Sinais e Sistemas - Trabalho 3 - Avaliação 5

Grupo 2
Leonardo Soares da Costa Tanaka
Matheus Henrique Sant Anna Cardoso
Theo Rudra Macedo e Silva

Rio de Janeiro
2022

1.) Um SLIT é modelado por $\tau\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$ com $y(0^-) = \alpha$. **G2:** $\tau = 3, \alpha = -2$
(a) Calcular a resposta ao degrau unitário e esboçar o seu gráfico;
Para calcular a resposta, trataremos já com os dados, sendo a EDO:

$$3\dot{y}(t) + y(t) = 1(t) \quad , \quad y(0^-) = -2$$

Pela propriedade da derivação, sabemos que

$$\dot{y}(t) = sY(s) - y(0^-)$$

Então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{3\dot{y}(t) + y(t)\} &= \mathcal{L}\{u(t)\} \\ 3(sY(s) - y(0^-)) + Y(s) &= U(s) \\ Y(s)(3s+1) + 6 &= U(s) \end{aligned}$$

Como $u(t) = 1(t)$, sabemos que $U(s) = \frac{1}{s}$, assim

$$\begin{aligned} Y(s)(3s+1) + 6 &= \frac{1}{s} \\ Y(s) = \frac{1}{3s+1} \cdot \frac{1}{s} &- \frac{6}{3s+1} \end{aligned}$$

Separando em frações parciais, temos:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{3}{3s+1} - \frac{6}{3s+1} \\ Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{9}{3s+1} \\ Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{3}{s+1/3} \end{aligned}$$

Agora, podemos descobrir $y(t)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1(t) \qquad\qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+1/3}\right\} = 3e^{-\frac{1}{3}t}1(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = 1(t) - 3e^{-\frac{1}{3}t}1(t)$$

Finalmente

$$y(t) = 1(t) - 3e^{-\frac{t}{3}}1(t)$$

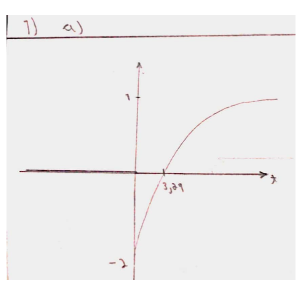

Figura 1: Esboço do gráfico

(b) calcular a resposta à rampa unitária e esboçar o seu gráfico;
Para calcular a resposta à rampa, tomemos a seguinte EDO:

$$3\dot{y}(t) + y(t) = t1(t) \quad , \quad y(0^-) = -2$$

Da mesma forma como no item **(a)**, podemos utilizar a propriedade da derivação e fazer em ambos os lados, a transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{\dot{y}(t)\right\} = \left(sY(s) - y(0^-)\right) \qquad\qquad \mathcal{L}\left\{t1(t)\right\} = U(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\begin{aligned} 3(Y(s) - y(0^-)) + Y(s) &= U(s) \\ Y(s)(3s+1) + 6 &= \frac{1}{s^2} \\ Y(s) = \frac{1}{3s+1} \cdot \frac{1}{s^2} &- \frac{6}{3s+1} \end{aligned}$$

Separando em frações parciais, teremos

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{9}{3s+1} - \frac{3s-1}{s^2} - \frac{6}{3s+1} \\ Y(s) &= \frac{3}{3s+1} - \frac{3s-1}{s^2} \\ Y(s) &= \frac{1}{s+1/3} - \frac{3}{s} + \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Agora, podemos calcular a inversa da transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/3}\right\} = e^{-\frac{t}{3}}1(t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s}\right\} = 3 \cdot 1(t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t1(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = e^{-\frac{t}{3}}1(t) - 3 \cdot 1(t) + t1(t)$$

Finalmente

$$y(t) = e^{-\frac{t}{3}}1(t) - 3 \cdot 1(t) + t1(t)$$

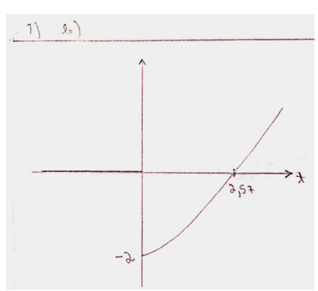

Figura 2: Esboço do gráfico

(c) calcular a resposta ao seno $u(t) = \text{sen}(\omega t)$ para $\alpha = 0$, $\omega = 1/(4\tau)$ e esboçar o seu gráfico;
Agora, temos para resolver a seguinte EDO:

$$3\dot{y}(t) + y(t) = \text{sen}\left(\frac{t}{12}\right)1(t) \quad , \quad y(0^-) = 0$$

Utilizaremos Laplace, para resolver, a saber

$$\mathcal{L}\left\{\dot{y}(t)\right\} = sY(s) \qquad \mathcal{L}\left\{\text{sen}\left(\frac{t}{12}1(t)\right)\right\} = \frac{1/12}{s^2+1/144} = \frac{12}{144s^2+1}$$

Utilizando, novamente, as técnicas empregadas nos itens anteriores, teremos

$$\begin{aligned} 3(sY(s)) + Y(s) &= \frac{12}{144s^2+1} \\ Y(s)(3s+1) &= \frac{12}{144s^2+1} \\ Y(s) &= \frac{1}{3s+1}\cdot\frac{12}{144s^2+1} \\ Y(s) &= \frac{r_1}{3s+1} + \frac{r_2}{144s^2+1} \end{aligned}$$

Vamos, por tentativa e erro, calcular as constantes r_1 e r_2.
Perceba que, fazendo $r_1 \cdot (144s^2+1)$ teremos um termo com s^2 mais uma constante. O mesmo deve ser para $r_2 \cdot (3s+1)$. Para isso, podemos fazer com que o segundo seja o produto da soma pela diferença, obtendo um termo ao quadrado e uma constante.
Fazemos, então $r_2 = (3s-1)$, obtendo, naquele segundo produto, o seguinte: $r_2 \cdot (3s+1) = (3s-1)(3s+1) = 9s^2 - 1$. No primeiro produto $(r_1 \cdot (144s^2+1))$, já temos um fator grande suficiente para o termo quadrático, podemos corrigir com o segundo produto, multiplicando por 16.
No final, ficamos com a expressão

$$\frac{1}{3s+1} - \frac{16(3s-1)}{144s^2+1}$$

Ficamos, porém, com uma constante no numerador igual a $(144s^2 + 1 - 16(9s^2-1) = 1 + 16 = 17)$ diferente da expressão original (12). Sendo assim, podemos multiplicar a expressão toda por $\frac{12}{17}$ para termos a expressão inicial na forma de somas parciais.
Então

$$Y(s) = \left(\frac{1}{3s+1} - \frac{16(3s-1)}{144s^2+1}\right)\cdot\frac{12}{17}$$

Assim

$$Y(s)\cdot\frac{17}{12} = \frac{1}{3s+1} - \frac{48s-16}{144s^2+1}$$

Fazendo mais alterações, teremos

$$\begin{aligned} Y(s)\cdot\frac{17}{12} &= \frac{1}{3s+1} - \frac{48s}{144s^2+1} + \frac{16}{144s^2+1} \\ Y(s)\cdot\frac{17}{12} &= \frac{1/3}{s+1/3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{s}{s^2+1/144} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1/12}{s^2+1/144} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/3}\right\} = e^{-\frac{t}{3}}1(t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1/144}\right\} = \cos\left(\frac{t}{12}\right)1(t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/12}{s^2+1/144}\right\} = \text{sen}\left(\frac{t}{12}\right)1(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\cdot\frac{17}{12}\right\} = \frac{e^{-\frac{t}{3}}1(t)}{3} - \frac{\cos\left(\frac{t}{12}\right)1(t)}{3} + \frac{4}{3}\cdot sen\left(\frac{t}{12}\right)1(t)$$
$$y(t)\cdot\frac{17}{4} = e^{-\frac{t}{3}}1(t) - \cos\left(\frac{t}{12}\right)1(t) + 4sen\left(\frac{t}{12}\right)1(t)$$

Finalmente

$$y(t) = 1(t)\cdot\frac{4e^{-\frac{t}{3}} - 4\cos\left(\frac{t}{12}\right) + 16sen\left(\frac{t}{12}\right)}{17}$$

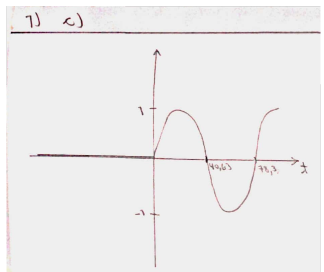

Figura 3: Esboço do gráfico

(d) calcular a resposta ao seno $u(t) = \text{sen}(\omega t)$ para $\alpha = 0$, $\omega = 4/\tau$ e esboçar o seu gráfico;
Agora, temos para resolver a seguinte EDO:

$$3\dot{y}(t) + y(t) = \text{sen}\left(\frac{4t}{3}\right)1(t) \quad , \quad y(0^-) = 0$$

Utilizaremos Laplace, para resolver, a saber

$$\mathcal{L}\left\{\dot{y}(t)\right\} = sY(s) \qquad\qquad \mathcal{L}\left\{\text{sen}\left(\frac{4t}{3}1(t)\right)\right\} = \frac{4/3}{s^2+16/9} = \frac{12}{9s^2+16}$$

Utilizando, novamente, as técnicas empregadas nos itens anteriores, teremos

$$3(sY(s)) + Y(s) = \frac{12}{9s^2+16}$$
$$Y(s)(3s+1) = \frac{12}{9s^2+16}$$
$$Y(s) = \frac{1}{3s+1}\cdot\frac{12}{9s^2+16}$$
$$Y(s) = \frac{r_1}{3s+1} + \frac{r_2}{9s^2+16}$$

Vamos, por tentativa e erro, calcular as constantes r_1 e r_2.
Perceba que, fazendo $r_1\cdot(9s^2+16)$ teremos um termo com s^2 mais uma constante. O mesmo deve ser para $r_2\cdot(3s+1)$. Para isso, podemos fazer com que o segundo seja o produto da soma pela diferença, obtendo um termo ao quadrado e uma constante.
Fazemos, então $r_2 = (3s-1)$, obtendo, naquele segundo produto, o seguinte: $r_2\cdot(3s+1) = (3s-1)(3s+1) = 9s^2-1$.
No primeiro produto $(r_1\cdot(9s^2+16))$, já temos um fator multiplicado pelo termo quadrático, igual ao outro. Não tendo a necessidade de multiplicarmos por nada. Assim, ficamos com $r_1 = 1$.
No final, ficamos com a expressão

$$\frac{1}{3s+1} - \frac{(3s-1)}{9s^2+16}$$

Ficamos, porém, com uma constante no numerador igual a $(9s^2+16-(9s^2-1)=16+1=17)$ diferente da expressão original (12). Sendo assim, podemos multiplicar a expressão toda por $\frac{12}{17}$ para termos a expressão inicial na forma de somas parciais.
Então

$$Y(s) = \left(\frac{1}{3s+1} - \frac{3s-1}{9s^2+16}\right) \cdot \frac{12}{17}$$

Assim

$$Y(s) \cdot \frac{17}{12} = \frac{1}{3s+1} - \frac{3s-1}{9s^2+16}$$

Fazendo mais alterações, teremos

$$Y(s) \cdot \frac{17}{12} = \frac{1}{3s+1} - \frac{3s}{9s^2+16} + \frac{1}{9s^2+16}$$
$$Y(s) \cdot \frac{17}{12} = \frac{1/3}{s+1/3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{s}{s^2+16/9} + \frac{1}{12} \cdot \frac{4/3}{s^2+16/9}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/3}\right\} = e^{-\frac{t}{3}}1(t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1/144}\right\} = \cos\left(\frac{t}{12}\right)1(t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/12}{s^2+1/144}\right\} = \text{sen}\left(\frac{t}{12}\right)1(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s) \cdot \frac{17}{12}\right\} = \frac{e^{-\frac{t}{3}}1(t)}{3} - \frac{\cos\left(\frac{4t}{3}\right)1(t)}{3} + \frac{1}{12} \cdot sen\left(\frac{4t}{3}\right)1(t)$$
$$y(t) \cdot 17 = 4e^{-\frac{t}{3}}1(t) - 4\cos\left(\frac{4t}{3}\right)1(t) + sen\left(\frac{t}{12}\right)1(t)$$

Finalmente

$$y(t) = 1(t) \cdot \frac{4e^{-\frac{t}{3}} - 4\cos\left(\frac{4t}{3}\right) + sen\left(\frac{4t}{3}\right)}{17}$$

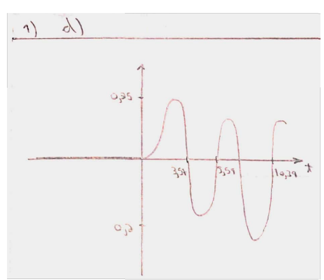

Figura 4: Esboço do gráfico

(e) encontrar a entrada $u(t)$ para que $y(t) = \alpha\, \forall t \geq 0$;
Trabalhando com a seguinte EDO, teremos:

$$3\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \quad , \quad y(0^-) = -2$$

Porém, temos que $y(t) = -2 \forall t \geq 0$. Assim, podemos definir a função $y(t) = -2$, pois respeitará o fato de $y(0^-) = -2$. Dessa forma, $\dot{y}(t) = 0$. Na equação, teremos:

$$3 \cdot 0 + (-2) = u(t)$$

Finalmente

$$u(t) = -2$$

(f) encontrar a entrada $u(t)$ para que $y(t) = 0\,\forall t > 0$.
Aqui, devemos tomar o cuidado para manter a condição de que $y(0^-) = -2$. Para isso, podemos definir que

$$y(t) = -2 \cdot 1(-t)$$

Tendo, por consequência que

$$\dot{y}(t) = -2\delta(-t) = -2\delta(t)$$

Acima, utilizamos a inversão na escala de tempo para chegar que $\dot{y}(t) = -2\delta(t)$.
Agora, podemos resolver a equação, que é dada por

$$3\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \quad , \quad y(0^-) = -2$$

$$3(-2\delta(t)) + (-2 \cdot 1(t)) = u(t)$$

Finalmente

$$u(t) = -6\delta(t) - 2 \cdot 1(t)$$

2.) Um SLIT relaxado é descrito por $\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_1\dot{u}(t) + u(t)$. **G2:** $a_1 = 30, a_0 = 3$
(a) Para $b_1 = 0$ calcular a resposta ao degrau unitário e esboçar o seu gráfico;

$$\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t) \quad , \quad y(0^-) = 0$$

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{1(t)\right\}$$

$$s^2Y(s) + 30sY(s) + 3Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s \cdot (s^2 + 30s + 3)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s + 15 - \sqrt{222}) \cdot (s + 15 + \sqrt{222})} =$$

$$= \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s + 15 - \sqrt{222}} - \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s + 15 + \sqrt{222}} \right)$$

$$y(t) = \int \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{\sqrt{222}}{444} \cdot \left[\frac{1}{s + 15 - \sqrt{222}} - \frac{1}{s + 15 + \sqrt{222}} \right] \right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{222}}{444} \cdot \int (e^{(-15+\sqrt{222})t} - e^{(-15-\sqrt{222})t})dt = \frac{\sqrt{222}}{444} \cdot \left\{ \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{-15 + \sqrt{222}} - \frac{e^{(-15-\sqrt{222})t}}{-15 - \sqrt{222}} \right\}$$

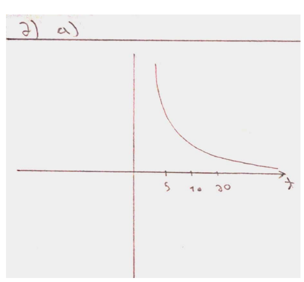

Figura 5: Esboço do gráfico

(b) para $b_1 = 0$ calcular a resposta à rampa unitária e esboçar o seu gráfico;

$$\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t) \quad , \quad y(0^-) = 0$$

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{t1(t)\right\}$$

$$s^2Y(s) + 30sY(s) + 3Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 \cdot (s^2 + 30s + 3)} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{(s + 15 - \sqrt{222}) \cdot (s + 15 + \sqrt{222})} =$$

$$= \frac{1}{s^2} \cdot \left(\frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s + 15 - \sqrt{222}} - \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s + 15 + \sqrt{222}} \right)$$

$$y(t) = \int \int \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{222}}{444} \cdot \left[\frac{1}{s + 15 - \sqrt{222}} - \frac{1}{s + 15 + \sqrt{222}} \right] \right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{222}}{444} \cdot \int \left\{ \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{-15 + \sqrt{222}} - \frac{e^{(-15-\sqrt{222})t}}{-15 - \sqrt{222}} \right\} dt = \frac{\sqrt{222}}{444} \cdot \left\{ \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{(-15 + \sqrt{222})^2} - \frac{e^{(-15-\sqrt{222})}}{(-15 - \sqrt{222})^2} \right\}$$

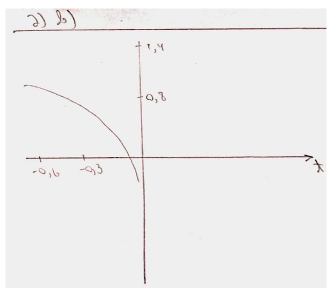

Figura 6: Esboço do gráfico

(c) para $b_1 = 1$ calcular a resposta ao degrau unitário e esboçar o seu gráfico;

$$\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t) = \dot{u}(t) + u(t) \quad , \quad y(0^-) = 0$$

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{1(t) + t1(t)\right\}$$

$$s^2Y(s) + 30sY(s) + 3Y(s) = 1 + \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 30s + 3} + \frac{1}{s \cdot (s^2 + 30s + 3)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s + 15 - \sqrt{222}) \cdot (s + 15 + \sqrt{222})} + \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s + 15 - \sqrt{222}) \cdot (s + 15 + \sqrt{222})}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s + 15 - \sqrt{222}} - \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s + 15 + \sqrt{222}} + \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s + 15 - \sqrt{222}} - \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s + 15 + \sqrt{222}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{222}}{444} \cdot \left\{ e^{(-15+\sqrt{222})t} - e^{(-15-\sqrt{222})t} + \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{-15 + \sqrt{222}} - \frac{e^{(-15-\sqrt{222})t}}{-15 - \sqrt{222}} \right\}$$

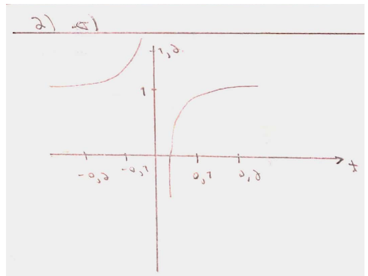

Figura 7: Esboço do gráfico

(d) para $b_1 = -1$ calcular a resposta ao degrau unitário e esboçar o seu gráfico;

$$\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t) = -\dot{u}(t) + u(t) \quad , \quad y(0^-) = 0$$

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{-1(t) + t1(t)\right\}$$

$$s^2Y(s) + 30sY(s) + 3Y(s) = -1 + \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = -\frac{1}{s^2 + 30s + 3} + \frac{1}{s \cdot (s^2 + 30s + 3)}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= -\frac{1}{(s + 15 - \sqrt{222}) \cdot (s + 15 + \sqrt{222})} + \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s + 15 - \sqrt{222}) \cdot (s + 15 + \sqrt{222})} \\ &= -\frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s + 15 - \sqrt{222}} + \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s + 15 + \sqrt{222}} + \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s + 15 - \sqrt{222}} - \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s + 15 + \sqrt{222}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{222}}{444} \cdot \left\{-e^{(-15+\sqrt{222})t} + e^{(-15-\sqrt{222})t} + \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{-15 + \sqrt{222}} - \frac{e^{(-15-\sqrt{222})t}}{-15 - \sqrt{222}}\right\} \end{aligned}$$

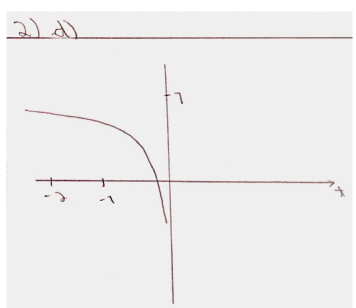

Figura 8: Esboço do gráfico

(e) traçar com precisão um único gráfico com as 3 respostas ao degrau;

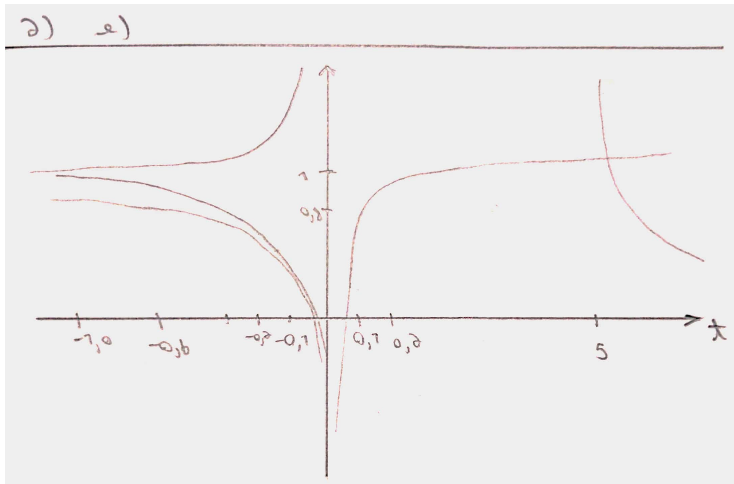

Figura 9: Esboço do gráfico

(f) calcular a resposta a seno $u(t) = \text{sen}(\omega t)$ para $b_1 = 0, \omega = 4a_0$ e esboçar o seu gráfico.

3.) Um SLIT relaxado é descrito por uma função de transferência com numerador e denominador dados por $n(s) = K$ e $d(s) = (s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)$. **G2:** $p_1 = 1, p_2 = 3, p_3 = 4$
(a) Esboçar a resposta ao degrau unitário (escolha o valor de K);

A partir da equação dada no enunciado, temos:

$$Y(s) = \frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} \cdot U(s) + G_i(s)$$

Como o SLIT é relaxado, o termo $G_i(s)$ é nulo. Já o termo $U(s)$ será $\frac{1}{s}$, pois representa a resposta ao degrau unitário. Além disso, vamos escolher $K = (s-1)(s-2)(s+2)$ para facilitar o cálculo dos resíduos.
Substituindo os valores na equação abaixo:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{(s-1)(s-2)(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

Devemos separar a equação acima em uma soma de frações parciais:

$$Y(s) = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s+1} + \frac{r_3}{s+3} + \frac{r_4}{s+4}$$

O cálculo dos resíduos é simples, portanto será omitido. Os leitores interessados facilmente verificarão a validade dos resultados ao lado. $r_1 = \frac{1}{3}$; $r_2 = -1$; $r_3 = -\frac{10}{3}$; $r_4 = 5$;

Substituindo novamente:

$$Y(s) = \frac{1}{3s} - \frac{1}{s+1} - \frac{10}{3(s+3)} + \frac{5}{s+4}$$

Para encontrar a expressão final no domínio do tempo, deve-se aplicar a transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3s} - \frac{1}{s+1} - \frac{10}{3(s+3)} + \frac{5}{s+4}\right\}$$

Ao aplicar simples propriedades de derivação, chegamos ao resultado final:

$$y(t) = 1(t) \cdot \left[\frac{1}{3} - e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-3t} + 5e^{-4t}\right]$$

(b) esboçar a resposta ao degrau unitário quando os p_i são divididos por 5;
Mantendo o mesmo valor de K, será necessário recalcular os resíduos para esse caso.

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{(s-1)(s-2)(s+2)}{(s+\frac{1}{5})(s+\frac{3}{5})(s+\frac{4}{5})}$$

$$Y(s) = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s+\frac{1}{5}} + \frac{r_3}{s+\frac{3}{5}} + \frac{r_4}{s+\frac{4}{5}}$$

Resíduos encontrados: $r_1 = \frac{125}{3}$; $r_2 = -99$; $r_3 = -\frac{364}{3}$; $r_4 = -63$;

$$Y(s) = \frac{125}{3s} - \frac{99}{s+\frac{1}{5}} - \frac{364}{3(s+\frac{3}{5})} - \frac{63}{s+\frac{4}{5}}$$

Resolvendo pela transformada inversa de Laplace:

$$y(t) = 1(t) \cdot \left[\frac{125}{3} - 99e^{-t/5} + \frac{364}{3}e^{-3t/5} - 63e^{-4t/5}\right]$$

(c) esboçar a resposta ao degrau unitário quando os p_i são multiplicados por 5;

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{(s-1)(s-2)(s+2)}{(s+5)(s+15)(s+20)}$$

$$Y(s) = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s+5} + \frac{r_3}{s+15} + \frac{r_4}{s+20}$$

Os resíduos são: $r_1 = \frac{1}{375}$; $r_2 = \frac{21}{125}$; $r_3 = -\frac{1768}{375}$; $r_4 = \frac{693}{125}$;

$$Y(s) = \frac{1}{375s} + \frac{21}{125(s+5)} - \frac{1768}{375(s+15)} + \frac{693}{125(s+20)}$$

Finalmente:

$$y(t) = 1(t) \cdot \left[\frac{1}{375} + \frac{21}{125}e^{-5t} - \frac{1768}{375}e^{-15t} + \frac{693}{125}e^{-20t}\right]$$

(d) comentar os resultados acima;

É interessante observar que os resíduos aparecem como os coeficientes das exponenciais em cada equação, e as exponenciais estão associadas aos termos p_i do enunciado.

Vamos analisar a equação final da letra a) por exemplo:

$$y(t) = 1(t) \cdot \left[\frac{1}{3} - e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-3t} + 5^{-4t}\right]$$

Observe que o termo $\frac{1}{3}$ parece não ter uma exponencial associada, mas na verdade, podemos reescrever como:

$$y(t) = 1(t) \cdot \left[\frac{1}{3}e^{0t} - e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-3t} + 5^{-4t}\right]$$

Através da análise acima, concluimos que o termo isolado $\frac{1}{s}$ é na verdade: $\frac{1}{(s+0)}$. Assim, torna-se explícito um possível termo p_i, tal que $p_0 = 0$

Isso prova que os termos p_i e os resíduos encontrados em cada caso podem ser escritos da seguinte forma:

$$y(t) = 1(t) \cdot \left[r_1 e^{-p_0 t} + r_2 e^{-p_1 t} + r_3 e^{-p_2 t} + r_4 e^{-p_3 t}\right]$$

(e) esboçar a resposta ao degrau unitário quando dois p_i são multiplicados por 5 e o outro é dividido por 5;
Vamos então definir a equação da seguinte forma:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{(s-1)(s-2)(s+2)}{(s+5)(s+15)(s+\frac{4}{5})}$$

Separando em frações parciais:

$$Y(s) = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s+5} + \frac{r_3}{s+15} + \frac{r_4}{s+\frac{4}{5}}$$

Resíduos: $r_1 = \frac{1}{15}$; $r_2 = -\frac{3}{5}$; $r_3 = \frac{1768}{1065}$; $r_4 = -\frac{91}{71}$;

$$Y(s) = \frac{1}{15s} - \frac{3}{5(s+5)} + \frac{1768}{1065(s+15)} - \frac{91}{71(s+\frac{4}{5})}$$

Por fim:

$$y(t) = 1(t) \cdot \left[\frac{1}{15} - \frac{3}{5}e^{-5t} + \frac{1768}{1065}e^{-15t} - \frac{9}{71}e^{-4t/5}\right]$$

(f) comentar os resultados acima.

O mesmo padrão, visto nas questões anteriores, se repete aqui. Para cada resíduo calculado e cada termo p_i, podemos expressar o resultado final no mesmo formato visto na questão d)

$$y(t) = 1(t) \cdot \left[r_1 e^{-p_0 t} + r_2 e^{-p_1 t} + r_3 e^{-p_2 t} + r_4 e^{-p_3 t}\right]$$