Sinais e Sistemas - Trabalho 5 - Avaliação 9

Grupo 2

Leonardo Soares da Costa Tanaka

Matheus Henrique Sant Anna Cardoso

Theo Rudra Macedo e Silva

Rio de Janeiro
2022

1.) Um SLIT relaxado é descrito pela equação a diferenças $y_{k+2} + \alpha y_k = \beta u_{k+1} + \gamma u_k$**.**

Os dados (α, β, γ) **são: G2:** $(-1/4, 1, 2)$**;**

Utilizando as constantes do grupo, a equação torna-se: $y_{k+2} - \frac{1}{4}y_k = u_{k+1} + 2u_k$

(a) Encontrar a função de transferência $G(z)$;

$$y_{k+2} - \frac{1}{4}y_k = u_{k+1} + 2u_k$$

$$z^2Y(z) - z^2Y(0) - zY(1) - \frac{1}{4}Y(z) = zU(z) - zu(0) + 2U(z)$$

$$Y(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}}U(z) + \frac{z^2y(0) + zy(1) - zu(0)}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

$$G(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

(b) encontrar polos e zeros e verificar a estabilidade;

$$Polos => x^2 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) => p_1 = \frac{1}{2}; p_2 = -\frac{1}{2}$$

$$Zeros => x + 2 => z_1 = -2$$

O SLIT é estável nesse caso, porque seus pólos p_1 e p_2 estão no círculo unitário.

(c) encontrar as equações dinâmicas;

$$\begin{aligned} x_1[k] &= y[k] & &=> & x_1[k+1] &= y[k+1] = x_2[k] - p_1u[k] \\ x_2[k] &= y[k+1] + p_1u[k] & &=> & x_2[k+1] &= y[k+2] + p_1u[k] = \frac{1}{4}x_1[k] + (p_1+1)u[k+1] + 2u[k] \end{aligned}$$

$$p_1 = -1$$

$$x_1[k] = y[k] \qquad => \qquad x_1[k+1] = x_2[k] + u[k]$$
$$x_2[k] = y[k+1] - u[k] \qquad => \qquad x_2[k+1] = \frac{1}{4}x_1[k] + 2u[k]$$

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u[k]; \quad y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[k]$$

(d) calcular, iterativamente, os 10 primeiros valores y_k para entrada em degrau unitário;

Podemos usar o seguinte formato para y(k):

$$y(k) = CA^k x(0) + C\sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j}Bu(j)$$

Assumindo que x(0) = 0, pois o SLIT é relaxado:

$$y(k) = C\sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j}Bu(j)$$

Por fim, os valores são:

$$y(0) = 0.000000$$
$$y(1) = 1.000000$$
$$y(2) = 3.000000$$
$$y(3) = 3.250000$$
$$y(4) = 3.750000$$
$$y(5) = 3.812500$$
$$y(6) = 3.937500$$
$$y(7) = 3.953125$$
$$y(8) = 3.984375$$
$$y(9) = 3.988281$$
$$y(10) = 3.996094$$

(e) usando transformada em Z, encontrar uma expressão analítica para a y_k;

Utilizaremos uma das expressões obtidas no item a)

$$Y(z) = \frac{z+2}{z^2-\frac{1}{4}}U(z) + \frac{z^2y(0^-)+zy(1)-zu(0^-)}{z^2-\frac{1}{4}}$$

Como a entrada é um degrau unitáio, e temos os valores obtidos para $y(0),\ y(1)\ e\ u(0)$, obtém-se:

$$Y(z) = \frac{z+2}{z^2-\frac{1}{4}} \cdot \frac{z}{z-1}$$

Manipulando a equação:

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{z} &= \frac{z+2}{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{2})} \cdot \frac{z}{z(z-1)} \\ Y(z) &= \frac{z}{z+\frac{1}{2}} - 5\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + 4\frac{z}{z-1}\end{aligned}$$

Calculando a inversa:

$$y(k) = \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 5\left(\frac{1}{2}\right)^k + 4\right] \cdot 1(k)$$

Por fim, plotando os resultados:

$$y(0) = 0.000000$$

$$y(1) = 1.000000$$

$$y(2) = 3.000000$$

$$y(3) = 3.250000$$

$$y(4) = 3.750000$$

$$y(5) = 3.812500$$

$$y(6) = 3.937500$$

$$y(7) = 3.953125$$

$$y(8) = 3.984375$$

$$y(9) = 3.988281$$

$$y(10) = 3.996094$$

(f) comparar os resultados iterativo e analítico.

Embora métodos diferentes tenham sido utilizados, os resultados iterativo e analítico são os mesmos.

G2: 2.) Eis um "Problema de Algibeira": um vendedor de queijos efetua apenas transações do tipo *vende metade de seu estoque mais meia peça.* Pede-se o número inicial de peças, x_0 se após a 6ª venda seus queijos acabam. Interpretar a filosofia de vendas por meio de uma equação a diferenças e calcular x_k, o saldo de estoque após a k-ésima venda. Dar a resposta ao problema de algibeira.

Antes de mais nada, podemos pensar um pouco antes de tomarmos quaisquer decisões. É claro ser impossível realizar a venda de meia peça, portanto, é provável que seja uma correção, justamente para que não se venda meia peça. Veja o processo:

Processo: (Venda)

Após a venda k: c peças.

Logo antes: $c + 1/2$ peças.

Antes da venda k: $2 \cdot (c + 1/2) = \boxed{2c + 1}$ peças. Ou, após a venda $k - 1$.

Disso, podemos ir dando passos para trás até chegarmos ao momento anterior à primeira venda. Considerando, cada processo, uma venda e que antes de cada venda, teremos $2c + 1$ peças, sendo c o número de peças após essa venda:

Após a venda 6: 0

Após a venda 5: $2 \cdot 0 + 1 = 1$

Após a venda 4: $2 \cdot 1 + 1 = 3$

Após a venda 3: $2 \cdot 3 + 1 = 7$

Após a venda 2: $2 \cdot 7 + 1 = 15$

Após a venda 1: $2 \cdot 15 + 1 = 31$

Finalmente, antes da primeira venda, teremos: $2 \cdot 31 + 1 = 63$

Portanto, com passos simples, podemos resolver este problema.

Ainda assim, é possível resolvê-lo por métodos analíticos, com uma equação a diferenças, modelando da seguinte maneira: a quantidade de peças após a venda k (x_k) é a metade da anterior subtraída de $1/2$, da forma abaixo:

$$x_k = \frac{1}{2}x_{k-1} - \frac{1}{2}$$

Podemos realizar a transformada Z desta equação, obtendo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{x_k\right\} &= \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{x_{k-1}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{1[k]\right\} \\
X(z) &= \frac{1}{2}\left(z^{-1}X(z) + x[-1]\right) - \frac{z}{2z-2} \\
X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1]}{2} - \frac{z}{2z-2} \\
X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1](z-1)}{2z-2} - \frac{z}{2z-2} \\
X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1]z - x[-1] - z}{2z-2} \\
\frac{X(z)}{z} &= \frac{x[-1]z - x[-1] - z}{(z-1)(2z-1)} \\
\frac{X(z)}{z} &= \frac{x[-1]+1}{2z-1} - \frac{1}{z-1} \\
X(z) &= \frac{x[-1]+1}{2}\left(\frac{z}{z-1/2}\right) - \frac{1}{z-1}
\end{aligned}$$

A partir daqui, podemos fazer a transformada inversa:

$$x[k] = \frac{x[-1]+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1[k]$$

Podemos descobrir $x[-1]$ dado que sabemos $x[6]$:

$$\begin{aligned}
x[6] = 0 &= \frac{x[-1]+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1[6] \\
0 &= \frac{x[-1]+1}{128} - 1 \\
128 &= x[-1] + 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{x[-1] = 127}$$

Temos tudo o que precisamos:

$$\begin{aligned}
x[k] &= \frac{x[-1]+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1[k] \\
x[k] &= 64\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1[k]
\end{aligned}$$

Aplicando para $k = 0$, teremos:

$$x[0] = 64 \cdot 1 - 1$$

$$\boxed{x[0] = 63}$$

Que foi o resultado obtido da primeira forma.

3.) Para a EDLIT $\tau\dot{y}(t) + y(t) = \beta u(t)$ com $y(0^-) = y_0$:

G2: $\tau = 2, \beta = 2$ **e** $y_0 = 1$**.**

Utilizando as constantes do grupo, a equação torna-se: $2\dot{y}(t) + y(t) = 2u(t)$ com $y(0^-) = 1$

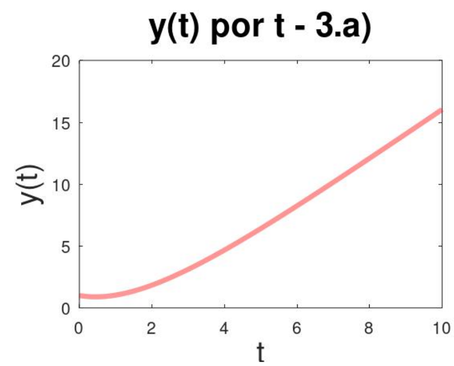
(a) Calcular a resposta à rampa unitária por Laplace, e traçar com precisão o seu gráfico para $t \in [0,\ 5\tau]$;

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{2}y(t) = u(t); \quad y(0^-) = 1; \quad u(t) = t1(t)$$
$$sY(s) - y(0^-) + \frac{1}{2}Y(s) = \frac{1}{s^2}$$
$$(s + 1/2)Y(s) = \frac{s^2+1}{s^2}$$
$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s+1/2)} = \frac{r_1}{s^2} + \frac{r_2}{s} + \frac{r_3}{s+1/2}$$
$$r_1 = 2; \quad r_2 = -4; \quad r_3 = 5$$
$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s} + \frac{5}{s+1/2}$$
$$y(t) = 2t\ 1(t) - 4\ 1(t) + 5e^{-\frac{1}{2}t}1(t)$$

```
%Questão 3.a)

% Intervalo
dt=0.001;

% Dados basicos
t=0:dt:10-dt; x=2*t-4+5*exp(-1/2*t);
plot (t, x, "r", "linewidth", 3);
title("y(t) por t - 3.a)", "fontsize", 20);
xlabel("t", "fontsize", 18);
ylabel("y(t)", "fontsize", 18);
```



(b) por Euler I, encontrar a equação que relaciona $y_k \leftrightarrow y(kT)$ e $u_k \leftrightarrow u(kT)$;

Buscando chegar em uma relação tal que $y(t) = \int_0^t a(\tau)\ d\tau$, fazemos:

$$\begin{aligned}
2\dot{y}(t) &= 2u(t) - y(t) \\
\dot{y}(t) &= \frac{2u(t) - y(t)}{2} \\
y(t) &= \int_0^t \frac{2u(t) - y(t)}{2}\ dt
\end{aligned}$$

Tendo $a(t)$, fazemos:

$$\begin{aligned}
y(kT) &= y(kT - T) + Ta(kT - T) \\
y[k] &= y[k-1] + Ta[k-1] \\
y[k] &= y[k-1] + T\frac{2u(t) - y(t)}{2} \\
y[k] &= y[k-1]\left(1 - \frac{T}{2}\right) + Tu[k-1]
\end{aligned}$$

(c) resolvê-la por transformada Z para entrada em rampa;

Aqui, $u[k] = kT \cdot 1[k]$. Logo, $U(z) = T\frac{z}{(z-1)^2}$ Deslocando a sequência, temos: $y[k+1] = y[k]\left(1 - \frac{T}{2}\right) + Tu[k]$. Aplicando a transformada Z, teremos:

$$\begin{aligned}
zY(z) - z &= Y(z) + TU(z) \\
\frac{Y(z)}{z} &= \frac{z^2 - 2z + 1 - T^2}{(z - 1 + T/2)(z-1)^2}
\end{aligned}$$

Separando em frações parciais:

$$\begin{aligned}
\frac{Y(z)}{z} &= \frac{A}{z - 1 + T/2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2} \\
Y(z) &= A\frac{z}{z - 1 + T/2} + B\frac{z}{z-1} + C\frac{z}{(z-1)^2} \\
y[k] &= A \cdot \left(1 - \frac{T}{2}\right)^k + B \cdot 1[k] + C \cdot k\ 1[k]
\end{aligned}$$

Agora, basta descobrir A, B e C. Somando as frações:

$$A(z^2 - 2z + 1) + B(z - 1 + T/2)(z-1) + C(z - 1 + T/2) = z^2 - 2z + 1 - T^2$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+2B-\frac{TB}{2}-C=2 \\ A+B-\frac{TB}{2}+\frac{TC}{2}-C=1+T^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=5 \\ B=-4 \\ C=2T \end{cases}$$

Então

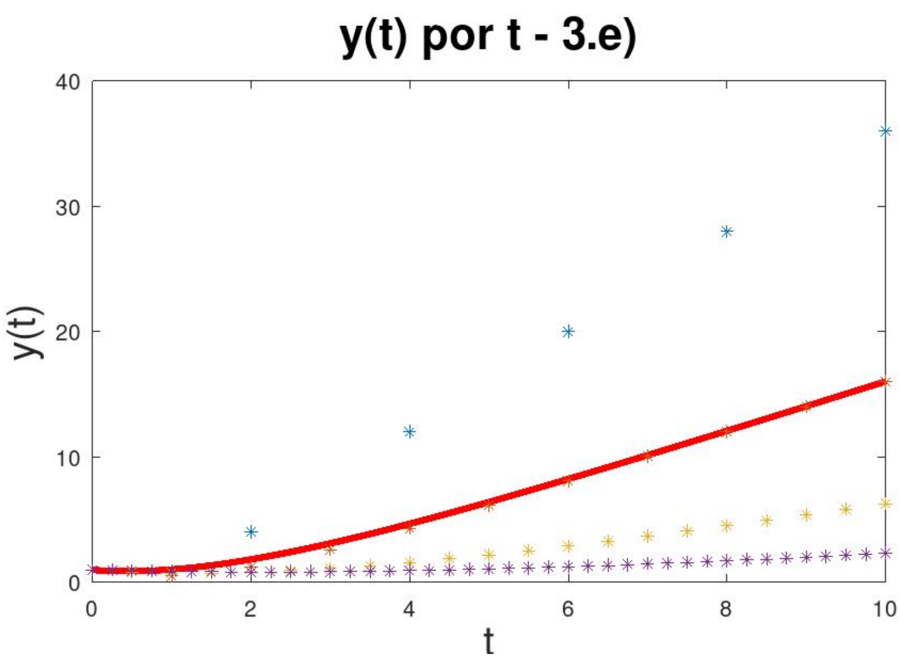
$$y[k]=5\cdot\left(1-\frac{T}{2}\right)^k\cdot 1[k]-4\cdot 1[k]+2T\cdot k\ 1[k]$$

(d) listar as sequências obtidas para $T=\tau, T=\tau/2, T=\tau/4$ e $T=\tau/8$;

Sendo $\tau=2$, substituímos:

$$\begin{cases} T=2 & y[k]=5\cdot\delta(k)-4\cdot 1[k]+4\cdot k\ 1[k] \\ T=1 & y[k]=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\ 1[k]-4\cdot 1[k]+2\cdot k\ 1[k] \\ T=\frac{1}{2} & y[k]=5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^k\ 1[k]-4\cdot 1[k]+k\ 1[k] \\ T=\frac{1}{4} & y[k]=5\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^k\ 1[k]-4\cdot 1[k]+\frac{1}{2}\cdot k\ 1[k] \end{cases}$$

(e) plotar os valores de $y(kT)$ no mesmo gráfico do ítem (a) e comparar as aproximações numéricas;



$y(t)$ em vermelho – $T=2$ em azul – $T=1$ em laranja – $T=1/2$ em amarelo – $T=1/4$ em roxo.

(f) repetir (b), (c), (d) e (e) para Newton.

4.) Para a EDLIT $\ddot{y}(t)+2\zeta\omega_n\dot{y}(t)+\omega_n^2 y(t)=\alpha\dot{u}(t)+\beta u(t)$ **com CIs nulas:**

Os dados $(\zeta,\ \omega_n,\ \beta,\ \alpha)$ **são G2:** $(1/3,\ 2,\ 3,\ -1)$**.**

Utilizando os dados do grupo, temos: $\ddot{y}(t)+\frac{4}{3}\dot{y}(t)+4y(t)=-\dot{u}(t)+3u(t)$

(a) para $u(t) = 1$, encontre, por Laplace, a solução e plote-a com precisão para $t \in [0,\ 8/(\zeta\omega_n)]$;

Utilizando Laplace na EDLIT:

$$s^2Y(s) + 2\zeta\omega_n sY(s) + \omega_n^2 Y(s) = \alpha sU(s) + \beta U(s);\ U(s) = \frac{1}{s}$$
$$Y(s) = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}U(s) = \frac{\alpha s + \beta}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s}$$

Descobrindo os valores do denominador das frações polinomiais:

$$Y(s) = \frac{r_1 s + r_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{r_3}{s} = \frac{r_1 s + r_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2 - \zeta^2\omega_n^2} + \frac{r_3}{s}$$
$$Y(s) = \frac{r_1 s + r_2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)} + \frac{r_3}{s} = \frac{r_1 s + r_2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})^2} + \frac{r_3}{s}$$

Substituindo $\omega = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ para achar a transformada de seno e cosseno nas expressões da transformada:

$$Y(s) = \frac{r_1(s + \zeta\omega_n)}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega^2} + \frac{\frac{r_2 - r_1\zeta\omega_n}{\omega}\omega}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega^2} + \frac{r_3}{s}$$
$$y(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(r_1 cos(\omega t) + \frac{r_2 - r_1\zeta\omega_n}{\omega} sen(wt)) + r_3$$

Descobrindo os denominadores das frações anteriores:

$$r_1 = \frac{-\beta}{\omega_n^2}, r_2 = \alpha - \frac{2\zeta\beta}{\omega_n}, r_3 = \frac{\beta}{\omega_n^2}$$
$$\omega = \frac{4\sqrt{2}}{3}, r_1 = \frac{-3}{4}, r_2 = -2, r_3 = \frac{3}{4}$$

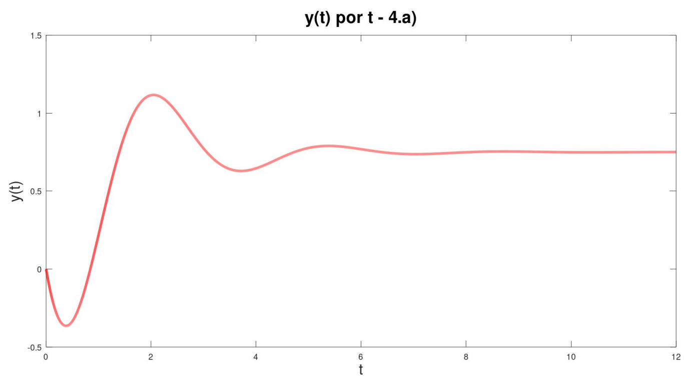
Solução:

$$y(t) = e^{-\frac{2}{3}t}\left(-\frac{3}{4}cos\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}t\right) - \frac{15\sqrt{2}}{16}sen\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}t\right)\right) + \frac{3}{4}$$

```
%Questão 4.a)

% Intervalo
dt=0.001;
```

```
% Dados basicos
t=0:dt:12-dt; y=e.^(-2/3*t).*(-3/4*cos(4*sqrt(2)/3*t)-15*sqrt(2)/16*sin(4*sqrt(2)/3*t))+3/4;
plot (t, y, "r", "linewidth", 3);
title("y(t) por t - 4.a)", "fontsize", 20);
xlabel("t", "fontsize", 18);
ylabel("y(t)", "fontsize", 18);
```



(b) por meio de variáveis x_1 e x_2 apropriadas, expressá-la como $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$ e $\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t)$;

$$x_1(t) = y(t), x_2(t) = \dot{y}(t) + pu(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) - pu(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) + p\dot{u}(t) = -\omega_n^2 y(t) - 2\zeta\omega_n \dot{y}(t) + \alpha\dot{u}(t) + \beta u(t) + p\dot{u}(t) =$$

$$= -\omega_n^2 x_1(t) - 2\zeta\omega_n x_2(t) + (\alpha + p)\dot{u}(t) + (\beta + 2\zeta\omega_n p)u(t)$$

Já que $\dot{u}(t)$ tem que sumir, então $p = -\alpha = 1$.

Utilizando as expressões anteriores chegamos na seguinte expressão:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -p \\ \beta + 2\zeta\omega_n p \end{bmatrix} u(t), y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Substituindo com os valores das constantes:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4/3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 13/3 \end{bmatrix} u(t), y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

(c) por Euler I, relacione $\boldsymbol{x}_k \leftrightarrow \boldsymbol{x}(kT)$, $y_k \leftrightarrow y(kT)$ e $u_k \leftrightarrow u(kT)$ (o procedimento para vetores é o mesmo e leva a $\boldsymbol{x}_k = A_d\boldsymbol{x}_{k-1} + B_d\boldsymbol{u}_k$ e $\boldsymbol{y}_k = C_d\boldsymbol{x}_k + D_d\boldsymbol{u}_k$) e obtenha y_k;

Utilizando Euler I para obter x_k:

$$\begin{aligned} \dot{x}(kT) = A_d x(kT) + B_d u(kT) = w(kT) \\ \int_0^{kT} \dot{x}(t)dt = \int_0^{kT} w(t)dt \\ x(kT) - x(kT-T) = Tw(kT-T) \\ x(kT) = x(Kt-T) + T(A_d x(KT-T) + B_d u(kT-T)) \\ x_k = (I + TA_d)x_{k-1} + B_d T u_{k-1} \end{aligned}$$

Obtendo y_k:

$$y(KT) = C_d x(KT)$$

$$y_k = C_d x_k$$

(d) plota as sequências obtidas para $T = T_0 = 1/(\zeta\omega_n)$, $T = T_0/2$, $T = T_0/4$ e $T = T_0/8$ no gráfico de (a) e compare as aproximações numéricas.

5.) Seja EDVT $\dot{y}(t) + \alpha(t)y(t) = u(t)$ com $u(t) = 1(t)$. Quando um sinal contínuo p tende a uma constante para valores altos de t ($\lim p(t) = p_r =$ cte. para $t \to \infty$) esta é chamada de valor de regime do sinal.

Os dados $a(t)$ e $y(0^-)$ são: **G2:** $(t^2-1)/(t^2+1)$ e -1.

(a) sem resolver a equação calcular o valor de regime y_r, supondo que $y(t)$ tende a ele;

$$Foi\ dado\ que\ a(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}$$

Precisamos conhecer os limites de $\dot{y}(t)\ e\ a(t)$. Se existe um valor de regime para a equação acima, então a taxa de variação da função tende a zero quando t tende a infinito. Portanto $\lim_{t\to\infty} \dot{y}(t) = 0$

$$Basta\ fazer\ \lim_{t\to\infty} a(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right) = \left(\frac{1-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}}\right)$$

$$Logo: \lim_{t\to\infty} a(t) = 1$$

Agora, aplicando o limite na equação inteira:

$$\lim_{t\to\infty}[\dot{y}(t)] + \lim_{t\to\infty}[a(t)\cdot y_r] = \lim_{t\to\infty}[1(t)]$$

$$0 + 1\cdot y_r = 1$$

$$y_r = 1$$

(b) por Euler I, relacione as sequências $u_k \leftrightarrow u(kT)$ e $y_k \leftrightarrow y(kT)$;

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= u(t) - a(t)y(t)\\
y(t) &= y_0 + \int_0^t (u(t) - a(t)y(t))dt\\
y_k &= y_0 + \sum_{i=0}^{k-1}(u_i - a_i y_i)T\\
y_{k+1} &= -1 + \sum_{i=0}^{k}(u_i - a_i y_i)T\\
y_{k+1} &= y_k + (u_k - a_k y_k)T\\
Dados:\ a_k &= \frac{(KT)^2-1}{(KT)^2+1};\ u_k = 1(k)
\end{aligned}$$

$$y_{k+1} = \left[1 - T\left(\frac{(KT)^2-1}{(KT)^2+1}\right)\right]y_k + T\cdot 1(k)$$

(c) resolva, manualmente ou por meio de um script em alguma linguagem, para $T = 1, T = 1/2, T = 1/4$ e $T = 1/10$; a solução $y(t)$ deve ser aproximada para $t \in [0,\ 10]$;

(d) repetir (b) e (c) para Euler II.

Aplicando Euler II, sabendo que $y_k = y(KT)$:

$$\begin{aligned}
y_k &= y_0 + \sum_{i=1}^{k}(u_i - a_i y_i)T\\
y_{k+1} &= y_0 + \sum_{i=1}^{k+1}(u_i - a_i y_i)T\\
y_{k+1} &= y_k + (u_{k+1} - a_{k+1}y_{k+1})T
\end{aligned}$$

$$y_{k+1} = \frac{y_k + Tu_{k+1}}{1 + Ta_{k+1}}$$