

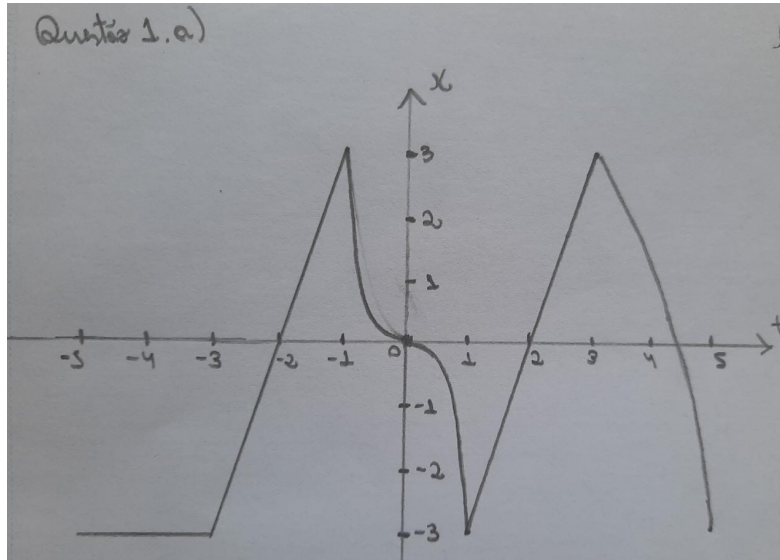
Sinais e Sistemas - Trabalho 1 - Grupo 2

Leonardo Soares da Costa Tanaka
Matheus Henrique Sant Anna Cardoso
Theo Rudra Macedo e Silva

Setembro de 2022

1.) Para o sinal abaixo, contínuo por partes e definido para $t \in [-5, 5]$: (a) esboçar gráfico, (b) encontrar uma expressão analítica usando sinais singulares, (c) escrever um programa que rode em Octave/MatLab para plotar o gráfico. Nos dados a seguir, as expressões entre vírgulas se referem, na ordem de apresentação, aos valores do sinal nos intervalos $I_1 = [-5, -3]$, $I_2 = [-3, -1]$, $I_3 = [-1, 1]$, $I_4 = [1, 3]$, $I_5 = [3, 5]$. **G2:** $x(t) = -3, 3t + 6, -3t^3, 3t - 6, -t^2 + 5t - 3$

(a) Esboçando o gráfico:



(b) Analisando para os intervalos, teremos:

Para $-5 \leq t < -3$, $x(t) = -3$, ou, $x(t) = -3 \cdot 1(-t)$ utilizando um degrau refletido.

Para $-3 \leq t < -1$, $x(t) = 3t + 6$, ou, $x(t) = 3t \cdot 1(-t) + 6 \cdot 1(-t)$ utilizando degrau e rampa unitários.

Para $-1 \leq t < 0$, $x(t) = -3t^3$, ou, $x(t) = -6t \cdot \frac{t^2}{2} 1(-t)$ utilizando a parábola unitária.

Para $0 \leq t < 1$, $x(t) = -3t^3$, ou, $x(t) = -6t \cdot \frac{t^2}{2} 1(t)$ utilizando a parábola unitária.

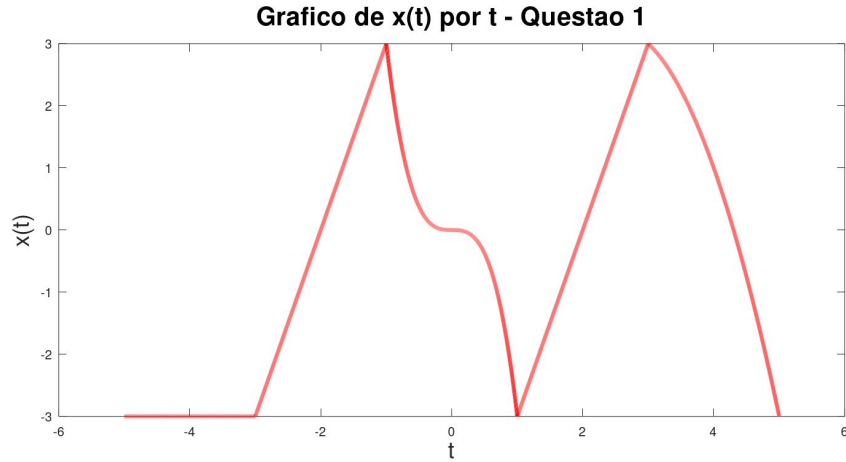
Para $1 \leq t < 3$, $x(t) = 3t - 6$, ou, $x(t) = 3t \cdot 1(t) - 6 \cdot 1(t)$ utilizando degrau e rampa unitários.

Para $3 \leq t < 5$, $x(t) = -t^2 + 5t - 3$, ou, $x(t) = -2 \cdot \frac{t^2}{2} 1(t) + 5t \cdot 1(t) - 3 \cdot 1(t)$ utilizando parábola, rampa e degrau unitários.

Dessa forma, teremos $x(t)$ definido como:

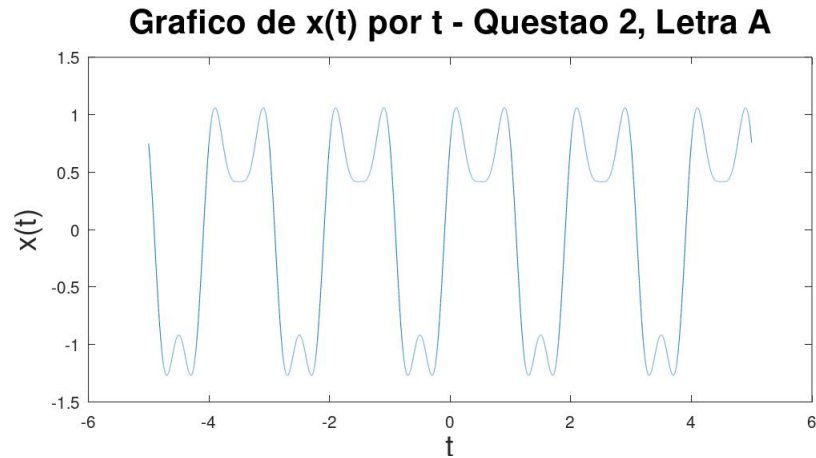
$$x(t) = \begin{cases} -3 \cdot 1(-t) & -5 \leq t < -3 \\ 3t \cdot 1(-t) + 6 \cdot 1(-t) & -3 \leq t < -1 \\ -6t \cdot \frac{t^2}{2} 1(-t) & -1 \leq t < 0 \\ -6t \cdot \frac{t^2}{2} 1(t) & 0 \leq t < 1 \\ 3t \cdot 1(t) - 6 \cdot 1(t) & 1 \leq t < 3 \\ -2 \cdot \frac{t^2}{2} 1(t) + 5t \cdot 1(t) - 3 \cdot 1(t) & 3 \leq t < 5 \end{cases}$$

(c) Executando os códigos escritos no arquivo `questao1.m` (feito no Octave), plotamos o seguinte gráfico:

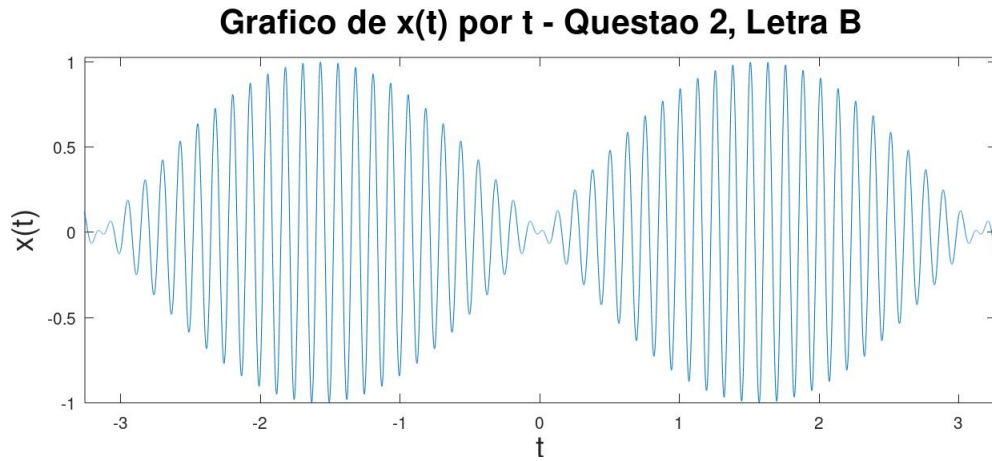


2.) Plotar o gráfico dos sinais a seguir, com escalas adequadas e usando os valores numéricos desejados para os eventuais parâmetros. Dizer se estes sinais são periódicos e, em caso afirmativo quais os seus períodos fundamentais. (a) $x(t) = \sin(\pi t) + \cos(2\pi t)/2 + \sin(3\pi t)/3 + \cos(4\pi t)/4$, (b) $x(t) = \sin(\omega t)\cos(50\omega t)$, (c) $x(t) = \sin(\omega t^2)$, (d) $x(t) = \sin(\omega_1 \sin(\omega_2 t)t)$

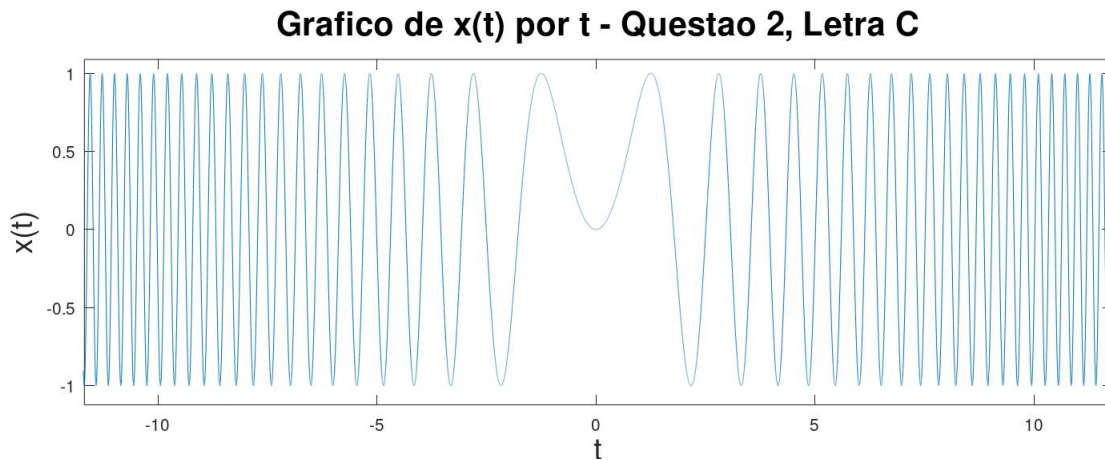
(a) Plotando o gráfico no Octave, temos:



(b) Plotando o gráfico no Octave, temos:

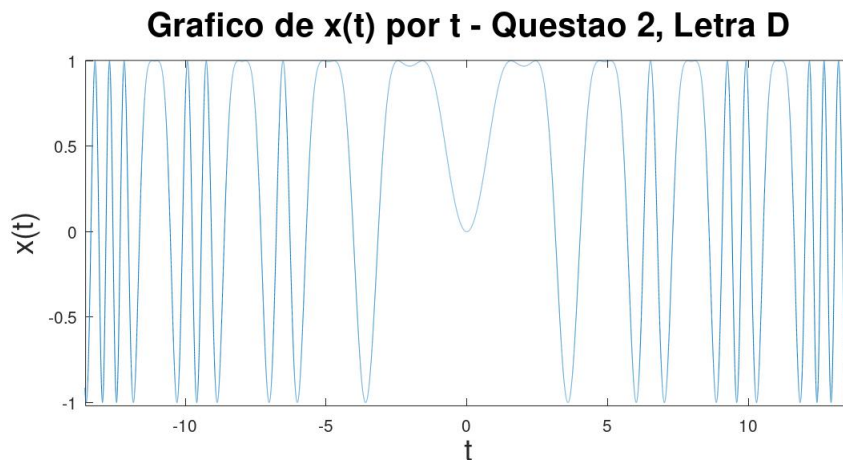


(c) Plotando o gráfico com o Octave para $\omega = 7$, temos:



Daqui, já se nota que o sinal não é periódico. Além de ser bem destoante para valores próximos à zero, conforme $t \rightarrow \infty$ ou $t \rightarrow -\infty$, a distância entre as cristas e entre os vales diminui.

(d) Plotando o gráfico com o Octave para $\omega_1 = \omega_2 = 1$, temos:



Do gráfico, nota-se que este sinal não é periódico. As distâncias entre as cristas e entre os vales não é fixa ao longo do gráfico.

3.) Um sinal periódico com período fundamental $T_0 = 4$ é descrito por **G2**: $x(t) = 1 - e^{|t|}$ para $-T_0/2 \leq t < T_0/2$ (a) Esboce o seu gráfico; (b) calcule analiticamente sua potência total P ; (c) calcule X_0 usando $k = 0$ na fórmula geral de X_k ; (d) calcule analiticamente os coeficientes X_k e verifique se a expressão obtida leva a X_0 sem indeterminações; (e) esboce os espectros de módulo e fase; (f) para $k = 0, 1, 2$ e 3 , calcule a potência acumulada P_k^a contida nos harmônicos de 0 a k ; (g) para $k = 0, 1, 2$ e 3 , calcule a potência relativa P_k^a/P ; (h) quantos harmônicos são necessários para uma aproximação reter 90.00% da potência?

(b) Podemos, inicialmente, calcular a energia do sinal no período $[-2, 2]$ com $T_0 = 4$ e $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{2}$.

$$E = \int_{-2}^2 |x(t)|^2 dt = \int_{-2}^0 |1 - e^{|t|}|^2 dt + \int_0^2 |1 - e^{|t|}|^2 dt$$

$$\begin{aligned} E &= \int_{-2}^0 (1 - 2e^{|t|} + e^{2|t|}) dt + \int_0^2 (1 - 2e^{|t|} + e^{2|t|}) dt = \\ E &= (t - 2e^{|t|} + \frac{1}{2}e^{2|t|}) \Big|_{-2}^0 + (t - 2e^{|t|} + \frac{1}{2}e^{2|t|}) \Big|_0^2 = \\ E &= (0 - 2 + \frac{1}{2} - (-2 - 2e^2 + \frac{1}{2}e^4)) + (2 - 2e^2 + \frac{1}{2}e^4) - (0 - 2 + \frac{1}{2}) = 4 \\ E &= 4 \end{aligned}$$

A potência, portanto, será calculada como a energia dividida pelo período de tempo calculado: $P = \frac{E}{4} = 1$.

(c) A fórmula geral de X_k é dada por:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Para o nosso caso:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{4} \left[\int_{-2}^0 (1 - e^{-t}) dt + \int_0^2 (1 - e^t) dt \right] \\ X_0 &= \frac{1}{4} \left[(t + e^{-t}) \Big|_{-2}^0 + (t - e^t) \Big|_0^2 \right] \\ X_0 &= \frac{1}{4} \left[(0 + 1) - (-2 + e^2) + (2 - e^2) - (0 - 1) \right] \\ X_0 &= \frac{3 - e^2}{2} \end{aligned}$$

O termo DC, vale $\frac{3-e^2}{2}$.

(d) Já temos a fórmula geral de X_k acima descrita. Assim, para o caso geral, temos:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{4} \left[\int_{-2}^2 (1 - e^{|t|}) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt \right] \\ X_k &= \frac{1}{4} \left[\int_{-2}^0 (1 - e^{-t}) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt + \int_0^2 (1 - e^t) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt \right] \end{aligned}$$

Para facilitar as contas, e a visualização, chamaremos a constante $jk\frac{\pi}{2}$ de c .

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{4} \left[\int_{-2}^0 (1 - e^{-t}) e^{-ct} dt + \int_0^2 (1 - e^t) e^{-ct} dt \right] \\ X_k &= \frac{1}{4} \left[\int_{-2}^0 (e^{-ct} - e^{-t(c+1)}) dt + \int_0^2 (e^{-ct} - e^{t(1-c)}) dt \right] \\ 4X_k &= \left(\frac{-e^{-ct}}{c} - \left(\frac{-e^{-t(c+1)}}{c+1} \right) \right) \Big|_{-2}^0 + \left(\frac{-e^{-ct}}{c} - \frac{e^{t(1-c)}}{1-c} \right) \Big|_0^2 \\ 4X_k &= \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{c+1} + \frac{e^{2c}}{c} - \frac{e^{2(c+1)}}{c+1} \right) + \left(-\frac{e^{-2c}}{c} - \frac{e^{2(1-c)}}{1-c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{1-c} \right) \end{aligned}$$

$$4X_k = \left(\frac{1}{c+1} + \frac{1}{1-c} + \frac{e^{2c}}{c} - \frac{e^{2(c+1)}}{c+1} - \frac{e^{-2c}}{c} - \frac{e^{2(1-c)}}{1-c} \right)$$

Substituindo c pela constante $jk\frac{\pi}{2}$, chegamos à expressão final:

$$X_k = \frac{2}{k^2\pi^2 + 4} - \frac{2e^2}{k^2\pi^2 + 4} \cos(k\pi) + \text{sinc}(k)$$

Que pode ser simplificada para:

$$X_k = \frac{2}{k^2\pi^2 + 4} - \frac{2e^2}{k^2\pi^2 + 4} (-1)^k + \text{sinc}(k)$$

Perceba, então, que não existe indeterminações na expressão X_k , na qual podemos, inclusive, calcular para $k = 0$.

$$X_0 = \frac{2}{4} - \frac{2e^2}{4} (-1)^0 + \text{sinc}(0)$$

$$X_0 = \frac{1}{2} - \frac{e^2}{2} + 1$$

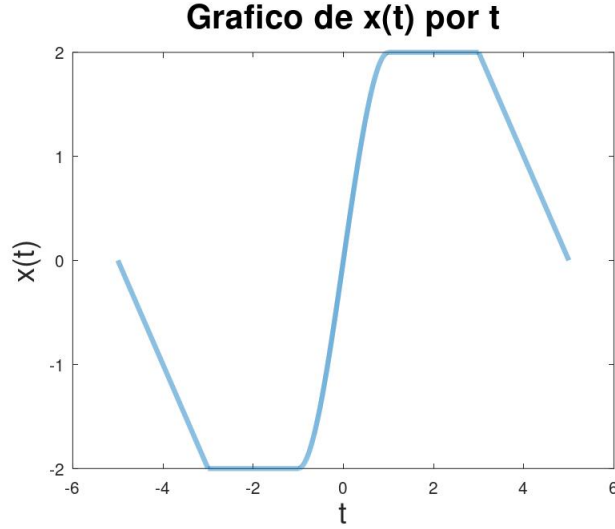
$$X_0 = \frac{3 - e^2}{2}$$

Que foi a expressão inicialmente obtida.

4.) O grupo i trabalhará com o sinal periódico $x(t)$ usado pelo grupo $i + 1$ na questão 1 (ao grupo 7: sinal 1). As aproximações numéricas para Octave/MatLab vistas, podem e devem ser utilizadas. (a) Traçar gráfico; (b) encontrar potência total P ; (c) calcular os X_k para $k \in [-10 \ 10]$; (d) traçar os espectos de magnitude, fase e potência; (e) estimar quantos harmônicos são necessários para reter 90.00% da potência; (f) calcular os coeficientes a_k e b_k correspondentes; (g) traçar, num mesmo gráfico, $x(t)$ e as aproximações.

Sinal a ser estudado: **G3:** $x(t) = -t - 5, -2, -t^3 + 3t, 2, -t + 5$ para o intervalo $I_1 = [-5 \ -3], I_2 = [-3 \ -1], I_3 = [-1 \ 1], I_4 = [1 \ 3], I_5 = [3 \ 5]$.

(a) Traçando o gráfico do sinal periódico:



(b) Encontrando a potência total P com a aproximação da fórmula $P_{[-5 \ 5]} = \frac{1}{5-(-5)} \int_{-5}^5 |x(t)|^2 dt$:

Potência total (P) = 2.5219

(c) Calculando os X_k para $k \in [-10 \ 10]$:

```

xk0 = sum(x.*exp(-i*0*w0.*t)*dt)/T0;
xk1 = sum(x.*exp(-i*1*w0.*t)*dt)/T0;
xk2 = sum(x.*exp(-i*2*w0.*t)*dt)/T0;
xk3 = sum(x.*exp(-i*3*w0.*t)*dt)/T0;
xk4 = sum(x.*exp(-i*4*w0.*t)*dt)/T0;
xk5 = sum(x.*exp(-i*5*w0.*t)*dt)/T0;
xk6 = sum(x.*exp(-i*6*w0.*t)*dt)/T0;
xk7 = sum(x.*exp(-i*7*w0.*t)*dt)/T0;
xk8 = sum(x.*exp(-i*8*w0.*t)*dt)/T0;
xk9 = sum(x.*exp(-i*9*w0.*t)*dt)/T0;
xk10 = sum(x.*exp(-i*10*w0.*t)*dt)/T0;

```

$X_{-10} = 3.6250 \times 10^{-17} - 4.8377 \times 10^{-3}j$;
 $X_{-9} = 1.3859 \times 10^{-18} - 1.2007 \times 10^{-2}j$;
 $X_{-8} = 1.5344 \times 10^{-17} - 5.4810 \times 10^{-5}j$;
 $X_{-7} = -1.1824 \times 10^{-18} + 7.3857 \times 10^{-3}j$;
 $X_{-6} = -3.0899 \times 10^{-17} + 1.2438 \times 10^{-3}j$;
 $X_{-5} = 1.6911 \times 10^{-17} + 3.8702 \times 10^{-2}j$;
 $X_{-4} = 3.1526 \times 10^{-17} + 1.0894 \times 10^{-1}j$;
 $X_{-3} = -6.7537 \times 10^{-18} + 1.1269 \times 10^{-1}j$;
 $X_{-2} = 1.4539 \times 10^{-17} + 1.9635 \times 10^{-1}j$;
 $X_{-1} = 1.4886 \times 10^{-17} + 1.0936j$;
 $X_o = 6.3307 \times 10^{-17}$;

$X_{10} = 3.6250 \times 10^{-17} + 4.8377 \times 10^{-3}j$.
 $X_9 = 1.3859 \times 10^{-18} + 1.2007 \times 10^{-2}j$;
 $X_8 = 1.5344 \times 10^{-17} + 5.4810 \times 10^{-5}j$;
 $X_7 = -1.1824 \times 10^{-18} - 7.3857 \times 10^{-3}j$;
 $X_6 = -3.0899 \times 10^{-17} - 1.2438 \times 10^{-3}j$;
 $X_5 = 1.6911 \times 10^{-17} - 3.8702 \times 10^{-2}j$;
 $X_4 = 3.1526 \times 10^{-17} - 1.0894 \times 10^{-1}j$;
 $X_3 = -6.7537 \times 10^{-18} - 1.1269 \times 10^{-1}j$;
 $X_2 = 1.4539 \times 10^{-17} - 1.9635 \times 10^{-1}j$;
 $X_1 = 1.4886 \times 10^{-17} - 1.0936j$;

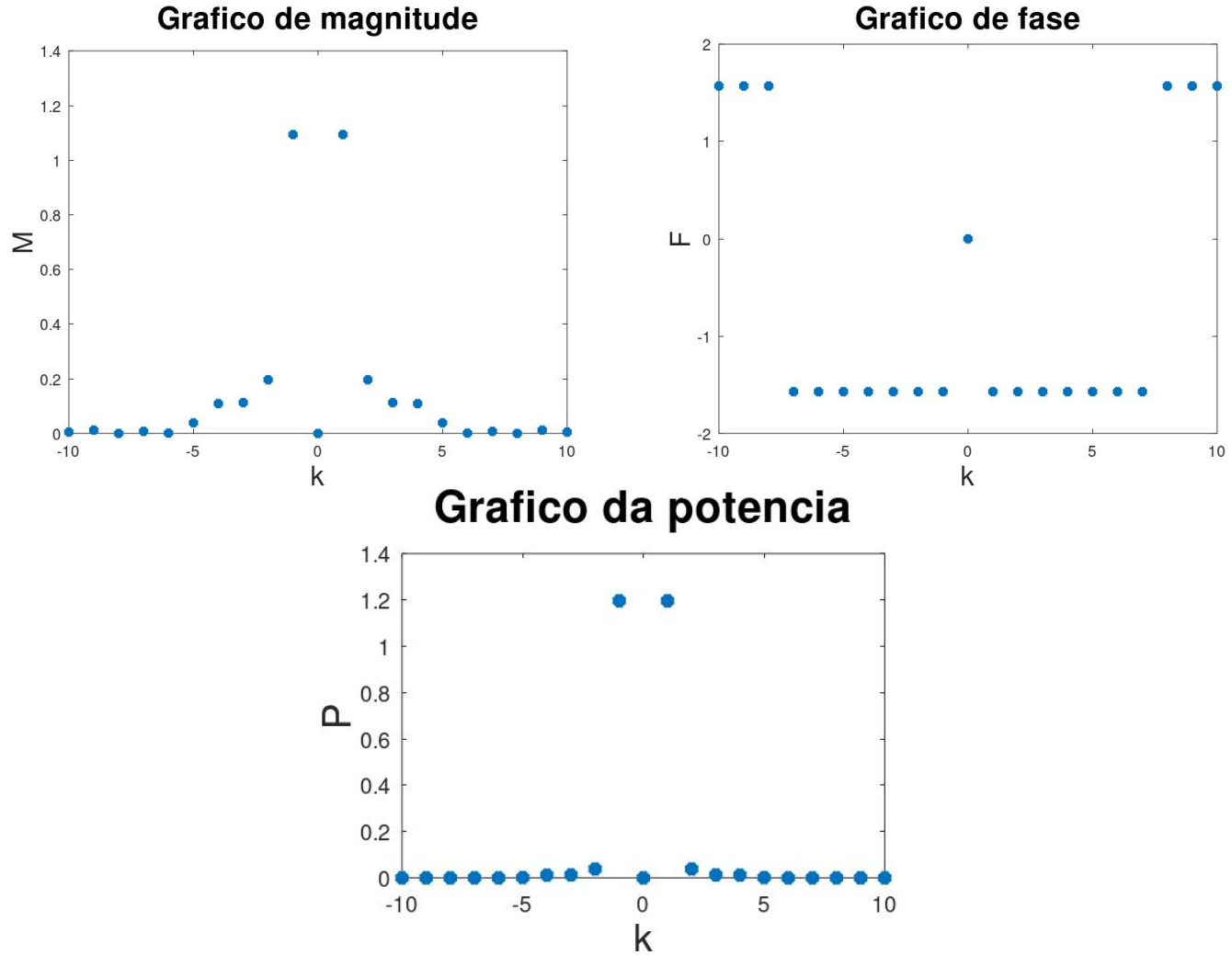
(d) Traçando os espectros de magnitude, fase e potência:

$M = [\text{abs}(x_{k10}) \text{ abs}(x_{k9}) \text{ abs}(x_{k8}) \text{ abs}(x_{k7}) \text{ abs}(x_{k6}) \text{ abs}(x_{k5}) \text{ abs}(x_{k4}) \text{ abs}(x_{k3}) \text{ abs}(x_{k2}) \text{ abs}(x_{k1}) \text{ abs}(x_{k0}) \text{ abs}(x_{k1}) \text{ abs}(x_{k2}) \text{ abs}(x_{k3}) \text{ abs}(x_{k4}) \text{ abs}(x_{k5}) \text{ abs}(x_{k6}) \text{ abs}(x_{k7}) \text{ abs}(x_{k8}) \text{ abs}(x_{k9}) \text{ abs}(x_{k10})];$

$F = [\text{arg}(x_{k10}) \text{ arg}(x_{k9}) \text{ arg}(x_{k8}) \text{ arg}(x_{k7}) \text{ arg}(x_{k6}) \text{ arg}(x_{k5}) \text{ arg}(x_{k4}) \text{ arg}(x_{k3}) \text{ arg}(x_{k2}) \text{ arg}(x_{k1}) \text{ arg}(x_{k0}) \text{ arg}(x_{k1}) \text{ arg}(x_{k2}) \text{ arg}(x_{k3}) \text{ arg}(x_{k4}) \text{ arg}(x_{k5}) \text{ arg}(x_{k6}) \text{ arg}(x_{k7}) \text{ arg}(x_{k8}) \text{ arg}(x_{k9}) \text{ arg}(x_{k10})];$

$$P = |x_k|^2$$

$P = [P_{10} P_9 P_8 P_7 P_6 P_5 P_4 P_3 P_2 P_1 P_0 P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8 P_9 P_{10}];$



(e) Estimando quantos harmônicos são necessários para reter 90.00% da potência:

Dois harmônicos para alcançar 94,85% da potência.

(f) Calculando a_k e b_k a partir dos coeficientes X_k , teremos:

$$a_k = X_k + X_{-k}$$

$$b_k = i * (X_k - X_{-k})$$

$a_0 = 6.3307 \times 10^{-17}$	$b_0 = 0$
$a_1 = 2.9772 \times 10^{-17}$	$b_1 = 2.1873$
$a_2 = 2.9078 \times 10^{-17}$	$b_2 = 0.3927$
$a_3 = -1.3507 \times 10^{-17}$	$b_3 = 0.2254$
$a_4 = 6.3052 \times 10^{-17}$	$b_4 = 0.2179$
$a_5 = 3.3822 \times 10^{-17}$	$b_5 = 0.077404$
$a_6 = -6.1798 \times 10^{-17}$	$b_6 = 2.4876 \times 10^{-3}$
$a_7 = -2.3649 \times 10^{-18}$	$b_7 = 0.014771$
$a_8 = 3.0689 \times 10^{-17}$	$b_8 = -1.0962 \times 10^{-4}$
$a_9 = 2.7717 \times 10^{-18}$	$b_9 = -0.024014$
$a_{10} = 7.2500 \times 10^{-17}$	$b_{10} = -9.6755 \times 10^{-3}$

5.) Na escala de tempo $t=0:1/2000:5$, considere um sinal de áudio simples $x_b(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ ou $x_b(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ com frequência **G2**: $f_0 = 132Hz$. Ouça este som usando o comando `sound(xb)` no Octave; o resultado é, provavelmente, desagradável pois se trata de uma frequência pura e a sensação é seca, metálica. Para melhorar o **timbre** do som é preciso colocar mais harmônicos. Crie, na mesma escala de tempo, com a mesma frequência fundamental f_0 , com parâmetros a seu critério e usando até o harmônico $k = 6$ ($6f_0Hz$) os sinais a seguir. Ouça cada um deles e compare a qualidade do timbre. (a) Uma onda quadrada $x_q(t)$; (b) uma onda triangular $x_t(t)$; (c) um seno semi-retificado sem o nível DC $x_s(t)$; (d) Opcional: adicionando senos e co-senos harmônicos a seu critério, imagine-se projetando um sintetizador de som e crie um sinal periódico $x(t)$ com frequência fundamental f_0 e um timbre agradável.