Sinais e Sistemas - Trabalho 7 - Avaliação 11

Grupo 2

Leonardo Soares da Costa Tanaka

Matheus Henrique Sant Anna Cardoso

Theo Rudra Macedo e Silva

Vinícius Quintanilha Porto Gomes

Rio de Janeiro
2022

1.) Para o sinal abaixo:

G2: $x = [30 \;\; 20 \;\; 12 \;\; 6 \;\; 2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 6 \;\; 12 \;\; 20 \;\; 30]$

(a) compute a primeira tendência e a primeira flutuação, por Haar;

Aqui, fazemos:

$$\begin{bmatrix} 30 & 20 & 12 & 6 & 2 & 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & 30 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Obtendo:

$$\sqrt{2} \cdot \begin{bmatrix} 25 & 9 & 1 & 1 & 9 & 25 & | & 5 & 3 & 1 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Sendo o sub de tendência: $\sqrt{2} \cdot \begin{bmatrix} 25 & 9 & 1 & 1 & 9 & 25 \end{bmatrix}$

Sendo o sub de flutuação: $\sqrt{2} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$

(b) determine a porcentagem de compactação, ou seja, a energia do sub de tendência dividida pela energia total;

Energia do sinal x: 2968.

Energia do sub de Tendência: 2828

A porcentagem de compactação C será dada por:

$$C = \frac{2828}{2968}$$

$$\boxed{C = 95.28\%}$$

(c) compute uma aproximação $\tilde{x}$ anulando as primeiras flutuações ($d_i^1 = 0$);

Anulando as primeiras flutuações, teremos:

$$\sqrt{2} \cdot \begin{bmatrix} 25 & 9 & 1 & 1 & 9 & 25 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) ache a inversa do sinal resultante;

$$a_e^1 = \begin{bmatrix} 25 & 25 & 9 & 9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & 9 & 25 & 25 \end{bmatrix}$$
$$d_e^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathcal{H}^{-1}(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 25 & 25 & 9 & 9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & 9 & 25 & 25 \end{bmatrix}$$

(e) avalie a qualidade da aproximação, pela porcentagem de energia presente.

Energia total de x: 2968.

Energia da transformada inversa: 2832

A porcentagem de energia presente é:

$$\frac{2832}{2968} = \boxed{95.41\%}$$

(f) é possível, desprezando elementos de pequenos módulos, conseguir uma aproximação que retém 99.99% da energia?

Vamos pensar em que energia devemos obter (E_t) para tal porcentagem:

$$E_t = 2968 \cdot 0.9999$$
$$E_t = 2967.70$$

Sendo o sinal abaixo o Haar de nível 1

$$\sqrt{2} \cdot \begin{bmatrix} 25 & 9 & 1 & 1 & 9 & 25 & | & 5 & 3 & 1 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Se truncarmos apenas uma entrada do sinal (a menor delas), 1 no caso, reduziríamos a energia em duas unidades.

$$E_{\tilde{x}} = 2968 - 2 = 2966$$

Ou seja, é impossível conseguir uma aproximação dessas desprezando elementos menores.

(g) reperir (f) para o nível 2 de Haar.

Já temos o sinal Haar de nível 1

$$\sqrt{2} \cdot \begin{bmatrix} 25 & 9 & 1 & 1 & 9 & 25 & | & 5 & 3 & 1 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Então

$$\mathcal{H}^2(x) = \begin{bmatrix} \mathcal{H}\left(a^1\right) & | & d^1 \end{bmatrix}$$
$$\mathcal{H}\left(a^1\right) = \begin{bmatrix} 34 & 2 & 34 & | & 16 & 0 & -16 \end{bmatrix}$$
$$\mathcal{H}^2(x) = \begin{bmatrix} 34 & 2 & 34 & | & 16 & 0 & -16 & | & 5\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & -5\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Novamente, a perda do menor sinal, em módulo, traria algo do tipo:

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} 34 & 2 & 34 & | & 16 & 0 & -16 & | & 5\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & -5\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Que removeria duas unidades da energia, tornando impossível uma aproximação que retém 99.99% da energia.

2.) Os pulsos a seguir são pares e nulos para $|t| > \Delta$:

$p_\Delta(t)$ é o plano com $p_\Delta(t) = \Delta$ para $|t| \leq \Delta$,

r_Δ é triangular com $r_\Delta(-\Delta) = r_\Delta(\Delta) = 0$ e $r_\Delta(0) = \pi\Delta/2$ e

c_Δ é uma semicircunferência com $c_\Delta(-\Delta) = c_\Delta(\Delta) = 0$ e $c_\Delta(0) = \Delta$.

(a) Esboçar os gráficos para os três pulsos e para $x = p_4(t) + r_2(t-2) - c_2(t+2)$;

Esboçando os gráficos, teremos:

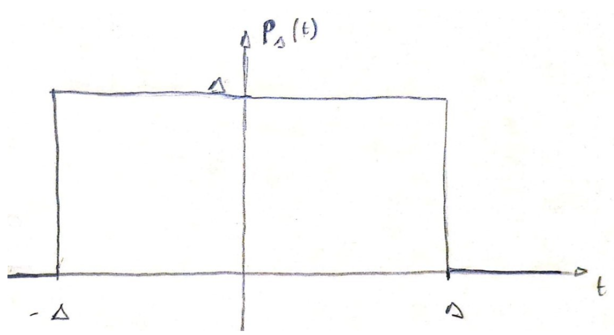

Figura 1: $p_\Delta(t)$

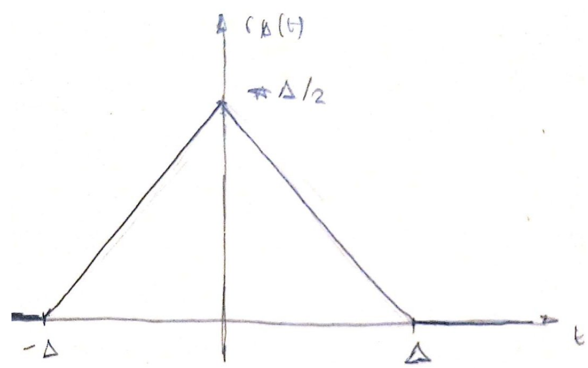

Figura 2: $r_\Delta(t)$

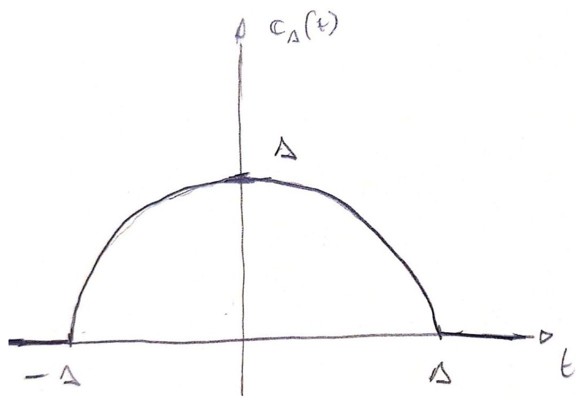

Figura 3: $c_\Delta(t)$

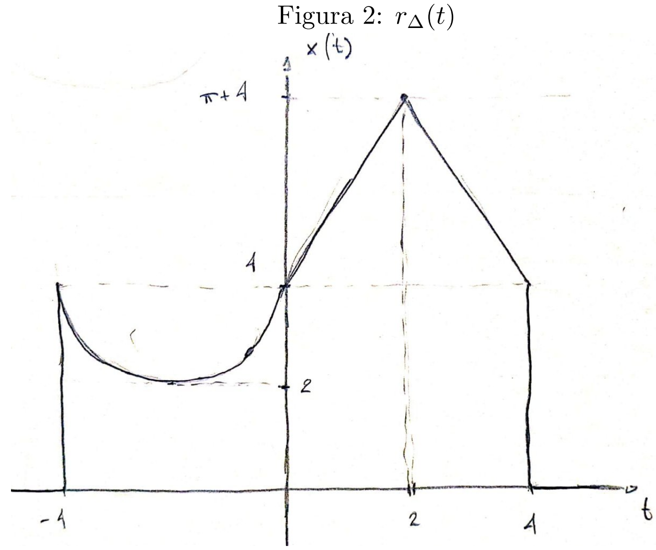

Figura 4: $x(t)$

(b) traçar o espectro de magnitude para $x(t)$, via FFT, determinando T_0 e f_a por tentativa e erros;

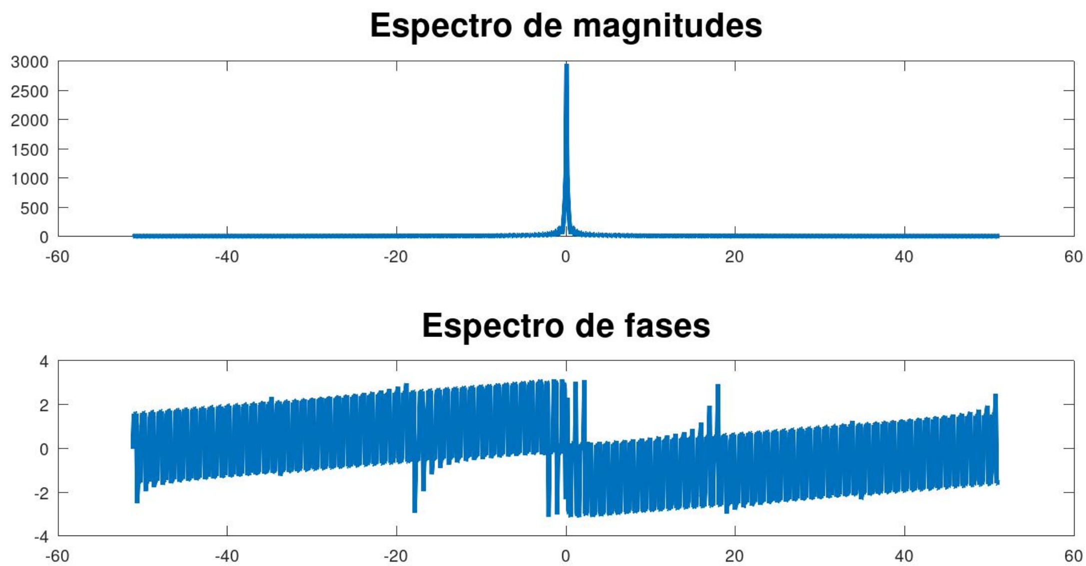

Figura 5: Os espectros

(c) com a mesma janela, e o número de amostras aproximado para uma potência de 2, obter Haar 1;

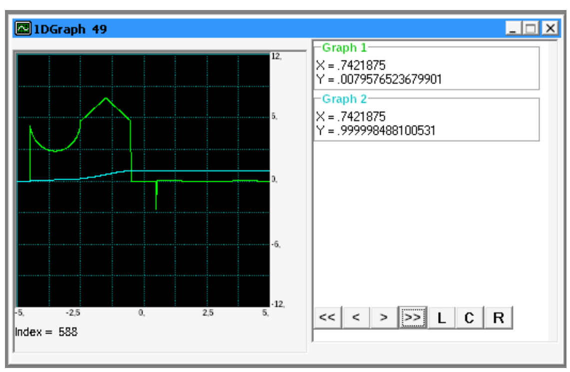

Figura 6: Em verde, a transformada. Em azul, a energia.

O FAWAV, programa utilizado no caso, já utiliza uma amostragem de 1024 por padrão. A energia foi utilizada para traçar os outros gráficos.

(d) obter a Haar inversa do sinal truncado para reter 90.00% da energia e plotar no mesmo gráfico;

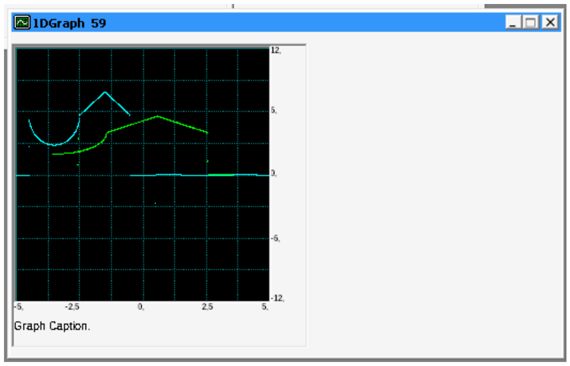

Figura 7: Em azul, a transformada. Em verde, o sinal truncado

(e) idem (d) para reter 99.99% da energia e plotar no mesmo gráfico.

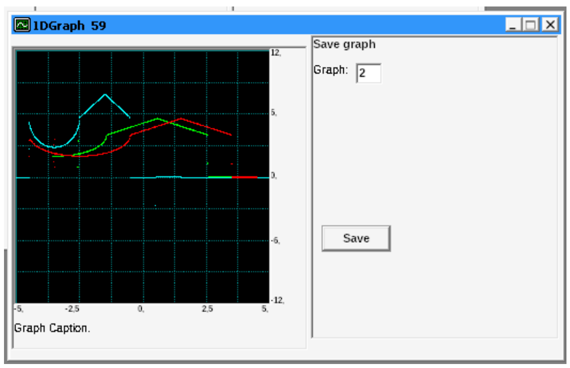

Figura 8: Em azul, a transformada. Em verde, o sinal truncado para 90.00%. Em vermelho, o sinal truncado para 99.99%

3.) Para o sinal a seguir:

$$x(t) = 8\,\mathrm{sinc}(4t) - 2\,\mathrm{sinc}(2t)$$

(a) plote o gráfico;

Abaixo, o código utilizado no octave:

```
%Questão 2.a)
% Intervalo
dt=0.025;
% Dados basicos
t=-5:dt:5-dt;
x=8*sinc(4*t)-2*sinc(2*t);
plot (t, x);
xlabel("t", "fontsize", 15);
ylabel("x(t)", "fontsize", 15);
```

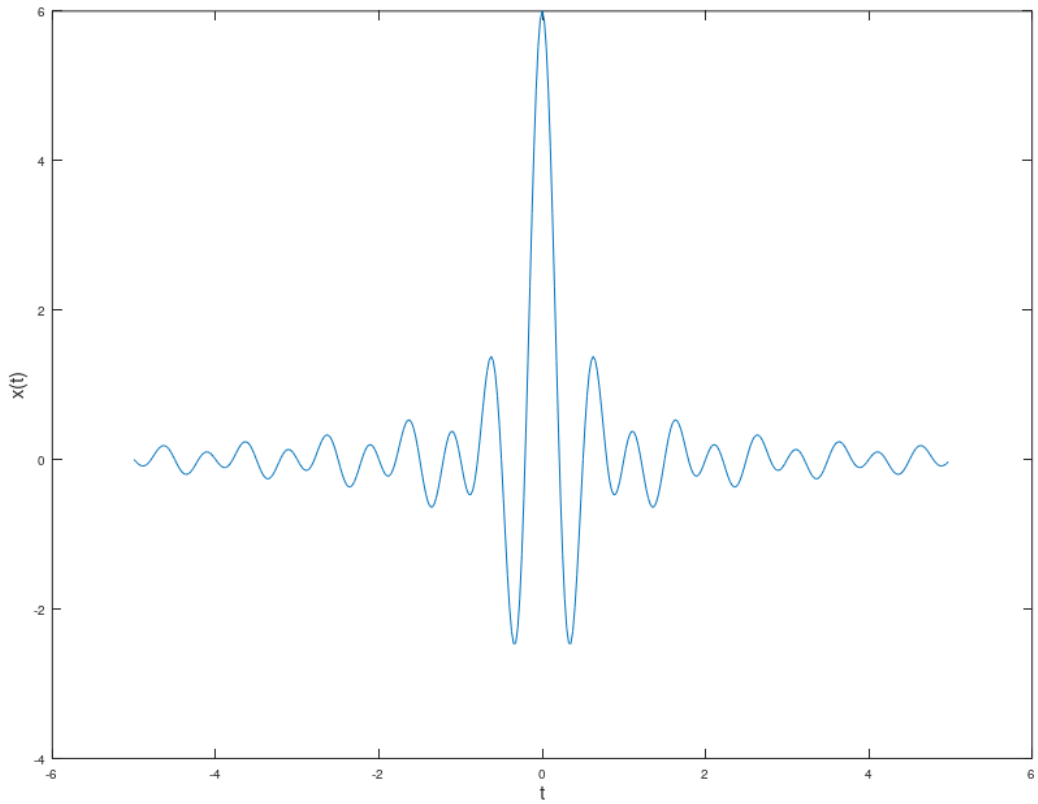

Figura 9: Plotagem do gráfico - 3)

(b) encontre, justificando, a largura T_0 de uma janela de observação centrada na origem;

A largura escolhida foi de $T_0 = 10$, uma vez que, valores além desse intervalo não contribuem de forma significativa para a energia total do sinal.

(c) idem período de amostragem Δt seguro;

O período de amostragem seguro escolhido foi de $\Delta t = 0.025$ pois $f_a = \frac{1}{\Delta t}$, e a frequência de amostragem $\frac{f_a}{2} \geq \frac{w}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$. $f_a \geq 4$ então $\Delta t \leq 0.25$, satisfazendo o valor escolhido.

(d) encontre o número de pontos $N = 2^p$;

Sabemos que $\Delta t = \frac{T_0}{N-1}$. Então:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{10}{N-1} \\ 0.025 &= \frac{10}{N-1} \\ N-1 &= \frac{10}{0.025} \\ N &= 401\end{aligned}$$

(e) que limiar deve ser usado para reter 99.99% da energia?;

Obtivemos haar 1, pelo FAWAV, obtendo o gráfico em verde, abaixo. Em seguida, truncamos para ter, aproxximadamente 99.99% da energia.

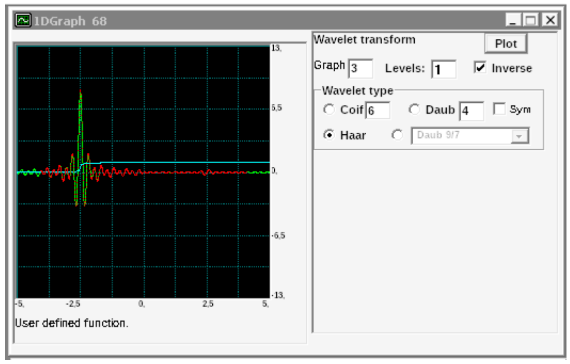

Figura 10:

Fazendo a transformada inversa, obtivemos: O limiar, do gráfico ficou em 4.063.

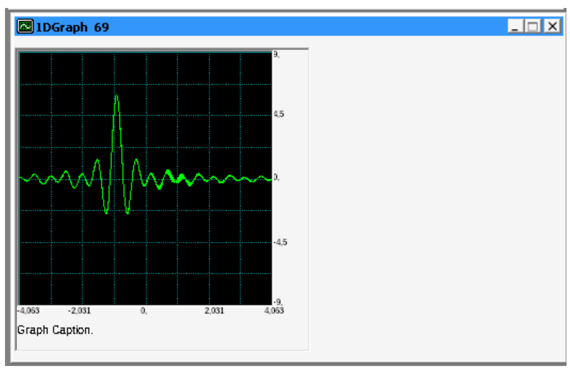

Figura 11:

(f) que taxa de compressão isto produz? (Fazer para os níveis 1, 2, 3 e 10 de Haar, uma Daub qualquer de sua escolha e uma Coif qualquer de sua escolha);

Para Haar 1:

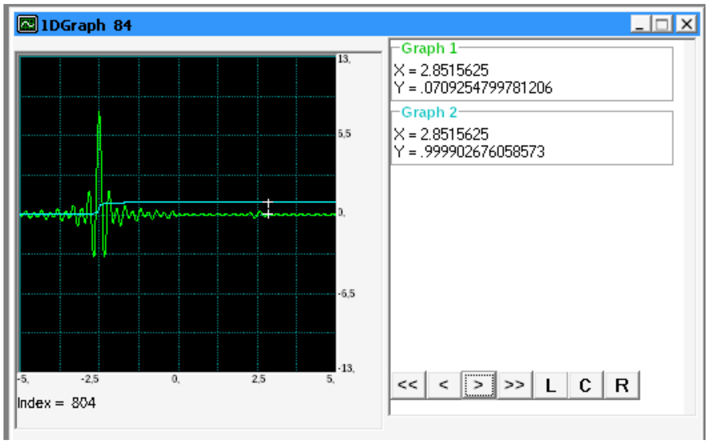

Figura 12:

Podemos retirar as amostras a partir de 804, restando (1024 - 804 = 220) amostras.

A taxa de compressão foi de 1024 : 220 ou 256 : 55.

Para Haar 2:

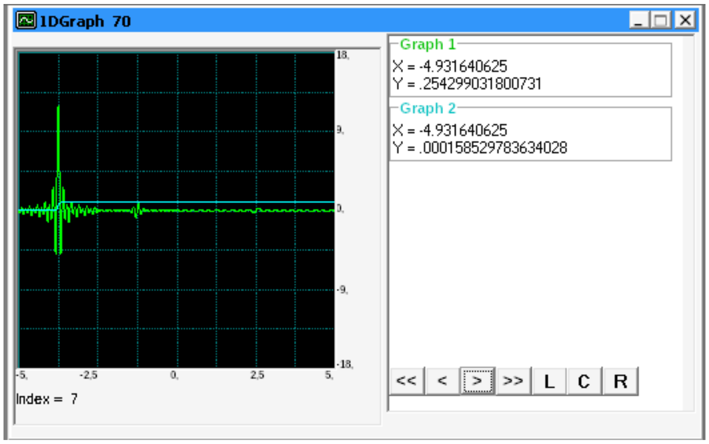

Figura 13:

Plotando a energia, de 1024 do todo, podemos retirar 7 intervalos do início e no fim, retirando ao todo, 14 intervalos.

A taxa de compressão foi de 512 : 7

Para Haar 3:

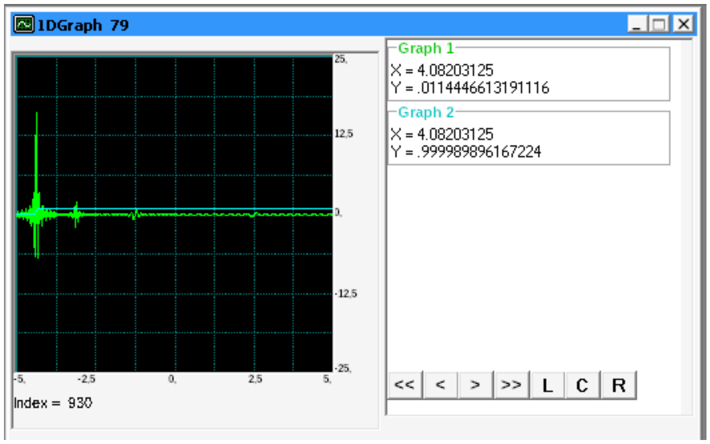

Figura 14:

Plotando a energia, de 1024 do todo, podemos retirar 93 amostras.

A taxa de compressão foi 1024 : 93.

Para Haar 10:

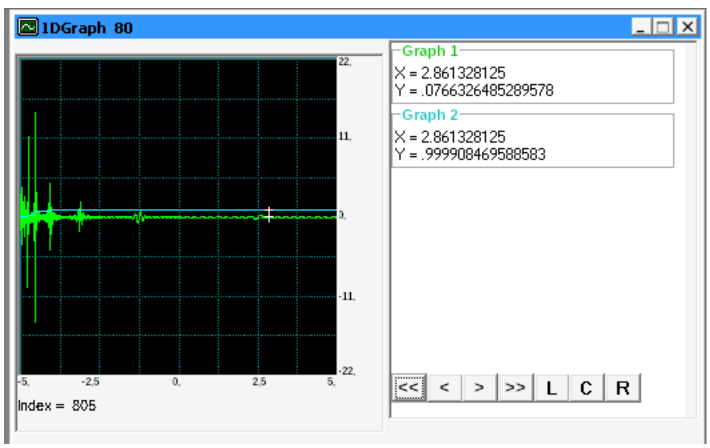

Figura 15:

Plotando a energia, de 1024 do todo, podemos retirar (1024 - 805 = 219) amostras.

A taxa de compressão foi 1024 : 219.

Para Doub 4 Nível 1:

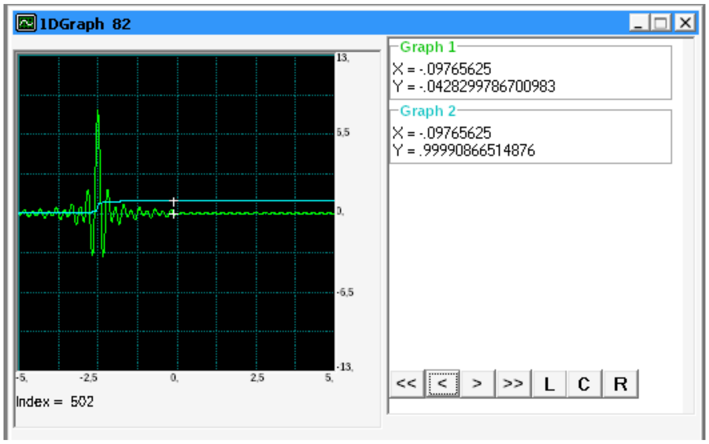

Figura 16:

Plotando a energia, de 1024 do todo, podemos retirar (1024 - 502 = 522) amostras.

A taxa de compressão foi 1024 : 522 ou 512 : 261.

Para Coif 6 Nível 1:

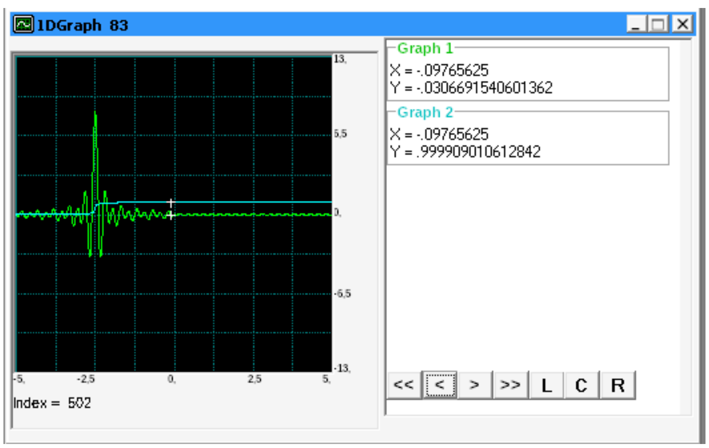

Figura 17:

Plotando a energia, de 1024 do todo, podemos retirar (1024 - 502 = 522) amostras.

A taxa de compressão foi 1024 : 522 ou 512 : 261. A mesma que a Doub.

(g) comparar os resultados.

Em todos os casos que aparecem em ordem, a taxa de compressão sempre aumentava, mostrando como maiores níveis de Haar aumentam a eficiência, e que Doub e Coif são mais eficientes. Aqui, em Doub 4 e Coif 6, tivemos a mesma taxa de compressão.