

# Sinais e Sistemas - Trabalho 5 - Avaliação 9

## **Grupo 2**

Leonardo Soares da Costa Tanaka

Matheus Henrique Sant Anna Cardoso

Theo Rudra Macedo e Silva

1.) Um SLIT relaxado é descrito pela equação a diferenças  $y_{k+2} + \alpha y_k = \beta u_{k+1} + \gamma u_k$ .

Os dados  $(\alpha, \beta, \gamma)$  são: **G2:**  $(-1/4, 1, 2)$ ;

Utilizando as constantes do grupo, a equação torna-se:  $y_{k+2} - \frac{1}{4}y_k = u_{k+1} + 2u_k$

(a) Encontrar a função de transferência  $G(z)$ ;

$$y_{k+2} - \frac{1}{4}y_k = u_{k+1} + 2u_k \Rightarrow z^2 Y(z) - \frac{1}{4}Y(z) = zU(z) + 2U(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}}U(z)$$

$$G(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

(b) encontrar polos e zeros e verificar a estabilidade;

$$Polos \Rightarrow x^2 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2}; p_2 = -\frac{1}{2}$$

$$Zeros \Rightarrow x + 2 \Rightarrow z_1 = -2$$

O SLIT é estável nesse caso, porque seus pólos  $p_1$  e  $p_2$  estão no círculo unitário.

(c) encontrar as equações dinâmicas;

$$\begin{aligned} x_1[k] &= y[k] & \Rightarrow & & x_1[k+1] &= y[k+1] = x_2[k] - p_1 u[k] \\ x_2[k] &= y[k+1] + p_1 u[k] & \Rightarrow & & x_2[k+1] &= y[k+2] + p_1 u[k] = \frac{1}{4}x_1[k] + (p_1 + 1)u[k+1] + u[k] \end{aligned}$$

$$p_1 = -1$$

$$\begin{aligned} x_1[k] &= y[k] & \Rightarrow & & x_1[k+1] &= x_2[k] + u[k] \\ x_2[k] &= y[k+1] - u[k] & \Rightarrow & & x_2[k+1] &= \frac{1}{4}x_1[k] + u[k] \end{aligned}$$

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u[k]; \quad y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[k]$$

- (d) calcular, iterativamente, os 10 primeiros valores  $y_k$  para entrada em degrau unitário;
- (e) usando transformada em  $Z$ , encontrar uma expressão analítica para a  $y_k$ ;
- (f) comparar os resultados iterativo e analítico.

**G2: 2.)** Eis um “Problema de Algibeira”: um vendedor de queijos efetua apenas transações do tipo *vende metade de seu estoque mais meia peça*. Pedese o número inicial de peças,  $x_0$  se após a 6ª venda seus queijos acabam. Interpretar a filosofia de vendas por meio de uma equação a diferenças e calcular  $x_k$ , o saldo de estoque após a  $k$ -ésima venda. Dar a resposta ao problema de algibeira.

Antes de mais nada, podemos pensar um pouco antes de tomarmos quaisquer decisões. É claro ser impossível realizar a venda de meia peça, portanto, é provável que seja uma correção, justamente para que não se venda meia peça. Veja o processo:

**Processo: (Venda)**

Após a venda  $k$ :  $c$  peças.

Logo antes:  $c + 1/2$  peças.

Antes da venda  $k$ :  $2 \cdot (c + 1/2) = \boxed{2c + 1}$  peças. Ou, após a venda  $k - 1$ .

Disso, podemos ir dando passos para trás até chegarmos ao momento anterior à primeira venda. Considerando, cada processo, uma venda e que antes de cada venda, teremos  $2c + 1$  peças, sendo  $c$  o número de peças após essa venda:

Após a venda 6: 0

Após a venda 5:  $2 \cdot 0 + 1 = 1$

Após a venda 4:  $2 \cdot 1 + 1 = 3$

Após a venda 3:  $2 \cdot 3 + 1 = 7$

Após a venda 2:  $2 \cdot 7 + 1 = 15$

Após a venda 1:  $2 \cdot 15 + 1 = 31$

Finalmente, antes da primeira venda, teremos:  $2 \cdot 31 + 1 = 63$

Portanto, com passos simples, podemos resolver este problema.

Ainda assim, é possível resolvê-lo por métodos analíticos, com uma equação a diferenças, modelando da seguinte maneira: a quantidade de peças após a venda  $k$  ( $x_k$ ) é a metade da anterior subtraída de  $1/2$ , da forma abaixo:

$$x_k = \frac{1}{2}x_{k-1} - \frac{1}{2}$$

Podemos realizar a transformada Z desta equação, obtendo:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\{x_k\} &= \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{x_{k-1}\} - \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{1[k]\} \\
 X(z) &= \frac{1}{2}(z^{-1}X(z) + x[-1]) - \frac{z}{2z-2} \\
 X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1]}{2} - \frac{z}{2z-2} \\
 X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1](z-1)}{2z-2} - \frac{z}{2z-2} \\
 X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1]z - x[-1] - z}{2z-2} \\
 \frac{X(z)}{z} &= \frac{x[-1]z - x[-1] - z}{(z-1)(2z-1)} \\
 \frac{X(z)}{z} &= \frac{x[-1]+1}{2z-1} - \frac{1}{z-1} \\
 X(z) &= \frac{x[-1]+1}{2} \left( \frac{z}{z-1/2} \right) - \frac{1}{z-1}
 \end{aligned}$$

A partir daqui, podemos fazer a transformada inversa:

$$x[k] = \frac{x[-1]+1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^k - 1[k]$$

Podemos descobrir  $x[-1]$  dado que sabemos  $x[6]$ :

$$\begin{aligned}
 x[6] = 0 &= \frac{x[-1]+1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^6 - 1[6] \\
 0 &= \frac{x[-1]+1}{128} - 1 \\
 128 &= x[-1] + 1
 \end{aligned}$$

$$\boxed{x[-1] = 127}$$

Temos tudo o que precisamos:

$$\begin{aligned}
 x[k] &= \frac{x[-1]+1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^k - 1[k] \\
 x[k] &= 64 \left( \frac{1}{2} \right)^k - 1[k]
 \end{aligned}$$

Aplicando para  $k = 0$ , teremos:

$$x[0] = 64 \cdot 1 - 1$$

$$\boxed{x[0] = 63}$$

Que foi o resultado obtido da primeira forma.

**3.) Para a EDLIT**  $\tau \dot{y}(t) + y(t) = \beta u(t)$  **com**  $y(0^-) = y_0$ :

**G2:**  $\tau = 2, \beta = 2$  e  $y_0 = 1$ .

Utilizando as constantes do grupo, a equação torna-se:  $2\dot{y}(t) + y(t) = 2u(t)$  com  $y(0^-) = 1$

- (a) Calcular a resposta à rampa unitária por Laplace, e traçar com precisão o seu gráfico para  $t \in [0, 5\tau]$ ;
- (b) por Euler I, encontrar a equação que relaciona  $y_k \leftrightarrow y(kT)$  e  $u_k \leftrightarrow u(kT)$ ;
- (c) resolvê-la por transformada  $Z$  para entrada em rampa;
- (d) listar as sequências obtidas para  $T = \tau, T = \tau/2, T = \tau/4$  e  $T = \tau/8$ ;
- (e) plotar os valores de  $y(kT)$  no mesmo gráfico do item (a) e comparar as aproximações numéricas;
- (f) repetir (b), (c), (d) e (e) para Newton.

**4.) Para a EDLIT**  $\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) = \alpha\dot{u}(t) + \beta u(t)$  **com CIs nulas:**

**Os dados**  $(\zeta, \omega_n, \beta, \alpha)$  **são G2:**  $(1/3, 2, 3, -1)$ .

Utilizando os dados do grupo, temos:  $\ddot{y}(t) + \frac{4}{3}\dot{y}(t) = -\dot{u}(t) + 3u(t)$

- (a) para  $u(t) = 1$ , encontre, por Laplace, a solução e plote-a com precisão para  $t \in [0, 8/(\zeta\omega_n)]$ ;
- (b) por meio de variáveis  $x_1$  e  $x_2$  apropriadas, expressá-la como  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$  e  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)$ ;
- (c) por Euler I, relacione  $\mathbf{x}_k \leftrightarrow \mathbf{x}(kT)$ ,  $y_k \leftrightarrow y(kT)$  e  $u_k \leftrightarrow u(kT)$  (o procedimento para vetores é o mesmo e leva a  $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_d\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_d\mathbf{u}_k$  e  $\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_d\mathbf{x}_k + \mathbf{D}_d\mathbf{u}_k$ ) e obtenha  $y_k$ ;
- (d) plota as sequências obtidas para  $T = T_0 = 1/(\zeta\omega_n)$ ,  $T = T_0/2$ ,  $T = T_0/4$  e  $T = T_0/8$  no gráfico de (a) e compare as aproximações numéricas.

**5.) Seja EDVT**  $\dot{y}(t) + \alpha(t)y(t) = u(t)$  **com**  $u(t) = 1(t)$ . **Quando um sinal contínuo**  $p$  **tende a uma constante para valores altos de**  $t$  ( $\lim p(t) = p_r = \text{cte. para } t \rightarrow \infty$ ) **esta é chamada de valor de regime do sinal.**

- (a) sem resolver a equação calcular o valor de regime  $y_r$ , supondo que  $y(t)$  tende a ele;
- (b) por Euler I, relacione as sequências  $u_k \leftrightarrow u(kT)$  e  $y_k \leftrightarrow y(kT)$ ;
- (c) resolva, manualmente ou por meio de um script em alguma linguagem, para  $T = 1, T = 1/2, T = 1/4$  e  $T = 1/10$ ; a solução  $y(t)$  deve ser aproximada para  $t \in [0, 10]$ ;
- (d) repetir (b) e (c) para Euler II.

Os dados  $a(t)$  e  $y(0^-)$  são: **G2:**  $(t^2 - 1)/(t^2 + 1)$  e  $-1$ .