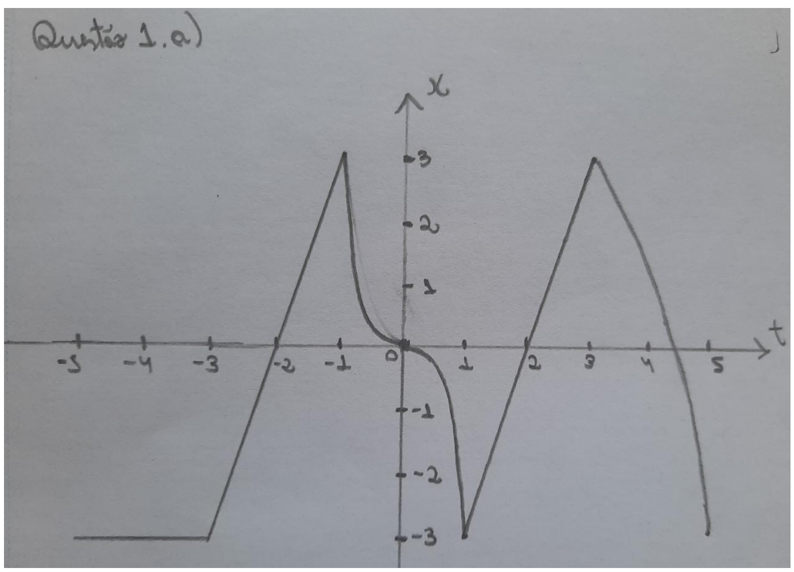
Sinais e Sistemas - Trabalho 1 - Grupo 2

Leonardo Soares da Costa Tanaka
Matheus Henrique Sant Anna Cardoso
Theo Rudra Macedo e Silva

Setembro de 2022

1.) Para o sinal abaixo, contínuo por partes e definido para $t \in [-5\ 5]$: (a) esboçar gráfico, (b) encotrar uma expressão analítica usando sinais singulares, (c) escrever um programa que rode em Octave/MatLab para plotar o gráfico. Nos dados a seguir, as expressões entre vírgulas se referem, na ordem de apresentação, aos valores do sinal nos intervalos $I_1 = [-5\ -3], I_2 = [-3\ -1], I_3 = [-1\ 1], I_4 = [1\ 3], I_5 = [3\ 5]$. **G2**: $x(t) = -3, 3t + 6, -3t^3, 3t - 6, -t^2 + 5t - 3$

(a) Esboçando o gráfico:



(b) Analisando para os intervalos, teremos:

Para $-5 \leq t < -3, x(t) = -3$, ou, $x(t) = -3 \cdot 1(-t)$ utilizando um degrau refletido.

Para $-3 \leq t < -1, x(t) = 3t + 6$, ou, $x(t) = 3t \cdot 1(-t) + 6 \cdot 1(-t)$ utilizando degrau e rampa unitários.

Para $-1 \leq t < 0, x(t) = -3t^3$, ou, $x(t) = -6t \cdot \frac{t^2}{2} 1(-t)$ utilizando a parábola unitária.

Para $0 \leq t < 1, x(t) = -3t^3$, ou, $x(t) = -6t \cdot \frac{t^2}{2} 1(t)$ utilizando a parábola unitária.

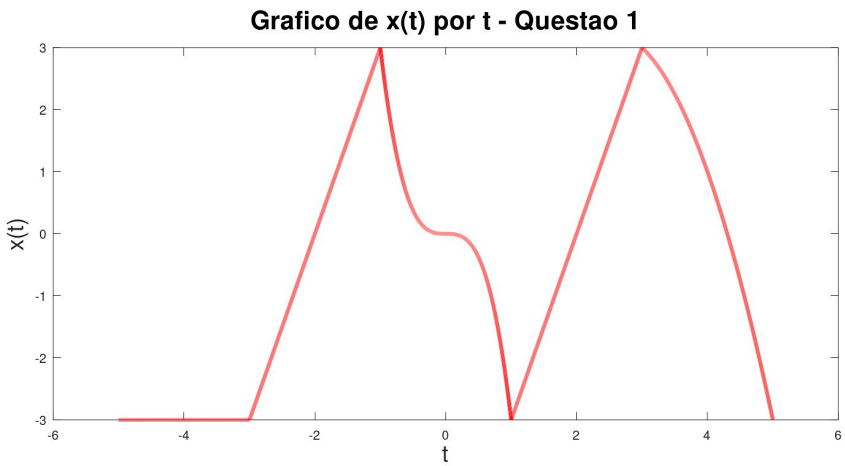
Para $1 \leq t < 3, x(t) = 3t - 6$, ou, $x(t) = 3t \cdot 1(t) - 6 \cdot 1(t)$ utilizando degrau e rampa unitários.

Para $3 \leq t < 5, x(t) = -t^2 + 5t - 3$, ou, $x(t) = -2 \cdot \frac{t^2}{2} 1(t) + 5t \cdot 1(t) - 3 \cdot 1(t)$ utilizando parábola, rampa e degrau unitários.

Dessa forma, teremos $x(t)$ definido como:

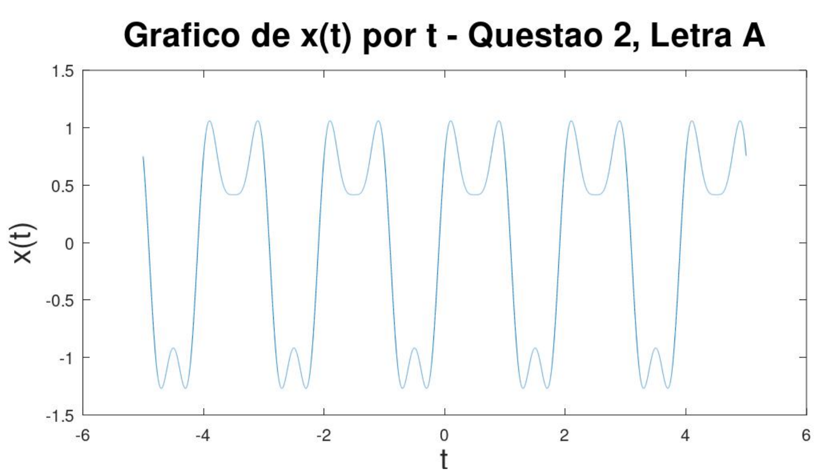
$$x(t) = \begin{cases} -3 \cdot 1(-t) & -5 \leq t < -3 \\ 3t \cdot 1(-t) + 6 \cdot 1(-t) & -3 \leq t < -1 \\ -6t \cdot \frac{t^2}{2} 1(-t) & -1 \leq t < 0 \\ -6t \cdot \frac{t^2}{2} 1(t) & 0 \leq t < 1 \\ 3t \cdot 1(t) - 6 \cdot 1(t) & 1 \leq t < 3 \\ -2 \cdot \frac{t^2}{2} 1(t) + 5t \cdot 1(t) - 3 \cdot 1(t) & 3 \leq t < 5 \end{cases}$$

(c) Executando os códigos escritos no arquivo `questao1.m` (feito no Octave), plotamos o seguite gráfico:

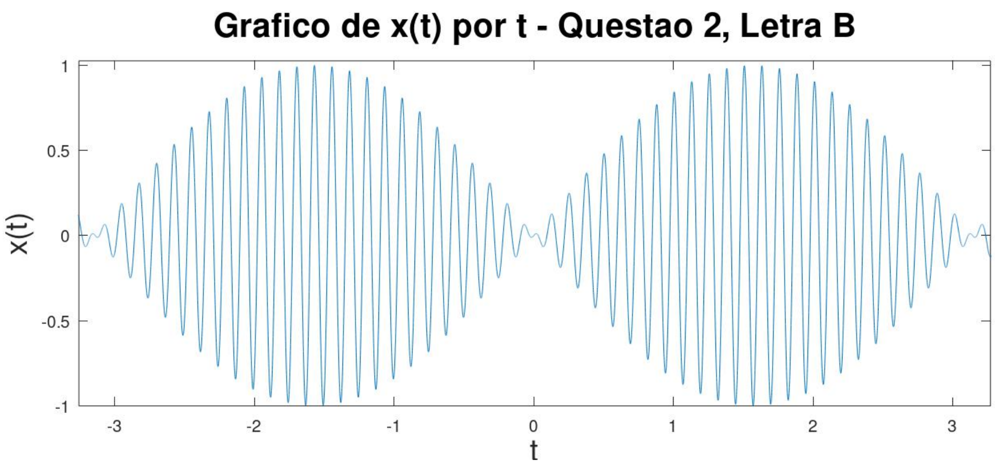


2.) Plotar o gráfico dos sinais a seguir, com escalas adequadas e usando os valores numéricos desejados para os eventuais parâmetros. Dizer se estes sinais são periódicos e, em caso afirmativo quais os seus períodos fundamentais. (a) $x(t) = sen(\pi t) + cos(2\pi t)/2 + sen(3\pi t)/3 + cos(4\pi t)/4$, (b) $x(t) = sen(\omega t)cos(50\omega t)$, (c) $x(t) = sen(\omega t^2)$, (d) $x(t) = sen(\omega_1 sen(\omega_2 t)t)$

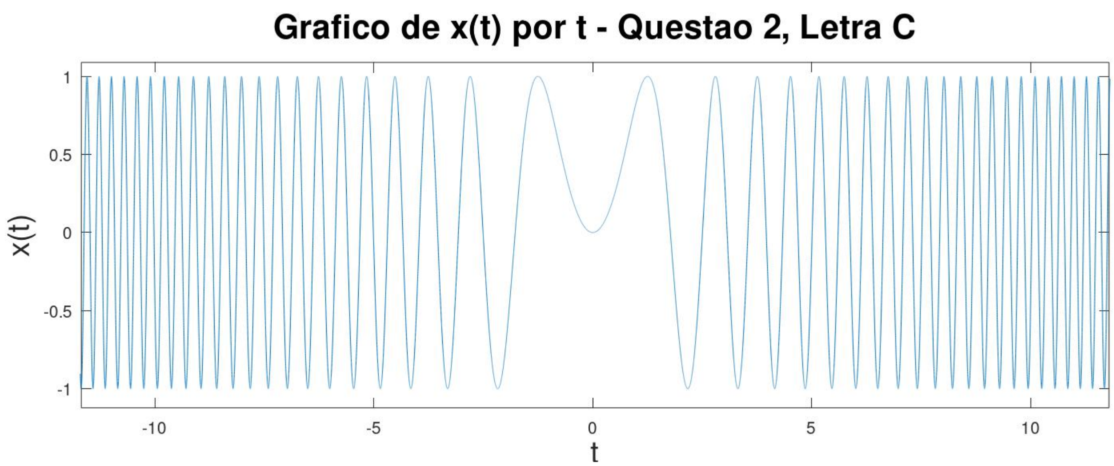
(a) Plotando o gráfico no Octave, temos:



(b) Plotando o gráfico no Octave, temos:

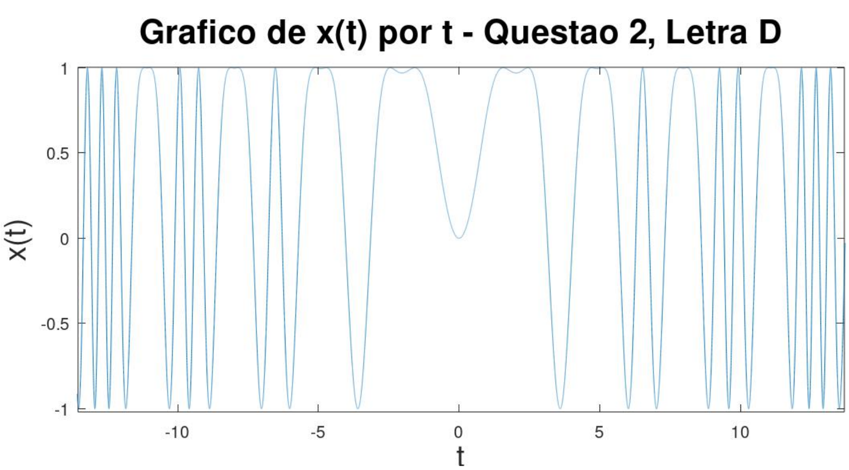


(c) Plotando o gráfico com o Octave para $\omega = 7$, temos:



Daqui, já se nota que o sinal não é periódico. Além de ser bem destoante para valores próximos à zero, conforme $t \to \infty$ ou $t \to -\infty$, a distância entre as cristas e entre os vales diminui.

(d) Plotando o gráfico com o Octave para $\omega_1 = \omega_2 = 1$, temos:



Do gráfico, nota-se que este sinal não é periódico. As distâncias entre as cristas e entre os vales não é fixa ao longo do gráfico.

3.) Um sinal periódico com período fundamental $T_0 = 4$ é descrito por **G2**: $x(t) = 1 - e^{|t|}$ para $-T_0/2 \leq t < T_0/2$ (a) Esboce o seu gráfico; (b) calcule analiticamente sua potência total P; (c) calcule X_0 usando $k = 0$ na fórmula geral de X_k; (d) calcule analiticamente os coeficientes X_k e verifique se a expressão obtida leva a X_0 sem indeterminações; (e) esboce os espectros de módulo e fase; (f) para $k = 0, 1, 2$ *e* 3, calcule a potência acumulada P_k^a contida nos harmônicos de 0 *a* k; (g) para $k = 0, 1, 2$ *e* 3, calcule a potência relativa P_k^a/P; (h) quantos harmônicos são necessários para uma aproximação reter 90.00% da potência?

(b) Podemos, inicialmente, calcular a energia do sinal no período $[-2\ 2]$ com $T_0 = 4$ e $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{2}$.
$E = \int_{-2}^{2} \mid x(t) \mid^2 \ dt = \int_{-2}^{0} \mid 1 - e^{|t|} \mid^2 \ dt + \int_{0}^{2} \mid 1 - e^{|t|} \mid^2 \ dt$

$$E = \int_{-2}^{0} (1 - 2e^{|t|} + e^{2|t|})\, dt + \int_{0}^{2} (1 - 2e^{|t|} + e^{2|t|})\, dt =$$

$$E = (t - 2e^{|t|} + \frac{1}{2}e^{2|t|}) \mid_{-2}^{0} + (t - 2e^{|t|} + \frac{1}{2}e^{2|t|}) \mid_{0}^{2} =$$

$$E = (0 - 2 + \frac{1}{2} - (-2 - 2e^2 + \frac{1}{2}e^4)) + (2 - 2e^2 + \frac{1}{2}e^4) - (0 - 2 + \frac{1}{2}) = 4$$

$$E = 4$$

A potência, portanto, será calculada como a energia dividida pelo período de tempo calculado: $P = \frac{E}{4} = 1$.

(c) A fórmula geral de X_k é dada por:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, e^{-jkw_0t}\, dt$$

Para o nosso caso:

$$X_0 = \frac{1}{4} \left[\int_{-2}^{0} (1 - e^{-t})\, dt + \int_{0}^{2} (1 - e^{t})\, dt \right]$$

$$X_0 = \frac{1}{4} \left[\left(t + e^{-t}\right)_{-2}^{0} + \left(t - e^{t}\right)_{0}^{2} \right]$$

$$X_0 = \frac{1}{4} \left[\left(0 + 1\right) - \left(-2 + e^2\right) + \left(2 - e^2\right) - \left(0 - 1\right) \right]$$

$$X_0 = \frac{3 - e^2}{2}$$

O termo DC, vale $\frac{3-e^2}{2}$.

(d) Já temos a fórmula geral de X_k acima descrita. Assim, para o caso geral, temos:

$$X_k = \frac{1}{4} \left[\int_{-2}^{2} (1 - e^{|t|})\, e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\, dt \right]$$

$$X_k = \frac{1}{4} \left[\int_{-2}^{0} (1 - e^{-t})\, e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\, dt + \int_{-2}^{0} (1 - e^{t})\, e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\, dt \right]$$

Para facilitar as contas, e a visualização, chamaremos a constante $jk\frac{\pi}{2}$ de c.

$$X_k = \frac{1}{4} \left[\int_{-2}^{0} (1 - e^{-t})\, e^{-ct}\, dt + \int_{0}^{2} (1 - e^{t})\, e^{-ct}\, dt \right]$$

$$X_k = \frac{1}{4} \left[\int_{-2}^{0} (e^{-ct} - e^{-t(c+1)})\, dt + \int_{0}^{2} (e^{-ct} - e^{t(1-c)}\, dt) \right]$$

$$4X_k = \left(\frac{-e^{-ct}}{c} - \left(\frac{-e^{-t(c+1)}}{c+1} \right) \right)_{-2}^{2} + \left(\frac{-e^{-ct}}{c} - \frac{e^{t(1-c)}}{1-c} \right)_{0}^{2}$$

$$4X_k = \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{c+1} + \frac{e^{2c}}{c} - \frac{e^{2(c+1)}}{c+1} \right) + \left(-\frac{e^{-2c}}{c} - \frac{e^{2(1-c)}}{1-c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{1-c} \right)$$

$$4X_k = \left(\frac{1}{c+1} + \frac{1}{1-c} + \frac{e^{2c}}{c} - \frac{e^{2(c+1)}}{c+1} - \frac{e^{-2c}}{c} - \frac{e^{2(1-c)}}{1-c} \right)$$

Substituindo c pela constante $jk\frac{\pi}{2}$, chegamos à expressão final:

$$X_k = \frac{2}{k^2\pi^2+4} - \frac{2e^2}{k^2\pi^2+4}cos(k\pi) + sinc(k)$$

Que pode ser simplificada para:

$$X_k = \frac{2}{k^2\pi^2+4} - \frac{2e^2}{k^2\pi^2+4}(-1)^k + sinc(k)$$

Perceba, então, que não existe indeterminações na expressão X_k, na qual podemos, inclusive, calcular para $k = 0$.

$$X_0 = \frac{2}{4} - \frac{2e^2}{4}(-1)^0 + sinc(0)$$

$$X_0 = \frac{1}{2} - \frac{e^2}{2} + 1$$

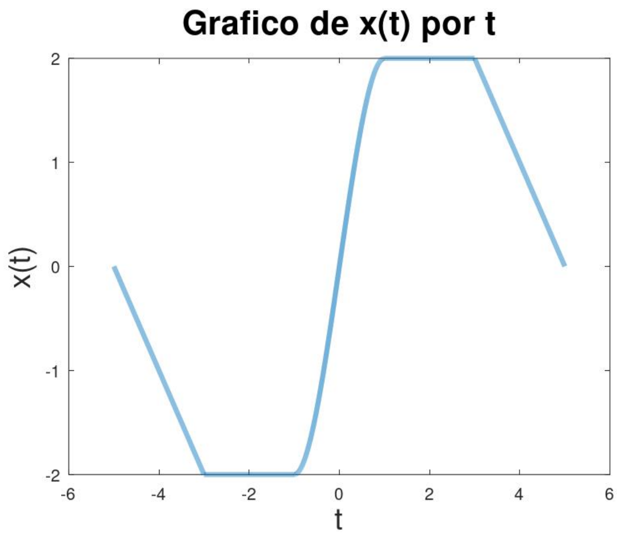
$$X_0 = \frac{3-e^2}{2}$$

Que foi a expressão inicialmente obtida.

4.) O grupo i trabalhará com o sinal periódico $x(t)$ usado pelo grupo $i+1$ na questão 1 (ao grupo 7: sinal 1). As aproximações numéricas para Octave/MatLab vistas, podem e devem ser utilizadas. (a) Traçar gráfico; (b) encontrar potência total P; (c) calcular os X_k para $k \in [-10\ 10]$; (d) traçar os espectos de magnitude, fase e potência; (e) estimar quantos harmônicos são necessários para reter 90.00% da potência; (f) calcular os coeficientes a_k e b_k correspondentes; (g) traçar, num mesmo gráfico, $x(t)$ e as aproximações.

Sinal a ser estudado: **G**3: $x(t) = -t-5, -2, -t^3+3t, 2, -t+5$ para o intervalo $I_1 = [-5\ \ -3], I_2 = [-3\ \ -1], I_3 = [-1\ 1], I_4 = [1\ 3], I_5 = [3\ 5]$.

(a) Traçando o gráfico do sinal periódico:



(b) Encontrando a potência total P com a aproximação da fórmula $P_{[-5\ 5]} = \frac{1}{5-(-5)} \int_{-5}^{5} |x(t)|^2 dt$:

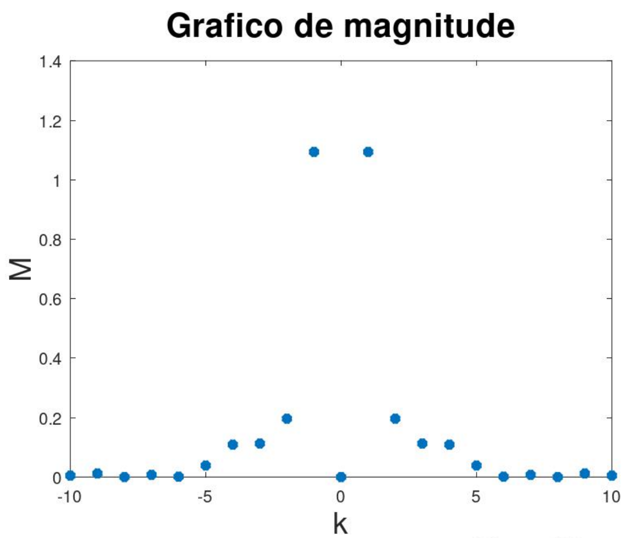
Potência total $(P) = 2.5219$

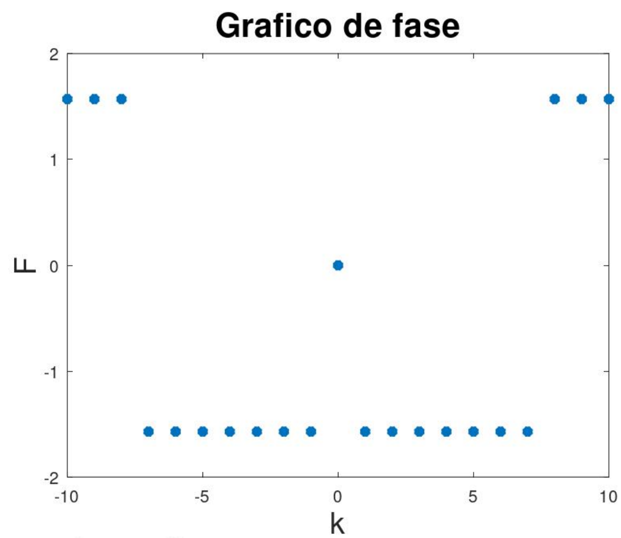
(c) Calculando os X_k para $k \in [-10\ 10]$:

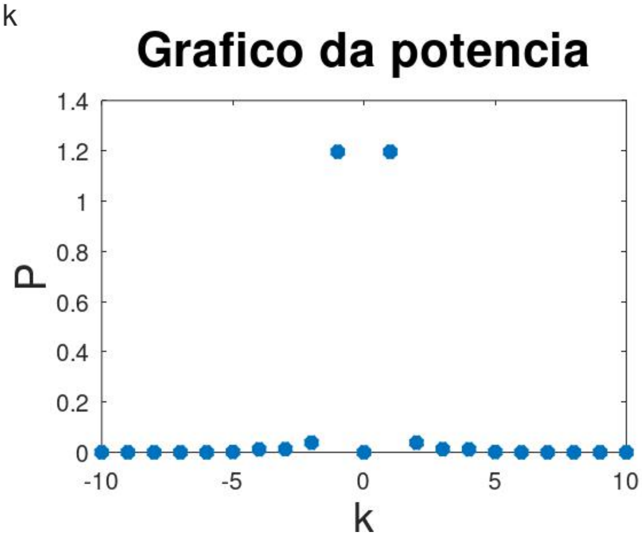
$$X_{-10} = 3.6250 \times 10^{-17} - 4.8377 \times 10^{-3} j;$$
$$X_{-9} = 1.3859 \times 10^{-18} - 1.2007 \times 10^{-2} j;$$
$$X_{-8} = 1.5344 \times 10^{-17} - 5.4810 \times 10^{-5} j;$$
$$X_{-7} = -1.1824 \times 10^{-18} + 7.3857 \times 10^{-3} j;$$
$$X_{-6} = -3.0899 \times 10^{-17} + 1.2438 \times 10^{-3} j;$$
$$X_{-5} = 1.6911 \times 10^{-17} + 3.8702 \times 10^{-2} j;$$
$$X_{-4} = 3.1526 \times 10^{-17} + 1.0894 \times 10^{-1} j;$$
$$X_{-3} = -6.7537 \times 10^{-18} + 1.1269 \times 10^{-1} j;$$
$$X_{-2} = 1.4539 \times 10^{-17} + 1.9635 \times 10^{-1} j;$$
$$X_{-1} = 1.4886 \times 10^{-17} + 1.0936 j;$$
$$X_o = 6.3307 \times 10^{-17};$$

$$X_{10} = 3.6250 \times 10^{-17} + 4.8377 \times 10^{-3} j.$$
$$X_{9} = 1.3859 \times 10^{-18} + 1.2007 \times 10^{-2} j;$$
$$X_{8} = 1.5344 \times 10^{-17} + 5.4810 \times 10^{-5} j;$$
$$X_{7} = -1.1824 \times 10^{-18} - 7.3857 \times 10^{-3} j;$$
$$X_{6} = -3.0899 \times 10^{-17} - 1.2438 \times 10^{-3} j;$$
$$X_{5} = 1.6911 \times 10^{-17} - 3.8702 \times 10^{-2} j;$$
$$X_{4} = 3.1526 \times 10^{-17} - 1.0894 \times 10^{-1} j;$$
$$X_{3} = -6.7537 \times 10^{-18} - 1.1269 \times 10^{-1} j;$$
$$X_{2} = 1.4539 \times 10^{-17} - 1.9635 \times 10^{-1} j;$$
$$X_{1} = 1.4886 \times 10^{-17} - 1.0936 j;$$

(d) Traçando os espectros de magnitude, fase e potência:







(e) Calculando a_k e b_k a partir dos coeficientes X_k, teremos:

$$a_0 = 6.3307 \times 10^{-17} \qquad b_0 = 0$$
$$a_1 = 2.9772 \times 10^{-17} \qquad b_1 = 2.1873$$
$$a_2 = 2.9078 \times 10^{-17} \qquad b_2 = 0.3927$$
$$a_3 = -1.3507 \times 10^{-17} \qquad b_3 = 0.2254$$
$$a_4 = 6.3052 \times 10^{-17} \qquad b_4 = 0.2179$$
$$a_5 = 3.3822 \times 10^{-17} \qquad b_5 = 0.077404$$
$$a_6 = -6.1798 \times 10^{-17} \qquad b_6 = 2.4876 \times 10^{-3}$$
$$a_7 = -2.3649 \times 10^{-18} \qquad b_7 = 0.014771$$
$$a_8 = 3.0689 \times 10^{-17} \qquad b_8 = -1.0962 \times 10^{-4}$$
$$a_9 = 2.7717 \times 10^{-18} \qquad b_9 = -0.024014$$
$$a_{10} = 7.2500 \times 10^{-17} \qquad b_{10} = -9.6755 \times 10^{-3}$$

(e) Estimando quantos harmônicos são necessários para reter 90.00% da potência:

Até o primeiro harmônico que consegue reter $94,85\%$

5.) Na escala de tempo `t=0:1/2000:5`, considere um sinal de áudio simples $x_b(t) = sen(2\pi f_0 t)$ ou $x_b(t) = cos(2\pi f_0 t)$ com frequência **G2:** $f_0 = 132Hz$. Ouça este som usando o comando `sound(xb)` no Octave; o resultado é, provavelmente, desagradável pois se trata de uma frequência pura e a sensação é seca, metálica. Para melhorar o **timbre** do som é preciso colocar mais harmônicos. Crie, na mesma escala de tempo, com a mesma frequência fundamental f_0, com parâmetros a seu critério e usando até o harmônico $k = 6$ $(6f_0 Hz)$ os sinais a seguir. Ouça cada um deles e compare a qualidade do timbre. (a) Uma onda quadrada $x_q(t)$; (b) uma onda triangular $x_t(t)$; (c) um seno semi-retificado sem o nível DC $x_s(t)$; (d) Opcional: adicionando senos e co-senos harmônicos a seu critério, imagine-se projetando um sintetizador de som e crie um sinal periódico $x(t)$ com frequência fundamental f_0 e um timbre agradável.