Sinais e Sistemas - Trabalho 2

Leonardo Soares da Costa Tanaka
Matheus Henrique Sant Anna Cardoso
Theo Rudra Macedo e Silva

Setembro de 2022

1.) Uma nota musical, ou tom, pode ser modelada por um sinal periódico com uma frequência fundamental e vários harmônicos. Quando duas notas musicais são "tocadas" ao mesmo tempo — um acorde — o efeito resultante pode soar agradável, consonante ou desagradável, dissonante. Desde os antigos gregos, com Pitágoras, se sabe que as combinações ou acordes agradáveis acontecem quando a razão entre as frequências fundamentais das notas é expressa por números naturais pequenos. Assim, os acordes mais harmônicos e consonantes são, pela ordem, aqueles associados às razões 1:1 (uníssono), 2:1 (oitava), 3:2 (5.a perfeita), 4:3 (4.a perfeita), 5:4 (3.a maior) etc.
(a) Crie, no Octave, uma nota com frequência **G2:** $f_0 = 170Hz$, usando ondas quadradas ou triangulares (pesquise e use os comandos `square` ou `sawtooth` no Octave) em uma escala de tempo de 3 segundos com espaçamento entre as amostras de `dt = 1/44000 (t=0:dt:3)` e chame-a de tônica $x_t(t)$;
(b) crie a oitava $x_8(t)$ da tônica, a 5.a $x_5(t)$, a 4.a $x_4(t)$, a 2.a (9:8) $x_2(t)$ e também a nota com relação 321:319 $x_d(t)$;
(c) usando o comando `sound`(x, 44000) ouça no Octave as notas isoladas e todos os acordes (para os acordes, crie a soma `z = xt + x8`, por exemplo, e depois use o comando `sound` acima em z) verificando se são consonantes;
(d) explique a teoria harmônica de Pitágoras usando Série de Fourier e análise dos harmônicos da tônica e das companheiras.

2.) Um sinal definido como abaixo em um intervalo de largura $L = 4$ e nulo para outros valores de t é chamado de pulso:
G2: $x(t) = 1 - e^{|t|}$ para $-L/2 \leq t < L/2$
(a) Esboce o gráfico do pulso;
(b) calcule sua energia total E_t;
O que buscamos é:

$$E_t = \int_{-2}^{2} |1 - e^{|t|}|^2 \, dt$$

Para motivações de cálculo, podemos separar esta integral em duas partes:

$$E_t = \int_{-2}^{0} (1 - e^{-t})^2 \, dt + \int_{0}^{2} (1 - e^{t})^2 \, dt$$

Porém, como o gráfico possui eixo de simetria em $t = 0$, sabemos que o valor das duas integrais separadas é igual. Dessa forma fazemos:

$$E_t = 2 \cdot \int_{-2}^{0} (1 - e^{-t})^2 \, dt = 2 \cdot \int_{0}^{2} (1 - e^{t})^2 \, dt$$

Escolhendo a que melhor convém para o cálculo, obtemos:

$$E_t = 2 \cdot \int_{0}^{2} (1 - e^{t})^2 \, dt$$

Finalmente:

$$E_t = 2 \cdot \int_{0}^{2} (1 - 2e^{t} + e^{2t}) \, dt$$

$$E_t = 2 \cdot \left[t - 2e^{t} + e^{2t}\right]_0^2$$

$$E_t = 7 - 4e^2 + e^4$$

Fazendo os cálculos utilizando o Octave, a energia total será:

$$E_t = 32.042$$

(c) calcule $X(0)$ fazendo $f = 0$ na fórmula de definição;
Primeiramente, anotemos a definição com a fórmula abaixo:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} \, dt$$

Como queremos $X(0)$, fazemos $f = 0$ na fórmula:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi 0t}\, dt$$

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt$$

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{|t|})\, dt$$

Separando, novamente, em duas integrais, temos:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{0} (1 - e^{-t})\, dt + \int_{0}^{\infty} (1 - e^{t})\, dt$$

$$X(0) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{0} (1 - e^{-t})\, dt + \lim_{T\to\infty} \int_{0}^{T} (1 - e^{t})\, dt$$

$$X(0) = \lim_{T\to\infty} (T - e^{T} + 1) + \lim_{T\to\infty} (T - e^{T} + 1)$$

$$X(0) = \lim_{T\to\infty} (2T - 2e^{T} + 2)$$

Veja que este limite não converge para um valor, em que temos $X(0) \to -\infty$

(d) calcule analiticamente $X(f)$ e verifique se $X(0)$ pode ser obtido a partir desta fórmula sem indeterminações;
(e) trace o espectro de energia $|X(f)|^2 \times f$ para $f \in [-1\ +1]Hz$ usando muitos pontos e calcule a energia contida nesta banda ($\int_{-1}^{1} |X(f)|^2\, dt$) usando integração aproximada;
(f) por tentativa e erro, e usando o método anterior, calcule a banda de passagem que retém 95% da energia do sinal: f_M tal que $\int_{-f_M}^{f_M} |X(f)|^2\, df$;
Dica: há vários possíveis meios para integrar funções não triviais, como por exemplo https://www.integral-calculator.com/ e certamente outros.

3.) Um sinal é caracterizado por
G2: $X_m(f) = 80p_{20}(f + 810) + 80p_{20}(f - 790)$
com frequências medidas em kHz. Lembrar que $p_\Delta(f - \tau)$ denota um pulso de largura Δ, amplitude Δ^{-1} e aplicado a partir de τ, com transformada conhecida.
(a) Esboçar os espectros de amplitude e de energia;
(b) calcular sua anti-transformada de Fourier: $\mathcal{F}^{-1}\{X_m(f)\} = x_m(t)$ (use as propriedades);
(c) ao sinal $x_m(t)$ se aplica um filtro PB (passa-baixas) ideal; determinar sua frequência de corte M de modo que 50% da energia total seja retida;
(d) ao sinal $x_m(t)$ se aplica um filtro PA (passa-altas) ideal; determinar sua frequência de corte M de modo que 50% da energia total seja retida.