Sinais e Sistemas - Trabalho 4 - Avaliação 8

Grupo 2
Leonardo Soares da Costa Tanaka
Matheus Henrique Sant Anna Cardoso
Theo Rudra Macedo e Silva

Rio de Janeiro
2022

1.) Abaixo, use o número do grupo como o valor do parâmetro p. Entre no Octave com `B = [0 ; 0 ; 1], C = [1 0 0], A = [0 1 0 ; 0 0 1 ; (-2p) (-2p + 2) (-p + 2)]`**, e serão criadas as matrizes A, B e C de uma equação dinâmica. Com auxílio do** `help`**, pesquise e use os comandos** `eig` **para calcular os autovalores e** `ss` **para criar um sistema de espaço de estados.**

Matrizes relativas ao **Grupo 2 (p = 2)**:

`B = [0 ; 0 ; 1], C = [1 0 0], A = [0 1 0 ; 0 0 1 ; -4 -2 0]`

(a) Encontre o polinômio característico $\Delta(s)$ associado;

$$\Delta(s) = det(sI - A) = det\left(\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 4 & 2 & s \end{vmatrix} = s^3 + 2s + 4$$

(b) encontre a função de transferência $T(s)$ associada, manualmente e pelo Octave (descubra como);

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 4 & 2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{s^2+2}{-s^3-2s-4} & -\frac{s}{-s^3-2s-4} & -\frac{1}{-s^3-2s-4} \\ \frac{4}{-s^3-2s-4} & -\frac{s^2}{-s^3-2s-4} & -\frac{s}{-s^3-2s-4} \\ \frac{4s}{-s^3-2s-4} & \frac{2s+4}{-s^3-2s-4} & -\frac{s^2}{-s^3-2s-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{s^2+2}{-s^3-2s-4} & -\frac{s}{-s^3-2s-4} & -\frac{1}{-s^3-2s-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^3 + 2s + 4}$$

Bastou, agora, encontrarmos a função de transferência utilizando a ferramenta Octave. Para tal, foi feito o programa a seguir:

```
%% Dados Iniciais
A = [0 1 0 ; 0 0 1 ; -4 -2 0];
B = [0 ; 0 ; 1];
C = [1 0 0];
%% Carregando o pacote de controle
pkg load control;
%% Sistema de espaço de estados
sys = ss(A, B, C);
%% Função de transferência
SYS = tf(sys)
```

Tendo por saída, a mensagem com a função de transferência:

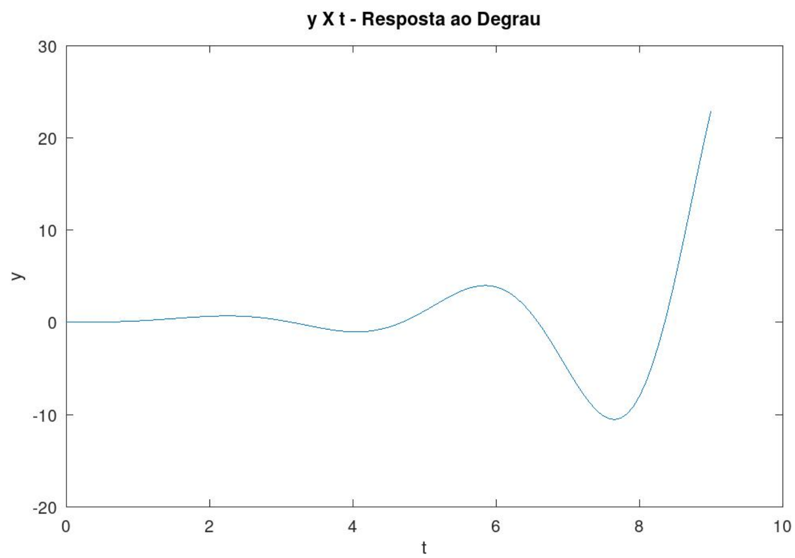
```
                  1
y1:  ----------------------------
     s^3 + 2.22e-16 s^2 + 2 s + 4
```

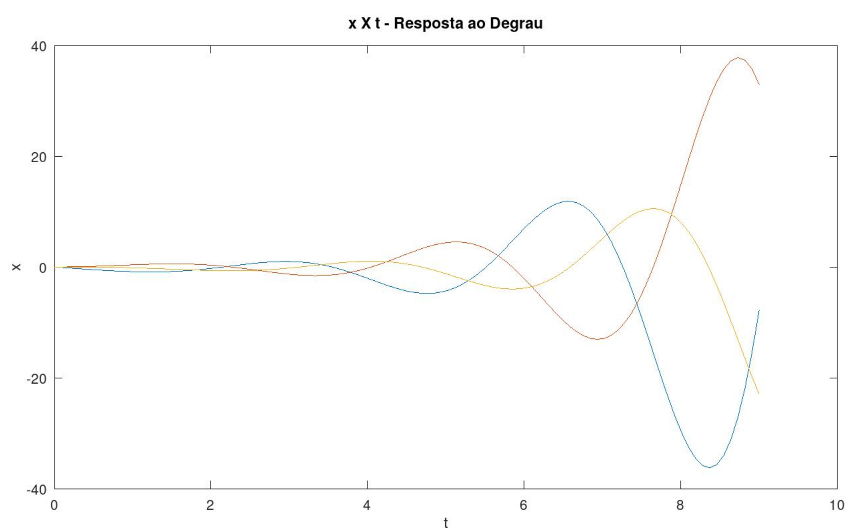
Perceba que existe um coeficiente maior que zero para o termo ao quadrado. Porém, este é desprezível. Ficamos, pelo Octave, com a função de transferência dada por:

$$y_1 = \frac{1}{s^3 + 2.22 \times 10^{-16} s^2 + 2s + 4} \approx \frac{1}{s^3 + 2s + 4}$$

(c) encontre a resposta ao degrau (comando `step`) para y e x;

Aqui, precisamos utilizar, novamente, o Octave.





(d) encontre manualmente os autovetores;

Vamos encontrar as raízes de $\Delta(s)$ que são os autovalores de A. Para isso, podemos utilizar a função `eig` no Octave para encontrá-los. Dessa forma, encontramos os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -1.1795; \\
\lambda_2 &= 0.5898 + j1.7445; \\
\lambda_3 &= 0.5898 - j1.7445
\end{aligned}$$

Chamando de λ quaisquer uma das três raízes, teremos que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} \beta & = \lambda\alpha \\ \gamma & = \lambda\beta \\ -4\alpha - 2\beta & = \lambda\gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha & = \alpha \\ \beta & = \lambda\alpha \\ \gamma & = \lambda^2\alpha \end{cases}$$

Ficamos, com um padrão para os autovetores:

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$$

Temos, finalmente, como autovetores, os seguintes vetores:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.1795 \\ 1.39122 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5898 + j1.7445 \\ -2.6954 + j2.0578 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5898 - j1.7445 \\ -2.6954 - j2.0578 \end{bmatrix}$$

(e) escreva a REN seguindo o exemplo completo na nova versão dos slides094pwd.pdf a partir do slide 83;

Sendo v_1, v_2 e $, v_3$ os autovetores e $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ os autovalores, podemos fazer uma pequena mudança para facilitar os cálculos, fazendo $\lambda_2 = \sigma + j\omega$ e $\lambda_3 = \sigma - j\omega$.

$$\begin{aligned}
x(t) &= \alpha v_1 e^{\lambda_1 t} + \beta v_2 e^{(\sigma + j\omega)t} + \gamma v_3 e^{(\sigma - j\omega)t} \\
&= \alpha v_1 e^{\lambda_1 t} + \beta v_2 e^{\sigma t} e^{j\omega t} + \gamma v_3 e^{\sigma t} e^{-j\omega t} \\
&= \alpha v_1 e^{\lambda_1 t} + \left[\beta v_2 e^{j\omega t} + \gamma v_3 e^{-j\omega t}\right] e^{\sigma t} \\
&= \alpha v_1 e^{\lambda_1 t} + \left[(\beta v_2 + \gamma v_3)\cos(\omega t) + j(\beta v_2 - \gamma v_3)\,\mathrm{sen}(\omega t)\right] e^{\sigma t}
\end{aligned}$$

Sabemos que $x(t)$ é real, então $(\beta v_2 + \gamma v_3)$ e $j(\beta v_2 - \gamma v_3)$ são reais.

$$\beta v_2 + \gamma v_3 = \begin{bmatrix} \beta + \gamma \\ \sigma(\beta+\omega) + j\omega(\beta-\omega) \\ (\sigma^2 - \omega^2)(\beta+\omega) + j2\sigma\omega(\beta-\omega) \end{bmatrix} \quad j(\beta v_2 - \gamma v_3) = \begin{bmatrix} j(\beta-\gamma) \\ j\sigma(\beta-\omega) - \omega(\beta+\omega) \\ j(\sigma^2-\omega^2)(\beta-\omega) - 2\sigma\omega(\beta+\omega) \end{bmatrix}$$

Fazendo $\beta + \gamma = \delta \in \mathbb{R}$ e $j(\beta - \gamma) = \epsilon \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\beta v_2 + \gamma v_3 = \begin{bmatrix} \delta \\ \sigma\delta + \omega\epsilon \\ (\sigma^2-\omega^2)\delta + 2\sigma\omega\epsilon \end{bmatrix} \qquad j(\beta v_2 - \gamma v_3) = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \sigma\epsilon - \omega\delta \\ (\sigma^2-\omega^2)\epsilon - 2\sigma\omega\delta \end{bmatrix}$$

$$\beta v_2 + \gamma v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & \omega \\ (\sigma^2-\omega^2) & 2\sigma\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \epsilon \end{bmatrix} \qquad j(\beta v_2 - \gamma v_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & \omega \\ (\sigma^2-\omega^2) & 2\sigma\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ -\delta \end{bmatrix}$$

Substituindo, teremos:

$$x(t) = \alpha v_1 e^{\lambda_1 t} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & \omega \\ (\sigma^2-\omega^2) & 2\sigma\omega \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \delta \\ \epsilon \end{bmatrix} \cos(\omega t) + \begin{bmatrix} \epsilon \\ -\delta \end{bmatrix} \operatorname{sen}(\omega t) \right\} e^{\sigma t}$$

finalmente, tendo $\sigma = 0.5898$ e $\omega = 1.7445$.

$$x(t) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1.1795 \\ 1.39122 \end{bmatrix} e^{-1.1795t} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5898 & 1.7445 \\ -2.6954 & 2.0578122 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \delta \\ \epsilon \end{bmatrix} \cos(1.7445t) + \begin{bmatrix} \epsilon \\ -\delta \end{bmatrix} \operatorname{sen}(1.7445t) \right\} e^{0.5898t}$$

(f) usando o comando `initial` encontre a REN (y e x) para x_0 colocado em um ponto da matriz V;

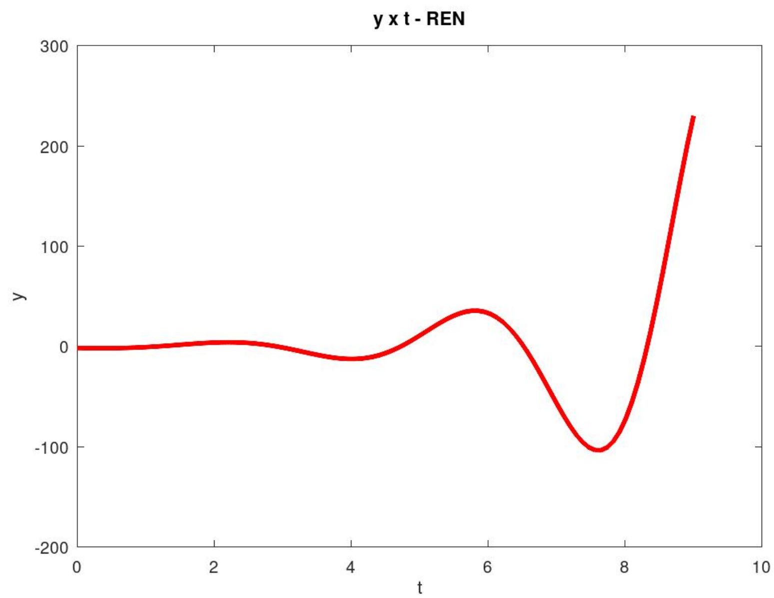
De maneira similar ao comando `step`, traremos os outputs `X, Y` do comando `initial`. Fazendo $\alpha = 1$ na equação $x(t)$.

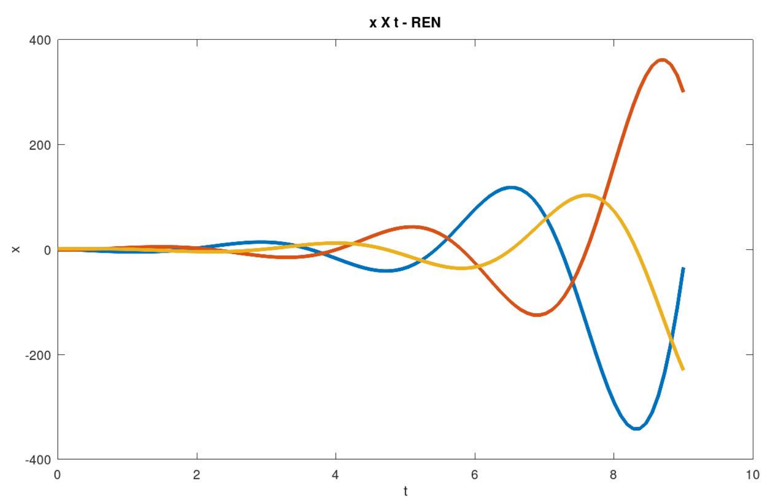
```
... %% Programa anterior
%% Primeiro termo (real) dos autovalores
lambda1 = eig(A)(1);
V0 = [1 ; lambda1 ; lambda1^2];


%% Calculo do sinal
[Y, T, X] = initial(SYS, V0);
```

Em seguida, no prompt:

```
plot(T, Y)
plot(T, X)
```

Temos, por final, os gráficos:



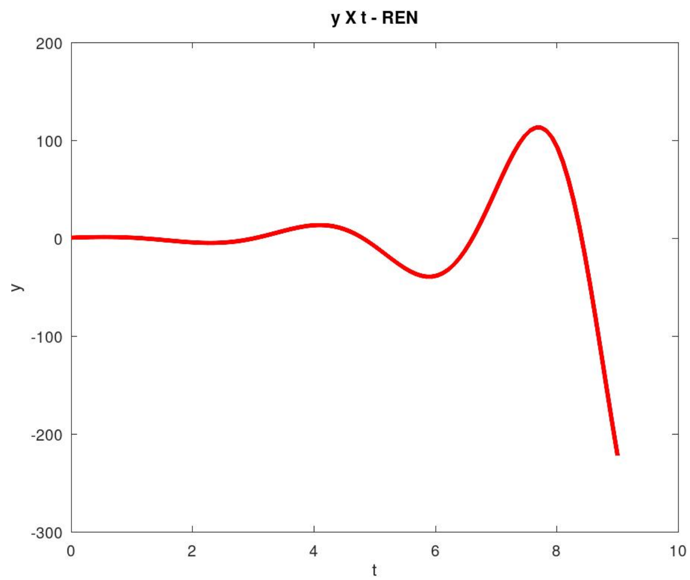


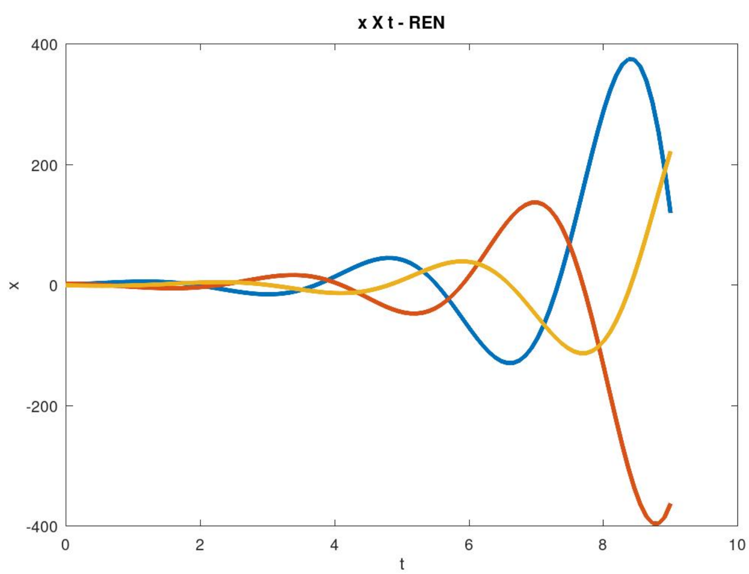
(g) idem para x_0 como uma combinação linear das colunas da matriz W.

```
%% ... Programa anterior
%% Definindo um multiplo das colunas de W

%% Parte real dos autovalores
sigma = (eig(A)(2) + eig(A)(3)) / 2
omega = - i * (eig(A)(2) - eig(A)(3)) / 2
```

```
%% Vetor combinação linear das colunas de W
w = [1 ; sigma + omega ; (sigma^2 - omega^2) + 2 * sigma * omega]

[Y, T, X] = initial(SYS, w);

plot(T, Y);
plot(T, X);
```

Disso, obtemos:





2.) Um oscilador ideal com duas massas, molas e sem atritos e/ou amortecimentos é descrito por $\ddot{y_1}(t) + 2\omega_1^2 y_1(t) = \omega_1^2 y_2(t)$ e $\ddot{y_2}(t) + 2\omega_2^2 y_2(t) = \omega_2^2 y_1(t)$. Use a escolha $x_1 = y_1; x_2 = \dot{y_1}; x_3 = y_2; x_4 = \dot{y_2}$ para variáveis de estado, ou qualquer outra, e considere $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$.

G2: $\omega_0 = 2$.

(a) Encontre a matriz de estados A, seu polinômio característico $\Delta(s)$;

$$\ddot{y_1}(t) + 8y_1(t) = 4y_2(t); \ddot{y_2}(t) + 8y_2(t) = 4y_1(t)$$

$$x_1 = y_1; x_2 = \dot{y_1}; x_3 = y_2; x_4 = \dot{y_2}$$

$$\dot{x_1}(t) = \dot{y_1}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x_2}(t) = \ddot{y_1}(t) = -8y_1(t) + 4y_2(t) = -8x_1 + 4x_3$$

$$\dot{x_3}(t) = \dot{y_2}(t) = x_4$$

$$\dot{x_4}(t) = \ddot{y_2}(t) = 4y_1(t) - 8y_2(t) = 4x_1 - 8x_3$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(s) = det(sI - A) = det\left(\begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 8 & s & -4 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -4 & 0 & 8 & s \end{vmatrix} = s^4 + 16s^2 + 48$$

(b) os autovalores (faça $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \lambda_4$; pares complexos conjugados) e, manualmente, os autovetores v_1, v_2, v_3, v_4;

$$\lambda_1 = 2j; \lambda_2 = -2j; \lambda_3 = 2\sqrt{3}j; \lambda_4 = -2\sqrt{3}j$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \beta & = \lambda\alpha \\ -8\alpha + 4\gamma & = \lambda\beta \\ \delta & = \lambda\gamma \\ 4\alpha - 8\gamma & = \lambda\delta \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha & = \alpha \\ \beta & = \alpha\lambda \\ \gamma & = \frac{\alpha(\lambda^2+8)}{4} \\ \delta & = \frac{\alpha(\lambda^3+8)}{4} \end{cases}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \frac{\lambda^2+8}{4} \\ \frac{\lambda^3+8}{4} \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2j \\ 1 \\ 2-2j \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2j \\ 1 \\ 2+2j \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\sqrt{3}j \\ -1 \\ 2-6\sqrt{3}j \end{bmatrix} \qquad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2\sqrt{3}j \\ -1 \\ 2+6\sqrt{3}j \end{bmatrix}$$

(c) escreva a expressão da REN: $x(t) = \sum_{i=1}^{4} r_i v_i e^{\lambda_i t}$ onde os r_i são parâmetros de cada modo e os λ_i são os autovalores;

$$x(t) = \sum_{i=1}^{4} r_i v_i e^{\lambda_i t} = r_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2j \\ 1 \\ 2-2j \end{bmatrix} e^{2jt} + r_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2j \\ 1 \\ 2+2j \end{bmatrix} e^{-2jt} + r_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2\sqrt{3}j \\ -1 \\ 2-6\sqrt{3}j \end{bmatrix} e^{2\sqrt{3}jt} + r_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2\sqrt{3}j \\ -1 \\ 2+6\sqrt{3}j \end{bmatrix} e^{-2\sqrt{3}jt}$$

(d) usando a identidade de Euler, coloque a expressão acima em uma forma onde apareçam senos e co-seno;

Sabemos que a identidade de Euler é dada por:

$$e^{j\theta} = cos(\theta) + jsen(\theta)$$

Ao aplicar na expressão da questão anterior, obtemos:

$$V_1(cos(2t) + jsen(2t)) + V_2(cos(-2t) - jsen(2t)) + V_3(cos(2\sqrt{3}t) + jsen(2\sqrt{3}t)) + V_4(cos(-2\sqrt{3}t) - jsen(2\sqrt{3}t)) =$$
$$= (V_1 + V_2)cos(2t) + (V_1 - V_2)jsen(t) + (V_3 + V_4)cos(2\sqrt{3}t) + (V_3 - V_4)jsen(2\sqrt{3}t)$$

Finalmente:

$$\begin{bmatrix} r_1+r_2 \\ (r_1-r_2)2j \\ r_1+r_2 \\ 2(r_1+r_2)-2j(r_1-r_2) \end{bmatrix} cos(2t) + \begin{bmatrix} r_1-r_2 \\ (r_1+r_2)2j \\ r_1-r_2 \\ 2(r_1-r_2)+2j(r_1-r_2) \end{bmatrix} jsen(t) + \begin{bmatrix} r_3+r_4 \\ 2\sqrt{3}j(r_3-r_4) \\ -r_3-r_4 \\ 2(r_3+r_4)-6\sqrt{3}j(r_3-r_4) \end{bmatrix} cos(2\sqrt{3}t)+$$

$$\begin{bmatrix} r_3-r_4 \\ 2\sqrt{3}j(r_3+r_4) \\ -r_3+r_4 \\ 2(r_3-r_4)-6\sqrt{3}j(r_3+r_4) \end{bmatrix} jsen(2\sqrt{3}t)$$

(e) analisando esta última expressão, verifique que os pares r_1 e r_2, r_3 e r_4 são complexos conjugados;

(f) usando $r_1 = \alpha + j\beta, r_2 = \alpha - j\beta$, $r_3 = \gamma + j\delta, r_4 = \gamma - j\delta$ encontre a expressão final para $x(t)$;

$$\begin{bmatrix} 2\alpha \\ -4\beta \\ 2\alpha \\ 4(\alpha+\beta) \end{bmatrix} cos(2t) + \begin{bmatrix} 2j\beta \\ 4j\alpha \\ 2j\beta \\ 4\beta(j-1) \end{bmatrix} jsen(t) + \begin{bmatrix} 2\gamma \\ -4\sqrt{3}\delta \\ -2\gamma \\ 4(\gamma+3\sqrt{3}\delta) \end{bmatrix} cos(2\sqrt{3}t) + \begin{bmatrix} 2j\delta \\ 4\sqrt{3}j\delta \\ -2j\delta \\ 4j(\delta-3\sqrt{3}\gamma) \end{bmatrix} jsen(2\sqrt{3}t)$$

(g) encontre o estado inicial x_0 que corresponde a $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 0, 0, 0)$ e plote $x(t)$ no Octave (comando `initial`);

(h) idem $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0, 0, 1, 0)$ idem;

(i) idem $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 0, 1, 0)$ idem;

(j) idem $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) =$ sua escolha idem;

(k) comente as curvas obtidas.