Sinais e Sistemas - Trabalho 4 - Avaliação 8

Grupo 2
Leonardo Soares da Costa Tanaka
Matheus Henrique Sant Anna Cardoso
Theo Rudra Macedo e Silva

Rio de Janeiro
2022

1.) Abaixo, use o número do grupo como o valor do parâmetro p. Entre no Octave com `B = [0 ; 0 ; 1], C = [1 0 0], A = [0 1 0 ; 0 0 1 ; (-2p) (-2p + 2) (-p + 2)]`**, e serão criadas as matrizes A, B e C de uma equação dinâmica. Com auxílio do** `help`**, pesquise e use os comandos** `eig` **para calcular os autovalores e** `ss` **para criar um sistema de espaço de estados.**

Matrizes relativas ao **Grupo 2 (p = 2)**:

`B = [0 ; 0 ; 1], C = [1 0 0], A = [0 1 0 ; 0 0 1 ; -4 -2 0]`

(a) Encontre o polinômio característico $\Delta(s)$ associado;

$$\Delta(s) = det(sI - A) = det\left(\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 4 & 2 & s \end{vmatrix} = s^3 + 2s + 4$$

(b) encontre a função de transferência $T(s)$ associada, manualmente e pelo Octave (descubra como);

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 4 & 2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{s^2+2}{-s^3-2s-4} & -\frac{s}{-s^3-2s-4} & -\frac{1}{-s^3-2s-4} \\ \frac{4}{-s^3-2s-4} & -\frac{s^2}{-s^3-2s-4} & -\frac{s}{-s^3-2s-4} \\ \frac{4s}{-s^3-2s-4} & \frac{2s+4}{-s^3-2s-4} & -\frac{s^2}{-s^3-2s-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{s^2+2}{-s^3-2s-4} & -\frac{s}{-s^3-2s-4} & -\frac{1}{-s^3-2s-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^3 + 2s + 4}$$

Bastou, agora, encontrarmos a função de transferência utilizando a ferramenta Octave. Para tal, foi feito o programa a seguir:

```
%% Dados Iniciais
A = [0 1 0 ; 0 0 1 ; -4 -2 0];
B = [0 ; 0 ; 1];
C = [1 0 0];
%% Carregando o pacote de controle
pkg load control;
%% Sistema de espaço de estados
sys = ss(A, B, C);
%% Função de transferência
SYS = tf(sys)
```

Tendo por saída, a mensagem com a função de transferência:

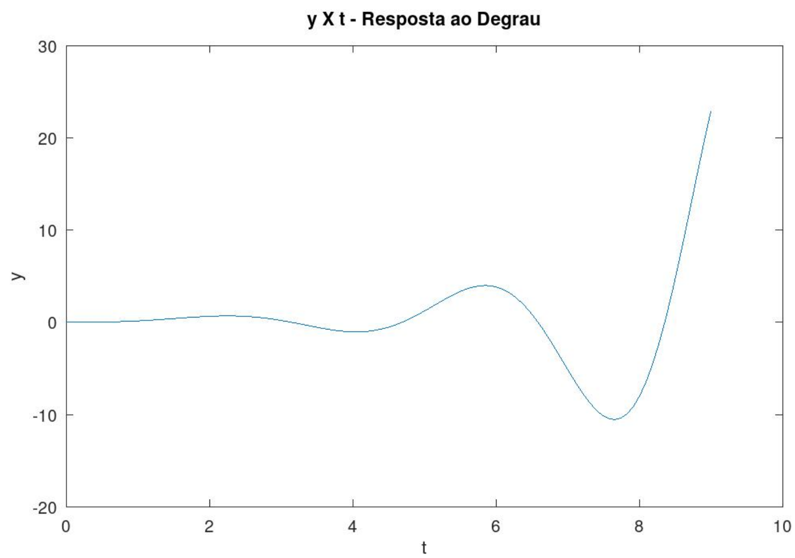
```
                  1
y1:  ----------------------------
     s^3 + 2.22e-16 s^2 + 2 s + 4
```

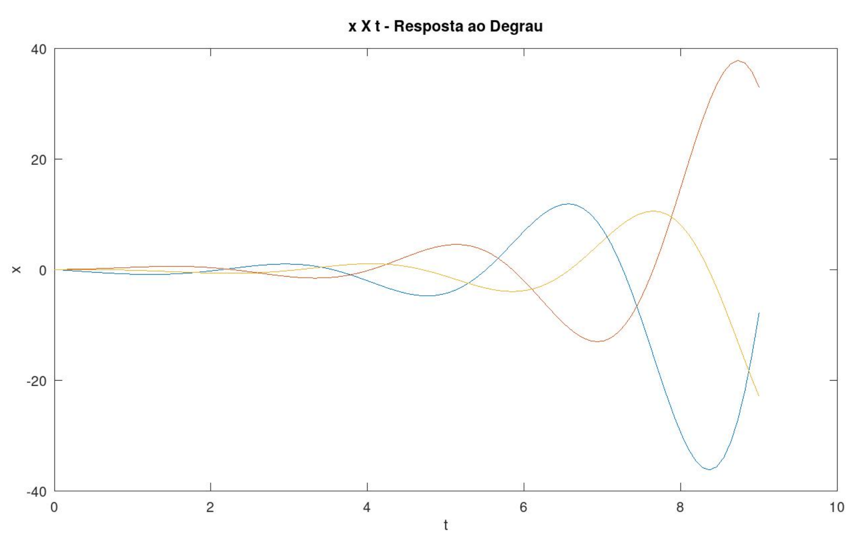
Perceba que existe um coeficiente maior que zero para o termo ao quadrado. Porém, este é desprezível. Ficamos, pelo Octave, com a função de transferência dada por:

$$y_1 = \frac{1}{s^3 + 2.22 \times 10^{-16} s^2 + 2s + 4} \approx \frac{1}{s^3 + 2s + 4}$$

(c) encontre a resposta ao degrau (comando `step`) para y e x;

Aqui, precisamos utilizar, novamente, o Octave.





(d) encontre manualmente os autovetores;

Vamos encontrar as raízes de $\Delta(s)$ que são os autovalores de A. Para isso, podemos utilizar a função `eig` no Octave para encontrá-los. Dessa forma, encontramos os seguintes valores:

$$\lambda_1 = -1.1795;$$
$$\lambda_2 = 0.5898 + j1.7445;$$
$$\lambda_3 = 0.5898 - j1.7445$$

Chamando de λ quaisquer uma das três raízes, teremos que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} \beta & = \lambda\alpha \\ \gamma & = \lambda\beta \\ -4\alpha - 2\beta & = \lambda\gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha & = \alpha \\ \beta & = \lambda\alpha \\ \gamma & = \lambda^2\alpha \end{cases}$$

Ficamos, com um padrão para os autovetores:

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$$

Temos, finalmente, como autovetores, os seguintes vetores:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.1795 \\ 1.39122 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5898 + j1.7445 \\ -2.6954 + j2.0578 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5898 + j1.7445 \\ -2.6954 - j2.0578 \end{bmatrix}$$

(e) escreva a REN seguindo o exemplo completo na nova versão dos slides094pwd.pdf a partir do slide 83;
(f) usando o comando `initial` encontre a REN (y e x) para x_0 colocado em um ponto da matriz V;
(g) idem para x_0 como uma combinação linear das colunas da matriz W.

2.) Um oscilador ideal com duas massas, molas e sem atritos e/ou amortecimentos é descrito por $\ddot{y}_1(t) + 2\omega_1^2 y_1(t) = \omega_1^2 y_2(t)$ e $\ddot{y}_2(t) + 2\omega_2^2 y_2(t) = \omega_2^2 y_1(t)$. Use a escolha $x_1 = y_1; x_2 = \dot{y}_1; x_3 = y_2; x_4 = \dot{y}_2$ para variáveis de estado, ou qualquer outra, e considere $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$.
G2: $\omega_0 = 2$.

(a) Encontre a matriz de estados A, seu polinômio característico $\Delta(s)$;

(b) os autovalores (faça $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \lambda_4;$ pares complexos conjugados) e, manualmente, os autovetores v_1, v_2, v_3, v_4;

(c) escreva a expressão da REN: $x(t) = \sum_{i=1}^{4} r_i v_i e^{\lambda_i t}$ onde os r_i são parâmetros de cada modo e os λ_i são os autovalores;

(d) usando a identidade de Euler, coloque a expressão acima em uma forma onde apareçam senos e co-seno;

(e) analisando esta última expressão, verifique que os pares r_1 e r_2, r_3 e r_4 são complexos conjugados;

(f) usando $r_1 = \alpha + j\beta, r_2 = \alpha - j\beta$, $r_3 = \gamma + j\delta, r_4 = \gamma - j\delta$ encontre a expressão final para $x(t)$;

(g) encontre o estado inicial x_0 que corresponde a $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 0, 0, 0)$ e plote $x(t)$ no Octave (comando `initial`);

(h) idem $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0, 0, 1, 0)$ idem;

(i) idem $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 0, 1, 0)$ idem;

(j) idem $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) =$ sua escolha idem;

(k) comente as curvas obtidas.