Sinais e Sistemas - Trabalho 3 - Avaliação 5

Grupo 2
Leonardo Soares da Costa Tanaka
Matheus Henrique Sant Anna Cardoso
Theo Rudra Macedo e Silva

Rio de Janeiro
2022

1.) Um SLIT é modelado por $\tau\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$ com $y(0^-) = \alpha$. **G2:** $\tau = 3, \alpha = -2$
(a) Calcular a resposta ao degrau unitário e esboçar o seu gráfico;
Para calcular a resposta, trataremos já com os dados, sendo a EDO:

$$3\dot{y}(t) + y(t) = 1(t) \quad , \quad y(0^-) = -2$$

Pela propriedade da derivação, sabemos que

$$\dot{y}(t) = sY(s) - y(0^-)$$

Então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{3\dot{y}(t) + y(t)\} &= \mathcal{L}\{u(t)\} \\ 3(sY(s) - y(0^-)) + Y(s) &= U(s) \\ Y(s)(3s+1) + 6 &= U(s) \end{aligned}$$

Como $u(t) = 1(t)$, sabemos que $U(s) = \frac{1}{s}$, assim

$$\begin{aligned} Y(s)(3s+1) + 6 &= \frac{1}{s} \\ Y(s) &= \frac{1}{3s+1} \cdot \frac{1}{s} - \frac{6}{3s+1} \end{aligned}$$

Separando em frações parciais, temos:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{3}{3s+1} - \frac{6}{3s+1} \\ Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{9}{3s+1} \\ Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{3}{s+1/3} \end{aligned}$$

Agora, podemos descobrir $y(t)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1(t) \qquad\qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+1/3}\right\} = 3e^{-\frac{1}{3}t}1(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = 1(t) - 3e^{-\frac{1}{3}t}1(t)$$

Finalmente

$$y(t) = 1(t) - 3e^{-\frac{t}{3}}1(t)$$

(b) calcular a resposta à rampa unitária e esboçar o seu gráfico;
Para calcular a resposta à rampa, tomemos a seguinte EDO:

$$3\dot{y}(t) + y(t) = t1(t) \quad , \quad y(0^-) = -2$$

Da mesma forma como no item (a), podemos utilizar a propriedade da derivação e fazer em ambos os lados, a transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{\dot{y}(t)\right\} = \big(sY(s) - y(0^-)\big) \qquad\qquad \mathcal{L}\left\{t1(t)\right\} = U(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$
\begin{aligned}
3(Y(s)-y(0^-))+Y(s) &= U(s)\\
Y(s)(3s+1)+6 &= \frac{1}{s^2}\\
Y(s) = \frac{1}{3s+1}\cdot\frac{1}{s^2} &- \frac{6}{3s+1}
\end{aligned}
$$

Separando em frações parciais, teremos

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{9}{3s+1} - \frac{3s-1}{s^2} - \frac{6}{3s+1}\\
Y(s) &= \frac{3}{3s+1} - \frac{3s-1}{s^2}\\
Y(s) &= \frac{1}{s+1/3} - \frac{3}{s} + \frac{1}{s^2}
\end{aligned}
$$

Agora, podemos calcular a inversa da transformada de Laplace.

$$
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/3}\right\} = e^{-\frac{t}{3}}1(t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s}\right\} = 3\cdot 1(t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t1(t)
$$

$$
\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = e^{-\frac{t}{3}}1(t) - 3\cdot 1(t) + t1(t)
$$

Finalmente

$$
y(t) = e^{-\frac{t}{3}}1(t) - 3\cdot 1(t) + t1(t)
$$

(c) calcular a resposta ao seno $u(t) = \mathrm{sen}(\omega t)$ para $\alpha = 0$, $\omega = 1/(4\tau)$ e esboçar o seu gráfico;
Agora, temos para resolver a seguinte EDO:

$$
3\dot{y}(t) + y(t) = \mathrm{sen}\left(\frac{t}{12}\right)1(t) \quad , \quad y(0^-) = 0
$$

Utilizaremos Laplace, para resolver, a saber

$$
\mathcal{L}\left\{\dot{y}(t)\right\} = sY(s) \qquad \mathcal{L}\left\{\mathrm{sen}\left(\frac{t}{12}1(t)\right)\right\} = \frac{1/12}{s^2+1/144} = \frac{12}{144s^2+1}
$$

Utilizando, novamente, as técnicas empregadas nos itens anteriores, teremos

$$
\begin{aligned}
3(sY(s)) + Y(s) &= \frac{12}{144s^2+1}\\
Y(s)(3s+1) &= \frac{12}{144s^2+1}\\
Y(s) &= \frac{1}{3s+1}\cdot\frac{12}{144s^2+1}\\
Y(s) &= \frac{r_1}{3s+1} + \frac{r_2}{144s^2+1}
\end{aligned}
$$

Vamos, por tentativa e erro, calcular as constantes r_1 e r_2.
Perceba que, fazendo $r_1\cdot(144s^2+1)$ teremos um termo com s^2 mais uma constante. O mesmo deve ser para $r_2\cdot(3s+1)$. Para isso, podemos fazer com que o segundo seja o produto da soma pela diferença, obtendo um termo ao quadrado e uma constante.

Fazemos, então $r_2 = (3s-1)$, obtendo, naquele segundo produto, o seguinte: $r_2 \cdot (3s+1) = (3s-1)(3s+1) = 9s^2 - 1$. No primeiro produto $(r_1 \cdot (144s^2+1))$, já temos um fator grande suficiente para o termo quadrático, podemos corrigir com o segundo produto, multiplicando por 16.
No final, ficamos com a expressão

$$\frac{1}{3s+1} - \frac{16(3s-1)}{144s^2+1}$$

Ficamos, porém, com uma constante no numerador igual a $(144s^2 + 1 - 16(9s^2 - 1) = 1 + 16 = 17)$ diferente da expressão original (12). Sendo assim, podemos multiplicar a expressão toda por $\frac{12}{17}$ para termos a expressão inicial na forma de somas parciais.
Então

$$Y(s) = \left(\frac{1}{3s+1} - \frac{16(3s-1)}{144s^2+1}\right) \cdot \frac{12}{17}$$

Assim

$$Y(s) \cdot \frac{17}{12} = \frac{1}{3s+1} - \frac{48s-16}{144s^2+1}$$

Fazendo mais alterações, teremos

$$Y(s) \cdot \frac{17}{12} = \frac{1}{3s+1} - \frac{48s}{144s^2+1} + \frac{16}{144s^2+1}$$
$$Y(s) \cdot \frac{17}{12} = \frac{1/3}{s+1/3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{s}{s^2+1/144} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1/12}{s^2+1/144}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/3}\right\} = e^{-\frac{t}{3}}1(t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1/144}\right\} = \cos\left(\frac{t}{12}\right)1(t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/12}{s^2+1/144}\right\} = \operatorname{sen}\left(\frac{t}{12}\right)1(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s) \cdot \frac{17}{12}\right\} = \frac{e^{-\frac{t}{3}}1(t)}{3} - \frac{\cos\left(\frac{t}{12}\right)1(t)}{3} + \frac{4}{3} \cdot sen\left(\frac{t}{12}\right)1(t)$$
$$y(t) \cdot \frac{17}{4} = e^{-\frac{t}{3}}1(t) - \cos\left(\frac{t}{12}\right)1(t) + 4sen\left(\frac{t}{12}\right)1(t)$$

Finalmente

$$y(t) = 1(t) \cdot \frac{4e^{-\frac{t}{3}} - 4\cos\left(\frac{t}{12}\right) + 16sen\left(\frac{t}{12}\right)}{17}$$

(d) calcular a resposta ao seno $u(t) = \operatorname{sen}(\omega t)$ para $\alpha = 0$, $\omega = 4/\tau$ e esboçar o seu gráfico;
Agora, temos para resolver a seguinte EDO:

$$3\dot{y}(t) + y(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{4t}{3}\right)1(t) \quad , \quad y(0^-) = 0$$

Utilizaremos Laplace, para resolver, a saber

$$\mathcal{L}\left\{\dot{y}(t)\right\} = sY(s) \qquad \mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{4t}{3}1(t)\right)\right\} = \frac{4/3}{s^2+16/9} = \frac{12}{9s^2+16}$$

Utilizando, novamente, as técnicas empregadas nos itens anteriores, teremos

$$
\begin{aligned}
3(sY(s)) + Y(s) &= \frac{12}{9s^2+16} \\
Y(s)(3s+1) &= \frac{12}{9s^2+16} \\
Y(s) &= \frac{1}{3s+1} \cdot \frac{12}{9s^2+16} \\
Y(s) &= \frac{r_1}{3s+1} + \frac{r_2}{9s^2+16}
\end{aligned}
$$

Vamos, por tentativa e erro, calcular as constantes r_1 e r_2.
Perceba que, fazendo $r_1 \cdot (9s^2+16)$ teremos um termo com s^2 mais uma constante. O mesmo deve ser para $r_2 \cdot (3s+1)$. Para isso, podemos fazer com que o segundo seja o produto da soma pela diferença, obtendo um termo ao quadrado e uma constante.
Fazemos, então $r_2 = (3s-1)$, obtendo, naquele segundo produto, o seguinte: $r_2 \cdot (3s+1) = (3s-1)(3s+1) = 9s^2 - 1$. No primeiro produto $(r_1 \cdot (9s^2+16))$, já temos um fator multiplicado pelo termo quadrático, igual ao outro. Não tendo a necessidade de multiplicarmos por nada. Assim, ficamos com $r_1 = 1$.
No final, ficamos com a expressão

$$
\frac{1}{3s+1} - \frac{(3s-1)}{9s^2+16}
$$

Ficamos, porém, com uma constante no numerador igual a $(9s^2+16-(9s^2-1) = 16+1 = 17)$ diferente da expressão original (12). Sendo assim, podemos multiplicar a expressão toda por $\frac{12}{17}$ para termos a expressão inicial na forma de somas parciais.
Então

$$
Y(s) = \left(\frac{1}{3s+1} - \frac{3s-1}{9s^2+16} \right) \cdot \frac{12}{17}
$$

Assim

$$
Y(s) \cdot \frac{17}{12} = \frac{1}{3s+1} - \frac{3s-1}{9s^2+16}
$$

Fazendo mais alterações, teremos

$$
\begin{aligned}
Y(s) \cdot \frac{17}{12} &= \frac{1}{3s+1} - \frac{3s}{9s^2+16} + \frac{1}{9s^2+16} \\
Y(s) \cdot \frac{17}{12} &= \frac{1/3}{s+1/3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{s}{s^2+16/9} + \frac{1}{12} \cdot \frac{4/3}{s^2+16/9}
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/3}\right\} = e^{-\frac{t}{3}} 1(t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1/144}\right\} = \cos\left(\frac{t}{12}\right) 1(t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/12}{s^2+1/144}\right\} = \text{sen}\left(\frac{t}{12}\right) 1(t)
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s) \cdot \frac{17}{12}\right\} &= \frac{e^{-\frac{t}{3}} 1(t)}{3} - \frac{\cos\left(\frac{4t}{3}\right) 1(t)}{3} + \frac{1}{12} \cdot sen\left(\frac{4t}{3}\right) 1(t) \\
y(t) \cdot 17 &= 4e^{-\frac{t}{3}} 1(t) - 4\cos\left(\frac{4t}{3}\right) 1(t) + sen\left(\frac{t}{12}\right) 1(t)
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$
y(t) = 1(t) \cdot \frac{4e^{-\frac{t}{3}} - 4\cos\left(\frac{4t}{3}\right) + sen\left(\frac{4t}{3}\right)}{17}
$$

(e) encontrar a entrada $u(t)$ para que $y(t) = \alpha \, \forall t \geq 0$;
(f) encontrar a entrada $u(t)$ para que $y(t) = 0 \, \forall t > 0$.

2.) Um SLIT relaxado é descrito por $\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_1\dot{u}(t) + u(t)$. **G2:** $a_1 = 30, a_0 = 3$
(a) Para $b_1 = 0$ calcular a resposta ao degrau unitário e esboçar o seu gráfico;

$$\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t) \quad , \quad y(0^-) = 0$$

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{1(t)\right\}$$

$$s^2Y(s) + 30sY(s) + 3Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s\cdot(s^2+30s+3)} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s+15-\sqrt{222})\cdot(s+15+\sqrt{222})} =$$

$$= \frac{1}{s}\cdot\left(\frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s+15-\sqrt{222}} - \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s+15+\sqrt{222}}\right)$$

$$y(t) = \int \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{222}}{444}\cdot\left[\frac{1}{s+15-\sqrt{222}} - \frac{1}{s+15+\sqrt{222}}\right]\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{222}}{444}\cdot\int(e^{(-15+\sqrt{222})t} - e^{(-15-\sqrt{222})t})dt = \frac{\sqrt{222}}{444}\cdot\left\{\frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{-15+\sqrt{222}} + \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{15+\sqrt{222}}\right\}$$

(b) para $b_1 = 0$ calcular a resposta à rampa unitária e esboçar o seu gráfico;

$$\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t) \quad , \quad y(0^-) = 0$$

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{t1(t)\right\}$$

$$s^2Y(s) + 30sY(s) + 3Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2\cdot(s^2+30s+3)} = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{(s+15-\sqrt{222})\cdot(s+15+\sqrt{222})} =$$

$$= \frac{1}{s^2}\cdot\left(\frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s+15-\sqrt{222}} - \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s+15+\sqrt{222}}\right)$$

$$y(t) = \int\int \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{222}}{444}\cdot\left[\frac{1}{s+15-\sqrt{222}} - \frac{1}{s+15+\sqrt{222}}\right]\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{222}}{444}\cdot\int\left\{\frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{-15+\sqrt{222}} + \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{15+\sqrt{222}}\right\}dt = \frac{\sqrt{222}}{444}\cdot\left\{\frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{(-15+\sqrt{222})^2} + \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{(15+\sqrt{222})^2}\right\}$$

(c) para $b_1 = 1$ calcular a resposta ao degrau unitário e esboçar o seu gráfico;

$$\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t) = \dot{u}(t) + u(t) \quad , \quad y(0^-) = 0$$

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{1(t) + t1(t)\right\}$$

$$s^2Y(s) + 30sY(s) + 3Y(s) = 1 + \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+30s+3} + \frac{1}{s\cdot(s^2+30s+3)} = \frac{1}{(s+15-\sqrt{222})\cdot(s+15+\sqrt{222})} + \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s+15-\sqrt{222})\cdot(s+15+\sqrt{222})} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s+15-\sqrt{222}} - \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s+15+\sqrt{222}} + \frac{1}{s}\cdot\left(\frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s+15-\sqrt{222}} - \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s+15+\sqrt{222}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{222}}{444}\cdot\left\{e^{(-15+\sqrt{222})t} - e^{(-15+\sqrt{222})t} + \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{-15+\sqrt{222}} + \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{15+\sqrt{222}}\right\}$$

(d) para $b_1 = -1$ calcular a resposta ao degrau unitário e esboçar o seu gráfico;

$$\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t) = -\dot{u}(t) + u(t) \quad , \quad y(0^-) = 0$$

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + 3y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{-1(t) + t1(t)\right\}$$

$$s^2Y(s) + 30sY(s) + 3Y(s) = -1 + \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = -\frac{1}{s^2+30s+3} + \frac{1}{s\cdot(s^2+30s+3)} = \frac{1}{(s+15-\sqrt{222})\cdot(s+15+\sqrt{222})} + \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s+15-\sqrt{222})\cdot(s+15+\sqrt{222})} =$$

$$= -\frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s+15-\sqrt{222}} + \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s+15+\sqrt{222}} + \frac{1}{s}\cdot\left(\frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s+15-\sqrt{222}} - \frac{\frac{\sqrt{222}}{444}}{s+15+\sqrt{222}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{222}}{444}\cdot\left\{-e^{(-15+\sqrt{222})t} + e^{(-15+\sqrt{222})t} + \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{-15+\sqrt{222}} + \frac{e^{(-15+\sqrt{222})t}}{15+\sqrt{222}}\right\}$$

(e) traçar com precisão um único gráfico com as 3 respostas ao degrau;
(f) calcular a resposta a seno $u(t) = \text{sen}(\omega t)$ para $b_1 = 0, \omega = 4a_0$ e esboçar o seu gráfico.

3.) Um SLIT relaxado é descrito por uma função de transferência com numerador e denominador dados por $n(s) = K$ e $d(s) = (s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)$. **G2:** $p_1 = 1, p_2 = 3, p_3 = 4$
(a) Esboçar a resposta ao degrau unitário (escolha o valor de K);
(b) esboçar a resposta ao degrau unitário quando os p_i são divididos por 5;
(c) esboçar a resposta ao degrau unitário quando os p_i são multiplicados por 5;
(d) comentar os resultados acima;
(e) esboçar a resposta ao degrau unitário quando dois p_i são multiplicados por 5 e o outro é dividido por 5;
(f) comentar os resultados acima.