

Sinais e Sistemas - Trabalho 5 - Avaliação 9

Grupo 2

Leonardo Soares da Costa Tanaka

Matheus Henrique Sant Anna Cardoso

Theo Rudra Macedo e Silva

1.) Um SLIT relaxado é descrito pela equação a diferenças $y_{k+2} + \alpha y_k = \beta u_{k+1} + \gamma u_k$.

Os dados (α, β, γ) são: **G2:** $(-1/4, 1, 2)$;

Utilizando as constantes do grupo, a equação torna-se: $y_{k+2} - \frac{1}{4}y_k = u_{k+1} + 2u_k$

(a) Encontrar a função de transferência $G(z)$;

$$y_{k+2} - \frac{1}{4}y_k = u_{k+1} + 2u_k$$

$$z^2Y(z) - z^2Y(0) - zY(1) - \frac{1}{4}Y(z) = zU(z) - zu(0) + 2U(z)$$

$$Y(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}}U(z) + \frac{z^2y(0) + zy(1) - zu(0)}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

$$G(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

(b) encontrar polos e zeros e verificar a estabilidade;

$$Polos \Rightarrow x^2 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2}; p_2 = -\frac{1}{2}$$

$$Zeros \Rightarrow x + 2 \Rightarrow z_1 = -2$$

O SLIT é estável nesse caso, porque seus pólos p_1 e p_2 estão no círculo unitário.

(c) encontrar as equações dinâmicas;

$$\begin{aligned} x_1[k] = y[k] & \Rightarrow x_1[k+1] = y[k+1] = x_2[k] - p_1 u[k] \\ x_2[k] = y[k+1] + p_1 u[k] & \Rightarrow x_2[k+1] = y[k+2] + p_1 u[k] = \frac{1}{4}x_1[k] + (p_1 + 1)u[k+1] + 2u[k] \end{aligned}$$

$$p_1 = -1$$

$$\begin{array}{lll} x_1[k] = y[k] & \Rightarrow & x_1[k+1] = x_2[k] + u[k] \\ x_2[k] = y[k+1] - u[k] & \Rightarrow & x_2[k+1] = \frac{1}{4}x_1[k] + 2u[k] \end{array}$$

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u[k]; \quad y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[k]$$

(d) calcular, iterativamente, os 10 primeiros valores y_k para entrada em degrau unitário;

Podemos usar o seguinte formato para $y(k)$:

$$y(k) = CA^k x(0) + C \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j)$$

Assumindo que $x(0) = 0$, pois o SLIT é relaxado:

$$y(k) = C \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j)$$

Por fim, os valores são:

$$y(0) = 0.000000$$

$$y(1) = 1.000000$$

$$y(2) = 3.000000$$

$$y(3) = 3.250000$$

$$y(4) = 3.750000$$

$$y(5) = 3.812500$$

$$y(6) = 3.937500$$

$$y(7) = 3.953125$$

$$y(8) = 3.984375$$

$$y(9) = 3.988281$$

$$y(10) = 3.996094$$

(e) usando transformada em Z , encontrar uma expressão analítica para a y_k ;

Utilizaremos uma das expressões obtidas no item a)

$$Y(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}} U(z) + \frac{z^2 y(0^-) + zy(1) - zu(0^-)}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

Como a entrada é um degrau unitário, e temos os valores obtidos para $y(0)$, $y(1)$ e $u(0)$, obtém-se:

$$Y(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}} \cdot \frac{z}{z-1}$$

Manipulando a equação:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{z+2}{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{2})} \cdot \frac{z}{z(z-1)} \\ Y(z) &= \frac{z}{z+\frac{1}{2}} - 5 \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + 4 \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

Calculando a inversa:

$$y(k) = \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 5 \left(\frac{1}{2}\right)^k + 4 \right] \cdot 1(k)$$

Por fim, plotando os resultados:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0.000000 \\ y(1) &= 1.000000 \\ y(2) &= 3.000000 \\ y(3) &= 3.250000 \\ y(4) &= 3.750000 \\ y(5) &= 3.812500 \\ y(6) &= 3.937500 \\ y(7) &= 3.953125 \\ y(8) &= 3.984375 \\ y(9) &= 3.988281 \\ y(10) &= 3.996094 \end{aligned}$$

(f) comparar os resultados iterativo e analítico.

G2: 2.) Eis um “Problema de Algibeira”: um vendedor de queijos efetua apenas transações do tipo *vende metade de seu estoque mais meia peça*. Pede-se o número inicial de peças, x_0 se após a 6ª venda seus queijos acabam. Interpretar a filosofia de vendas por meio de uma equação a diferenças e calcular x_k , o saldo de estoque após a k -ésima venda. Dar a resposta ao problema de algibeira.

Antes de mais nada, podemos pensar um pouco antes de tomarmos quaisquer decisões. É claro ser impossível realizar a venda de meia peça, portanto, é provável que seja uma correção, justamente para que não se venda meia peça. Veja o processo:

Processo: (Venda)

Após a venda k : c peças.

Logo antes: $c + 1/2$ peças.

Antes da venda k : $2 \cdot (c + 1/2) = \boxed{2c + 1}$ peças. Ou, após a venda $k - 1$.

Disso, podemos ir dando passos para trás até chegarmos ao momento anterior à primeira venda. Considerando, cada processo, uma venda e que antes de cada venda, teremos $2c + 1$ peças, sendo c o número de peças após essa venda:

Após a venda 6: 0

Após a venda 5: $2 \cdot 0 + 1 = 1$

Após a venda 4: $2 \cdot 1 + 1 = 3$

Após a venda 3: $2 \cdot 3 + 1 = 7$

Após a venda 2: $2 \cdot 7 + 1 = 15$

Após a venda 1: $2 \cdot 15 + 1 = 31$

Finalmente, antes da primeira venda, teremos: $2 \cdot 31 + 1 = 63$

Portanto, com passos simples, podemos resolver este problema.

Ainda assim, é possível resolvê-lo por métodos analíticos, com uma equação a diferenças, modelando da seguinte maneira: a quantidade de peças após a venda k (x_k) é a metade da anterior subtraída de $1/2$, da forma abaixo:

$$x_k = \frac{1}{2}x_{k-1} - \frac{1}{2}$$

Podemos realizar a transformada Z desta equação, obtendo:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\{x_k\} &= \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{x_{k-1}\} - \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{1[k]\} \\
 X(z) &= \frac{1}{2}(z^{-1}X(z) + x[-1]) - \frac{z}{2z-2} \\
 X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1]}{2} - \frac{z}{2z-2} \\
 X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1](z-1)}{2z-2} - \frac{z}{2z-2} \\
 X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1]z - x[-1] - z}{2z-2} \\
 \frac{X(z)}{z} &= \frac{x[-1]z - x[-1] - z}{(z-1)(2z-1)} \\
 \frac{X(z)}{z} &= \frac{x[-1]+1}{2z-1} - \frac{1}{z-1} \\
 X(z) &= \frac{x[-1]+1}{2} \left(\frac{z}{z-1/2} \right) - \frac{1}{z-1}
 \end{aligned}$$

A partir daqui, podemos fazer a transformada inversa:

$$x[k] = \frac{x[-1]+1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^k - 1[k]$$

Podemos descobrir $x[-1]$ dado que sabemos $x[6]$:

$$\begin{aligned}
 x[6] = 0 &= \frac{x[-1]+1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^6 - 1[6] \\
 0 &= \frac{x[-1]+1}{128} - 1 \\
 128 &= x[-1] + 1
 \end{aligned}$$

$$\boxed{x[-1] = 127}$$

Temos tudo o que precisamos:

$$\begin{aligned}
 x[k] &= \frac{x[-1]+1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^k - 1[k] \\
 x[k] &= 64 \left(\frac{1}{2} \right)^k - 1[k]
 \end{aligned}$$

Aplicando para $k = 0$, teremos:

$$x[0] = 64 \cdot 1 - 1$$

$$\boxed{x[0] = 63}$$

Que foi o resultado obtido da primeira forma.

3.) Para a EDLIT $\tau \dot{y}(t) + y(t) = \beta u(t)$ **com** $y(0^-) = y_0$:

G2: $\tau = 2, \beta = 2$ e $y_0 = 1$.

Utilizando as constantes do grupo, a equação torna-se: $2\dot{y}(t) + y(t) = 2u(t)$ com $y(0^-) = 1$

(a) Calcular a resposta à rampa unitária por Laplace, e traçar com precisão o seu gráfico para $t \in [0, 5\tau]$;

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{2}y(t) = u(t); \quad y(0^-) = 1; \quad u(t) = t1(t)$$

$$sY(s) - y(0^-) + \frac{1}{2}Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(s + 1/2)Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2(s + 1/2)} = \frac{r_1}{s^2} + \frac{r_2}{s} + \frac{r_3}{s + 1/2}$$

$$r_1 = 2; \quad r_2 = -4; \quad r_3 = 5$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s} + \frac{5}{s + 1/2}$$

$$y(t) = 2t \, 1(t) - 4 \, 1(t) + 5e^{-\frac{1}{2}t}1(t)$$

%Questão 3.a)

% Intervalo

dt=0.001;

% Dados basicos

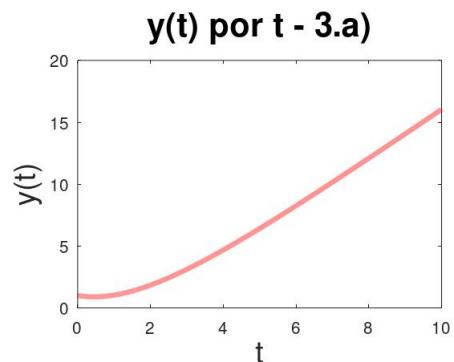
t=0:dt:10-dt; x=2*t-4+5*exp(-1/2*t);

plot (t, x, "r", "linewidth", 3);

title("y(t) por t - 3.a)", "fontsize", 20);

xlabel("t", "fontsize", 18);

ylabel("y(t)", "fontsize", 18);



(b) por Euler I, encontrar a equação que relaciona $y_k \leftrightarrow y(kT)$ e $u_k \leftrightarrow u(kT)$;

Buscando chegar em uma relação tal que $y(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau$, fazemos:

$$\begin{aligned} 2\dot{y}(t) &= 2u(t) - y(t) \\ \dot{y}(t) &= \frac{2u(t) - y(t)}{2} \\ y(t) &= \int_0^t \frac{2u(t) - y(t)}{2} dt \end{aligned}$$

Tendo $a(t)$, fazemos:

$$\begin{aligned} y(kT) &= y(kT - T) + Ta(kT - T) \\ y[k] &= y[k - 1] + Ta[k - 1] \\ y[k] &= y[k - 1] + T \frac{2u(t) - y(t)}{2} \\ y[k] &= y[k - 1] \left(1 - \frac{T}{2}\right) + Tu[k - 1] \end{aligned}$$

(c) resolvê-la por transformada Z para entrada em rampa;

Aqui, $u[k] = kT \cdot 1[k]$. Logo, $U(z) = T \frac{z}{(z-1)^2}$. Deslocando a sequência, temos: $y[k + 1] = y[k] \left(1 - \frac{T}{2}\right) + Tu[k]$. Aplicando a transformada Z , teremos:

$$\begin{aligned} zY(z) - z &= Y(z) + TU(z) \\ \frac{Y(z)}{z} &= \frac{z^2 - 2z + 1 - T^2}{(z - 1 + T/2)(z - 1)^2} \end{aligned}$$

Separando em frações parciais:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{A}{z - 1 + T/2} + \frac{B}{z - 1} + \frac{C}{(z - 1)^2} \\ Y(z) &= A \frac{z}{z - 1 + T/2} + B \frac{z}{z - 1} + C \frac{z}{(z - 1)^2} \\ y[k] &= A \cdot \left(1 - \frac{T}{2}\right)^k + B \cdot 1[k] + C \cdot k \cdot 1[k] \end{aligned}$$

Agora, basta descobrir A, B e C . Somando as frações:

$$A(z^2 - 2z + 1) + B(z - 1 + T/2)(z - 1) + C(z - 1 + T/2) = z^2 - 2z + 1 - T^2$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A + 2B - \frac{TB}{2} - C = 2 \\ A + B - \frac{TB}{2} + \frac{TC}{2} - C = 1 + T^2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 5 \\ B = -4 \\ C = 2T \end{cases}$$

Então

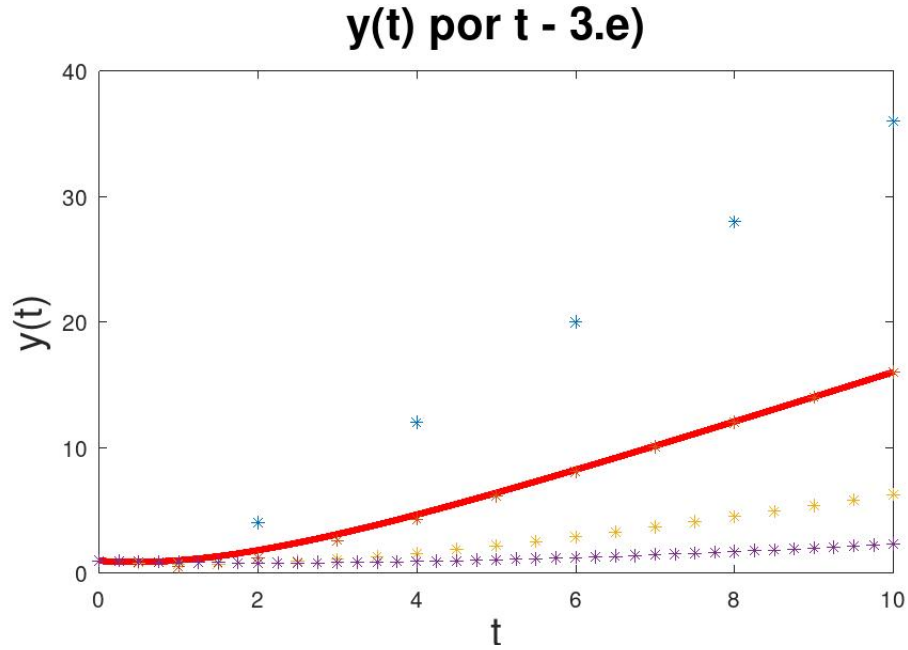
$$y[k] = 5 \cdot \left(1 - \frac{T}{2}\right)^k \cdot 1[k] - 4 \cdot 1[k] + 2T \cdot k \cdot 1[k]$$

(d) listar as seqüências obtidas para $T = \tau, T = \tau/2, T = \tau/4$ e $T = \tau/8$;

Sendo $\tau = 2$, substituímos:

$$\begin{cases} T = 2 & y[k] = 5 \cdot \delta(k) - 4 \cdot 1[k] + 4 \cdot k \cdot 1[k] \\ T = 1 & y[k] = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 1[k] - 4 \cdot 1[k] + 2 \cdot k \cdot 1[k] \\ T = \frac{1}{2} & y[k] = 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot 1[k] - 4 \cdot 1[k] + k \cdot 1[k] \\ T = \frac{1}{4} & y[k] = 5 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^k \cdot 1[k] - 4 \cdot 1[k] + \frac{1}{2} \cdot k \cdot 1[k] \end{cases}$$

(e) plotar os valores de $y(kT)$ no mesmo gráfico do item (a) e comparar as aproximações numéricas;



$y(t)$ em vermelho – $T = 2$ em azul – $T = 1$ em laranja – $T = 1/2$ em amarelo – $T = 1/4$ em roxo.

(f) repetir (b), (c), (d) e (e) para Newton.

4.) Para a EDLIT $\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2y(t) = \alpha\dot{u}(t) + \beta u(t)$ com CIs nulas:

Os dados $(\zeta, \omega_n, \beta, \alpha)$ são G2: $(1/3, 2, 3, -1)$.

Utilizando os dados do grupo, temos: $\ddot{y}(t) + \frac{4}{3}\dot{y}(t) + 4y(t) = -\dot{u}(t) + 3u(t)$

(a) para $u(t) = 1$, encontre, por Laplace, a solução e plote-a com precisão para $t \in [0, 8/(\zeta\omega_n)]$;

Utilizando Laplace na EDLIT:

$$s^2 Y(s) + 2\zeta\omega_n s Y(s) + \omega_n^2 Y(s) = \alpha s U(s) + \beta U(s); \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} U(s) = \frac{\alpha s + \beta}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s}$$

Descobrimos os valores do denominador das frações polinomiais:

$$Y(s) = \frac{r_1 s + r_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{r_3}{s} = \frac{r_1 s + r_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2 - \zeta^2\omega_n^2} + \frac{r_3}{s}$$

$$Y(s) = \frac{r_1 s + r_2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)} + \frac{r_3}{s} = \frac{r_1 s + r_2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})^2} + \frac{r_3}{s}$$

Substituindo $\omega = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ para achar a transformada de seno e cosseno nas expressões da transformada:

$$Y(s) = \frac{r_1(s + \zeta\omega_n)}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega^2} + \frac{\frac{r_2 - r_1\zeta\omega_n}{\omega}}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega^2} + \frac{r_3}{s}$$

$$y(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (r_1 \cos(\omega t) + \frac{r_2 - r_1\zeta\omega_n}{\omega} \sin(\omega t)) + r_3$$

Descobrimos os denominadores das frações anteriores:

$$r_1 = \frac{-\beta}{\omega_n^2}, r_2 = \alpha - \frac{2\zeta\beta}{\omega_n}, r_3 = \frac{\beta}{\omega_n^2}$$

$$\omega = \frac{4\sqrt{2}}{3}, r_1 = \frac{-3}{4}, r_2 = -2, r_3 = \frac{3}{4}$$

Solução:

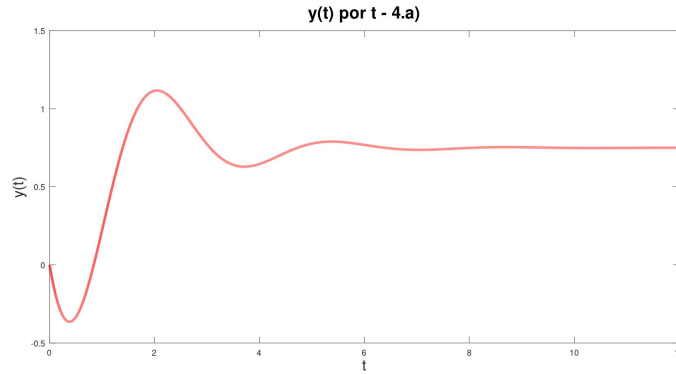
$$y(t) = e^{-\frac{2}{3}t} \left(-\frac{3}{4} \cos\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}t\right) - \frac{15\sqrt{2}}{16} \sin\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}t\right) \right) + \frac{3}{4}$$

%Questão 4.a)

% Intervalo

dt=0.001;

```
% Dados basicos
t=0:dt:12-dt; y=e.^(-2/3*t).*(-3/4*cos(4*sqrt(2)/3*t)-15*sqrt(2)/16*sin(4*sqrt(2)/3*t))+3/4;
plot (t, y, "r", "linewidth", 3);
title("y(t) por t - 4.a)", "fontsize", 20);
xlabel("t", "fontsize", 18);
ylabel("y(t)", "fontsize", 18);
```



(b) por meio de variáveis x_1 e x_2 apropriadas, expressá-la como $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$ e $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)$;

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t), x_2(t) = \dot{y}(t) + pu(t) \\ \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) - pu(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) + p\dot{u}(t) = -\omega_n^2 y(t) - 2\zeta\omega_n \dot{y}(t) + \alpha \dot{u}(t) + \beta u(t) + p\dot{u}(t) = \\ &= -\omega_n^2 x_1(t) - 2\zeta\omega_n x_2(t) + (\alpha + p)\dot{u}(t) + (\beta + 2\zeta\omega_n p)u(t)\end{aligned}$$

Já que $\dot{u}(t)$ tem que sumir, então $p = -\alpha = 1$.

Utilizando as expressões anteriores chegamos na seguinte expressão:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -p \\ \beta + 2\zeta\omega_n p \end{bmatrix} u(t), \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Substituindo com os valores das constantes:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4/3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 13/3 \end{bmatrix} u(t), y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

(c) por Euler I, relacione $\mathbf{x}_k \leftrightarrow \mathbf{x}(kT)$, $y_k \leftrightarrow y(kT)$ e $u_k \leftrightarrow u(kT)$ (o procedimento para vetores é o mesmo e leva a $\mathbf{x}_k = A_d \mathbf{x}_{k-1} + B_d \mathbf{u}_k$ e $y_k = C_d \mathbf{x}_k + D_d \mathbf{u}_k$) e obtenha y_k ;

Utilizando Euler I para obter x_k :

$$\begin{aligned} \dot{x}(kT) &= A_d x(kT) + B_d u(kT) = w(kT) \\ \int_0^{kT} \dot{x}(t) dt &= \int_0^{kT} w(t) dt \\ x(kT) - x(kT - T) &= T w(kT - T) \\ x(kT) &= x(kT - T) + T(A_d x(kT - T) + B_d u(kT - T)) \\ x_k &= (I + T A_d) x_{k-1} + B_d T u_{k-1} \end{aligned}$$

Obtendo y_k :

$$\begin{aligned} y(KT) &= C_d x(KT) \\ y_k &= C_d x_k \end{aligned}$$

(d) plota as sequências obtidas para $T = T_0 = 1/(\zeta\omega_n)$, $T = T_0/2$, $T = T_0/4$ e $T = T_0/8$ no gráfico de (a) e compare as aproximações numéricas.

5.) Seja EDVT $\dot{y}(t) + \alpha(t)y(t) = u(t)$ com $u(t) = 1(t)$. Quando um sinal contínuo p tende a uma constante para valores altos de t ($\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p_r = \text{cte.}$ para $t \rightarrow \infty$) esta é chamada de valor de regime do sinal.

(a) sem resolver a equação calcular o valor de regime y_r , supondo que $y(t)$ tende a ele;

$$\text{Seja } a(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

Precisamos conhecer os limites de $\dot{y}(t)$ e $a(t)$. Se existe um valor de regime para a equação acima, então a taxa de variação da função tende a zero quando t tende a infinito. Portanto $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}(t) = 0$

$$\text{Basta fazer } \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2}} \right)$$

$$\text{Logo: } \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 1$$

$$y_r = 1$$

(b) por Euler I, relacione as sequências $u_k \leftrightarrow u(kT)$ e $y_k \leftrightarrow y(kT)$;

$$\dot{y}(t) = u(t) - a(t)y(t)$$

(c) resolva, manualmente ou por meio de um script em alguma linguagem, para $T = 1, T = 1/2, T = 1/4$ e $T = 1/10$; a solução $y(t)$ deve ser aproximada para $t \in [0, 10]$;

(d) repetir (b) e (c) para Euler II.

Os dados $a(t)$ e $y(0^-)$ são: **G2:** $(t^2 - 1)/(t^2 + 1)$ e -1 .