# Algoritmos de Otimização

## Aplicação de Algoritmos em funções específicas

M. Cardoso[1]

[1]Engenharia de Computação e Informação
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Novembro de 2024

# As funções

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f_1(x) = \sum_{i=0}^{5} \left(100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2\right) \\
\text{s.a.} \quad & x \in \mathbb{R}^7 \\
\min \quad & f_2(x) = \sum_{i=0}^{99} x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i \\
\text{s.a.} \quad & x \in \mathbb{R}^{100} \\
\min \quad & f_3(x) = (x_0^2 + x_1 - 11)^2 + (x_0 + x_1^2 - 7)^2 \\
\text{s.a.} \quad & x \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}
$$

$f_1(x) = \sum_{i=0}^{5} \left(100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2\right)$

Percebe-se que:

$$\left(100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2\right) \geq 0$$

Pois $(10(x_{i+1} - x_i^2))^2 \geq 0$ e $(1 - x_i)^2 \geq 0$.

$(1 - x_i = 0)$, logo $x_{i+1} = 1$ para zerar a primeira parcela.

O $x$ que garante o mínimo será $x^T = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$

$f_1(x) = \sum_{i=0}^{5} \left(100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2\right)$
Percebe-se que:

$$\left(100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2\right) \geq 0$$

Pois $(10(x_{i+1} - x_i^2))^2 \geq 0$ e $(1 - x_i)^2 \geq 0$.
$(1 - x_i = 0)$, logo $x_{i+1} = 1$ para zerar a primeira parcela.
O $x$ que garante o mínimo será $x^T = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$

$f_1(x) = \sum_{i=0}^{5} \left(100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2\right)$
Percebe-se que:

$$\left(100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2\right) \geq 0$$

Pois $(10(x_{i+1} - x_i^2))^2 \geq 0$ e $(1 - x_i)^2 \geq 0$.
$(1 - x_i = 0)$, logo $x_{i+1} = 1$ para zerar a primeira parcela.
O $x$ que garante o mínimo será $x^T = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$

Derivadas parciais e Hessiana.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_0} = 400x_0^3 - 400x_0x_1 + 2x_0 - 2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_6} = -200x_5^2 + 200x_6$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = 400x_i^3 - 400x_ix_{i+1} - 200x_{i-1}^2 + 202x_i - 2,$$

$$\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Derivadas parciais e Hessiana.

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2} = 1200x_i^2 - 400x_{i+1} + 202, \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_0^2} = 1200x_0^2 - 400x_1 + 2$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_6^2} = 200$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_{i-1}} = -400x_{i-1}, \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_{i+1}} = -400x_i, \forall i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^{99} x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i$$

Como a função:

$$x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i$$

já possui mínimo, o mínimo de $f_2$ será um vetor cujos valores serão o $x$ que garante o mínimo para $x^4 - 16x^2 + 5x$

Plotemos

# Analisando a função $f_2$

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^{99} x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i$$

Como a função:

$$x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i$$

já possui mínimo, o mínimo de $f_2$ será um vetor cujos valores serão o $x$ que garante o mínimo para $x^4 - 16x^2 + 5x$

Plotemos

## Analisando a função $f_2$

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^{99} x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i$$

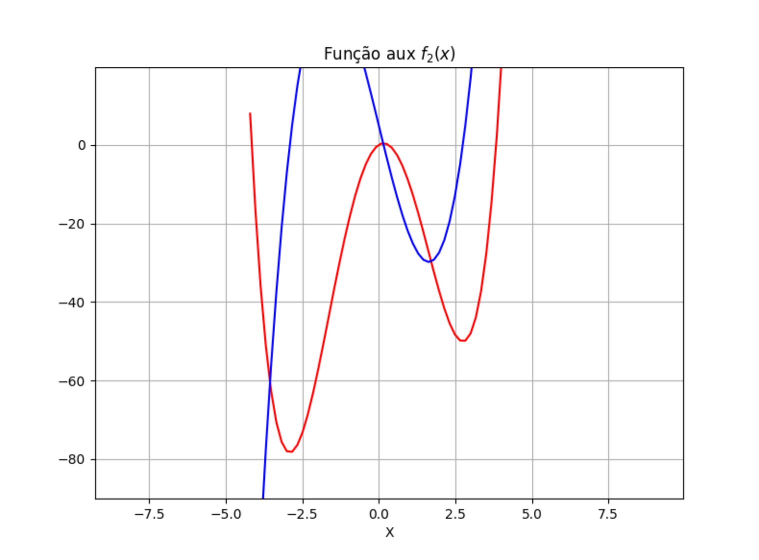
Como a função:

$$x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i$$

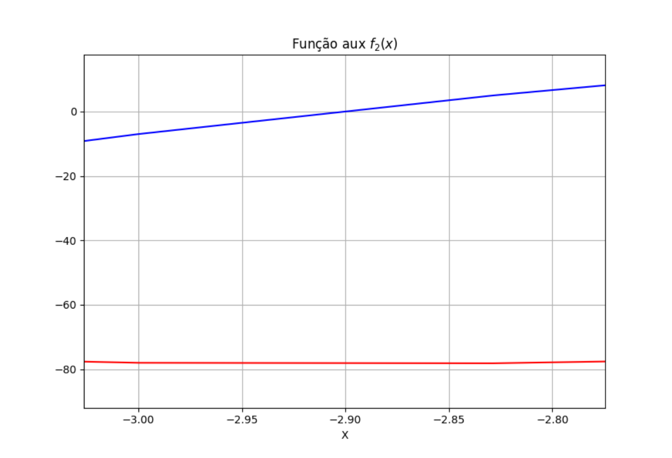
já possui mínimo, o mínimo de $f_2$ será um vetor cujos valores serão o $x$ que garante o mínimo para $x^4 - 16x^2 + 5x$

Plotemos

# Analisando a função $f_2$



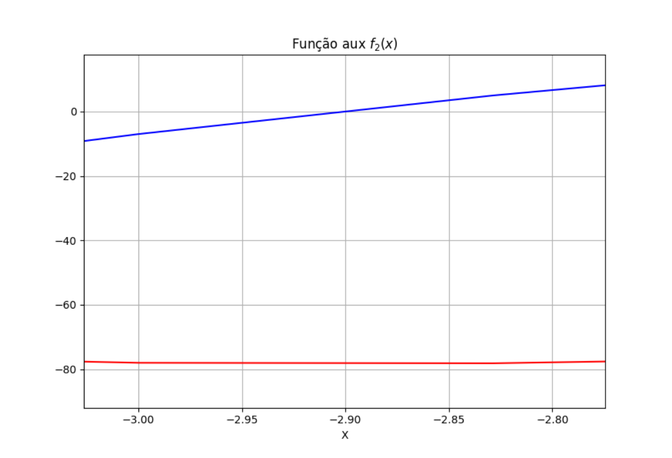
# Analisando a função $f_2$




Para que a função seja mínima, $x \approx -2.9$

$x^T \approx (-2.9 \; -2.9 \; \cdots \; -2.9)$

# Analisando a função $f_2$




Para que a função seja mínima, $x \approx -2.9$

$x^T \approx (-2.9 \ -2.9 \ \cdots \ -2.9)$

Gradiente e Hessiana

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_i} = 4x_i^3 - 32x_i + 5, \forall i \in \{0, 1, \cdots, 99\}$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i^2} = 12x_i^2 - 32, \forall i \in \{0, 1, \cdots, 99\}$$

# Analisando a função $f_3$

$f_3(x) = (x_0^2 + x_1 - 11)^2 + (x_0 + x_1^2 - 7)^2$

Soma de dois quadrados, $f_3(x) \geq 0$

$$\begin{cases} x_0^2 + x_1 - 11 = 0 \\ x_0 + x_1^2 - 7 = 0 \end{cases}$$

$$(x_0 - 3)(x_0^3 + 3x_0^2 - 13x_0 - 38) = 0 \qquad x_1 = 11 - x_0^2$$

$$x_a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad x_b = \begin{pmatrix} -3.779 \\ -3.280 \end{pmatrix} \quad x_c = \begin{pmatrix} -2.805 \\ 3.131 \end{pmatrix} \quad x_d = \begin{pmatrix} 3.584 \\ -1.845 \end{pmatrix}$$

$f_3(x) = (x_0^2 + x_1 - 11)^2 + (x_0 + x_1^2 - 7)^2$

Soma de dois quadrados, $f_3(x) \geq 0$

$$\begin{cases} x_0^2 + x_1 - 11 = 0 \\ x_0 + x_1^2 - 7 = 0 \end{cases}$$

$$(x_0 - 3)(x_0^3 + 3x_0^2 - 13x_0 - 38) = 0 \qquad x_1 = 11 - x_0^2$$

$$x_a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad x_b = \begin{pmatrix} -3.779 \\ -3.280 \end{pmatrix} \quad x_c = \begin{pmatrix} -2.805 \\ 3.131 \end{pmatrix} \quad x_d = \begin{pmatrix} 3.584 \\ -1.845 \end{pmatrix}$$

$f_3(x) = (x_0^2 + x_1 - 11)^2 + (x_0 + x_1^2 - 7)^2$
Soma de dois quadrados, $f_3(x) \geq 0$

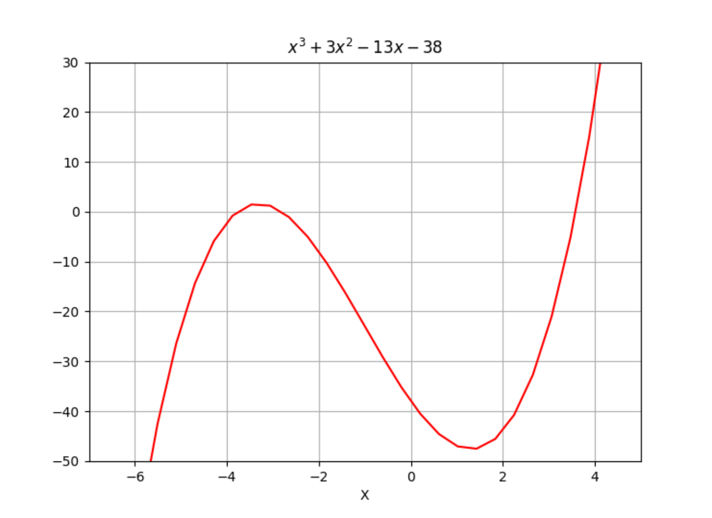
$$\begin{cases} x_0^2 + x_1 - 11 = 0 \\ x_0 + x_1^2 - 7 = 0 \end{cases}$$

$$(x_0 - 3)(x_0^3 + 3x_0^2 - 13x_0 - 38) = 0 \qquad x_1 = 11 - x_0^2$$

$$x_a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad x_b = \begin{pmatrix} -3.779 \\ -3.280 \end{pmatrix} \quad x_c = \begin{pmatrix} -2.805 \\ 3.131 \end{pmatrix} \quad x_d = \begin{pmatrix} 3.584 \\ -1.845 \end{pmatrix}$$

# Analisando a função $f_3$

Plotando a função $x^3 + 3x^2 - 13x - 38 = 0$



Gradiente e Hessiana

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_0} = 4x_0^3 + 4x_0x_1 - 42x_0 + 2x_1^2 - 14$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 4x_1^3 + 4x_0x_1 - 26x_1 + 2x_0^2 - 22$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_0^2} = 12x_0^2 + 4x_1 - 42$$
$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1^2} = 12x_1^2 + 4x_0 - 26$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_0 \partial x_1} = 4(x_0 + x_1)$$
$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_0} = 4(x_0 + x_1)$$

# Testes - Gradiente