

# Sinais e Sistemas - Trabalho 4 - Avaliação 8

## **Grupo 2**

Leonardo Soares da Costa Tanaka

Matheus Henrique Sant Anna Cardoso

Theo Rudra Macedo e Silva

1.) Abaixo, use o número do grupo como o valor do parâmetro  $p$ . Entre no Octave com  $B = [0 \ 0 \ 1]$ ,  $C = [1 \ 0 \ 0]$ ,  $A = [0 \ 1 \ 0 \ ; \ 0 \ 0 \ 1 \ ; \ (-2p) \ (-2p + 2) \ (-p + 2)]$ , e serão criadas as matrizes  $A, B$  e  $C$  de uma equação dinâmica. Com auxílio do help, pesquise e use os comandos `eig` para calcular os autovalores e `ss` para criar um sistema de espaço de estados.

Matrizes relativas ao Grupo 2 ( $p = 2$ ):

$B = [0 \ ; \ 0 \ ; \ 1]$ ,  $C = [1 \ 0 \ 0]$ ,  $A = [0 \ 1 \ 0 \ ; \ 0 \ 0 \ 1 \ ; \ -4 \ -2 \ 0]$

(a) Encontre o polinômio característico  $\Delta(s)$  associado;

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = \det \left( \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 4 & 2 & s \end{vmatrix} = s^3 + 2s + 4$$

(b) encontre a função de transferência  $T(s)$  associada, manualmente e pelo Octave (descubra como);

$$\begin{aligned} T(s) &= C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 4 & 2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{s^2+2}{-s^3-2s-4} & -\frac{s}{-s^3-2s-4} & -\frac{1}{-s^3-2s-4} \\ \frac{4}{-s^3-2s-4} & -\frac{s^2}{-s^3-2s-4} & -\frac{s}{-s^3-2s-4} \\ \frac{4s}{-s^3-2s-4} & \frac{2s+4}{-s^3-2s-4} & -\frac{s^2}{-s^3-2s-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{s^2+2}{-s^3-2s-4} & -\frac{s}{-s^3-2s-4} & -\frac{1}{-s^3-2s-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^3 + 2s + 4} \end{aligned}$$

Bastou, agora, encontrarmos a função de transferência utilizando a ferramenta Octave. Para tal, foi feito o programa a seguir:

```
%% Dados Iniciais
A = [0 1 0 ; 0 0 1 ; -4 -2 0];
B = [0 ; 0 ; 1];
C = [1 0 0];
%% Carregando o pacote de controle
pkg load control;
%% Sistema de espaço de estados
sys = ss(A, B, C);
%% Função de transferência
SYS = tf(sys)
```

Tendo por saída, a mensagem com a função de transferência:

$$y_1 = \frac{1}{s^3 + 2.22 \times 10^{-16} s^2 + 2s + 4}$$

Perceba que existe um coeficiente maior que zero para o termo ao quadrado. Porém, este é desprezível. Ficamos, pelo Octave, com a função de transferência dada por:

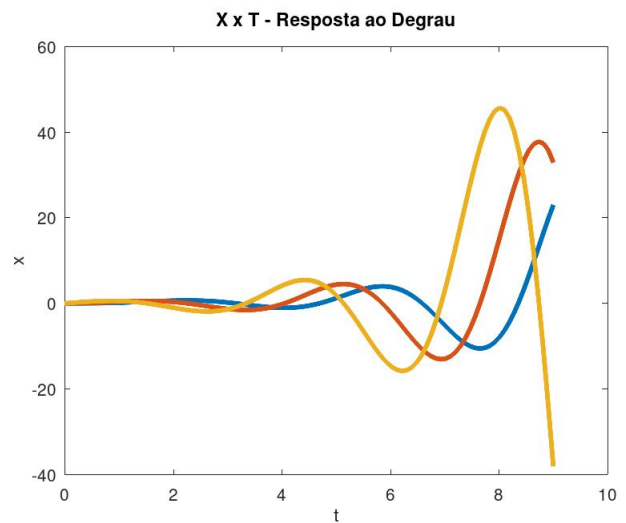
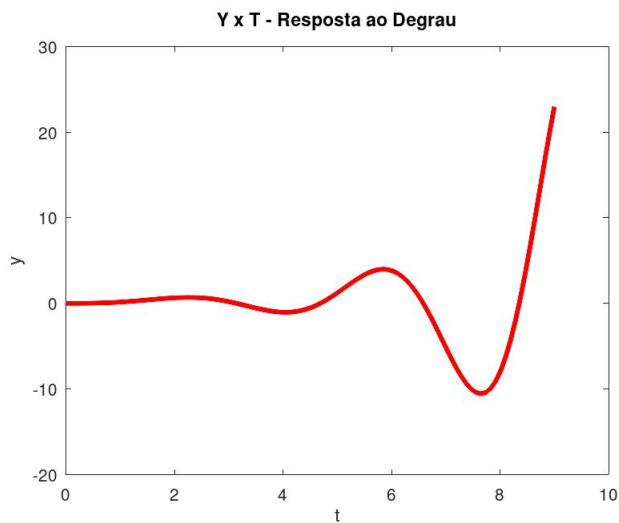
$$y_1 = \frac{1}{s^3 + 2.22 \times 10^{-16} s^2 + 2s + 4} \approx \frac{1}{s^3 + 2s + 4}$$

**(c) encontre a resposta ao degrau (comando step) para  $y$  e  $x$ ;**

Aqui, precisamos utilizar, novamente, o Octave, para encontrarmos a resposta ao degrau, utilizando o comando `step`.

```
%% Resposta ao Degrau
[Y_degrau, T_degrau, X_degrau] = step(sp);
%% Plotagem de Y
plot(T_degrau, Y_degrau, "r", "linewidth", 3)
title("Y x T - Resposta ao Degrau")
xlabel("t"), ylabel("y")

%% Plotagem de X
plot(T_degrau, X_degrau, "linewidth", 3)
title("X x T - Resposta ao Degrau")
xlabel("t"), ylabel("x")
```



**(d) encontre manualmente os autovetores;**

Vamos encontrar as raízes de  $\Delta(s)$  que são os autovalores de  $A$ . Para isso, podemos utilizar a função `eig` no Octave para encontrá-los. Dessa forma, encontramos os seguintes valores:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -1.1795; \\ \lambda_2 &= 0.5898 + j1.7445; \\ \lambda_3 &= 0.5898 - j1.7445\end{aligned}$$

Chamando de  $\lambda$  quaisquer uma das três raízes, teremos que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} \beta &= \lambda\alpha \\ \gamma &= \lambda\beta \\ -4\alpha - 2\beta &= \lambda\gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha &= \alpha \\ \beta &= \lambda\alpha \\ \gamma &= \lambda^2\alpha \end{cases}$$

Ficamos, com um padrão para os autovetores:

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$$

Temos, finalmente, como autovetores, os seguintes vetores:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.1795 \\ 1.39122 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5898 + j1.7445 \\ -2.6954 + j2.0578 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5898 - j1.7445 \\ -2.6954 - j2.0578 \end{bmatrix}$$

**(e) escreva a REN seguindo o exemplo completo na nova versão dos slides094pwd.pdf a partir do slide 83;**

Sendo  $v_1, v_2$  e  $v_3$  os autovetores e  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  os autovalores, podemos fazer uma pequena mudança para facilitar os cálculos, fazendo  $\lambda_2 = \sigma + j\omega$  e  $\lambda_3 = \sigma - j\omega$ .

$$\begin{aligned}x(t) &= \alpha v_1 e^{\lambda_1 t} + \beta v_2 e^{(\sigma + j\omega)t} + \gamma v_3 e^{(\sigma - j\omega)t} \\ &= \alpha v_1 e^{\lambda_1 t} + \beta v_2 e^{\sigma t} e^{j\omega t} + \gamma v_3 e^{\sigma t} e^{-j\omega t} \\ &= \alpha v_1 e^{\lambda_1 t} + [\beta v_2 e^{j\omega t} + \gamma v_3 e^{-j\omega t}] e^{\sigma t} \\ &= \alpha v_1 e^{\lambda_1 t} + [(\beta v_2 + \gamma v_3) \cos(\omega t) + j(\beta v_2 - \gamma v_3) \sin(\omega t)] e^{\sigma t}\end{aligned}$$

Sabemos que  $x(t)$  é real, então  $(\beta v_2 + \gamma v_3)$  e  $j(\beta v_2 - \gamma v_3)$  são reais.

$$\beta v_2 + \gamma v_3 = \begin{bmatrix} \beta + \gamma \\ \sigma(\beta + \omega) + j\omega(\beta - \omega) \\ (\sigma^2 - \omega^2)(\beta + \omega) + j2\sigma\omega(\beta - \omega) \end{bmatrix} \quad j(\beta v_2 - \gamma v_3) = \begin{bmatrix} j(\beta - \gamma) \\ j\sigma(\beta - \omega) - \omega(\beta + \omega) \\ j(\sigma^2 - \omega^2)(\beta - \omega) - 2\sigma\omega(\beta + \omega) \end{bmatrix}$$

Fazendo  $\beta + \gamma = \delta \in \mathbb{R}$  e  $j(\beta - \gamma) = \epsilon \in \mathbb{R}$ , teremos:

$$\begin{aligned} \beta v_2 + \gamma v_3 &= \begin{bmatrix} \delta \\ \sigma\delta + \omega\epsilon \\ (\sigma^2 - \omega^2)\delta + 2\sigma\omega\epsilon \end{bmatrix} & j(\beta v_2 - \gamma v_3) &= \begin{bmatrix} \epsilon \\ \sigma\epsilon - \omega\delta \\ (\sigma^2 - \omega^2)\epsilon - 2\sigma\omega\delta \end{bmatrix} \\ \beta v_2 + \gamma v_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & \omega \\ (\sigma^2 - \omega^2) & 2\sigma\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \epsilon \end{bmatrix} & j(\beta v_2 - \gamma v_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & \omega \\ (\sigma^2 - \omega^2) & 2\sigma\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ -\delta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Substituindo, teremos:

$$x(t) = \alpha v_1 e^{\lambda_1 t} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & \omega \\ (\sigma^2 - \omega^2) & 2\sigma\omega \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \delta \\ \epsilon \end{bmatrix} \cos(\omega t) + \begin{bmatrix} \epsilon \\ -\delta \end{bmatrix} \sin(\omega t) \right\} e^{\sigma t}$$

finalmente, tendo  $\sigma = 0.5898$  e  $\omega = 1.7445$ .

$$x(t) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1.1795 \\ 1.39122 \end{bmatrix} e^{-1.1795t} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5898 & 1.7445 \\ -2.6954 & 2.0578122 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \delta \\ \epsilon \end{bmatrix} \cos(1.7445t) + \begin{bmatrix} \epsilon \\ -\delta \end{bmatrix} \sin(1.7445t) \right\} e^{0.5898t}$$

(f) usando o comando `initial` encontre a REN ( $y$  e  $x$ ) para  $x_0$  colocado em um ponto da matriz  $V$ ;

De maneira similar ao comando `step`, traremos os outputs  $X$ ,  $Y$  do comando `initial`. Fazendo  $\alpha = 1$  na equação  $x(t)$ .

```
... %% Programa anterior
%% REN
%% x0 como multiplo de V:
lambda1 = eig(A)(1)
x0_1 = [1 ; lambda1 ; lambda1^2]    %% Multiplo de V
[Y_ren_v, T_ren_v, X_ren_v] = initial(sp, x0_1)

%% Plotagem
plot(T_ren_v, Y_ren_v, "r", "linewidth", 3)
```

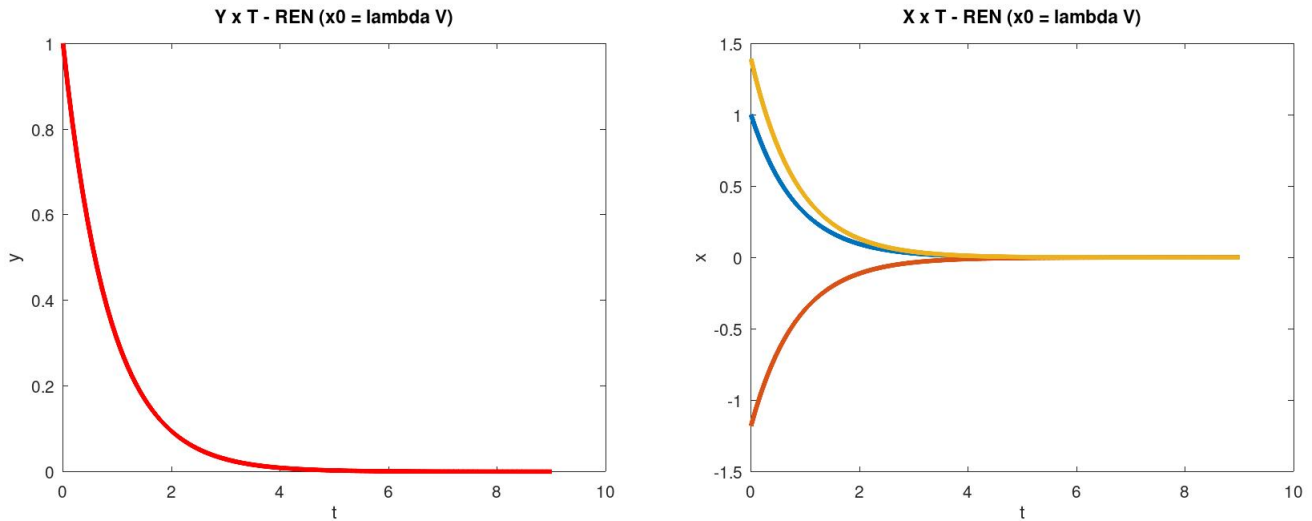
```

title("Y x T - REN (x0 = \lambda V)")
xlabel("t"), ylabel("y")

plot(T_ren_v, X_ren_v, "linewidth", 3)
title("X x T - REN (x0 = \lambda V)")
xlabel("t"), ylabel("x")

```

Temos, por final, os gráficos:



(g) idem para  $x_0$  como uma combinação linear das colunas da matriz  $W$ .

```

%% ... Programa anterior
%% REN
%% x0 como multiplo das colunas de W:
sigma = (eig(A)(2) + eig(A)(3)) / 2      %% Parte real
omega = (eig(A)(2) - eig(A)(3)) / (2 * i) %% Parte imaginaria
x0_2 = [1 ; sigma + omega ; (sigma^2 - omega^2) + 2 * sigma * omega]
[Y_ren_w, T_ren_w, X_ren_w] = initial(sp, x0_2)

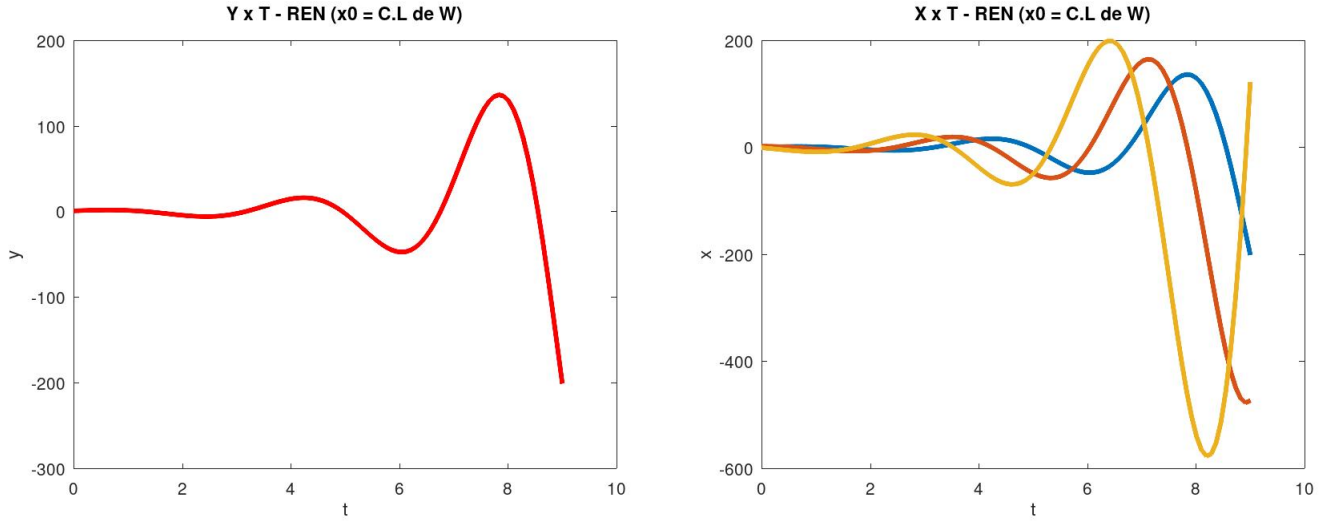
%% Plotagem
%plot(T_ren_w, Y_ren_w, "r", "linewidth", 3)
title("Y x T - REN (x0 = C.L de W)")
xlabel("t"), ylabel("y")

%plot(T_ren_w, X_ren_w, "linewidth", 3)
title("X x T - REN (x0 = C.L de W)")

```

`xlabel("t"), ylabel("x")`

Disso, obtemos:



**2.)** Um oscilador ideal com duas massas, molas e sem atritos e/ou amortecimentos é descrito por  $\ddot{y}_1(t) + 2\omega_1^2 y_1(t) = \omega_1^2 y_2(t)$  e  $\ddot{y}_2(t) + 2\omega_2^2 y_2(t) = \omega_2^2 y_1(t)$ . Use a escolha  $x_1 = y_1; x_2 = \dot{y}_1; x_3 = y_2; x_4 = \dot{y}_2$  para variáveis de estado, ou qualquer outra, e considere  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ .

**G2:**  $\omega_0 = 2$ .

(a) Encontre a matriz de estados  $A$ , seu polinômio característico  $\Delta(s)$ ;

$$\ddot{y}_1(t) + 8y_1(t) = 4y_2(t); \ddot{y}_2(t) + 8y_2(t) = 4y_1(t)$$

$$x_1 = y_1; x_2 = \dot{y}_1; x_3 = y_2; x_4 = \dot{y}_2$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}_1(t) = -8y_1(t) + 4y_2(t) = -8x_1 + 4x_3$$

$$\dot{x}_3(t) = \dot{y}_2(t) = x_4$$

$$\dot{x}_4(t) = \ddot{y}_2(t) = 4y_1(t) - 8y_2(t) = 4x_1 - 8x_3$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = \det \left( \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 8 & s & -4 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -4 & 0 & 8 & s \end{vmatrix} = s^4 + 16s^2 + 48$$

(b) os autovalores (faça  $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \lambda_4$ ; **pares complexos conjugados**) e, manualmente, os autovetores  $v_1, v_2, v_3, v_4$ ; Vamos encontrar as raízes de  $\Delta(s)$  que são os autovalores de  $A$ . Para isso, podemos utilizar a função `eig` no Octave para encontrá-los. Dessa forma, encontramos os seguintes valores:

$$\lambda_1 = 2j; \lambda_2 = -2j; \lambda_3 = 2\sqrt{3}j; \lambda_4 = -2\sqrt{3}j$$

Chamando de  $\lambda$  quaisquer uma das quatro raízes, teremos que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} \beta & = \lambda\alpha \\ -8\alpha + 4\gamma & = \lambda\beta \\ \delta & = \lambda\gamma \\ 4\alpha - 8\gamma & = \lambda\delta \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha & = \alpha \\ \beta & = \alpha\lambda \\ \gamma & = \frac{\alpha(\lambda^2+8)}{4} \\ \delta & = \frac{\alpha(\lambda^3+8)}{4} \end{cases}$$

Ficamos, com um padrão para os autovetores:

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \frac{\lambda^2+8}{4} \\ \frac{\lambda^3+8}{4} \end{bmatrix}$$

Temos, finalmente, como autovetores, os seguintes vetores:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2j \\ 1 \\ 2-2j \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2j \\ 1 \\ 2+2j \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\sqrt{3}j \\ -1 \\ 2-6\sqrt{3}j \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2\sqrt{3}j \\ -1 \\ 2+6\sqrt{3}j \end{bmatrix}$$

(c) escreva a expressão da REN:  $x(t) = \sum_{i=1}^4 r_i v_i e^{\lambda_i t}$  onde os  $r_i$  são parâmetros de cada modo e os  $\lambda_i$  são os autovalores;



$$x(t) = \sum_{i=1}^4 r_i v_i e^{\lambda_i t} = r_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2j \\ 1 \\ 2-2j \end{bmatrix} e^{2jt} + r_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2j \\ 1 \\ 2+2j \end{bmatrix} e^{-2jt} + r_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2\sqrt{3}j \\ -1 \\ 2-6\sqrt{3}j \end{bmatrix} e^{2\sqrt{3}jt} + r_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2\sqrt{3}j \\ -1 \\ 2+6\sqrt{3}j \end{bmatrix} e^{-2\sqrt{3}jt}$$

**(d) usando a identidade de Euler, coloque a expressão acima em uma forma onde apareçam senos e co-seno;**

Sabemos que a identidade de Euler é dada por:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

Ao aplicar na expressão da questão anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} & V_1(\cos(2t) + j\sin(2t)) + \\ & V_2(\cos(-2t) - j\sin(2t)) + \\ & V_3(\cos(2\sqrt{3}t) + j\sin(2\sqrt{3}t)) + \\ & V_4(\cos(-2\sqrt{3}t) - j\sin(2\sqrt{3}t)) = \\ & (V_1 + V_2)\cos(2t) + (V_1 - V_2)j\sin(2t) + (V_3 + V_4)\cos(2\sqrt{3}t) + (V_3 - V_4)j\sin(2\sqrt{3}t) \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} r_1 + r_2 \\ (r_1 - r_2)2j \\ r_1 + r_2 \\ 2(r_1 + r_2) - 2j(r_1 - r_2) \end{bmatrix} \cos(2t) + \begin{bmatrix} r_1 - r_2 \\ (r_1 + r_2)2j \\ r_1 - r_2 \\ 2(r_1 - r_2) - 2j(r_1 + r_2) \end{bmatrix} j\sin(2t) + \\ & \begin{bmatrix} r_3 + r_4 \\ 2\sqrt{3}j(r_3 - r_4) \\ -r_3 - r_4 \\ 2(r_3 + r_4) - 6\sqrt{3}j(r_3 - r_4) \end{bmatrix} \cos(2\sqrt{3}t) + \begin{bmatrix} r_3 - r_4 \\ 2\sqrt{3}j(r_3 + r_4) \\ -r_3 + r_4 \\ 2(r_3 - r_4) - 6\sqrt{3}j(r_3 + r_4) \end{bmatrix} j\sin(2\sqrt{3}t) \end{aligned}$$

**(e) analisando esta última expressão, verifique que os pares  $r_1$  e  $r_2$ ,  $r_3$  e  $r_4$  são complexos conjugados;**

(f) usando  $r_1 = \alpha + j\beta, r_2 = \alpha - j\beta, r_3 = \gamma + j\delta, r_4 = \gamma - j\delta$  encontre a expressão final para  $x(t)$ ;

$$\begin{bmatrix} 2\alpha \\ -4\beta \\ 2\alpha \\ 4(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \cos(2t) - \begin{bmatrix} 2\beta \\ 4\alpha \\ 2\beta \\ 4(\beta - \alpha) \end{bmatrix} \sin(2t) + \begin{bmatrix} 2\gamma \\ -4\sqrt{3}\delta \\ -2\gamma \\ 4(\gamma + 3\sqrt{3}\delta) \end{bmatrix} \cos(2\sqrt{3}t) - \begin{bmatrix} 2\delta \\ 4\sqrt{3}\gamma \\ -2\delta \\ 4(\delta - 3\sqrt{3}\gamma) \end{bmatrix} \sin(2\sqrt{3}t)$$

Reescrevendo, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \\ 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \cos(2t) + \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix} \sin(2t) \right] + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4\sqrt{3} \\ -2 & 0 \\ 4 & 12\sqrt{3} \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \cos(2\sqrt{3}t) + \begin{bmatrix} -\delta \\ \gamma \end{bmatrix} \sin(2\sqrt{3}t) \right]$$

(g) encontre o estado inicial  $x_0$  que corresponde a  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 0, 0, 0)$  e plote  $x(t)$  no Octave (comando `initial`);

(h) idem  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0, 0, 1, 0)$  idem;

(i) idem  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 0, 1, 0)$  idem;

(j) idem  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) =$  sua escolha idem;

(k) comente as curvas obtidas.