Sinais e Sistemas - Trabalho 5 - Avaliação 9

Grupo 2

Leonardo Soares da Costa Tanaka

Matheus Henrique Sant Anna Cardoso

Theo Rudra Macedo e Silva

Rio de Janeiro
2022

1.) Um SLIT relaxado é descrito pela equação a diferenças $y_{k+2} + \alpha y_k = \beta u_{k+1} + \gamma u_k$.

Os dados (α, β, γ) são: G2: $(-1/4, 1, 2)$;

Utilizando as constantes do grupo, a equação torna-se: $y_{k+2} - \frac{1}{4}y_k = u_{k+1} + 2u_k$

(a) Encontrar a função de transferência $G(z)$;

$$y_{k+2} - \frac{1}{4}y_k = u_{k+1} + 2u_k$$

$$z^2Y(z) - z^2Y(0) - zY(1) - \frac{1}{4}Y(z) = zU(z) - zu(0) + 2U(z)$$

$$Y(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}}U(z) + \frac{z^2y(0) + zy(1) - zu(0)}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

$$G(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

(b) encontrar polos e zeros e verificar a estabilidade;

$$Polos => x^2 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) => p_1 = \frac{1}{2}; p_2 = -\frac{1}{2}$$

$$Zeros => x + 2 => z_1 = -2$$

O SLIT é estável nesse caso, porque seus pólos p_1 e p_2 estão no círculo unitário.

(c) encontrar as equações dinâmicas;

$$\begin{aligned} x_1[k] &= y[k] & &=> & x_1[k+1] &= y[k+1] = x_2[k] - p_1u[k] \\ x_2[k] &= y[k+1] + p_1u[k] & &=> & x_2[k+1] &= y[k+2] + p_1u[k] = \frac{1}{4}x_1[k] + (p_1+1)u[k+1] + 2u[k] \end{aligned}$$

$$p_1 = -1$$

$$x_1[k] = y[k] \quad => \quad x_1[k+1] = x_2[k] + u[k]$$
$$x_2[k] = y[k+1] - u[k] \quad => \quad x_2[k+1] = \frac{1}{4}x_1[k] + 2u[k]$$

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u[k]; \quad y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[k]$$

(d) calcular, iterativamente, os 10 primeiros valores y_k para entrada em degrau unitário;

Como o SLIT é relaxado, podemos assumir que y[0] = 0.

Basta agora encontrar valores iniciais o suficiente para obter o resto.

Sendo $u[k] = 1[k]$, a expressão fica $y[k+2] - \frac{1}{4}y[k] = 1[k+1] + 2u[k]$

$$Para\ k = -1:$$
$$y[1] - \frac{1}{4}y[-1] = 1[0] + 2u[-1]$$
$$y[1] = 1$$
$$Para\ k = 0:$$
$$y[2] - \frac{1}{4}y[0] = 1[1] + 2u[0]$$
$$y[2] = 3$$
$$Para\ k = 1:$$
$$y[3] - \frac{1}{4}y[1] = 1[0] + 2u[-1]$$
$$y[3] = \frac{13}{4}$$

Omitiremos os cálculos a seguir, mas o leitor é convidado a verificar a validade destes.

$$\begin{aligned}
y[0] &= 0\\
y[1] &= 1\\
y[2] &= 3\\
y[3] &= \frac{13}{4}\\
y[4] &= \frac{15}{4}\\
y[5] &= \frac{61}{16}\\
y[6] &= \frac{63}{16}\\
y[7] &= \frac{253}{64}\\
y[8] &= \frac{255}{64}\\
y[9] &= \frac{1021}{256}\\
y[10] &= \frac{1023}{256}
\end{aligned}$$

(e) usando transformada em Z, encontrar uma expressão analítica para a y_k;

$$Y(z) = \frac{z+2}{z^2 - \frac{1}{4}} U(z)$$

Ao dividir por z, vamos trabalhar com a seguinte expressão:

$$\frac{z+2}{z \cdot (z+\frac{1}{2}) \cdot (z-\frac{1}{2})} = \frac{r_1}{z+\frac{1}{2}} + \frac{r_2}{z-\frac{1}{2}} + \frac{r_3}{z}$$

Após calcular, os resíduos são: $r_1 = 3;\ r_2 = 5;\ r_3 = -8$

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \left(\frac{3z}{z+\frac{1}{2}} + \frac{5z}{z-\frac{1}{2}} - 8\right) \cdot U(z)\\
&Logo:\\
y[k] &= 3\left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot 1[k] + 5\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 1[k] - 8 \cdot 1[k]
\end{aligned}$$

(f) comparar os resultados iterativo e analítico.

Os resultados não são compatíveis dentro do intervalo de 3 vezes o desvio padrão.

G2: 2.) Eis um "Problema de Algibeira": um vendedor de queijos efetua apenas transações do tipo *vende metade de seu estoque mais meia peça.* Pede-se o número inicial de peças, x_0 se após a 6ª venda seus queijos acabam. Interpretar a filosofia de vendas por meio de uma equação a diferenças e calcular x_k, o saldo de

estoque após a k-ésima venda. Dar a resposta ao problema de algibeira.

Antes de mais nada, podemos pensar um pouco antes de tomarmos quaisquer decisões. É claro ser impossível realizar a venda de meia peça, portanto, é provável que seja uma correção, justamente para que não se venda meia peça. Veja o processo:

Processo: (Venda)

Após a venda k: c peças.

Logo antes: $c + 1/2$ peças.

Antes da venda k: $2 \cdot (c + 1/2) = \boxed{2c + 1}$ peças. Ou, após a venda $k - 1$.

Disso, podemos ir dando passos para trás até chegarmos ao momento anterior à primeira venda. Considerando, cada processo, uma venda e que antes de cada venda, teremos $2c + 1$ peças, sendo c o número de peças após essa venda:

Após a venda 6: 0

Após a venda 5: $2 \cdot 0 + 1 = 1$

Após a venda 4: $2 \cdot 1 + 1 = 3$

Após a venda 3: $2 \cdot 3 + 1 = 7$

Após a venda 2: $2 \cdot 7 + 1 = 15$

Após a venda 1: $2 \cdot 15 + 1 = 31$

Finalmente, antes da primeira venda, teremos: $2 \cdot 31 + 1 = 63$

Portanto, com passos simples, podemos resolver este problema.

Ainda assim, é possível resolvê-lo por métodos analíticos, com uma equação a diferenças, modelando da seguinte maneira: a quantidade de peças após a venda k (x_k) é a metade da anterior subtraída de $1/2$, da forma abaixo:

$$x_k = \frac{1}{2}x_{k-1} - \frac{1}{2}$$

Podemos realizar a transformada Z desta equação, obtendo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{x_k\} &= \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{x_{k-1}\} - \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{1[k]\} \\
X(z) &= \frac{1}{2}\left(z^{-1}X(z) + x[-1]\right) - \frac{z}{2z-2} \\
X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1]}{2} - \frac{z}{2z-2} \\
X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1](z-1)}{2z-2} - \frac{z}{2z-2} \\
X(z)\left[\frac{2z-1}{2z}\right] &= \frac{x[-1]z - x[-1] - z}{2z-2} \\
\frac{X(z)}{z} &= \frac{x[-1]z - x[-1] - z}{(z-1)(2z-1)} \\
\frac{X(z)}{z} &= \frac{x[-1]+1}{2z-1} - \frac{1}{z-1} \\
X(z) &= \frac{x[-1]+1}{2}\left(\frac{z}{z-1/2}\right) - \frac{1}{z-1}
\end{aligned}$$

A partir daqui, podemos fazer a transformada inversa:

$$x[k] = \frac{x[-1]+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1[k]$$

Podemos descobrir $x[-1]$ dado que sabemos $x[6]$:

$$\begin{aligned} x[6] = 0 &= \frac{x[-1]+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1[6] \\ 0 &= \frac{x[-1]+1}{128} - 1 \\ 128 &= x[-1]+1 \end{aligned}$$

$$\boxed{x[-1] = 127}$$

Temos tudo o que precisamos:

$$\begin{aligned} x[k] &= \frac{x[-1]+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1[k] \\ x[k] &= 64\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1[k] \end{aligned}$$

Aplicando para $k = 0$, teremos:

$$x[0] = 64 \cdot 1 - 1$$

$$\boxed{x[0] = 63}$$

Que foi o resultado obtido da primeira forma.

3.) Para a EDLIT $\tau\dot{y}(t) + y(t) = \beta u(t)$ com $y(0^-) = y_0$:

G2: $\tau = 2, \beta = 2$ **e** $y_0 = 1$**.**

Utilizando as constantes do grupo, a equação torna-se: $2\dot{y}(t) + y(t) = 2u(t)$ com $y(0^-) = 1$

(a) Calcular a resposta à rampa unitária por Laplace, e traçar com precisão o seu gráfico para $t \in [0,\, 5\tau]$;

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{2}y(t) = u(t); \quad y(0^-) = 1; \quad u(t) = t1(t)$$

$$sY(s) - y(0^-) + \frac{1}{2}Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(s + 1/2)Y(s) = \frac{s^2+1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s+1/2)} = \frac{r_1}{s^2} + \frac{r_2}{s} + \frac{r_3}{s+1/2}$$

$$r_1 = 2; \quad r_2 = -4; \quad r_3 = 5$$

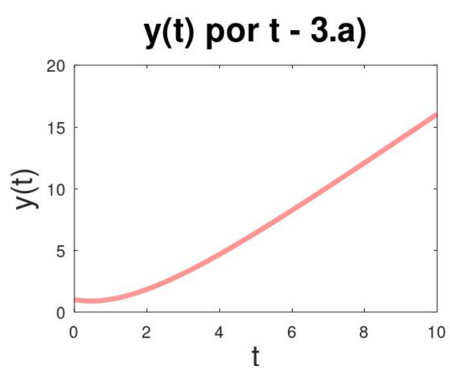
$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s} + \frac{5}{s+1/2}$$

$$y(t) = 2t\ 1(t) - 4\ 1(t) + 5e^{-\frac{1}{2}t}1(t)$$

```
%Questão 3.a)

% Intervalo
dt=0.001;

% Dados basicos
t=0:dt:10-dt; x=2*t-4+5*exp(-1/2*t);
plot (t, x, "r", "linewidth", 3);
title("y(t) por t - 3.a)", "fontsize", 20);
xlabel("t", "fontsize", 18);
ylabel("y(t)", "fontsize", 18);
```



(b) por Euler I, encontrar a equação que relaciona $y_k \leftrightarrow y(kT)$ e $u_k \leftrightarrow u(kT)$;

$$y(kT) = y(kT-T) + Tu(kT-T)$$
$$y[k] = y[k-1] + Tu[k-1]$$
$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + Tz^{-1}U(Z)$$
$$H_d(z) = \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} = T\frac{1}{z-1}$$

(c) resolvê-la por transformada Z para entrada em rampa;

(d) listar as sequências obtidas para $T = \tau, T = \tau/2, T = \tau/4$ e $T = \tau/8$;

(e) plotar os valores de $y(kT)$ no mesmo gráfico do ítem (a) e comparar as aproximações numéricas;

(f) repetir (b), (c), (d) e (e) para Newton.

4.) Para a EDLIT $\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) = \alpha\dot{u}(t) + \beta u(t)$ com CIs nulas:

Os dados $(\zeta,\ \omega_n,\ \beta,\ \alpha)$ **são G2:** $(1/3,\ 2,\ 3,\ -1)$**.**

Utilizando os dados do grupo, temos: $\ddot{y}(t) + \frac{4}{3}\dot{y}(t) = -\dot{u}(t) + 3u(t)$

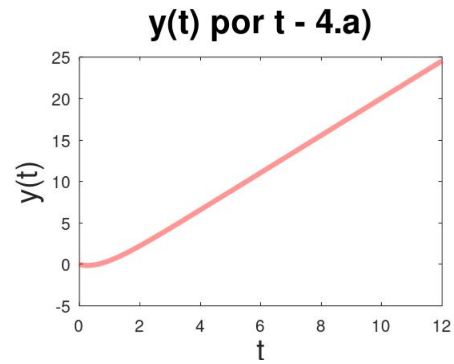
(a) para $u(t) = 1$, encontre, por Laplace, a solução e plote-a com precisão para $t \in [0,\ 8/(\zeta\omega_n)]$;

$$s^2Y(s) + \frac{4}{3}sY(s) = -sU(s) + 3U(s);\ U(s) = \frac{1}{s}$$
$$Y(s) = \frac{-1+\frac{3}{s}}{s^2+\frac{4}{3}s} = \frac{-s+3}{s^3+\frac{4}{3}s^2} = \frac{r_1}{s^2} + \frac{r_2}{s} + \frac{r_3}{s+4/3}$$
$$r_1 = \frac{9}{4};\ r_2 = \frac{-39}{16};\ r_3 = \frac{39}{16};$$
$$Y(s) = \frac{9}{4}\frac{1}{s^2} - \frac{39}{16}\frac{1}{s} + \frac{39}{16}\frac{1}{s+4/3}$$
$$y(t) = \frac{9t}{4}1(t) - \frac{39}{16}1(t) + \frac{39}{16}e^{\frac{-4t}{3}}1(t)$$

```
%Questão 4.a)

% Intervalo
dt=0.001;

% Dados basicos
t=0:dt:12-dt; x=9/4*t-39/16+39/16*exp(-4/3*t);
plot (t, x, "r", "linewidth", 3);
title("y(t) por t - 4.a)", "fontsize", 20);
xlabel("t", "fontsize", 18);
ylabel("y(t)", "fontsize", 18);
```



(b) por meio de variáveis x_1 e x_2 apropriadas, expressá-la como $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$ e $\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t)$;

(c) por Euler I, relacione $\boldsymbol{x}_k \leftrightarrow \boldsymbol{x}(kT)$, $y_k \leftrightarrow y(kT)$ e $u_k \leftrightarrow u(kT)$ (o procedimento para vetores é o mesmo e leva a $\boldsymbol{x}_k = A_d\boldsymbol{x}_{k-1} + B_d\boldsymbol{u}_k$ e $\dot{\boldsymbol{y}}_k = C_d\boldsymbol{x}_k + D_d\boldsymbol{u}_k$) e obtenha y_k;

(d) plota as sequências obtidas para $T = T_0 = 1/(\zeta\omega_n)$, $T = T_0/2$, $T = T_0/4$ e $T = T_0/8$ no gráfico de (a) e compare as aproximações numéricas.

5.) Seja EDVT $\dot{y}(t) + \alpha(t)y(t) = u(t)$ com $u(t) = 1(t)$. Quando um sinal contínuo p tende a uma constante para valores altos de t ($\lim p(t) = p_r =$ cte. para $t \to \infty$) esta é chamada de valor de regime do sinal.

(a) sem resolver a equação calcular o valor de regime y_r, supondo que $y(t)$ tende a ele;

(b) por Euler I, relacione as sequências $u_k \leftrightarrow u(kT)$ e $y_k \leftrightarrow y(kT)$;

(c) resolva, manualmente ou por meio de um script em alguma linguagem, para $T = 1, T = 1/2, T = 1/4$ e $T = 1/10$; a solução $y(t)$ deve ser aproximada para $t \in [0,\ 10]$;

(d) repetir (b) e (c) para Euler II.

Os dados $a(t)$a e $y(0^-)$ são: **G2:** $(t^2 - 1)/(t^2 + 1)$ e -1.