}^{810}$$

$$x_m(t) = 4\left[\frac{2sen(2\pi 810t)}{2\pi t} - \frac{2sen(2\pi 790t)}{2\pi t}\right]$$

$$x_m(t) = 4\left[\frac{2sen(2\pi 810t)\cdot 810}{2\pi t\cdot 810} - \frac{2sen(2\pi 790t)\cdot 790}{2\pi t\cdot 790}\right]$$

$$x_m(t) = 6480\, sinc(1620t) - 6320\, sinc(1580t)$$

(c) ao sinal $x_m(t)$ se aplica um filtro PB (passa-baixas) ideal; determinar sua frequência de corte M de modo que 50% da energia total seja retida;
Aqui é bem mais conveniente trabalharmos com o sinal no domínio da frequência (o dado da questão), sendo, dessa forma, fácil ver que a frequência de corte assume, nesse caso, o valor de $800Hz$, percorrendo o intervalo de $[-800\,800]$. Isso fica claro, pois, ao obtermos o espectro de energia, para termos metade do gráfico preenchido (50% da área), devemos percorrer os valores entre -800 até 800.

(d) ao sinal $x_m(t)$ se aplica um filtro PA (passa-altas) ideal; determinar sua frequência de corte M de modo que 50% da energia total seja retida.
Perceba que, de forma análoga ao anterior, é mais conveniente trabalharmos no domínio da frequência. Aqui, diferentemente, queremos um filtro passa-alta, sendo a frequência de corte, também $800Hz$. Finalmente, obtemos 50% da área do gráfico de espectro de energia, com os intervalos $[-\infty\ -800]$ e $[800\ \infty]$. Logo, a frequência de corte é, novamente $800Hz$.