

# Sinais e Sistemas - Trabalho 3 - Avaliação 5

## **Grupo 2**

Leonardo Soares da Costa Tanaka  
Matheus Henrique Sant Anna Cardoso  
Theo Rudra Macedo e Silva

**1.)** Um SLIT é modelado por  $\tau \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$  com  $y(0^-) = \alpha$ . **G2:**  $\tau = 3, \alpha = -2$

**(a)** Calcular a resposta ao degrau unitário e esboçar o seu gráfico;

Para calcular a resposta, trataremos já com os dados, sendo a EDO:

$$3\dot{y}(t) + y(t) = 1(t) \quad , \quad y(0^-) = -2$$

Pela propriedade da derivação, sabemos que

$$\dot{y}(t) = sY(s) - y(0^-)$$

Então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{3\dot{y}(t) + y(t)\} &= \mathcal{L}\{u(t)\} \\ 3(sY(s) - y(0^-)) + Y(s) &= U(s) \\ Y(s)(3s + 1) + 6 &= U(s)\end{aligned}$$

Como  $u(t) = 1(t)$ , sabemos que  $U(s) = \frac{1}{s}$ , assim

$$\begin{aligned}Y(s)(3s + 1) + 6 &= \frac{1}{s} \\ Y(s) &= \frac{1}{3s + 1} \cdot \frac{1}{s} - \frac{6}{3s + 1}\end{aligned}$$

Separando em frações parciais, temos:

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{3}{3s + 1} - \frac{6}{3s + 1} \\ Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{9}{3s + 1} \\ Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{3}{s + 1/3}\end{aligned}$$

Agora, podemos descobrir  $y(t)$ .

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1(t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s + 1/3}\right\} = 3e^{-\frac{1}{3}t}1(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 1(t) - 3e^{-\frac{1}{3}t}1(t)$$

Finalmente

$$y(t) = 1(t) - 3e^{-\frac{1}{3}t}1(t)$$

**(b)** calcular a resposta à rampa unitária e esboçar o seu gráfico;

Para calcular a resposta à rampa, tomemos a seguinte EDO:

$$3\dot{y}(t) + y(t) = t1(t) \quad , \quad y(0^-) = -2$$

Da mesma forma como no item **(a)**, podemos utilizar a propriedade da derivação e fazer em ambos os lados, a transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = (sY(s) - y(0^-)) \qquad \mathcal{L}\{t1(t)\} = U(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\begin{aligned}3(Y(s) - y(0^-)) + Y(s) &= U(s) \\ Y(s)(3s + 1) + 6 &= \frac{1}{s^2} \\ Y(s) &= \frac{1}{3s + 1} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{6}{3s + 1}\end{aligned}$$

Separando em frações parciais, teremos

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{9}{3s + 1} - \frac{3s - 1}{s^2} - \frac{6}{3s + 1} \\ Y(s) &= \frac{3}{3s + 1} - \frac{3s - 1}{s^2} \\ Y(s) &= \frac{1}{s + 1/3} - \frac{3}{s} + \frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

Agora, podemos calcular a inversa da transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1/3}\right\} = e^{-\frac{t}{3}}1(t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s}\right\} = 3 \cdot 1(t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t1(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = e^{-\frac{t}{3}}1(t) - 3 \cdot 1(t) + t1(t)$$

Finalmente

$$y(t) = e^{-\frac{t}{3}}1(t) - 3 \cdot 1(t) + t1(t)$$

(c) calcular a resposta ao seno  $u(t) = \text{sen}(\omega t)$  para  $\alpha = 0$ ,  $\omega = 1/(4\tau)$  e esboçar o seu gráfico;  
Agora, temos para resolver a seguinte EDO:

$$3\dot{y}(t) + y(t) = \text{sen}\left(\frac{t}{12}\right)1(t) \quad , \quad y(0^-) = 0$$

Utilizaremos Laplace, para resolver, a saber

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s) \qquad \mathcal{L}\left\{\text{sen}\left(\frac{t}{12}\right)1(t)\right\} = \frac{1/12}{s^2 + 1/144} = \frac{12}{144s^2 + 1}$$

Utilizando, novamente, as técnicas empregadas nos itens anteriores, teremos

$$\begin{aligned}3(sY(s)) + Y(s) &= \frac{12}{144s^2 + 1} \\ Y(s)(3s + 1) &= \frac{12}{144s^2 + 1} \\ Y(s) &= \frac{1}{3s + 1} \cdot \frac{12}{144s^2 + 1} \\ Y(s) &= \frac{r_1}{3s + 1} + \frac{r_2}{144s^2 + 1}\end{aligned}$$

Vamos, por tentativa e erro, calcular as constantes  $r_1$  e  $r_2$ .

Perceba que, fazendo  $r_1 \cdot (144s^2 + 1)$  teremos um termo com  $s^2$  mais uma constante. O mesmo deve ser para  $r_2 \cdot (3s + 1)$ . Para isso, podemos fazer com que o segundo seja o produto da soma pela diferença, obtendo um termo ao quadrado e uma constante.

Fazemos, então  $r_2 = (3s - 1)$ , obtendo, naquele segundo produto, o seguinte:  $r_2 \cdot (3s + 1) = (3s - 1)(3s + 1) = 9s^2 - 1$ . No primeiro produto ( $r_1 \cdot (144s^2 + 1)$ ), já temos um fator grande suficiente para o termo quadrático, podemos corrigir com o segundo produto, multiplicando por 16.

No final, ficamos com a expressão

$$\frac{1}{3s + 1} - \frac{16(3s - 1)}{144s^2 + 1}$$

Ficamos, porém, com uma constante no numerador igual a  $(144s^2 + 1 - 16(9s^2 - 1)) = 1 + 16 = 17$  diferente da expressão original (12). Sendo assim, podemos multiplicar a expressão toda por  $\frac{12}{17}$  para termos a expressão inicial na forma de somas parciais.

Então

$$Y(s) = \left( \frac{1}{3s + 1} - \frac{16(3s - 1)}{144s^2 + 1} \right) \cdot \frac{12}{17}$$

Assim

$$Y(s) \cdot \frac{17}{12} = \frac{1}{3s + 1} - \frac{48s - 16}{144s^2 + 1}$$

Fazendo mais alterações, teremos

$$\begin{aligned} Y(s) \cdot \frac{17}{12} &= \frac{1}{3s + 1} - \frac{48s}{144s^2 + 1} + \frac{16}{144s^2 + 1} \\ Y(s) \cdot \frac{17}{12} &= \frac{1/3}{s + 1/3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{s}{s^2 + 1/144} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1/12}{s^2 + 1/144} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 1/3} \right\} = e^{-\frac{t}{3}} 1(t) \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 1/144} \right\} = \cos \left( \frac{t}{12} \right) 1(t) \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1/12}{s^2 + 1/144} \right\} = \text{sen} \left( \frac{t}{12} \right) 1(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ Y(s) \cdot \frac{17}{12} \right\} &= \frac{e^{-\frac{t}{3}} 1(t)}{3} - \frac{\cos \left( \frac{t}{12} \right) 1(t)}{3} + \frac{4}{3} \cdot \text{sen} \left( \frac{t}{12} \right) 1(t) \\ y(t) \cdot \frac{17}{4} &= e^{-\frac{t}{3}} 1(t) - \cos \left( \frac{t}{12} \right) 1(t) + 4 \text{sen} \left( \frac{t}{12} \right) 1(t) \end{aligned}$$

Finalmente

$$y(t) = 1(t) \cdot \frac{4e^{-\frac{t}{3}} - 4 \cos \left( \frac{t}{12} \right) + 16 \text{sen} \left( \frac{t}{12} \right)}{17}$$

(d) calcular a resposta ao seno  $u(t) = \text{sen}(\omega t)$  para  $\alpha = 0$ ,  $\omega = 4/\tau$  e esboçar o seu gráfico; Agora, temos para resolver a seguinte EDO:

$$3\dot{y}(t) + y(t) = \text{sen} \left( \frac{4t}{3} \right) 1(t) \quad , \quad y(0^-) = 0$$

Utilizaremos Laplace, para resolver, a saber

$$\mathcal{L} \{ \dot{y}(t) \} = sY(s) \quad \mathcal{L} \left\{ \text{sen} \left( \frac{4t}{3} 1(t) \right) \right\} = \frac{4/3}{s^2 + 16/9} = \frac{12}{9s^2 + 16}$$

Utilizando, novamente, as técnicas empregadas nos itens anteriores, teremos

$$\begin{aligned}
3(sY(s)) + Y(s) &= \frac{12}{9s^2 + 16} \\
Y(s)(3s + 1) &= \frac{12}{9s^2 + 16} \\
Y(s) &= \frac{1}{3s + 1} \cdot \frac{12}{9s^2 + 16} \\
Y(s) &= \frac{r_1}{3s + 1} + \frac{r_2}{9s^2 + 16}
\end{aligned}$$

Vamos, por tentativa e erro, calcular as constantes  $r_1$  e  $r_2$ .

Perceba que, fazendo  $r_1 \cdot (9s^2 + 16)$  teremos um termo com  $s^2$  mais uma constante. O mesmo deve ser para  $r_2 \cdot (3s + 1)$ . Para isso, podemos fazer com que o segundo seja o produto da soma pela diferença, obtendo um termo ao quadrado e uma constante.

Fazemos, então  $r_2 = (3s - 1)$ , obtendo, naquele segundo produto, o seguinte:  $r_2 \cdot (3s + 1) = (3s - 1)(3s + 1) = 9s^2 - 1$ . No primeiro produto ( $r_1 \cdot (9s^2 + 16)$ ), já temos um fator multiplicado pelo termo quadrático, igual ao outro. Não tendo a necessidade de multiplicarmos por nada. Assim, ficamos com  $r_1 = 1$ .

No final, ficamos com a expressão

$$\frac{1}{3s + 1} - \frac{(3s - 1)}{9s^2 + 16}$$

Ficamos, porém, com uma constante no numerador igual a  $(9s^2 + 16 - (9s^2 - 1) = 16 + 1 = 17)$  diferente da expressão original (12). Sendo assim, podemos multiplicar a expressão toda por  $\frac{12}{17}$  para termos a expressão inicial na forma de somas parciais.

Então

$$Y(s) = \left( \frac{1}{3s + 1} - \frac{3s - 1}{9s^2 + 16} \right) \cdot \frac{12}{17}$$

Assim

$$Y(s) \cdot \frac{17}{12} = \frac{1}{3s + 1} - \frac{3s - 1}{9s^2 + 16}$$

Fazendo mais alterações, teremos

$$\begin{aligned}
Y(s) \cdot \frac{17}{12} &= \frac{1}{3s + 1} - \frac{3s}{9s^2 + 16} + \frac{1}{9s^2 + 16} \\
Y(s) \cdot \frac{17}{12} &= \frac{1/3}{s + 1/3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{s}{s^2 + 16/9} + \frac{1}{12} \cdot \frac{4/3}{s^2 + 16/9}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 1/3} \right\} = e^{-\frac{t}{3}} 1(t) \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 1/144} \right\} = \cos \left( \frac{t}{12} \right) 1(t) \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1/12}{s^2 + 1/144} \right\} = \text{sen} \left( \frac{t}{12} \right) 1(t)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1} \left\{ Y(s) \cdot \frac{17}{12} \right\} &= \frac{e^{-\frac{t}{3}} 1(t)}{3} - \frac{\cos \left( \frac{4t}{3} \right) 1(t)}{3} + \frac{1}{12} \cdot \text{sen} \left( \frac{4t}{3} \right) 1(t) \\
y(t) \cdot 17 &= 4e^{-\frac{t}{3}} 1(t) - 4 \cos \left( \frac{4t}{3} \right) 1(t) + \text{sen} \left( \frac{t}{12} \right) 1(t)
\end{aligned}$$

Finalmente

$$y(t) = 1(t) \cdot \frac{4e^{-\frac{t}{3}} - 4 \cos \left( \frac{4t}{3} \right) + \text{sen} \left( \frac{4t}{3} \right)}{17}$$

(e) encontrar a entrada  $u(t)$  para que  $y(t) = \alpha \forall t \geq 0$ ;  
Trabalhando com a seguinte EDO, teremos:

$$3\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \quad , \quad y(0^-) = -2$$

Porém, temos que  $y(t) = -2 \forall t \geq 0$ . Assim, podemos definir a função  $y(t) = -2$ , pois respeitará o fato de  $y(0^-) = -2$ . Dessa forma,  $\dot{y}(t) = 0$ . Na equação, teremos:

$$3 \cdot 0 + (-2) = u(t)$$

Finalmente

$$u(t) = -2$$

(f) encontrar a entrada  $u(t)$  para que  $y(t) = 0 \forall t > 0$ .

Aqui, devemos tomar o cuidado para manter a condição de que  $y(0^-) = -2$ . Para isso, podemos definir que

$$y(t) = -2 \cdot 1(-t)$$

Tendo, por consequência que

$$\dot{y}(t) = -2\delta(-t) = -2\delta(t)$$

Acima, utilizamos a inversão na escala de tempo para chegar que  $\dot{y}(t) = -2\delta(t)$ .

Agora, podemos resolver a equação, que é dada por

$$3\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \quad , \quad y(0^-) = -2$$

$$3(-2\delta(t)) + (-2 \cdot 1(t)) = u(t)$$

Finalmente

$$u(t) = -6\delta(t) - 2 \cdot 1(t)$$

**2.)** Um SLIT relaxado é descrito por  $\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_1\dot{u}(t) + u(t)$ . **G2:**  $a_1 = 30, a_0 = 3$

(a) Para  $b_1 = 0$  calcular a resposta ao degrau unitário e esboçar o seu gráfico;

$$\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t) \quad , \quad y(0^-) = 0$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t)\} = \mathcal{L}\{1(t)\}$$

$$s^2Y(s) + 30sY(s) + 3Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s \cdot (s^2 + 30s + 3)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s + 15 - \sqrt{222}) \cdot (s + 15 + \sqrt{222})} =$$

$$= \frac{1}{s} \cdot \left( \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s + 15 - \sqrt{222}} - \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s + 15 + \sqrt{222}} \right)$$

$$y(t) = \int \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{222}}{444} \cdot \left[ \frac{1}{s + 15 - \sqrt{222}} - \frac{1}{s + 15 + \sqrt{222}} \right] \right\} dt =$$

$$= \frac{\sqrt{222}}{444} \cdot \int (e^{(-15+\sqrt{222})t} - e^{(-15-\sqrt{222})t}) dt = \frac{\sqrt{222}}{444} \cdot \left\{ \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{-15 + \sqrt{222}} + \frac{e^{(-15-\sqrt{222})t}}{15 + \sqrt{222}} \right\}$$

(b) para  $b_1 = 0$  calcular a resposta à rampa unitária e esboçar o seu gráfico;

$$\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t) \quad , \quad y(0^-) = 0$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t)\} = \mathcal{L}\{t1(t)\}$$

$$s^2Y(s) + 30sY(s) + 3Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 \cdot (s^2 + 30s + 3)} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{(s + 15 - \sqrt{222}) \cdot (s + 15 + \sqrt{222})} =$$

$$= \frac{1}{s^2} \cdot \left( \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s + 15 - \sqrt{222}} - \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s + 15 + \sqrt{222}} \right)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int \int \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{222}}{444} \cdot \left[ \frac{1}{s + 15 - \sqrt{222}} - \frac{1}{s + 15 + \sqrt{222}} \right] \right\} = \\ &= \frac{\sqrt{222}}{444} \cdot \int \left\{ \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{-15 + \sqrt{222}} + \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{15 + \sqrt{222}} \right\} dt = \frac{\sqrt{222}}{444} \cdot \left\{ \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{(-15 + \sqrt{222})^2} + \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{(15 + \sqrt{222})^2} \right\} \end{aligned}$$

(c) para  $b_1 = 1$  calcular a resposta ao degrau unitário e esboçar o seu gráfico;

$$\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t) = \dot{u}(t) + u(t) \quad , \quad y(0^-) = 0$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t)\} = \mathcal{L}\{1(t) + t1(t)\}$$

$$s^2Y(s) + 30sY(s) + 3Y(s) = 1 + \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 30s + 3} + \frac{1}{s \cdot (s^2 + 30s + 3)}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s + 15 - \sqrt{222}) \cdot (s + 15 + \sqrt{222})} + \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s + 15 - \sqrt{222}) \cdot (s + 15 + \sqrt{222})} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s + 15 - \sqrt{222}} - \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s + 15 + \sqrt{222}} + \frac{1}{s} \cdot \left( \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s + 15 - \sqrt{222}} - \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s + 15 + \sqrt{222}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{222}}{444} \cdot \left\{ e^{(-15+\sqrt{222})t} - e^{(-15+\sqrt{222})t} + \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{-15 + \sqrt{222}} + \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{15 + \sqrt{222}} \right\} \end{aligned}$$

(d) para  $b_1 = -1$  calcular a resposta ao degrau unitário e esboçar o seu gráfico;

$$\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t) = -\dot{u}(t) + u(t) \quad , \quad y(0^-) = 0$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t)\} = \mathcal{L}\{-1(t) + t1(t)\}$$

$$s^2Y(s) + 30sY(s) + 3Y(s) = -1 + \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = -\frac{1}{s^2 + 30s + 3} + \frac{1}{s \cdot (s^2 + 30s + 3)}$$

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{(s+15-\sqrt{222}) \cdot (s+15+\sqrt{222})} + \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+15-\sqrt{222}) \cdot (s+15+\sqrt{222})} \\
&= -\frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s+15-\sqrt{222}} + \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s+15+\sqrt{222}} + \frac{1}{s} \cdot \left( \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s+15-\sqrt{222}} - \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s+15+\sqrt{222}} \right) \\
&= \frac{\sqrt{222}}{444} \cdot \left\{ -e^{(-15+\sqrt{222})t} + e^{(-15+\sqrt{222})t} + \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{-15+\sqrt{222}} + \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{15+\sqrt{222}} \right\}
\end{aligned}$$

- (e) traçar com precisão um único gráfico com as 3 respostas ao degrau;  
(f) calcular a resposta a seno  $u(t) = \sin(\omega t)$  para  $b_1 = 0, \omega = 4a_0$  e esboçar o seu gráfico.

**3.)** Um SLIT relaxado é descrito por uma função de transferência com numerador e denominador dados por  $n(s) = K$  e  $d(s) = (s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)$ . **G2:**  $p_1 = 1, p_2 = 3, p_3 = 4$

- (a) Esboçar a resposta ao degrau unitário (escolha o valor de  $K$ );  
(b) esboçar a resposta ao degrau unitário quando os  $p_i$  são divididos por 5;  
(c) esboçar a resposta ao degrau unitário quando os  $p_i$  são multiplicados por 5;  
(d) comentar os resultados acima;  
(e) esboçar a resposta ao degrau unitário quando dois  $p_i$  são multiplicados por 5 e o outro é dividido por 5;  
(f) comentar os resultados acima.